MATEMÁTICAS GENERALES

Trabajo de ascenso presentado ante la ilustre
UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
por la Lic. LISSET DE GOUVEIA DA SILVA
para optar a la clasificación de Profesor Asistente

Autor
Lic. Lisset De Gouveia Da Silva
C.I. v- 6.313.843

Octubre, 2000

A mis hijos, que son la sal de mi vida.

A mi Pelucho, que con su amor y paciencia me ha ayudado a crecer como persona en todos los ámbitos del desarrollo humano.

A Yannet, porque sin ti sería casi imposible materializar este esfuerzo.

Cuánto tengo que agradecer a Dios, a la vida, que me ha brindado la oportunidad de contar una gran familia y con manos amigas.

Son muchas las personas a las que debo mil gracias, porque de una u otra forma, a veces hasta sin saberlo, han contribuido conmigo para que yo hoy materialice este esfuerzo.

Sin embargo quiero mencionar de una manera especial a:

Yannet que me ayudó en todo el proceso de trascripción de este material.

Roberto que es mi maestro y valoró en mi capacidad de trabajo y un gran deseo de aprender.

Los muchachos del departamento Lili, Kahela, Mili, Luis y David, por todo el apoyo, la amistad y "las tertulias" que nos han permitido aprender e interactuar con libertad, sin prejuicios y sin miedos.

Gonzalo, por su amistad y el tiempo que dedicó en ayudarme con los dibujos de las funciones trigonométricas, y a Lili, que es el vínculo.

Maritza que es mi mano derecha.

Annet, Daniel y Pelucho, por tanta paciencia...

INTRODUCCIÓN

No es novedad para ninguna persona involucrada en el medio universitario la problemática que enfrentan nuestros estudiantes de nivel superior con respecto a cátedras como Matemática, Química, Física, entre otras. Motivados por buscar una solución al alto índice de repitencia existente en la cátedra de Cálculo I de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello, se llevó a cabo una modificación de pensum y en marzo del año 1998 se redujo la carga horaria de Cálculo I y se creó la Cátedra de Matemáticas Generales, que tiene por objetivo desarrollar las destrezas matemáticas mínimas indispensables que necesita un estudiante para cursar con éxito la cátedra de Cálculo I, en el primer semestre, y evidentemente todas las cátedras afines.

En ese momento el Coordinador del Núcleo de Ciencias Básicas de la Facultad, el Lic. Roberto Escolar, me encomendó la tarea de diseñar las guías de trabajo para los estudiantes, pues esta materia es de carácter práctico y era importante que no se perdiera su objetivo principal. Esta herramienta permitiría darle el enfoque y el nivel deseados. Estas guías debían estructurarse de modo que obligaran al estudiante a detectar y corregir sus errores más frecuentes, sobre todo en álgebra y trigonometría. Mi experiencia como profesora de Cálculo I, aunque no era muy amplia, me facilitó la elaboración de dichas guías de trabajo, pues una de las limitaciones más fuertes de los alumnos en esta cátedra era, y sigue siendo, el poco dominio de contenidos algebraicos y trigonométricos, tales como el desarrollo de productos notables, factorización de expresiones algebraicas y trigonométricas, resolución de ecuaciones racionales, irracionales y trigonométricas, entre otros.

Durante estos tres años he tenido la oportunidad de afinar contenidos teóricos que son la base para aplicar adecuadamente las herramientas matemáticas y compilar ejercicios relacionados con los contenidos de la cátedra de Matemáticas Generales.

Hoy los presento como mi Trabajo de Ascenso, con la motivación del gusto por lo aprendido y el deseo de enriquecer más el conocimiento que he adquirido, a través de la interacción y el aporte de todas las personas que de algún modo puedan usar este material en beneficio propio.

Reconozco que el camino recorrido a través de alguna área del conocimiento es arduo, pero, para mí, es muy placentero y aun cuando todavía tengo mucho por recorrer estoy satisfecha por mi aporte en tópicos como inecuaciones, valor absoluto y funciones trigonométricas, en los que presento un enfoque muy poco tratado, o tal vez, muy poco detallado por los autores de esta área, pero que podría facilitarle al estudiante un desempeño más efectivo en cátedra afines o que usen como herramienta a la matemática.

El trabajo cubre todos los contenidos de la materia de Matemáticas Generales, está divido en capítulos, que constan de:

- una parte teórica, con los ejemplos pertinentes al tópico tratado cuando son necesarios;
- una parte de ejercicios resueltos, que en la mayoría de los casos están comentados con un lenguaje sencillo, para que el estudiante comprenda el por qué de cada paso, en algunos de ellos, se muestra como suelen resolverlo los estudiante destacando los errores que cometen. Esto como herramienta pedagógica, para que por contraste el alumno detecte su error y lo corrija;
- una parte de ejercicios propuestos y sus respuestas, para que el estudiante los resuelva pueda medir el dominio que ha alcanzado en cada uno de los objetivos.

Los contenidos por capítulos son los siguientes:

- Capítulo 0: Nociones de lógica y conjuntos. Este capítulo es netamente teórico , porque su finalidad es familiarizar al estudiante con la terminología adecuada y que comprenda el significado cuando sea necesario usar algunos de los conceptos correspondientes a este tema.

Los capítulos siguientes están completamente desarrollados según el esquema explicado anteriormente.

- Capítulo I: Números reales.
- Capítulo II: Operaciones con expresiones algebraicas y trigonométricas. En este capítulo hago énfasis en la importancia del dominio de las expresiones algebraicas y trigonométricas en cualquier proceso de simplificación; esto le permite al estudiante enfrentarse al concepto de funciones y relaciones numéricas en Cálculo, de una manera más natural y espontánea.
- Capítulo III: Ecuaciones. En este capítulo hago énfasis en lo importante que es mantener la equivalencia durante el proceso de resolución de una ecuación, pues esto garantiza que las soluciones obtenidas son las correctas y se evita la pérdida de raíces. Además muestro las distintas formas de solución para una misma ecuación cuando éstas existen, esto le abre un abanico de posibilidades al estudiante y le permite adaptarse al método que él considere más sencillo, en caso de existir más de uno.
- Capítulo IV: Inecuaciones. Comienza con las propiedades de orden de los números reales y las propiedades de las desigualdades, pues son la base teórica fundamental para la resolución de inecuaciones.

- Capítulo V: Valor absoluto. Lo inicio con la definición analítica de Valor Absoluto y enuncio y demuestro todas sus propiedades.

  Como aporte personal, está un razonamiento lógico en el que se muestra el uso inadecuado de algunas propiedades del valor absoluto en el proceso de resolución de inecuaciones con valor absoluto.

- Capítulo VI: Funciones trigonométricas. Comienzo con la definición de todas las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico.

  Como aporte personal, está la representación geométrica en el círculo de todas y cada una de las funciones trigonométricas, esto le facilita al estudiante la compresión de las características de cada una de estas funciones.

Este es sólo el comienzo, deseo y quiero seguir recorriendo el camino del conocimiento y espero obtener más frutos positivos de este esfuerzo.

Lic. Lisset De Gouveia Da Silva.

ÍNDICE

CAPÍTULO 0

NOCIONES DE

LÓGICA Y CONJUNTOS

1) LÓGICA SIMBÓLICA

Es la parte del álgebra que sistematiza el proceso de razonamiento a partir de una serie de premisas y establece la validez de las conclusiones que se formulan a partir de ellas.

2) PROPOSICIÓN

Es todo enunciado u oración enunciativa respecto de la cual se dispone de un criterio que permita afirmar que su contenido es verdadero o falso.

2.1) AXIOMA BÁSICO

Sólo existen dos posibilidades de veracidad: verdadero V o falso F.

2.2) CLASIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES

2.2.1) ATÓMICAS O SIMPLES

Son proposiciones que no pueden ser descompuestas en otras más simples. Si los términos de la proposición están unidos mediante la cópula "es". Se denotan con las letras minúsculas, p, q, r.

2.2.2) MOLECULARES O COMPUESTAS

Son aquellas proposiciones que están constituidas por dos o más atómicas o simples, o se establece más de una relación entre el sujeto y el predicado.

Para formar proposiciones compuestas se opera con las proposiciones simples mediante una o varias expresiones de enlace denominadas conectivos lógicos.

2.2.3) POSIBILIDADES DE VERACIDAD

a) Una proposición sólo admite dos posibilidades de veracidad V o F.

p
V
F

$2^1=2$

b) De proposiciones admiten cuatro posibilidades de veracidad.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

$2^2=4$

c) Tres proposiciones admiten ocho posibilidades de veracidad.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

$2^3=8$

d) En general "n" proposiciones admiten 2^n posibilidades de veracidad.

2.2.4) TABLA DE VERDAD

Es el arreglo que permite tener los posibles valores de verdad de una proposición compuesta a partir de los valores de verdad de las proposiciones simples que la forman.

3) CONECTIVOS LÓGICOS

Los conectivos lógicos permiten formar proposiciones compuestas y son:

1) Negociación.
2) Conjunción o producto lógico.
3) Disyunción o suma lógica.
4) Disyunción exclusiva o diferencia simétrica.
5) Implicación o condicional.
6) Bicondicional o doble implicación.

Al proceso de combinar estos conectivos para formar las proposiciones compuestas se le denomina **Operaciones Proposicionales**.

3.1) NEGACIÓN

Se representa: $\overline{p}$ o p′.

Se lee: no p

Es una operación unitaria, que genera una nueva proposición que tiene valor de verdad opuesto al de la proposición a la que se le aplica.

p	p′
V	F
F	V

3.2) CONJUNCIÓN

Se representa: $p \wedge q$.

Se lee: p y q.

La conjunción es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones mediante la conjunción "y", o conjuntiva $(\wedge)$. Esta proposición es verdadera sólo en el caso en que las proposiciones simples que la forman tengan **ambas el valor de verdad verdadero**.

p	Q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo:

¿Cuál es el valor de verdad?.

a) $3 > 2 \wedge 4 > 3$ V

b) $3 > 4 \wedge 4 > 5$ F

3.3) DISYUNCIÓN INCLUSIVA

Se representa: $p \vee q$.

Se lee: p o q.

La disyunción inclusiva es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones mediante la letra "o". En lógica la disyunción inclusiva se simboliza $(\vee)$. Esta proposición es verdadera cuando **al menos una** de las dos que la forman **es verdadera**.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:

¿Cuál es el valor de verdad de?:

a) $3 < 5 \vee 3 > 5$ V

b) $3 < 1 \vee 3 > 5$ F

c) $3 < 5 \vee 3 < 4$ V

3.4) DISYUNCIÓN EXCLUSIVA

Se representa: $p \veebar q$.

Se lee: o p o q.

La disyunción exclusiva es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones mediante las letras "o", "o". En lógica la disyunción exclusiva se simboliza $(\veebar)$. Esta proposición es verdadera cuando **sólo una** de las proposiciones que la forman **es verdadera**.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:

¿Cuál es el valor de verdad?:

a) $3 < 5 \veebar 3 = 5$ V

b) $3 < 5 \veebar 3 = 5$ F

c) $3 = 3 \veebar 4 = 4$ F

3.5) CONDICIONAL O IMPLICACIÓN

Se representa $p \rightarrow q$.

p se llama antecedente y q consecuente.

Se lee: si p entonces q

El condicional es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones mediante las palabras "si, entonces". Esta proposición **será**

falsa solamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplo:

a) Cuál es el valor de verdad de:

a) $7 > 5 \to 49 > 25$ V
b) $7 > 5 \to 49 < 25$ F
c) $7 < 5 \to 49 > 25$ V
d) $7 < 5 \to 49 < 25$ V

b) Sabiendo que p: $3^2=9$ y q: 2 es par. ¿Cuál es el valor de verdad de "si p entonces q"?

p es V.

q es V; entonces $p \to q$ es V.

Otras formas de leer el condicional $p \to q$ **son:**

a) Si p entonces q.
b) p implica q.
c) q si p.
d) p sólo si q.
e) p es condición suficiente para q.
f) q es condición necesaria para p.

3.6) BICONDICIONAL O DOBLE IMPLICACIÓN

Se representa: $p \leftrightarrow q$

Se lee: p si y sólo si q.

La bicondicional es la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones mediante las palabras "si y sólo si", o "equivale".Esta proposición es verdadera cuando las que la forman tienen el mismo grado de verdad.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

4) CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE:

Supongamos la implicación: $p \rightarrow q$, verdadera. Entonces:

1) Si p es V, la única posibilidad para q es ser V. Esto se resume diciendo que "p" es condición suficiente para "q" , es decir, el antecedente es suficiente para el consecuente.

2) Si q es V, p puede ser V ó F, y la implicación sigue siendo V, sin embargo para esto es necesario que q sea V. Esto se resume diciendo "q" es condición necesaria para "p", es decir, el consecuente es necesario para el antecedente.

5) IMPLICACIONES ASOCIADAS

Sea el condicional $p \to q$ que llamaremos directo, en conexión con él, se presentan otros tres, que se obtienen por permutaciones o negaciones del antecedente y del consecuente.

$q \to p$ Recíproco.

$\overline{p} \to \overline{q}$ Contrario.

$\overline{q} \to \overline{p}$ Contrarrecíproco.

Las cuatro implicaciones propuestas se llaman conjugadas y cualquiera de ellas puede tomarse como directa. Tal como se muestra en el siguiente esquema:

$$\begin{tikzcd}
p \to q \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[drr, leftrightarrow] & & q \to p \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dll, leftrightarrow] \\
\overline{p} \to \overline{q} \arrow[rr, leftrightarrow] & & \overline{q} \to \overline{p}
\end{tikzcd}$$

Las implicaciones señaladas con las flechas azules son entre sí contrarias.

Las implicaciones señaladas con las flechas rojas son entre sí recíprocas.

Las implicaciones señaladas con las flechas verdes son entre sí contrarrecíprocas. Dos implicaciones contrarrecíprocas son equivalentes, es decir, tienen el mismo valor de verdad, entonces la proposición: $(p \to q) \leftrightarrow (\overline{q} \to \overline{p})$, es una tautología.

Si la implicación directa es V, también lo es la contrarrecíproca. No se puede afirmar que la recíproca o la contraria sea V.

Sin embargo si la implicación directa es V y también lo es su recíproca o su contraria, entonces son V las cuatro implicaciones asociadas, y las proposiciones antecedentes y consecuente son equivalentes.

Así si $p \to q$ es V, entonces p es suficiente para q. Si $q \to p$ es V entonces p es necesaria para q. Lo que se traduce en "p" es condición suficiente y necesaria para "q". Simbólicamente $p \leftrightarrow q$.

Esto se aclara con el siguiente ejemplo

Directo: Si es paralelogramo entonces es cuadrilátero.

Recíproco: Si es cuadrilátero entonces es paralelogramo.

Contrario: Si no es paralelogramo entonces no es cuadrilátero.

Contrarrecíproco: Si no es cuadrilátero entonces no es paralelogramo.

Observe que la implicación directa es verdadera al igual que la contrarrecíproca, mientras que la recíproca y la contraria son falsas.

6) CLASIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS SEGÚN SUS VALORES DE VERDAD

6.1) TAUTOLOGÍA

Es una proposición cuyo valor de verdad es verdadero, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ es una tautología.

6.2) CONTRADICCIÓN

Es una proposición cuyo valor de verdad es falso, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

6.3) CONTINGENCIA

Es una proposición que toma valores de verdad verdaderos en unos casos y falsos en otros, dependiendo de los valores de verdad de las proposiciones que lo componen.

7) PROPOSICIONES LÓGICAMENTE EQUIVALENTES O LEYES LÓGICAS

Dos proposiciones son lógicamente equivalentes si al conectarlas mediante el bicondicional se obtiene una proposición que es tautológica.

1) **Involución** $\left(\overline{p}\right)' \leftrightarrow p$

2) **Idempotencia** $(p \wedge p) \leftrightarrow p$

3) **Conmutatividad**
   a) De la conjunción: $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
   b) De la disyunción: $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

4) **Asociatividad**
   a) De la conjunción: $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
   b) De la Disyunción: $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

5) **Distribuitividad**
   a) De la conjunción respecto de la disyunción:
   $$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$
   b) De la disyunción respecto de la conjunción:
   $$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

6) **Leyes de Morgan**
   a) La negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones:

$$\overline{(p \vee q)} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}.$$

b) La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones:

$$\overline{(p \wedge q)} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}.$$

7) Negación de una implicación

$$\overline{(p \rightarrow q)} \leftrightarrow p \wedge \overline{q}.$$

8) Equivalencia de la implicación

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \overline{p} \wedge q.$$

8) FUNCIONES PROPOSICIONALES. CUANTIFICADORES

Se define a la función proposicional en una variable o indeterminada como toda oración en la que figura x (o cualquier otra variable) como sujeto u objeto directo, por lo que su valor de verdad depende del valor que tome la variable.

Por ejemplo: P(x): x es un número par

P(2): 2 es un número par (V)

P(1): 1 es un número impar (F)

Se pueden definir funciones proposicionales en dos variables.

Por ejemplo: Q(x,y): x es múltiplo de y

Q(3,6): 3 es múltiplo de 6 (F)

Q(10,2): 10 es múltiplo de 2 (V)

Las funciones proposicionales no son proposiciones, porque no se le puede asignar un valor de verdad, pues éste depende del valor de la variable. Ahora bien una función proposicional se transforma en una proposición general con el uso de los cuantificadores.

Se definen dos cuantificadores:

Cuantificador Universal: "para todo x".
Simbólicamente se expresa así: $\forall x : P(x)$

Cuantificador Existencial: "existe al menos un x".
Simbólicamente se expresa así: $\exists x / P(x)$.

Una función proposicional cuantificada universalmente es verdadera (V) sí y sólo si son verdaderas todas las proposiciones particulares asociadas a ella.

Una función proposicional cuantificada existencialmente es verdadera (V), si al menos una de las particulares asociadas a ella es verdadera.

Por ejemplo:

- **Todos los números reales son pares.**

Simbólicamente
La función proposicional: P(x): x es un número real par
Cuantificada: $\forall x \in R : P(x)$ (F)

- **Existen números reales que son pares.**

Cuantificada: $\exists x \in R / P(x)$ (V)

9) CONJUNTO

Es una colección de objetos bien definidos, o bien, un grupo de entes con una o más características comunes.

Los objetos que pertenecen al conjunto se llaman **elementos** del mismo. Los conjuntos pueden tener cualquier número de elementos, no importa el orden de los mismos y los elementos repetidos se consideran únicos.

Para denotar conjuntos generalmente se usan letras mayúsculas y para especificar elementos se usarán minúsculas, a menos que dichos elementos sean a su vez, conjuntos. Para indicar la pertenencia de un elemento a un conjunto será utilizado el símbolo $: \in$, que se lee: "pertenece a".

9.1) FORMAS DE DETERMINAR UN CONJUNTO:

- Un conjunto se determina por **extensión** si y sólo si se enumeran todos los elementos que lo constituyen, es decir, se listan sus elementos.
- Un conjunto se define por **comprensión** si y sólo si se enuncia la propiedad que caracteriza a sus elementos.

9.2) CONJUNTOS ESPECIALES

9.2.1) CONJUNTO VACÍO

Es aquel que carece de elementos. El conjunto vacío se define simbólicamente así: $\varnothing = \{x / x \neq x\}$, en este caso la propiedad relativa a x es $P(x) : x \neq x$, la cual resulta falsa cualquiera que sea x.

9.2.2) CONJUNTO UNITARIO

Está formado por un único elemento. Si A es el conjunto cuyo único elemento es a, escribiremos $A = \{a\} = \{x / x = a\}$.

9.2.3) CONJUNTO UNIVERSAL

Está formado por todos los elementos que interviene en el tema en estudio U = {x / x = x}.

10) INCLUSIÓN

Sean A y B dos conjuntos. Si ocurre que todo elemento de A pertenece a B, diremos que A está incluido en B, o que A es Parte de B, o que A es un subconjunto de B, y escribimos $A \subset B$

Definición : $A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$.

En la inclusión no puede darse que haya un elemento de A que no pertenezca a B.

10.1) IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, todo elemento del primero pertenece al segundo y todo elemento de éste pertenece al primero.

Definición: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

10.2) PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN

- **Reflexiva:** todo conjunto es subconjunto de sí mismo. $A \subset A$.
- **Transitiva:** si un conjunto es subconjunto de otro y éste esta incluido en un tercero, entonces el primero es subconjunto del tercero.

  $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.
- **Antisimétrica:** si un conjunto es subconjunto de otro y éste es subconjunto del primero entonces son iguales, es una consecuencia de la definición de igualdad de conjuntos.
- El Conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto: $\varnothing \subset A$.

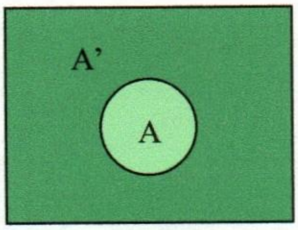
- Todo conjunto es subconjunto del universal: $A \subset U$.

11) OPERACIONES CON CONJUNTOS

11.1) COMPLEMENTACIÓN DE CONJUNTOS

El complemento del conjunto A es el conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A. Se denota A^c, A'.

Simbólicamente: $A^c = \{x \in U / x \notin A\}$.



Es la operación equivalente en lógica a la negación.

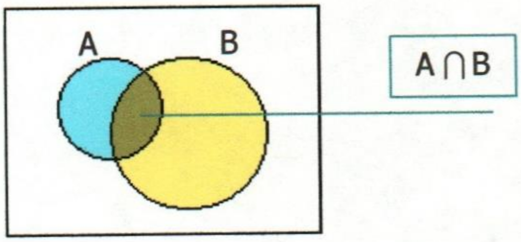
11.1.1) PROPIEDADES DE LA COMPLEMENTACIÓN

- El complemento del vacío es el universal. $\varnothing^c = U$.
- El complemento del universal es el vacío $U^c = \varnothing$.
- Involución: $(A^C)^C = A$.
- $A \subset B \rightarrow B^c \subset A^c$.

11.2) INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B. Los elementos de la intersección pertenecen simultáneamente a los dos conjuntos, se define como la conjunción en lógica.

Simbólicamente: $A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$



11.2.1) PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- **Indempotencia:** $A \cap A = A$.
- **Elemento Neutro** (U) : $A \cap U = A$.
- **Conmutativa:** $A \cap B = B \cap A$.
- **Asociativa:** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Si la intersección de dos conjuntos es vacía, dichos conjuntos se llaman **disjuntos**.

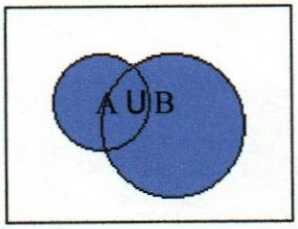
$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing.$$

11.3) UNIÓN DE CONJUNTOS

La unión de dos conjunto A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B.

El "o" utilizado es incluyente, y pertenecen a la unión aquellos elementos del universal (U) para los cuales es verdadera la disyunción inclusiva que se plantea en la definición de unión de conjuntos. A la unión pertenecen todos los elementos de los conjuntos dados.

Simbólicamente: $A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$.



11.3.1) PROPIEDADES DE LA UNIÓN

- **Elemento Neutro** $(\varnothing)$: $A \cup \varnothing = A$.
- **Idempotencia:** $A \cup A = A$.
- **Conmutativa:** $A \cup B = B \cup A$.
- **Asociativa:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup U = U$.

11.4) LEYES DISTRIBUTIVAS

La unión y la intersección de dos conjuntos pueden conectarse a través de las leyes distributivas:

a) De la intersección respecto de la unión:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

b) De la unión respecto de la intersección:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$$

11.5) LEYES DE MORGAN

Las leyes de Morgan permiten relacionar la complementación con la unión e intersección, así:

a) El complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

b) El complemento de la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de sus complementos

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

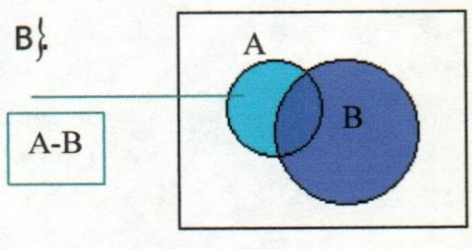
11.6) DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

Simbólicamente: $A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$

La diferencia de conjuntos **no** es conmutativa,

A-B es diferente de B-A.



11.6.1) PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA

La diferencia de conjuntos es igual a la intersección del 1^ro^ con el complemento del 2^do^.

$$\boxed{A - B = A \cap B^c}$$

Otras propiedades son:

$A - \varnothing = A$

$A - A = \varnothing$

$A - U = \varnothing$

9) CONJUNTO

Es una colección de objetos bien definidos, o bien, un grupo de entes con una o más características comunes.

Los objetos que pertenecen al conjunto se llaman **elementos** del mismo. Los conjuntos pueden tener cualquier número de elementos, no importa el orden de los mismos y los elementos repetidos se consideran únicos.

Para denotar conjuntos generalmente se usan letras mayúsculas y para especificar elementos se usarán minúsculas, a menos que dichos elementos sean a su vez, conjuntos. Para indicar la pertenencia de un elemento a un conjunto será utilizado el símbolo : $\in$, que se lee: "pertenece a".

9.1) FORMAS DE DETERMINAR UN CONJUNTO:

- Un conjunto se determina por **extensión** si y sólo si se enumeran todos los elementos que lo constituyen, es decir, se listan sus elementos.
- Un conjunto se define por **comprensión** si y sólo si se enuncia la propiedad que caracteriza a sus elementos.

9.2) CONJUNTOS ESPECIALES

9.2.1) CONJUNTO VACÍO

Es aquel que carece de elementos. El conjunto vacío se define simbólicamente así: $\varnothing = \{x / x \neq x\}$, en este caso la propiedad relativa a x es $P(x)$: $x \neq x$, la cual resulta falsa cualquiera que sea x.

9.2.2) CONJUNTO UNITARIO

Está formado por un único elemento. Si A es el conjunto cuyo único elemento es a, escribiremos $A = \{a\} = \{x / x = a\}$.

9.2.3) CONJUNTO UNIVERSAL

Está formado por todos los elementos que interviene en el tema en estudio U = {x / x = x}.

10) INCLUSIÓN

Sean A y B dos conjuntos. Si ocurre que todo elemento de A pertenece a B, diremos que A está incluido en B, o que A es Parte de B, o que A es un subconjunto de B, y escribimos $A \subset B$

Definición : $A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$.

En la inclusión no puede darse que haya un elemento de A que no pertenezca a B.

10.1) IGUALDAD DE CONJUNTOS

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, todo elemento del primero pertenece al segundo y todo elemento de éste pertenece al primero.

Definición: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

10.2) PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN

- **Reflexiva:** todo conjunto es subconjunto de sí mismo. $A \subset A$.
- **Transitiva:** si un conjunto es subconjunto de otro y éste esta incluido en un tercero, entonces el primero es subconjunto del tercero.

  $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$.
- **Antisimétrica:** si un conjunto es subconjunto de otro y éste es subconjunto del primero entonces son iguales, es una consecuencia de la definición de igualdad de conjuntos.
- El Conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto: $\varnothing \subset A$.

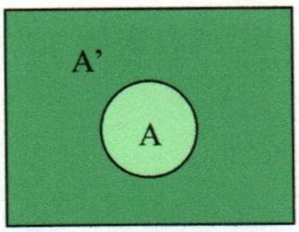
- Todo conjunto es subconjunto del universal: $A \subset U$.

11) OPERACIONES CON CONJUNTOS

11.1) COMPLEMENTACIÓN DE CONJUNTOS

El complemento del conjunto A es el conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A. Se denota A^c, A'.

Simbólicamente: $A^c = \{x \in U / x \notin A\}$.



Es la operación equivalente en lógica a la negación.

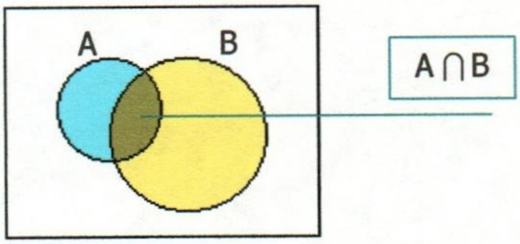
11.1.1) PROPIEDADES DE LA COMPLEMENTACIÓN

- El complemento del vacío es el universal. $\varnothing^c = U$.
- El complemento del universal es el vacío $U^c = \varnothing$.
- Involución: $(A^C)^C = A$.
- $A \subset B \rightarrow B^c \subset A^c$.

11.2) INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B. Los elementos de la intersección pertenecen simultáneamente a los dos conjuntos, se define como la conjunción en lógica.

Simbólicamente: $A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$.

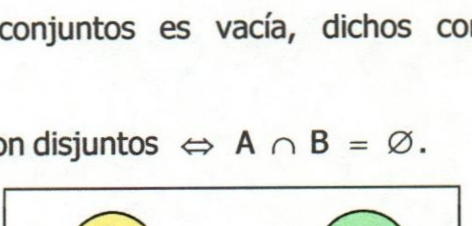


11.2.1) PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN

- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- **Indempotencia:** $A \cap A = A$.
- **Elemento Neutro** (U) : $A \cap U = A$.
- **Conmutativa:** $A \cap B = B \cap A$.
- **Asociativa:** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Si la intersección de dos conjuntos es vacía, dichos conjuntos se llaman **disjuntos**.

$$\text{A y B son disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing.$$

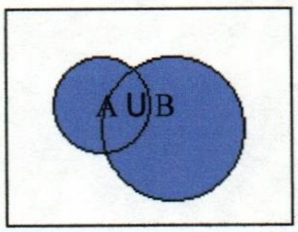


11.3) UNIÓN DE CONJUNTOS

La unión de dos conjunto A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B.

El "o" utilizado es incluyente, y pertenecen a la unión aquellos elementos del universal (U) para los cuales es verdadera la disyunción inclusiva que se plantea en la definición de unión de conjuntos. A la unión pertenecen todos los elementos de los conjuntos dados.

Simbólicamente: $A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$.



11.3.1) PROPIEDADES DE LA UNIÓN

- **Elemento Neutro** $(\varnothing)$: $A \cup \varnothing = A$.
- **Idempotencia:** $A \cup A = A$.
- **Conmutativa:** $A \cup B = B \cup A$.
- **Asociativa:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $A \cup U = U$.

11.4) LEYES DISTRIBUTIVAS

La unión y la intersección de dos conjuntos pueden conectarse a través de las leyes distributivas:

a) De la intersección respecto de la unión:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

b) De la unión respecto de la intersección:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$$

11.5) LEYES DE MORGAN

Las leyes de Morgan permiten relacionar la complementación con la unión e intersección, así:

a) El complemento de la unión de dos conjuntos es igual a la intersección de sus complementos:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

b) El complemento de la intersección de dos conjuntos es igual a la unión de sus complementos

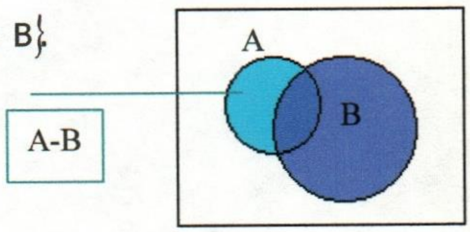
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

11.6) DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

Simbólicamente: $A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$.

La diferencia de conjuntos **no** es conmutativa, A-B es diferente de B-A.



11.6.1) PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA

La diferencia de conjuntos es igual a la intersección del 1ro con el complemento del 2do.

$$\boxed{A - B = A \cap B^c}$$

Otras propiedades son:

$A - \varnothing = A$

$A - A = \varnothing$

$A - U = \varnothing$

CAPÍTULO I

NÚMEROS REALES

1) LOS NÚMEROS REALES

Existe un conjunto infinito de números que está formado por la unión de otros dos conjuntos, denominado **Conjunto de los Números Reales**.

El Conjunto de los Números Reales, se obtiene a partir de la unión del conjunto de los números Racionales con los Irracionales.

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$$

Q es el conjunto de los números racionales. Los números racionales se definen como el cociente de dos enteros, siendo el divisor diferente de cero. En un lenguaje matemático, se expresa esta definición de la siguiente forma:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \mathbf{p} \mid \mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \wedge \mathbf{a} \in \mathbf{Z} \wedge \mathbf{b} \in \mathbf{Z}^* \right\}$$

Como consecuencia de esta definición se obtiene que todo número racional tiene una expresión decimal periódica.

Son ejemplos de números racionales

$\frac{7}{3}$=2,333... , $-\frac{15}{9}$ = -1,666..., $\frac{20}{4}$ =5,000...

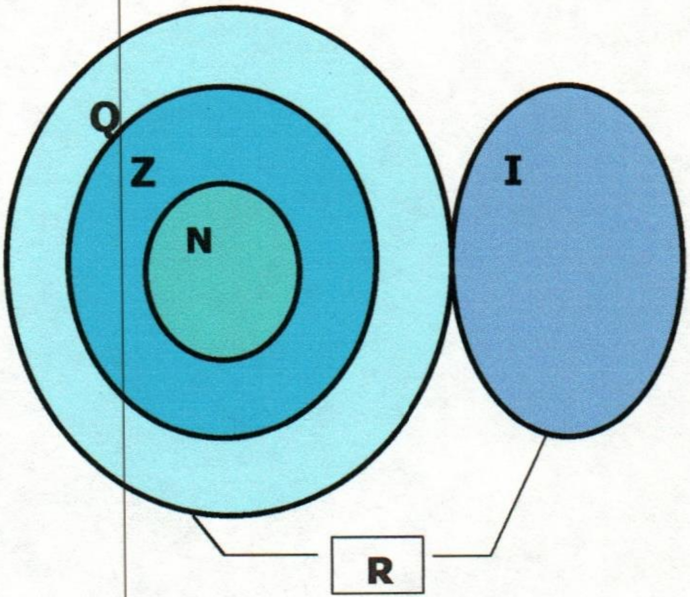
El conjunto **Q**, contiene al conjunto de los números enteros **Z** y a su vez, éste contiene al conjunto de los números naturales **N**. Así

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$$

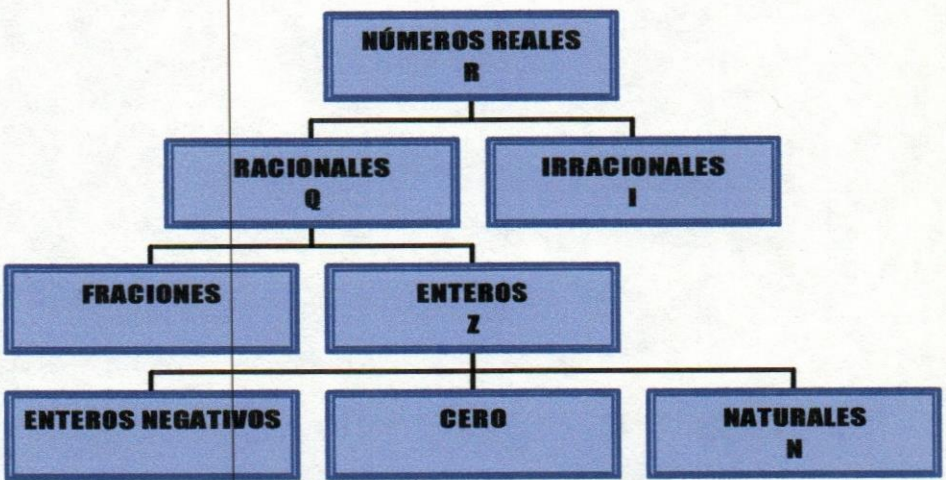
I es el conjunto de los números irracionales. Los números irracionales, no pueden obtenerse como el cociente de dos números enteros, por tanto su expresión decimal **no es periódica**.

Son ejemplos de números irracionales: π, e, $\sqrt{2}$, -$\sqrt{5}$.

El conjunto **R**, se puede representar en diagrama de Venn de la siguiente forma:



Otro esquema de representación de los números reales es el siguiente



Otros conjuntos numéricos que se obtienen a partir de los ya mencionados, usando la definición de subconjunto son los siguientes:

$\mathbf{Z}^* = \{$todos los números enteros, excepto el cero$\}$

En notación de conjuntos, se expresa así: $\mathbf{Z}^* = \{x \,/\, x \in Z \wedge x \neq 0\}$

$\mathbf{Z}^+ = \{$los números enteros positivos$\}$, entonces $\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}$

En notación de conjuntos, se expresa así: $\mathbf{Z}^+ = \{x \,/\, x \in Z \wedge x > 0\}$

$\mathbf{Z}^- = \{$los números enteros negativos$\}$

En notación de conjuntos, se expresa así: $\mathbf{Z}^- = \{x \,/\, x \in Z \wedge x < 0\}$

$\mathbf{Q}^* = \{$todos los números racionales, excepto el cero$\}$

En notación de conjuntos, se expresa así:

$$\mathbf{Q}^* = \left\{x = \frac{a}{b} \,/\, a \in Z^* \wedge b \in Z^*\right\}$$

$\mathbf{Q}^+ = \{$los números racionales positivos$\}$

En notación de conjuntos, se expresa así:

$$\mathbf{Q}^+ = \left\{x = \frac{a}{b} \,/\, \frac{a}{b} > 0 \wedge a \in Z \wedge b \in Z^*\right\}$$

$\mathbf{Q}^- = \{$los números racionales negativos$\}$

En notación de conjuntos, se expresa así:

$$\mathbf{Q}^- = \left\{x = \frac{a}{b} \,/\, \frac{a}{b} < 0 \wedge a \in Z \wedge b \in Z^*\right\}$$

$\mathbf{R}^+ = \{$los números reales positivos$\}$

En notación de conjuntos, se expresa así: $\mathbf{R}^+ = \{x \in R / x > 0\}$

$\mathbf{R}^- = \{$los números reales negativos$\}$

En notación de conjuntos, se expresa así: $\mathbf{R}^- = \{x \in R / x < 0\}$

1.1) OPERACIONES ARITMÉTICAS

En el conjunto de los números reales se definen dos operaciones básicas, la **adición (+)** y la **multiplicación (.)**

Estas cumplen las siguientes propiedades:

Sean los números reales a, b, c y d, entonces se cumple		
CLAUSURA	$a+b = d$	$a.b = d$
CONMUTATIVA	$a + b = b + a$	$a.b = b.a$
ASOCIATIVA	$(a + b)+ c = a + (b+c)$	$(a.b).\, c = a.(b.c)$
ELEMENTO NEUTRO	$a+0=0+a= a$	$a.1=1.a=a$
ELEMENTO SIMÉTRICO	$a+(-a)=(-a)+a=0$	$a.\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.a=1,\ a\neq 0$
DISTRIBUTIVA	$a.(b+c) = (b+c).a = a.b +a.c$	

Al elemento simétrico se le denomina también **opuesto** o **inverso aditivo**, es el número **–a**. Si, **a** es positivo, su opuesto es negativo, si **a** es negativo su opuesto es positivo. El signo menos delante de la **a**, no significa que **a** es negativo. Así si **a = 9** entonces **–a = -9**, si **a = -15** entonces **–a = 15.**

Al elemento inverso de la multiplicación se le denomina también **inverso multiplicativo,** o **recíproco**, o simplemente **inverso**, es el número $\frac{1}{a}$ siendo **a** diferente de cero. En este caso el signo de **a** es igual al signo de su inverso.

Así si **a= 1/5** entonces su inverso **1/a= 5** , si **a = -1/8** entonces su inverso **1/a = -8.**

La importancia del inverso aditivo y del inverso multiplicativo radica en que éstos permiten definir otras dos operaciones, la sustracción y la división que son las operaciones inversas de la adición y de la multiplicación, respectivamente.

Entonces se define:

$$\textbf{Sustracción: } a - b = a + (-b)$$

La sustracción **a-b** es igual a la suma de **a** con el opuesto de **b**

$$\textbf{División: } a : b = a \div b = a.\frac{1}{b} = \frac{a}{b}\text{, siendo } b \neq 0$$

La división **a:b** es igual a la multiplicación de **a** por el inverso de **b.** En la división **a** se llama **dividendo** y **b** se llama **divisor**, entonces dividir no es más que multiplicar al dividendo por el inverso del divisor.

El número cero no tiene inverso multiplicativo[1], por lo tanto la división entre cero no está definida en los números reales.

Como aplicación de la definición de sustracción se tiene:

a-b-c= a+(-b)+(-c), entonces se pueden aplicar las propiedades de la adición, entre otras la propiedad asociativa, así:

$$a-b-c= a+(-b)+(-c)=[a+(-b)]+(-c)$$

o bien, más general:

$$a-b+c+e-f-g=a+(-b)+c+e+(-f)+(-g)=(a+c+e)-(b+f+g) \quad ([2])$$

[1] Porque no existe ningún número real que multiplicado por cero de igual a 1.
[2] Propiedad que permite la adición de números enteros.

De igual modo, como aplicación de la definición de división se tiene:

$$a \div b \div c = a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}, \text{siendo } \; b \neq 0 \wedge c \neq 0$$

O bien, más general

$$a \div b \cdot c \cdot e \div f \div g = a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \cdot e \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{g} = \frac{ace}{bfg},$$

siendo $b \neq 0 \wedge f \neq 0 \wedge g \neq 0$

En matemática se tienen establecidas las prioridades de las operaciones básicas. Por ejemplo, si en una expresión aparecen números que se están multiplicando y sumando, se debe primero efectuar la multiplicación y luego la suma. Así:

1) $2.3 + 8 - 5.2 = 6 + 8 - 10 = 4$

Si aparecen números que se están multiplicando y dividiendo, se debe aplicar la definición de división. Así

2) $15 \div 3 \cdot 2 \cdot 6 \div 4 = 15 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4} = 15$

Sin embargo, en matemática es fundamental el uso de los **signos de agrupación**, éstos son **los paréntesis ( ), los corchetes [ ] y las laves{ }**.

