UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE FILOSOFÍA

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA PROPOSICIONAL

TEORÍA Y EJERCICIOS

(Trabajo de ascenso para optar a la categoría de profesor asistente)

Wilfredo Mañá

Caracas, noviembre de 2001

ÍNDICE

PRÓLOGO

En el presente trabajo se recoge la experiencia reunida en cursos de introducción a la lógica en los cuales una parte sustantiva del programa estaba dedicada a estudiar los elementos de la lógica simbólica. Al acopio de ejercicios, compuestos especialmente para aplicar las nociones fundamentales, se sumó, con el tiempo, la percepción de algunas dificultades típicas de comprensión que exigieron del docente un cierto método en la definición de los conceptos y en la formulación de ejemplos. En este sentido, la primera parte de este problemario no pretende ni mucho menos valer por sí sola como exposición de los temas sino tan sólo poner a mano del usuario, sucintamente, los fundamentos teóricos y metodológicos necesarios para la ejercitación propuesta.

En la primera parte, y siempre en beneficio de la comprensión (o, al menos, de una "primera" comprensión) hemos evitado en lo posible mencionar o desarrollar los aspectos problemáticos de algunas de las definiciones (los conceptos de proposición o de verdad, por ejemplo), así como hemos insistido en el uso de ejemplos que sugirieran eficazmente el sentido de las estructuras lógicas, disfrazando su pura formalidad, por decirlo así. Con esto esperamos facilitar la lectura a aquellos a quienes se dirige el trabajo aunque nos obligue a obviar nuestros propios escrúpulos de precisión y completitud.

PRIMERA PARTE:

ELEMENTOS DE LÓGICA PROPOSICIONAL

1. EL LENGUAJE Y LAS PROPOSICIONES

El lenguaje natural (el castellano en nuestro caso) sirve para distintos propósitos de sus usuarios. Utilizamos el lenguaje de diferentes maneras según nombremos algo, demos una orden, manifestemos una emoción, contemos una historia fantástica o tratemos de describir un hecho.

Cuando nuestra intención es comunicar mediante el lenguaje un determinado estado de la realidad o la ocurrencia de algún hecho, formulamos una *proposición.* La correspondencia entre dicha proposición y la porción de realidad a la que se refiere e intenta describir determina su valor veritativo. Si existe correspondencia, decimos que la proposición es verdadera; de otro modo, diremos que es falsa. Verdad y falsedad son los dos valores veritativos asignables a una proposición[1]. Tratándose de expresiones lingüísticas cuya intención es distinta a la de representar o describir un estado de cosas real, no tiene sentido hablar de verdad o falsedad.
Así:

1. Llueve
2. Baja la temperatura
3. Bolívar nació en París

son proposiciones, mientras que expresiones como

[1] Desde el punto de vista de la lógica bivalente clásica. Las lógicas plurivalentes admiten tres o más valores veritativos.

4. Espérame
5. ¿Qué hora es?
6. El *Tractatus* de Wittgenstein

no admiten ser consideradas desde el punto de vista de su verdad.

Las proposiciones pretenden referirse a objetos externos y presuponen tanto la posibilidad de ser comprendidas como la de ser aceptadas como verdaderas por el oyente. Se exponen, por decirlo así, a ser juzgadas públicamente y el veredicto que reciben es su valor veritativo. Esto no ocurre en los ejemplos 3-5, donde el hablante usa el lenguaje con otras intenciones -(p.e. que alguien haga algo, obtener una información o titular un escrito).

Existen, o se habla como si existieran, referentes externos dirigiéndose a los cuales el oyente puede decidir acerca de la correspondencia entre ellos y la expresión "propuesta".

Debe distinguirse entre una proposición y su expresión lingüística concreta. La proposición es el acto por el cual el hablante da cuenta de un hecho real, pero esto puede hacerse de diferentes maneras. Supongamos el siguiente pasaje:

> X es el asesino de V. Puesto que él lo hizo, no dirá en la audiencia que conocía a V.

La primera oración y la primera parte de la segunda son equivalentes desde el punto de vista del hecho al que se refieren. Son, en definitiva la misma proposición. Algunos autores prefieren hablar de "proposición", cuando aluden al compromiso de verdad de lo que se dice, y de "enunciado" cuando se trata de la formulación concreta de este compromiso. Es frecuente, sin embargo, el uso indistinto de ambos términos.

Veamos otro ejemplo:

> Caracas tiene un clima agradable y un entorno natural encantador. Sin embargo, ha crecido desordenadamente sin seguir un plan urbanístico digno de ese nombre. Tráfico congestionado e inseguridad son parte de la vida de sus habitantes.

Aquí se expone una serie de características de Caracas. Se reconocen las siguientes proposiciones (la referencia a los siguientes hechos):

P: Caracas tiene clima agradable
Q: Caracas tiene un entorno natural encantador
R: Caracas ha crecido desordenadamente
S: Caracas ha crecido sin seguir un plan urbanístico
T: Caracas es una ciudad de tráfico congestionado
U: Caracas es una ciudad insegura

Recordemos que la proposición difiere de la enunciación concreta. En el caso de "T" y "U", se ha resumido el "núcleo" lógico de lo que se quiere decir en forma de características de la ciudad y no de la vida de sus habitantes. Dependiendo de lo que el análisis lógico quisiera mostrar (por ejemplo, la validez de razonamientos acerca de la psicología del caraqueño), también serían perfectamente reconocibles las proposiciones "los habitantes de Caracas llevan una vida insegura" y "los habitantes de Caracas viven sometidos a un tráfico automotor congestionado". Es la perspectiva del análisis la que determina las proposiciones relevantes del discurso. Lo fundamental sigue siendo que sea discernible en efecto una correspondencia entre éstas y los *hechos* a los que se refieren.

Es propio de las proposiciones el aparecer interrelacionadas a través de ciertos dispositivos lógicos sobre los que trataremos a continuación.

2. CONECTIVAS

2.1. Concepto de conectiva

Sean dos proposiciones:

1. El carro funciona. (F)
2. El carro tiene gasolina. (V)

Supongamos que la proposición 1 es falsa y que la 2 es verdadera. Observemos las siguientes transformaciones:

3. El carro no funciona. (V)
4. El carro no tiene gasolina. (F)
5. Juan dijo que el carro funciona. (?)
6. Juan cree que el carro no tiene gasolina. (?)
7. El carro tiene gasolina pero no funciona. (V)
8. Si el carro funciona, entonces tiene gasolina. (V)

Las combinaciones obtenidas siguen siendo proposiciones, esto es, siguen teniendo valor veritativo, aunque éste pueda haber variado. Las expresiones que producen este tipo de transformaciones se llaman *conectivas* y se caracterizan por formar una nueva proposición con nuevas condiciones de verdad.

En algunos casos, el valor veritativo del compuesto obtenido puede determinarse a partir del dato de los valores veritativos de sus componentes simples (como en las proposiciones 1,2,5 y 6). En otros, como en 3 ó 4, la transformación ha cambiado las condiciones de verdad de un modo que exige, para la verificación del compuesto, otras informaciones adicionales (p.e., sé que es falsa la proposición 1, pero tal vez no que Juan la haya formulado; sé que debe ser falso que el carro no tiene gasolina porque sé que es verdad lo contrario, pero no puedo averiguar lo que Juan cree respecto a ello).

Una proposición sin conectivas es una proposición *simple o atómica*, mientras que la que presenta una o más de aquéllas es una proposición *compuesta o molecular*.

Las conectivas que interesan a la lógica proposicional son las llamadas *conectivas extensionales* (también llamadas *alético-funcionales* o *veritativo-funcionales*), que permiten la deducción del valor veritativo del compuesto a partir del de sus componentes. Así, el valor veritativo de un enunciado simple depende de su adecuación al estado del mundo al que se refiere y se determina por procedimientos extra-lógicos (que competen, por ejemplo, a las ciencias fácticas), mientras que el valor veritativo de los enunciados compuestos se determina lógicamente, como se ha dicho, partiendo del de sus enunciados simples y observando las condiciones de verdad que rigen para las conectivas que lo forman.

Una conectiva puede aplicarse a proposiciones simples o a proposiciones que ya son compuestas. Debe, sin embargo, tenerse en cuenta que, no importa cuán compleja sea una proposición (es decir, no importa cuántos términos vinculados por diferentes conectivas tenga), ésta siempre queda definida por *una* conectiva.

Aquí nos ocuparemos de cinco conectivas extensionales: la *negación*, la *conjunción*, la *disyunción*, el *condicional* y el *doble condicional*.

2.2. *Símbolos*

Antes de proseguir, necesitaremos adoptar un conjunto de símbolos que sirvan para representar los elementos que estamos definiendo. Necesitaremos tres clases de símbolos: los que designan a las proposiciones simples, los que designan a las conectivas y los que sirven para agrupar términos en las fórmulas más complejas (paréntesis, corchetes, llaves).

Convencionalmente, las proposiciones simples se representan con letras del final del alfabeto (P, Q, R, etc.), mientras que para las conectivas utilizamos los siguientes signos especiales[1]:

Negación:	$\sim$ ($\neg$, $-$)
Conjunción:	$\wedge$ ($\bullet$, &)
Disyunción inclusiva:	$\vee$
Disyunción exclusiva:	$\underline{\vee}$
Condicional:	$\rightarrow$ ($\supset$)
Doble condicional:	$\leftrightarrow$ ($\equiv$)

Como veremos a continuación, estos símbolos representan relaciones lógicas que el lenguaje natural representa de muy diversas maneras y con grados de precisión muy diferentes, pues cuando simbolizamos, no nos

[1] La simbología varía de un autor a otro. Entre paréntesis se muestran otras posibilidades.

limitamos a sustituir mecánicamente símbolos equivalentes entre ambos lenguajes, sino que intentamos captar, en la complejidad y sutileza del lenguaje natural, tanto la referencia a los hechos (consignados en las proposiciones atómicas) como las estructuras que la lógica estudia a través de las conectivas.

2.3. Conectivas extensionales

Empezaremos viendo las propiedades de cada una de las conectivas extensionales y luego explicaremos el procedimiento de simbolización y algunas aplicaciones para proposiciones complejas donde figura más de una conectiva.

2.3.1. Negación

Es la más sencilla de las conectivas. Cuando se aplica a un enunciado, *invierte su valor veritativo*. Si la proposición "Juan vive en Caracas" es falsa, entonces será verdad el compuesto "Juan *no* vive en Caracas". Simbólicamente, si

P: Juan vive en Caracas. (F)

su negación se representará:

~P: Juan no vive en Caracas. (V)

El adverbio "no" proporciona sin duda el medio más simple para negar. Igualmente las construcciones que emplean "ni..., ni,..." (uniendo dos negaciones por conjunción). También hay otras palabras que cumplen función negativa ("jamás", "nunca"), así como expresiones que se refieren directamente al valor veritativo de los enunciados ("no es cierto que", "es falso que", etc.). Sin embargo, podemos advertir la presencia de negaciones en pasajes donde no aparezcan términos específicamente negativos. Veamos:

> Si el desempleo aumenta, bajará el consumo. Sin embargo, el empleo se mantiene estable. En consecuencia, el consumo también.

Para comprender lo que aquí se dice no hacemos otra cosa que interpretar lógicamente la relación entre dos enunciados y sus negaciones. Mantenerse el empleo estable es una negación del aumento del desempleo, así como la frase "el consumo también" equivale, en este contexto a "el consumo también se mantendrá estable" y, por lo tanto, niega la proposición "bajará el consumo". Simbolizando, si

> P: El desempleo aumenta.
> Q: Baja el consumo.

Entonces:

> ~P: El empleo se mantiene estable (no aumenta).
> ~Q: El consumo se mantiene estable (no baja).

Observemos que podemos interpretar como negaciones de la proposición "P" tanto la proposición "el empleo se mantiene estable" como la proposición "el empleo disminuye" En estos casos, la negación no nos ofrece un contenido concreto.

A diferencia de lo que ocurre con otras conectivas, la negación se aplica a una sola proposición (simple o compleja) y no tiene, por tanto, la propiedad de enlace que sugiere el concepto.

2.3.2. Conjunción

La conjunción equivale a la aseveración simultánea de varios enunciados (simples o no). *Una conjunción es verdadera sólo cuando todos sus miembros lo son*. "Bolívar nació y murió en Caracas" es una conjunción falsa formada a partir de las proposiciones "Bolívar nació en Caracas" y "Bolívar murió en Caracas", la segunda de las cuales es falsa. Si

P: Bolívar nació en Caracas. (V)
Q: Bolívar murió en Caracas. (F)

Entonces

$P \wedge Q$: Bolívar nació y murió en Caracas. (F)

La forma más usual de la conjunción en castellano es la partícula "y". Sin embargo, hay una notable variedad de posibilidades de interpretación. "Además", "también", son términos que suelen anunciar nuevas proposiciones que se añaden a las ya expresadas. Las formas "pero", "sin embargo", "no obstante", "aunque" son conjunciones mediante las cuales se indica una cierta oposición entre las proposiciones enunciadas ("Juana es bonita pero no muy inteligente", "aunque trabaja, no gana dinero", etc.).

En última instancia, basta que las diferentes proposiciones provengan del mismo hablante o del mismo texto para que se las entienda como simultáneas en el mismo "espacio lógico" y, por tanto, como miembros de una conjunción. Por ejemplo:

> X es un alumno brillante de esta universidad. Ha estudiado ingeniería y administración obteniendo en ambas la mención cum laude.

Pueden reconocerse las siguientes proposiciones simples:

P: X es un alumno de esta universidad.
Q: X es un alumno brillante.
R: X ha estudiado ingeniería.
S: X ha estudiado administración.
T: X ha obtenido la mención cum laude en ingeniería.
U: X ha obtenido la mención cum laude en administración.