Los signos de agruapación se usan para definir que operación debe aplicarse primero independientemente de las prioridades ya establecidas en las operaciones básicas. Su uso es fundamental en las operaciones combinadas, y debe ser respetado el orden de operación que éstos imponen.

Un ejercicio puede ser modificado completamente al incluir en él los signos de agrupación y es muy importante destacar el uso adecuado de los mismos en matemática.

Así $a \div b \div c \neq a \div (b \div c)$ (I)

Resolviendo el primer miembro de (I), aplicando la definición de división, se tiene:

$$a \div b \div c = a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \text{(II)}$$

Resolviendo el segundo miembro de (I), aplicando la definición de división y respetando los signos de agrupación, se tiene:

$$a \div (b \div c) = a \cdot \frac{1}{b \div c} = a \cdot \frac{1}{b \cdot \frac{1}{c}} = a \cdot \frac{1}{\frac{b}{c}} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} \qquad \text{(III)}$$

Comparando (II) y (III), se concluye que son diferentes: $\frac{a}{bc} \neq \frac{ac}{b}$

Esto se muestra claramente a partir de los ejemplos 1 y 2 anteriores, que se transforman en otros ejercicios al asignar signos de agrupación en un orden diferente al prioritario, así:

3) 2.(3+8)-5.2= 2.11-10=22-10=12
4) $15 \div (3 \cdot 2) \cdot (6 \div 4) = 15 \cdot \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot \frac{6}{4} = \frac{15}{4}$

Otros ejemplos son:

$$2 \div 4 \div 3 = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$2 \div (4 \div 3) = 2 \cdot \frac{1}{4 \div 3} = 2 \cdot \frac{1}{4.\frac{1}{3}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Otra práctica muy común es la de asignar signos de agrupación cuando se desea que no haya duda alguna con relación a la operación que se sobre entiende prioritaria, es frecuente encontrar ejercicios como los siguientes:

8-(2.3)+9-(8.4)=8-6+9-32=-21

$(4 \div 2) \cdot (6 \div 3)=2.2=4$

En cualquier caso es fundamental comprender que los signos están dando un orden a la operación que se debe resolver, y éste debe ser respetado.

Otras propiedades que cumplen la adición y multiplicación de los números reales son las siguientes:

Sean a y b números reales, entonces se cumple	
$(-1).a = -a$	$a + 0 = a \quad \wedge \quad a - 0 = a$
$-(-a) = a$	$a.0 = 0$
$(-a).b = -(a.b) = a.(-b)$	$\frac{0}{a} = 0 \wedge a \neq 0$
$(-a).(-b) = a.b$	Si $a.b = 0$ entonces $a = 0 \vee b = 0$
$-(a + b) = (-a) + (-b)$	$\frac{a}{0}$ **no es un número real**, no está definido.

1.1.1) PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Sean los números reales a, b, c, y d, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces se cumple	
Fracciones equivalentes	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
Signo de una fracción	$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad \wedge \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$
Simplificación de fracciones	$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow c \neq 0$
Amplificación de fracciones	$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad \Leftrightarrow c \neq 0$
Adición de fracciones de igual denominador[3]	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$
Multiplicación de fracciones	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
División de fracciones	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

[3] Si las fracciones tienen diferente denominador, se unifica primero éste, calculando el mínimo común múltiplo de los denominadores y posteriormente se suma o restan.

Ejemplo: $\frac{1}{6} + \frac{8}{15} = \frac{5+16}{30} = \frac{21}{30}$

1.1.2) POTENCIACIÓN

La operación que consiste en multiplicar varias veces a un número real por sí mismo se denomina potenciación y se expresa de la siguiente forma

$$\underbrace{\mathbf{a.\ a.\ a.\ a.\ a\ldots\ldots\ldots}\ {\scriptstyle n\ veces}\ \mathbf{\ldots\ldots}}\mathbf{= a^n}$$

El número **a** es la **base** de la potencia, y el número **n** es el **exponente**, **n** indica cuantas veces debe ser multiplicado **a** por sí mismo. Por ejemplo:

$3^2=3.3=9$

3 es la base y 2 es el exponente, esta expresión indica que 3 debe ser multiplicado por sí mismo 2 veces.

$(-2)^4= (-2). (-2). (-2). (-2)=16$

-2 es la base de la potencia y 4 el exponente, esta expresión indica que –2 debe ser multiplicado por sí mismo 4 veces.

En general, el signo de un producto de dos o más factores depende del número de factores negativos que intervienen en él. Como en las potencias se trata de factores iguales, se deduce:

a)Las potencias de base positiva son positivas.

b)Las potencias de base negativa:

b.1)son positivas si el exponente es par.

b.2)son negativas si el exponente es impar.

De este análisis se puede se puede concluir:

"Toda potencia de exponente par, de un número real, es siempre positiva"

$(+b)^{2n} = [(+b)^2]^n = b^{2n}$

$(-b)^{2n} = [(-b)^2]^n = b^{2n}$

"Toda potencia de exponente impar, de un número real, tiene el signo de la base"

$(+b)^{2n+1} = (+b)^{2n}(+b) = b^{2n+1}$

$(-b)^{2n+1} = (-b)^{2n}(-b) = b^{2n}(-b) = -b^{2n+1}$

Cabe destacar la importancia del uso adecuado de los signos de agrupación en cualquier operación matemática, en este caso específico es diferente la expresión $\mathbf{(-2)^2}$ de $\mathbf{-2^2}$, en la primera operación, **-2** es la base de la potencia, así $\mathbf{(-2)^2=(-2).(-2)=4}$; mientras que en la segunda, **2** es la base de la potencia, entonces se resuelve así: $\mathbf{-2^2=-(2.2)=-4}$; entonces $\mathbf{(-2)^2=2^2=4}$, pero $\mathbf{-2^2=-4}$, **por lo que** $\mathbf{-2^2 \neq (-2)^2}$.

1.1.2.1) PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

Sean a y b números reales y m y n enteros, entonces se cumple	
$a^m a^n = a^{m+n}$	$(a\,b)^n = a^n b^n$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $a \neq 0$	$(a^m)^n = a^{mn}$
$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$, $a \neq 0$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$
$\dfrac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$, $a \neq 0$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m = \dfrac{b^m}{a^m}$, $b \neq 0 \wedge a \neq 0$

Observe que todas estas propiedades están enunciadas para el producto o el cociente de potencia, no para la suma o resta de potencias.

Por lo tanto, $a^n.a^m \neq a^n+a^n$, pues en el primer caso se debe multiplicar a por sí mismo n+m veces, mientras que en el segundo se debe multiplicar a por si mismo n veces, luego a por sí mismo m veces y finalmente sumar ambos resultado. Por ejemplo:

$2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$, mientras que

$2^3 + 2^5 = 8 + 32 = 40$, es obvio que $256 \neq 40$

Potencia de un valor absoluto[4], en general: $|a^n| = |a|^n$, pero si n es un número par $|a^n| = |a|^n = a^n$. Debido al signo de la potencia, es decir, un número negativo o positivo al elevarlo a un exponente par, el resultado es positivo[5].

---

[4] Se aclara con más detalle en el capítulo correspondiente a Valor Absoluto.
[5] Ver, en la página 12, signo de la potencia.

1.1.3) RADICACIÓN

Un número **x** es la raíz enésima de otro número **c** si se verifica que **$x^n = c$**, por lo tanto $x = \sqrt[n]{c}$.

En la expresión $\sqrt[n]{c}$ el símbolo $\sqrt{\ }$ se llama raíz o radical, la n es el índice de la raíz y c es la cantidad subradical.

En la operación $\sqrt[n]{c}$ debe determinarse una cantidad que elevada al índice n dé la cantidad subradical c.

Si **n** es un entero positivo **impar**, para cada real c existe un número real x, y sólo uno, tal que $x = \sqrt[n]{c}$.

Ejemplo:

1) $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$
2) $\sqrt[5]{32} = 2$ porque $2^5 = 32$
3) $\sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4 = 81$

Si **n** es **par**, y **c** es **negativo**, no existe un número real x, tal que $x^n = c$, puesto que $x^n \geq 0$ para cada número real x, (ningún número real elevado a un exponente par puede ser negativo[6]). Si **c** es **positivo**, existe **un número positivo y sólo uno**, tal que $x^n = c$, éste se denomina raíz enésima positiva y se escribe $x = \sqrt[n]{c}$ o $x = c^{1/n}$. Pero como n es par $(-x)^n = x^n$, por tanto cada c >0 tienen dos raíces enésimas, la raíz enésima negativa se expresa $x = -\sqrt[n]{c}$, así $(x)^n = \left(-\sqrt[n]{c}\right)^n \Rightarrow x^n = c$.

[6] Ver, en la página 12, signo de la potencia.

Ejemplo:

$\sqrt[4]{256} = 4$, porque $4^4 = 256$, **este número es único.**

La raíz negativa se expresa de la siguiente forma

$-\sqrt[4]{256} = -4$, porque $(-4)^4 = 256$. ([7])

Las raíces de índice dos se escriben así: $\sqrt{b}$ y se definen de la siguiente forma: $\sqrt{b} = x \Rightarrow x^2 = b$.

Si b=0 entonces x = 0 es la única raíz cuadrada.

Si b >0 entonces $x^2 = b$ y $(-x)^2 = b$, por lo tanto x y su opuesto son ambos raíces cuadradas. La raíz cuadrada no negativa se expresa $b^{1/2}$ o $\sqrt{b}$ si b> 0. La raíz cuadrada negativa, se expresa $-b^{1/2}$ o $-\sqrt{b}$ si b >0.

"Cada número real no negativo b tiene una raíz cuadrada positiva única".

Ejemplo:

1) $\sqrt{25} = 5$
2) $\sqrt{81} = 9$
3) $\sqrt{49} = 7$

[7] Es un error de lenguaje $\sqrt[4]{256} = \pm 4$, pues se está igualando un número positivo a otros dos, uno negativo y otro positivo, y cada número real es único.
El símbolo $\sqrt[n]{c}$ se reserva para la raíz enésima positiva.

Si se desea la raíz cuadrada negativa se expresa así:

4) $-\sqrt{25} = -5$

5) $-\sqrt{81} = -9$

6) $-\sqrt{49} = -7$

1.1.3.1) PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

Si n es impar: $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ **Si n es par:** $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \Leftrightarrow a \geq 0$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ **Si n es par, a $\geq$ 0**
I $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}$ **Si n es par, a $\geq$ 0 $\wedge$ b $\geq$ 0**	**Si n es impar:** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ **Si n es par:** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \Leftrightarrow a \geq 0$
I $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, **b$\neq$0** **Si n es par, a $\geq$ 0 $\wedge$ b > 0**	**Si n es impar:** $\sqrt[n]{a^n} = a$ **Si n es par:** $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ **En particular** $\sqrt{a^2} = \left(a^2\right)^{1/2} = \lvert a \rvert$
$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$, $n \neq 0$ **si n es par, a $\geq$0**	

EJEMPLOS RESUELTOS

1) $\frac{7}{2}\cdot 4\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 2-10\div 5 \;=\; 42+10-10\cdot\frac{1}{5} \;=\; 52-2 \;=\; \mathbf{50}$

Comentario

No se pueden atribuir signos de agrupación donde *"me provoque"*. Es importante respetar los signos de agrupación, cuando están presentes. Y si no están presentes, se debe resolver aplicando la definición de la operación. Debe resolverse en este caso, primero las divisiones y multiplicaciones y luego las adiciones y sustracciones.

El ejercicio es otro completamente diferente si están asignado signos de agrupación, por ejemplo así:

$$\left(\frac{7}{2}\cdot 4\cdot 3+\frac{1}{2}\right)(10\cdot 2-10)\div 5=\left(42+\frac{1}{2}\right)(20-10)\div 5=\frac{85}{2}\cdot 10\cdot\frac{1}{5}=\mathbf{85}$$

2) $7\div 14.21\cdot 3\div 9\div 2\div 12 \;=\; 7\cdot\frac{1}{14}\cdot 21\cdot 3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12 \;=\mathbf{21}$

Comentario

En este caso no hay signos de agrupación indicados, por lo tanto la operación debe resolverse aplicando la definición de división.[8]

El ejercicio es otro completamente diferente si están asignado signos de agrupación, por ejemplo así:

$$(7\div 14)\cdot 21\cdot(3\div 9)\div(2.12)=\left(7\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot 21\left(3\cdot\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{2\cdot 12}=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{24}=\mathbf{\frac{7}{48}}$$

3) $-2^4-3^2\div 3^3\left(2^2-7\right)+1=$ $-16-3^2\cdot\dfrac{1}{3^3\left(4-7\right)}+1$ $=$ $-16-\dfrac{1}{3(-3)}+1=$ $-16+\dfrac{1}{9}+1=-\dfrac{134}{9}$

Comentario

En este caso, también debe efectuarse primero la división y luego la adición y la sustracción, pero los paréntesis están indicando que en la división, el divisor no es 3^3, sino el resultado de la operación $3^3(2^2 - 7)$. En este ejemplo se observa claramente que el signo de agrupación impone como prioridad, en el segundo término de esta operación, la resta, luego el producto y finalmente la división, para posteriormente efectuar la adición de los números resultantes.

El ejercicio es otro completamente diferente si los signos de agrupación están asignados de otra forma, por ejemplo así:

$$\left(-2^4-3^2\right)\div 3^3\left(2^2-7+1\right)=\left(-16-9\right)\cdot\frac{1}{3^3\left(4-7+1\right)}=-25\cdot\frac{1}{27(-4)}=\mathbf{\frac{25}{108}}$$

4) $\dfrac{3^6 3^0\left(-3\right)^7}{\left(-3\right)^4 3^5}+\dfrac{-3^4}{\left(-3\right)^2}=-\dfrac{3^6 3^7}{3^4 3^5}-\dfrac{3^4}{3^2}=-3^4-3^2=-3^2\left(3^2+1\right)=-9.10=-900$

Comentario

Observe que en este caso se resolvió el ejercicio transformando la base de todas las potencias a 3, trabajando con el signo de la potencia. Así:

$(-3)^7=-(3)^7=-3^7$, porque el exponente es impar

$(-3)^4=(+3)^4=3^4$, porque el exponente es par, entonces el signo de la primera fracción es negativo. Análogamente en la segunda fracción.

Es un error muy frecuente entre los estudiantes aplicar las propiedades de la potenciación en la segunda fracción, así:

$$\frac{3^6 3^0 (-3)^7}{(-3)^4 3^5} + \frac{-3^4}{(-3)^2} = \frac{3^6(-3)^7}{3^5(-3)^4} + (-3)^2 = 3(-3)^3 + 9 = -81 + 9 = -72$$

"INCORRECTO"

Porque -3^4 es una potencia de base diferente a $(-3)^4$, por lo tanto no se deben restar los exponentes.

5) $$\frac{5^{-1}-5^{-2}}{1+2^{-3}} + \frac{3^{-1}-7^{-1}}{-3^{-2}} = \frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{25}}{1+\frac{1}{8}} + \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}}{-\frac{1}{9}} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{8}{9}} + \frac{\frac{4}{21}}{-\frac{1}{9}} = \frac{9}{50} + \frac{12}{-7} =$$

$$\frac{9}{50} - \frac{12}{7} = -\frac{537}{350}$$

Comentario:

Observe que este ejercicio no puede ser resuelto con exponentes negativos, pues no es un producto de potencias la operación indicada, sino una suma de potencias. Entonces el primer paso a seguir es transformar esas potencias a potencias de exponente positivo, así:

$$5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$-5^{-2} = -\left(\frac{1}{5}\right)^2 = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$, porque la base de la potencia es 5, no –5, es decir, al no haber signo de agrupación, el exponente –2 no afecta al signo menos que está delante de la potencia. Análogamente en el resto del ejercicio.

Posteriormente, se obtiene una operación combinada de suma y resta de fracciones aplicando las propiedades pertinentes.

El ejercicio es otro completamente diferente si están asignados signos de agrupación por ejemplo así:

$$\frac{5^{-1}(-5)^{-2}}{(1+2)^{-3}} + \frac{3^{-1}(-7)^{-1}}{(-3)^{-2}} = \frac{\frac{1}{5}\,\frac{1}{(-5)^2}}{\frac{1}{3^3}} + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{7}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{5^3}}{\frac{1}{3^3}} - \frac{\frac{1}{3.7}}{\frac{1}{3^2}} =$$

$$\frac{3^3}{5^3} - \frac{3}{7} = \frac{186}{875}$$

Observe que en este caso en el numerador de cada fracción la operación indicada es la multiplicación, por lo que se pueden aplicar las propiedades de la potenciación.

6)

$$\left\{-\sqrt{25} \div \left(3 + 3^2 - 7 + 5\right)\right\}3 \div (-3)^{-2} = \left\{-5 \div (3 + 9 - 7 + 5)\right\}3 \div \frac{1}{9} =$$

$$\left\{-5 \div 10\right\}3 \cdot 9 = \left\{-5 \cdot \frac{1}{10}\right\} \cdot 27 = -\frac{1}{2} \cdot 27 = -\mathbf{\frac{27}{2}}$$

Comentario:

En este ejercicio los signos de agrupación definen el orden en el que deben efectuarse las operaciones, es fundamental respetar ese orden para que el ejercicio esté resuelto adecuadamente.

Observe que el ejercicio es otro, si los signos de agrupación están dispuesto de una manera diferente, como por ejemplo:

$$\left\{-\sqrt{25} \div 3 + 3^2 - 7 + 5\right\}\left[3 \div (-3)\right]^{-2} = \left\{-\frac{5}{3} + 9 - 7 + 5\right\}\left[\frac{3}{-3}\right]^{-2} =$$

$$\left\{-\frac{5}{3} + 7\right\}\left[-1\right]^{-2} = \left\{\frac{16}{3}\right\}\left[-1\right]^{2} = \frac{16}{3}$$

7) $$\left\{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^4 - \sqrt{9}\right\} \div \left(\sqrt[4]{2}\right)^4 = \left\{3^2 + \sqrt{3^4} - 3\right\} \div 2 =$$

$$\left\{9 + 9 - 3\right\}\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{15}{2}}$$

Comentario:

En este ejemplo se muestra la aplicación de algunas propiedades de la radicación

8) $$\frac{5^{0,5}+25^{-0,25}}{5^{0,5}-5^{-0,5}}=\frac{5^{\frac{1}{2}}+25^{-\frac{1}{4}}}{5^{\frac{1}{2}}-5^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt[4]{5^2}}}{\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{5+1}{5-1}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

Comentario:

En este ejercicio es necesario, para poder resolver, expresar las potencias con exponente fraccionario[9], y posteriormente aplicar las propiedades de la potenciación y de la radicación, para luego sumar los términos del numerador y del denominador, y finalmente dividir.

[9] Para ello se calculó la fracción generatriz de cada expresión decimal.

EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Coloque dentro del paréntesis una V si la proposición es verdadera o una F si es falsa.

1) $-\sqrt{4} \in N$ ( )

2) $\pi \in Q$ ( )

3) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in Q^*$ ( )

4) $\left(\dfrac{\pi}{2} - 5\right) \in I$ ( )

5) $\sqrt{-16} \in R^-$ ( )

6) $3+\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ ( )

7) $\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{9} = 3$ ( )

8) $\pi = 3{,}14$ ( )

9) $3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{15}$ ( )

10) $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} = -1$ ( )

11) $\dfrac{-3}{2 - \sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2} - 2}$ ( )

12) $\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{4} + 1\right) = \dfrac{1}{2} + 2$ ( )

13) $(2 + 5)^2 = 29$ ( )

14) $\dfrac{4}{\frac{2}{3}} = \dfrac{8}{3}$ ( )

15) $5 - \dfrac{6}{\frac{9}{7}} = \dfrac{14}{3} = \dfrac{15 - 14}{3} = \dfrac{1}{3}$ ( )

16) $10 - (7 - 3) = (7 - 3) - 10$ ( )

17) $5-(8 - 3) = -(- 3 + 8) + 5$ ( )

18) $(16 : 8) : 2 = 16 : (8 : 2)$ ( )

19) $2^6 + 8^2 = 10^8$ ( )

20) $5^2 + 5^0 = 26$ ( )

21) $2^4 = 4^2$ ( )

22) $5^3 = 15$ ( )

23) $2^3 . 3^3 = 6^3$ ( )

24) $3^2 + 4^2 = 5^2$ ( )

25) $\sqrt{3}\sqrt{9} = 3\sqrt{3}$ ( )

26) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2$ ( )

27) $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$ ( )

28) $\sqrt{25} - \sqrt{-25} = 0$ ( )

29) $\sqrt{\left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}\right)^4} = 3 + 2\sqrt{2}$ ( )

30) $\sqrt{16} = \pm 4$ ( )

31) $(-2)^4 = 2^{-4}$ ( )

32) $(-9)^2 = 9^2$ ( )

33) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{-3} = \left(-\dfrac{5}{3}\right)^3$ ( )

34) $3\sqrt{-3^2} = -9$ ( )

35) $\dfrac{(7-7)^0}{7^0} = 1$ ( )

36) $\left[8^{-5}(-8)^5(-8)^0\right] = 1$ ( )

37) Si a=2, b=-3 y c=-1 entonces $ab^2 - c^3 = 19$ ( )

38) $36a^{1/2} = 6\sqrt{a}$ ( )

39) $(-2)^5 - 3^6 = (-5)^{11}$ ( )

40) $\dfrac{2 + 5.3}{3} = 7$ ( )

41) $\forall a \in R : \sqrt{a+1} = \sqrt{|a+1|}$ ( )

42) Si $a < b < 0$ entonces $|a|<|b|<0$ ( )

43) $\forall a \in R : \left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ ( )

44) $\forall a \in R : \sqrt{a^2} = |a|$ ( )

45) $a \in Z^+ \wedge b \in Z^- \Rightarrow \sqrt{a^2 b} \in R$ ( )

46) $a \in Z^+ \wedge b \in Z^- \Rightarrow \dfrac{\pi}{a} + b^2 \in Q$ ( )

47) $a \in Z^+ \wedge b \in Z^- \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{-b} \in R$ ( )

48) Si a es un número natural entonces es racional ( )

49) Todo número racional es irracional ( )

50) Todo número irracional es real ( )

B) Resuelva las siguientes operaciones, simplifique siempre que sea posible.

1) $5 .\ 2^2 - 20 . 3 + 4^2 (-2) + 3 (-2)^3$
2) $(-9) \div (-2)(-6) - (-2)^3 + 25 \div (-5) + 3(-4+1)$
3) $-5^2 - 2^3 : [-(7 + 4 - 3) : (-14)^0]$
4) $[(-3).4]^2 - [9 \div (-3)]^3 - [(-2)(-1).3]^3$
5) $\left[\dfrac{(-5)^{10}(-3)^8(-5)^4(-3)}{(-5)^2(-3)^6(-5)^2}\right]^{-1}$
6) $(0,4)^4 . \left(\dfrac{4}{25}\right)^{-3}$
7) $\left(\dfrac{36}{49}\right)^{-3} \div \left(\dfrac{6}{7}\right)^{-5}$

8) $\dfrac{2^4 + 2^5}{2^6} \div \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$

9) $\dfrac{1 - 3^{-2}}{1 + 2^{-3}} + \dfrac{2^{-1} + 3^{-1}}{-2^{-2}}$

10) $\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left[-\left(-\dfrac{39}{9}\right) + \dfrac{14}{6}\right]$

11) $-5 + \dfrac{6}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{4}}}$

12) $\dfrac{2}{1 + \dfrac{2}{2 - \dfrac{1}{2 - \frac{1}{2}}}}$

13) $\dfrac{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3^2}{2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} - 1}$

14) $-\dfrac{10^4.10^0(-10)^5}{(-10)^2.10^3} + \dfrac{10^8}{10^6}$

15) $\dfrac{\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3 - \dfrac{3}{4}\pi^3}{\pi} + 4\pi^2$

16) $\sqrt{64} + \sqrt[3]{-64} - \sqrt{64}$

17) $2\sqrt{54} - 6\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \sqrt{96}$

18) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{50} + 7\sqrt{288}$

19) $\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{9} - \sqrt{27} - 3}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{243}}\right)^{-1}}$

20) $\sqrt{16}\left(\sqrt[3]{8}\right)^{3/2} + \left(\sqrt[6]{16}\right)^{3} \cdot \left(\sqrt{45} - \sqrt{8}\right)$

21) $\left(2^{1/2} . 4^{-3/2} . 8^{1/4}\right)^{4} + \left(\sqrt[6]{8}\right)^{-10}$

22) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-0,5} + \left(\dfrac{16}{81}\right)^{-0,25} + (32)^{-0,2}$

23) $\left(\dfrac{5\pi}{3}\left(\sqrt[4]{27}\right)^{2} + \dfrac{3}{\pi^{-1}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \div \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$

24) $\sqrt[3]{\sqrt{11} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{11} + \sqrt{3}}$

25) $\left(2 + \sqrt{5}\right)\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ (sugerencia: introduzca el binomio en el radical)

26) $\sqrt[5]{\sqrt{47} - \sqrt{15}}\,\sqrt[5]{\sqrt{47} + \sqrt{15}}$

27) $2\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)^{2} - 5\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right) + 2\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)^{2}$

28) $\dfrac{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\left(5 + 2\sqrt{6}\right)\left(49 - 20\sqrt{6}\right)}{\sqrt{27} - 3\sqrt{18} + 3\sqrt{12} - \sqrt{8}}$

29) $\left(\sqrt{3} + 1\right)^{3} - \left(\sqrt{3} + 1\right)^{2} - \left(\sqrt{3} + 1\right) - 5$

30) $\dfrac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \dfrac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$

CAPÍTULO II

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y TRIGANOMETRICAS

1) EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones o extracción de raíces a un grupo de variables y números reales. Por ejemplo

$$\sqrt{x}\,, \quad \frac{3xy - \sqrt[3]{z}}{2\sqrt{x+y}}\,, \quad x^3 + y^2 - 2xy$$

Las últimas letras del alfabeto, tales como x,y,z se suelen usar para denotar a las variables. Se entiende por variable a una letra que representa a cualquier elemento del conjunto R para el cual la expresión algebraica tiene sentido, es decir define a un número real. Por lo tanto, la variable **sólo** puede tomar aquellos valores que cumplen que:

- el denominador es diferente de cero
- la cantidad subradical de las raíces de índice par es positiva.

Estos valores, definen al dominio de la expresión algebraica. Algunos ejemplos son:

Expresión algebraica	Dominio
1) $3x^2 - \frac{9}{\sqrt{x}}$	$x>0$
2) $\frac{\sqrt{x^2+y^2} - 3x}{x}$	$x \neq 0 \ \wedge \ y \in R$
3) $\frac{5x^2 - 2}{x - 1}$	$x \neq 1$

Se define como valor numérico de la expresión al número real que se obtiene al sustituir la variable por algún número de su dominio y aplicarle las operaciones de la expresión. Así, en la expresión número 1 del ejemplo anterior, para x = 9 se tiene $3(9)^2 - \frac{9}{\sqrt{9}} = 243 - 3 = 240$.

Si para algún valor de la variable dentro del dominio de la expresión, el valor numérico de la expresión es cero, entonces se dice que ese número es *raíz* de la expresión algebraica. Por ejemplo: $x = \sqrt{\frac{2}{5}} \wedge x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$ son raíces de la expresión $\frac{5x^2 - 2}{x - 1}$, porque para

$$x = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \frac{5\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 - 2}{\sqrt{\frac{2}{5}} - 1} = 0 \quad \wedge \text{ para } x = -\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \frac{5\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 - 2}{-\sqrt{\frac{2}{5}} - 1} = 0$$

Dos expresiones algebraicas son equivalentes si se obtienen los mismos valores para todos los números de su dominio. Así:

4x –2(x-1) es equivalente a 2x+2

$\frac{x(3x - 2)}{x}$ no es equivalente a 3x –2, pues la primera expresión para x = 0 no está definida, y la segunda para x = 0 es igual a –2. Sin embargo, $\frac{x(3x - 2)}{x}$ si es equivalente a 3x-2, $x \neq 0$; pues en este caso se está indicando explícitamente que el dominio de la expresión 3x – 2 no incluye al cero, es claro que ambas expresiones tienen los mismo valores numéricos para cada x en su dominio, en sendos casos R-{0}.

Si una expresión algebraica tiene explícitamente indicada alguna observación con respecto a las variables que la definen, ésta debe ser respetada e influye en su dominio.

1.1) POLINOMIOS

Una de las más simples y comunes expresiones algebraicas son los polinomios. Son ejemplos de polinomios

$$5x-2, \quad \frac{1}{2}x^4-\frac{7}{3}x^3-2x, \quad -10x^2y-xy^2+1, \quad 8xy$$

Los dos primeros son polinomios en x, es decir de variable x, y los otros dos, son polinomios en x e y, es decir, de variables x,y.

Un polinomio es la suma de un número finito de términos no semejantes, cada uno de los cuales es el producto de un conjunto finito de números y variables distintas que tienen como exponentes números naturales. Son términos semejantes los que difieren únicamente en su coeficiente, por ejemplo $14y^3x$, $-3y^3x$ son semejantes, mientras que $-5x^2$, $-5y^2$ no son semejantes.

Los polinomios que tienen un solo término, como 8xy, se llaman **monomios**; los que tiene dos términos, como 5x-2, se llaman **binomios**, y los que tienen tres términos $10x^2y-xy^2+1$, se llaman **trinomios**; a partir de cuatro términos, se llama **polinomio**.

1.1.1) DEFINICIÓN

Un polinomio de grado n, en la variable x, es xualquier expresión de la forma

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0\,,\ a_n \neq 0$$

donde n es un número natural y los coeficientes a_n , a_{n-1} ,...a_1,a_0 son números reales.

Como un polinomio representa a un número real para cualquier valor de x, el dominio de un polinomio cualquiera P(x), es el conjunto de los números reales. Y al sumar, restar y multiplicar polinomios, se puede simplificar el resultado mediante las propiedades de los números reales.

Es importante destacar que solamente se pueden sumar y restar algebraicamente términos semejantes, a esta operación se le suele llamar reducción de términos semejante.

En general, la suma de los polinomios P(x) y Q(x) es otro polinomios S(x) que se obtiene sumando los términos semejantes de los polinomios dados, entonces S(x)=P(x)+Q(x).

Análogamente, la resta de los polinomios P(x) y Q(x) es otro polinomio R(x) que se obtiene sumando a P(x) el opuesto de Q(x), entonces R(x)= P(x)-Q(x) = P(x)+(-Q(x))

Por ejemplo

1) $(2x^2-3xy-5)+(-3+8xy-2x^2) = 5xy-8$
2) $(2x^2-3xy-5)-(-3+8xy-2x^2) = 4x^2-11xy+2$

El procedimiento para multiplicar polinomios se basa en el método de la multiplicación de monomios y en la aplicación reiterada de la ley distributiva. Recuérdese que un monomio es un número o es el producto de un coeficiente numérico y un conjunto de variables. El producto de dos monomios es por consiguiente, el producto de todos los factores de los dos monomios dados, tomados conjuntamente.

En general, el producto del polinomio P(x) por el polinomio Q(x) es otro polinomio T(x) que se obtiene de la siguiente forma: se multiplica cada término de P(x) por el polinomio Q(x) y se suman los términos semejantes obtenidos en dicha multiplicación, entonces T(x) = P(x).Q(x)

Por ejemplo

1) $(3x^2y)\left(-\frac{1}{9}xyz\right) = -\frac{1}{3}x^3y^2z$
2) $(2x^2-7x+5)(2y-1)=4x^2y-14xy+10y-2x^2+7x-5$
3) $(3x^2-x^3-4x^4+2)(3x-4)=-12x^5+13x^4+13x^3-12x^2+6x-8$

Existen ciertas multiplicaciones de polinomios que se usan con mucha frecuencia, por ello es conveniente desarrollar fórmulas que faciliten y agilicen el proceso de resolución, una de esas multiplicaciones es la potencia de binomios. Algunas potencias son las siguientes:

BINOMIO AL	FÓRMULA[1]
Cuadrado	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
Cubo	$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
Cuarta	$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

Todas estas fórmulas se pueden verificar resolviendo el producto indicado por la potencia.

[1] En cada caso x o y puede ser cualquier monomio y se aplica igualmente la fórmula. El signo de cada término en el desarrollo depende del exponente al que deba elevarse cada término.

Algunos ejemplos son:

1) $(z-4)^2= z^2-8z+16$
2) $(y-2)^3=y^3 - 6y + 12y^2-8$
3) $(2a^2-3b)^4= 16a^8 - 96a^6b+ 216a^4b^2 - 216a^2b^3 + 81b^4$

Para desarrollar cada uno de esos binomios se aplica la fórmula correspondiente de manera que el primer término equivale a la "x" de la fórmula y el segundo término a la "y" de la fórmula.

En el último, de los ejemplos anteriores, la "x" de la fórmula es el término $2a^2$, y la "y" es el término $-3b$, al sustituir en la fórmula correspondiente

$$(2a)^4+4(2a)^3(-3b)+6(2a)^2(-3b)^2+4(2a)(-3b)^3+(-3b)^4$$

al efectuar, se obtiene: $16a^8 - 96a^6b+ 216a^4b^2 - 216a^2b^3 + 81b^4$

En general, los coeficientes de esos binomios tienen un modelo, que se ilustra en el siguiente esquema y que se conoce como **Triángulo de Pascal**

$(x+y)^0$					1				
$(x+y)^1$				1		1			
$(x+y)^2$			1		2		1		
$(x+y)^3$		1		3		3		1	
$(x+y)^4$	1		4		6		4		1

Cada renglón de esta distribución comienza y termina con 1 y cada uno de los otros elementos es la suma de los números que están a su derecha y a su izquierda en el renglón inmediato superior.

Existe una fórmula general que describe a la expresión que se obtiene al desarrollar alguna potencia de base un binomio y exponente natural, $(x+y)^n$, $n \in N$ y se conoce como teorema o fórmula del binomio.

1.1.2) DEFINICIÓN

El símbolo $\binom{n}{r}$, donde n y r son enteros mayores o iguales que cero y n es mayor o igual que r se define:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}, n \wedge r \in N, n \geq r \qquad (^2)$$

y se llama número combinatorio.

Por ejemplo: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5.4.3!}{2!\,3!} = \frac{20}{2.1} = 10$

1.1.3) TEOREMA DEL BINOMIO

Sea n un entero positivo, entonces

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

Las potencias de binomios no son los únicos productos que se usan con mucha frecuencia en la práctica, existen otros productos que tienen

[2] La expresión n! Se denomina factorial de n y se define así: n! =n.(n-1).(n-2).(n-3)....1

características bien definidas, y la multiplicación de esos polinomios se simplifica haciendo uso de fórmulas que permiten conocer el producto sin necesidad de efectuar todos los pasos que se requieren en la multiplicación de dichos polinomios.

Estos productos suelen llamarse ***productos notables.***

1.2) PRODUCTOS NOTABLES

Son productos notables los mostrados en la siguiente tabla, en la columna izquierda se menciona el nombre con el que se conoce cada producto y en la columna derecha la fórmula que permite obtener el producto indicado. Cada una de esas fórmulas puede deducirse realizando la multiplicación de polinomios, planteada en cada caso.

Por ejemplo:

Resolver el producto $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

Aplicando el método definido para multiplicar polinomios, se tiene:

$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3-x^2y+xy^2+yx^2-xy^2+y^3=x^3+y^3$

A este producto notable no se le conoce con ningún nombre particular, sin embargo el resultado obtenido se suele llamar *"suma de cubos"*

NOMBRE	FÓRMULA
Binomio al cuadrado[3]	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
Binomio al cubo[4]	$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
Suma por diferencia	$(x-y)(x+y)=x^2 - y^2$
Producto de dos binomios con un término igual	$(x+r)(x+s)=x^2+(r+s)x+rs$
	$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$
	$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$
Trinomio al cuadrado	$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$

Algunos ejemplos de aplicación de productos notables son los siguientes:

1) $(4x^3-2yz)(4x^3+2yz)=16x^6-4y^2z^2$	Suma por diferencia
2) $\left(2x-\frac{1}{4}\right)\left(2x+\frac{3}{5}\right)=4x^2+\frac{7}{20}x-\frac{3}{20}$	Producto de dos binomios con un término igual
3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)=x^3+\frac{1}{8}$	
4) $(4-2x+y)^2= 16 +4x^2+y^2-16x-4xy+8y$	Trinomio al cuadrado

[3] Mencionada ya en el punto anterior como potencias de binomios.

1.3) ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Sean P(x) y D(x) dos polinomios de grado n y r, respectivamente, tales que $n \geq r$. Entonces, existe un polinomio Q(x), llamada cociente y un polinomio R(x), llamado resto o residuo, tales que:

P(x) = D(x).Q(x) +R(x) , para toda x.

El grado de R(x) es menor que el grado de D(x)

Por ejemplo usando el método de división larga, se tiene

- $(4x^3 - 5x^2 + x - 8) : (x - 3)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
+4x^3 & -5x^2 & +x & -8 & x \quad -3 \\
\cline{5-5}
-4x^3 & +12x^2 & & & 4x^2 \quad +7x \quad +22 \\
\cline{1-3}
 & +7x^2 & +x & & \\
 & -7x^2 & +21x & & \\
\cline{2-4}
 & & +22x & -8 & \\
 & & -22x & +66 & \\
\cline{3-4}
 & & & +58 &
\end{array}
$$

Al aplicar el algoritmo de la división se verifica

$(4x^2 + 7x + 22).(x-3) + 58 = 4x^3 - 5x^2 + x - 8$

[4] Mencionada ya en el punto anterior como potencias de binomios.

- $(7x^5+3x^2-1):(2x^3-x+5)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
+7x^5 & & +3x^2 & & -1 & 2x^3 \quad -x \quad +5 \\
\cline{6-6}
-7x^5 & +\frac{7}{2}x^3 & -\frac{35}{2}x^2 & & & \frac{7}{2}x^2 \quad +\frac{7}{4} \\
\cline{1-3}
 & +\frac{7}{2}x^3 & -\frac{29}{2}x^2 & & -1 & \\
 & -\frac{7}{2}x^3 & & +\frac{7}{4}x & -\frac{35}{4} & \\
\cline{2-5}
 & & -\frac{29}{2}x^2 & \frac{7}{4}x & -\frac{39}{4} &
\end{array}
$$

Al aplicar el algoritmo de la división se verifica

$$\left(2x^3-x+5\right)\left(\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{4}\right)+\left(-\frac{29}{2}x^2+\frac{7}{4}x-\frac{39}{4}\right)=7x^5+3x^2-1$$

Otro método muy usado en la división de polinomios es la **Regla de Ruffini,** se enuncia así:

El cociente de la división de un polinomio

$$\mathbf{P(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0\,, \qquad a_n \neq 0}$$

entre el binomio Q(x)= x-b, es un polinomio

$$\mathbf{C(x)= c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+....+c_1x+c_0\,, \qquad c_n\text{-}1 \neq 0}$$

Y cuyos coeficientes se calculan según la siguiente regla

$$
\begin{array}{lcll}
c_{n-1} & = & a_n & \\
c_{n-2} & = & bc_{n-1} & +a_{n-1} \\
c_{n-3} & = & bc_{n-2} & +a_{n+2} \\
c_0 & = & bc_1 & +a_1
\end{array}
$$

el residuo es igual al último coeficiente del cociente por "b", más el último del dividendo.

El ejemplo anterior usando la regla de Ruffini es así:

- $(4x^3 - 5x^2 + x - 8):(x-3)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & +4 & -5 & +1 & -8 \\
+3 & & +12 & +21 & +66 \\
\hline
 & +4 & +7 & +22 & \boxed{+58}
\end{array}
$$

RESIDUO

COCIENTE

Al aplicar el algoritmo de la división se verifica

$(4x^2 + 7x + 22).(x-3) + 58 = 4x^3 - 5x^2 + x - 8$

Si el resto o residuo de la división es cero, la división es exacta.

Por ejemplo:

- $(x^3 - 8):(x-2)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & +1 & +0 & +0 & -8 \\
+2 & & +2 & +4 & +8 \\
\hline
 & +1 & +2 & +4 & \boxed{0}
\end{array}
$$

RESIDUO

COCIENTE

Al aplicar el algoritmo de la división se verifica

$(x^2 + 2x + 4).(x-2) = x^3 - 8$

1.3.1) DIVISIBILIDAD

Se dice que un polinomio P(x) es divisible por otro Q(x) si existe un polinomio C(x) tal que:

$$P(x) = Q(x).C(x)$$

Se dice entonces que Q(x) y C(x) son divisores de P(x).

Un polinomio P(x) es divisible por Q(x)= ax+b si y sólo si $P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \wedge a \neq 0$**, es decir, el valor numérico del polinomio P es cero cuando** $x = -\frac{b}{a}$

2) EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una expresión trigonométrica es el resultado de llevar a cabo un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces a un grupo de variables y números con funciones trigonométricas. Son ejemplos de expresiones trigonométricas

$$2x + \text{sen}x\,,\quad \frac{\sqrt{xy}+2}{ytgx}\,,\quad \frac{\cos(3x+1)}{x^2 - tg^2(2-x)}$$

El dominio de cada variable en una expresión trigonométrica es el conjuntos de los números reales para los cuales la expresión tiene sentido, es decir, define a un número real. Por lo tanto, la variable **sólo** puede tomar aquellos valores que cumplen que:

- el denominador es diferente de cero
- la cantidad subradical de las raíces de índice par es positiva.