El texto hace referencia, a través de determinadas expresiones, a todos estos hechos, comprometiéndose con la verdad de todos y cada uno de ellos. La expresión simbólica de la conjunción sería:

$$P \wedge Q \wedge R \wedge S \wedge T \wedge U$$

Como se ve, la conjunción puede unir más de dos proposiciones. La asociación de términos dentro de una conjunción de tres o más es lógicamente superflua aunque no incorrecta

$$(P \wedge Q) \wedge (R \wedge S) \wedge (T \wedge U) \equiv P \wedge (Q \wedge R) \wedge (S \wedge T) \wedge U$$ [2]

En todo caso el requisito lógico es el mismo: para que la conjunción sea verdadera deben serlo todos sus términos.

2.3.3. Disyunción

2.3.3.1. Disyunción inclusiva

La disyunción propone una alternativa entre términos. Si ante el hecho, por ejemplo, de que nuestra computadora no funciona alguien asegura: "o no hay energía eléctrica o la computadora está averiada", está diciendo que alguno de los miembros de esta proposición compleja, *aunque no sabe cuál*, es verdadero.

P: Hay energía eléctrica.
Q: La computadora está averiada.
$\sim P \vee Q$: No hay energía eléctrica o la computadora está averiada.

Si averiguáramos luego que sí hay energía eléctrica y que la computadora no tiene falla, esto es, que no es el caso *ninguno* de los miembros de la disyunción, ésta resultaría falsa.

[2] El símbolo $\equiv$ se lee "equivale a".

La interpretación de la materia de este ejemplo nos permite aceptar también la posibilidad de que *ambas* proposiciones fueran verdaderas (que además de no haber energía eléctrica la máquina tiene efectivamente un problema). Decimos entonces que se trata de una disyunción *inclusiva* en la cual puede ser el caso alguno de los dos términos por separado o ambos al mismo tiempo. La disyunción inclusiva *es falsa sólo cuando todos sus términos son falsos.*

La disyunción inclusiva, como la conjunción, permite la asociación de más de dos términos Si un mecánico nos dijera: "a juzgar por los síntomas, este carro tiene un problema de alternador, de bobina o un seguro eléctrico activado", este amplio diagnóstico se confirmaría con ser el caso una o más de las tres fallas.

P: El carro tiene problema de alternador.
Q: El carro tiene problema de bobina.
R: El carro tiene un seguro eléctrico activado.

$P \vee Q \vee R$: El carro tiene un problema de alternador, de bobina o un seguro activado.

Si no se tratara de nada de esto, estaríamos en presencia de un mal mecánico y de una disyunción falsa. También aquí la asociación de términos es superflua:

$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$$

2.3.3.2. Disyunción exclusiva

Pero la materia de una disyunción como "Juan está viviendo en Perú o en Ecuador" no permitiría la interpretación inclusiva, pues se trata de hechos que obviamente no pueden darse al mismo tiempo.

P: Juan vive en Perú.

Q: Juan vive en Ecuador.

$P \veebar Q$: Juan vive en Perú o en Ecuador.

Si Juan vive en Perú, entonces necesariamente *no* vive en Ecuador. Si uno de los términos es verdadero, entonces el otro es necesariamente falso. Dicho de otro modo, *la disyunción exclusiva es verdadera cuando el valor veritativo de sus dos términos es distinto*.

En castellano, cualquier disyunción se indica con la partícula "o", no habiendo medio formal de distinguir entre la variante exclusiva e inclusiva, salvo ciertas expresiones que subrayen que se trate de una de ellas en particular ("una de dos", "o bien... o bien...", "uno de ellos o ambos", etc.). En caso de no haberse declarado explícitamente, sólo la materia de la que se trate nos permitirá decidir el carácter de la conectiva.

También nos hallamos en presencia de una disyunción cuando se declara, en referencia a dos o más proposiciones previamente formuladas, algo como: "en cualquiera de estos casos", "de darse alguno de estos hechos", etc.

2.3.4. Condicional

Supónganse dos proposiciones:

P: Juan tiene fiebre.

Q: Juan está enfermo.

Pueden y suelen presentarse estos hechos bajo la siguiente interpretación lógica

$P \rightarrow Q$: Si Juan tiene fiebre, entonces está enfermo.

Con lo cual se dice que, en caso de ser verdad la primera proposición (en caso de darse el hecho que ella representa), será verdad también la segunda. Es de observar que el condicional funciona “en un solo sentido”. Apelando a la materia del ejemplo, es claro que si alguien tiene fiebre inferimos inmediatamente que está enfermo, pero si sabemos que alguien está enfermo, no tiene por qué seguirse de ello que tenga fiebre.

Llámese al primer término del condicional *antecedente* o *condición suficiente*, mientras que el segundo es el *consecuente* o *condición necesaria*.

Basta que sea verdad el antecedente (condición suficiente) para que sea verdad el consecuente. Pero si no se da el consecuente (la condición necesaria), no puede darse el antecedente. Si un carro funciona, sabemos inmediatamente que tiene gasolina (es suficiente que funcione para que sepamos que tiene gasolina). Sin embargo, si tiene gasolina, no podemos inferir de ello que funciona (tener gasolina es necesario *pero no suficiente*).

En cambio, si no tiene gasolina, deducimos sin duda que no funciona. En general, entendemos que todo lo que es el caso implica la ocurrencia de todas sus condiciones necesarias y que faltar cualquiera de ellas impide que el hecho en cuestión se produzca.

En cuanto a sus condiciones de verdad, *el condicional sólo es falso cuando su antecedente es verdadero y su consecuente es falso.* Veamos esto en detalle con un ejemplo:

P: Juan es venezolano.
Q: Juan es caraqueño.

¿Cuál de las dos proposiciones, en caso de ser verdadera, asegura automáticamente la verdad de la otra? Esto es ¿cuál es la condición suficiente?

Obviamente, el hecho de ser caraqueño implica inmediatamente el de ser venezolano. Diríamos: "si alguien es caraqueño, entonces es venezolano", lo que en símbolos resultaría (para el esquema de abreviación dado):

$Q \rightarrow P$

Dijimos que esta proposición compleja será verdadera siempre que no ocurra que su antecedente es verdadero y su consecuente falso. Si examinamos las diferentes combinaciones, tenemos:

V-V: Juan es, efectivamente, caraqueño *y* venezolano.
F-F: Juan *no* es caraqueño *ni* venezolano (es extranjero, digamos).

F-V: Juan no es caraqueño, pero es venezolano (por ejemplo, andino)

Ninguna de estas tres posibilidades contradice nuestro condicional. En la primera, se cumple lo que se prometía; en las otras dos, no dándose el antecedente, podríamos decir que nuestro condicional "no se hace responsable" de lo que suceda con el consecuente. Lo que es totalmente imposible, es:

V-F: Juan es caraqueño pero no es venezolano

En el lenguaje natural reconocemos los condicionales en construcciones que los presentan en su orden normal (primero el antecedente y luego el consecuente):

Si ladra, no muerde.
Cuando llora, tiene hambre.
Siempre que llueve, se resfría.
Si hay vida, hay agua.

Es corriente también empezar mencionando el tipo de una de las condiciones:

Sólo si la batería está bien cargada podrás comunicarte.
Este tipo de planta crece sana únicamente si se riega todos los días.
Es indispensable ser venezolano de nacimiento para ser presidente.
Basta comprobar que no tiene gasolina para saber que no arrancará.

En los tres primeros condicionales se menciona la condición necesaria; en el cuarto, la suficiente. No hay regla fija respecto al orden en que se presentan los términos. Obviamente, puede decirse, con el mismo significado, "es necesario ser socio para entrar" o "para entrar es necesario ser socio"; " basta que llueva para que me duela la espalda" o "para que me duela la espalda, basta que llueva". La posición de las condiciones puede variar en la expresión natural, pero no en la fórmula simbólica.

Debe tenerse presente que el condicional establece unas determinadas condiciones de verdad entre sus términos y que la relación entre el antecedente y el consecuente no representa ni un vínculo causal ni un orden temporal. Antes bien, es frecuente que las relaciones temporales y causales queden invertidas en la interpretación. En los ejemplos anteriores, aunque la enfermedad es causa de la fiebre, o la gasolina lo es de que funcione el carro, el condicional las presenta como condiciones necesarias, esto es, como consecuentes.

Veamos el siguiente caso. El condicional

Es necesario que haya agua para que haya vida

se simbolizará:

$Q \rightarrow P$

donde:

P: hay agua
Q: hay vida

Si tratamos de leerlo mencionando la condición suficiente se produce una curiosa ilusión:

Basta que haya vida para que haya agua.

Esta formulación no es, desde luego, usual. Vale la pena considerarla para insistir en que la suficiencia o necesidad de las condiciones es de tipo lógico (esto es, se refiere a sus valores veritativos). En esta proposición se tiene la impresión de que la vida *causa* la presencia del agua. Lo que se dice en realidad es que basta que sea verdad que hay vida para que se infiera inmediatamente que hay agua. Esta intuición de vínculo causal puede generar malentendidos mayores: si una proposición como "si cae un rayo, se escucha un trueno" se enuncia mencionando la condición necesaria: "es necesario que se escuche un trueno para que caiga un rayo", se tornará ininteligible. Lo que quiere decirse es que si no es verdad que ha habido un trueno, entonces no puede ser verdad que haya caído un rayo. El condicional relaciona los valores veritativos de los términos pero no dice que el trueno sea factor o "ingrediente" para la producción material del rayo. La articulación lógica y la ontológica no son paralelas.

2.3.5. Doble condicional

Esta conectiva convierte la relación entre sus términos en una implicación mutua: ninguno de ellos puede ser verdadero sin que lo sea automáticamente el otro y, del mismo modo, si alguno es falso, lo será necesariamente su "compañero". *El doble condicional es falso cuando los valores veritativos de sus términos son distintos.* A diferencia del condicional (que funciona "en un solo sentido": si P, entonces Q, pero si Q, no necesariamente P) el doble condicional es "simétrico" y equivale, de hecho, a la conjunción de los dos condicionales: $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

Supongamos dos hechos representados por las siguientes proposiciones:

P: El producto X ha sido fabricado por la casa N

Q: El producto X lleva el logotipo de la casa N

Al interpretar la relación entre ellos como un doble condicional diremos algo como:

$P \leftrightarrow Q$: El producto X ha sido fabricado por N si y sólo si lleva su logotipo

y lo que queremos significar es que cualquiera de esos hechos es "señal" del otro: es imposible que un producto de N no tenga el logo distintivo y es imposible que un producto con dicho logo haya sido fabricado por alguien distinto a la casa N.

La interpretación mediante el doble condicional es menos frecuente que en el caso de los condicionales, del mismo modo que sus expresiones en el lenguaje natural ("si y sólo si", "es condición necesaria y suficiente", "implica doblemente") son más una convención del uso lógico o matemático que un giro del habla común. Por ello, esta conectiva representa justamente las relaciones de identidad.

2.4. Simbolización de proposiciones complejas

2.4.1. Problemas de interpretación

El conjunto de símbolos y condiciones que hemos visto nos faculta para intentar la interpretación lógica de expresiones del lenguaje natural.

No siempre es fácil reconocer el núcleo lógico de estas expresiones, puesto que, en definitiva, éste depende, en parte, de los hechos a los que se refiere, pero, ante todo, de las intenciones y del modo en que el hablante, a su vez, ha interpretado estos hechos. Con frecuencia, el usuario del lenguaje elabora su discurso sin lo que podríamos llamar "conciencia lógica", esto es, sin discernir con claridad ni el conjunto de proposiciones básicas en que se apoya ni la relación que entre ellas establecen las conectivas. Lo que se dice puede tener sentido, sólo que éste quizá no sea inmediatamente evidente. Además, el conocimiento del mundo del que parte dicho discurso puede ser erróneo o simplemente diferir del nuestro. En cualquier caso, el análisis lógico debe atenerse exclusivamente a la expresión lingüística (textual u oral) que se le propone sin entrar en problemas ontológicos ni psicológicos. El objeto del análisis lógico es un lenguaje, no la realidad.

Una frase como "si el carro tiene gasolina, entonces funciona" tiene una forma de condicional fácilmente reconocible, aunque no estemos de acuerdo en el modo en el que relaciona los hechos a los que se refiere. El problema de la relación entre los hechos del mundo (qué hechos son necesarios para que se produzcan otros, qué hechos son causa de otros, etc.) compete a las ciencias fácticas; la lógica se ocupa sólo del modo en que las proposiciones y razonamientos que los representan han sido estructurados.

2.4.2. Simbolización

Veamos el procedimiento típico. Por ejemplo, si se nos dice:

> Para que votes es necesario que seas venezolano y mayor de edad

Cabe reconocer en esta información una relación condicional entre el acto de votar y dos requisitos exigidos para ello (por tanto, condiciones necesarias). El primer paso es siempre reconocer e identificar simbólicamente con letras las variables o proposiciones atómicas (sin conectivas).

P: Votas
Q: Eres venezolano
R: Eres mayor de edad

La estructura lógica de la proposición compleja es la siguiente:

$$P \rightarrow (Q \wedge R)$$

Y es equivalente a:

$$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$$

Es indispensable atender al papel de los símbolos de agrupamiento. No es posible que una fórmula tenga más de una conectiva y no figuren en ella paréntesis, corchetes o llaves que indiquen con claridad el nivel lógico de cada una de ellas, a menos que se establezca una convención previa de dominancia de una conectiva sobre otra. Sin esta convención, no es interpretable, por ejemplo, la siguiente sucesión de signos:

$$P \rightarrow Q \wedge R$$

Cabría preguntarse si se trata de una conjunción que tiene como uno de sus miembros un condicional, o de un condicional cuyo consecuente es una conjunción.

La negación no requiere paréntesis para el término negado cuando afecta a una proposición simple. Se entiende sin ambigüedad:

$$\sim P \rightarrow Q$$

que se lee "si no P, entonces Q", siendo superflua la acotación

$$\sim (P) \rightarrow Q$$

En fórmulas más complejas utilizamos paréntesis, corchetes y llaves, correspondiendo este orden al grado lógico de las expresiones agrupadas. Así:

$$\{[P \rightarrow (Q \wedge R)] \leftrightarrow \sim R\} \vee \sim P$$

es una disyunción inclusiva cuyos términos son un doble condicional y una negación. El doble condicional, a su vez, tiene como términos un condicional y una negación. Este último condicional tiene como consecuente una conjunción.

Debe evitarse el error de incluir la negación en el esquema de abreviación. Supongamos:

> Es necesario que no tenga antecedentes penales para que lo acepten en la institución

el esquema es:

> P: Tiene antecedentes penales (sin negación)
> Q: Lo aceptan en la institución

y la simbolización:

$$Q \rightarrow \sim P$$

La negación de términos complejos, por su parte, también tiene sus dificultades. Veamos la relación entre negación y conjunción. Sean las proposiciones

> No puedo comprar la casa y el carro al mismo tiempo
> No puedo comprar ni la casa ni el carro

La primera de ellas es una negación (de una conjunción), mientras que la segunda es una conjunción (de dos negaciones). Ambas parten del mismo par de proposiciones atómicas

> P: Compro la casa
> Q: Compro el carro

$\sim(P \wedge Q)$: No puedo comprar la casa y el carro al mismo tiempo

$\sim P \wedge \sim Q$: No compro ni la casa ni el carro

No pueden verse estas fórmulas como equivalentes, como si la segunda resultara de la aplicación de alguna propiedad distributiva en la primera. En el primer caso, si bien se niega que ambas proposiciones puedan ser verdaderas al mismo tiempo, queda abierta la posibilidad de que lo fuera alguna de ellas por separado (no puedo comprar las dos cosas pero quizás sí una de ellas). En el segundo, en cambio, se niega expresamente cada uno de los términos.

3. TABLAS DE VERDAD

3.1. La verdad de los compuestos extensionales

Decimos que la propiedad fundamental de las conectivas extensionales es la posibilidad que ofrecen de calcular el valor veritativo de la expresión compleja a partir del de sus proposiciones simples o variables.

Tomemos como ejemplo la conjunción. Sabemos que sólo es verdadera si todos sus miembros los son. Si alguno de ellos, o ambos, fueran falsos, la conjunción sería a su vez falsa. Mostremos esto en una tabla:

P	Q	P∧Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

En las dos primeras columnas, correspondientes a los enunciados atómicos o variables, figuran todas las combinaciones de valores veritativos posibles entre ellos[1]. En la última, se indica el valor que corresponderá a la conectiva que se está analizando en cada una de dichas combinaciones. Las tablas de verdad de todas las conectivas explicadas aquií son las siguientes:

[1] El número de estas combinaciones (C) se determina en la igualdad $C=2^n$, siendo n el número de variables de la fórmula.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \veebar Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

Obsérvese que la negación, a diferencia de las demás conectivas, sólo afecta a una proposición. El número de valores veritativos que puede asumir una proposición es, por supuesto, dos. La tabla de verdad de la negación será entonces simplemente:

P	~P
V	F
F	V

Para la mera presentación de las condiciones de verdad de las conectivas hemos utilizado, como términos de las mismas, enunciados simples (P, Q). Sin embargo, recordemos otra vez, las conectivas pueden afectar tanto a proposiciones simples como a proposiciones complejas, esto es, proposiciones en las que ya figura al menos una conectiva.

3.2. Contingencias

Se llama contingencia a toda proposición que puede ser verdadera o falsa. Las proposiciones simples son siempre contingencias y lo son muchas de las proposiciones complejas que se forman con ellas. Existen, sin embargo, proposiciones complejas que no pueden ser falsas (tautologías), así como otras que no pueden ser nunca verdaderas (contradicciones), y que veremos en los próximos apartados.

Supóngase ahora una fórmula cualquiera:

$$(P \vee Q) \rightarrow \sim R.$$

Se trata de un condicional cuyo antecedente es una disyunción inclusiva y cuyo consecuente es una negación. Tratándose de tres variables (P, Q, R), la combinación de todos los valores posibles ($2^n=8$) para ellas quedaría planteada de esta manera:

P	Q	R
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

En las columnas siguientes se analizarán, una por una, cada una de las conectivas presentes en el compuesto, comenzando por las que afectan a expresiones más simples y terminando siempre en la que define la proposición analizada (el condicional, en este caso)[2]. La expresión compuesta más simple aquí es la negación (~R) y sus valores veritativos, basándonos en los de la proposición afectada (R) serán:

[2] Este orden es, desde luego, convencional.

P	Q	R	~R
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

Analizamos ahora la disyunción

P	Q	R	~R	P∨Q
V	V	V	F	V
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F
F	F	F	V	F

Teniendo ya los términos del condicional, podemos establecer sus valores veritativos basándonos en los que aparecen en la quinta y tercera columnas (antecedente y consecuente, respectivamente)

P	Q	R	~R	P∨Q	(P∨Q)→~R
V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V

La tabla muestra así el valor del condicional correspondiente a cada una de las combinaciones de valores de las variables. Cada columna de la tabla de verdad analiza UNA conectiva (salvo las primeras, que exponen los posibles valores para cada variable).

3.3. Tautologías

En el ejemplo anterior analizamos una expresión compleja que resulta verdadera o falsa dependiendo de los diferentes valores que pueden asumir sus variables. Pero existen expresiones que, sin importar dichos valores, siempre resultarán verdaderas. Son las llamadas *tautologías*.

Son tautologías expresiones como "~(P∧~P)" (es imposible que una proposición sea verdadera y falsa al mismo tiempo), o "P$\underline{\vee}$~P" (una proposición o su negación deben ser verdaderas, pero no ambas).

Analicemos una expresión tautológica de dos variables. Sea $(P \rightarrow Q) \rightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$ (si un condicional es verdadero, entonces no pueden darse simultáneamente su antecedente y la negación de su consecuente)

La secuencia de proposiciones, desde las simples hasta la más compleja, sería la siguiente: P / Q / $\sim Q$ / $P \rightarrow Q$ / $P \wedge \sim Q$ / $\sim(P \wedge \sim Q)$ / $(P \rightarrow Q) \rightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$

La fórmula en cuestión es un condicional que tiene a su vez por antecedente un condicional y por consecuente la negación de una conjunción. La tabla resultaría así:

P	Q	$\sim Q$	$P \rightarrow Q$	$P \wedge \sim Q$	$\sim(P \wedge \sim Q)$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow \sim(P \wedge \sim Q)$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

3.4. Contradicciones

Otro tipo de proposición compleja cuyo valor veritativo no depende del de sus variables sino del de su estructura es la *contradicción.* Justo al contrario de lo que sucede con las tautologías, las contradicciones son fórmulas que resultan *siempre falsas.* La contradicción típica es la conjunción de un término cualquiera con su negación ($P \wedge \sim P$). Es obvio que, sin importar a qué se refiera "P" ("Llueve y no llueve", "soy y no soy latinoamericano", etc.), esta conjunción siempre será falsa. Analicemos una contradicción más compleja.

$[(P \vee Q) \rightarrow R] \wedge \sim R \wedge P$; cuya tabla es:

P	Q	R	$\sim R$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \rightarrow R$	$[(P \vee Q) \rightarrow R] \wedge \sim R \wedge P$
V	V	V	F	V	V	F
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F

Vemos que en ningún caso resultan verdaderos los tres miembros de la conjunción que se examina, por lo cual toda la fórmula es falsa. Agreguemos que, como es inmediatamente evidente, si dicha fórmula es falsa por contradictoria, entonces su negación sería una *tautología.*

4. SIMBOLIZACIÓN DE RAZONAMIENTOS

4.1. Razonamientos deductivos y no deductivos

Un razonamiento es un conjunto de proposiciones. Pero su estructura lógica tiene una forma especial. Cuando describimos algo podemos emitir una serie de proposiciones, pero no se diría que nuestro discurso es un razonamiento. Las proposiciones que componen la descripción tienen, por así decirlo, el mismo nivel lógico: son aseveraciones sucesivas que se refieren al mismo objeto. La conectiva que mejor representaría el vínculo entre las proposiciones de una descripción es la conjunción. Decimos que Pedro es inteligente, bajo, simpático, vive en Caracas y teme a las alturas. Lógicamente, ninguna de las proposiciones emitidas destaca sobre las demás, como idea principal, como resumen o corolario de las otras. Pero en un razonamiento notamos algo diferente: "Pedro es inteligente, simpático y vive en Caracas: es un buen candidato a ese empleo". Aquí formulamos cuatro proposiciones referidas a Pedro (verdaderas o falsas), pero la última no tiene la misma categoría que las anteriores, sino que aparece como derivada, resultante o apoyada por las demás; es la *conclusión*. Las demás, que pueden aparecer en número variable (debe haber, obviamente, por lo menos una), son las llamadas *premisas* del razonamiento.

En el modo en que las premisas apoyan a la conclusión es necesario hacer una distinción crucial. Veamos ejemplos:

1. Para que Nancy obtenga la visa es requisito que sepa inglés. Ella no sabe inglés. Luego, no le darán la visa.

2. El sitio donde vive suele inundarse. Ayer llovió. Hoy seguramente no vendrá.

En ambos casos tenemos un conjunto de proposiciones y en ambos reconocemos una conclusión apoyada por premisas. Pero en el primero de ellos notamos un mecanismo especialmente sólido en el paso de las premisas a la conclusión. Se trata de un razonamiento deductivo, en el que se presenta la conclusión como resultando *necesariamente* de las premisas. Esto significa que, dadas las premisas, el que formula el razonamiento no considera otra posibilidad distinta a la que la conclusión enuncia. En el segundo ejemplo, en cambio, no se expresa esta necesidad: es muy probable (dadas las premisas también), que sea el caso lo que la conclusión propone, pero queda abierta la posibilidad de que suceda otra cosa y, por tanto, de que la conclusión sea falsa.

La lógica investiga particularmente la estructura de los razonamientos deductivos, así como las leyes que hacen necesaria su conclusión. A continuación aplicaremos los instrumentos que nos proporciona, para este propósito, la lógica proposicional.

4.2. Simbolización de un razonamiento deductivo

Formalicemos el razonamiento 1. Para ello empezaremos simbolizando cada una de sus proposiciones (premisas y conclusión).

La primera premisa es un condicional. Simbolizando en primer lugar los enunciados atómicos tenemos

P: A Nancy le dan la visa

Q: Nancy sabe inglés

Se dice que la segunda proposición es condición necesaria de la primera; por lo tanto:

$$P \rightarrow Q$$

La segunda premisa dice simplemente:

$$\sim Q$$

La conclusión:

$$\sim P$$

El razonamiento total, separando las premisas mediante comas y utilizando un símbolo especial para la conclusión, puede presentarse así:

$$P \rightarrow Q \text{ , } \sim Q \vdash \sim P$$

Un razonamiento pretende que si sus premisas son verdaderas, su conclusión también debe serlo. Por lo tanto, puede presentarse su estructura como un condicional cuyo antecedente es el conjunto de las premisas y cuyo consecuente es la conclusión. El condicional con el que se representa un razonamiento se llama *condicional asociado* . Para nuestro ejemplo sería:

$$[(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q] \rightarrow \sim P$$

El grupo de las premisas (si hay más que una) conforma una conjunción que funciona como antecedente del condicional. La conclusión, como se dijo, es el consecuente.

4.3. Validez de un razonamiento

En un razonamiento deductivo, la conclusión deriva formalmente de las premisas. El "mecanismo" que vemos operar de manera tan precisa en él no depende estrictamente de la verdad o falsedad de las proposiciones que lo componen, sino de su estructura. Supongamos estas proposiciones:

Todos los ecuatorianos son europeos
Todos los japoneses son ecuatorianos

Su falsedad evidente no nos distrae de la intuición de que debe concluirse *necesariamente*:

Todos los japoneses son europeos

Sabemos que tanto las premisas como la conclusión de este razonamiento son falsas; sin embargo, reconocemos que la forma del razonamiento es válida. La forma de este razonamiento puede esquematizarse así:

3. Todos los A son B
   Todos los C son A
$\therefore$ Todos los C son B

La validez de un razonamiento es una propiedad de su forma intrínseca, no de la relación de sus enunciados con la realidad.

Manteniendo la misma estructura válida es posible "vaciar" en ella otras proposiciones con diferente valor veritativo. Introduzcamos una pequeña modificación sustituyendo "europeos" por "asiáticos". Tendremos como resultado un razonamiento válido con premisas falsas y conclusión verdadera:

Todos los ecuatorianos son asiáticos (F)
Todos los japoneses son ecuatorianos (F)
∴ Todos los japoneses son asiáticos (V)

Vemos entonces que la validez del razonamiento no nos garantiza que sean verdaderas sus premisas o su conclusión.

Aceptando de momento como criterio de validez la intuición del lector, veamos qué sucede con un razonamiento no válido:

Todos los venezolanos son latinoamericanos (V)
Todos los caraqueños son latinoamericanos (V)
∴ Todos los caraqueños son venezolanos (V)

El esquema de su forma es:

4. Todos los A son B
Todos los C son B
∴ Todos los C son A

Aquí, inversamente, la verdad de la información manejada no nos garantiza la validez de la forma del razonamiento. En el caso de un razonamiento no válido es posible, de hecho, encontrar ejemplos con todas las combinaciones de verdad entre premisas y conclusión (VVV, FFF, FFV, VVF, etc.).