Obviamente en este tipo de expresiones es importante respetar el dominio de la función trigonométrica como tal, que cumple las mismas restricciones ya mencionadas, y usar adecuadamente las identidades trigonométricas.[4]

Sin embargo, muchas expresiones trigonométricas se comportan como las algebraicas. Por ejemplo

1) $3\text{sen}x - 5\text{sen}x = -2\text{sen}x$
2) $(tgx-\cos x)(tgx+\cosh)=tg^2x - \cos^2x$
3) $(\sec x+2)(\sec x-7)=\sec^2x-5\sec x-14$
4) $(2\text{sen}^2x+3\text{sen}x): \text{sen}x= 2\text{sen}x +3$

La idea en este capítulo es que el estudiante identifique esta similitud y la aplique convenientemente en la resolución de ejercicios.

3) FACTORIZACIÓN O DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

Es el proceso mediante el cual se expresa a un polinomio como el producto de dos o más polinomios, llamados factores.

La factorización es fundamental en la simplificación de expresiones algebraicas y trigonométricas y en la resolución de ecuaciones no lineales y sistemas de ecuaciones.

3.1) DEFINICIÓN

Si un polinomios P(x) es el producto de k polinomios $Q_1(x)$, $Q_2(x)$,... $Q_k(x)$, esto es, si

$$P(x)= Q_1(x).\ Q_2(x)....\ Q_k(x)$$

entonces $Q_1(x)$, $Q_2(x)$,... $Q_k(x)$, son factores de P(x)

Por ejemplo $25x^2-45x-36=(5x-3)(5x+12)$

En este caso, $P(x)= 25x^2-45x-36$, un factor $Q_1(x)= 5x-3$ y el otro factor $Q_2(x)= 5x+12$.

Si Q(x) es un factor de P(x), el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ no admite residuo, es decir la división es exacta.

[4] Se estudiará con mas detalle en el Capítulo VI de Funciones trigonométricas.

En general, los factores $Q_1(x)$, $Q_2(x)$,... $Q_k(x)$, pueden tener cualquier coeficiente que pertenezca al conjunto numérico en el cual está definido P(x) (N, Z, Q, R y C). En algunos casos especiales se puede exigir que los coeficientes de los factores sean enteros, es decir se piden factores entero de P(x), o bien se puede exigir que los coeficientes de los factores sean números racionales, números reales o bien números complejos. En este texto, se trabajará siempre en R.

Todo esto permite definir al **polinomio primo o irreducible:** es aquel polinomio con coeficientes en algún conjunto numérico (Z, Q, R) que no puede escribirse como producto de los polinomios con coeficientes en el mismo conjunto. Así $3x^2-2$ es irreducible en Q puesto que no puede expresarse como el producto de polinomios que tengan coeficientes racionales. Sin embargo, no es irreducible en R, pues $3x^2-2=\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)$, mientras que x^2+1 es irreducible o primo en R.

Todo polinomio de la forma P(x)=x+b es irreducible o primo.

Al factorizar un polinomio es conveniente expresarlo como el producto de factores primos.

3.1.1) EXTRACCIÓN DE FACTOR COMÚN

Cuando los términos de un polinomio dado tienen un factor común se puede descomponer el polinomio en factores al revertir la propiedad distributiva.

Es importante extraer el máximo factor común de una expresión antes de aplicar cualquier otro método de factorización.

Por ejemplo

1) $16x^2y-24xy^2+8xy=8xy(2x-3y+1)$
2) $5y^2-125x^2=5(y^2-25x^2)$
3) $2xy-y-6x+3=(2x-1)y-3(2x-1)=(2x-1)(y-3)$

3.1.2) TRINOMIOS CON COEFICIENTES ENTEROS

Sea el trinomio de la forma

$$\mathbf{ax^2+ bx + c\text{ , donde } a, b, c, \in Z}$$

es factorizable en R, si y sólo sí $\mathbf{b^2-4ac \geq 0}$

3.1.2.1) Si a=1 el trinomio es $\mathbf{x^2+bx+c}$

Para factorizarlo se buscan un par de números **r** y **s** tales que **r.s=c** y **r+s=b** y que verifique

$$\mathbf{x^2+bx+c=x^2+(r+s)x+r.s}$$

$$\mathbf{x^2+bx+c=(x+r)(x+s)}$$

Obsérvese que este caso de factorización corresponde a la resolución del producto de dos binomios con un término igual[5].

Ejemplo

1) $x^2-4x-21$

Si al factorizar este polinomio se aplican las propiedades de la radicación, es decir $\sqrt{x^2}=|x|$, se tiene:

[5] Ver productos notables página 37

$\sqrt{x^2}=x$, si $x>0$, por lo tanto el polinomio a factorizar es $(+x)^2-4(+x)-21$, se buscan dos números que sumados den –4 y que multiplicados den –21, estos son -7 y +3, porque $-7+3=-4$ y $(-7)(+3)=-21$, entonces se factoriza así:

$$x^2-4x-21=(x-7)(x+3)$$

$\sqrt{x^2}=-x$, si $x<0$, por lo tanto el polinomio a factorizar es $(-x)^2+4(-x)-21$, se buscan dos números que sumados den +4 y que multiplicados den –21, estos son +7 y -3, porque $+7-3=+4$ y $(+7)(-3)=-21$, entonces se factoriza así:

$$x^2-4x-21=(-x+7)(-x-3)$$

Al aplicar las propiedades de la multiplicación en la segunda factorización se tiene:

$$x^2-4x-21=(x-7)(x+3)=-1(x+7)(-1)(x+3)=(x+7)(x+3)$$

Obsérvese que independientemente del signo de x se llega a la misma factorización.

En consecuencia al factorizar este tipo de trinomios es indiferente usar la raíz positiva o negativa, pues se llega al mismo resultado, entonces para trabajar con más comodidad al momento de factorizar, se asumirá siempre la raíz positiva.

2) $y^2+13y+36=(y+9)(y+4)$

Porque $+9+4=13$ y $(+9)(+4)=+36$

3.1.2.2) Si $a \neq 1$ el trinomio es $\mathbf{ax^2+bx+c}$

puede ocurrir que:

3.1.2.2.1) "a" sea un cuadrado perfecto[6] y b se pueda descomponer en dos factores donde uno de ellos sea $\sqrt{a}\,x$, en este caso se factoriza igual que en el

[6] Un número es cuadrado perfecto cuando existe otro número racional que elevado al cuadrado da el primero. Ejemplo 16 es cuadrado perfecto porque $(4)^2=16$

caso anterior, después de descomponer al segundo término en dos factores donde uno de ellos es el término igual de los dos binomios que se están multiplicando.

$$\mathbf{ax^2+bx+c=} \left(\sqrt{a}x\right)^2+(r+s)\sqrt{a}x+r.s$$

$$\mathbf{ax^2+bx+c=}(\sqrt{a}\,x+r)(\sqrt{a}\,x+s)$$

Por ejemplo

1) $81x^2+63x+10$

Para factorizar, busco cual es el término que es cuadrado perfecto, en este ejemplo es $81x^2$ porque $\sqrt{81x^2}=9x$, luego, si es posible, descompongo el término que tiene x en dos, donde uno de ellos es 9x, en este caso 63x=7.9x, entonces el polinomio a factorizar es $(9x)^2+7(9x)+10$ y ahora busco dos números que al sumarlos resulte +7 y que al multiplicarlos resulte +10, estos números son +5 y +2, porque +5+2=7 y (+5).(+2)=10, entonces se factoriza así:

$$81x^2+63x+10=(9x+5)(9x+2)$$

2) $25y^2-15y-88=(5y)^2-3(5y)-44=(5y+8)(5y-11)$

Porque $\sqrt{25y^2}=5y$, +8-11=-3 y (+8)(-11)=-88

3.1.2.2.2) "**a**" no sea cuadrado perfecto, entonces se puede transformar en el caso anterior multiplicando al polinomio por "**a**", y para no alterarlo dividiendo también por"**a**", así

$$\mathbf{ax^2+bx+c=}\frac{1}{a}\left(a^2x^2+bax+ac\right)$$

luego se factoriza el trinomio siguiendo los pasos ya conocidos

b=r+s y ac=r.s

entonces

$$\mathbf{ax^2+bx+c=}\frac{1}{a}\left(a^2x^2+bax+ac\right)=\frac{1}{a}(ax+r)(ax+s)$$

Por ejemplo

1) $6x^2+25x+14$

En este caso multiplico y divido al polinomio por 6 para obtener el término $36x^2$ que es cuadrado perfecto, así:

$$6x^2+25x+14=\frac{1}{6}\left[36x^2+25(6x)+84\right]$$

ahora busco dos números que al sumarlos resulte +25 y que al multiplicarlos resulte +84, estos números son +21 y +4, porque +21+4=25 y (+21)(+4)=42 entonces se factoriza así:

$$6x^2+25x+14=\frac{1}{6}(6x+21)(6x+4)$$

simplificando se tiene:

$$6x^2+25x+14=\frac{1}{6}3(2x+7)2(3x+2)=(2x+7)(3x+2)$$

2) $35x^2-41x-24=\frac{1}{35}\left((35x)^2-41(35x)-840\right)$

$$=\frac{1}{35}\left[(35x)^2+(15-56)(35x)+(+15)(-56)\right]$$

$$=\frac{1}{35}(35x+15)(35x-56)=\frac{1}{35}5\,(7x+3)\,7\,(5x-8)$$

$$=(7x+3)(5X-8)$$

3.1.2.3) Trinomio cuadrado perfecto es el que se obtiene al desarrollar un binomio al cuadrado, se identifica porque tiene dos términos que son cuadrados perfectos y el tercer término se obtiene como el doble producto de las raíces cuadradas de dichos términos.

Por ejemplo $4x^2+12x+9$ es un trinomio cuadrado perfecto porque $4x^2 = (2x)^2$, $9=(3)^2$, son ambos cuadrados perfectos y el tercer término $12x=2(2x)(3)$, entonces se factoriza en la forma $(2x+3)^2$

Todos estos trinomios pueden ser factorizados usando la resolvente[7], pues se sabe que para que un polinomio sea factorizable en factores primos su valor numérico es cero[8], entonces se busca para que números o términos dicho trinomio se anula.

Pero cuidado, se desea factorizar el polinomio, **no resolver una ecuación**, entonces en los casos donde $a \neq 1$ se debe escribir la factorización de la siguiente forma:

$$\mathbf{ax^2+bx+c=a(x-p)(x-q)}$$

donde $x=p$, $x=q$ son las **raíces reales** que se obtienen al resolver la ecuación $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$. usando la resolvente.

Por ejemplo factorizar usando la resolvente los siguientes polinomios:

1) $x^2-4x-21$

Se resuelve la ecuación $x^2-4x-21=0$

$x = \dfrac{+4 \pm \sqrt{16-4(1)(-21)}}{2(1)} = \dfrac{4 \pm 10}{2}$ se obtiene las siguientes raíces $x_1 = 7 \wedge x_2 = -3$

Entonces se factoriza el polinomio así: $x^2-4x-21=(x-7)(x+3)$

[7] Ver en el Capítulo III de Ecuaciones en la página 83, el Teorema II.
[8] Ver criterio de divisibilidad página 42.

2) $81x^2+63x+10$

Se resuelve $81x^2+63x+10=0$

$x = \dfrac{+63 \pm \sqrt{(63)^2 - 4(81)(10)}}{2(81)} = \dfrac{-63 \pm \sqrt{3969-3240}}{162} = \dfrac{-63 \pm 27}{162}$ se obtiene las siguientes raíces $x_1 = \dfrac{-5}{9} \wedge x_2 = \dfrac{-2}{9}$

Entonces se factoriza el polinomio así: $81x^2+63x+10 = 81\left(x+\dfrac{5}{9}\right)\left(x+\dfrac{2}{9}\right)$

3) $5x^2-4x-24$

Se resuelve $5x^2-4x-24=0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(5)(-24)}}{2(5)} = \dfrac{4 \pm \sqrt{505}}{10}$ se obtienen las siguientes raíces

$x_1 = \dfrac{4+\sqrt{505}}{2} \wedge x_2 = \dfrac{4-\sqrt{505}}{2}$

Entonces se factoriza el polinomio así: $5x^2-4x-24=5\left(x-\dfrac{4+\sqrt{505}}{2}\right)\left(x-\dfrac{4-\sqrt{505}}{2}\right)$

Este método permite factorizar cualquier trinomio, incluso aquellos que no son factorizables en **R**, por supuesto siempre y cuando pueda ser aplicada la resolvente.[9]

[9] Un polinomio de grado n, siendo n>0, tiene exactamente n raíces, que pueden ser diferentes, iguales, reales o complejas. En este caso específico se trabajaran sólo con las raíces reales.

3.1.3) DIFERENCIA DE CUADRADOS

Consiste en revertir el desarrollo de una suma por diferencia[10], así al desarrollar una suma por diferencia se obtiene una diferencia de cuadrados perfectos, entonces cuando tengo una diferencia de cuadrados, lo factorizo en un suma por diferencia.

$$\mathbf{x^2\text{-}y^2=}(x-y)(x+y)$$

Por ejemplo

1)	$x^2\text{-}1=(x-1)(x+1)$
2)	$16x^2y^2\text{-}144=16(x^2y^2-9)=16(xy-3)(xy+3)$
3)	$5\text{-}y^2=(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)$

3.1.4) SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

La suma o diferencia de cubos, se factoriza como sigue[11]

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$x^3\text{-}y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

Por ejemplo

1)	$x^3\text{-}1=(x\text{-}1)(x^2+x+1)$
2)	$8y^3+27=(2y+3)(4y^2\text{-}6y+9)$
3)	$y^3-125=(y\text{-}5)(y^2+5y+25)$

[10] Ver productos notables página 37.
[11] Ver productos notables página 37.

3.2) FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN[12]

1)	$x^2+bx+c=(x+r)(x+s) \Leftrightarrow r+s=b \wedge r.s=c$
2)	$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}\,x+r\right)\left(\sqrt{a}\,x+s\right) \Leftrightarrow (r+s)\sqrt{a}=b \wedge r.s=c$
3)	$ax^2+bx+c=\dfrac{1}{a}(ax+r)(ax+s) \Leftrightarrow (r+s)=b \wedge ca=r.s$
4)	$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$
5)	$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
6)	$x^3+y^3=(x+y)\left(x^2 \quad xy+y^2\right)$
7)	$x^3-y^3=(x-y)\left(\mathbf{x^2}+xy+y^2\right)$

En General, para los casos 6 y 7, se tiene

$x^n - y^n = (x-y)\left(\mathbf{x^{n-1}} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 \ldots \mathbf{x^1}y^{n-2} + y^{n-1}\right)$, si $n \in Z^+$, sea par o impar

$x^n + y^n = (x+y)\left(x^{n-1} \quad x^{n\ 2}y + x^{n\ 3}y^2 \ldots x^1y^{n\ 2} + y^{n\ 1}\right)$ si $n \in Z^+$ y es impar

En muchos casos es posible factorizar expresiones mediante la aplicación de varios de estos métodos y esto facilita la simplificación de expresiones más complicadas.

[12] Estos casos aplican a expresiones trigonométricas que tengan la misma estructura.

Ejemplos

1)	$4x^2-20x+25=(2x-5)^2$
2)	$4xyz^2 - 4xyz - 24xy = 4xy(z-3)(z+2)$
3)	$49x^2y^2-25=(7xy-5)(7xy+5)$
4)	$6x^2+9x-105=(3x+15)(2x-7)$
5)	$\text{sen}^2x+22\text{senx}+105=(\text{senx}-7)(\text{senx}+15)$
6)	$\cos^2x\,\text{tgx}-4\cos x\,\text{tgx}+4\text{tgx}=\text{tgx}(\cos x-2)^2$
7)	$x^3-125=(x-5)(x^2+5x+25)$
8)	$\csc^3x+8=(\csc x+2)(\csc^2x-2\csc x+4)$

3.3) FACTORIZACIÓN MEDIANTE LA REGLA DE RUFFINI

Por el algoritmo de la división[13] se sabe que, si la división es exacta se verifica

$$\mathbf{P(x)=D(x).Q(x)\,,}$$

entonces se puede aplicar la regla de Ruffini para factorizar el polinomio, si se conoce algún divisor del polinomio P(x).

Este método es sumamente útil cuando el polinomio a factorizar tiene grado mayor que dos y no puede obtenerse a través de alguno de los productos notables.

El binomio $Q(x)=x-b$, si $b \in \mathbb{Z}$ es divisor del polinomio $P(x)=a_nx^n+...+ax+a_0$, si $P(b)=0$, es decir si el valor numérico de P es cero, cuando x=b.

Si Q(x)= x-b es divisor de P(x) entonces b es divisor de a_0.

[13] Ver página 39

El binomio $Q_1(x) = cx - d$, si $c \in Z^*$ y $d \in Z$, es divisor del polinomio P(x) si $P\left(\frac{d}{c}\right) = 0$, es decir, si el valor numérico de P es cero, cuando $x = \frac{d}{c}$

Si $Q_1(x) = cx - d$ es divisor de P(x), entonces d es divisor de a_0 y c es divisor de a_n.

En Resumen

Si un polinomio tiene raíces enteras éstas son divisiones del término independiente.

Si un polinomio tiene raíces racionales, el numerador es divisor del término independiente, el denominador, del coeficiente de la variable de mayor grado.

Por ejemplo

1) Factorizar el polinomio $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

Si x = 1 el valor numérico de ese polinomio es cero, por lo tanto el binomio x −1 es un divisor de dicho polinomio, aplicando la regla de Ruffini se tiene:

$$
\begin{array}{r|rrrr|r}
 & +1 & -1 & -3 & +5 & -2 \\
+1 & & +1 & 0 & -3 & +2 \\
\hline
 & +1 & 0 & -3 & +2 & 0 \\
+1 & & +1 & +1 & -2 & \\
\hline
 & +1 & 1 & -2 & 0 & \\
+1 & & 1 & +2 & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 0 & &
\end{array}
$$

El polinomio cociente en la primera división, es $x^3 - 3x + 2$

El polinomio cociente en la segunda división, es $x^2 + x - 2$

El polinomio cociente en la tercera división, es $x + 2$

En todos los casos el polinomio divisor es $x - 1$

Entonces aplicando el algoritmo de la división, el polinomio se factoriza así

$$x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^3(x+2)$$

Otra forma de factorizar este polinomio, es combinar el método de Ruffini con algún otro método conocido. Por ejemplo así:

Después de aplicar Ruffini dos veces se tiene que:

$$x^4-x^3-3x^2+5x-2=(x-1)^2(x^2+x-2)$$

Ahora se factoriza el trinomio x^2+x-2, para ello se buscan dos números que multiplicados resulte –2 y sumados resulte +1, esos números son +2 y –1, finalmente se obtiene entonces:

$$x^4-x^3-3x^2+5x-2=(x-1)^2(x-1)(x+2)=(x-1)^3(x+2)$$

2) Factorizar el polinomio $4x^4-4x^3-3x^2+4x-1$

Si x = 1 el valor numérico de ese polinomio es cero, por lo tanto el binomio x –1 es un divisor de dicho polinomio, aplicando la regla de Ruffini se tiene:

	+4	−4	−3	+4	−1
+1		+4	0	−3	+1
	+4	0	−3	+1	0
−1		−4	+4	−1	
	+4	−4	+1	0	

El polinomio cociente en la primera división, es $4x^3-3x+1$
Y tiene valor numérico cero cuando x=-1

El polinomio cociente en la segunda división, es $4x^2-4x+1$

Entonces aplicando el algoritmo de la división, el polinomio se factoriza así:

$$4x^4-4x^3-3x^2+4x-1=(x-1)(x+1)(4x^2-4x+1)=(x-1)(x+1)(2x-1)^2$$

Es un trinomio cuadrado perfecto, se factoriza como un binomio al cuadrado.
$4x^2-4x++1=(2x-1)^2$

4) FRACCIONES ALGEBRAICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

Una fracción algebraica o trigonométrica es el cociente de dos expresiones algebraicas y/o trigonométricas. Son ejemplos de fracciones algebraicas

1) $\dfrac{\sqrt{x} - 3x^2}{x - 1}$
2) $\dfrac{xy + 3x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
3) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x}$

Son ejemplos de fracciones trigonométricas:

1) $\dfrac{\text{sen}x - 3}{\sqrt{x^2}}$
2) $\dfrac{1 - 2\sec x}{\sqrt{\text{tg}^2 x + 2}}$
3) $\dfrac{\text{sen}^2 x + 5}{\text{tg}^3 x - 2\text{tg}x + 1}$

Es importante recalcar que las variables que aparecen en estas expresiones representan números reales, por lo tanto la variable sólo puede tomar aquellos valores que cumplan que:

- ✓ El denominador es diferente de cero.
- ✓ La cantidad subradical de las raíces de índice par es positiva.

5) SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES

Consiste en reducir a la fracción a su mínima expresión usando la propiedad del elemento inverso y el elemento neutro de la multiplicación de números reales. Es decir:

$$\frac{ka}{kb} = \underbrace{k\frac{1}{k}}_{\text{Elemento inverso}}\frac{a}{b} = \underbrace{1\frac{a}{b}}_{\text{Elemento neutro}} = \frac{a}{b}, \mathbf{si}\ \mathbf{k \neq 0 \wedge b \neq 0}$$

Para aplicar este método en las fracciones algebraicas y trigonométricas, se factoriza la expresión del numerador, se factoriza la expresión del denominador y se cancelan los factores iguales si los tuviere. No siempre las fracciones puede ser simplificadas.

Ejemplos

1) $\dfrac{x^2-4}{4x^2-8x+4} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{4(x-2)^2} = \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{4(x-2)^{\cancel{2}}} = \dfrac{x+2}{4(x-2)}$, **si x ≠ 2**
2) $\dfrac{sen^2x-1}{sen^2x+3senx+2} = \dfrac{(senx-1)\cancel{(senx+1)}}{\cancel{(senx+1)}(senx+2)} = \dfrac{senx-1}{senx+2}$, si $x \neq \dfrac{3\pi}{2} + 2K\pi, K \in Z$

Es importante recalcar que para dos fracciones algebraicas sean equivalentes deben tomar los mismos valores numéricos para cualquier x de su dominio[14].

En el ejemplo 1, x=2 no puede estar en el dominio de la fracción $\frac{x+2}{4(x-2)}$ para que esa simplificación sea correcta y tenga sentido.

En el ejemplo 2, $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi,\ K \in Z$ no puede estar en el dominio de la fracción $\frac{\text{senx} - 1}{\text{senx} + 2}$ para que esa simplificación sea correcta y tenga sentido.

Para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones algebraicas y trigonométricas se emplean los mismos mecanismos definidos para las operaciones con números reales, por supuesto trabajando ahora con las expresiones algebraicas y usando todos los métodos conocidos para la factorización de las expresiones.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Si $b \neq d$ se debe hallar el mínimo común múltiplo para unificar los denominadores.

Ejemplo

$$\frac{x}{x+3} - \frac{2x+1}{x^2-9} = \frac{x(x-3) - (2x+1)}{(x-3)(x+3)} =$$

$$\frac{x^2 - 3x - 2x - 1}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2 - 5x - 1}{(x-3)(x+3)}$$

[14]Ver en la página 31, equivalencia de expresiones algebraicas.

MULTIPLICACIÓN

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad b \wedge c \neq 0$$

Ejemplo

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 3} =$$

$$\frac{(x - 3)(x + 2)(x - 2)^2}{(x - 2)(x + 2)(x + 3)} = \frac{(x - 3)(x - 2)}{x + 2},$$

si $\neq 2 \wedge x \neq -2$

DIVISIÓN

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \; b \wedge c \neq 0$$

Ejemplo

$$\frac{x^3 - 8}{x + 2} \div \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 - 4} =$$

$$\frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x + 2)} \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x^2 + 2x + 4)} = (x - 2)^2$$

si $x \neq -2$

Estas operaciones pueden combinarse en una sola expresión.

Por ejemplo

$$\left(\frac{x-3}{x-9}-\frac{x^2}{x^2-81}\right)\div\left(\frac{4x^2-10x-36}{(4x+8)}\;\frac{2}{(x^2-81)}\right)=$$

$$\frac{(x-3)(x+9)-x^2}{(x-9)(x+9)}\div\left(\frac{(2x-9)(2x+4)}{4(x+2)}\;\frac{2}{(x-9)(x+9)}\right)=$$

$$\frac{x^2+6x-27-x^2}{(x-9)(x+9)}\div\frac{(2x-9)}{(x-9)(x+9)}$$

$$\frac{3(2x-9)}{(x-9)(x+9)}\;\frac{(x-9)(x+9)}{(2x-9)}=3,\ \text{si}\,x\neq\left\{-2,\frac{9}{2},9,-9\right\}$$

6) RACIONALIZACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS O TRIGONOMÉTRICAS

Racionalizar es un proceso que consiste en convertir a una fracción con numerador (o denominador) irracional, es decir, que tiene expresiones con raíces, en una fracción equivalente con numerador (o denominador) sin raíces.

Cuando se racionaliza el numerador de una fracción, se obtiene un nuevo numerador sin raíces

Cuando se racionaliza el denominador de una fracción, se obtiene un nuevo denominador sin raíces.

- Si la expresión a racionalizar es un monomio se multiplica al numerador y al denominador de la fracción (para que ésta no se altere[15]) por una raíz tal que permita la simplificación del radical, así:

[15] Por las propiedades del elemento inverso y el elemento neutro de la multiplicación de los números reales, se sabe que $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b.b^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^{n}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b},$$ siendo

$b \neq 0$. Si n es par $b>0$.

Ejemplos

1) $$\frac{2x - 3}{\sqrt{5}} = \frac{(2x - 3)\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}x - 3\sqrt{5}}{5}$$

2) $$\frac{\sqrt[3]{\text{senx}}}{2\text{senx}\cos x} = \frac{\sqrt[3]{\text{senx}}}{\text{senx}\cos x} \cdot \frac{\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}}{\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}} = \frac{\text{senx}}{\text{senx}\cos x\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}} =$$

$$\frac{1}{\cos x\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}},$$ si $x \neq K\pi, K \in Z$

- Si la expresión a racionalizar es un binomio de **raíces cuadradas** se multiplica al numerador y al denominador por la conjugada de dicho binomio, para así obtener el producto suma por diferencia y al desarrollarlo se simplifican las raíces cuadradas del denominador de la expresión, así

$$\frac{c}{\sqrt{a} + b} = \frac{c}{\sqrt{a} + b} \cdot \frac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b} = \frac{c\left(\sqrt{a} - b\right)}{\left(\sqrt{a} + b\right)\left(\sqrt{a} - b\right)} =$$

$$\frac{c\left(\sqrt{a} - b\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2 - (b)^2} = \frac{c\left(\sqrt{a} - b\right)}{a - b^2}$$ si $a > 0 \wedge a - b^2 \neq 0$

Ejemplos

1)
$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x^2-4x+4} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{x^2-4x+4}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} =$$
$$\frac{x-2}{(x-2)^2\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{(x-2)\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}\ ,\ \text{si } x\neq 2$$

2)
$$\frac{9x^2+3x-56}{\sqrt{3x}-\sqrt{7}} = \frac{9x^2+3x-56}{\sqrt{3x}-\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{7}}{\sqrt{3x}+\sqrt{7}} =$$
$$\frac{(3x+8)(3x-7)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{7}\right)}{3x-7} = (3x+8)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{7}\right)$$
$$\text{si } x \neq \frac{7}{3}$$

- Si el binomio está formado por **raíces de índice mayor que dos, no tiene ningún sentido multiplicar por la conjugada**, pues esta operación no simplifica la raíz. En ese caso se deduce como un caso particular de la suma y diferencia de cubos la siguiente racionalización:

$$\boxed{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b} = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}$$

Deducción

Sea la expresión $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ (1)

Se efectúa el siguiente cambio de variable

$\sqrt[3]{a} = x \Rightarrow a = x^3$ $\quad\quad$ $\sqrt[3]{b} = y \Rightarrow b = y^3$

Por productos notables, se sabe que $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

Volviendo a la variable original

$$a-b=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$$

Despejando

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

Análogamente

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$$

En general

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\mp\sqrt[n]{b}=\frac{a\mp b}{\sqrt[n]{a^{n-1}}\pm\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\sqrt[n]{a^{n-3}b^2}\ldots\ldots\pm\sqrt[n]{b^{n-1}}},\ \text{si } n\in Z^+}$$

Ejemplos

1)
$$\frac{x-2}{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{2}}=\frac{x-2}{\dfrac{x-2}{\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3 2}+\sqrt[5]{x^2 2^2}+\sqrt[5]{x 2^3}+\sqrt[5]{2^4}}}=$$

$$\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{2x^3}+\sqrt[5]{4x^2}+\sqrt[5]{8x}+\sqrt[5]{16}\text{ , si } x\neq 2$$

2)
$$\frac{\sqrt[3]{\cos x}-2}{\cos^2 x+3\cos x-10}=\frac{\sqrt[3]{\cos x}-\sqrt[3]{8}}{(\cos x+5)(\cos x-2)}=$$

$$\frac{\dfrac{\cos x-2}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{8\cos x}+\sqrt[3]{8^2}}}{(\cos x+5)(\cos x-2)}=$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\cos^2 x}+2\sqrt[3]{\cos x}+4\right)(\cos x+5)}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

A) Desarrollar los siguientes productos notables:

1) $(3x-5)^2=(3x)^2+2(3x)(-5)+(-5)^2= 9x^2-30x+25$

Comentario

Es un **"error"** frecuente de los estudiantes resolver un binomio al cuadrado de alguna de las siguientes formas:

a) $(3x-5)^2=(3x)^2-(5)^2= 9x^2-25$ **INCORRECTO**

porque del desarrollo de un binomio al cuadrado se obtiene un trinomio.

b) $(3x-5)^2= 3x^2+2(3x)(-5)+(-5)^2= 3x^2-30x+25$ **INCORRECTO**

porque en ese binomio el primer término es 3x y ese término debe ser elevado al cuadrado, $3x^2 \neq (3x)^2$.

2) $(\text{sen}x+\cos x)^2=\text{sen}^2x+2\cos x\,\text{sen}x+\cos^2x= 1+\text{sen}^2x.$

Comentario

Es un error frecuente de los estudiantes

a) $(\text{sen}x+\cos x)^2=\text{sen}^2x+\cos^2x=1$ **INCORRECTO**

es el mismo error cometido en el caso "a" del ejemplo anterior.

3) $(\text{sen}x-2x+1)^2 =$

$=(\text{sen}x)^2+(-2x)^2+(1)^2+2\text{sen}x(-2x)+2(-2x)+1+2(1)\text{sen}x$

$=\text{sen}^{2x}+4x^2+1-4x\text{sen}x-4x+2\text{sen}x.$

4) $(5x-2)^3=(5x)^3+3(5x)^2(-2)+3(5x)(-2)+(-2)^3=125x^3-30x^2-30x-8.$

5) $\left(\sqrt{2x}+1\right)\left(\sqrt{2x}-1\right)=\left(\sqrt{2x}\right)^2-1=2x-1.$

6) $(7x+9)(7x-2)=(7x)^2+(9-2)7x+9(-2)=49x^2+49x-18$.

B) Factorizar las siguientes expresiones en factores primos de coeficientes reales

1) $5x^2+7xy-5x-7y=x(5x+7y)-1(5x+7y)=(5x+7y)(x-1)$

Comentario

Es un error frecuente de los estudiantes factorizar incompleta la expresión, así

$5x^2+7xy-5x-7y=x(5x+7y)-1(5x+7y)$ **INCORRECTO**

porque no ha factorizado aún, pues la operación predominante en este caso es la sustracción y no el producto, es decir $x(5x+7y)$ "y" $1(5x+7y)$ son sumandos, no factores.

2) $\text{sen}^4x-16=(\text{sen}^2x-4)(\text{sen}^2x+4)=(\text{sen}x+2)(\text{sen}x-2)(\text{sen}^2x+4)$.

Comentario

Esta expresión trigonométrica es una diferencia de cuadrados, porque $\text{sen}^4x-16=(\text{sen}^2x)^2-(4)^2$, por lo tanto se puede factorizar en una suma por diferencia.

3) $\text{sen}(\pi + x)-\cos(\pi + x)=-\text{sen}x-(-\cos x)=\cos x-\text{sen}x$

$$=(\sqrt{\cos x} - \sqrt{\text{sen}x})(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\text{sen}x}).$$

Comentario

Por propiedades de las funciones trigonométricas[16] se sabe que

[16]Ver, Otras Propiedades, en el Capítulo VI Funciones Trigonométricas.

$\text{sen}(\pi + x) = -\text{senx}$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$, al sustituir se obtiene una diferencia, que se puede factorizar en una suma por diferencia porque $\left(\sqrt{\cos x}\right)^2 = \cos x$, siempre y cuando $\cos x \geq 0$ y $\left(\sqrt{\text{senx}}\right)^2 = \text{senx}$, siempre y cuando $\text{senx} \geq 0$. Es importante mencionar que la expresión original: $\text{sen}(\pi + x) - \cos(\pi + x)$, está definida para cualquier x real, mientras que la expresión factorizada $(\sqrt{\cos x} - \sqrt{\text{senx}})(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\text{senx}})$ sólo está definida si $x \in \left[0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in z$, entonces esta factorización en el contexto de otro ejercicio, donde el objetivo no sea factorizar, sino por ejemplo, resolver una ecuación trigonométrica, puede ser inapropiada, pues en ese caso conduce a la pérdida de soluciones[17].

Volviendo al contexto en el que se está trabajando, donde sólo se pide factorizar, se puede aplicar cualquier otro método, como por ejemplo factor común, así:

$$\text{sen}(\pi + x) - \cos(\pi + x) = -\text{senx} - (-\cos x) = \cos x - \text{senx} = x\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\text{senx}}{x}\right)$$

x puede ser cualquier número diferente de cero. Cualquiera de estas factorizaciones es correcta.

En otra situación[18], donde la factorización sea una herramienta y no el objetivo, se debe usar la factorización que más se ajuste al fin perseguido.

[17] Ver, Teorema IV en el. Capítulo III Ecuaciones.
[18] Por ejemplo, en la resolución de una ecuación, en el cálculo de un límite, etc.

4) $\sqrt{x^3} - 16\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\sqrt{x^2} - 16\right) = \sqrt{x}(x - 16).$

Comentario

La expresión $\sqrt{x^3} - 16\sqrt{x}$ está definida en R, sí y sólo sí $x \geq 0$, por lo tanto $\sqrt{x^2} = x$, entonces la factorización es única.

Sin embargo una expresión algebraica como la siguiente, debe factorizarse cuidadosamente, así:

5) $\sqrt{x^6} - 16\sqrt{x^2} = \sqrt{x^2}\left(\sqrt{x^4} - 16\right) = | x | (x^2 - 16) = | x | (x - 4)(x + 4)$

aplicando la definición de valor absoluto[19] $| x | = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$, la expresión factorizada es:

a) $\sqrt{x^6} - 16\sqrt{x^2} = x(x - 4)(x + 4)$, si $x \geq 0$

b) $\sqrt{x^6} - 16\sqrt{x^2} = -x(x - 4)(x + 4) = x(4 - x)(x + 4)$, si $x < 0$

esto ocurre porque la expresión $\sqrt{x^6} - 16\sqrt{x^2}$ está definida para todos los números reales, positivos y negativos, entonces se debe aplicar la definición de valor absoluto para poder factorizar la expresión.

La factorización que suelen realizar los estudiantes es

$$\sqrt{x^6} - 16\sqrt{x^2} = x(x - 4)(x + 4) \quad \textbf{INCOMPLETO}$$

porque no se han aplicado adecuadamente las propiedades de los radicales.[20]

[19] Ver definición de valor absoluto en el Capítulo V Valor Absoluto.
[20] Ver propiedades de los radicales en el Capítulo I Números Reales.

6) $\cos^3x-8=(\cos x-2)(\cos^2x+2\cos x+4)$

Comentario

La expresión es una diferencia de cubos, porque $\cos^3x-8 = (\cos x)^3- (2)^3$, al aplicar la factorización correspondiente se obtiene la respuesta dada.

Es un **error** grave y común el siguiente:

b) $\text{Cos}^3x-8 = (\cos x-2)^3$ **INCORRECTO**

Pues como ya se explicó, del desarrollo de un binomio al cubo se obtiene una expresión de cuatro términos, no de dos.

7) $64-16tgx+tg^2x=(tgx-8)^2$

Comentario

Esta expresión trigonométrica tiene la forma de un trinomio cuadrado perfecto, porque tiene dos términos que son cuadrado perfecto, $tg^2x =(tgx)^2$, $64=8^2$ y el otro término cumple con : $2(tgx)(8)=16tgx$. Entonces se puede factorizar como un binomio al cuadrado.

8) $sen^2x-8senx-20=(senx-10)(senx+2)$

Comentario

Esta expresión trigonométrica tiene la forma de un trinomio que resulta del producto de dos binomios con un término igual. El término igual es senx, luego se buscan dos números que multiplicados resulte –20 y que sumados resulte –8, esos números son –10 y +2, porque $(-10)(+2)=-20$ y $-10+2=-8$.

C) Racionalizar el numerador y simplificar las siguientes fracciones, si es posible

1) $$\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x^2-5x-24}=\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{8}}{x-5x-24}=\frac{\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{8x}+\sqrt[3]{(8)^2}}}{(x-8)(x+3)}=$$

$$\frac{x-8}{(x-8)(x+3)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=\frac{1}{(x+3)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)},\ \text{si } x\neq 8$$

Comentario

En este caso se aplicó la racionalización de la diferencia de raíces de igual índice[21].

Es un error frecuente de los estudiantes multiplicar por la conjugada, pero no tiene sentido, pues no se simplifica el radical, porque la operación que se genera con este procedimiento es una suma por diferencia, así: $\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x}+2\right)=\left(\sqrt[3]{x^2}-4\right)$, y el radical no se simplifica.

2) $$\frac{\sqrt{x^2+2x+1}-1}{x^2-3x}=\frac{\sqrt{(x+1)^2}-1}{x(x-3)}=\frac{|x+1|-1}{x(x-3)}$$

Comentario

En este ejemplo, existen dos simplificaciones posibles porque $(x+1)^2$ es positivo para todo número real x, así[22]:

[21] Ver en la página 63, el punto Racionalización de fracciones algebraicas y trigonométricas.
[22] Para más detalles ver el Capítulo V Valor Absoluto.

a) si $x+1 \geq 0$, entonces

$$\frac{|x+1|-1}{x(x-3)} = \frac{x+1-1}{x(x-3)} = \frac{1}{x-3}, \text{ si } x \geq -1 \wedge x \neq 0$$

b) si $x+1<0$, entonces

$$\frac{|x+1|-1}{x(x-3)} = \frac{-x-1-1}{x(x-3)} = \frac{-(x+2)}{x(x-3)} = \frac{x+2}{x(3-x)}, \text{ si } x < -1$$

3) $$\frac{\sqrt{1+\sec x}-\sqrt{1-\sec x}}{\cos x} = \frac{1+\sec x-1+\sec x}{\cos x\left(\sqrt{1+\sec x}+\sqrt{1-\sec x}\right)} =$$

$$\frac{2\sec x}{\cos x\left(\sqrt{1+\sec x}+\sqrt{1-\sec x}\right)} = \frac{2\sec^2 x}{\sqrt{1+\sec x}+\sqrt{1-\sec x}}$$

Comentario

En este ejemplo, el numerador es una diferencia de raíces cuadras, por lo tanto para racionalizar se debe multiplicar por la conjugada para que se genere una suma por diferencia y al resolverla se simplifican las raíces del numerador.

Un **error** muy frecuente cometido por los estudiantes, es ignorar el signo menos que está delante de la segunda raíz y afectar, después de simplificar el radical, sólo el primer término de esa cantidad subradical, entonces no se llega al resultado correcto. Esto se muestra en el siguiente proceso:

$$\frac{\sqrt{1+\sec x}-\sqrt{1-\sec x}}{\cos x} = \frac{1+\sec x-1-\sec x}{\cos x\left(\sqrt{1+\sec x}+\sqrt{1-\sec x}\right)} = 0$$

INCORRECTO

D) Simplificar al máximo las siguientes expresiones

1) $$\left(\frac{(x-1)^{-1}}{x^{-3}} - (1-x)^{-1}\right)\frac{1+x(x-2)}{x^2-x+1}\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}} =$$

$$\left(\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x^3}} - \frac{1}{1-x}\right)\frac{x^2-2x+1}{x^2-x+1}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}} =$$

$$\left(\frac{x^3}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}\frac{1}{|x+1|} =$$

$$\frac{x^3+1}{x-1}\frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}\frac{1}{|x+1|} =$$

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)(x-1)}{(x^2-x+1)|x+1|}\text{, si } x \neq -1$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{|x+1|}$$

a) si $x + 1 \geq 0 \wedge x \neq 1$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{|x+1|} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1\text{, si } x \geq -1 \wedge x \neq 1$$

b) si $x<0$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{|x+1|} = \frac{(x+1)(x-1)}{-x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{-(x+1)} = -x+1\text{ , si } x < -1$$

2) $$\frac{ctg^3x - \cos^3 x}{1 - 2senx + sen^2x} = \frac{\dfrac{\cos^3 x}{sen^3x} - \cos^3 x}{(1 - senx)^2} = \frac{\cos^3 x(1 - sen^3x)}{sen^3x(1 - senx)^2} =$$

$$\frac{\cos^3 x(1 - senx)(1 + senx + sen^2x)}{sen^3x(1 - senx)^2} = \frac{\cos^3 x(1 + senx + sen^2x)(1 + senx)}{sen^3x(1 - sen^2x)} =$$

$$\frac{\cos^3 x(1 + senx + sen^2x)(1 + senx)}{sen^3x \cos^2 x} = ctgx\ csc^2x(1+senx)(1+senx+sen^2x)$$

si $x \neq n\dfrac{\pi}{2}$, $n \in z$

Comentario

En el tercer paso se aplicó la factorización de la diferencia de cubos, en el cuarto paso se simplificó el binomio 1-senx, y esto impone la condición de que senx debe ser diferente de 1, además se multiplicó al numerador y al denominador por la conjugada de ese binomio, que es: 1+senx, lo que impone la condición de que senx debe ser diferente de –1; en el quinto paso se aplicó la identidad fundamental y $1\text{-}sen^2x$ se reemplazó por $\cos^2x$. Por otro lado al estar sen^3x y $\cos^2x$ en el denominador de la fracción, x está restringida a aquellos valores que cumplen que $senx \neq 0 \wedge \cos x \neq 0$, por lo tanto para que esa simplificación sea válida, deben cumplirse esas cuatro condiciones y eso se resume en $x \neq n\dfrac{\pi}{2}$, $n \in z$ [23]

[23] Ver Capítulo VI: Funciones Trigonométricas.

3) $$\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}\right)\div\sqrt{x} = \qquad \text{si} \quad x>0 \quad \wedge \quad x+1>0$$

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{x-(x+1)}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{-1}\,\frac{1}{\sqrt{x}} = -2, \ \text{si } x > 0$$

4) $$\frac{\dfrac{x+3}{4x^2-1}}{\dfrac{x+2}{6x^2-5x-4}} = \frac{(x+3)(6x^2-5x-4)^{*}}{(x+2)(4x^2-1)} = \frac{(x+3)(3x-4)(2x+1)}{(x+2)(2x-1)(2x+1)} =$$

$$\frac{(x+3)(3x-4)}{(x+2)(2x-1)}, \ \text{si } x \neq -\frac{1}{2}$$

Al factorizar

$$6x^2-5x-4=\frac{1}{6}\left(36x^2-5(6x)-24\right) = \frac{1}{6}(6x-8)(6x+3) = (3x-4)(2x+1)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Desarrollar los siguientes productos, cuando sea posible, aplicar las fórmulas de productos notables

1) $(2x+1)^2$

2) $\left(\frac{1}{2}a^m + a^n\right)^2$

3) $(x^{a+1}+y^{x-2})^2$

4) $(1-\cos(x+\pi))^2$

5) $(\text{sen}x-\cos x)^2$

6) $\left(\frac{1}{2}x^2y + \frac{z^3}{-3}\right)\left(\frac{1}{2}x^2y + \frac{z^3}{3}\right)$

7) $(2-x)(2+x)$

8) $(a^2-2b^3)(a^2+2b^3)$

9) $(y^{x+1}-2z^{x-1})(y^{x+1}+2z^{x-1})$

10) $\left\{tg(2\alpha) - tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}\left\{tg(2\alpha) + tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$

11) $(1-\sec\alpha)(1+\sec\alpha)$

12) $(1-\cos x)(1+\cos x)$

13) $(2n+3)^3$

14) $(2x+1)^3$

15) $(x-h)^3$

16) $\left(\sqrt[3]{x} - 2x\right)^3$

17) $(3x-7)(3x+2)$

18) $(\text{sen}x-3)(\text{sen}x-2)$

19) $(1-ctg^2x)(1-\cos^2x)$

20) $(\cos x-\text{sen}^2x)(\cos x-\cos 2x)$

21) $(x+y+1)^2$

22) $(2x-3-y)^2$

23) $(x-y)^n$

24) $(x+y)^n$

25) $(10y-15)(3+10y)$

26) $(3xy+2a)(5a+3xy)$

27) $(-2x-5y)^2$

28) $(5x^3-4y^5)^2$

29) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{8}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{5}{8}\right)$

30) $(4x-1)^3$

31) $(12b^3-3a^2)(-12b^3-3a^2)$

32) $\left(y - 3 + \sqrt{8}\right)\left(y - 3 - \sqrt{8}\right)$

33) $\left(\sqrt[3]{x} + 5\right)^3$

34) $(x+2)(x^2-2x+4)$

35) $(2senx+4)(2senx-7)$

36) $(tgx-2y)(tgx+2y)$

37) $(cosx+tgx)^2$

38) $(senx-1)(sen^2x+senx+1)$

39) $(secx-16)(secx+3)$

40) $(1-senx)(cscx-1)$

41) $(3x-5)(2x+1)$

42) $(2x-5y)^2$

43) $(x-3+y)^2$

44) $(x-2y)(x+2y)$

45) $(m-3+n)(m-3-n)$

46) $(x+y+1)(x+y-1)$

47) $(x+1)^3$

48) $(2x-y)^3$

49) $(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+4)$

50) $\left(\sqrt{x} - 4\right)\left(\sqrt{x} + 10\right)$

B) Factoriza las siguientes expresiones en productos de factores irreducibles

1) $2ax-3+2bx-3b$

2) $x^2+x+a-a^2$

3) v^3-6v^2-v+6

4) $2-4senx+cos2x-2senxcos2x$

5) $sen4x+2sen^22x-2sen2x$

6) $1+sen2ax-cos2ax$

7) $sen(a+x)+sen(a-x)-sena$

8) x^4-16

9) x^8-256

10) $\sqrt[4]{x} - 2$

11) $3\sqrt{x} - 4$

12) $\sqrt{x^5} - 4\sqrt{x}$

13) $csc^22x-2cos^2x$

14) $tg^22x-tg^2(-x+\frac{\pi}{2})$

15) sec^4x-tg^4x

16) x^2-2x+1

17) x^4-18x^2+81

18) x^2+5x+6

19) $t^2+2t-24$

20) x^4+2x^2+1

21) t^3-2t^2-8t

22) $\cos^2x+3\cos x+2$

23) $tg^2x+tgx-2$

24) $1+sen2x$

25) $sen^4x-2sen^2x\cos^2x+\cos^4x$

26) $3z^2-2z+1$

27) $2x^2+5x-3$

28) $6k^2-13k+6$

29) $10a^2-19a-15$

30) $2\cos^2x+\cos x-1$

31) $2tg^2x-3tgx+1$

32) $8\sec^2x-14\sec x+3$

33) x^3-27

34) $8-x^3$

35) $1-\cos^3x$

36) sen^3x+8

37) $(x+h)^3-h^3$

38) x^5+a^5

39) tg^3x-sen^3x

40) $sen^4x+senx$

41) $4x+senx$

42) $sen^4x-senx$

43) $\cos x+x^2senx$

44) $4sen^2x-9$

45) $(\cos x-1)^2-sen^2x$

46) t^2-5t+6

47) $y^2-30y+200$

48) $9x^2-3x-2$

49) $\csc^3x-8$

50) $27tg^3x+64$

51) $6+2x-3x^3-x^4$

52) $y-4x^2$

52) $\sec^3x-\sec^2x+2\sec x-2$

53) $2tg^3x-tg^2x-6tgx+3$

54) $4senx(2x-1)+(2x-1)^2$

55) $x^3sen^2y-8(1-\cos^2y)$

56) $1-\sec x+tg^2x$

57) $25-(x+5)^2$

58) $x^3+6x^2+12x+8$

59) $(x+1)^3+125$

60) $(\cos x-1)^2-sen^2x$

C) Racionalizar los numeradores o denominadores, según sea el caso, de las siguientes fracciones y simplificar si es posible

1) $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$

2) $\dfrac{\sqrt{3x} - \sqrt{12 - x}}{x^2 - 9}$

3) $\dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x}}{2}$

4) $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x}$

5) $\dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{senx}} - \sqrt{1 - \operatorname{senx}}}{\operatorname{tgx}}$

6) $\dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tgx}} - \sqrt{1 - \operatorname{tgx}}}{\operatorname{senx}}$

7) $\sqrt[3]{x^3 + 8x^2} - x$

8) $\dfrac{\sqrt[3]{8 + x} - 2}{x}$

9) $\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{senx}} - \sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{senx} - \cos x}$

10) $\dfrac{\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[3]{\operatorname{sen2x}}}{\cos x}$

11) $\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x} - \sqrt[3]{\cos^2 x}}{1 - \operatorname{tgx}}$

12) $\dfrac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

13) $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}}$

14) $\dfrac{1}{1 - \sqrt[4]{a}}$

15) $\dfrac{1}{2 - \sqrt[3]{a}}$

16) $\dfrac{1}{1 + \sqrt[4]{a}}$

17) $\dfrac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}$

18) $\dfrac{\operatorname{senx} - \sqrt{\cos x}}{\operatorname{senx} + \sqrt{\cos x}}$

19) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$

20) $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$

D) Simplificar las siguientes fracciones algebraicas y trigonométricas

1) $\dfrac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x + 2)(x - 3)}$

2) $\dfrac{3n^4 - 4n^3 + 1}{(n - 1)^2}$

3) $\dfrac{v^3 - 6v^2 - v + 6}{v - 1}$

4) $\dfrac{8 - t^3}{t^2 - 2t}$

5) $\dfrac{x^5 - 243}{x^2 - 9}$

6) $\dfrac{u^2 - 8u + 15}{u^2 - 5u + 6}$

7) $\dfrac{t^3 + t^2 - 21t + 45}{t^3 + 6t^2 + 9t}$

8) $\dfrac{8y^3 - 3y^2 + 7y}{2y^3 + 2y}$

9) $\dfrac{x^4 - rx^3 - r^3x + r^4}{x^4 - 2r^2x^2 + r^4}$

10) $\dfrac{\frac{5\pi}{3}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\sqrt{3} - \frac{5\pi}{3}\sqrt{2} - \frac{\pi}{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{3} - \sqrt{8}}$

11) $\dfrac{x^2 - \sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax} - a}$

12) $\dfrac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{a\sqrt{x} - x\sqrt{a}}$

13) $\dfrac{\sqrt{3x} - \sqrt{12 - x}}{2x - 3\sqrt{19 - 5x}}$

14) $\dfrac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$

15) $\dfrac{\sqrt{x^5} - 4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{4x} - 2}$

16) $\dfrac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}$

17) $\dfrac{\cos^2 x - 3\cos x + 2}{2 - 2\cos x - \operatorname{sen}^2 x}$

18) $\dfrac{\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen}^2 2x - 2\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x - \cos^2 2x}$

19) $\dfrac{\pi + x\cos^2 x + \pi\operatorname{sen}^2 x}{x^3 - \pi x^2 - \pi^2 x + \pi^3}$

20) $\dfrac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\operatorname{sen}^2 x}$

21) $\dfrac{\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{(1 - \cos x)^2}$

22) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen} x}$

23) $\dfrac{1-\mathrm{ctg}^3x}{2-\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}^3x}$

24) $\dfrac{\mathrm{tg}2x\,\mathrm{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{(1-\mathrm{tg}x)\sec 2x}$

25) $\dfrac{1-a^6}{(a+1)(1+a+a^2)}$

26) $\dfrac{(a+b)(a^2+b^2)(a-b)^2}{(a-b)(a^2-b^2)(a+b)^2}$

27) $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}\,\sqrt{a^2b}\,\dfrac{1}{a}\,\dfrac{a+b}{ab}}{(a^2b^3)^{1/3}\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{\dfrac{1}{b}}\,\sqrt{a+b}}$

28) $\dfrac{\sqrt{a}\,\sqrt{b\sqrt{a}}\,a^{-1}a^7b}{a^2\sqrt{a}\,b}\,ab^{-1}\sqrt{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}}$

29) $\dfrac{a(a-b)(a+b)+(b^2+ab+a^2)(b-a)}{(a^4-b^4)\sqrt[3]{a\sqrt{b}}}$

30) $\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{6}+\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

31) Analice el siguiente proceso algebraico:

partimos de	$a = b$
multiplicamos por <u>a</u> ambos miembros	$a^2= ab$
restamos <u>b</u>^{2} a ambos miembros	$a^2-b^2= ab-b^2$
factorizamos:	$(a-b)\ (a+b)= b(a-b)$
simplificamos por a-b:	$a+b = b$
y como a=b, entonces	$b+b=b$
es decir	$2b=b$
simplificando queda:	$2=1$

¿Qué Ocurrió?

E) Efectuar las siguientes operaciones y simplificar

1) $\dfrac{\dfrac{x}{y} - 1}{x - y}$

2) $\dfrac{\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^2}{\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x-3}}$

3) $\dfrac{\dfrac{5}{y} - \dfrac{6}{2y+1}}{\dfrac{5}{y} + 4}$

4) $\dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

5) $\dfrac{4x}{x^3 - 4x} - \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$

6) $\dfrac{\dfrac{x^2 - 5}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x + 1}}{1 - \dfrac{4}{x+1}}$

7) $\dfrac{8 - x^3}{x^2 - 2x} - \dfrac{(x - 2)^3(x^2 - 3x + 2)}{x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16}$

8) $\dfrac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

9) $\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$

10) $\dfrac{3x^{1/3} - x^{-2/3}}{3x^{-2/3}}$

11) $\dfrac{x(x + 1)^{-3/4} - (x + 1)^{1/4}}{x^2}$

12) $\dfrac{-x^3(1 - x^2)^{-1/1} - 2x(1 - x^2)^{1/2}}{x^4}$

13) $\dfrac{a + \sqrt{b}}{a} - \dfrac{a}{a - \sqrt{b}}$

14) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} - b} - \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} + b}$

15) $\dfrac{1}{sen^3x}\ \dfrac{tgx - senx}{1 + senx}$

16) $\dfrac{2}{sen^2x} - \dfrac{1}{1 - \cos x}$

17) (tgx-tga) ctg (x-a)

18) $\dfrac{\cos 2x}{sen^2x} - \dfrac{ctgx}{senx}$

19) $\dfrac{\cos^2 x - sen^2x}{1 + tgx}$

20) $\dfrac{tg2x\ ctg\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{(1 - tgx)\sec 2x}\left\{sen\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - sen(x + \pi)\right\}$

CAPÍTULO III

ECUACIONES

1) DEFINICIÓN

Ecuación en una variable, es una igualdad que es verdadera para determinado valor de la incógnita en el dominio de la ecuación. Dicho valor se llama solución de la ecuación o raíz de la ecuación.

Por ejemplo $x+2=5$ es una ecuación en una variable, donde la incógnita es "x", su dominio es el conjunto de los números reales y esa igualdad sólo es verdadera cuando $x=3$, es decir, "3" es la solución o la raíz de esa ecuación.

TEOREMA I

Sean a y b dos números reales y $a \neq 0$ entonces la ecuación $ax+b=0$ tiene una solución única y es $x = -\frac{b}{a}$.

TEOREMA II

La ecuación cuadrática

$$ax^2+bx+c=0, \text{ con } a \neq 0$$

donde a, b y c son números complejos, tiene dos y sólo dos, soluciones a saber:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si a, b y c son números reales se deduce:

i) Si $b^2-4ac>0$, las dos soluciones son reales y distintas

ii) Si $b^2-4ac=0$, las dos soluciones son reales e iguales, es decir hay una sola solución.

iii) Si $b^2-4ac<0$, no tiene soluciones reales, sino complejas.

En este texto se trabajará únicamente con las soluciones reales.

Dos ecuaciones son equivalentes sí y sólo sí tienen las mismas raíces o la misma solución.

Por ejemplo $x-1=0$ y $\sqrt{x} = 1$ son equivalentes, pues cada ecuación tiene una sola raíz $x=1$, pero $x^2=16$ y $\sqrt{x} = 2$ no son equivalentes pues la primera tiene dos raíces $x=4 \vee x=-4$, mientras que la segunda tiene una sola raíz $x=4$.

Se dice que una ecuación es corolario de otra cuando su conjunto solución contiene las soluciones de esa otra ecuación. En el ejemplo anterior $x^2=16$ es corolario de $\sqrt{x} = 2$, pero ésta no es corolario de $x^2=16$, pues su conjunto solución no contiene todas las soluciones de dicha ecuación. **Si en un par de ecuaciones una es corolario de la otra y viceversa, entonces dicha ecuaciones son equivalentes, pues tienen la misma solución.**

Para resolver una ecuación suelen aplicarse transformaciones algebraicas que permiten obtener otra ecuación más sencilla de resolver, pero durante este proceso es posible obtener raíces extrañas o perder raíces, es decir la nueva ecuación puede dar soluciones que no son solución de la ecuación original o no dar alguna solución de la ecuación original.

Por ejemplo:

- Resolver $\sqrt{x} = -2x$

elevando al cuadrado se obtiene: $x=4x^2$

restando x a ambos miembros: $4x^2-x=0$

sacando factor común: $4x(x-\frac{1}{4})=0$

por propiedad de la multiplicación de los números reales se obtienen las raíces:

$$x=0 \vee x=\frac{1}{4}$$

$x=0$ es solución de $\sqrt{x} = -2x$

$x=\frac{1}{4}$ no es solución de $\sqrt{x} = -2x$, este valor es una raíz extraña de esa ecuación.

- Resolver $x^2-3x=2x$

  simplificando todo entre x: $x-3=2$

  sumando 3 a ambos miembros se tiene: $x=5$

$x=5$ es solución de $x^2-3x=2x$, pero $x=0$ también es solución de esa ecuación, en este caso se perdió la raíz $x=0$.

Estas situaciones se presentan cuando se aplican transformaciones algebraicas sin considerar las condiciones en las cuales están definidas dichas transformaciones y el dominio de la ecuación. Por ejemplo en la expresión $\sqrt{x} = a$ es necesario que "a" sea un número positivo y x también, de lo contrario la expresión no representa un número real, si se eleva al cuadrado sin atender a estas dos condiciones es posible que se obtengan raíces extrañas. Esta situación es la que se ejemplifica en la resolución de la ecuación $\sqrt{x} = -2x$, donde es necesario que $x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ esté definida como un número real, al mismo tiempo que $-2x \geq 0$, para que se satisfaga la definición de raíz cuadrada positiva de un número real, al elevar al cuadrado sin atender a estas condiciones se admite que x puede tomar cualquier valor real lo que conduce a la obtención de raíces extrañas, como $x=\frac{1}{4}$, que no satisfacen la igualdad.

Por otra parte, cuando se realiza alguna simplificación es fundamental que el factor simplificado sea diferente de cero, pues la división entre cero no está definida en los números reales. En la resolución de la ecuación $x^2-3x=2x$ al simplificar entre x, se está excluyendo la posibilidad de que $x = 0$, entonces se produce la pérdida de esa raíz, pues el dominio de esa ecuación es todo los números reales.

En general, al resolver ecuaciones se realiza diversas transformaciones que reducen la ecuación dada a otra más sencilla (o a un conjunto de ecuaciones), por lo tanto, es importante conocer cuáles de dichas transformaciones reducen la ecuación dada a una equivalente, cuáles a la ecuación corolario y cuales causan la pérdida de raíces.

TEOREMA III

Si a ambos miembros de la ecuación $f(x)=g(x)$ se le suma otra expresión $h(x)$, definida en el mismo dominio de la ecuación dada, se obtiene otra ecuación $F(x)+h(x)=g(x)+h(x)$ que es equivalente a la primera.

Por ejemplo

$2x^2+3x-4=x+1$ es equivalente a la ecuación $2x^2+3x-4+(-x-1)=x+1+(-x-1)$ ya que la expresión $h(x)=-x-1$ está definida para cualquier x real, al igual que la ecuación dada.

Mientras que la ecuación $x^2=x$ no es equivalente a la ecuación

$$x^2 + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

Ya que $h(x)=\frac{1}{x}$ no está definida para $x=0$, mientras que la ecuación original está definida para cualquier x real. Esta reducción del dominio puede conducir a la pérdida de raíces, en efecto la ecuación $x^2=x$ tiene como raíces $x=0$ $\wedge$ $x=1$, mientras que la ecuación $x^2+\frac{1}{x}= x+\frac{1}{x}$, sólo admite la raíz $x=1$.

Es importante recalcar que sumar a ambos miembros de una ecuación de una expresión es una primera transformación y reducir términos semejantes es una segunda transformación que puede conducir a una ecuación que no sea equivalente a la dada. Para que quede claro, analicemos el siguiente ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^2 + 2x + \sqrt{x+1} = 15 + \sqrt{x+1} \qquad \text{(I)}$$

Si sumo a ambos miembros de dicha ecuación la expresión $-\sqrt{x+1}$, obtengo una ecuación equivalente, pues $-\sqrt{x+1}$ esta definida para $x\geq-1$ al igual que la ecuación (I). La ecuación (II) equivalente a la ecuación (I) es:

$$x^2 + 2x + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 15 + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} \qquad \text{(II)}$$

Sin embargo, al reducir términos semejantes se obtiene

$$x^2+2x=15 \qquad \text{(III)}$$

La ecuación (III) no es equivalente ni a la ecuación (I) ni a la ecuación (II), pues (III) está definida para cualquier x real, y admite las raíces $x=3$ $\wedge x=-5$, mientras que la ecuación (I) sólo admite la raíz $x=3$.

Para que (III) sea equivalente a (I) es necesario restringir los valores posibles para x, es decir, se debe definir el dominio de la ecuación explícitamente en cada paso de la transformación. En este ejemplo se debe escribir:

$$x^2+2x=15, \text{ si } x\geq-1$$

entonces al resolver la ecuación la raíz x=-5 se descarta pues no satisface la condición dada: $x \geq -1$.

Como consecuencia del Teorema I se tiene que:

La ecuación f(x)+h(x)=g(x) es equivalente a la ecuación f(x)=g(x)-h(x).

TEOREMA IV

Si ambos miembros de la ecuación f(x)=g(x) se multiplican o dividen por otra expresión h(x) que está definida en el mismo dominio de la ecuación dada y siempre es diferente de cero, se obtiene la ecuación

F(x).h(x)=g(x).h(x) ,   o bien

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{h(x)}, \text{ siendo } h(x) \neq 0, \forall\, x \in \text{dominio de } h(x)$$

que es equivalente a la ecuación original.

Por ejemplo:

$x-9=-2(\sqrt{x}+3)$ al dividir la ecuación por $h(x)=\sqrt{x}+3$ se obtiene la ecuación $\sqrt{x}-3=-2$ equivalente a la dada, pues h(x) está definida para $x \geq 0$ y en ningún número de ese intervalo se hace cero.

Mientras que la ecuación x-8=0 no es equivalente a la ecuación (x-8)(x+2)=0, porque aun cuando la expresión h(x)=x+2, está definida en el mismo dominio de la ecuación original, se hace cero para que x=-2, entonces x=-2 es solución de ésta ecuación, pero es una raíz extraña para la ecuación x-8=0, que sólo admite la raíz x=8.

Al igual que en el teorema III es importante recalcar que el multiplicar o dividir por una expresión es una transformación y el simplificar la ecuación es otra transformación, que puede reducir a la ecuación a una nueva que puede no ser equivalente a la original. Lo que aquí se desea expresar se muestra en el siguiente ejemplo.

Sea la ecuación

$$\frac{x^2 + 2x}{3x} + 2x = 3 \qquad \text{(I)}$$

Al multiplicar ambos miembros de (I) por $h(x)=3x$ se obtiene la ecuación (II) , que es equivalente a (I)

$$\frac{3x(x^2 + 2x)}{3x} + 6x^2 = 9x \qquad \text{(II)}$$

pues $h(x)=3x$ es diferente de cero, si $x \neq 0$, entonces la ecuación (I) y h(x) tienen el mismo dominio.

Si embargo al realizar la simplificación se obtiene la ecuación (III)

$$x^2+2x+6x^2=9x \qquad \text{(III)}$$

que no es equivalente ni a (I) ni a (II), pues sus soluciones son $x=0$, y, $x=1$, la solución $x=0$ es una raíz extraña para la ecuación original que está definida si $x\neq 0$, entonces sólo admite la solución $x=1$.

Para que (III) sea equivalente a (I) se debe mencionar explícitamente la condición para x, es decir $x^2+2x+6x^2=9x$, si $x \neq 0$ entonces al resolver la ecuación, la raíz $x=0$ se descarta pues no satisface la condición dada: $x \neq 0$.

Como consecuencia del teorema IV se tiene que:

"Si ambos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un **número diferente de cero**, se obtiene una ecuación equivalente a la inicial".

Por ejemplo

$$\frac{3x^2-2}{3}+\frac{x-1}{4}=x^2$$

es equivalente a

$$12x^2-8+3x-3=12x^2$$

TEOREMA V ([1])

Si ambos miembros de la ecuación $f(x)=g(x)$, donde $f(x).g(x)\geq 0$ [2] para cualquier x en el dominio de la ecuación, se elevan a una misma potencia natural n, se obtiene la ecuación $(f(x))^n=(g(x))^n$ equivalente a la primera.

Por ejemplo

$3x-1=\sqrt{x-2}$ es equivalente a la ecuación $(3x-1)^2 = x-2$, pues para $x\geq 2$, que es el dominio de la ecuación original, la expresión 3x-1 es positiva.

Por otra parte, la ecuación $x-3=\sqrt{x-1}$ no es equivalente a $(x-3)^2=x-1$, porque para $x\geq 1$ la expresión x-3 es negativa si $1\leq x<3$, y es positiva si $x>3$, mientras que $\sqrt{x-1}$ es positiva siempre que $x>1$, por lo tanto el elevar ambos miembros de la ecuación al cuadrado y resolver se obtiene $x^2-7x+10=0$, que está definida para cualquier x real y tiene dos soluciones x=2 y x=5, pero x=2 no es solución de la ecuación original, es una raíz extraña, esta raíz es consecuencia de ampliar el dominio de la ecuación original con esa transformación.

Al igual que en los dos casos anteriores es importante destacar que el elevar al cuadrado es una transformación que reduce la ecuación a otra equivalente, sin

[1] Este teorema sólo es válido en el campo de los números reales
[2] $f(x).g(x)\geq 0$ significa que f(x) y g(x) son "ambas" positivas o ambas negativas para cualquier x donde están definidas. Si n es impar esta condición no es necesaria.

embargo simplificar el radical, si es posible y reducir términos semejantes es otra transformación de la ecuación que puede conducir a una nueva, equivalente o no, a la original.

Por ejemplo

$$\sqrt{6x^4 - 7x^2 + 1} = \sqrt{x - x^3} \qquad \text{(I)}$$

Ambas expresiones son positivas para cualquier x en el intervalo $(-\infty,-1] \cup \left[0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \cup \{1\}$, al elevar ambos miembros al cuadrado se obtiene la ecuación (II) equivalente a (I)

$$\left(\sqrt{6x^2 - 7x^2 + 1}\right)^2 = \left(\sqrt{x - x^3}\right)^2 \qquad \text{(II)}$$

pero al simplificar el radical y reducir términos semejantes, se obtiene

$$6x^4+x^3-7x^2-x+1=0 \qquad \text{(III)}$$

que no es equivalente a la ecuación (I). Pues (III) está definida para cualquier x real y admite las raíces x=-1, x=1/2, x=1/3, x=1 mientras que la ecuación (I) no admite la solución x=-1/2, ésta es una raíz extraña para esa ecuación.

Al igual que en los dos casos anteriores para que (III) sea equivalente a (I) se debe restringir los valores posibles para x, así se garantiza que ambos radicales están definidos en R, entonces se escribe así:

$$6x^4+x^3-7x^2-x+1=0, \text{ si } x \in (-\infty,-1] \cup \left[0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] \cup \{1\}$$

al resolver la ecuación se descartan aquellas soluciones que no satisfagan la condición dada.

Además de estos teoremas, al resolver ecuaciones es posible aplicar otro tipo de transformaciones, dichas transformaciones pueden conducir a la pérdida de raíces o a la aparición de raíces extrañas y esto ocurre cuando la transformación aplicada modifica el dominio de la ecuación.

Algunos ejemplos de este tipo de transformaciones son:

1) $\sqrt{f(x)}\sqrt{h(x)} = \sqrt{f(x).h(x)}$

Si la transformación se lleva a cabo de derecha a izquierda se amplía el dominio de la ecuación, entonces pueden aparecer raíces extrañas.

Si la transformación se lleva a cabo de izquierda a derecha, se reduce el dominio de la ecuación, entonces se pueden perder raíces.

Por ejemplo

$$\sqrt{x-2}\sqrt{x+3} = 6 \qquad \text{(I)}$$

el dominio de la ecuación (I) es $x \geq 2$,

al aplicar la transformación

$$\sqrt{(x-2)(x+3)} = 6 \qquad \text{(II)}$$

el dominio de la ecuación (II) es $x \in (-\infty,-3] \cup [2, \infty)$

Se amplió el dominio de la ecuación.

Al elevar (II) al cuadrado y resolver se obtiene

$$X^2+x-42=0 \qquad \text{(III)}$$

que tiene dos soluciones x= -7 y x= 6 pero x= -7 no es solución de (I).

Otras transformaciones son:

2) $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}} = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

3) $tgx\ ctgx=1$

4) $tg(x+y)=\dfrac{tgx+tgy}{1-tgx\,tgy}$, entre otras.

En todos los casos en los que se aplica alguna transformación y no hay seguridad de que la ecuación obtenida sea equivalente a la original, es fundamental verificar las soluciones halladas, de lo contrario no se ha terminado de resolver la ecuación.

Existen dos procedimientos principales para verificar las soluciones halladas:

1) Sustituyendo las soluciones en la ecuación "original" y se aceptan sólo las que satisfacen la igualdad.
2) Demostrando la equivalencia de las transformaciones realizadas a la ecuación en todas las etapas de la resolución.

El procedimiento generalmente más usado es el primero, pues suele ser en la mayoría de los casos mucho más sencillo que el segundo.

Por ejemplo

- Resolver la ecuación:

$$\sqrt{7x-2}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$$

1) Verificando las soluciones:

$$\sqrt{7x-2}=\sqrt{3}+\sqrt{x+1}$$

$$7x-2=3+2\sqrt{3x+3}+x+1$$

$$6x-6=2\sqrt{3x+3}$$

$$3x-3=\sqrt{3x+3}$$

$$3(x-1)^2=x+1$$

$$3(x^2-2x+1)=x+1$$

$$3x^2-6x+3-x-1=0$$

$$3x^2-7x+2=0$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \vee x = 2$$

Para $x_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{7\left(\frac{1}{3}\right) - 2} - \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} \neq \sqrt{3}$

$$x_1 = \frac{1}{3} \text{ no es solución}$$

Para $x=2 \Rightarrow \sqrt{7(2) - 2} - \sqrt{2 + 1} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

La única solución es x=2

2) Demostrando la equivalencia

$$\sqrt{7x - 2} - \sqrt{x + 1} = \sqrt{3} \qquad \text{(I)}$$

Para que esta igualdad tenga sentido es necesario que[3]

$$7x - 2 \geq 0 \wedge x + 1 \geq 0 \wedge \sqrt{7x - 2} - \sqrt{x + 1} \geq 0$$

es decir el dominio de la ecuación es $x \geq \frac{1}{2}$, con esta condición se puede sumar $\sqrt{x + 1}$ a ambos miembros de la ecuación (I) y se obtiene $\sqrt{7x - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{x + 1}$ equivalente a la primera, elevando ambos miembros al cuadrado

$$7x - 2 = 3 + 2\sqrt{3(x + 1)} + x + 1$$

[3] En el campo de los números reales no están definidas las raíces pares que tienen cantidad subradical negativa.

$$6x - 6 = 2\sqrt{3(x+1)}$$

$$3x - 3 = \sqrt{3(x+1)}$$

$$(3x - 3)^2 = \left(\sqrt{3(x+1)}\right)^2, \text{ si } x \geq \frac{1}{2} \wedge 3x - 3 \geq 0$$

$$3x^2\text{-}6x+3=x+1, \quad \text{si } x\geq 1$$

$$3x^2\text{-}7x+2=0, \quad \text{si } x\geq 1 \qquad \text{(II)}$$

Resolviendo la ecuación (II) se obtiene $x=\frac{1}{3} \wedge x=2$, pero $x=\frac{1}{3}$ no satisface la condición que garantiza la equivalencia de la ecuación (I) con la ecuación (II).

Por lo tanto la solución es x=2.

La ecuación anterior es un ejemplo de ecuación irracional.

Se entiende por **ecuación irracional** aquella en la que la variable forma parte de la cantidad subradical o bien de la base de una potencia de exponente fraccionario. Este tipo de ecuaciones se resuelve sólo en el campo de los números reales.

- Resolver la ecuación

$$\frac{1}{x^2 - 16} = \frac{1}{3x^2 - 14x + 8} \qquad \text{(I)}$$

1) Verificando las soluciones:

$$\frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{(3x-2)(x-4)} \qquad \text{(II)}$$

$$(3x\text{-}2)(x\text{-}4)=(x\text{-}4)(x+4) \qquad \text{(III)}$$

$$(3x\text{-}2)(x\text{-}4)\text{-}(x\text{-}4)(x+4)=0$$

$(x-4)(3x-2-x-4)=0$

$(x-4)(2x-6)=0$

$x=4 \wedge x=3$

La solución x=4 no se puede evaluar en la ecuación original porque anula el denominador de ambas fracciones, entonces es una raíz extraña, no es solución, esta raíz aparece porque al transformar la ecuación (I) en la (III) sin hacer ninguna restricción, se amplió el dominio de la ecuación.

Para x=3

$$\frac{1}{3^2-16}=-\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{3(3)^2-14(3)+8}=-\frac{1}{7}$$

$$\boxed{x=3 \text{ es la única solución}}$$

2) Demostrando la equivalencia

$$\frac{1}{x^2-16}=\frac{1}{3x^2-14x+8}$$

$$\frac{1}{(x-4)(x+4)}-\frac{1}{(3x-2)(x-4)}=0$$

$$\frac{3x-2-(x+4)}{(x-4)(x+4)(3x-2)}=0$$

$$\frac{2x-6}{(x-4)(x+4)(3x-2)}=0$$

$$2x-6=0 \Rightarrow x=3$$

Durante todo el proceso de transformación de la ecuación original, no se alteró en ningún momento el dominio, cada una de las ecuaciones obtenidas están definidas si $x \neq \left\{-4, 4, \frac{2}{3}\right\}$.

La ecuación anterior es un ejemplo de ecuación racional.

Se entiende por **ecuación racional** a toda ecuación de la forma P(x)=0; $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, donde P(x) y Q(x) son polinomios, así como las ecuaciones del tipo f(x)=g(x), donde f(x) y g(x) son expresiones racionales.

Las soluciones de cada una de estas ecuaciones son los valores de x que satisfacen la igualdad y pertenecen al conjunto definido por todos los números reales para los cuales los denominadores presentes en la ecuación son diferentes de cero[4].

Al resolver ecuaciones racionales suelen emplearse dos métodos:

1) La factorización de los polinomios presentes en la ecuación, que consiste en lo siguiente
Sea $f(x)=f_1(x).f_2(x)...f_h(x)$ entonces cualquier solución f(x)=0 es solución del conjunto de ecuaciones[5] $f_1(x)=0$; $f_2(x)=0,..f_h(x)=0$.
2) El método de cambio de variable que consiste en introducir una nueva variable que permita obtener otra ecuación que pueda ser factorizada y aplicar el método anterior, después de obtener las soluciones correspondientes a la nueva variable, se devuelve el cambio y se admiten sólo aquellas soluciones que satisfacen la ecuación original.

[4] En el campo de los números reales no está definida la división entre cero.
[5] Por propiedad de la multiplicación de los números reales $a.b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$ .Ver Capítulo I Números Reales, página 9.

Por ejemplo

- Resolver la ecuación $x^3 - x^2 - \dfrac{8}{x^3 - x^2} = 2$

Esta ecuación está definida en R, si $x^3-x^2 \neq 0$, es decir $x \in R - \{0,1\}$.

Aplico el cambio $x^3-x^2=y$

$$y - \frac{8}{y} = 2$$

Esta ecuación está definida en R, si $y \neq 0$

$$y - \frac{8}{y} - 2 = 0$$

$$\frac{y^2 - 8 - 2y}{y} = 0$$

$$\frac{y^2 - 2y - 8}{y} = 0$$

$$\frac{(y - 4)(y + 2)}{y} = 0 \quad \text{(II)}$$

$$y=4 \vee y=-2$$

Para $y=4 \Rightarrow$ $x^3-x^2=4$

$x^3-x^2-4=0$

$(x-2)(x^2+x+2)=0$

Entonces:

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

o bien $x^2+x+2=0$, ecuación que no tiene solución en R, porque $b^2-4ac=1-4.1.2<0$ [6]

$\boxed{\text{La solución es } x=2}$

[6] Ver Teorema II de este mismo capítulo, en la página 85

Para y=-2 $\Rightarrow x^3-x^2=-2$

$x^3-x^2+2=0$

$(x+1)(x^2-2x+2)=0$

Entonces:

$X+1=0 \Rightarrow x=-1$

o bien $x^2-2x+2=0$, ecuación que no tiene solución en R, porque $b^2-4ac=-2-4.1.2<0$ [7]

La solución es x=-1.

No es necesario comprobar las soluciones pues todas las transformaciones conducen a una nueva ecuación (II), equivalente a la original, ya que, en el cambio $x^3-x^2=y$ es obvio que cuando $x=0 \vee x=1$, y= 0, la ecuación (II) no está definida para y=0 y esto sólo ocurre cuando x={0,1}, entonces ambas ecuaciones están definidas para los mismos valores, es decir el dominio de la ecuación original no se modificó.

Si existe alguna duda de esa relación de equivalencia, las soluciones deben verificarse en la ecuación original.

- Resolver la ecuación

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$$

Esta ecuación está definida si $x \neq 0$

[7] Ver Teorema II de este mismo capítulo. Página 9

Aplico el cambio $x+\frac{1}{x}=y$ entonces $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2 \Rightarrow$

$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$

$$2(y^2-2)-7y+9=0$$

Esta ecuación está definida para cualquier "y" real, pero si alguna solución de y conduce a x=0, ésta no debe aceptarse como solución, pues la ecuación original está definida en R-{0}.

$$2y^2-4-7y+9=0$$

$$2y^2-7y+5=0$$

$$(2y)^2-7(2y)+10=0^{(8)}$$

$$(2y-5)(2y-2)=0$$

$$y=\frac{5}{2} \vee y=1$$

Para $y=\frac{5}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$

$$x+\frac{1}{x}-\frac{5}{2}=0$$

$$\frac{2x^2+2-5x}{2x}=0$$

$$\frac{2x^2-5x+2}{2x}=0$$

$$2x^2-5x+2=0$$

[8] Por el teorema I se puede multiplicar ambos miembros de la ecuación por un número real y se obtiene una ecuación equivalente a la anterior.
Si se tratara de factorizar el polinomio $2y^2-7y+5$, al multiplicar por 2 se debe dividir para no modificarlo. Ver Capítulo II Operaciones con expresiones algebraicas y trigonométricas, en la página 48, el caso 3.1.2.2.2 de factorización de trinomios con coeficientes enteros

$$(2x)^2-5(2x)+4=0$$

$$(2x-1)\,(2x-4)=0$$

$$x = \frac{1}{2} \vee x = 2$$

Para $y=1 \Rightarrow \quad x + \frac{1}{x} = 1$

$$x + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2 + 1 - x}{x} = 0$$

$$x^2-x+1=0$$

No tiene solución real pues $b^2-4ac=1-4.1.1= -3<0$ [9]

Verificación de las soluciones:

$$x=2 \Rightarrow \; 2\left(4 + \frac{1}{4}\right) - 7\left(2 + \frac{1}{2}\right) + 9 = \frac{17}{2} - \frac{35}{2} + 9 = -9 + 9 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{4} + 4\right) - 7\left(\frac{1}{2} + 2\right) + 9 = 0$$

Entonces las soluciones de la ecuación son

$$\boxed{x = \frac{1}{2} \vee x = 2}$$

[9] Ver Teorema II de este capítulo, en la página 85

2) SISTEMA DE ECUACIONES

Varias ecuaciones en dos variables x, y, forman un sistema de ecuaciones si se plantea el problema de hallar todos los pares (x,y) que satisfacen cada una de las ecuaciones dadas. Cada par recibe el nombre de solución del sistema.

La interpretación geométrica de las soluciones de un sistema de ecuaciones es, simplemente, los puntos del plano que tienen en común las gráficas de cada una de las ecuaciones que conforman el sistema. Entendiendo por **gráfica de una ecuación** f(x,y)=0, en los números reales, al conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas constituyen pares ordenados que satisfacen la igualdad f(x,y)=0, es decir todos los puntos (x,y) que son solución de la ecuación f(x,y)=0.

Resolver un sistema de ecuaciones significa hallar **todas** sus soluciones.

El conjunto de soluciones de un sistema puede ser vacío, entonces se dice que el sistema no tiene solución o es un sistema incompatible. Geométricamente, esto significa que las gráficas de las ecuaciones que conforman el sistema no tienen en común ningún punto del plano.