¿Cuál es entonces la relación entre el valor veritativo de las proposiciones del razonamiento y su validez? La regla es:

> *Si un razonamiento es válido y sus premisas son verdaderas, entonces su conclusión será necesariamente verdadera.*

Si para un razonamiento no válido es posible encontrar ejemplos de todas las combinaciones de valores veritativos, cuando se trata de un razonamiento válido *no es posible encontrar un ejemplo en el que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa*[1]. Digamos que el razonamiento válido es una "máquina de deducir" que no garantiza la calidad de su producto final, la conclusión, si no se la alimenta con una materia prima adecuada: premisas verdaderas.

4.3.1. Determinación de la validez de un razonamiento

Queremos saber si el razonamiento 1 es válido. Su fórmula, según vimos, es:

$$[(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q] \rightarrow \sim P$$

Hagamos su tabla de verdad:

---

[1] En el mismo sentido, se dice que la forma de un razonamiento válido *no admite contraejemplo*. Un contraejemplo es, para una determinada forma, cualquier razonamiento que tenga las premisas verdaderas y la conclusión falsa.

P	Q	~P	~Q	P→Q	(P→Q)∧~Q	[(P→Q)∧~Q]→~P
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

La regla que habíamos establecido en el apartado anterior depende del hecho ya mencionado de que un razonamiento es, formalmente, un condicional. Y sabemos que un condicional sólo es falso cuando su antecedente es verdadero y su consecuente es falso. De allí que un razonamiento válido no admita tener simultáneamente premisas verdaderas y conclusión falsa. Excluida esta posibilidad, el razonamiento válido resulta entonces una fórmula *tautológica.*

La tautología asegura la verdad de la fórmula en virtud de su estructura e independientemente de la materia de que se trate (como "P∨~P" , "~(P∧~P)", etc.).

Podemos analizar el razonamiento válido 2 con nuestras herramientas de lógica proposicional si tratamos las proposiciones universales como condicionales. La primera premisa es equivalente a: "si alguien es ecuatoriano, entonces es asiático" . Decir que todo A es B equivale a decir que, si un elemento cualquiera (x) pertenece al grupo de los A, entonces también pertenece al grupo de los B. La simbolización procedería así:

P: x es ecuatoriano[2]

Q: x es asiático

R: x es japonés

$P \to Q\ ,\ R \to P \vdash R \to Q$

Determinemos la validez aplicando la tabla de verdad al condicional asociado:

$[(P \to Q) \wedge (R \to P)] \to (R \to Q)$

P	Q	R	P→Q	R→P	R→Q	(P→Q)∧(R→P)	[(P→Q)∧(R→P)]→(R→Q)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

La tabla resulta tautológica: el razonamiento es válido.

[2] Estos enunciados tienen un carácter especial ya que, al no referirse a individuos sino a clases de individuos, comprometen la definición misma de proposición entendida como expresión que puede ser verdadera o falsa. El condicional "si alguien es ecuatoriano, entonces es asiático" es claramente un proposición (falsa) puesto que puede verificarse si la relación entre las clases mencionadas es tal; pero para que sus términos, tomados separadamente, se entiendan como proposiciones debemos interpretar "x es ecuatoriano" como equivalente a "existe al menos un individuo de la clase de los ecuatorianos".

Analicemos un ejercicio más. Sea el siguiente razonamiento deductivo:

> Para viajar fuera del país tienes que ser mayor de edad o tener autorización de tus padres. Tú eres menor de edad. Por tanto, si no tienes autorización de tus padres, no viajarás.

Los enunciados atómicos presentes en este pasaje son:

P: Viajas fuera del país
Q: Eres mayor de edad
R: Tienes autorización de tus padres

Sobre la base de esta simbolización, las premisas y la conclusión serían

$$P \rightarrow (Q \vee R)\ ,\ \sim Q\ \vdash\ \sim R \rightarrow \sim P$$

Y el condicional asociado

$$\{[P \rightarrow (Q \vee R)] \wedge \sim Q\} \rightarrow (\sim R \rightarrow \sim P)$$

La tabla de verdad examina tres variables y tiene entonces ocho posibles combinaciones de valores veritativos.

								A	B	
P	Q	R	~P	~Q	~R	Q∨R	P→(Q∨R)	[P→(Q∨R)]∧~Q	~R→~P	A→B
V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V

El condicional que representa al razonamiento resulta ser, aquí también, una tautología, lo que demuestra que aquél es válido.

4.3.2. Método abreviado

Para verificar la validez de razonamientos formados con tres o más variables, el método de las tablas de verdad resulta poco eficiente, ya que el número de combinaciones posibles es demasiado elevado (8, 16, 32, etc.). El método abreviado no pretende obtener todos los valores veritativos que puede asumir el condicional asociado que representa el razonamiento, sino tan sólo averiguar si existe al menos una asignación de falsedad, en cuyo caso la expresión no será tautológica, demostrándose con ello que el razonamiento es no válido.

Supongamos el siguiente razonamiento:

$$P \to Q,\ Q \to R \vdash (P \underline{\vee} R) \to Q$$

El condicional asociado es:

$$[\,(P \to Q) \wedge (Q \to R)\,] \to [\,(P \underline{\vee} R) \to Q\,]$$

Si suponemos que el razonamiento es no válido, ello quiere decir que su expresión no es tautológica, por tanto en su tabla de verdad figurará al menos un valor de falsedad en la columna que analiza el condicional asociado. Indiquemos los valores debajo de la conectiva correspondiente

$$[\,(P \to Q) \wedge (Q \to R)\,] \to [\,(P \underline{\vee} R) \to Q\,]$$

F1

A partir de este supuesto básico (que el condicional asociado es falso) podemos ir deduciendo los valores de todas las demás conectivas hasta asignar valores a cada una de las variables. Si el condicional es falso, entonces su antecedente (en este caso la conjunción) es verdadero y su consecuente (en este caso, un condicional) es falso. Asignaremos al valor veritativo un número que permita seguir el curso de la deducción.

$$[\,(P \to Q) \wedge (Q \to R)\,] \to [\,(P \underline{\vee} R) \to Q\,]$$

V2 F2

F1

Si la conjunción es verdadera, entonces son verdaderos todos sus términos. Si el condicional de la conclusión es falso, entonces su antecedente (la disyunción inclusiva) es verdadero y su consecuente (Q) es falso. Aquí hemos deducido ya el valor que debería asumir la variable Q para cumplir con nuestra hipótesis (que el condicional era falso). Convencionalmente, indicaremos los valores de las variables sobre las mismas para distinguirlos de los que corresponden a conectivas y que escribimos debajo. El valor obtenido para una variable es, obviamente, el mismo para todas sus apariciones en la fórmula.

F3 F3 F3

$$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow [(P \veebar R) \rightarrow Q]$$

V3 V3 V3 F3[3]

V2 F2

F1

Obsérvese el condicional de la primera premisa. Hemos deducido hasta ahora que el mismo debe ser verdadero y su consecuente, "Q", debe ser falso. El único modo de que un condicional sea verdadero teniendo consecuente falso es que su antecedente también sea falso. Así obtenemos el valor de P.

F4 F3 F3 F4 F3

$$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow [(P \veebar R) \rightarrow Q]$$

V3 V3 V3 F3

V2 F2

F1

[3] Esta asignación de valor corresponde a "Q" en tanto consecuente del condicional. Puesto que este consecuente es un enunciado simple, el valor veritativo de la variable será el mismo.

Sólo resta fijar el valor de R. En el condicional de la segunda premisa R podría asumir cualquier valor ya que dicho condicional tiene antecedente verdadero. Pero en la disyunción que aparece como antecedente del condicional de la conclusión (disyunción que pretendemos sea verdadera) R debe ser verdadera, puesto que el otro término de la disyunción es falso.

F4 F3 F3 V5 F4 V5 F3

$$[\,(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)\,] \rightarrow [\,(P \,\underline{\vee}\, R) \rightarrow Q\,]$$

V3 V3 V3 F3

V2 F2

F1

De modo que hemos logrado asignar valores a las variables que corresponden al supuesto valor falso asignado al condicional asociado. En otras palabras, hemos probado que en la tabla de verdad de esta fórmula existe al menos una combinación de valores veritativos de las variables al que corresponde el valor falso de la fórmula. He aquí la tabla:

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	$P \underline{\vee} R$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$	$(P \underline{\vee} R) \rightarrow Q$	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow [(P \underline{\vee} R) \rightarrow Q]$
V	V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V	V
F	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*
F	F	F	V	V	F	V	V	V

Efectivamente, la tabla muestra que esta fórmula es falsa cuando sus variables P, Q y R son falsa, falsa y verdadera respectivamente. Este ejemplo es particularmente ilustrativo porque hay una única combinación que invalida el condicional. Recuérdese, sin embargo, que la distribución de valores en una contingencia puede ofrecer múltiples posibilidades y por lo tanto puede haber más de una asignación de falsedad para el condicional asociado. Obviamente basta con deducir una sola para demostrar que el razonamiento en cuestión es no válido.

Veamos que sucede cuando un razonamiento es válido.

Sea por caso:

$$(P \rightarrow Q) \text{ , } (Q \rightarrow \sim R) \vdash \sim(P \wedge R)$$

Su condicional asociado es:

$$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \sim R)] \rightarrow \sim(P \wedge R)$$

Partimos, como en el otro ejemplo, del supuesto de que el razonamiento es no válido y por tanto existe al menos una combinación de valores de las variables que corresponden con dicha hipótesis. Los primeros valores que deducimos son los siguientes:

```
 V4            V4     V4  V4
[(P→Q) ∧ (Q→~R)] → ~(P ∧ R)
                      V4  V4
  V3       V3          V3
      V2          F2
               F1
```

En efecto, el antecedente del condicional (la conjunción de las premisas) debe ser verdadero. Tratándose de una conjunción, ello significa que cada uno de sus términos será verdadero (los dos condicionales, en este caso). El consecuente, por su parte, debe ser falso. Téngase en cuenta que dicho consecuente es una negación, por lo cual este valor de falsedad debe asignarse a dicha conectiva. Si la negación es falsa, el término negado (la conjunción "P∧R") es verdadero, e igualmente sus términos. De este modo obtenemos el valor de dos de las variables, el cual transferimos a sus otras apariciones en la fórmula.

Puesto que la variable R es verdadera, su negación (que figura como consecuente del condicional de la segunda premisa) es falsa. Por su parte, P mantiene el valor veritativo como antecedente del condicional de la primera premisa:

```
 V4            V4        V4  V4
[(P→Q) ∧ (Q→~R)]  →  ~(P ∧ R)
 V4          F5          V4  V4
  V3       V3             V3
      V2             F2
               F1
```

En este momento se hace evidente la imposibilidad de asignar un valor a "Q" que pueda cumplir con las condiciones de verdad impuestas a los dos condicionales en los que figura. Para que se mantuviera la verdad del primero de ellos, "Q" debería ser verdadera, pero con esto se haría falso el segundo. Esta contradicción demuestra que el supuesto del que partimos era falso, es decir, que el condicional no puede ser falso pues la expresión es tautológica y, consecuentemente, el razonamiento por ella representada, es válido.

5. REGLAS DE INFERENCIA Y PRUEBAS FORMALES

Una de las propiedades fundamentales de la lógica es la de permitir la derivación, mediante la aplicación de ciertas reglas, de unas proposiciones a otras. Este procedimiento se conoce como inferencia y en este capítulo veremos algunas de las reglas que justifican dicha operación.

Toda inferencia presenta la estructura básica de cualquier razonamiento: un conjunto de proposiciones que se tienen por ciertas (premisas) de las cuales se deduce otra proposición distinta (conclusión). Cada regla de inferencia presenta la justificación de lo que podríamos llamar un "razonamiento mínimo", la menor distancia lógica posible entre premisas y conclusión. Desde este punto de vista, un razonamiento es siempre analizable como un compuesto tan complejo como se quiera de estas pequeñas inferencias. Las pruebas formales son la aclaración explícita de tal estructura.

Comenzaremos presentando el conjunto de las reglas más importantes[1] exponiéndolas primero a través de fórmulas esquemáticas y ejemplificándolas luego con fórmulas más complejas.

[1] Las ocho reglas primitivas y el *modus tollens*. GENTZEN define a las primeras como eliminaciones o introducciones de las principales conectivas (condicional, conjunción, disyunción, negación). En algunos casos el nombre "clásico" de la regla priva sobre esta nomenclatura (p.e.,"*modus ponens*" en lugar de "eliminación del condicional"). Por razones didácticas, sin embargo, variaremos el orden de exposición.

5.1. Modus ponens (eliminación del condicional)

Si disponemos entre nuestras proposiciones aceptadas como verdaderas (sean premisas o fórmulas ya deducidas de ellas) de un condicional y de su antecedente, la regla de *modus ponens* nos autoriza a inferir la verdad del consecuente. En símbolos:

1	(1) $P \rightarrow Q$	premisa
2	(2) P	premisa
1,2	(3) Q	MP 1, 2

Detengámonos en el procedimiento. En las pruebas formales presentaremos, convencionalmente (aquí, entre paréntesis), un número ordinal que identifica al enunciado[2]; luego, el enunciado propiamente dicho; a la derecha, la regla que lo justifica, con la mención de los enunciados a los que se aplica. A la izquierda del número de enunciado se indican las llamadas "dependencias", es decir, las premisas de las que depende cada proposición.