En este capítulo se hallarán las soluciones en el campo de los números reales, exclusivamente.

El proceso de resolución de los sistemas de ecuaciones consiste en aplicar transformaciones sucesivas que lleven a otro sistema más sencillo o a una ecuación, equivalente al sistema original cuya solución sea obvia o se pueda hallar por alguno de los métodos ya mencionados.

Si al aplicar todas las transformaciones no se garantiza la equivalencia con el sistema original, las soluciones halladas deben ser, **obligatoriamente**, verificadas en el sistema original.

Si al aplicar transformaciones al sistema:

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y) \\ h(x, y) = k(x, y) \\ p(x, y) = q(x, y) \end{cases} \quad (I)$$

se obtiene el sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ h_1(x, y) = k_1(x, y) \\ p_1(x, y) = q_1(x, y) \end{cases} \quad (II)$$

y si con ello cada solución de (I) es, simultáneamente, la solución del sistema (II), este recibe el nombre de corolario del sistema (I).

En general, el corolario de un sistema de ecuaciones puede ser otro sistema con un número de ecuaciones tanto mayor como menor, incluso puede ser una ecuación.

Dos sistemas reciben el nombre de equivalentes si los conjuntos de sus soluciones coinciden.

TEOREMA I

Si la ecuación $f(x, y) = g(x, y)$ es equivalente a la ecuación $f_1(x, y) = g_1(x, y)$, mientras la ecuación $h(x, y) = k(x, y)$ es equivalente a la ecuación $h_1(x, y) = k_1(x, y)$ los sistemas:

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y) \\ h(x, y) = k(x, y) \end{cases} \text{ y } \begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ h_1(x, y) = k_1(x, y) \end{cases}$$

son equivalentes.

Si la ecuación $f(x, y) = g(x, y)$ es corolario de la ecuación $f_1(x, y) = g_1(x, y)$, mientras que la ecuación $h(x, y) = k(x, y)$ es corolario de la ecuación $h_1(x, y) = k_1(x, y)$ entonces el sistema $\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ h_1(x, y) = k_1(x, y) \end{cases}$ es corolario del sistema $\begin{cases} f(x, y) = g(x, y) \\ h(x, y) = k(x, y) \end{cases}$.

TEOREMA II

Si la ecuación $f(x, y) = g(x, y)$ es corolario de las ecuaciones $f_1(x, y) = g_1(x, y)$ y $f_2(x, y) = g_2(x, y)$ el sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = g(x, y) \\ f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases} \text{ es equivalente a } \begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases}$$

y éste último tiene por corolario los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_1(x, y) \pm f_2(x, y) = g_1(x, y) \pm g_2(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_1(x, y).f_2(x, y) = g_1(x, y).g_2(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ (f_1(x, y))^2 = (g_1(x, y))^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_1(x, y).\dfrac{1}{f_2(x, y)} = g_1(x, y).\dfrac{1}{g_2(x, y)} \end{cases},$$

si $\nexists\ (x,y)/\ f_1(x,y)=0 \wedge g_2(x,y)=0$.

Además de los métodos tradicionales para resolver sistemas de ecuaciones lineales de dos o más incógnitas, conocidos con el nombre de método de

reducción, sustitución e igualación[10], todas estas transformaciones, mencionadas en el teorema II, pueden ser aplicadas al resolver un sistema de ecuaciones cualquiera, pero todas las soluciones halladas deben verificarse pues se obtienen a partir de un sistema corolario, de igual modo debe estudiarse atentamente si alguna de esas transformaciones puede producir la pérdida de raíces y se deben tomar las medidas pertinentes para evitar que esa pérdida.

Otros métodos fundamentales para resolver sistemas de ecuaciones son:

1) Transformación lineal del sistema, que consiste en realizar la combinación lineal o la suma algebraica de las ecuaciones
2) Sustitución, que consiste en obtener una de las ecuaciones del sistema en función de una única variable, usando la otra ecuación. Si el sistema es de tres ecuaciones con tres incógnitas, consiste en obtener dos ecuaciones en función de sólo dos de las variables, a partir de la tercera ecuación.
3) Cambio de variable, que consiste en reemplazar una variable (x) o una expresión (f(x,y)) por otra variable para obtener un sistema equivalente con ecuaciones mucho más simples que las que tiene el sistema original.

A continuación se muestran algunos ejemplos resueltos, en los que se aplican las diferentes transformaciones.

[10] No se mencionan de una manera especial en este texto, porque son métodos muy bien conocidos por los estudiantes

Por ejemplo

- Resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5} + 9y^2 = 4 \\ x^2 - 3y^2 = 4 \end{cases}$ (I)

Por el teorema IV de ecuaciones se puede transformar el sistema (I) en otro equivalente:

$$\begin{cases} x^2 + 45y^2 - 20 = 0 \\ x^2 - 3y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Aplicando una transformación lineal en el sistema (II) se obtiene otro equivalente a (I)

$$\begin{cases} x^2 + 45y^2 - 20 - \left(x^2 - 3y^2 - 4\right) = 0 \\ x^2 - 3y^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{(III)}$$

Reduciendo términos semejantes en la primera ecuación de (III) y resolviendo, se tiene:

$$\begin{cases} 48y^2 - 16 = 0 \\ x^2 - 3y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{1}{3} \\ x^2 - 3y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Entonces: $x^2 - 3\dfrac{1}{3} - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow |x| = \sqrt{5} \wedge |y| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Las soluciones del sistema son:

$S_1\left(\sqrt{5}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $S_2\left(-\sqrt{5}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $S_3\left(\sqrt{5}, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $S_4\left(-\sqrt{5}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

En este ejemplo, no es necesario verificar las soluciones, en cualquier caso al sustituir cada una de éstas en el sistema (I), se verifica que todas lo satisfacen.

- Resolver el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 - 5x = 0 \end{cases}$

En este ejemplo es obvio que lo más conveniente es la sustitución de la primera ecuación en la segunda. Así:

$25-5x= 0 \Rightarrow x=5$

Resolviendo: $25 - y^2=25 \Rightarrow y = 0$

La solución del sistema es S(5,0)

- Resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{1}{x + y} + \dfrac{1}{x - y} = 2 \\ \dfrac{3}{x + y} + \dfrac{4}{x - y} = 7 \end{cases}$ (I)

En este ejemplo es muy conveniente un cambio de variable que permita obtener un sistema mucho más sencillo de resolver, así se realiza el cambio:

$$\frac{1}{x + y} = a \ ; \ \frac{1}{x - y} = b$$

Se genera un nuevo sistema lineal en función de a y b, que se resuelve por el método de reducción:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + 4b = 7 \end{cases} \Rightarrow \frac{\begin{cases} -3a - 3b = -6 \\ 3a + 4b = 7 \end{cases}}{b = 1} \Rightarrow a+1=2 \Rightarrow a=1$$

Volviendo a la variable original, se genera el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x + y} = 1 \\ \dfrac{1}{x - y} = 1 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Si, $x+y\neq 0 \;\wedge\; x-y\neq 0$, condiciones éstas, que definen el dominio del sistema original (I), ya que la división entre cero no está definida en los números reales, entonces el sistema (II) es equivalente al sistema (I) y al siguiente sistema:

$$\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{array}\right. \\ \hline \quad 2x = 2 \end{array} \Rightarrow x=1 \wedge y=0$$

Entonces la solución es S(1,0)

- Resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l} x^2 - 2xy + y^2 = 1 \\ x^2 - xy = 10 \end{array}\right. \quad (1)$

Un sistema equivalente a (1) es

$$\left\{\begin{array}{l} (x - y)^2 = 1 \\ x(x - y) = 10 \end{array}\right. \quad (II)$$

Al dividir la primera ecuación del sistema (II) entre la segunda, se obtiene el sistema (III) equivalente a (I) y a (II):

$$\left\{\begin{array}{l} (x - y)^2 = 1 \\ \dfrac{x - y}{x} = \dfrac{1}{10} \end{array}\right. \quad (III)$$

La equivalencia se justifica analizando la condición que impone la división de las ecuaciones para obtener el sistema (III), así, es necesario que $x-y\neq 0$, entonces cabe la pregunta: ¿qué ocurre si x-y=0?. Si eso ocurre, x=y, sustituyendo en el sistema (I) se obtiene el absurdo 0=1 y 0=10, entonces no se está perdiendo ninguna raíz y esto garantiza la equivalencia de los tres sistemas.

Entonces resolviendo el sistema (III), se tiene:

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 1 \\ \dfrac{x-y}{x} - \dfrac{1}{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-y| = 1 \\ 9x - 10y = 0 \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

El sistema (IV) es equivalente a otros dos sistemas que al resolverlos dan la solución del sistema (I). Éstos son:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y = \dfrac{9}{10}x \end{cases} \Rightarrow x - \frac{9}{10}x = 1 \Rightarrow x = 10 \wedge y = 9$$

Entonces la primera solución del (I) es: $S_1(10,9)$

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ y = \dfrac{9}{10}x \end{cases} \Rightarrow x - \frac{9}{10}x = -1 \Rightarrow x = -10 \wedge y = -9$$

Entonces la segunda solución de (I) es: $S_2(-10,-9)$

En este ejemplo, tampoco es necesario verificar las soluciones pues se ha establecido la equivalencia entre cada uno de los sistemas. En cualquier caso pueden verificarse ambas soluciones en el sistemas (I) y ver que sí lo satisface.

- Resolver el sistema $\begin{cases} xy(x+y) = 20 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4} \end{cases}$ (I)

Un sistema equivalente al dado es:

$$\begin{cases} xy(x+y) = 20 \\ \dfrac{y+x}{xy} = \dfrac{5}{4} \end{cases} \quad \text{donde } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \text{ (II)}$$

dividiendo la primera ecuación entre la segunda se obtiene un sistema equivalente del anterior

$$\begin{cases} xy(x+y) = 20 \\ x^2y^2 = 16 \end{cases}$$

(III)

La equivalencia se justifica analizando la condición que impone la división de las ecuaciones para obtener el sistema (III), así es necesario que $x+y \neq 0$, entonces cabe la pregunta: ¿qué ocurre si $x+y=0$?. Si eso ocurre, $x=-y$, sustituyendo en el sistema (I) se obtiene el absurdo $0=20$ y $0=\dfrac{5}{4}$, entonces no se está perdiendo ninguna raíz y esto garantiza la equivalencia de los tres sistemas.

Como x es diferente de cero, el siguiente sistema es equivalente a (III)

$$\begin{cases} xy(x+y) = 20 \\ |y| = \dfrac{4}{|x|} \end{cases} \text{(IV)}$$

El sistema (IV) es equivalente al conjunto formado por otros dos sistemas que al resolverlos dan la solución del sistema (I). Éstos son:

(V) $\begin{cases} xy(x+y) = 20 \\ y = \dfrac{4}{x} \end{cases}$ resolviendo, se tiene:

$$x\frac{4}{x}\left(x+\frac{4}{x}\right) = 20 \Rightarrow \frac{x^2+4}{x} = 5 \Rightarrow \frac{x^2-5x+4}{x} = 0 \Rightarrow$$

$x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1 \quad \vee \quad x=4$

Para $x=1 \Rightarrow y=4$

Entonces la primera solución del sistema (I) es $S_1(1,4)$

Para $x=4 \Rightarrow y=1$

Entonces las segunda solución del sistema (I) es $S_2(4,1)$

En este ejemplo, tampoco es necesario verificar las soluciones, pues se ha establecido la equivalencia entre cada uno de los sistemas. En cualquier caso pueden verificarse ambas soluciones en el sistemas (I) y ver que sí lo satisface, tal como se muestra a continuación:

Verificando en el sistema original la solución uno:

$$\begin{cases} (1)(4)(1+4) = 20 \\ 1+\dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} \end{cases} \; ; \; \begin{cases} (4)(1)(4+1) = 20 \\ \dfrac{1}{4}+1 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

(VI) $\begin{cases} xy(x-y) = 20 \\ y = -\dfrac{4}{x} \end{cases}$ resolviendo se tiene:

$$x\left(-\frac{4}{x}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right) = 20 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x} = -5$$

$$\frac{x^2+5x-4}{x}=0 \Rightarrow x^2+5x-4=0$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4(-4)}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$$

Para $x=\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2} \Rightarrow y=-\dfrac{4}{\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2}}=\dfrac{8}{5+\sqrt{41}}$

Entonces la tercera solución para el sistema (I) es $S_3\left(\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2},\dfrac{\sqrt{41}-5}{2}\right)$.

Para $x=\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2} \Rightarrow y=-\dfrac{4}{\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2}}=\dfrac{8}{5-\sqrt{41}}$

Entonces, la cuarta solución para el sistema (I) es $S_4\left(\dfrac{5-\sqrt{41}}{2},\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$

En este ejemplo, tampoco es necesario verificar las soluciones, pues se ha establecido la equivalencia entre cada uno de los sistemas. En cualquier caso pueden verificarse ambas soluciones en el sistemas (I) y ver que sí lo satisface, tal como se muestra a continuación:

Verificando la solución tres:

$$\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{41}-5}{2}\right)\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}+\frac{\sqrt{41}-5}{2}\right)=$$

$$\frac{-(-25+4)}{4}\,\frac{(-10)}{2}=$$

$$-\frac{16}{4}(-5)=20$$

$$\frac{1}{\dfrac{-5-\sqrt{41}}{2}}+\frac{1}{\dfrac{\sqrt{41}-5}{2}}=\frac{-2}{\sqrt{41}+5}+\frac{2}{\sqrt{41}-5}=$$

$$\frac{-2\sqrt{41}+10+2\sqrt{41}+10}{41-25}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$$

- Resolver el sistema $\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ x^4 - y^4 = 20(x+y) \end{cases}$ (I)

Factorizando la segunda ecuación del sistema (I), se obtiene otro sistema equivalente al dado, así:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ (x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) = 20(x+y) \end{cases} \text{(II)}$$

Un sistema corolario de (II) es el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 20 \end{cases} \text{(III)}$$

No es equivalente y es corolario, pues para obtener (III) es necesario que $x+y\neq 0$, en este ejemplo a diferencia de los anteriores si $x=-y$, no se llega a ningún absurdo, por lo que se pueden estar perdiendo soluciones del sistema (I). Por lo tanto es fundamental para que el proceso esté completo que se estudie esta situación, que se realizará después de resolver (III), ya que al ser (III) corolario de (I) sus soluciones satisfacen a (I).

Resolviendo (III) se tiene:

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, se obtiene el sistema (IV) equivalente a (III)

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ x^2y - xy^2 = 6 \end{cases} \text{(IV)}$$

Factorizando ambas ecuaciones del sistema (IV) se tiene:

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2)=26 \\ xy(x-y)=6 \end{cases} \quad \text{(V)}$$

Dividiendo la primera ecuación de (V) entre la segunda se tiene el sistema equivalente (VI)

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}=\dfrac{13}{3} \\ xy(x-y)=6 \end{cases} \quad \text{(VI)}$$

(V) y (VI) son equivalentes porque para efectuar esta división es necesario que $xy \neq 0 \wedge x-y \neq 0$. Al estudiar en el sistema (V) qué ocurre si x=0 v y=0 v x=y se obtiene el absurdo 0=26 y 0=6, lo que garantiza que no se está perdiendo ninguna solución con esta simplificación. Entonces por la misma razón, otro sistema equivalente es:

$$\begin{cases} 3x^2-10xy+3y^2=0 \\ xy(x-y)=6 \end{cases} \quad \text{(VII)}$$

Al aplicar la resolvente en la primera ecuación del sistema (VII), se obtienen otros dos sistemas equivalentes a ese. Así

$$3x^2\text{-}10yx+3y^2=0 \Rightarrow x=\frac{10y \pm \sqrt{100y^2-4(3)(3y^2)}}{2(3)} \Rightarrow x=\frac{10y \pm 8y}{6}$$

Entonces se resuelve:

$$\text{(VIII)} \begin{cases} x=3y \\ xy(x-y)=6 \end{cases}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, se tiene:

$6y^2=6 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=1 \vee y=-1$

Entonces la primera posible solución es $S_1(3,1)$

Verificando en el sistema (I), se tiene:

$$\begin{cases} 3^3 - 1^3 = 26 \\ 3^4 - 1^4 = 80 \wedge 20(3+1) = 80 \end{cases}$$

Por lo que $S_1(3,1)$ sí es solución del sistema (I)

La segunda posible solución es: $S_2(-3,-1)$

Verificando en el sistema (I), se tiene:

$(-3)^3-(-1)^3=-26$, no satisface la primera ecuación del sistema (I) por lo que **NO ES SOLUCIÓN.**

Ahora se resuelve:

$$\text{(IX)} \begin{cases} x = \dfrac{y}{3} \\ xy(x-y) = 6 \end{cases}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, se tiene:

$$\left(\frac{y^2}{3}\right)\left(-\frac{2y}{3}\right) = 6 \Rightarrow y^3 = -27 \Rightarrow y = -3 \wedge x = -1$$

La segunda posible solución es $S_2(-1,-3)$

Verificando en el sistema (I), se tiene:

$$\begin{cases} (-1)^3 - (-3)^3 = 26 \\ (-1)^4 - (-3)^4 = -80 \wedge 20(-3-1) = -80 \end{cases}$$

Por lo que $S_2(3,1)$ sí es solución del sistema (I)

Volviendo al sistema (II) antes de hacer la simplificación, se puede plantear otro sistema corolario a él, donde se analiza la posibilidad que se descartó en la simplificación que condujo al sistema (III). Así otro sistema corolario de (II) es:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ x = -y \end{cases} \quad (X)$$

Resolviendo se tiene:

$(-y)^3 - y^3 = 26 \Rightarrow y^3 = -13 \Rightarrow \ y = \sqrt[3]{-13} \wedge x = \sqrt[3]{13}$

Una tercera posible solución el sistema (I) es $S_3\left(\sqrt[3]{13}, -\sqrt[3]{13}\right)$

Verificando esta solución en el sistema (I) se tiene:

$$\begin{cases} \left(\sqrt[3]{13}\right)^3 - \left(-\sqrt[3]{13}\right)^3 = 26 \\ \left(\sqrt[3]{13}\right)^4 - \left(-\sqrt[3]{13}\right)^4 = 0 \wedge 20\left(\sqrt[3]{13} - \sqrt[3]{13}\right) = 0 \end{cases}$$

Entonces la tercera solución de (I) es $S_3\left(\sqrt[3]{13}, -\sqrt[3]{13}\right)$

3) PROBLEMAS PARA LA FORMULACIÓN DE ECUACIONES O SISTEMAS DE ECUACIONES

En la práctica es fundamental, además de resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones, tener la capacidad de expresar en términos matemáticos problemas escritos, que son en su mayoría situaciones reales, simplificadas al máximo[11], para poder resolverla a través de los métodos matemáticos que se emplean en la solución de ecuaciones.

La resolución de problemas escritos que se solucionan a través de ecuaciones se lleva a cabo en cuatro pasos:

1) Se designan con las letras x, y, z, entre otras, las variables que representan las cantidades desconocidas de las que trata el problema. Si el problema lo permite es conveniente, dibujar un diagrama y señalar en él las incógnitas definidas y las 'constantes conocidas, de acuerdo al enunciado del problema.
2) Se expresa a través de una ecuación o de un sistema de ecuaciones, usando las incógnitas definidas y las constantes dadas, las condiciones establecidas en el problema.
3) Se resuelve la ecuación o el sistema de ecuaciones obtenidos en el paso anterior.
4) Se seleccionan las soluciones obtenidas de acuerdo con las condiciones establecidas en el problema en cuestión. No siempre, todas las soluciones obtenidas en la resolución de la ecuación o del sistema de ecuaciones tiene sentido en el contexto del problema, por ejemplo, desde el punto de

[11] En este nivel, los problemas que se resuelven se derivan de una visión simplista de la realidad, por lo que no se toman en cuenta muchas de las variables que pueden realmente intervenir en una situación específica dada. En este caso se limita el estudio a problemas en los que se plantean ecuaciones o sistemas de ecuaciones que pueden ser resueltos por cualquiera de los métodos ya explicados.

vista práctico, no es lógico medir longitudes negativas, u obtener un número fraccionario de personas, etc, aunque estas soluciones si satisfagan al sistema planteado.

Es evidente en este proceso que la dificultad se reduce realizar correctamente los pasos uno y dos, pues si no se logra plantear la ecuación o el sistema de ecuaciones que se propone en el problema, éste no puede ser resuelto.

Generalmente, ésta suele ser la mayor dificultad a la que se enfrentan los estudiantes en los problemas de este tipo, por lo tanto en este caso se hará énfasis en el planteamiento de las ecuaciones y no en la resolución como tal, pues este aspecto está claramente explicado en los puntos anteriores de este capítulo.

Algunos ejemplos son los siguientes

- La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 9. Si se invierten los dígitos del número de dos cifras, el número aumenta en 45 unidades. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que le permitiría calcular ese número?

Si es un número de dos cifras las variables son:

x: el dígito de las decenas **y: el dígito de las unidades**

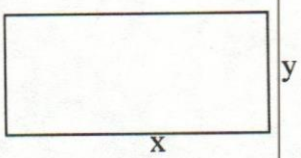
Las suma de los dígitos de un número de dos cifras es 9, se expresa así: $x+y=9$
Si se invierten los dígitos del número de dos cifras, quiere decir que el dígito de las decenas es ahora el dígito de las unidades y viceversa, entonces si el número de dos cifras originalmente era: $10x + y$, al invertir sus dígitos queda: $10y + x$, esta modificación conduce a obtener un nuevo número de dos cifras, 45 unidades mayor que el original. Esto se expresa así: $10y+x-(10x+y)=45$

Entonces el sistema de ecuaciones que permite calcular el número en cuestión es[12]:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 9y - 9x = 45 \end{cases}$$

[12] Si resuelve el sistema observará que el número en cuestión es el 27.

- Un campo rectangular de lados x e y tiene un área de 10.000 m^2, tres de sus lados serán cercados con un alambre que cuesta 1.000 BS/m y el cuarto lado con otro tipo de alambre que cuesta 500 Bs/m. Expresar en función de la longitud (x), el costo total del material para cercar el campo.



El área del campo a cercar es: xy=10.000 (I)

El costo para cercar el campo se obtiene multiplicando la longitud de la cerca por el precio por metro de la misma. Así el costo C es:

$$C= 2.1.000.x+1.000.y+500y \Rightarrow C=2.000x+1.500y \qquad \text{(II)}$$

Ahora bien, cómo se pide el costo sólo en función de la longitud x, despejando y de la ecuación (I):

$$y = \frac{10.000}{x}$$

y sustituyendo en la ecuación (II) se obtiene:

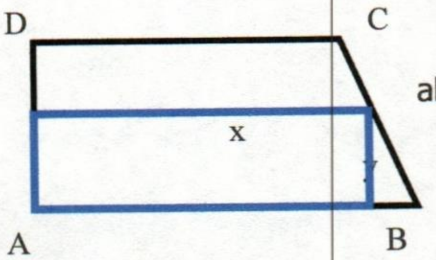
$$C=2.000x + 1.500\,\frac{10.000}{x} = 2.000x + \frac{15.000.000}{x}$$

Que se puede expresar así:

$$C=2.10^3x+1{,}5.10^7x^{-1}.$$

- En un trapecio ABCD de lado AB= 6 , CD=4, rectángulo en A y D, se inscribe un rectángulo de tal manera que uno de sus lados descansa sobre la base mayor del trapecio.

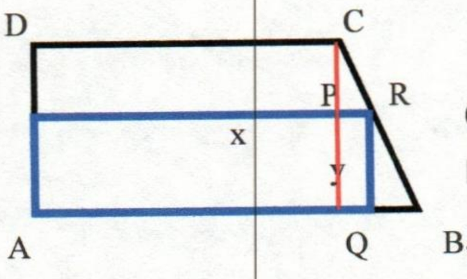
a) Expresar el área del rectángulo en función de su altura.



La figura muestra el rectángulo de base "x" y altura "y" inscrito en el trapecio ABCB

El área del rectángulo es A=xy (I)

En la figura, por C se traza el segmente CQ paralelo a DA, y se obtienen dos triángulos semejantes CPR y CQB:



En el triángulo CPR se tiene: CP=4-y ; PR=x-4

En el triángulo CQB se tiene: CQ=4 ; QB=2

Como en los triángulos semejantes los lados homólogos son proporcionales, se tiene: $\frac{x-4}{2} = \frac{4-y}{4}$ (II)

Despejando x de (II), se obtiene: $x = \frac{12-y}{2}$

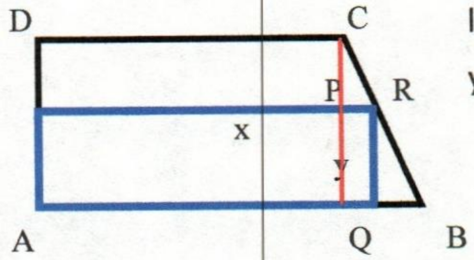
Sustituyendo en (I), se obtiene el área en función de la altura del rectángulo, así:

$$A = \frac{12-y}{2}y \Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(12y - y^2\right)$$

b) Expresar el área en función de su base.

En este caso el problema tiene dos situaciones posibles:

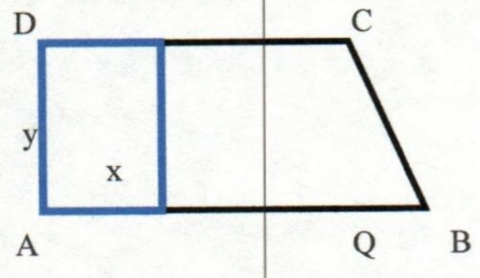
Primero: que el rectángulo esté inscrito en posición horizontal, para ello es necesario que $4<x<6$, $0<y<4$, como se muestra en la resolución anterior:



Entonces simplemente se despeja la "y" de la ecuación (II) y se sustituye en la ecuación (I), y se obtiene:

$$A= x(12-2x) \Rightarrow A=12x-2x^2$$

Segundo: que el rectángulo esté inscrito en posición vertical, para ello es necesario que $y=4$, $0<x<4$, como se muestra en la figura:



Entonces, el área es simplemente

$$A=4x$$

En conclusión el área del rectángulo en función de su base es:

$$A = \begin{cases} 4x, & \text{si} \quad 0 < x \leq 4 \\ 12x - 2x^2, & \text{si} \quad 4 < x < 6 \end{cases}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

A) Obtener las soluciones reales de las siguientes ecuaciones

1) $x^5+2x^2-x-2=0$

Aplicando Ruffini se factoriza el primer miembro de la ecuación:

$$
\begin{array}{r|rrrrr|r}
 & +1 & +2 & +0 & +0 & -1 & -2 \\
+1 & & +1 & +3 & +3 & +3 & +2 \\
\hline
 & +1 & +3 & +3 & +3 & +2 & 0 \\
-1 & & -1 & -2 & -1 & -2 & \\
\hline
 & +1 & +2 & +1 & +2 & 0 & \\
-2 & & -2 & +0 & -2 & & \\
\hline
 & +1 & +0 & +1 & 0 & &
\end{array}
$$

Entonces la ecuación es : $(x-1)(x+1)(x+2)(x^2+1)=0$

Por lo que: $x-1=0 \Rightarrow x=1$

$X+1=0 \Rightarrow x=-1$

$X+2=0 \Rightarrow x=-2$

$X^2+1=0$, no tiene raíces reales, porque $b^2-4ac=0-4.1.1<0$

Las soluciones son $x=\{-1,-2,1\}$

Comentario

Al resolver ecuaciones racionales enteras, todas las transformaciones aplicadas conducen a una ecuación equivalente a la original, por lo que no es necesario verificar las raíces halladas.

2) $12x^3-4x^2-3x+1=0$

Aplicando Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc}
 & +12 & -4 & -3 & +1 \\
-\frac{1}{2} & & -6 & +5 & -1 \\
\hline
 & +12 & -10 & +2 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

La ecuación se puede expresar así: $\left(x-\frac{1}{2}\right)(12x^2-10x+2)=0$

Resolviendo:

a) $x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

b) $12x^2-10x+2=0 \Rightarrow 144x^2-10(12x)+24=0 \Rightarrow (12x-6)(12x-4)=0 \Rightarrow$

$x=\frac{1}{2} \wedge x=\frac{1}{3}$

Las soluciones son: $x=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$

Comentario

Este ejemplo puede ser resuelto aplicando sucesivamente la regla de Ruffini, como se resolvió en el ejercicio 1.

Otra forma de resolverlo es aplicar la resolvente, en lugar de factorizar el trinomio, para solucionar la ecuación: $12x^2-10x+2=0$, es importante recalcar que al resolver la ecuación $12x^2-10x+2=0$, se multiplicó a ambos miembros por 12, como la ecuación no se altera, no es necesario dividir entre ese número, esta situación no debe confundirse con el método de factorización de polinomios en el que es fundamental dividir entre el número por el cual se multiplicó, porque sino se trata de otro polinomio completamente diferente[13].

[13] Ver en el Capitulo II Operaciones con expresiones algebraicas y trigonométricas, el en caso 3.1.2.2.2 de factorización de trinomios con coeficientes enteros, página #48.

3) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$

$(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)-1=0$

$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+6)-1=0$

$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+6+1-1)-1=0$

$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+6+1)+1-1=0$

$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+7)=0$, sacado factor común x^2-5x+7

$(x^2-5x+7)(x^2-5x+7-1)=0$

$(x^2-5x+7)(x^2-5x+6)=0$

Resolviendo:

a) $x^2-5x+7=0$, no tiene raíces reales porque $b^2-4ac=25-28<0$

b) $x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow x=3 \wedge x=-2$

La solución de la ecuación es $x=\{-2,3\}$

Comentario

En este ejemplo se aplicó el artificio de sumar y restar 1 al trinomio x^2-5x+6, con la finalidad de obtener el trinomio x^2-5x+7 y poder factorizar la expresión, este procedimiento facilita en gran medida la resolución de la ecuación.

Es importante mencionar que si el 1 no se hubiera simplificado sería muy conveniente aplicar un cambio de variable, tal como se muestra en el ejemplo siguiente.

Esta ecuación puede ser resuelta desarrollando el trinomio al cuadrado, reduciendo términos semejantes y aplicando la regla de Ruffini.

4) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=3$

$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+6+1-1)-3=0$

$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+7)+1-3=0$

$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+7)-2=0$

Aplicando el cambio $x^2-5x+7=y$

Se tiene:

$y^2-y-2=0 \Rightarrow (y-2)(y+1)=0 \Rightarrow y=2 \wedge y=-1$

Volviendo a la variable original:

a) $x^2-5x+7=2 \Rightarrow x^2-5x+5=0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) $x^2-5x+7=-1 \Rightarrow x^2-5x+8=0$, no tiene raíces reales porque $b^2-4ac=25-32<0$.

La solución de la ecuación es : $x = \left\{ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \right\}$

Comentario

En cualquier caso, la resolución de la ecuación se basa en la propiedad de los números reales que dice: $a.b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$[14].

Es un **error** grave de los estudiantes resolver la ecuación partiendo de la siguiente situación:

$(x^2-5x+7)^2-(x^2-5x+7)=2$

$(x^2-5x+7)(x^2-5x+7-1)=2$

$(x^2-5x+7)(x^2-5x+6)=2 \Rightarrow x^2-5x+7=2 \vee x^2-5x+6=2$

INCORRECTO

Ya que existen infinitos pares de números reales que multiplicados resultan igual a 2

[14] Ver en el Capítulo Números Reales, en la página 9, otras propiedades de la adición y de la multiplicación de los números reales.

5) $x^2+x+x^{-1}+x^{-2}=4$

$$x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4$$

Se aplica el cambio de variable $x + \frac{1}{x} = a \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = a^2 \Rightarrow$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

Sustituyendo en la ecuación original: $a+a^2-2=4 \Rightarrow a^2+a-6=0 \Rightarrow (a+3)(a-2)=0 \Rightarrow$

$a=-3 \vee a=2$

Volviendo a la variable original:

2) Para $a=-3$, se tiene: $x+\frac{1}{x}=-3$

Resolviendo: $\frac{x^2 + 1 + 3x}{x} = 0 \Rightarrow x^2+3x+1=0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

3) Para $a=2$, se tiene: $x+\frac{1}{x}=-3$

Resolviendo: $\frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = 0 \Rightarrow \frac{(x - 1)^2}{x} = 0 \Rightarrow$

$(x-1)^2=0 \Rightarrow |x-1|=0 \Rightarrow x=1$

Las soluciones de la ecuación son

$$x = \left\{\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, 1\right\}$$

6) $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = \mathbf{x+1}$

$2x + \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 2x + 1$

$\left(\sqrt{6x^2 + 1}\right)^2 = \left(x^2 + 1\right)^2$

$x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-4) = 0 \Rightarrow x^2(x-2)(x+2) = 0$

Las posibles soluciones son: x=0, x=2, x=-2

Verificando las soluciones en la ecuación original:

Para x=0 se tiene: $\sqrt{2.0 + \sqrt{6.0^2 + 1}} = 1 \wedge 0 + 1 = 1$, entonces sí es solución.

Para x=2, se tiene: $\sqrt{2.2 + \sqrt{6.2^2 + 1}} = 3 \wedge 2 + 1 = 3$, entonces sí es solución.

Para x=-2, se tiene: $\sqrt{2.(-2) + \sqrt{6.(-2)^2 + 1}} = 1 \wedge -2 + 1 = -1$, entonces **no es solución.**

La solución de la ecuación es x={0,2}

Comentario

Es fundamental verificar las soluciones obtenidas, ya que las transformaciones fueron aplicadas sin considerar las condiciones necesarias paras que las ecuaciones sean equivalentes, generalmente este paso suele ser olvidado por los estudiantes, **<u>error</u>** grave porque conduce a la obtención de raíces extrañas.

B) Obtener las soluciones reales de los siguientes sistemas de ecuaciones

$$1)\quad \begin{cases} x^2 - x\sqrt{xy} - 2y^2 + 18 = 0 \\ y = x \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Por sustitución, se tiene:

$$x^2 - x\sqrt{x^2} - 2x^2 + 18 = 0$$

$$x^2 - x|x| - 2x^2 + 18 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Aplicando la definición de valor absoluto[15] se tiene:

Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 18 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = 3 \vee x = -3$$

Pero, $x=-3$, no satisface la condición $x \geq 0$

Por lo tanto **la única solución posible es: $S_1(3,3)$**

Si $x<0$ entonces $|x| = -x$

$x^2 - x(-x) - 2x^2 + 18 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x^2 = 18 \Rightarrow 0 = 18$, es un absurdo, **la solución es vacía**, o también puede decirse, no hay solución.

Comentario

Al resolver este ejercicio se aplicó la propiedad[16] $\sqrt{x^2} = |x|$, esta propiedad garantiza la equivalencia entre el sistema (I) y la ecuación (II). Generalmente los estudiantes no la aplican en la resolución de ecuaciones, lo que puede conducir a

[15] Ver la definición de Valor Absoluto, en el CapítuloV.

[16] Ver en el Capítulo I Números Reales, propiedades de la radicación en la página 17.

la obtención de raíces extrañas, como en este caso con la raíz x=-3, que no sería ningún inconveniente si se verificaran las soluciones, pero esto tampoco suelen hacerlo.

El no aplicar la propiedad, podría conducir, dependiendo de la ecuación, a la pérdida de raíces, porque $\sqrt{x^2}=x$, si $x\geq 0$, situación si se quiere, es más grave que la que se refleja en este ejemplo porque no habría manera de percatarse de esa pérdida.

$$2)\quad \begin{cases} x^2+y^2+2y+2y=0 \\ x+y+8=0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Un sistema equivalente (I) es:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y+2y=0 \\ y=-y-8 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Por sustitución se obtiene la ecuación (III) equivalente al sistemas (II)

$X^2+(-x-8)^2+6x+2(-x-8)=0$ (III)

Desarrollando los productos notables y reduciendo términos semejantes, se obtiene:

$2x^2+20x+48=0 \Rightarrow x^2+10x+24=0 \Rightarrow (x+6)(x+4)=0$

Para $x=-6 \Rightarrow y=-(-6)-8=-2$

La primera solución del sistema es $S_1(-6,-2)$

Para $x=-4 \Rightarrow y=-(-4)-8=-4$

La segunda solución del sistema es $S_2(-4,-4)$

Comentario

No es necesario verificar las soluciones porque todas las transformaciones conducen a un sistema y a una ecuación equivalente a (I).

$$3)\quad \begin{cases} x^2 - 9y^2 - 4x - 18y - 14 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Despejando X de la segunda ecuación se obtiene el sistema (II) equivalente a (I)

$$\begin{cases} x^2 - 9y^2 - 4x - 18y - 14 = 0 \\ x = 3y + 5 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, se tiene:

$(3y+5)^2-9y^2-4(3y+5)-18y-14=0$ (III)

Resolviendo:

$9y^2+30y+25-9y^2-12y-20-18y-14=0 \Rightarrow -9=0$

La solución es vacía, suele escribirse $x=\varnothing$

Comentario

La solución del sistema se obtiene a partir de la ecuación (III), equivalente a (I). Al resolverla se llega a una proposición falsa: $-9=0$, esto indica que el sistema no tiene solución, o mejor, su solución es vacía.

En general, toda proposición falsa indica que la solución es vacía.

La interpretación geométrica de esta solución es simplemente que al realizar la gráfica de cada una de las curvas definidas por cada ecuación del sistema, estas curvas no se intersectan.

$$4)\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Para hallar un sistema equivalente a (I), se le resta a la primera ecuación la segunda, y se obtiene: -4=0, esta proposición es falsa, por lo que la solución del sistema es vacía.

La solución es $x=\varnothing$

Comentario

La situación que se ejemplifica en el ejercicio 4 es la misma que se explicó en el ejercicio 3. Sin embargo es importante mencionar, que según la definición de sistemas equivalentes, se deduce que los sistemas de los ejercicios 3 y 4, son equivalentes, porque tienen la misma solución $x=\varnothing$.

$$5)\ \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x - 2y + 28 = 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Un sistema equivalente a (I), se obtiene restando la primera ecuación de la segunda, así:

$$\begin{cases} 10x - 30 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x - 2y + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 + y^2 - 12x - 2y + 28 = 0 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Por sustitución se obtiene la ecuación (III) equivalente a (II)

$9+y^2-36-2y+28=0$ (III)

$y^2-2y+1=0 \Rightarrow (y-1)^2=0 \Rightarrow y=1.$

La solución del sistema (3,1)

Comentario

La interpretación geométrica de esta solución es que las gráficas de las ecuaciones del sistema, se intersectan en el punto (3,1).

En los sistemas de la forma que se ejemplifica en este ejercicio, donde se trata de dos ecuaciones cuadráticas en dos variables, es recomendable eliminar las variables al cuadrado, lo que se logró en este caso al restarle a la primera ecuación del sistema (I), la segunda, para poder obtener una ecuación lineal en una variable, como la que se obtuvo en el sistema (II), con la finalidad de aplicar el método de sustitución en la resolución del sistema. O bien, una ecuación lineal en dos variables, como se muestra en el siguiente ejemplo.

$$6) \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \qquad (I)$$

Un sistema equivalente al (I) se obtiene restando la primera ecuación de la segunda, así:

$$\begin{cases} 10x - 4y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \qquad (II)$$

Despejando la variable y de la primera ecuación de (II) se obtiene el sistema (III) equivalente a (I) y a (II)

$$\begin{cases} y = \dfrac{5x + 1}{2} \\ x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \qquad (III)$$

Sustituyendo la primera ecuación de (III) en la segunda, se obtiene la ecuación (IV) equivalente a (I)

$$X^2+\left(\frac{5x+1}{2}\right)^2-6x+2\left(\frac{5x+1}{2}\right)-6=0 \qquad \text{(IV)}$$

Desarrollando los productos notables y sacando el mínimo común múltiplo, se obtiene:

$29x^2+6x-19=0$

Aplicando resolvente:

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4.29.(-19)}}{2.29}=\frac{-6\pm 8\sqrt{35}}{58}=\frac{-3\pm 4\sqrt{35}}{29}$$

Sustituyendo ambas soluciones en la primera ecuación del sistema (III), se obtiene:

$$x=\frac{-3+4\sqrt{35}}{29}\Rightarrow y=\frac{5\left(\frac{-3+4\sqrt{35}}{29}\right)+1}{2}\Rightarrow y=\frac{7+10\sqrt{35}}{29}$$

$$x=\frac{-3-4\sqrt{35}}{29}\Rightarrow y=\frac{5\left(\frac{-3-4\sqrt{35}}{29}\right)+1}{2}\Rightarrow y=\frac{7-10\sqrt{35}}{29}$$

La soluciones del sistema son:

$$S_1\left(\frac{-3+4\sqrt{35}}{29},\frac{7+10\sqrt{35}}{29}\right),\ S_2\left(\frac{-3-4\sqrt{35}}{29},\frac{7-10\sqrt{35}}{29}\right)$$

Comentario

En este ejemplo, al igual que en el ejercicio anterior, se busca encontrar un sistema equivalente al original que contenga una ecuación lineal en dos variables, para poder resolverlo usando el método de sustitución.

Geométricamente estas soluciones indican que las gráficas de las dos ecuaciones del sistema se intersectan en el plano en los dos puntos definidos por S_1 y S_2.

$$7)\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - 24x - 8y - 24 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Este sistema tiene la misma estructura de los mostrados en los dos ejercicios anteriores, se trata de dos ecuaciones cuadráticas en dos variables, para poder obtener un sistema equivalente a (I) con una ecuación lineal, se multiplica por –4 a la segunda ecuación y se suman miembro a miembro ambas ecuaciones del sistema (I), y se obtiene: 0=0, esta proposición es verdadera, los que significa que la solución de este sistema son todos los pares ordenados de números reales que satisfacen una de las dos ecuaciones del sistema. Observe que la primera ecuación se obtiene multiplicando a la segunda por 4, es decir, las dos ecuaciones del sistema son entre sí equivalentes, por lo tanto es suficientes resolver una de ellas. Así:

Usando la resolvente se despeja de la ecuación: $x^2+y^2-6x-2y-6=0$, una de las dos variables, para ello se ordena convenientemente la ecuación:

$$x^2-6x+(y^2-2y-6)=0$$

y se despeja la variable x:

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-4\left(y^2-2y-6\right)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{42+8y-4y^2}}{2}$$

La solución es $S\left(\frac{6\pm\sqrt{42+8y-4y^2}}{2}, y\right)$, donde la y es cualquier número del conjunto solución de la inecuación[17]: $42+8y-4y^2\geq 0$, con esto se garantiza que la solución es real.

$$8)\begin{cases} x^4 - y^4 = 15 \\ x^3y - xy^3 = 6 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Factorizando cada ecuación de (I): $\begin{cases} \left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)=15 \\ xy\left(x^2-y^2\right)=6 \end{cases}$ (II)

Dividiendo la primera ecuación de (II) entre la segunda, se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2}{5} \\ xy\left(x^2-y^2\right)=6 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

(III) es equivalente a los dos anteriores, porque para cualquier par de números reales diferentes de cero, la expresión $x^2+y^2>0$, al evaluar la posibilidad x=0, y=0, se llega al absurdo 0=15, 0=6. Esto permite eliminar denominadores en la primera ecuación y obtener el sistema (IV) también equivalente a los anteriores:

[17] Ver resolución de inecuaciones racionales, en el Capítulo IV Inecuaciones.

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \\ xy\left(x^2 - y^2\right) = 6 \end{cases} \qquad \text{(IV)}$$

En la primera ecuación de (IV) se puede despejar la variable x usando la resolvente, así:

$$2x^2\text{-}5y(x)+2y^2=0 \Rightarrow x = \frac{5y \pm \sqrt{25y^2 - 4.2.2y^2}}{4} = \frac{5y \pm \sqrt{9y^2}}{4} = \frac{5y \pm 3y}{4}$$

Entonces, se obtiene dos sistemas que al resolverlos dan las soluciones de (IV):

$$\text{(V)} \begin{cases} x = 2y \\ xy\left(x^2 - y^2\right) = 6 \end{cases}$$

Por sustitución, se tiene: $2y^2(4y^2\text{-}y^2)=6 \Rightarrow 6y^2=6 \Rightarrow y^2=1$

Por lo que $|y|=1$, entonces:

Para $y=1 \Rightarrow x=2$. La primera solución es $S_1(2,1)$

Para $y=-1 \Rightarrow x=-2$. La segunda solución es $S_2(2,1)$

$$\text{(VI)} \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ xy\left(x^2 - y^2\right) = 6 \end{cases}$$

Por sustitución, se tiene: $\frac{1}{2}y^2\left(\frac{1}{4}y^2 - y^2\right) = 6 \Rightarrow$

$-3y^2=12 \Rightarrow y^2=-4$, no tiene solución real.

Comentario

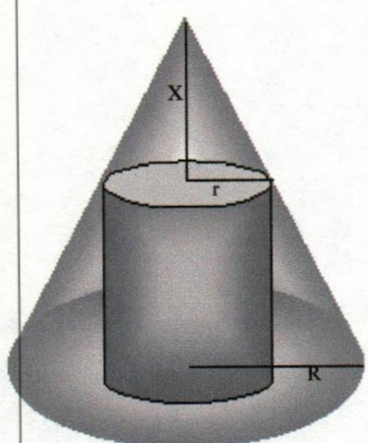
En este ejemplo no es necesario verificar las soluciones porque todas las transformaciones conducen a un sistema equivalente, de no ser así, es obligatorio verificarlas[18].

[18] Ver los diferentes ejemplos resueltos en este capítulo.

Es importante recalcar que al aplicar la resolvente y trabajar con la expresión: $\sqrt{9y^2}$ no se usó la propiedad $\sqrt{9y^2} = |3y|$, porque el $\pm$ de la fórmula conduce a las dos mismas situación que se obtendría si ésta fuera aplicada.

C) Expresar a través de una ecuación los siguientes enunciados.

1) En un cono circular recto de generatriz 15 cm se inscribe un cilindro, como indica la figura:

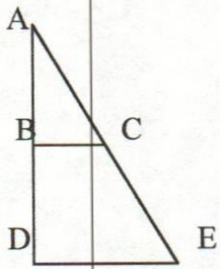


Donde x es la distancia del vértice del cono al cilindro.
R es el radio del cono
r es el radio del cilindro.

Expresar el volumen del cilindro en función de la variable x, si se sabe que los radios de ambas figuras están en la razón: $\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$.

El volumen de un cilindro es: $V = \pi r^2 h$

Al efectuar un corte transversal de la figura, se definen dos triángulos rectángulos semejantes, tales que :



AB=x , BC=r, DE=R , AE=15 y BD=h, siendo h la altura del cilindro.

Por semejanza de triángulos se establecen las siguientes proporciones:

$$1)\ \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{x}{x+h} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{x}{x+h} = \frac{1}{3}$$

Despejando h, se obtiene: $h=2x$

$$2)\ \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{AC}{15} = \frac{r}{R}$$

Pero AC es la hipotenusa del triángulo ABC, aplicando Pitágoras se tiene: $AC=\sqrt{x^2+r^2}$, sustituyendo en la razón (2):

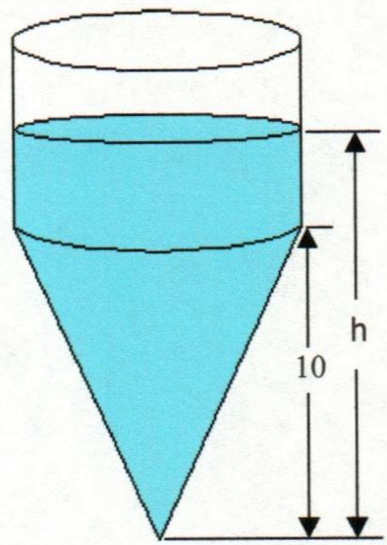
$$\frac{\sqrt{x^2+r^2}}{15} = \frac{1}{3}$$

Despejando r^2, se obtiene: $r^2=25-x^2$

Sustituyendo en el volumen:

$V=\pi r^2 h \Rightarrow V=\pi(25-x^2)(2x) \Rightarrow V=2\pi(25x-x^3)$.

2) Un tanque tiene forma de cilindro con un cono circular recto en la parte inferior, está lleno de agua hasta una altura h, tal como muestra la figura.



Expresar el volumen del agua en función de h, si se sabe que el radio del tanque tiene una longitud igual a las dos terceras partes de h.

El volumen de agua en el tanque es igual al volumen del cono más el volumen de agua en el cilindro:

$$V= \frac{\pi}{3}r^2.10 + \pi r^2 (h-10)$$

Pero $r=\frac{2}{3}h$, sustituyendo, se tiene: $V= \frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{3}h\right)^2.10 + \pi\left(\frac{2}{3}h\right)^2(h-10)$

Resolviendo: $V = \frac{4\pi}{27}(3h^3 - 20h^2)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Resolver las siguientes ecuaciones en R

1) $2x^3-x+1=0$

2) $2x^4-x^3-35x^2-47x-15=0$

3) $2x^4-x^3-35x^2-47x-15=0$

4) $y^3-y^2=1$

5) $y(4y^2+2y-1)=2y$

6) $t^4+t^3+t^2-t-2=0$

7) $x^3+9x^2+23x+15=0$

8) $9x^4-6x^3-17x^2+12x-2=0$

9) $18x^3+21x^2+8x+1=0$

10) $(x+1)(x^2+2)(x+2)(x^2+1)=2$

11) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$ (Sugerencia haga el cambio $x+3=t$)

12) $\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{4}{x}=3$

13) $\dfrac{12-3x}{16-x^2}=\dfrac{3}{5}$

14) $\dfrac{5}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{9}{x+3}=0$

15) $\dfrac{-5}{x+1}+\dfrac{4x+1}{x^2+1}=0$

16) $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$

17) $\dfrac{1}{x^2-3x+3}+\dfrac{2}{x^2-3x+4}=\dfrac{6}{x^2-3x+5}$

18) $\dfrac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = \dfrac{1}{2}$

19) $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x - 1)^2}} = \dfrac{1}{7}$

20) $\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x - 2}} - 1 = \sqrt[3]{(x - 2)^2}$

21) $\sqrt{x + 6} + x - 6 = 0$

22) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{2 + x} = 3$

23) $\sqrt{x + 3} - \sqrt{x + 8} + 1 = 0$

24) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{9 + x} = \sqrt{2x - 12}$

24) $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$

25) $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$

27) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2 - 8x + 12}$

28) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x + 12}} = 0$

B) Resolver los siguientes sistemas de Ecuaciones

1) $\begin{cases} 5x - y = -4 \\ x - y = 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = 18 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - 5y + 8 = 0 \\ x + 4y - 9 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x + 2y - 4 = 0 \\ 3x - y - 9 = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x - y + 5 = 0 \\ 3x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + y + 9 = 0 \\ 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} -3x + 5y + 11 = 0 \\ 6x - 10y - 22 = 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x^2 - 3y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x + y^2 = 11 \\ 7x + 2y = 1 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + y = -1 \\ xy = -110 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 12 + xy = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4x^2 + 18y^2 = 3 \\ 8x^2 - 9y^2 = 1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 41 \\ 3x^2 - 8y^2 = -2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{5} + 9y^2 = 4 \\ x^2 - 3y^2 = 4 \end{cases}$

16) $\begin{cases} 4x^2 - 6xy + y^2 = -4 \\ xy - y^2 = 4 \end{cases}$

17) $\begin{cases} x^2 - \sqrt{6}xy + y^2 = -1 \\ 2x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

18) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 1 \\ x^2 + xy = 7 \end{cases}$

19) $\begin{cases} y = -\dfrac{9}{2}x - 4 \\ y = \dfrac{2}{9}(x - 3) \end{cases}$

20) $\begin{cases} y = \sqrt{2x + 3} \\ y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{2x + 3}} \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dfrac{y + 4}{x} = 2x - 2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

22) $\begin{cases} \dfrac{y - 2}{x + 1} = \dfrac{1}{(x + 1)^2} \\ y = \dfrac{x}{x + 1} \end{cases}$

23) $\begin{cases} y = -4x^2 + 3x \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

24) $\begin{cases} y = x \\ 9y^2 - 4x^2 = 3 \end{cases}$

25) $\begin{cases} 48xy^2 - 9x^4 = 0 \\ x^3 - 4y^2 - 3 = 0 \end{cases}$

26) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 \\ y^2 + 2xy = 0 \end{cases}$

26) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \\ 5x + 5y - 12 = 0 \end{cases}$

27) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 15 = 0 \end{cases}$

28) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}xy = 6 \\ x(y - 12) = 12(y - 6) \end{cases}$

29) $\begin{cases} by = ax \\ ay = -bx + ab \end{cases}$

30) $\begin{cases} 3y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}a + 3a \\ y = \sqrt{3}x + a \end{cases}$

31) $\begin{cases} y = \dfrac{2c}{2b + ar}x \\ y = \dfrac{c}{b - a}(x - a) \end{cases}$

32) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \\ \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2a} \end{cases}$

33) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$

34) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$

35) $\begin{cases} x^2(x + y) = 80 \\ x^2(2x - 3y) = 80 \end{cases}$

36) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 8 \end{cases}$

37) $\begin{cases} x - y = \dfrac{1}{4}xy \\ x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}xy \end{cases}$

38) $\begin{cases} \dfrac{1}{x + y} + \dfrac{1}{x - y} = 2 \\ \dfrac{3}{x + y} + \dfrac{4}{x - y} = 7 \end{cases}$

39) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y) \\ x^3 + y^3 = 7(x + y) \end{cases}$

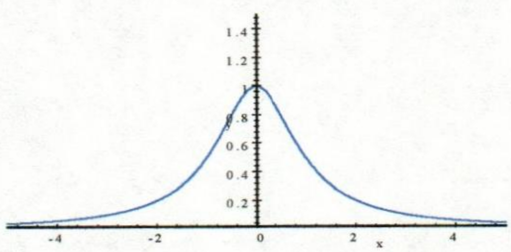
40) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19 \\ (xy + 8)(x + y) = 2 \end{cases}$

C)Expresar a través de una ecuación los siguientes enunciados

1) El cuadrado de la distancia del punto $P(x,y)$ a la recta R_1: $y=0$ es igual al cuadrado de su distancia R_2:$2x-2y+1=0$.

2) Un abrevadero tiene 10m de longitud y sus extremos tienen forma de triángulo isósceles que tiene 3 m de ancho en la parte superior y una altura de 1 m. Si el recipiente contiene agua hasta una altura x, expresar el volumen de agua en el recipiente en función de x.

3) Un cilindro se ha obtenido haciendo girar un rectángulo alrededor del eje x. La base del rectángulo está en el eje x y todo él, está comtenido en la región comprendida entre la curva $y=\dfrac{1}{x^2+1}$(ver gráfica) y el eje x. Expresar el volumen del cilindro en función de las abscisas de los vértices del rectángulo que se encuentran sobre la curva. (use la letra x).



4) La base AB de un trapecio isósceles es un diámetro de un círculo de radio R y los extremos de la otra base CD del trapecio están sobre la circunferencia. Exprese el área del trapecio ABCD en función de la ordenada de C y de D (use la letra y).

4.1) Exprese el área del mismo trapecio pero ahora en función de las abscisas de C y de D, (use la letra x).

5) Un cilindro circular recto de radio R y de altura H, con un domo esférico en el extremo inferior, constituyen un recipiente cerrado. Si el área superficial del recipiente es 2π, expresar su volumen sólo en función del radio R del cilindro.

6) Un armazón de alambre con forma de caja está compuesta de dos cuadrados idénticos de alambre de longitud x, cuyos vértices se unen con 4 alambres rectos cada uno de longitud y. Si el armazón debe hacerse con un alambre de 6 m de longitud. Expresar el volumen de la caja en función de y.

7) Un filtro cónico tiene 10 cm de radio superior y 30 cm de profundidad. Si se vierte líquido hasta una altura H en el filtro. Expresar el volumen de líquido.
   7.1) En función de la altura que se alcanza en el filtro (H).
   7.2) En función del radio que abarca en el filtro (R).

8) Una recta de pendiente negativa y variable pasa por el punto A(2,1). Expresar el área del triángulo que forma la recta con los ejes coordenados, en función de su pendiente m.

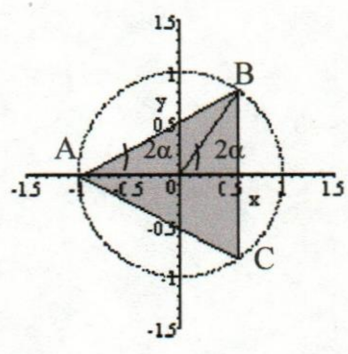
9) Escribir la ecuación que define el P(x,y), si su distancia al punto A(4,-1) es siempre igual al triple de sus distancia a la recta R: y+2=0.

10) Un cilindro circular recto está inscrito en una esfera de 10 m de radio. Expresar el área superficial del cilindro.

10.1) Su altura H. 10.2) Su radio R.

11)Se bombea agua a un tanque que tiene forma de cono truncado circular recto. El tanque tiene una altura de 8 m y un radio inferior y superior de 2m y 4 m, respectivamente. Expresar el volumen del agua en el tanque en función de la altura (H) que alcanza, si se sabe que el volumen de un cono truncado de altura h y radio mayor R y radio menor r es $V = \left(\frac{\pi}{3}\right)\left(R^2 + Rr + r^2\right)h$.

12)Un triángulo isósceles ABC está inscrito en una circunferencia de radio constante r, como indica la figura. Suponiendo que el angulo 2α en el vértice A varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Expresar el área de dicho triángulo en función de α.



13)Una lámina rectangular de aluminio de dimensiones x cm por y cm ha de enrollarse para formar un cilindro circular recto. Expresar el volumen del cilindro en función de x, si el perímetro de la lámina es 72 cm.

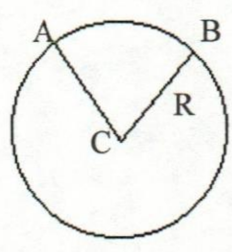
14)Se va a cortar una viga rectangular de un tronco cilíndrico de radio R, expresar el área transversar de la viga en función de uno de sus lados x.

15)Expresar el árae de un triángulo isósceles de altura h, que se puede circunscribir a un círculo de radio R, en función de h.

16)Expresar el área del rectángulo que se puede inscribir en el segmento de parábola $y^2=2px$ cortado por la recta $x=2^a$, en función de la longitud del lado vertical del rectángulo.

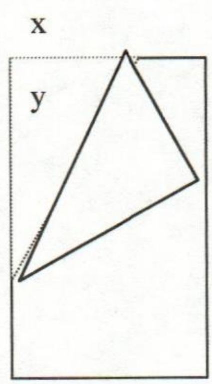
17)Un recipiente cerrado con forma de paralelepípedo de base cuadrada debe tener un volumen de 1000 cm^3. Si el costo del material para la parte superior e inferior por cm^2 es el doble del costo del material de los lados, expresar el costo total del material necesario para fabricar el recipiente, en función de la longitud del lado de la base.

18)De un trozo de papel circular de radio R se va hacer un vaso cónico cortando un sector circular y uniendo los lados CA y CB. Expresar el volumen del vaso en función de su altura h.



19)Dos postes están separados entre si 6 m uno de ellos tiene 4 m de altura y el otro tiene 2 m, se tiende un cable desde el extremo superior del primer poste se tensa en el suelo a una distancia x, del mismo, y se sujeta tenso al extremo superior del segundo poste. Expresar la longitud total del cable, en función de x.

20)La esquina superior izquierda de una hoja de papel de 8 cm de ancho y 12 cm de largo se dobla hasta el lado derecho como indica la figura. Expresar la longitud y, en función de x (sugerencia: busque en la figura dos triángulos semejantes).



CAPÍTULO IV

INECUACIONES

1) PROPIEDADES DE ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

Las propiedades de orden se refieren al concepto por el que se establece una ordenación entre los números reales. Según esta ordenación se puede decidir si un número real es mayor o menor que otro. Los conceptos de mayor que, y menor que se definen a partir del concepto de número positivo.

En el conjunto de los números reales, R, existe un subconjunto importante, R^+, constituido por los números reales positivos. Este conjunto cumple las siguientes propiedades:

i) La suma de dos reales positivos es otro real positivo.

$$a \wedge b \in R^+ \Rightarrow a + b \in R^+$$

ii) El producto de dos reales positivos es otro real positivo

$$a \wedge b \in R^+ \Rightarrow ab \in R^+$$

iii) Ley de la tricotomía: para cualquier número real a, es verdadera una, y **solamente una** de las siguientes proporciones:

o a es cero, o a es positivo, o –a es positivo[1]

$$\forall a \in R : a \in R^+ \underline{\vee} - a \in R^+ \underline{\vee} a = 0$$

1.1) DESIGUALDAD ESTRICTA

* a es menor que b, si a-b es positivo

$a>b \Rightarrow a - b \in R^+$

[1] Por esta razón es un error escribir $\sqrt{4} = \pm 2$, pues $\sqrt{4}$ es un número real entonces o es positivo o es negativo o es cero. Al escribir $\sqrt{4} = \pm 2$, se está afirmando que un número real es positivo y negativo al mismo tiempo.

* a es menor que b, si b-a es positivo, o bien a-b es negativo

  $a<b \Rightarrow b - a \in R^{+}$

De esta definición se deduce que

a>0 si y sólo sí a es positivo.

a<0 sí y sólo sí a es negativo.

Además se puede enunciar la propiedad (iii) de la siguiente forma:

"Para cada par de números reales a y b, es verdadera una y <u>solamente una</u>, de las siguientes proposiciones o, a<b, o, a>b, o a=b".

1.2) DESIGUALDAD NO ESTRICTA

* a es mayor o igual que b, si a-b es negativo o a=b

  $a \geq b \Rightarrow a > b \vee a = b$

* a es menor o igual que b, si a-b es negativo o a=b

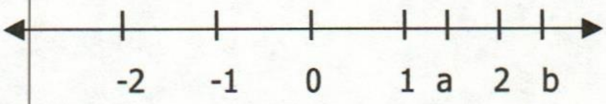
  $a \leq b \Rightarrow a < b \vee a = b$

El par de desigualdades $\begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases}$ se escribe más frecuentemente en la forma breve $a \leq b \leq c$. Análogamente $a \leq b < c$; $a < b \leq c$; $a < b < c$.

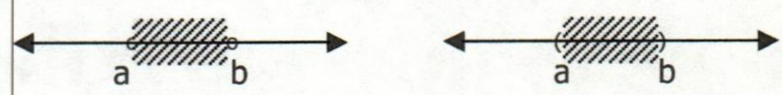
1.3) INTERVALOS

Es bien conocida la interpretación geométrica de los números reales como puntos de una recta. Se establece una relación biunívoca entre el conjunto de los números reales y la recta, así cada número real corresponde a uno y solo un punto de la recta, y recíprocamente, cada punto de la recta corresponde a un y sólo un número real. Por esta razón la recta se denomina frecuentemente recta o eje real y es costumbre utilizar las palabras número real y punto como sinónimos.

La relación de orden entre los números reales tiene una interpretación geométrica simple. Si a < b, el punto a está a la izquierda del punto b. Los números positivos están a la derecha del cero y los negativos a la izquierda, como se muestra en la figura.



Si a < b, un punto x satisface las desigualdades a < x < b si y sólo sí x está entre a y b, en otras palabras a < x < b es el conjunto de **todos** los números reales que están entre a y b. Este conjunto recibe el nombre de **intervalo abierto** y se denota (a,b). Gráficamente se representa en la recta real de la siguiente forma



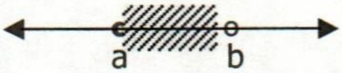
Decir a < x < b equivale a x$\in$ (a , b).

Si a $\leq$ b, un punto x satisface las desigualdades a $\leq$ x $\leq$ b sí y sólo sí x está entre a y b, es igual a "a" o es igual a "b", en otras palabras a $\leq$ x $\leq$ b es el conjunto de **todos** los números reales que están entre a y b, incluyendo a "a" y a "b". Este conjunto recibe el nombre de **intervalo cerrado** y se denota [a,b]. Gráficamente se representa en la recta real de la siguiente forma

Decir $a \leq x \leq b$ equivale a $x \in [a, b]$.

Se define a los **intervalos semiabiertos** como aquellos que satisfacen una de las siguientes desigualdades

$a \leq x < b \Leftrightarrow x \in [a, b)$

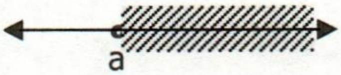


$a < x \leq b \Leftrightarrow x \in (a, b]$

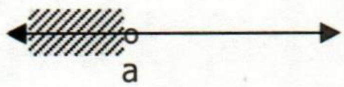
Se define a los **intervalos infinitos** como aquellos que satisfacen una de las siguientes desigualdades

$x > a \Leftrightarrow x \in (a, \infty)$

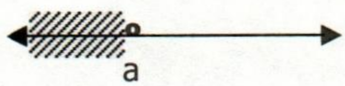
$x \geq a \Leftrightarrow x \in [a, \infty)$



$x < a \Leftrightarrow x \in (-\infty, a)$



$x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, a)$



Los símbolos ∞ (infinito) y $-\infty$ (menos infinito) "**no**" son números reales, simplemente se usan para indicar **todos** los números reales mayores que a, o bien **todos** los números reales menores que a. Observe que por la definición de desigualdades: $x>a \Rightarrow x-a>0$; $x < a \Rightarrow a-x>0$

1.4) Propiedades de la Desigualdades

Para todo número real a, b, c, se verifican las siguientes propiedades:

1) Propiedad Transitiva: Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

Demostración: $a < b \Rightarrow b-a>0$ (1)

$b < c \Rightarrow c-b>0$ (2)

Por la propiedad (i), sumando (1)$\wedge$(2): $(b-a)+(c-b)>0$,

entonces $c-a>0$, por lo que $c>a$.

2) Si $a < b$ entonces $a + c> b + c$

Demostración: Sea $x = a + c$, $y = b + c$

Entonces $y-x = b-a$, pero $a < b \Rightarrow b-a>0$

Por lo que $y-x>0 \Rightarrow x < y$, es decir, $a + c < b + c$

3) Si $a < b$ y $c>0$ entonces $ac < bc$

Demostración: $a < b \Rightarrow b-a>0$, por la propiedad (ii), como $c>0$, se tiene: $c(b-a)>0 \Rightarrow cb - ca>0 \Rightarrow ca < cb$.

4) Si $a < b$ y $c<0$ entonces $ac > bc$

Demostración: $a < b \Rightarrow b-a>0$, como $c<0 \Rightarrow -c>0$ por la propiedad (ii) se tiene: $-c(b-a)>0 \Rightarrow -cb+ac>0 \Rightarrow ac-bc>0 \Rightarrow ac>bc$.

Caso particular: Si $a < b$ y $c =-1$ entonces $-a>-b$.

5) Si $a \neq 0$ entonces $a^2>0$.

Demostración: Si $a>0 \Rightarrow a.a>0 \Rightarrow a^2>0$ por la propiedad (ii).

Sí $a<0 \Rightarrow -a>0 \Rightarrow (-a)(-a)>0 \Rightarrow a^2>0$.

6) $a>0$ sí y sólo sí $\frac{1}{a} > 0$

Demostración: Por ser una equivalencia, debe demostrarse primero la implicación directa y luego la recíproca, así:

(I) $a>0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

Si $\frac{1}{a} \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > 0$, por la propiedad 5, como por hipótesis $a>0$, entonces

$\frac{1}{a^2} a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

(II) $\frac{1}{a} > 0 \Rightarrow a>0$

Si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$ por la propiedad 5, como $\frac{1}{a} > 0$, entonces

$\frac{1}{a} a^2 > 0 \Rightarrow a>0$

7) Si a>b y c>0 entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Demostración: $c>0 \Rightarrow \frac{1}{c} > 0$ por propiedad 6, como a>b, entonces $a\frac{1}{c} > b\frac{1}{c}$ por la propiedad (ii), por lo que $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

8) Si a>b y c<0 entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Si a<b y c<0 entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

Demostración: $c < 0 \Rightarrow -c > 0 \Rightarrow -\frac{1}{c} > 0$ por la propiedad 6 y $a > b \Rightarrow a - b > 0$, entonces $-\frac{1}{c}(a - b) > 0$, por la propiedad (ii). Aplicando distributiva $-\frac{a}{c} + \frac{b}{c} > 0 \Rightarrow \frac{b}{c} - \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

9) Si ab>0 entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos

Demostración: ab>0 por la propiedad (ii) se tiene $a>0 \wedge b>0$. Por otra parte $ab > 0 \Rightarrow (-a)(-b) > 0$, por la propiedad (ii) se tiene $-a > 0 \wedge -b > 0$, por lo que $a < 0 \wedge b < 0$.

10) Si $a < c$ y $b < d$ entonces $a + b < c + d$

Demostración: $a < c \Rightarrow c - a > 0$, y, $b < d \Rightarrow d - b > 0$, por lo que (c-a)+(d-b)>0 entonces (c+d)-(a+b)>0, entonces $a + b < c + d$.

11) Si $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a > b$ entonces $a^2 > b^2$.

Si $a < 0 \wedge b<0 \wedge a > b$ entonces $a^2 < b^2$

Demostración: $a > b \Rightarrow a - b > 0$, y, $a > 0$, entonces por la propiedad (ii) $a(a - b) > 0 \Rightarrow a^2 - ab > 0$ (1)

Además, $a > b \Rightarrow a - b > 0$, y, $b > 0$, entonces por la propiedad (ii) $b(a - b) > 0 \Rightarrow ab - b^2 > 0$ (2).

Por la propiedad (i) sumando (1) y (2) se tiene: $a^2 - ab + ab - b^2 > 0 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$.

Análogamente con la otra propiedad.

Observe que si se trata de dos números negativos, al elevar al cuadrado el sentido de la desigualdad se invierte.

Si es un número positivo comparado con uno negativo no se puede sacar ninguna conclusión. Por lo que la propiedad no puede ser aplicada en ese caso.

12) Si $a > 0 \wedge b > 0 \wedge a > b$ entonces $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Si $a < 0 \wedge b < 0 \wedge a > b$ entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$.

Demostración: $a > b \Rightarrow a - b > 0$. Además $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab > 0$ por la propiedad (ii) y por la propiedad 6 si ab> 0 entonces $\frac{1}{ab} > 0$. Por la propiedad (ii) se tiene $\frac{1}{ab}(a - b) > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Por otra parte, por la propiedad 6 se tiene:si a>0 entonces $\frac{1}{a} > 0$, si b>0 entonces $\frac{1}{b} > 0$. Por lo que se concluye que: $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Si se está comparando un número positivo con otro negativo no se puede sacar ninguna conclusión. Por lo que esta propiedad no aplica.

Todas estas propiedades son las que permiten trabajar con las desigualdades y son la base para concluir que proposiciones como las siguientes son verdaderas:

I) A ambos miembros de una desigualdad se puede sumar un número real y ésta no se altera.

II) Se puede multiplicar ambos miembros de una desigualdad por un número real positivo y ésta no se altera. Si el número es negativo la desigualdad se invierte.

III) Se puede sumar miembro a miembro dos desigualdades que tienen el mismo sentido, etcétera.

Por otro parte, estas propiedades son muy importantes en la demostración de desigualdades, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Demostrar usando las propiedades de las desigualdades que:

- Si a>0, b>0 entonces $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Demostración: Se busca el signo de la diferencia $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$

Sacando mínimo común múltiplo (m.c.m),se tiene

$$\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} = \frac{a\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) - b\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)(a - b)}{\sqrt{ab}} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)(a - b)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} = \frac{(a - b)(a - b)}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} =$$

$\dfrac{(a - b)^2}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}$, esta expresión es positiva porque

$(a - b)^2 > 0,\ \sqrt{ab} > 0 \wedge \sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

Como: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} - \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = \dfrac{(a - b)^2}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)}$ y además

$\dfrac{(a - b)^2}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} - \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) > 0.$ Entonces por

definición de desigualdad $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (I)

Si a=b, entonces $\dfrac{(a - b)^2}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} = 0$, por lo que

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.\ \text{(II)}$$

Finalmente, por (I) y (II) se concluye que $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

- Si $a \geq -1$ entonces $a^3+1 \geq a^2+a$.

Demostración: Por definición de desigualdad no estricta se sabe que: si $a \geq -1$ entonces $a+1 \geq 0$, por lo que $a+1>0 \vee a+1=0$.

Se busca el signo de la diferencia: $a^3+1-(a^2+a)$.

Por propiedades de los polinomios se sabe que:

$$a^3+1-(a^2+a)=a^3-a^2-a+1=(a-1)(a^2-1)=(a-1)(a-1)(a+1)=(a-1)^2(a+1) \quad \text{(I)}$$

En la expresión (I)

Si $a+1>0$ entonces $(a-1)^2(a+1)>0$, porque $(a-1)^2>0$, entonces, por definición de desigualdad.: $(a-1)^2(a+1)>0 \Rightarrow a^3+1-(a^2+a)>0 \Rightarrow a^3+1> a^2+a$ (II)

Si $a+1=0$ entonces $(a-1)^2(a+1)=0 \Rightarrow a^3+1-(a^2+a)=0 \Rightarrow a^3+1= a^2+a$. (III)

Por (II) y (III) se concluye que $a^3+1 \geq a^2+a$.

2) INECUACIONES

Se define a una inecuación como una desigualdad que es verdadera para determinados valores de la incógnita.

Se define al dominio de la inecuación f(x) > g(x) como el conjunto de todos aquellos valores de x para los cuales las expresiones f(x) y g(x) están ambas definidas. En otras palabras, el dominio de la inecuación f(x) > g(x) es la intersección del dominio de f(x) con el dominio de g(x).

La solución de la inecuación f(x) > g(x) viene dada por todos los valores de x, en el dominio de la inecuación, para los cuales la proposición "el valor f(x) es mayor que el valor g(x)" es verdadera.

Dos inecuaciones en la misma variable, son equivalentes si sus soluciones coinciden, o bien, tienen la misma solución.

Para resolver inecuaciones se aplican transformaciones que permiten obtener otra inecuación equivalente a la dada, cuya solución es evidente o puede obtenerse mediante alguno de los procedimientos de resolución de inecuaciones. Las trasformaciones que pueden ser aplicadas se enuncian en los siguientes teoremas:

TEOREMA I

Si a ambos miembros de la inecuación f(x) > g(x) se le suma la expresión h(x), definida en el mismo dominio de la inecuación, se obtiene otra: f(x)+h(x) > g(x)+h(x) equivalente a la dada.

Del teorema I se deduce que:

$f(x)+h(x) > g(x)$ es equivalente a $f(x) > g(x) - h(x)$, y

$f(x) > g(x)$ es equivalente $f(x) - g(x) > 0$.

TEOREMA II

Si ambos miembros de la inecuación $f(x) > g(x)$ se le multiplica (o divide) por la expresión $h(x)$, que está definida, es positiva y diferente de cero en el mismo dominio de la inecuación, se obtiene otra: $f(x)\ h(x) > g(x)\ h(x)$ o bien $f(x)\dfrac{1}{h(x)} > g(x)\dfrac{1}{h(x)}$ equivalente a la dada.

TEOREMA III

Si ambos miembros de la inecuación $f(x) > g(x)$ se le multiplica (o divide) por la expresión $h(x)$, que está definida, es negativa y diferente de cero en el mismo dominio de la inecuación, se obtiene otra: $f(x)\ h(x) < g(x)\ h(x)$ o bien $f(x)\dfrac{1}{h(x)} < g(x)\dfrac{1}{h(x)}$ equivalente a la dada.

TEOREMA IV

Si $f(x)\geq 0$ y $g(x)\geq 0$ para todo x en el dominio de la inecuación $f(x) > g(x)$ entonces la desigualdad $(f(x))^n > (g(x))^n$, siendo n natural, es equivalente a la inecuación dada.

Todos estos teoremas están justificados en las propiedades de las desigualdades y se cumplen para las inecuaciones de la forma $f(x) < g(x)$; $f(x) \geq g(x)$, $f(x) \leq g(x)$.

Es importante recalcar, que al igual que en las ecuaciones, cada uno de estos teoremas es una transformación, pero la reducción de términos semejantes, o bien la simplificación de términos, etc, es otra transformación que puede conducir a una nueva inecuación que no necesariamente es equivalente a la original. Por lo tanto ante cada transformación es fundamental acotar y cumplir con las condiciones que garantizan la equivalencia. O bien resolver la inecuación obtenida e insertar este resultado con el dominio de la inecuación original, lo que garantizaría que tanto f(x) como g(x) están definidas, sin embargo, si no se es lo suficientemente cuidadoso se puede perder soluciones o introducir soluciones extrañas.

2.1) INECUACIONES LINEALES

Son inecuaciones que contienen polinomios de primer grado, su dominio es el conjunto de los números reales, tienen la forma $ax+b<0$; $ax+b>0$; $ax+b\leq 0$; $ax+b\geq 0$.

Se resuelven aplicando las propiedades de las desigualdades para despejar x, y obtener una expresión que define a un intervalo infinito.

Por ejemplo:

Resolver las siguientes inecuaciones:.

1) $4x-7<10$ sumando 7 a ambos miembros

$4x<17$ dividiendo entre 4 ambos miembros

$$x < \frac{17}{4} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{17}{4}\right)$$

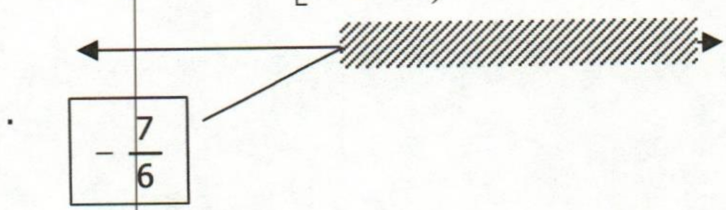
2) $6x-8-2x \leq 10x-1$

$4x-8 \leq 10x-1$ Reduciendo términos semejantes

$4x-10x \leq -1+8$ Sumando a ambos miembros $-10x+8$

$-6x \leq 7$. Dividiendo ambos miembros entre 6

$$x \geq -\frac{7}{6} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{6}, \infty\right)$$



2.2) INECUACIONES RACIONALES

Son inecuaciones que contienen polinomios o expresiones racionales, tienen la forma $P(x)>0$; $R(x) \geq S(x)$; $\frac{H(x)}{Q(x)} < P(x)$, donde $P(x)$; $R(x)$; $S(x)$; $H(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. (Aplica de igual modo para $<$, $>$, $\leq$, $\geq$).

Para resolver este tipo de inecuaciones se emplea el siguiente procedimiento o método de **los valores de prueba**:

1) Se compara con cero, es decir se pasan todos los términos para un solo miembro de la inecuación, por ejemplo, al primero, usando la propiedad 2 de las desigualdades (no se debe multiplicar o dividir la inecuación por

expresiones algebraicas que dependan de la variable, pues el signo de la expresión puede alterar la desigualdad, ver propiedad 4).

2) Se transforma el primer miembro en una fracción algebraica a través del m.c.m.
3) Se factoriza, en factores primos, el polinomio numerador y el polinomio denominador, si lo hubiere.
4) Se hallan los valores de x, para los cuales el numerador es cero, es decir se hallan los ceros de la expresión. Si hay denominador se hallan los valores de x, para los cuales el denominador es cero, es decir se hallan los valores para los cuales la expresión no existe[2].
5) Se representan en la recta **todos** los valores de x hallados en el paso anterior, estos van a dividir a la recta en varios intervalos.
6) Se toma un valor de prueba en cada intervalo y se determina el signo de la expresión factorizada para cada una de ellos.
7) La solución de la inecuación son los valores de x en los intervalos que satisfacen la condición impuesta por la inecuación (recuerde si $x>0$, x es positivo, si $x<0$ x es negativo), siempre y cuando no anulen el denominador.

Por ejemplo:

1) Resolver $x^3 \leq 8$.

   $x^3 - 8 \leq 0$. Comparando con cero

   $(x-2)(x^2+2x+4) \leq 0$. Factorizando

[2] En los números reales no está definida la división entre cero.

Buscando los ceros, para ello se resuelve.

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$(x-2)=0 \Rightarrow x=2$$

$x^2+2x+4=0$ no tiene raíces reales porque $b^2-4ac=4-4(1)(4)=4-16<0$.

Representando en la recta real:

$$\longleftarrow \text{----------------}|\text{+++++++++}\longrightarrow$$
$$2$$

El signo de cada intervalo se determina con un valor de prueba, así:

$x=5 \Rightarrow (5-2)(5^2+2(5)+4)=(3)(39)>0$

$x=-3 \Rightarrow (-3-2)((-3)^2+2(-3)+4=(-5)7<0$

La solución es: $x \leq 2$ o bien. $\boxed{x \in (-\infty,2]}$

Observe que el polinomio x^2+2x+4 es positivo para cualquier x real.

En general[3] si el polinomio ax^2+bx+c no tiene raíces reales, es decir $b^2-4ac<0$, se cumple que:

$ax^2+bx+c>0 \ \forall x \in R$, si $a>0$

$ax^2+bx+c<0 \ \forall x \in R$, si $a<0$

[3] Por características de la función cuadrática $y=ax^2+bx+c$.

2) Resolver $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3} < 0$ Comparando con cero

$\dfrac{3-x}{3x} < 0$ Unificando denominadores

$\dfrac{-(x-3)}{3x} < 0$ Extrayendo factor Común -1

$\dfrac{x-3}{3x} > 0$ Multiplicando ambos miembros por -3

$x-3=0 \Rightarrow x=3.$ Hallando los ceros del numerador

$x-3=0.$ Hallando los ceros del denominador

Representando en la recta real

```
 +++++++|-------|++++++
        0       3
```

El signo de cada intervalo se determina con un valor de prueba, así:

$x=5 \Rightarrow \dfrac{5-3}{5} = \dfrac{2}{3} > 0$

$x=1 \Rightarrow \dfrac{1-3}{1} = -4 < 0$

$x=-8 \Rightarrow \dfrac{-8-3}{-8} = \dfrac{-11}{-8} = \dfrac{11}{8} > 0$

La solución es $x<0 \vee x>3$ o bien $\boxed{x \in (-\infty, 0) \cup (3, \infty)}$.

No se incluye al cero porque anula el denominador, no se incluye al 3, porque la desigualdad es estricta.