El ejemplo anterior es un esquema simple de condicional. Sabemos que los condicionales pueden tener una estructura más compleja, por ejemplo:

$$(P \vee Q) \rightarrow \sim R$$

En este caso, para que sea posible aplicar la regla de *modus ponens*, necesitamos, como premisa, la disyunción que figura como antecedente. El razonamiento sería:

[2] También se habla de "pasos" que conducen a la conclusión.

$(P \vee Q) \rightarrow \sim R\ ,\ P \vee Q \vdash \sim R$

y la prueba formal:

1	(1)	$(P \vee Q) \rightarrow \sim R$	premisa
2	(2)	$P \vee Q$	premisa
1,2	(3)	$\sim R$	MP 1,2

Una aplicación un poco más extensa de la regla nos permitirá probar el siguiente razonamiento:

$\sim(P \wedge Q) \rightarrow (R \rightarrow S)\ ,\ (R \rightarrow S) \rightarrow \sim T\ ,\ \sim(P \wedge Q) \vdash \sim T$

1	(1)	$\sim(P \wedge Q) \rightarrow (R \rightarrow S)$	premisa
2	(2)	$(R \rightarrow S) \rightarrow \sim T$	premisa
3	(3)	$\sim(P \wedge Q)$	premisa
1,3	(4)	$R \rightarrow S$	MP 1,3
1,2,3	(5)	$\sim T$	MP 2,4

Aquí el antecedente que necesitamos para aplicar *modus ponens* en la primera premisa resulta ser una negación y el consecuente, un condicional. En la segunda premisa tenemos un condicional como antecedente y una negación como consecuente. Debe atenderse siempre, en general, a la conectiva que define en cada caso los términos del condicional en cuestión.

5.2. Modus tollens

Dado un condicional y la negación de su consecuente, puede inferirse la negación de su antecedente. Esquemáticamente:

1	(1) $P \rightarrow Q$	premisa
2	(2) $\sim Q$	premisa
1,2	(3) $\sim P$	MT 1,2

Pasando del esquema a una fórmula más compleja supongamos el razonamiento:

$$(P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S) \text{ , } \sim(R \vee S) \vdash \sim(P \wedge Q)$$

1	(1) $(P \wedge Q) \rightarrow (R \vee S)$	premisa
2	(2) $\sim(R \vee S)$	premisa
1,2	(3) $\sim(P \wedge Q)$	MT 1,2

Una aplicación especial de esta regla se produce cuando el consecuente del condicional ya es una negación. En ese caso debe observarse la regla de doble negación que explicamos más adelante (5.5.)

5.3. Eliminación de la conjunción (simplificación)

Dada una conjunción, es deducible de ella, por separado, cualquiera de sus términos

1 (1) $P \wedge Q$	premisa
1 (2) P	$E\wedge$ 1
1 (3) Q	$E\wedge$ 1

Desde luego, la regla no se aplica a expresiones como $\sim(P \wedge Q)$ por la obvia razón de que aquí no se trataría de una conjunción sino de una negación. Del mismo modo, tampoco podrá aplicarse cuando la conjunción sea término de alguna otra fórmula.

5.4. Introducción de la conjunción (producto)

Dadas dos proposiciones cualesquiera, es enunciable, en cualquier punto de la prueba, una conjunción de las mismas:

1 (1) P	premisa
2 (2) Q	premisa
1, 2 (3) $P \wedge Q$	$I\wedge$ 1,2 [3]

[3] Obsérvese que la referencia de la regla en la introducción de la conjunción menciona dos pasos, mientras que la eliminación sólo refiere a uno.

5.5. Doble negación (eliminación de la negación; introducción de la doble negación)

Esta regla muestra la equivalencia entre una proposición negada dos veces y la misma proposición sencillamente afirmada. La deducción es inmediata:

1 (1)	~~P	premisa
1 (2)	P	DN 1

Igualmente, en sentido inverso, tenemos la llamada *introducción de la doble negación*:

1 (1)	P	premisa
1 (2)	~~P	DN 1

La doble negación se aplica con frecuencia vinculada al *modus tollens*. Supongamos el siguiente razonamiento:

$P \rightarrow \sim Q \text{ , } Q \vdash \ \sim P$

Es obvio que la segunda premisa es la negación del consecuente del condicional de la primera. Pero esta equivalencia debe explicitarse en la prueba.

1 (1)	$P \rightarrow \sim Q$	premisa
2 (2)	Q	premisa
2 (3)	~~Q	DN 2

El paso 3 "convierte" la premisa afirmada en el paso 2 en una "negación de la negación", haciendo más claro su papel en el *modus tollens*. La conclusión será la usual

1,2 (4) ~P MT 1,3

También es aplicable la doble negación en los casos de *modus tollens* en los que el antecedente es una negación.

~P→Q , ~Q ⊢ P

1	(1) ~P→Q	premisa
2	(2) ~Q	premisa
1,2	(3) ~~P	MT 1,2

Aquí, de la aplicación del *modus tollens*, obtenemos la "negación de la negación", y no directamente "P". La equivalencia se expresa, finalmente, por doble negación

1,2 (4) P DN 3

5.6. Introducción de la negación (reducción al absurdo)

Para la aplicación de esta regla es necesario el uso de *hipótesis*. Una hipótesis es una proposición que se formula sin conocer su valor veritativo y que, en el contexto de otras proposiciones, permite hacer pruebas y deducciones.

Dado un conjunto de proposiciones (premisas o proposiciones derivadas de ellas), la reducción al absurdo consiste en introducir una hipótesis que conduzca a una contradicción. Por el principio de no contradicción (ninguna proposición puede ser al mismo tiempo verdadera y falsa) toda proposición que nos conduzca a una contradicción debe ser falsa. Una de las formas típicas de usar la regla para probar razonamientos es mostrar que si la conclusión no fuera verdadera se produciría una contradicción. He aquí un caso:

$(P \wedge Q) \rightarrow R, \sim R \wedge Q \vdash \sim P$

1 (1) $(P \wedge Q) \rightarrow R$	premisa
2 (2) $\sim R \wedge Q$	premisa
3 (3) P	hipótesis

En (3) supondremos que la conclusión no es el caso y veremos cómo este supuesto nos lleva a una contradicción. Las hipótesis, como las premisas, no derivan de otras proposiciones, por lo cual dependen de sí mismas.

2 (4) Q E$\wedge$ 2

2,3 (5) P$\wedge$Q I$\wedge$ 3,4

1,2,3 (6) R MP 1,5

2 (7) ~R E$\wedge$ 2

1,2,3 (8) R$\wedge$~R I$\wedge$ 6,7

La contradicción se expresa mediante la conjunción de los términos opuestos. Ahora la regla de reducción al absurdo nos permite enunciar la falsedad de la hipótesis de la que partimos, es decir, la verdad de su negación:

1,2 (9) ~P RA 3-8

Desaparece la dependencia de la hipótesis pues nuestra inferencia no depende de su verdad. En la justificación indicamos el paso en el que introdujimos la hipótesis y el paso en el que hallamos la contradicción. En cuanto a esta última, no importa cuál sea el término contradictorio; podríamos haber resuelto este mismo ejercicio mostrando una contradicción distinta a "R$\wedge$~R". La prueba se habría desarrollado de la misma forma hasta el paso (5); luego:

2 (6) ~R E$\wedge$ 2

1,2 (7) ~(P$\wedge$Q) MT 1,6

1,2,3 (8) (P$\wedge$Q)$\wedge$~(P$\wedge$Q) I$\wedge$ 5,7

1,2 (9) ~P RA 3-8

5.7. Prueba condicional (introducción del condicional)

Si en el contexto de un conjunto de proposiciones introducimos una hipótesis cualquiera "P", y a partir de ella (y del resto de las proposiciones disponibles) inferimos una proposición cualquiera "Q", habremos demostrado la verdad del condicional "$P \to Q$". En general, serán verdaderos todos los condicionales que tengan como antecedente a "P" y como consecuente cualquiera de las proposiciones deducidas del sistema en la que la hemos incluido. Si un razonamiento tiene como conclusión un condicional, utilizamos esta regla del siguiente modo. Sea:

$P \to Q,\ Q \to R \vdash P \to R$

Según lo dicho, si de una hipótesis "P" (introducida en el contexto de las premisas) se dedujera la proposición "R", habríamos demostrado el condicional "$P \to R$", conclusión del razonamiento que queremos probar.

1 (1) $P \to Q$	premisa
2 (2) $Q \to R$	premisa
3 (3) P	hipótesis

Obviamente, *siempre elegimos como hipótesis el antecedente del condicional que queremos inferir, buscando, a partir de dicha hipótesis, inferir su consecuente*:

1,3 (4) Q	MP 1,3
1,2,3 (5) R	MP 2,4

hemos deducido el consecuente del condicional que nos interesa, por tanto:

1,2 (6) $P \to R$ PC 3-5

Demostramos así que, si "P" fuera verdad (en este contexto de proposiciones), sería verdad también "Q". Y este es justamente el tipo de relación que los condicionales expresan. La dependencia de la hipótesis desaparece porque, si bien la hipótesis libre supone la verdad de "P", lo que el condicional deducido enuncia es solamente la verdad de la relación, y no la de ninguno de sus términos.

También podemos apelar a la regla para obtener condicionales que no sean la conclusión del razonamiento. Si tenemos:

$(P \to Q) \to R,\ P \to S,\ S \to Q \vdash R$

podemos obtener la conclusión mediante un *modus ponens* en la primera premisa, pero para ello necesitamos el antecedente de ésta, que es, precisamente, un condicional. Empecemos estableciendo las premisas:

1 (1) $(P \to Q) \to R$	premisa
2 (2) $P \to S$	premisa
3 (3) $S \to Q$	premisa

Necesitamos el antecedente del condicional de la primera premisa. Necesitamos como hipótesis:

4 (4) P hipótesis

Si a partir de ella podemos inferir "Q", habremos demostrado la verdad del condicional que necesitamos:

2,4 (5) S	MP 2,4
2,3,4 (6) Q	MP 3,5
2,3 (7) $P \rightarrow Q$	PC 4-6

eliminando la dependencia de (4). Ahora podemos utilizar la premisa (1) y practicar un simple *modus ponens*

1,2,3 (8) R	MP 1,7

La regla puede aplicarse para probar condicionales más complejos, como en este caso:

$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

1 (1) $(P \wedge Q) \rightarrow R$	premisa

Para obtener el condicional de la conclusión planteamos como hipótesis su antecedente (P) para luego inferir su consecuente ($Q \rightarrow R$). Pero dicho consecuente es también un condicional, lo que nos obliga a introducir una segunda hipótesis:

2 (2) P	hipótesis
3 (3) Q	hipótesis

Cada hipótesis "busca" el consecuente de "su" condicional. Así, a través de "Q" se quiere deducir "R" y, a través de "P", se quiere deducir "$Q \to R$". Debemos empezar por probar el condicional más simple:

2,3 (4) $P \wedge Q$	$I\wedge$ 2,3
1,2,3 (5) R	MP 1,4

Ahora podemos probar el condicional "menor" y eliminar la dependencia de la hipótesis usada para ello:

1,2 (6) $Q \to R$ PC 3-5

y observamos que, de esta manera, obtuvimos el consecuente del condicional que representa la conclusión. Es decir, podemos hacer ahora una segunda y definitiva prueba condicional:

1 (7) $P \to (Q \to R)$ PC 2-6

5.8. Introducción de la disyunción (suma, adición)

Sobre la base de la verdad de cualquier proposición es posible inferir la verdad de cualquier disyunción (inclusiva) que tenga a aquélla como término. Es decir, se razona:

$P \vdash P \vee Q$

1 (1) P	premisa
2 (2) $P \vee Q$	$I\vee$ 1

Podemos también aplicar la regla para obtener una disyunción que es término de otra conectiva, como aquí:

$(P \vee Q) \to R, P \vdash R$

1	(1) $(P \vee Q) \to R$	premisa
2	(2) P	premisa
2	(3) $P \vee Q$	I$\vee$ 2
1,2	(4) R	MP 1,3

5.9. Eliminación de la disyunción

Puesto que sabemos que una disyunción inclusiva tiene un término verdadero, pero no sabemos cuál, no podemos enunciar ninguno de sus términos por separado, como hacemos con la conjunción. Para inferir una proposición "R" partiendo de una disyunción "$P \vee Q$" debemos probar que cualquiera de sus términos que fuera el caso nos llevaría a inferir aquélla. Esto significa que debemos hacer dos pruebas, en cada una de las cuales tomaremos como hipótesis uno de los términos de la disyunción.
Si en un razonamiento tenemos:

$P \vee Q, P \to R, Q \to R \vdash R$

Es claro que aunque no sepamos cuál de los términos es verdadero, cualquiera de ellos que lo fuera nos conduciría a la conclusión.

1 (1) $P \vee Q$	premisa
2 (2) $P \rightarrow R$	premisa
3 (3) $Q \rightarrow R$	premisa

Como dijimos, los términos de la disyunción sólo pueden ser tomados como supuestos. Empezamos por el primero de ellos

4 (4) P	hipótesis
2,4 (5) R	MP 2,4

el primer término nos ha llevado inmediatamente a la inferencia buscada. Toca ahora probar el segundo:

6 (6) Q	hipótesis
3,6 (7) R	MP 3,6

La verdad de la proposición "R" en los pasos (5) y (7) depende de hipótesis. Pero la regla nos habilita, luego de haber hecho las dos pruebas, para establecer la verdad de "R" exclusivamente sobre la verdad de la disyunción y liberarla de las otras dependencias.

1,2,3 (8) R	E$\vee$ 1,4-5, 6-7

En la justificación se indica el lugar donde se encuentra la disyunción (1) así como el recorrido de las dos pruebas, desde el planteamiento de cada hipótesis hasta cada inferencia de "R".

SEGUNDA PARTE:

EJERCICIOS

1. SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES

Simbolice los siguientes enunciados (identifique primero las proposiciones atómicas)

1. No es cierto que sea falso que no llueve.
2. Ni llueve ni hace frío.
3. Manuel nació en Argentina o en Uruguay, pero con seguridad no es venezolano.
4. El carro tiene gasolina, pero no arranca.
5. No tengo dinero para comprar el libro de lógica y el de historia al mismo tiempo.
6. El libro de historia y el de lógica son muy caros y yo no tengo dinero para comprar ninguno de los dos libros.
7. O el carro tiene gasolina y funciona o no iremos de viaje.
8. Es necesario ser mayor de edad para ver este espectáculo.
9. A este club sólo puedes entrar con autorización de un socio.
10. Iré a la reunión si y sólo si vas tú.
11. Es necesario no tener antecedentes penales para trabajar en ese puesto.
12. Únicamente los venezolanos de nacimiento pueden ser presidentes.
13. Para obtener la jubilación es necesario tener más de 65 años, pero también es necesario que pagues los aportes estipulados.
14. Siempre que hay orden, no hay libertad, y siempre que hay libertad, hay desorden.
15. Si no hay orden y libertad no hay democracia.
16. Basta que no haya orden o libertad para que no haya democracia.

17. Si hay orden sin libertad, no hay democracia.
18. Es necesario que el gobernante sea honesto y competente para que haga una buena gestión, pero si falta alguna de estas cualidades, la gestión será mala.
19. Si el razonamiento es válido y sus premisas son verdaderas, entonces la conclusión es necesariamente verdadera.
20. No es necesario que seas venezolano para que participes en este concurso.
21. Si y sólo si naciste en Venezuela o te nacionalizaste obtienes tu cédula.
22. Si el asesino no conocía a su víctima, entonces actuó por encargo o se equivocó de persona.
23. Si trajiste el pasaporte no necesitabas traer la cédula para recibir el pago.
24. Para entrar a este restaurant necesitamos tener dinero y estar bien vestidos, pero nosotros no cumplimos ni con lo uno ni con lo otro.
25. Es falso que sea necesario no tener más de 65 años para entrar en esta póliza.

2. TABLAS DE VERDAD

Haga la tabla de verdad de las siguientes fórmulas:

1. $(P \vee Q) \rightarrow (\sim P \rightarrow Q)$
2. $(P \underline{\vee} Q) \rightarrow \sim(P \wedge Q)$
3. $(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)$
4. $(P \leftrightarrow Q) \underline{\vee} (P \underline{\vee} Q)$
5. $\sim(P \wedge Q) \rightarrow [(P \vee Q) \underline{\vee} (\sim P \wedge \sim Q)]$
6. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \underline{\vee} \sim Q)$
7. $(P \leftrightarrow Q) \underline{\vee} \sim(P \underline{\vee} Q)$
8. $\sim[\sim(P \vee Q) \wedge \sim(\sim P \wedge \sim Q)]$
9. $[P \rightarrow (Q \wedge R)] \wedge (\sim Q \wedge P)]$
10. $[(P \wedge \sim Q) \rightarrow R] \rightarrow [(\sim R \wedge P) \rightarrow Q]$
11. $[\sim(P \vee Q) \rightarrow R] \wedge (\sim R \rightarrow P)$
12. $[(P \rightarrow Q) \vee R] \leftrightarrow [\sim R \rightarrow (\sim P \vee Q)]$
13. $[P \underline{\vee} (Q \wedge R)] \wedge (P \leftrightarrow Q\}$
14. $[(P \vee R) \rightarrow \sim Q] \wedge (P \rightarrow Q)$
15. $\sim[\sim(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \underline{\vee} Q)]$

3. SIMBOLIZACIÓN DE RAZONAMIENTOS

Simbolice los siguientes razonamientos y determine su validez

1. Para obtener este empleo tenía que saber inglés. Pero si no dominaba el programa de cálculo, tampoco conseguía el empleo. Por lo tanto, si obtuvo el empleo, es falso que no sepa inglés o que no conozca el programa.

2. Sólo si estuvo ese día en Caracas pudo cometer el crimen. Ese día sólo pudo estar en Caracas o en Valencia. En Valencia no estuvo. Luego, cometió el crimen.

3. Es indispensable que el gobernante sea honesto y competente para que resuelva los problemas del país. En consecuencia, si falta alguna de estas cualidades, el gobernante no resuelve los problemas del país.

4. Si un razonamiento es válido y tiene premisas verdaderas, entonces su conclusión es verdadera. Este razonamiento tiene conclusión falsa. Por tanto, o no es válido o no tiene las premisas verdaderas.

5. Sólo si apruebas y pagas pasas a 2º año. Pagaste pero no aprobaste. En consecuencia, no pasaste a 2º año.

6. Si apruebas y pagas, te gradúas. En consecuencia, si aprobaste y no te graduaste es porque no pagaste.

7. Si José estuvo en la fiesta, entonces necesitó tener un carro para cometer el crimen. Luego, si estuvo en la fiesta y no tenía carro, José no es el asesino.

8. Si careces de amor o de salud, no puedes ser feliz. Por tanto, si eres feliz, no careces de amor ni de salud.

9. Si tienes el virus, entonces tendrás náuseas y fiebre. O tienes el virus, o simplemente tienes fiebre. En consecuencia, si no tienes náuseas, tienes fiebre.

10. Si el mundo no es eterno, ha sido creado. Si ha sido creado, existe un creador. Luego, si no existe un creador, el mundo es eterno.

11. Sólo si no tienes dinero será necesario que pidas una beca para entrar en la Universidad. En consecuencia, si tienes dinero entras y no pides beca.

12. Si encuentra cola, llegará tarde. Pero si viene por autopista, no encontrará cola. Luego, si viene por autopista, llegará a tiempo.

13. Si aumenta el desempleo, disminuye el consumo o aumenta el gasto del Estado. El consumo no disminuyó. Por tanto, no aumentó el desempleo.

14. Es necesario que ganemos para clasificar. Si ganamos pero nos hacen un gol, no clasificamos. En consecuencia, si clasificamos es porque no nos hicieron un gol.

15. Si X no cobra las utilidades no puede comprar el carro y pagar la hipoteca de su casa al mismo tiempo. Si no paga la hipoteca, pierde la casa. En

conclusión, si no cobra las utilidades, será necesario que no compre el carro para no perder la casa.

16. Si Juan no dice la verdad, entonces ni Carlos ni Pedro mienten. Por tanto, si Carlos o Pedro no dicen la verdad, el que no miente es Juan

17. Si el carro funciona, entonces tiene gasolina y tiene batería. Es necesario que tenga batería para que funcionen las luces. Por lo tanto, si funcionan las luces, el carro funciona.

18. Si repruebas matemáticas o lógica tendrás tres materias aplazadas. Si tienes tres materias aplazadas, repites. En consecuencia, es necesario que apruebes matemáticas o lógica para que pases.

19. Si no perteneces a la universidad y estás solvente en la biblioteca, sólo podrás consultar los libros si eres tesista o doctor. Tú no eres ni tesista ni doctor. Por lo tanto, no podrás consultar los libros.

20. Si corren con lluvia, gana el azul o gana el rojo. Si corre el verde, no gana el azul. En conclusión, si corre el verde, será necesario que no llueva para que no gane el rojo.

21. Para que el televisor o el VHS funcionen es necesario que haya electricidad. Si hay electricidad pero el televisor no funciona, entonces el televisor está averiado. En consecuencia, si no funciona ninguno de los dos aparatos, significa que no hay electricidad o el televisor está averiado.

22. Para eliminar a Brasil o a Argentina es necesario que clasifiquen Bolivia y Ecuador. Pero si clasifica Bolivia, no clasifica Ecuador. Por lo tanto, Brasil y Argentina clasifican.

23. Sólo si vendes el carro o el apartamento puedes comprar la casa. En consecuencia, si no vendes el carro, no puedes comprar la casa sin vender el apartamento.

24. Sólo si vendes el carro y el apartamento puedes comprar la casa. En consecuencia, si no vendes ambos, no compras la casa.

25. Era necesario que sacaras más de 17 en Matemáticas y en Física para que obtuvieras la mención. Por tanto, si no lograste la mención fue porque sacaste menos en algunas de las dos materias.

26. Si el tratamiento es necesario para que se cure, viajará a Suiza. En consecuencia, si no le aplican el tratamiento y se cura, no viajará a Suiza.

27. Si se postula Pedro, Isabel no gana. Si pierde Isabel, entonces ganan Juan o Carlos. Por lo tanto, si no ganan ni Juan ni Carlos, es porque Pedro no se postuló.

28. Si el ex alcalde y el ex gobernador tienen más de diez puntos en las encuestas, entonces basta que el ex comandante se postule para que la ex miss no gane. Ni el ex gobernador ni el ex alcalde tienen más de 10 puntos. En conclusión, aunque el ex comandante se postule, gana la ex miss.

29. Si no está en tu casa ni en la mía, entonces está en el carro o quedó en la empresa. En el carro no está. En consecuencia, si no está en la empresa, está en una de nuestras casas.

30. Si es cierto que es necesario que el carro tenga gasolina para que funcione, entonces es falso que el carro funciona y no tiene gasolina. Luego, si el carro no tiene gasolina, no funciona.

4. EJERCICIOS DE PRUEBA FORMAL

Haga la prueba formal de los siguientes razonamientos:

1. $P \to (Q \wedge R), P \vdash R$
2. $(P \wedge Q) \to R, P, Q \vdash R$
3. $P \to (Q \to R), S \to Q, P, S \vdash R$
4. $(P \wedge Q) \to R, Q \to P, Q \vdash R$
5. $\sim P \to (Q \wedge R), P \to S, \sim S \wedge \sim T \vdash R$
6. $(P \wedge Q) \to (R \wedge S), S \to T, P, Q \vdash T$
7. $P \to (Q \to R), P \to Q, P \vdash R$
8. $(P \vee Q) \to R, P \vdash R$
9. $(P \vee Q) \to (R \wedge S), R \to T, Q \vdash T$
10. $P \to Q, R \to \sim Q, R \vdash \sim P$
11. $(P \wedge Q) \to (R \to S), P \wedge T, Q, \sim S \vdash \sim R$
12. $(P \wedge Q) \to R, \sim P \to S, \sim Q \to T, \sim S \wedge \sim T \vdash R$
13. $P \to (Q \wedge R), \sim S \to T, P \wedge \sim T \vdash Q \wedge S$
14. $P \to (Q \to R), Q \wedge \sim R \vdash \sim P$
15. $P \to Q, R \to \sim Q \vdash \sim (P \wedge R)$
16. $P \wedge \sim R \vdash \sim (P \to R)$

17. $P \to Q, R \to P, R \to \sim Q \vdash \sim R$

18. $(R \to S) \to P \vdash \sim[(R \to S) \wedge \sim P]$

19. $P \to (Q \wedge R), R \to \sim Q \vdash \sim P$

20. $\sim(P \wedge Q) \to \sim R, S \to R \vdash \sim(S \wedge \sim Q)$

21. $(P \to Q) \to (Q \to R) \vdash \sim[(P \to Q) \wedge \sim(Q \to R)]$

22. $\sim(P \wedge Q) \to R, Q \to S \vdash \sim R \to S$

23. $\sim[(P \wedge Q) \to R] \to S, T \to (\sim S \wedge Q) \vdash (T \wedge P) \to R$

24. $P \to Q, S \to (\sim Q \wedge R) \vdash S \to \sim P$

25. $P \to (Q \wedge R), (P \wedge Q) \to S \vdash P \to S$

26. $\sim(P \to Q) \to R \vdash P \to (\sim R \to Q)$

27. $(P \wedge Q) \to (Q \wedge R) \vdash Q \to (P \to R)$

28. $P \to (Q \wedge R) \vdash (\sim Q \wedge R) \to \sim P$

29. $(P \wedge Q) \to \sim R, Q \to R \vdash Q \to \sim P$

30. $(P \wedge Q) \to \sim R, P \to R \vdash P \to \sim Q$

31. $P \to Q, (Q \wedge R) \to \sim S \vdash (S \wedge R) \to \sim P$

32. $P \to Q, R \to S, (Q \wedge S) \to T \vdash \sim T \to \sim(P \wedge R)$

33. $(P \wedge Q) \to R \vdash (P \to Q) \to \sim(P \wedge \sim R)$

34. $P \to (Q \wedge R) \vdash (\sim Q \wedge R) \to \sim P$

35. $R \to \sim(Q \wedge P) \vdash (Q \wedge P) \to \sim R$

36. $(P \wedge Q) \to \sim R, S \to R \vdash (P \wedge S) \to \sim Q$

37. $P \to \sim(Q \wedge R), S \to Q \vdash (P \wedge S) \to \sim R$

38. $(P \wedge Q) \to \sim(R \wedge S), R \vdash P \to (S \to \sim Q)$

39. $P \to \sim(Q \wedge R), P \to S \vdash (S \to R) \to (P \to \sim Q)$

40. $\sim[(P \to Q) \wedge R] \to S \vdash \sim S \to [R \to (\sim Q \to \sim P)]$