Este método puede también ser aplicado en la solución de inecuaciones lineales, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:

3) Resolver $5x-3>7$

$5x-10>0$	Comparo con cero
$5(x-2)>0$	Factorizo
$(x-2)>0$	Divido entre 5
$x-2=0 \Rightarrow x=2$	Hallo los ceros

Representado en la recta real.

$$\longleftarrow\text{- - - - - - - - - - - - - -}|\text{+ + + + + + + + +}\longrightarrow$$
$$2$$

Un valor de prueba en cada intervalo

$x=10 \Rightarrow 10-2=8>0$

$x=1 \Rightarrow 1-2=-1<0$

La solución es $x>2$ o bien $\boxed{x \in (2, \infty)}$

2.2.1) TIPS PRÁCTICOS QUE FACILITAN EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE LAS INECUACIONES RACIONALES

1) Sea $P(x)=x-a$, entonces $P(a)=0$, se verifica que:

   si $x>a$ entonces $P(x)>0$

   si $x<a$ entonces $P(x)<0$.

   En otras palabras $(x-a)$ es positivo a la derecha de "a" y negativo a la izquierda de "a".

2) Sea $P(x)=(x-a)^2$, entonces $P(a)=0$, se verifica que:

   si $x>a$ entonces $P(x)>0$

   si $x<a$ entonces $P(x)>0$

   En general, sea $P(x)=(x-a)^n$

   Si "n" es impar, $P(x)$ es positivo a la derecha de "a" y negativo a la izquierda de a. "a" recibe el nombre de raíz impar o raíz sencilla.

   Si "n" es par, $P(x)$ es positiva a la derecha y a la izquierda de a,.

   "a" recibe el nombre de raíz par o raíz doble.

   Todo esto permite:

   (I) Tomar un solo valor de prueba en uno de los intervalos y alternar los signos, si la raíz es impar, mantener el mismo signo si la raíz es par.

   (II) Factorizar toda la expresión racional, en la forma $(x-a)$, compararla con cero y comenzar por el último intervalo de la derecha positivo, y luego alternar los signos si la raíz es impar, mantener el signo si la raíz es par.

Este método ahorra el usar los valores de prueba, pero es fundamental que:

ii) la expresión esté comparada con cero.

iii) "**<u>todos</u>**" los factores tengan la forma x-a, porque de no ser así, no se cumple la relación de orden que garantiza que $x-a>0$ si $x>a$.

Observe que según la definición de desigualdad

$x>a \Rightarrow x-a \in R^{+} \Leftrightarrow x - a > 0$ pero,

$x<a \Rightarrow a-x \in R^{+} \Rightarrow a - x > 0 \Rightarrow x - a < 0$

Si no se toma esto en cuenta, se llega a una conclusión falsa del signo de la expresión.

Por otra parte, si un número es raíz del numerador y del denominador simultáneamente un número par de veces, produce el mismo efecto en el signo de la expresión que una raíz par, es decir el signo no se altera.

A continuación se resuelven algunos ejemplos usando (I)

Resolver $\dfrac{3x - 2}{2x - 3} < 3$

$$\frac{3x - 2}{2x - 3} - 3 < 0$$

$$\frac{3x - 2 - 6x + 9}{2x - 3} < 0$$

$$\frac{- 3x + 7}{2x - 3} < 0$$

$$\frac{-3\left(x-\frac{7}{3}\right)}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)}<0$$

$$\frac{x-\frac{7}{3}}{x-\frac{3}{2}}>0$$

Hallando ceros del numerador: $x-\frac{7}{3}=0 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$.

Hallando ceros del denominador: $x-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

Tomando un valor de prueba $x=0 \Rightarrow \dfrac{0-\frac{7}{3}}{0-\frac{3}{2}}=\dfrac{14}{9}>0$

Representando en la recta real:

```
+++++++|----------|++++++
<------------------------->
      3/2        7/3
```

Solución $x<\frac{3}{2} \vee x>\frac{7}{3}$, o bien

$$\boxed{x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{3}, \infty\right)}$$

Resolver $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{9 - x^2} > 0$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{-\left(x^2 - 9\right)} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 9} \leq 0$$

$$\frac{\left(x - 2\right)^2}{\left(x - 3\right)\left(x + 3\right)} \leq 0$$

Hallando ceros del numerador $(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$. (Raíz par)

Hallando ceros del denominador $(x-3)\ (x+3)=0 \Rightarrow x=3 \vee x=-3$

Valor de prueba $x=0 \Rightarrow \dfrac{\left(-2\right)^2}{\left(-3\right)\left(+3\right)} = \dfrac{4}{-9} < 0$

```
+++++++|--------|---|+++++
<------------------------------>
       -3       2   3
```

Raíz par

La solución es : $-3<x<3$, o bien $\boxed{x \in (-3,3)}$

Ahora, se resuelve un ejemplo usando (II)

Resolver $\dfrac{2x^2 + x - 16}{x^2 + x} < 1$

$$\frac{2x^2 + x - 16}{x^2 + x} - 1 < 0$$

$$\frac{2x^2 + x - 16 - x^2 - x}{x^2 + x} < 0$$

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 + x} < 0$$

$$\frac{(x-4)(x+4)}{x(x+1)} < 0$$

Ninguna raíz es par, se alteran todos los signos comenzando por el último intervalo de la derecha positivo.

```
◄++++++|---|++|--------------|+++++++++►
       -4  -1  0              4
```

La solución es $-4 < x < -1 \vee 0 < x < 4$, o bien

$$\boxed{x \in (-4,-1) \cup (0,4)}$$

Es sumamente importante recalcar que si el estudiante omite alguna de las condiciones que se proponen en los métodos (I) y (II) su inecuación estará mal resuelta, por lo que se le sugiere que si no está en capacidad de recordar todas las premisas necesarias, use el método de los valores de prueba que siempre conduce a la respuesta correcta, independientemente de la forma en que factorice o de la condición de la raíz, siempre y cuando, por supuesto, no cometa ningún error algebraico o aritmético durante el proceso.

2.3) INECUACIONES IRRACIONALES

Son inecuaciones en la que variable forma parte de la cantidad subradical, es decir es una inecuación de la forma $\sqrt{f(x)} > g(x)$, $\sqrt{f(x)} < g(x)$, $\sqrt{f(x)} + h(x) \geq \sqrt{g(x)}$ etc.

En este tipo de inecuaciones se pueden aplicar todas las transformaciones que se aplican a las ecuaciones irracionales, sin embargo no es posible sustituir las soluciones para verificar la veracidad de la desigualdad porque, generalmente, la solución de las inecuaciones son conjuntos con infinitos números, por lo tanto se debe garantizar que **"todas"** las transformaciones conduzcan a una desigualdad equivalente a al original.

En el caso de una inecuación de la forma $\sqrt{f(x)} < g(x)$, es necesario para resolverla que se cumplan todas y cada una de las siguientes condiciones:

i) $f(x) \geq 0$, para que $\sqrt{f(x)}$ esté definida como un número real.

ii) $g(x) > 0$, ya que no es posible que un número negativo sea mayor que uno positivo[4].

iii) $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} - g(x) < 0$, pues ésta es la condición que impone la inecuación original[5].

Según esto, se puede enunciar el siguiente método para resolver las inecuaciones irracionales.

---

[4] Por definición de raíz cuadrada se sabe que $\sqrt{f(x)} \geq 0, \forall x : f(x) \geq 0$

[5] Ver desigualdad estricta.

1) Hallar los valores de x para los cuales la raíz está definida como número real, es decir, el dominio de la raíz. Si la inecuación tiene más de una raíz, se halla el dominio de cada una de ellas y se intersectan, siendo este resultado el dominio de la inecuación. La solución de la inecuación es un subconjunto de su dominio o el mismo dominio.
2) Se pasan todos los términos para el primer miembro de la inecuación.
3) Se hallan las raíces del primer miembro de inecuación, es decir, los valores de la variable que anulan dicha expresión[6].
4) Las raíces obtenidas en el paso anterior se representan en la recta real, donde ya está señalando el dominio de la inecuación.
5) Usando valores de prueba se determina el signo de cada uno de los intervalos que quedaron definidos en la recta según el paso anterior.
6) La solución de la inecuación son los valores de la variable, en el dominio de la misma, que la satisfacen.

Tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

[6] Usando cualquiera de los métodos conocidos para resolver ecuaciones irracionales. Ver en el capítulo III. Ecuaciones, la página. 97.

1) Resolver $\sqrt{2x+10} < 3x-5$

- Se determina el dominio de $\sqrt{2x+10}$.

Es necesario que $2x+10 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$, es decir sólo se va usar la porción de la recta real que cumple $x \geq -5$, porque sino $\sqrt{2x+10}$ no está definida como un número real.

- Se hallan las raíces de la inecuación

$\sqrt{2x+10} = 3x-5$

$2x+10=9x^2-30x+25$

$9x^2-32x+15=0$

$$x = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4(9)(15)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{32 \pm 22}{18}$$

$$x_1 = \frac{54}{18} = 3$$

$$x_2 = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Verificando las soluciones:

Para $x = 3 \Rightarrow \sqrt{2(3)+10} = \sqrt{16} = 4$

3(3)-5=9-5=4. Si es solución.

Para $x = \frac{5}{9} \Rightarrow \sqrt{2\frac{5}{9}+10} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$

$$3\left(\frac{5}{9}\right) - 5 = \frac{15 - 45}{9} = -\frac{30}{9} = -\frac{10}{3}.$$ **No** es solución.

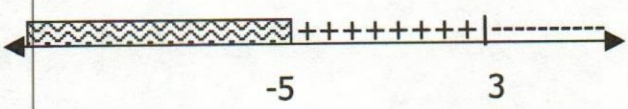
- Se representa en la recta real el resultado obtenido en 1) y en 2) y se estudia con valores de prueba el signo en cada intervalo de la inecuación

$$\sqrt{2x + 10} < 3x - 5 \Leftrightarrow \sqrt{2x + 10} - 3x + 5 < 0$$

Los valores de prueba:

$$x = 0 \Rightarrow \sqrt{2(0) + 10} - 3(0) + 5 = \sqrt{10} + 5 > 0$$

$$x = 4 \Rightarrow \sqrt{2(4) + 10} - 3(4) + 5 = \sqrt{18} - 7 = \sqrt{18} - \sqrt{49} < 0$$



La solución de la inecuación es $x > 3$ o bien $\boxed{x \in (3, \infty)}$

2) Resolver $\sqrt{x^2 - x - 12} > x$

- Se determina el dominio de $\sqrt{x^2 - x - 12}$

$x^2 - x + 12 \geq 0$

$(x-4)(x+3) \geq 0$

$$\xleftarrow{\quad ++++|\text{--------------}|++++ \quad}\!\!\!\rightarrow$$
$$-3 \qquad\qquad 4$$

$x \in (-\infty,-3] \cup [4,\infty)$

Entonces el dominio de la inecuación es $(-\infty,-3] \cup [4,\infty)$ sólo con esos intervalos de la recta tiene sentido trabajar.

- Se hallan las raíces de la inecuación.

$\sqrt{x^2 - x - 12} = x$

$x^2-x-12=x^2$

$-x-12=0 \Rightarrow x = -12$

Verificando la solución

$\sqrt{(-12)^2 - (-12) - 12} = \sqrt{144} = 12 \neq -12$

no es solución, no tiene raíces reales.

- Se representa en la recta real y se estudia el signo de $\sqrt{x^2 - x - 12} - x > 0$, usando valores de prueba.

Los valores de prueba

$x = -5 \Rightarrow \sqrt{(-5)^2 - (-5) - 12} - (-5) = \sqrt{18} + 5 > 0$

$x = 6 \Rightarrow \sqrt{(6)^2 - (-6) - 12} - 6 = \sqrt{30} - \sqrt{36} < 0$

No

$$\xleftarrow{\quad +++++++|\text{/\/\/\/\/\/\/\/}\text{----------} \quad}\!\!\!\rightarrow$$
$$-3 \qquad\qquad\qquad 4$$

La solución de la inecuación es $x \leq -3$ o bien $\boxed{x \in (-\infty,-3]}$

3) Resolver $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{4x+1}$

- Se halla el dominio de $\sqrt{x-2}$

$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x \in [2, \infty)$ (a)

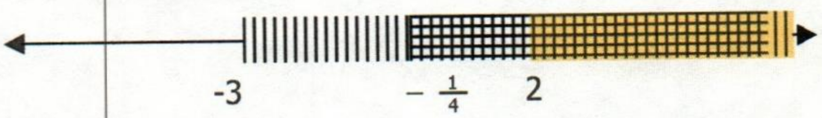
Se halla el dominio de $\sqrt{x+3}$

$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3, \infty)$ (b)

Se halla el dominio $\sqrt{4x+1}$

$4x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{1}{4} \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{1}{4}, \infty\right)$ (c)

El dominio de la Inecuación es la intersección de los resultados (a), $(b) \wedge (c)$.



El dominio de la inecuación es $[2, \infty)$.

- Se hallan las raíces

$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{4x+1}$

$\cancel{x} - 2 + 2\sqrt{(x-2)(x+3)} + x + 3 = 4x + 1$

$2\sqrt{x^2 + x - 6} = 2x$

$\sqrt{x^2 + x - 6} = x$

$\cancel{x^2} + x - 6 = \cancel{x^2} \Rightarrow x = 6$

Verificando la solución

$\sqrt{6-2} + \sqrt{6+3} = 2 + 3 = 5$

$\sqrt{4(6)+1} = \sqrt{25} = 5$. Si es solución.

- Representando en la recta real y tomando valores de prueba.

$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} \le \sqrt{4x+1}$

Valores de pruebas

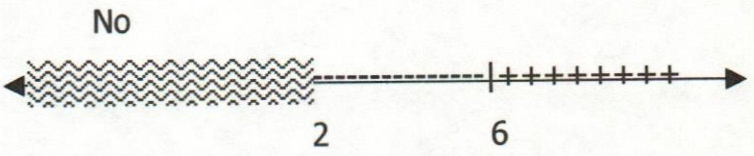
$x = 4 \Rightarrow \sqrt{4-2} + \sqrt{4+3} - \sqrt{16+1} = \sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{17} < 0$

El signo de esa expresión se puede determinar usando las propiedades de las desigualdades, como sigue:

$4 < \sqrt{17} < 5 \wedge 1 < \sqrt{2} < 2 \quad \wedge 2 < \sqrt{7} < 3 \Rightarrow$

$3 < \sqrt{2} + \sqrt{7} < 5 \Rightarrow -1 < \sqrt{2} + \sqrt{7} - \sqrt{17} < 0$

$x = 12 \Rightarrow \sqrt{12-2} + \sqrt{12+3} - \sqrt{48+1} = \sqrt{10} + \sqrt{15} - 7 > 0$



La solución es $2 \le x \le 6$. o bien $\boxed{x \in [2,6]}$

3) SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA VARIABLE

Varias inecuaciones con una variable forman un sistema de inecuaciones cuando se plantea el problema de hallar todos los valores de la variable que satisfacen, **simultáneamente**, a las inecuaciones dadas.

La solución de un sistema de inecuaciones es el resultado de la **intersección** de las soluciones de cada una de las inecuaciones que forman el sistema.

Las inecuaciones que forman un sistema se unen a través de una llave, por ejemplo:

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ h(x) < \dfrac{S(x)}{Q(x)} \end{cases}, \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ h(x) - R(x) \leq 0 \\ s(x) > \dfrac{1}{h(x)} \end{cases}$$

Otras veces las inecuaciones del sistema pueden aparecer escritas en forma breve, así: $g(x) \leq f(x) < h(x)$, esto quiere decir que el sistema de inecuaciones que se debe resolver es $\begin{cases} g(x) \leq f(x) \\ f(x) < h(x) \end{cases}$.

Para que un sistema de inecuaciones pueda ser escrito en forma breve debe ocurrir que dos de las inecuaciones tengan un miembro idéntico y al escribirla en forma lineal las desigualdades leídas de izquierda a derecha tengan el mismo sentido. Por ejemplo: $f(x) < h(x) < g(x)$; $s(x) > j(x) \geq f(x)$.

Escribir expresiones como $h(x)<f(x)\geq g(x)$ no tiene sentido, debido a las propiedades de orden que cumple el conjunto de los números reales. La forma correcta de escribirlo, es usando la notación del sistema, así: $\begin{cases} h(x) < f(x) \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$.

A continuación se muestran algunos ejemplos

1) Resolver $\begin{cases} 2x^2 + 2 < 5x \\ x^2 \geq x \end{cases}$

- Se resuelve $2x^2+2<5x$

$2x^2-5x+2<0$

$(2x)^2-5(2x)+4<0$

$(2x-4)(2x-1)<0$

$$4(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$$

$$(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$$

```
+++++++|---------|++++++
      ½          2
```

Solución $x \in \left(\frac{1}{2},2\right)$.

- Se resuelve $x^2\geq x$

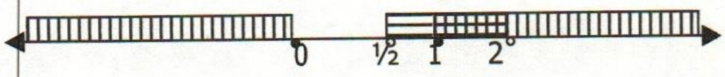
$x^2-x \geq 0$

$x(x-1)\geq 0$

```
+++++++|---------|++++++
       0         1
```

Solución b: $x \in (-\infty,0] \cup [1,\infty)$.

Solución del sistema = solución a $\cap$ solución b.



Solución del sistema: $\boxed{x \in [1,2).}$

2) Resolver: $4x-2<x^2+1<4x+6$

- Se resuelve $4x-2<x^2+1$

$x^2+1-4x+2>0$

$x^2-4x+3>0$

$(x-3)(x-1)>0$

Solución a: $x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty)$.

- Se resuelve $x^2+1<4x+6$

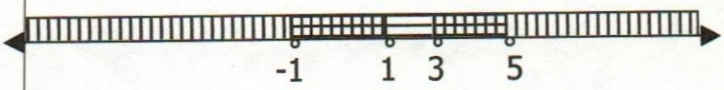
$x^2+1-4x-6<0$

$x^2-4x-5>0$

$(x-5)(x+1)<0$

Solución b: $x \in (-1,5)$

Solución del sistema = Solución a $\cap$ solución b.



Solución del sistema: $\boxed{x \in (-1,1) \cup (3,5)}$

Varias inecuaciones con una variable forman un conjunto de inecuaciones cuando se plantea el problema de hallar todos los valores de la variable que satisfacen, **por lo menos una**, de las inecuaciones dadas.

La solución de un conjunto de inecuaciones se obtiene de la **unión** de las soluciones de cada una de las inecuaciones que forman el conjunto.

Las inecuaciones que forman un conjunto se unen a través de un corchete, o bien, se escriben en fila, separadas por un punto y coma (;), o por el símbolo de disyunción (v).

Una desigualdad no estricta es equivalente a un conjunto formado por la correspondiente desigualdad estricta y una ecuación[7] . Por ejemplo, la desigualdad $f(x) \leq g(x)$ es equivalente al conjunto $\left[\begin{array}{l} f(x) < g(x) \\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$, la solución de este conjunto es la unión de la solución de la inecuación $f(x)<g(x)$ con la solución de la ecuación $f(x)=g(x)$.

La importancia de este concepto se verá en el siguiente capítulo en la resolución de las ecuaciones e inecuaciones que contienen la variable bajo el símbolo de valor absoluto.

[7] Ver definición de desigualdad no estricta.

EJERCICIOS RESUELTOS

A) Resolver las siguientes inecuaciones

1) $x^2 \leq 9$

$x^2 - 9 \leq 0$

$(x-3)(x+3) \leq 0$

++++|--------|++++++

-3 3

Solución: $x \in [-3, 3]$

Comentario

Esta es una inecuación racional que para ser resuelta deben "pasarse" todos los términos al primer miembro, luego debe factorizarse ese miembro, hallar las raíces y estudiar el signo de la expresión en cada intervalo en el que queda dividida la recta real.

Los estudiantes tienen la tendencia de sacar raíz cuadrada a ambos miembros de la inecuación, así:

$x^2 \leq 9 \Rightarrow x \leq \pm 3$ **"INCORRECTO"**

este es un **error gravísimo,** pues no se están respetando las propiedades de la radicación.

Si se desea sacar raíz cuadrada a ambos miembros de la desigualdad, debe ocurrir que los dos sean positivos, como es en este caso particular, y además se deben aplicar las propiedades, así:

$$x^2 \leq 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{9} \Rightarrow |x| \leq 3$$

La resolución de esta inecuación se explica con detalle en el capítulo V, Valor Absoluto.

Al resolver una inecuación puede ocurrir que:

(i) la inecuación es una proposición falsa o al transformarla, se obtiene una proposición equivalente falsa, entonces la solución es vacía.

Por ejemplo: $x^2<-9$; así x^2 es un número positivo para cualquier x real y ningún número positivo es menor que un número negativo. Entonces la solución es $\varnothing$.

Otra forma de resolverla es así $x^2<-9 \Rightarrow x^2+9<0$. Al tratar de factorizar x^2+9 se observa que **no** tiene raíces reales, pues b^2-4ac=1-4.9=-35<0 y como el coeficiente de x^2 es positivo, entonces x^2+9 es positiva para cualquier x real, por lo que la proposición $x^2+9<0$ es falsa, entonces la solución es vacía, se expresa así solución $\varnothing$

(ii) la inecuación es una proposición verdadera, o al transformarla, se obtiene una equivalente que representa una proposición verdadera, la solución es el conjunto de los números reales.

Por ejemplo: $x^2 \geq 0$, x^2 es un número positivo para cualquier número real y es cero cuando $x=0$, entonces $x^2 \geq 0$ es verdadera para cualquier x, solución $x \in R \Leftrightarrow x \in (-\infty, \infty)$.

2) $\dfrac{7x-4}{x+2} \geq 5$

$\dfrac{7x-4}{x+2} - 5 \geq 0$

$\dfrac{7x-4-5x-10}{x+2} \geq 0$

$\dfrac{2x-14}{x+2} \geq 0$

$\dfrac{2(x-7)}{x+2} \geq 0$

$\dfrac{x-7}{x+2} \geq 0$

++++|------------|++++++++
-2 7

Solución: $x \in (-\infty,-2) \cup [7,\infty)$.

Comentario

Al igual que en el ejemplo anterior, esta es una inecuación racional que se resuelve empleando el mismo método, observe que aunque la inecuación dice mayor o igual que cero, el número –2 no puede ser incluido en la solución porque anula el denominador. El dominio de esta inecuación es $R - \{-2\}$.

Los estudiantes tienen la tendencia de multiplicar en equis ambos miembros de la inecuación, así: $\dfrac{7x-4}{x+2} \geq 5 \Rightarrow 7x-4 \geq 5(x+2)$

$$\Rightarrow 2x \geq 14 \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow x \in [7,\infty).$$

"INCORRECTO"

Este es un **error gravísimo**, pues no se está respetando la propiedad 4 de las desigualdades: "si se multiplican ambos miembros de una desigualdad por un número negativo la desigualdad cambia de sentido". Observe que la expresión x+2 es positiva si x>-2 y es negativa si x<-2. Además, si no se escribe la condición $x \neq -2$ entonces se está admitiendo la división entre cero.

Si se desea multiplicar en equis, se debe construir un conjunto de sistemas de inecuaciones equivalente a la inecuación original, así:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x - 4 \geq 5(x+2) \\ x > -2 \end{cases} \\ \begin{cases} 7x - 4 \leq 5(x+2) \\ x < -2 \end{cases} \end{array}\right.$$, también puede expresarse así:

$$\begin{cases} 7x - 4 \geq 5(x+2) \\ x > -2 \end{cases} \vee \begin{cases} 7x - 4 \leq 5(x+2) \\ x < -2 \end{cases}$$

Se resuelve cada sistema, y se **unen** ambas soluciones, así:

a) $7x-4 \geq 5(x+2)$

$2x \geq 14$

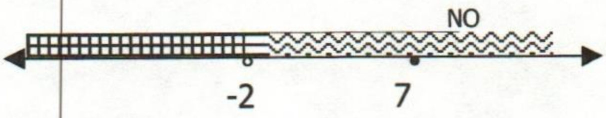
$x \geq 7 \wedge x > -2$

Solución a: $x \in [7, \infty)$

b) $7x-4 \leq 5(x+2)$

$2x \leq 14$

$x \leq 7 \wedge x < -2$

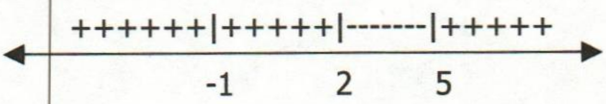


Solución b $x \in (-\infty, -2)$

La solución de la inecuación $\dfrac{7x-4}{x+2} \geq 5$ es solución a unida con la solución b, es decir: $x \in (-\infty, -2) \cup [7, \infty)$.

Indiscutiblemente, esta forma de resolución requiere de mucho dominio de la materia y más razonamiento por parte del estudiante.

3) $\dfrac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-2)(x-5)} \geq 0$



Solución: $x \in (-\infty, 2) \cup (5, \infty)$.

Comentario

Esta inecuación está ya factorizada y comparada con cero, entonces simplemente se hallan las raíces del numerador –1 y 2, y las del denominador 2 y 5 y se determina el signo de la expresión usando valores de prueba.

O bien, usando el método (II), expuestos en los tips prácticos, pues todos los binomios están factorizados en la forma x-a. Observe que en este ejemplo en particular –1 es una raíz par o doble, (no hay cambio de signo antes y después del número -1, ver la recta real) y 2, <u>**no**</u> es una raíz doble o par, pues es raíz par del numerador e impar del denominador (por lo que si hay cambio de signo antes y después de 2, ver la recta).

En esta inecuación se puede simplificar el binomio x-2, siempre que se indique explícitamente la condición $x \neq 2$.

Así $\dfrac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-2)(x-5)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-5)} \geq 0, \text{ si } x \neq 2,$ esta condición debe ser representada en la recta real, pues el dominio de la inecuación es $R - \{2,5\}$ y estos dos números dividen a la recta en tres intervalos en los que la inecuación está definida y en cualquiera de ellos se puede satisfacer la inecuación, si no son representados puede atribuirse a un intervalo el signo incorrecto y no obtener la solución de la inecuación. Como se muestra en el siguiente caso, resuelto, como **INCORRECTAMENTE**, suelen realizarlo los estudiantes

$$\frac{x^3+2x^2-15x}{x^3+9x^2+20x} \geq 0$$

$$\frac{x(x-3)(x+5)}{x(x+5)(x+4)} \geq 0$$

$$\frac{x-3}{x+4} \geq 0$$

++++++|--------|++++++

-4 3

Solución $x \in (-\infty,-4) \cup [3,\infty)$ "**INCORRECTO**".

La forma correcta de resolverla es:

$$\frac{x(x-3)(x+5)}{x(x+5)(x+4)} \geq 0$$

$$\frac{x-3}{x+4} \geq 0, \text{ si } x \neq 0 \wedge x \neq -5$$

$$\begin{array}{c} +++++|++|---------|-------|+++++++ \\ \longleftarrow\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!\longrightarrow \\ -5 \quad -4 \qquad 0 \quad 3 \end{array}$$

Solución : $x \in (-\infty,-5) \cup (-5,-4) \cup [3,\infty)$.

Observe que si desea usar el método (II), 0 y –5 se comportan como raíces pares.

Hasta que el estudiante no adquiera la destreza necesaria para recordar todos estos aspectos se le sugiere **no** simplificar nada y usar valores de prueba en cada intervalo definido en la recta.

4) $$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{x^3+1}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1-2x}{x^3+1} \leq 0$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1-2x}{(x+1)(x^2-x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-x+1-2(x+1)-1+2x}{(x+1)(x^2-x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x^2-x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} \leq 0$$

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \leq 0, \forall x \in R : x^2-x+1 > 0, \text{entonces}$$

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x+1} \leq 0$$

$x-2 \leq 0$, si $x \neq -1$.

$$\xleftarrow{\quad} \text{-----------}|\text{--------}|\text{++++++} \xrightarrow{\quad}$$
$$\qquad -1 \qquad 2$$

Solución: $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,2]$, o bien , $x \in (-\infty,2] - \{-1\}$.

Comentario

En esta inecuación el trinomio x^2-x+1 se puede simplificar porque no tiene raíces reales, ya que b^2-4ac=1-4=-3<0 y para cualquier valor de x es siempre positivo.

Observe que si se ignora la condición $x \neq -1$ se llega a la respuesta incorrecta $x \in (-\infty,2]$

5) $\sqrt{2x+1} < 5$

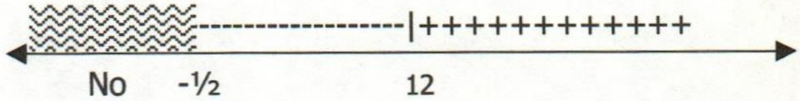
- Dominio: $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$
- Raíces: $\sqrt{2x+1} = 5$

  $2x + 1 = 25 \Rightarrow x = 12$

  si $x = 12 \Rightarrow \sqrt{24+1} = \sqrt{25} = 5$., si es raíz.
- Usando valores de prueba se estudian los signos de $\sqrt{2x+1} - 5 < 0$ en la recta

  Si $x = 0 \Rightarrow 1-5=-4<0$

  Si $x=15 \Rightarrow \sqrt{31} - 5 = \sqrt{31} - \sqrt{25} > 0$



Solución: $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 12\right)$.

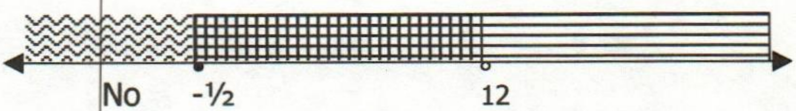
Comentario

Como **<u>ambos miembros</u>** de la inecuación **son positivos**, esa inecuación se puede resolver elevando ambos miembros al cuadrado, siempre y cuando la solución satisfaga el dominio de la raíz cuadrada. Así

$\sqrt{2x+1} < 5 \Leftrightarrow 2x + 1 < 25$, si $2x + 1 \geq 0$

$x < 12 \wedge x \geq -\dfrac{1}{2}$

La solución es la intersección de ambas condiciones.



La solución es $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 12\right)$

Es importante recalcar que este método **<u>sólo</u>** puede ser aplicado cuando ambos miembros de la inecuación son positivos, mientras que el método anterior es general y puede ser aplicado para resolver cualquier inecuación irracional.

6) $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$

- Dominio: $x^2 - 4x \geq 0 \Rightarrow x(x-4) \geq 0$

$$\begin{array}{ccccc} +++++++ & | & ------- & | & +++++ \\ & 0 & & 4 & \end{array}$$

$x \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

- Raíces: $\sqrt{x^2 - 4x} = x - 3$

$x^2 - 4x = (x-3)^2$

$x^2 - 4x = x^2 - 6x + 9$

$$2x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

$$\text{Si } x = \frac{9}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{81}{4} - 18} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$\frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$, entonces, sí es raíz

- Estudiando los signos en la recta de $\sqrt{x^2 - 4x} - x + 3 > 0$

Valores de prueba

$x = -1 \Rightarrow \sqrt{5} + 1 + 3 = \sqrt{5} + 4 > 0$

$$x = \frac{17}{4} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^2 - 4\,\frac{17}{4}} - \frac{17}{4} + 3 = \frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{5}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{17} - \sqrt{25}}{4} < 0$$

$x = 5 \Rightarrow \sqrt{5} - 5 + 3 = \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5} - \sqrt{4} > 0.$

+++++++| |-----|+++++++++

0 NO 4 $\frac{9}{2}$

La solución es $x \in (-\infty, 0] \cup \left(\frac{9}{2}, \infty\right)$.

Comentario

En este ejemplo x=0 forma parte de la solución porque 0>-3, sin embargo $\frac{9}{2}$ no porque se trata de una desigualdad estricta.

En este caso **<u>no</u>** se puede elevar ambos miembros de la inecuación al cuadrado, porque el primer miembro es positivo para cualquier x en su dominio, pero el segundo puede ser positivo o negativo según sea el valor de x, ya que x-3 es positivo si x>3 y es negativo si x<3, entonces en el intervalo $(-\infty, 0]$ es negativo, y al elevar al cuadrado sin considerar invertir la desigualdad para los valores de x<3 se incurre en un error y no se obtiene la respuesta correcta

Este es un **<u>error</u>** muy frecuente de los estudiantes elevar ambos miembros al cuadrado y resolver sin respetar las propiedades de las desigualdades, suelen resolverlo **<u>INCORRECTAMENTE</u>**, como se muestra a continuación.

$\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$

$x^2 - 4x > (x - 3)^2; \text{si } x^2 - 4x \geq 0$

$x^2 - 4x > x^2 - 6x + 9$

2x>9

$x > \frac{9}{2} \wedge x \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$.

Solución $\left(\frac{9}{2}, \infty\right)$. **<u>"INCORRECTO"</u>**

7) $\dfrac{6x}{x-2} - \sqrt{\dfrac{12x}{x-2}} > 0$

- Dominio: $\dfrac{12x}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x}{x-2} \geq 0$

$$\begin{array}{ccccc} +++++++ & | & ------ & | & ++++++ \\ \longleftarrow & 0 & & 2 & \longrightarrow \end{array}$$

$x \in (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$

- Raíces: $\dfrac{6x}{x-2} - \sqrt{\dfrac{12x}{x-2}} = 0$

$$\frac{6x}{x-2} = \sqrt{\frac{12x}{x-2}}$$

$$\frac{36x^2}{(x-2)^2} = \frac{12x}{x-2}$$

$$\frac{3x^2}{(x-2)^2} - \frac{x}{x-2} = 0$$

$$\frac{3x^2 - x(x-2)}{(x-2)^2} = 0$$

$$\frac{3x^2 - x^2 + 2x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + 2x}{(x-2)^2} = 0$$

$$2x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -1$$

Verificando soluciones de la ecuación (2)

Si $x = 0$: $\dfrac{0}{0-2} - \sqrt{\dfrac{0}{0-2}} = 0$, si es solución.

Si $x = -1$: $\dfrac{6(-1)}{-1-2} - \sqrt{\dfrac{12(-1)}{-1-2}} = +2 - \sqrt{4} = 2 - 2 = 0$, si es solución.

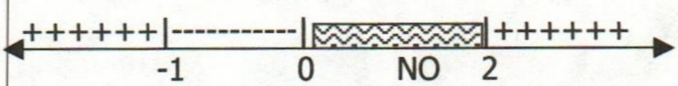
- Estudiando signos en la recta real de $\dfrac{6x}{x-2} - \sqrt{\dfrac{12x}{x-2}} > 0$

Valores de prueba

$x = 4 \Rightarrow 12 - \sqrt{24} = \sqrt{144} - \sqrt{24} > 0$

$x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{6}{5} - \sqrt{\dfrac{12}{5}} = \sqrt{\dfrac{36}{25}} - \sqrt{\dfrac{12}{5}} = \sqrt{\dfrac{36}{25}} - \sqrt{\dfrac{60}{25}} < 0$

$x = -3 \Rightarrow \dfrac{18}{5} - \sqrt{\dfrac{36}{5}} = \sqrt{\dfrac{324}{25}} - \sqrt{\dfrac{180}{25}} > 0$



La solución es $x \in (-\infty,-1) \cup (2, \infty)$.

Comentario

Observe que -1 no están en la solución de la inecuación, porque se trata de una desigualdad estricta, y este número anulan la expresión, por otra parte. 2 no es solución, porque anula el denominador.

8) Resolver el sistema

$$\begin{cases} x^3 \geq 8 \\ x^2 < 16 \end{cases}$$

a) $x^3 \geq 8 \Rightarrow x^3 - 8 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$

porque $\forall x \in R : x^2 + x + 1 > 0$.

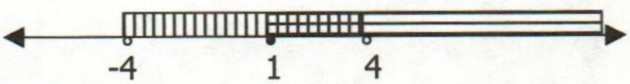
Solución: $x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, \infty)$.

b) $x^2 < 16 \Rightarrow x^2 - 16 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) < 0$

+++++++|----------|+++++
-4 4

Solución $x \in (-4, 4)$

La solución del sistema es solución de la inecuación a **<u>intersectada</u>** con la solución de la inecuación b.



Solución del sistema $x \in [1, 4)$.

Comentario

Observe que las dos inecuaciones que conforman el sistemas son racionales y por lo tanto deben ser resueltas aplicando el procedimiento pertinente, ver página 162 de este capítulo.

Un **<u>error gravísimo</u>** que cometen los estudiantes es sacar la raíz a ambos miembros de la desigualdad sin prestar ninguna atención a las propiedades de orden de los números reales y a las propiedades de las desigualdades. Muchas veces resuelven, **INCORRECTAMENTE**, este tipo de sistemas de la siguiente manera:

a) $x^3 \geq 8 \Leftrightarrow x^3 \geq 2^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} \geq \sqrt[3]{2^3} \Leftrightarrow x \geq 2$

b) $x^2 < 16 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{16} \Leftrightarrow x < 4$

Solución: $(-\infty, 4) \cap [2, \infty)$, entonces la solución es $x \in [2,4)$

INCORRECTO

9) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} > 4 \\ 3x^2 < 9x \end{cases}$

a) $\sqrt{x^2 + 1} > 4$

Dominio $x^2+1 \geq 0$, $\forall x \in R : x^2 + 1 > 0$, entonces el dominio es R

Ambos miembros de la inecuación son positivos, entonces se puede elevar al cuadrado.

$x^2 + 1 > 16 \Rightarrow x^2 - 15 > 0 \Rightarrow \left(x - \sqrt{15}\right)\left(x + \sqrt{15}\right) > 0$

$$\begin{array}{c} ++++++|------------|+++++++ \\ \longleftarrow\!\!-\sqrt{15}\qquad\qquad\sqrt{15}\!\!\longrightarrow \end{array}$$

Solución a: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{15}\right) \cup \left(\sqrt{15}, \infty\right)$

b) $3x^2 < 9x \Rightarrow 3x^2 - 9x < 0$

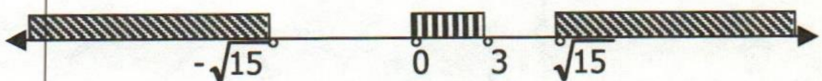
$3x(x - 3) < 0 \Rightarrow x(x - 3) < 0$

+++++|---------|+++++

0 3

Solución b: $x \in (0,3)$

La solución del sistema es



La solución del sistema es $\varnothing$

No existe ningún valor de x que satisfaga simultáneamente ambas inecuaciones.

10)Hallar el dominio de la expresión algebraica:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \frac{3}{x} + \frac{1}{\sqrt{x - 5}}$$

Hallar el dominio de esta expresión algebraica se reduce a resolver el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ x - 5 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Con estas inecuaciones se cumplen las dos condiciones que garantizan que la expresión esta definida en el conjunto de los números reales, estas son:

* La cantidad subradical de las raíces de índice par es positiva.
* El denominador es diferente de cero.

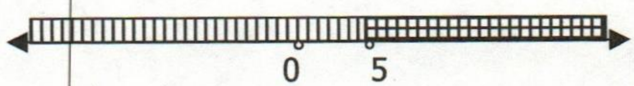
a) $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)^2 \geq 0.$ Solución $x \in R$.

b) $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$. Solución $x \in (5, \infty)$.

c) $x \neq 0 \Leftrightarrow x \in R - \{0\} \Leftrightarrow x \in (-\infty,0) \cup (0, \infty)$

La solución del sistema, es la intersección de las soluciones de las tres inecuaciones, pues el dominio de la expresión son los valores de x para los cuales **toda** la expresión está definida como un número real:

$R \cap (5, \infty) \cap \{(\infty,0) \cup (0, \infty)\}. = (5, \infty)$



Solución $x \in (5, \infty)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Resolver las siguientes Inecuaciones

1) $x+3 \geq 2(x+1)$

2) $4(X+1)<2X+3$

3) $\frac{2}{3}(X-1)+3X \leq -\frac{5}{2}$

4) $3\left(\frac{2x+1}{-2}\right) - 3x + \frac{1}{3} \geq -\frac{x+3}{2}$

5) $4(-3x+2) - \left(2x - \frac{1}{2}\right) < \frac{2}{3}x - 4$

6) $-x + 2\left(3 - \frac{2x+1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{-2}\right) > 0$

7) $\frac{3}{2}\left(-\frac{x+1}{2}\right) - x + \frac{1}{2} \geq -\frac{7x}{4} - 6$

8) $-\frac{1}{5}\left(\frac{3x-2}{2}\right) - \frac{2x-1}{2} \geq 4 - \frac{13x-2}{10}$

9) $\frac{2x+3}{2} - \sqrt{2} \leq \frac{2\sqrt{2}+2x}{3}$

10) $x^3-(x+2)^3>-\left(\sqrt{6}x-1\right)^2$

11) $\frac{3x^2}{2} + \frac{(x-1)^2}{2} \leq 2x^2 + \frac{x+1}{4}$

12) $x^4>16$

13) $x^2 \leq 8$

14) $(x+2)^2 < 25$

15) $x^2+4x+4 \geq 9$

16) $3(x-1)(x+1) > 0$

17) $x^2+2x-3 < 0$

18) $4x^3-6x^2 < 0$

19) $x^3-4x \geq 0$

20) $x^4+x^2 \leq x^3$

21) $12x^3-4x^2 < 3x-1$

22) $27x^3-9x^2-3x+1 \geq 0$

23) $8x^3+4x^2-2x-1 \geq 0$

24) $\dfrac{1}{x} > x$

25) $\dfrac{x+6}{x+1} < 2$

26) $\dfrac{4}{x+5} > \dfrac{1}{2x+3}$

27) $\dfrac{(x+1)^3-1}{(x-1)^3+1} \geq 1$

28) $\dfrac{3x^2+10x-27}{(x+2)^2} \leq 2$

29) $\dfrac{(2x-3)(x+1)}{x+5} < x-6$

30) $\dfrac{2x^3-x+1}{x^3+2x^2+x-4} \geq 0$

31) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 35x^2 - 47x - 15}{x^5 + 2x^4 - x - 2} \le 0$

32) $x^3 \ge \dfrac{7x^2 - x - 6}{x - 1}$

33) $\dfrac{x - 2}{x - 4} \ge \dfrac{x + 2}{x}$

34) $\dfrac{x}{x^2 - 1} + 3 \le \dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{x}{x + 1}$

35) $\dfrac{1}{x^2 + 5x + 6} - \dfrac{x - 1}{x + 2} \ge -\dfrac{7}{3}$

36) $-3<2x-5<7$

37) $3 \le \dfrac{2x - 3}{5} < 7$

38) $4 > \dfrac{2 - 3x}{7} \ge -2$

39) $0 \le 4 - \dfrac{x}{3} < 2$

40) $1<\dfrac{3x + 10}{x + 7} < 2$

41) $-2\dfrac{x - 2}{3} + \dfrac{1}{5}(x - 1) \ge -2x > 3x - \dfrac{3x + 1}{2}$

42) $\sqrt{x} < \dfrac{1}{x}$

43) $\sqrt{x + 1} > 1$

44) $2\sqrt{x - 3} \le \sqrt{x + 9}$

45) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} > -x - 2$

46) $\sqrt{3 - 2x - x^2} > -x - 2$

47) $\sqrt{x^2 + 2x - 3} > -x + 2$

48) $\sqrt{x^2 + x - 2} \geq \sqrt{2}(x - 1)$

49) $2\sqrt{3\sqrt{x} - 2} \leq \sqrt{3\sqrt{x} + 10}$

50) $\sqrt{2x^2 + \sqrt{2}x - 2} \leq 2x - \sqrt{2}$

51) $\dfrac{a}{x} \leq \dfrac{x}{a}$ siendo $a < 0$

52) $\dfrac{x - a}{x - 2a} < \dfrac{x + a}{x}$, siendo $a < 0$

53) $ax+b>0$

54) $\dfrac{a + bx}{ax + b} \geq x$, siendo $a < b < 0$

55) $\dfrac{a + bx}{ax + b} \leq \dfrac{1}{x}$ siendo $a < -b < 0$

56) $x \leq \dfrac{a + bx}{ax + b} \leq \dfrac{1}{x}$, siendo $b < 0 < a < -b$

B) A continuación se resuelve la siguiente inecuación

$$\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} < 1 - x$$

1) Demuestre que la solución no es correcta.