41. $\sim(P \to Q) \to (R \to S) \vdash P \to [(R \wedge \sim S) \to Q)]$

42. $P \vee Q, P \to (R \wedge S), Q \to (S \wedge T) \vdash S$

43. $(P \to R) \vee (Q \to R), P \wedge Q \vdash R$

44. $P \vee Q, P \to (R \wedge S), Q \to (R \wedge T) \vdash R$

45. $P \vee Q, P \to (R \wedge S), S \to T, \sim T \to \sim Q \vdash T$

46. $\sim P \vee Q, T \to (P \wedge S), Q \to \sim S \vdash \sim T$

47. $P \to (Q \vee R), Q \to S, \sim S \to \sim R \vdash P \to S$

48. $P \to (R \wedge S) \vdash (\sim R \vee \sim S) \to \sim P$

APÉNDICE:

SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS DE NUMERACIÓN IMPAR

1. SIMBOLIZACIÓN DE PROPOSICIONES

1. P: Llueve

$\sim\sim\sim P$ (equivale a $\sim P$)

3. P: Manuel nació en Argentina
Q: Manuel nació en Uruguay
R: Manuel nació en Venezuela

$(P \veebar Q) \wedge \sim R$

5. P: Tengo dinero para comprarme el libro de historia
Q: Tengo dinero para comprarme el libro de lógica

$\sim(P \wedge Q)$

7. P: El carro tiene gasolina
Q: El carro funciona
R: Vamos de viaje

$(P \wedge Q) \veebar \sim R$

9. P: Entras a este club
Q: Tienes autorización de un socio

$P \rightarrow Q$

11. P: x tiene antecedentes penales
Q: x trabaja en ese puesto

$Q \rightarrow -P$

13. P: x obtiene la jubilación
Q: x tiene más de 65 años
R: x ha pagado los aportes estipulados

$P \rightarrow (Q \wedge R)$ ó $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

15. P: Hay orden
Q: Hay libertad
R: Hay democracia

$\sim(P \wedge Q) \rightarrow \sim R$

17. P: Hay orden
Q: Hay libertad
R: Hay democracia

$(P \wedge \sim Q) \rightarrow \sim R$

19. P: El razonamiento es válido
Q: Las premisas del razonamiento son verdaderas
R: La conclusión es verdadera

$(P \wedge Q) \rightarrow R$

21. P: Naciste en Venezuela
Q: Te nacionalizaste
R: Obtienes tu cédula

$(P \vee Q) \leftrightarrow R$

23. P: Trajiste el pasaporte
Q: Trajiste la cédula
R: Recibiste el pago

$P \rightarrow \sim(R \rightarrow Q)$

25. P: Tienes más de 65 años
Q: Entras en la póliza

$\sim(Q \rightarrow \sim P)$

2. TABLAS DE VERDAD

1.

P	Q	~P	P ∨ Q	~P→Q	(P∨Q)→(~P→Q)
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V

TAUTOLOGÍA

3.

P	Q	P ∨ Q	P ∧ Q	(P∨Q)∧(P∧Q)
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	F

CONTINGENCIA

5.

					A			B	
P	Q	~P	~Q	P∧Q	~(P∧Q)	P∨Q	~P∧~Q	(P∨Q)$\underline{\vee}$(~P∧~Q)	A→B
V	V	F	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	V

TAUTOLOGÍA

7.

P	Q	P↔Q	P$\underline{\vee}$Q	~(P$\underline{\vee}$Q)	(P↔Q)$\underline{\vee}$~(P$\underline{\vee}$Q)
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V

TAUTOLOGÍA

9.

				A	B		
P	Q	R	~Q	Q∧R	~Q∧P	P→(Q∧R)	B∧A
V	V	V	F	V	F	V	F
V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F	V	F
F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	F	F	V	F

CONTRADICCIÓN

11.

P	Q	R	~R	P∨Q	~(P∨Q)	~R→P	~(P∨Q)→R	[~(P∨Q)→R]∧(~R→P)
V	V	V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	F	F	F

CONTINGENCIA

13.

			A	B		
P	Q	R	Q∧R	P↔Q	P⊻ (Q∧R)	A∧B
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F	F

CONTINGENCIA

15.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$\sim(P \leftrightarrow Q)$	$P \underline{\vee} Q$	$\sim(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (P \underline{\vee} Q)$	$\sim[\sim(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \underline{\vee} Q)]$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	V	F

CONTRADICCIÓN

3. SIMBOLIZACIÓN DE RAZONAMIENTOS

1. P: Obtiene el empleo
   Q: Sabe inglés
   R: Domina el programa

   $P \rightarrow Q,\ \sim R \rightarrow \sim P \vdash P \rightarrow \sim(\sim Q \vee \sim R)$

   $$[(P \rightarrow Q) \wedge (\sim R \rightarrow \sim P)] \rightarrow [P \rightarrow \sim(\sim Q \vee \sim R)]$$

   (Razonamiento *válido*)

3. P: El gobernante es honesto
   Q: El gobernante es competente
   R: El gobernante resuelve los problemas del país

   $R \rightarrow (P \wedge Q) \vdash (\sim P \vee \sim Q) \rightarrow \sim R$

   $$[R \rightarrow (P \wedge Q)] \rightarrow [(\sim P \vee \sim Q) \rightarrow \sim R]$$

   (Razonamiento *válido*)

5. P: Apruebas
   Q: Pagas
   R: Pasas a 2º año

   $R \rightarrow (P \wedge Q),\ Q \wedge \sim P \vdash \sim R$

   $$\{[R \rightarrow (P \wedge Q)] \wedge (Q \wedge \sim P)\} \rightarrow \sim R$$

   (Razonamiento *válido*)

7. P: José estuvo en la fiesta
   Q: José tenía un carro
   R: José cometió el crimen

$P \to (R \to Q) \vdash (P \wedge \sim Q) \to \sim R$

$$[P \to (R \to Q)] \to [(P \wedge \sim Q) \to \sim R]$$

(Razonamiento *válido*)

9. P: Tienes el virus
Q: Tienes náuseas
R: Tienes fiebre

$P \to (Q \wedge R),\ P \vee R \vdash \sim Q \to R$

$$\{[P \to (Q \wedge R)] \wedge (P \vee R)\} \to (\sim Q \to R)$$

(Razonamiento *válido*)

11. P: Tienes dinero
Q: Pides una beca
R: Entras en la universidad

$(R \to Q) \to \sim P \vdash P \to (R \wedge \sim Q)$

$$[(R \to Q) \to \sim P] \to [P \to (R \wedge \sim Q)]$$

(Razonamiento *válido*)

13. P: Aumenta el desempleo
Q: Disminuye el consumo
R: Aumenta el gasto del Estado

$P \to (Q \vee R),\ \sim Q \vdash \sim P$

$$\{[P \to (Q \vee R)] \wedge \sim Q\} \to \sim P$$

(Razonamiento *no válido*)

15. P: X cobra las utilidades
Q: X compra el carro
R: X paga la hipoteca
S: X pierde la casa

$\sim P \to \sim(Q \wedge R),\ \sim R \to S \vdash \sim P \to (\sim S \to \sim Q)$

$$\{[\sim P \to \sim(Q \wedge R)] \wedge (\sim R \to S)\} \to [\sim P \to (\sim S \to \sim Q)]$$

(Razonamiento *válido*)

17. P: El carro funciona
Q: El carro tiene gasolina
R: El carro tiene batería
S: Las luces funcionan

$P \to (Q \wedge R),\ S \to R \vdash S \to P$

$$\{[P \to (Q \wedge R)] \wedge (S \to R)\} \to (S \to P)$$

(Razonamiento *no válido*)

19. P: Perteneces a la universidad
Q: Estás solvente en la biblioteca
R: Puedes consultar los libros
S: Eres tesista
T: Eres doctor

$\sim(P \wedge Q) \to [R \to (S \vee T)],\ (\sim S \wedge \sim T) \vdash \sim Q$

$$\{\{\sim(P \wedge Q) \to [R \to (S \vee T)]\} \wedge (\sim S \wedge \sim T)\} \to \sim Q$$

(Razonamiento *no válido*)

21. P: El televisor funciona
Q: El VHS funciona
R: Hay electricidad
S: El televisor está averiado

$(P \vee Q) \rightarrow R,\ (R \wedge \sim P) \rightarrow S \vdash (\sim P \wedge \sim Q) \rightarrow (\sim R \vee S)$

$$\{[(P \vee Q) \rightarrow R] \wedge [(R \wedge \sim P) \rightarrow S]\} \rightarrow [(\sim P \wedge \sim Q) \rightarrow (\sim R \vee S)]$$

(Razonamiento *válido*)

23. P: Vendes el carro
Q: Vendes el apartamento
R: Compras la casa

$R \rightarrow (P \vee Q) \vdash \sim P \rightarrow \sim (R \wedge \sim Q)$

$$[R \rightarrow (P \vee Q)] \rightarrow [\sim P \rightarrow \sim (R \wedge \sim Q)]$$

(Razonamiento *válido*)

25. P: Sacas más de 17 en matemáticas
Q: Sacas más de 17 en física
R: Obtienes la mención

$R \rightarrow (P \wedge Q) \vdash \sim R \rightarrow (\sim P \vee \sim Q)$

$$[R \rightarrow (P \wedge Q)] \rightarrow [\sim R \rightarrow (\sim P \vee \sim Q)]$$

(Razonamiento *no válido*)

27. P: Se postula Pedro
Q: Gana Isabel
R: Gana Juan
S: Gana Carlos

$P \rightarrow \sim Q,\ \sim Q \rightarrow (R \vee S) \vdash (\sim R \wedge \sim S) \rightarrow \sim P$

$$\{(P \rightarrow \sim Q) \wedge [\sim Q \rightarrow (R \vee S)]\} \rightarrow [(\sim R \wedge \sim S) \rightarrow \sim P]$$

(Razonamiento *válido*)

29. P: Está en tu casa
Q: Está en mi casa
R: Está en el carro
S: Está en la empresa

$(\sim P \wedge \sim Q) \rightarrow (R \vee S), \sim R \vdash \sim S \rightarrow (P \vee Q)$

$$\{[(\sim P \wedge \sim Q) \rightarrow (R \vee S)] \wedge \sim R\} \rightarrow [\sim S \rightarrow (P \vee Q)]$$

(Razonamiento *válido*)

4. PRUEBAS FORMALES

1. $P\to(Q\wedge R),\ P \vdash R$

1 (1)	$P\to(Q\wedge R)$	premisa
2 (2)	P	premisa
1,2 (3)	$Q\wedge R$	MP 1,2
1,2 (4)	R	E$\wedge$ 3

3. $P\to(Q\to R),\ S\to Q,\ P,\ S \vdash R$

1 (1)	$P\to(Q\to R)$	premisa
2 (2)	$S\to Q$	premisa
3 (3)	P	premisa
4 (4)	S	premisa
1,3 (5)	$Q\to R$	MP 1,3
2,4 (6)	Q	MP 2,4
1,2,3,4 (7)	R	MP 5,6

5. $\sim P\to(Q\wedge R),\ P\to S,\ \sim S\wedge\sim T \vdash R$

1 (1)	$\sim P\to(Q\wedge R)$	premisa
2 (2)	$P\to S$	premisa
3 (3)	$\sim S\wedge\sim T$	premisa
3 (4)	$\sim S$	E$\wedge$ 3
2,3 (5)	$\sim P$	MT 2,4
1,2,3 (6)	$Q\wedge R$	MP 1,5
1,2,3 (7)	R	E$\wedge$ 6

7. $P\to(Q\to R),\ P\to Q,\ P \vdash R$

1(1)	$P\to(Q\to R)$	premisa
2(2)	$P\to Q$	premisa
3(3)	P	premisa
1,3(4)	$Q\to R$	MP 1,3
2,3(5)	Q	MP 2,3
1,2,3(6)	R	MP 4,5

9. $(P \lor Q) \to (R \land S),\ R \to T,\ Q \vdash T$

1	(1) $(P \lor Q) \to (R \land S)$	premisa
2	(2) $R \to T$	premisa
3	(3) Q	premisa
3	(4) $P \lor Q$	I$\lor$ 3
1,3	(5) $R \land S$	MP 1,4
1,3	(6) R	E$\land$ 5
1,2,3	(7) T	MP 2,6

11. $(P \land Q) \to (R \to S),\ P \land T,\ Q,\ {\sim}S \vdash {\sim}R$

1	(1) $(P \land Q) \to (R \to S)$	premisa
2	(2) $P \land T$	premisa
3	(3) Q	premisa
4	(4) ${\sim}S$	premisa
2	(5) P	E$\land$ 2
2,3	(6) $P \land Q$	I$\land$ 3,5
1,2,3	(7) $R \to S$	MP 1,6
1,2,3,4	(8) ${\sim}R$	MT 4,7

13. $P \to (Q \land R),\ {\sim}S \to T,\ P \land {\sim}T \vdash Q \land S$

1	(1) $P \to (Q \land R)$	premisa
2	(2) ${\sim}S \to T$	premisa
3	(3) $P \land {\sim}T$	premisa
3	(4) P	E$\land$ 3
1,3	(5) $Q \land R$	MP 1,4
1,3	(6) Q	E$\land$ 5
3	(7) ${\sim}T$	E$\land$ 3
2,3	(8) ${\sim}{\sim}S$	MT 2,6
2,3	(9) S	DN 7
1,2,3	(10) $Q \land S$	I $\land$ 6,9

15. $P \to Q,\ R \to {\sim}Q \vdash {\sim}(P \land R)$

1	(1) $P \to Q$	premisa
2	(2) $R \to {\sim}Q$	premisa
3	(3) $P \land R$	hipótesis
3	(4) P	E$\land$ 3

3 (5)	R	$E\wedge$ 3
1,3 (6)	Q	MP 1,4
2,3 (7)	$\sim Q$	MP 2,5
1,2,3 (8)	$Q\wedge\sim Q$	$I\wedge$ 6,7
1,2 (9)	$\sim(P\wedge R)$	RA 3-8

17. $P\rightarrow Q,\ R\rightarrow P,\ R\rightarrow\sim Q \vdash \sim R$

1 (1)	$P\rightarrow Q$	premisa
2 (2)	$R\rightarrow P$	premisa
3 (3)	$R\rightarrow\sim Q$	premisa
4 (4)	R	hipótesis
2,4 (5)	P	MP 2,4
3,4 (6)	$\sim Q$	MP 3,4
1,2,4 (7)	Q	MP 1,5
1,2,3,4 (8)	$Q\wedge\sim Q$	$I\wedge$ 6,7
1,2,3 (9)	$\sim R$	RA 4-8

19. $P\rightarrow(Q\wedge R),\ R\rightarrow\sim Q \vdash \sim P$

1 (1)	$P\rightarrow(Q\wedge R)$	premisa
2 (2)	$R\rightarrow\sim Q$	premisa
3 (3)	P	hipótesis
1,3 (4)	$Q\wedge R$	MP 1,3
1,3 (5)	Q	$E\wedge$ 4
1,3 (6)	R	$E\wedge$ 4
1,2,3 (7)	$\sim Q$	MP 2,6
1,2,3 (8)	$Q\wedge\sim Q$	$I\wedge$ 5,7
1,2 (9)	$\sim P$	RA 3-8

21. $(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow R) \vdash \sim[(P\rightarrow Q)\wedge\sim(Q\rightarrow R)]$

1 (1)	$(P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow R)$	premisa
2 (2)	$(P\rightarrow Q)\wedge\sim(Q\rightarrow R)$	hipótesis
2 (3)	$P\rightarrow Q$	$E\wedge$2
2 (4)	$\sim(Q\rightarrow R)$	$E\wedge$2
1,2 (5)	$Q\rightarrow R$	MP1,3
1,2 (6)	$(Q\rightarrow R)\wedge\sim(Q\rightarrow R)$	$I\wedge$ 4,5
1 (7)	$\sim[(P\rightarrow Q)\wedge\sim(Q\rightarrow R)]$	RA 2-6

23. $\sim[(P\wedge Q)\rightarrow R]\rightarrow S,\ T\rightarrow(\sim S\wedge Q) \vdash (T\wedge P)\rightarrow R$

1	(1)	$\sim[(P\wedge Q)\rightarrow R]\rightarrow S$	premisa
2	(2)	$T\rightarrow(\sim S\wedge Q)$	premisa
3	(3)	$T\wedge P$	hipótesis
3	(4)	T	E$\wedge$3
3	(5)	P	E$\wedge$3
2,3	(6)	$\sim S\wedge Q$	MP 2,4
2,3	(7)	$\sim S$	E$\wedge$6
1,2,3	(8)	$\sim\sim[(P\wedge Q)\rightarrow R]$	MT 1,7
1,2,3	(9)	$(P\wedge Q)\rightarrow R$	DN 8
2,3	(10)	Q	E$\wedge$ 6
2,3	(11)	$P\wedge Q$	I$\wedge$ 5,10
1,2,3	(12)	R	MP 9,11
1,2	(13)	$(T\wedge P)\rightarrow R$	PC 3-12

25. $P\rightarrow(Q\wedge R),\ (P\wedge Q)\rightarrow S \vdash P\rightarrow S$

1	(1)	$P\rightarrow(Q\wedge R)$	premisa
2	(2)	$(P\wedge Q)\rightarrow S$	premisa
3	(3)	P	hipótesis
1,3	(4)	$Q\wedge R$	MP 1,3
1,3	(5)	Q	E$\wedge$ 4
1,3	(6)	$P\wedge Q$	I$\wedge$ 3,5
1,2,3	(7)	S	MP 2,6
1,2	(8)	$P\rightarrow S$	PC 3-7

27. $(P\wedge Q)\rightarrow(Q\wedge R) \vdash Q\rightarrow(P\rightarrow R)$

1	(1)	$(P\wedge Q)\rightarrow(Q\wedge R)$	premisa
2	(2)	Q	hipótesis
3	(3)	P	hipótesis
2,3	(4)	$P\wedge Q$	I$\wedge$ 2,3
1,2,3	(5)	$Q\wedge R$	MP 1,4
1,2,3	(6)	R	E$\wedge$ 5
1,2	(7)	$P\rightarrow R$	PC 3-6
1	(8)	$Q\rightarrow(P\rightarrow R)$	PC 2-7

29. $(P\wedge Q)\rightarrow\sim R,\ Q\rightarrow R \vdash Q\rightarrow\sim P$

1	(1)	$(P\wedge Q)\rightarrow\sim R$	premisa
2	(2)	$Q\rightarrow R$	premisa
3	(3)	Q	hipótesis
4	(4)	P	hipótesis
3,4	(5)	$P\wedge Q$	I$\wedge$ 3,4
1,3,4	(6)	$\sim R$	MP 1,5
2,3	(7)	R	MP 2,3
1,2,3,4	(8)	$R\wedge\sim R$	I$\wedge$ 6,7
1,2,3	(9)	$\sim P$	RA 4-8
1,2	(10)	$Q\rightarrow\sim P$	PC 3-9

31. $P\rightarrow Q,\ (Q\wedge R)\rightarrow\sim S \vdash (S\wedge R)\rightarrow\sim P$

1	(1)	$P\rightarrow Q$	premisa
2	(2)	$(Q\wedge R)\rightarrow\sim S$	premisa
3	(3)	$S\wedge R$	hipótesis
4	(4)	P	hipótesis
1,4	(5)	Q	MP 1,4
3	(6)	R	E$\wedge$ 3
1,3,4	(7)	$Q\wedge R$	I$\wedge$ 5,6
1,2,3,4	(8)	$\sim S$	MP 2,7
3	(9)	S	E$\wedge$ 3
1,2,3,4	(10)	$S\wedge\sim S$	I$\wedge$ 8,9
1,2,3	(11)	$\sim P$	RA 4-10
1,2	(12)	$(S\wedge R)\rightarrow\sim P$	PC 3-11

33. $(P\wedge Q)\rightarrow R \vdash (P\rightarrow Q)\rightarrow\sim(P\wedge\sim R)$

1	(1)	$(P\wedge Q)\rightarrow R$	premisa
2	(2)	$P\rightarrow Q$	hipótesis
3	(3)	$P\wedge\sim R$	hipótesis
3	(4)	P	E$\wedge$ 3
2,3	(5)	Q	MP 2,4
2,3	(6)	$P\wedge Q$	I$\wedge$ 4,5
1,2,3	(7)	R	MP 1,6
3	(8)	$\sim R$	E$\wedge$ 3
1,2,3	(9)	$R\wedge\sim R$	I$\wedge$ 7,8
1,2	(10)	$\sim(P\wedge\sim R)$	RA 3-9
1	(11)	$(P\rightarrow Q)\rightarrow\sim(P\wedge\sim R)$	PC 2-10

35. $R \rightarrow \sim(Q \wedge P) \vdash (Q \wedge P) \rightarrow \sim R$

1	(1)	$R \rightarrow \sim(Q \wedge P)$	premisa
2	(2)	$Q \wedge P$	hipótesis
3	(3)	R	hipótesis
1,3	(4)	$\sim(Q \wedge P)$	MP 1,3
1,2,3	(5)	$(Q \wedge P) \wedge \sim(Q \wedge P)$	I$\wedge$ 2,4
1,2	(6)	$\sim R$	RA 3-5
1	(7)	$(Q \wedge P) \rightarrow \sim R$	PC 2-6

37. $P \rightarrow \sim(Q \wedge R), S \rightarrow Q \vdash (P \wedge S) \rightarrow \sim R$

1	(1)	$P \rightarrow \sim(Q \wedge R)$	premisa
2	(2)	$S \rightarrow Q$	premisa
3	(3)	$P \wedge S$	hipótesis
4	(4)	R	hipótesis
3	(5)	P	E$\wedge$ 3
3	(6)	S	E$\wedge$ 3
2,3	(7)	Q	MP 2,6
1,3	(8)	$\sim(Q \wedge R)$	MP 1,5
2,3,4	(9)	$Q \wedge R$	I$\wedge$ 4,7
1,2,3,4	(10)	$(Q \wedge R) \wedge \sim(Q \wedge R)$	I$\wedge$ 8,9
1,2,3	(11)	$\sim R$	RA 4-10
1,2	(12)	$(P \wedge S) \rightarrow \sim R$	PC 3-11

39. $P \rightarrow \sim(Q \wedge R), P \rightarrow S \vdash (S \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow \sim Q)$

1	(1)	$P \rightarrow \sim(Q \wedge R)$	premisa
2	(2)	$P \rightarrow S$	premisa
3	(3)	$S \rightarrow R$	hipótesis
4	(4)	P	hipótesis
5	(5)	Q	hipótesis
2,4	(6)	S	MP 2,4
2,3,4	(7)	R	MP 3,6
2,3,4,5	(8)	$Q \wedge R$	I$\wedge$ 5,7
1 ,4	(9)	$\sim(Q \wedge R)$	MP 1,4
1,2,3,4,5	(10)	$(Q \wedge R) \wedge \sim(Q \wedge R)$	I$\wedge$ 8,9
1,2,3,4	(11)	$\sim Q$	RA 5-10
1,2,3	(12)	$P \rightarrow \sim Q$	PC 4-11
1,2	(13)	$(S \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow \sim Q)$	PC 3-12

41. $\sim(P\rightarrow Q)\rightarrow(R\rightarrow S) \vdash P\rightarrow[(R\wedge\sim S)\rightarrow Q)]$

1	(1)	$\sim(P\rightarrow Q)\rightarrow(R\rightarrow S)$	premisa
2	(2)	P	hipótesis
3	(3)	$R\wedge\sim S$	hipótesis
4	(4)	$R\rightarrow S$	hipótesis
3	(5)	R	E$\wedge$ 3
3	(6)	$\sim S$	E$\wedge$ 3
3,4	(7)	S	MP 4,5
3,4	(8)	$S\wedge\sim S$	I$\wedge$ 6,7
3	(9)	$\sim(R\rightarrow S)$	RA 4-8
1,3	(10)	$\sim\sim(P\rightarrow Q)$	MT 1,9
1,3	(11)	$P\rightarrow Q$	DN 10
1,2,3	(12)	Q	MP 2,11
1,2	(13)	$(R\wedge\sim S)\rightarrow Q$	PC 3-12
1	(14)	$P\rightarrow[(R\wedge\sim S)\rightarrow Q]$	PC 2,13

43. $(P\rightarrow R)\vee(Q\rightarrow R),\ P\wedge Q \vdash R$

1	(1)	$(P\rightarrow R)\vee(Q\rightarrow R)$	premisa
2	(2)	$P\wedge Q$	premisa
3	(3)	$P\rightarrow R$	hipótesis
2	(4)	P	E$\wedge$ 2
2,3	(5)	R	MP 3,4
6	(6)	$Q\rightarrow R$	hipótesis
2	(7)	Q	E$\wedge$ 2
2,6	(8)	R	MP 6,7
1,2	(9)	R	E$\vee$ 1, 3-5, 6-8

45. $P\vee Q,\ P\rightarrow(R\wedge S),\ S\rightarrow T,\ \sim T\rightarrow\sim Q \vdash T$

1	(1)	$P\vee Q$	premisa
2	(2)	$P\rightarrow(R\wedge S)$	premisa
3	(3)	$S\rightarrow T$	premisa
4	(4)	$\sim T\rightarrow\sim Q$	premisa
5	(5)	P	hipótesis
2,5	(6)	$R\wedge S$	MP 2,5
2,5	(7)	S	E$\wedge$ 6
2,3,5	(8)	T	MP 3,7
9	(9)	Q	hipótesis
9	(10)	$\sim\sim Q$	DN 9

4,10	(11)	$\sim\sim T$	MT 4,10
4,10	(12)	T	DN 11
1,2,3,4	(13)	T	E$\vee$ 1, 5-8,9-12

47. $P\rightarrow(Q\vee R),\ Q\rightarrow S,\ \sim S\rightarrow\sim R \vdash P\rightarrow S$

1	(1)	$P\rightarrow(Q\vee R)$	premisa
2	(2)	$Q\rightarrow S$	premisa
3	(3)	$\sim S\rightarrow\sim R$	premisa
4	(4)	P	hipótesis
1,4	(5)	$Q\vee R$	MP 1,4
6	(6)	Q	hipótesis
2,6	(7)	S	MP 2,6
8	(8)	R	hipótesis
8	(9)	$\sim\sim R$	DN 8
3,8	(10)	$\sim\sim S$	MT 3,9
3,8	(11)	S	DN 10
1,2,3,4	(12)	S	E$\vee$ 5,6-7,8-11
1,2,3	(13)	$P\rightarrow S$	PC 4-12

BIBLIOGRAFÍA

COHEN, M. Y NAGEL, E. (1979). *Introducción a la lógica y al método científico.* Buenos Aires: Amorrortu.

COPI, I. (1981). *Introducción a la lógica*. Buenos Aires: Eudeba.

COPI, I. (1992). *Lógica simbólica*. México: CECSA.

DEAÑO, A. (1999). *Introducción a la lógica formal.* Madrid: Alianza.

GARRIDO, M. (1997). *Lógica simbólica*. Madrid: Tecnos.

MARITAIN, J. (1998). *El orden de los conceptos*. Buenos Aires: Biblioteca Argentina de Filosofía.

PIACENZA, E. (1988) *Lógica*. Caracas: UNA.

SUPPES, P. (1981). *Introducción a la lógica simbólica*. México: CECSA.

YORIS, C (1995). *Introducción a la lógica*. Caracas: UCAB.