2) Diga dónde está el error y por qué es un error.

3) Resuelva la inecuación.

$$\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} - 1 + x < 0 \Rightarrow x^2+3x+3-x-2+x^2+2x<0 \Rightarrow 2x^2+4x+1<0$$

$$\left(x - \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

Solución $x \in \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}, \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)$

C) La solución de la inecuación $\frac{x^4 + 4ax^3 + 2a^2x^2 - 4a^3x - 3a^4}{x - a} < 0$ **es el intervalo** $(-\infty, -3)$ **¿Cuál es el valor de a, si se sabe que a>0?.**

D) Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones

1) $\begin{cases} \frac{3x+5}{7} + \frac{10-3x}{5} > \frac{2x+7}{3} - \frac{148}{21} \\ \frac{7x}{3} - \frac{11(x+1)}{6} > \frac{3x-1}{3} - \frac{13-x}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} \leq \frac{x}{3} + 1 \\ (x+3)^3 - (3x+2)^2 \geq x^3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{2x-11}{4} + \frac{19-2x}{2} < 2x \\ \frac{2x+15}{9} > \frac{x-1}{5} + \frac{x}{3} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 \geq 5x - 6 \\ 5x - 6 < 2x^2 - 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0 \\ 2x - 4 < 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2 + 2 < 5x \\ x^2 \geq x \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2 < 9 \\ x^2 > 7 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x + 3}{x - 2} < 1 \\ \dfrac{2x + 3}{3x - 2} < 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9} \leq 0 \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8} \geq 0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} \sqrt{x^2+40} > x+4 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} \leq 2 \end{cases}$

E) Determine el dominio de las siguientes expresiones.

1) $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}}{x-\sqrt{3x+4}}$

2) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2-x}}{1-\sqrt{x+3}}$

3) $\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{1-\cos^2 x}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-x-2}}$

4) $\sqrt{(x-1)^2+1} - \sqrt{\dfrac{x^3-4x^2-21x}{x^3-27}}$

5) $\sqrt{\dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-5x-30}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^8-256}}$

CAPÍTULO V

VALOR ABSOLUTO

1) DEFINICIÓN

Geométricamente, el valor absoluto o módulo de un número x, se define como la distancia en la recta real de x a cero.

Analíticamente, si x es un número real, el valor absoluto de x es un número real no negativo que se denota por $|x|$ y se define así:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es importante destacar el uso adecuado de esta definición, pues si x es negativo, $-x$ es positivo[1], así $|-4| = 4$, pues $x=-4$ entonces $-x=-(-4)=4$.

De esta definición se derivan las siguientes propiedades:

i) $|x| \geq 0, \forall x \in R$.
ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
iii) $-|x| \leq x \leq |x|, \forall x \in R$.
iv) $|x| \geq x, \forall x \in R$.
v) $|x| = |-x|, \forall x \in R$.

Otras propiedades del valor absoluto, son las siguientes:

[1] Ver simétrico de un número real, en el Capítulo I Números reales página 4.

1) $|x| = \sqrt{x^2}$

Demostración

$(x)^2=x^2 \wedge (-x)=x^2$ entonces $-x$ y $+x$ son raíces cuadradas de x^2

entonces: $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{si } x \geq 0 \\ -x, \text{si } x < 0 \end{cases}$

2) $|xy| = |x||y|$

Demostración

Por definición de valor absoluto se sabe que:

$|xy| = \begin{cases} xy, \text{si } xy \geq 0 \\ -xy, \text{si } xy < 0 \end{cases}$; $|x| = \begin{cases} x, \text{si } x \geq 0 \\ -x, \text{si } x < 0 \end{cases}$; $|y| = \begin{cases} y, \text{si } y \geq 0 \\ -y, \text{si } y < 0 \end{cases}$

Entonces se tiene:

a) $|xy| = xy$, si $xy \geq 0$

$xy \geq 0 \Rightarrow xy = 0 \vee xy > 0$

Si $xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ entonces por la propiedad (ii) $|xy| = |x||y|$.

Si $xy>0$ entonces:

I) $x > 0 \wedge y > 0$,

entonces por definición de valor absoluto $|x| = x$; $|y| = y$ multiplicando miembro a miembro se tiene $|x||y| = xy$. Además, por definición $|xy| = xy$, entonces se concluye que $|xy| = |x||y|$.

II) $x < 0 \wedge y < 0$,

entonces por definición de valor absoluto $|x| = -x; |y| = -y$ multiplicando miembro a miembro se tiene $|x||y| = (-x)(-y) \Rightarrow |x||y| = xy$. Además, por definición $|xy| = xy$, entonces se concluye que $|xy| = |x||y|$.

b) $|xy| = -xy$, si $xy < 0$

Si xy<0 entonces:

I) $x > 0 \wedge y < 0$,

entonces por definición de valor absoluto $|x| = x; |y| = -y$ multiplicando miembro a miembro se tiene $|x||y| = x(-y) \Rightarrow |x||y| = -xy$. Además, se sabe que $|xy| = -xy$, entonces se concluye que $|xy| = |x||y|$.

II) $x < 0 \wedge y > 0$,

por lo que $|x| = -x; |y| = y$ entonces $|x||y| = -xy$, además $|xy| = -xy$, por lo que se concluye que $|xy| = |x||y|$.

3) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, si $y \neq 0$.

La demostración es análoga a la anterior.

4) $\left|x^2\right| = |x|^2 = x^2$.

Demostración $\left|x^2\right| = |x.x| = |x||x| = |x|^2$, por otra parte $|x| = \begin{cases} x, \text{si } x \geq 0 \\ -x, \text{si } x < 0 \end{cases}$ y

además $(-x)^2 = x^2 \wedge (x)^2 = x^2$ entonces $|x|^2 = x^2$.

En general $\left|x^n\right| = |x|^n$, si n es par $\left|x^n\right| = x^n$ ([2]).

5) Si $a \geq 0 \wedge |x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a \vee x = 0$

Es consecuencia de la definición.

6) Si $a \geq 0 \wedge |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$.

Demostración

Si $|x| \leq a \Rightarrow -|x| \geq -a$, pero $x = |x| \vee x = -|x|$ y por tanto por la propiedad (iii), $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$, entonces $-a \leq x \leq a$.

Si $-a \leq x \leq a$ se tiene: si $x \geq 0$ entonces $|x| = x \leq a$, si $x < 0$ entonces $|x| = -x \leq a$, por lo que $|x| \leq a$.

7) Si $a \geq 0 \wedge |x| < a \Rightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$.

[2] Por potenciación de los reales.

8) Si $a \geq 0 \wedge |x| \geq a \Leftrightarrow -a \geq x \vee x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$.

Demostración

Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x \geq a$.

Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -|x| = x \wedge -|x| \leq -a \Rightarrow x \leq -a$.

9) Si $a \geq 0 \wedge |x| > a \Rightarrow -a > x \vee x > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$.

10) Desigualdad triangular $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Demostración

Se sabe que $x = |x| \vee x = -|x|$, se sabe por la propiedad (iii) $-|x| \leq x \leq |x|$, análogamente $-|y| \leq y \leq |y|$ sumando miembro a miembro ambas desigualdades

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$-\left(|x| + |y|\right) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

por el teorema 6 se concluye que:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

2) ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Las ecuaciones que contiene la variable bajo el signo de valor absoluto o módulo se resuelven aplicando alguno de los siguientes métodos:

I) Eliminación del signo de módulo aplicando la definición

En general $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$

Entonces la ecuación $|f(x)| = g(x)$ (I) , se transforma en un conjunto de dos sistemas mixtos formados por una ecuación y una inecuación que se obtiene de la aplicación de la definición de valor absoluto; así:

a) $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$

La solución de cada sistema mixto[3] (a) y (b) se obtiene intersectando las soluciones de la ecuación e inecuación que lo conforman.

La solución de la ecuación (I) es la "**<u>unión</u>**" de las soluciones obtenidas en (a) y en (b). Pues la solución de un conjunto de sistemas consiste en hallar la solución de por lo menos uno de los sistemas del conjunto[4].

Si la ecuación a resolver contiene más de un módulo los sistemas mixtos que se obtienen de la aplicación de la definición contienen una ecuación y tantas inecuaciones como expresiones bajo el signo de módulo contenga la ecuación.

[3] Un sistema mixto es el formado por inecuaciones y ecuaciones.
[4] Ver definición de conjunto de sistema, en el capítulo III Ecuaciones y en el Capítulo IV Inecuaciones. Además ver disyunción exclusiva en lógica.

II) Elevación de ambos miembros de la ecuación al cuadrado.

Este método se fundamenta en la aplicación de la propiedad 4 de valor absoluto: $|x|^2 = x^2$, en general $|f(x)|^2 = f^2(x)$.

Para ser aplicado se debe tomar en cuenta que ambos miembros de la ecuación deben ser positivos, de lo contrario se agregaran raíces extrañas a la solución.

A continuación se resuelven algunos ejemplos usando el método I.

1) $|3x - 7| = 10$

Por definición de valor absoluto se sabe que:

$$|3x - 7| = \begin{cases} 3x - 7, \text{ si } 3x - 7 \geq 0 \\ -(3x - 7), \text{ si } 3x - 7 < 0 \end{cases}$$

Entonces los sistemas mixtos que se deben resolver son:

a) $\begin{cases} 3x - 7 = 10 \\ 3x - 7 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -(3x - 7) = 10 \\ 3x - 7 < 0 \end{cases}$

Resolviendo (a)

$3x - 7 = 10 \Rightarrow x = \dfrac{17}{3}$

$3x - 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{7}{3}$

Solución a $= \left\{\dfrac{17}{3}\right\} \cap \left[\dfrac{7}{3}, \infty\right) = \left\{\dfrac{17}{3}\right\}$.

Resolviendo (b)

$-(3x-7)=10 \Rightarrow 3x-7=-10 \Rightarrow x=-1$

$3x-7<0 \Rightarrow x<\dfrac{7}{3}$

Solución b $=\{-1\}\cap\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right)=\{-1\}.$

Solución final = Solución a $\cup$ Solución b.

$x=\left\{-1,\dfrac{17}{3}\right\}.$

2) $|x-2|+|4-x|=3$

Aplicando la definición se tiene

$$|x-2|=\begin{cases}x-2, \text{ si } x-2\geq 0\\ -(x-2), \text{ si } x-2<0\end{cases} \quad ; \quad |4-x|=\begin{cases}4-x, \text{ si } 4-x\geq 0\\ -(4-x), \text{ si } 4-x<0\end{cases}$$

Entonces los sistemas mixtos que se deben resolver son:

$$a)\begin{cases}x-2+4-x=3\\ x-2\geq 0\\ 4-x\geq 0\end{cases} \quad ; \quad b)\begin{cases}-(x-2)+[-(4-x)]=3\\ x-2<0\\ 4-x<0\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}x-2+[-(4-x)]=3\\ x-2\geq 0\\ 4-x<0\end{cases} \quad ; \quad d)\begin{cases}-(x-2)+4-x=3\\ x-2<0\\ 4-x<0\end{cases}$$

Resolviendo a:

x-2+4-x=3

$2\neq 3$ Solución a $=\varnothing$

Resolviendo b:

$-x+2-4+x=3$

$-2 \neq 3$ Solución b $= \varnothing$

Resolviendo c:

$$x-2-4+x=3 \Rightarrow 2x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{2}.$$

$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2.$

$4-x<0 \Rightarrow x>4.$

Slución c $= \left\{\frac{9}{2}\right\} \cap [2,\infty) \cap (4,\infty) = \left\{\frac{9}{2}\right\}.$

Resolviendo d:

$$-x+2+4-x=3 \Rightarrow -2x=-3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}.$$

$x-2<0 \Rightarrow x<2.$

$4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4.$

Solución d $= \left\{\frac{3}{2}\right\} \cap (-\infty,2) \cap (-\infty,4) = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$

Solución final = Solución a $\cup$ Solución b $\cup$ Solución c $\cup$ Solución d.

Solución final : $x = \left\{\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right\}.$

Para que el Proceso de solución sea mucho más sencillo es conveniente resolver las inecuaciones que surgen al aplicar la definición de valor absoluto, como se muestra en el siguiente ejemplo:

3) $|x - 1| + |x - 2| = 1$

Aplicando la definición se tiene:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{si } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1), \text{si } x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{si } x \geq 1 \\ -x + 1, \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, \text{si } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2), \text{si } x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x - 2| = \begin{cases} x - 2, \text{si } x \geq 2 \\ -x + 2, \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Entonces, resolviendo cada uno de los sistemas mixtos se tiene:

a) $\begin{cases} x - 1 + x - 2 = 1 \\ x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$

Solución a $= \{2\} \cap [1, \infty) \cap [2, \infty) = \{2\}$.

b) $\begin{cases} -x + 1 - x = 1 \\ x < 1 \\ x < 2 \end{cases}$

$2x = -2 \Rightarrow x = 1$

Solución b $= \{1\} \cap (-\infty, +1) \cap (-\infty, 2) = \varnothing$.

c) $\begin{cases} x - 1 - x + 2 = 1 \\ x \geq 1 \\ x < 2 \end{cases}$

$x - 1 - x + 2 = 1 \Rightarrow 1 = 1$

Esto significa que x puede ser cualquier número real, pero la solución de c es: $R \cap [1, \infty) \cup (-\infty, 2) \Rightarrow x \in [1,2)$

$$d) \begin{cases} -x + 1 + x - 2 = 1 \\ x < 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$-x+1+x-2=1$

$-1 \neq 1$ Solución $\varnothing$

Solución final $=$ Sol a $\cup$ Sol b $\cup$ Sol c $\cup$ Sol d

Solución final $= \{2\} \cup [1,2) = [1,2]$

Ahora se resuelven algunos ejemplos usando el método II.

1) $|3x - 7| = 10$

Ambos miembros son positivos, entonces se resuelve:

$$(3x - 7)^2 = (10)^2$$

$$9x^2-42x+19=100$$

$$9x^2-42x-51=0$$

$$x = \frac{42 \pm \sqrt{(42)^2 - 4(9)(-51)}}{2(9)} = \frac{42 \pm \sqrt{3600}}{18} = \frac{42 \pm 60}{18}$$

$$x_1 = \frac{102}{18} = \frac{17}{3}; \quad x_2 = -\frac{18}{18} = -1$$

$$\text{Solución: } x = \left\{-1, \frac{17}{3}\right\}.$$

Observe que al aplicar el método II a los ejemplos (2) y (3) resueltos anteriormente con el método I, el proceso de resolución es mucho más complejo porque se tiene que elevar dos veces al cuadrado y además realizar todas las consideraciones para mantener la equivalencia durante todo el proceso de transformación[5].

2) $x^2 + 2x + 3 = 3|x + 1|$

Para elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación deben ser positivos, por lo que esta ecuación es equivalente al siguiente sistema mixto:

$$\begin{cases} (x^2 + 2x + 3)^2 = (3(x + 1))^2 & (1) \\ x^2 + 2x + 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo (1):

$x^4+4x^2+9+4x^3+12x+6x^2=9(x^2+2x+1)$

$x^4+4x^2+9+4x^3+12x+6x^2=9x^2+18x+9$

$x^4+4x^3+x^2-6x=0$

$x(x^3+4x^2+x-6)=0$

$x(x-1)(x+3)(x+2)=0$

$x = \{0, 1, -3, -2\}.$

Resolviendo (2):

$x^2+2x+3 \geq 0$ $\qquad$ $b^2-4ac=(2)^2-4(1)(3)=4-12<0$

[5] Ver en el Capítulo III Ecuaciones.

$\forall x \in R : x^2 + 2x + 3 > 0$ Solución : $x \in R$.

Solución Final $= \{0,1,-3,-2\} \cap R = \{-3,-2,0,1\}$.

3) INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Para resolver inecuaciones que contienen la variable bajo el signo de valor absoluto pueden emplearse varios métodos:

I) **Aplicando la definición de valor absoluto** se elimina el signo de módulo y se resuelven las inecuaciones correspondientes, de una manera similar a la usada en el método de resolución de ecuaciones.

II) **Aplicando las propiedades 6,7,8 y 9** según sea el caso, tal como se muestra en los ejemplos. Es importante para resolver la inecuación que contiene la variable bajo el signo de módulo en la forma correcta, identificar cuando la solución se debe obtener por unión o por intersección de las soluciones de las inecuaciones que surgen al aplicar la propiedad.

III) **Elevar ambos miembros de la inecuación al cuadrado**, este método **<u>únicamente</u>** puede ser aplicado cuando **<u>ambos</u>** **<u>miembros</u>** de la inecuación son positivos (o ambos negativos y se invierte el sentido de la desigualdad)[6].

[6] Ver propiedades de las desigualdades, en el Capítulo V Inecuaciones.

A continuación se muestran algunos ejemplos resueltos con el método I

1) $|3 - 2x| < 1$ (I)

Aplicando la definición:

$$|3 - 2x| = \begin{cases} 3 - 2x, \text{ si } 3 - 2x \geq 0 \\ -(3 - 2x), \text{ si } 3 - 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |3 - 2x| = \begin{cases} 3 - 2x, \text{ si } x \leq \dfrac{3}{2} \\ -3 + 2x, \text{ si } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

La solución de la inecuación (I) es la solución del siguiente conjunto de sistemas:

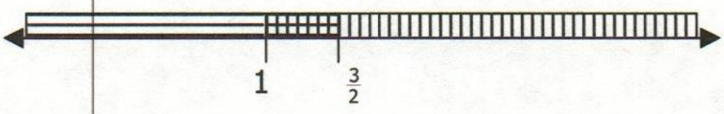
a) $\begin{cases} 3 - 2x < 1 \\ x \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3 + 2x < 1 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Entonces se resuelve cada sistema y la solución de (I) es la "**<u>unión</u>**" de la solución del sistema (a) con la solución del sistema (b).

Resolviendo a:

$3 - 2x < 1 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1.$

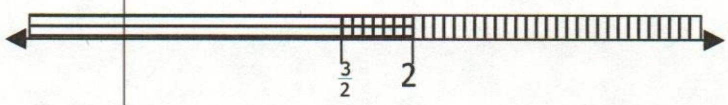
Sol a : $x \in (1, \infty) \cap \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right] \Rightarrow x \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right].$



Resolviendo b:

$$-3 + 2x < 1 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2.$$

$$\text{Sol b}: x \in (-\infty, 2) \cap \left(\frac{3}{2}, \infty\right) \Rightarrow x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$



$$\text{Solución final} = \text{Sol a} \cup \text{Solb} = \left(1, \frac{3}{2}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) = (1,2).$$

2) $\left|5 - x^{-1}\right| \geq 1 \quad (\mathrm{I}).$

Aplicando la definición:

$$\left|5 - x^{-1}\right| = \begin{cases} 5 - x^{-1}, \text{ si } 5 - x^{-1} \geq 0 \\ -\left(5 - x^{-1}\right), \text{ si } 5 - x^{-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left|5 - x^{-1}\right| = \begin{cases} 5 - \dfrac{1}{x}, \text{ si } x < 0 \wedge x \geq \dfrac{1}{5} \\ 5 - \dfrac{1}{x}, \text{ si } 0 < x < \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

La solución de (I) es la solución del siguiente conjunto de sistemas:

$$\text{a)} \begin{cases} 5 - \dfrac{1}{x} \geq 1 \\ x < 0 \\ x \geq \dfrac{1}{5} \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \begin{cases} -5 + \dfrac{1}{x} \geq 1 \\ 0 < x < \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

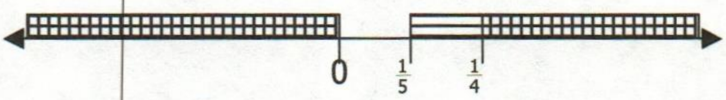
Resolviendo a:

$$5-\frac{1}{x}\geq 1 \Rightarrow 4-\frac{1}{x}\geq 0 \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{4}}{x}\geq 0.$$

++++|---------|+++++++

0 1/4

$$\text{Sol a}: x\in\left\{(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{4},\infty\right)\right\}\cap(-\infty,0)\cap\left[\frac{1}{5},\infty\right).$$



$$\text{Sol a}: x\in(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{4},\infty\right).$$

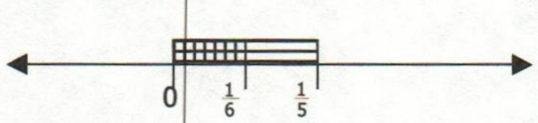
Resolviendo b:

$$-5+\frac{1}{x}\geq 1 \Rightarrow -6+\frac{1}{x}\geq 0 \Rightarrow \frac{x-\frac{1}{6}}{x}\leq 0$$

+++++|-------|+++++

0 1/6

$$\text{Sol b}: x\in\left(0,\frac{1}{6}\right]\cap\left(0,\frac{1}{5}\right).$$



$$\text{Sol b}: x \in \left(0, \frac{1}{6}\right].$$

$$\text{Sol Final} = \text{Sol a} \cup \text{Sol b}.$$

$$\text{Sol Final}: x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right).$$

3) $|x - 3| \geq x - 2 \qquad (\text{I}).$

Aplicando la definición:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ si } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3), \text{ si } x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ si } x \geq 3 \\ -x + 3, \text{ si } x < 3 \end{cases}$$

La solución de (I) es la solución del siguiente conjunto de sistemas:

a) $\begin{cases} x - 3 \geq x - 2 \\ x \geq 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + 3 \geq x - 2 \\ x < 3 \end{cases}$

Resolviendo a:

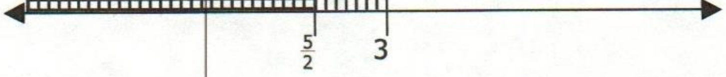
$x - 3 \geq x - 2 \Rightarrow 0 \geq 1 \Rightarrow \text{Solución} \varnothing$

$$\text{Sol a}: x \in \varnothing \cap [3, \infty) = \varnothing$$

Resolviendo b:

$-x + 3 \geq x - 2 \Rightarrow 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2}.$

$$\text{Sol b} : x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \cap (-\infty, 3) \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$$



$$\text{Solución Final} = \text{Sol a} \cup \text{Sol b}.$$

$$\text{Solución Final} : x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right] \cup \varnothing \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$$

4) $\left|x^2 + x + 10\right| \leq 3x^2 + 7x + 2 \qquad (I)$

Aplicando la definición:

$$\left|x^2 + x + 10\right| = \begin{cases} x^2 + x + 10, \text{ si } x^2 + x + 10 \geq 0 \\ -\left(x^2 + x + 10\right), \text{ si } x^2 + x + 10 < 0 \end{cases}$$

Factorizando x^2+x+10.

$b^2-4ac=1-4(1)(10)<0$ no tiene raíces reales, por lo que $\forall x \in R : x^2 + x + 10 > 0$.

Entonces $\left|x^2 + x + 10\right| = x^2 + x + 10$.

Por lo tanto (I) es equivalente a:

$x^2+x+10 \leq 3x^2+7x+2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2+6x-8 \geq 0 \Rightarrow x^2+3x-4 \geq 0$

$(x+4)(x-1) \geq 0$

$$\text{Solución} : x \in (-\infty, -4] \cup [1, \infty).$$

A continuación se muestran algunos ejemplos resueltos con el método II

1) $|3-2x| < 1 \qquad (\mathrm{I})$

La propiedad que aplica en este caso es la 7, entonces:

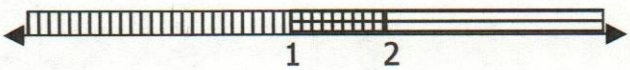
a) $3\text{-}2x<1 \qquad\qquad \wedge \qquad\qquad$ b) $3\text{-}2x>\text{-}1$

Solución $(\mathrm{I}) = \mathrm{Sol}(a) \cap \mathrm{Sol}(b)$, es decir, se debe resolver el sistema de inecuaciones $\begin{cases} 3-2x < 1 \\ 3-2x > 1 \end{cases}$.

a) $-2x < -2 \Rightarrow x > 1 \qquad \mathrm{Sol\,a} : x \in (1, \infty)$.

b) $3-2x > -1 \Rightarrow -2x > 4 \Rightarrow x < 2 \qquad \mathrm{Sol\,b} : x \in (-\infty, 2)$.

$$\text{Solución Final} : x \in (-\infty, 2) \cap (1, \infty) \Rightarrow x \in (1, 2).$$



2) $|5-x^{-1}| \geq 1 \qquad (\mathrm{I})$.

La propiedad que aplica en este caso es la 8, entonces

a) $5\text{-}x^{-1} \geq 1 \qquad\qquad \vee \qquad\qquad$ b) $5\text{-}x^{-1} \leq \text{-}1$.

Solución $(\mathrm{I}) = \mathrm{Sol}(a) \cup \mathrm{Sol}(b)$, es decir se debe resolver el conjunto de inecuaciones $5\text{-}x^{-1} \geq 1$; $5\text{-}x^{-1} \leq \text{-}1$, que también suele escribirse así: $\left[\begin{array}{l} 5-x^{-1} \geq 1 \\ 5-x^{-1} \leq -1 \end{array}\right.$

a) $5 - x^{-1} \geq 1 \Rightarrow 5 - \frac{1}{x} \geq 1 \Rightarrow 5 - \frac{1}{x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{4x - 1}{x} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{x - \frac{1}{4}}{x} \geq 0.$

$$\begin{array}{c} +++++++++|--------|++++++++ \\ \longleftrightarrow \\ 0 \qquad \tfrac{1}{4} \end{array}$$

Sol a : $x \in (-\infty,0) \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$

b) $5 - x^{-1} \leq -1 \Rightarrow 5 - \frac{1}{x} \leq -1 \Rightarrow 5 - \frac{1}{x} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{6x - 1}{x} \leq 0$

$\Rightarrow \frac{x - \frac{1}{6}}{x} \leq 0.$

$$\begin{array}{c} ++++++++++|------------|++++++ \\ \longleftrightarrow \\ 0 \qquad \tfrac{1}{6} \end{array}$$

Sol b : $x \cup \left(0, \frac{1}{6}\right).$

Solución Final : $x \in (-\infty,0) \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right) \cup \left(0, \frac{1}{6}\right) \Rightarrow$

$x \in (-\infty,0) \cup \left(0, \frac{1}{6}\right) \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right).$

Observe que el ejemplo 3 que se resolvió usando el método I, no puede ser resuelto usando la propiedad 8, porque x-2 sólo es positivo si x>2, mientras que el ejemplo 4 si podría ser resuelto usando la propiedad 6, porque $\forall x \in R : x^2 + x + 10 > 0.$

A continuación se muestran unos ejemplos usando el método III

1) $|3 - 2x| < 1$

Como ambos miembros son positivos se puede elevar al cuadrado, entonces:

$$|3 - 2x|^2 < 1 \Leftrightarrow (3 - 2x)^2 < 1.$$

$$9 - 12x + 4x^2 < 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 8 < 0.$$

$$x^2-3x+2<0.$$

$$(x-2)(x-1)<0.$$

$$x \in (1,2).$$

2) $|5 - x^{-1}| \geq 1.$

Como ambos miembros son positivos se puede elevar al cuadrado, entonces:

$$|5 - x^{-1}|^2 \geq 1 \Rightarrow \left(5 - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 1.$$

$$25 - \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{10}{x} + 24 \geq 0.$$

$$\frac{1 - 10x + 24x^2}{x^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{6}\right)}{x^2} \geq 0.$$

++++++++ | ++++++++ | -------------- | +++++++

0 1/6 1/4

$$\text{Solución : } x \in (-\infty,0) \cup \left(0, \frac{1}{6}\right] \cup \left(\frac{1}{4}, \infty\right].$$

Observe que el ejemplo 3: $|x - 3| \geq x - 2$, que se resolvió usando el método I, no puede ser resuelto elevando al cuadrado, porque x-2 sólo es positivo si x>2, mientras que el ejemplo 4 si podría ser resuelto aplicando este método, pero se deben resolver dos trinomios al cuadrado, por lo que algebraicamente es mucho más sencillo el proceso de resolución usando la definición.

Este método sólo puede ser usado cuando <u>ambos miembros son siempre positivos</u> (o ambos negativos y se invierte el signo de la desigualdad al elevar al cuadrado).

EJERCICIOS RESUELTOS

A) Resolver las siguientes ecuaciones

1) $\left|x^2 - 9\right| + \left|x^2 - 4\right| = 5$

Aplicando la definición:

$$\left|x^2 - 9\right| = \begin{cases} x^2 - 9, \text{si } x^2 - 9 \geq 0 \\ -\left(x^2 - 9\right), \text{si } x^2 - 9 < 0 \end{cases}.$$

Se halla para que valores de x, se cumple $x^2 - 9 \geq 0$; $x^2 - 9 < 0$.

$x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

$x^2 - 9 < 0$ es el complemento de $x^2 - 9 \geq 0$ por lo que la solución de $x^2 - 9 < 0$ es $x \in (-3, 3)$.

++++++|------------|++++++

-3 3

Entonces al aplicar la definición y resolver las inecuaciones que ésta involucra, $\left|x^2 - 9\right|$ se puede expresar así.

$$\left|x^2 - 9\right| = \begin{cases} x^2 - 9, \text{si } x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 9, \text{si } -3 < x < 3 \end{cases}$$

Análogamente:

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, \text{si } x^2 - 4 \geq 0 \\ -(x^2 - 4), \text{si } x^2 - 4 < 0 \end{cases}.$$

Resolviendo:

$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-2] \cup [2, \infty)$

$x^2 - 4 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \leq 0 \Rightarrow x \in (-2,2)$

Entonces $|x^2 - 4|$ se expresa así:

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, \text{si } x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 4, \text{si } -2 < x < 2 \end{cases}.$$

Entonces los sistemas mixtos que se deben resolver se reducen a la solución de la ecuación planteada y a la intersección de esa solución con las condiciones impuestas para x según la definición para la expresión bajo el signo de módulo.

a) $\begin{cases} x^2 - 9 + x^2 - 4 = 5 \\ x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ x \leq -2 \vee x \geq 2 \end{cases}$

$2x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0.$

$x = 3 \vee x = -3.$

Solución a: $x \in \{-3,3\} \cap \{(-\infty,-3] \cup [3, \infty)\} \cap \{(-\infty,-2] \cup [2, \infty)\}$

Solución a : $x \in \{-3,3\}$

b) $\begin{cases} -x^2 + 9 - x^2 + 4 = 5 \\ -3 < x < 3 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$

$-2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0.$

$x = 2 \vee x = -2.$

$$\text{Solución b}: x \in \{-2,2\} \cap (-3,3) \cap (-2,2) \Rightarrow$$

$$\text{Solución b}: \varnothing$$

c) $\begin{cases} -x^2 + 9 + x^2 - 4 = 5 \\ -3 < x < 3 \\ x \le -2 \vee x \ge 2 \end{cases}$

$-x^2 + 9 + x^2 - 4 = 5 \Rightarrow 5 = 5 \Rightarrow x \in R$, pero

$$\text{Solución c}: x \in R \cap (-3,3) \cap \{(-\infty,-2] \cup [2,\infty)\} \Rightarrow$$

$$\text{Solución c}: x \in (-3,-2] \cup [2,3)$$

d) $\begin{cases} x^2 - 9 - x^2 + 4 = 5 \\ x \le -3 \vee x \ge 3 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$

$x^2-9-x^2+4=5 \Rightarrow -5 \ne 5$. Entonces la solución d : $\varnothing$

Solución Final $=$ Sol a $\cup$ Sol b $\cup$ Sol b $\cup$ Sol c $\cup$ Sol d

Solución Final : $x \in \{-3,3\} \cup (-3,2] \cup [2,3) \Leftrightarrow x \in [-3,-2] \cup [2,3].$

Comentario

Para aplicar de una forma correcta este método de resolución es importante tener bien claro los siguientes aspectos:

1)Definición de valor absoluto

2)Resolución de inecuaciones algebraicas

3)Concepto de sistema de inecuaciones o de sistema mixto

4)Concepto de conjunto de sistemas

En este caso específico, ambos miembros de la ecuación son positivos, entonces se puede resolver elevando ambos miembros al cuadrado.

2) $\left|\dfrac{1 - x}{1 + x}\right| = \dfrac{1}{2}.$

$$\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{1 - 2x + x^2}{(1 + x)^2} - \frac{1}{4} = 0.$$

$$\frac{4 - 8x + 4x^2 - (1 + 2x + x^2)}{4(1 + x)^2} = 0.$$

$$\frac{3x^2 - 10x + 3}{(1 + x)^2} = 0.$$

$$\frac{3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)}{(1 + x)^2} = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = \frac{1}{3}.$$

$$x = \left\{3, \frac{1}{3}\right\}.$$

Comentario

Al igual que en el ejemplo anterior, ambos miembros de la ecuación son positivos, por lo que ésta puede ser resuelta elevando ambos miembros al cuadrado. Este ejemplo se resuelve por este método para que el estudiante cuente con una muestra variada de todos los métodos de resolución posibles, según sea el caso.

Cabe destacar que el uso de la definición puede aplicarse siempre, tal como se explicó en resolución de ecuaciones con valor absoluto, pero en mucho casos el método de elevar ambos miembros al cuadrado simplifica mucho el proceso de resolución, por supuesto, sólo puede ser aplicado cuando ambos miembros son positivos o ambos negativos.

B) Resolver las siguientes inecuaciones

1) $|x+1|>2$

Esta inecuación puede ser resuelta por cualquiera de los tres métodos explicados:

a) Elevando ambos miembros al cuadrado porque los dos son positivos, así:

$$(x+1)^2 > 4 \Rightarrow x^2+2x+1 > 4 \Rightarrow x^2+2x-3>0 \Rightarrow (x+3)(x-1)>0$$

+++++++|---------|+++++++

-3 1

Solución: $x \in (-\infty,-3) \cup (1,\infty)$

b) Aplicando la propiedad 8 de valor absoluto, así:

$$x-1>2 \quad \vee \quad x+1<-2$$

$$x>1 \quad \vee \quad x<-3$$

Solución: $x \in (-\infty,-3) \cup (1,\infty)$

c) Aplicando la definición, así:

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geq -1 \\ -x-1, & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

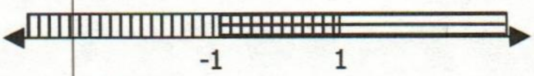
Se resuelve el conjunto de sistemas:

$$(A)\begin{cases} x+1 > 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} -x-1 > 2 \\ x < -1 \end{cases}$$

Resolviendo (A)

$$\begin{cases} x+1 > 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

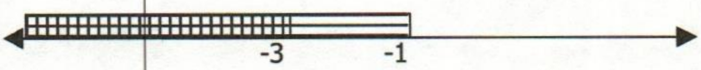
Solución (A)$=(1,\infty) \cap [-1,\infty) \Rightarrow$Solución (A): $x \in (1,\infty)$



Resolviendo (B)

$$\begin{cases} -x-1 > 2 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x < -1 \end{cases}$$

Solución (B)$=(-\infty,-3) \cap (-\infty,-1) \Rightarrow$Solución (B): $x \in (-\infty,-3)$



Solución de la inecuación (1)=Solución (A) $\cup$ Solución (B)

Solución: $x \in (-\infty,-3) \cup (1,\infty)$

Comentario

Las inecuaciones que tienen ambos miembros positivos pueden ser resueltas por cualquiera de los tres métodos. Por lo tanto es conveniente desarrollar las habilidades correspondientes para seleccionar el método de resolución más simple que puede ser aplicado en un caso como este, o bien usar el método de resolución con el que se sienta más cómodo siempre y cuando pueda ser aplicado.

2) $\left|1 - x^2\right| \leq 2 \quad$ (I).

Como 2 es número positivo esta inecuación puede ser resuelta aplicando la propiedad 6, así:

(a) $1-x^2 \leq 2$ $\quad \wedge \quad$ (b) $1-x^2 \geq -2$

$x^2+1 \geq 0$ $\qquad$ $x^2-3 \leq 0$

$\forall x \in R : x^2 + 1 > 0$

$$\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) \leq 0.$$

Sol a : $x \in R$.

+++++|--------|++++

$-\sqrt{3}$ $\quad$ $\sqrt{3}$

Sol b : $x \in \left[- \sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$.

$$\text{Solución (I)} : \text{Sol a} \cap \text{Sol b}$$

$$\text{Solución (I)} : x \in R \cap \left[- \sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$$

$$x \in \left[- \sqrt{3}, \sqrt{3}\right].$$

Comentario

Observe que en este ejemplo puede ser aplicada la propiedad porque 2 es un número positivo. En este caso la solución de la inecuación (I) se obtiene a través de la **intersección** de la solución de cada una de las inecuaciones que se plantean al aplicar la propiedad (ver al inicio de este capítulo, otras propiedades del valor absoluto).

3) $|x+8| \leq 3x-1$

En este ejemplo **no** se puede elevar ambos miembros al cuadrado, ni se puede aplicar la propiedad 6, porque 3x-1 es positivo si $x>1/3$, y es negativo si $x<1/3$. Por lo tanto la única vía de resolución para esta inecuación es aplicar la definición. Así:

$$|x+8| = \begin{cases} x + 8, & \text{si } x \geq -8 \\ -x - 8, & \text{si } x < -8 \end{cases}$$

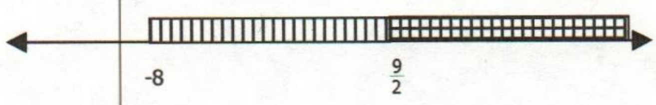
La solución de la inecuación (3) es la solución del siguiente conjunto de sistemas

$$(A)\begin{cases} x + 8 \leq 3x - 1 \\ x \geq -8 \end{cases} \quad ; \quad (B)\begin{cases} -x - 8 \leq 3x - 1 \\ x < -8 \end{cases}$$

Resolviendo (A)

$$\begin{cases} x + 8 \leq 3x - 1 \\ x \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 9 \\ x \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{9}{2} \\ x \geq -8 \end{cases}$$

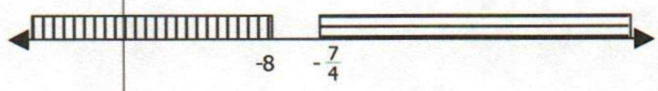
$$\text{Solución (A)}: x \in \left[\frac{9}{2}, \infty\right) \cap [-8, \infty) \Rightarrow \text{Solución (A)}: x \in \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$$



Resolviendo (B)

$$\begin{cases} -x - 8 \leq 3x - 1 \\ x < -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq -7 \\ x < -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{7}{4} \\ x < -8 \end{cases}$$

$$\text{Solución (B)}: x\left[-\frac{7}{4}, \infty\right) \cap (-\infty, -8) \Rightarrow \text{Solución (B)}: \varnothing$$



Solución final = Solución (A) $\cup$ Solución (B)

$$\text{Solución final} = x \in \left[\frac{9}{2}, \infty\right) \cup \varnothing \Rightarrow x \in \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$$

Comentario

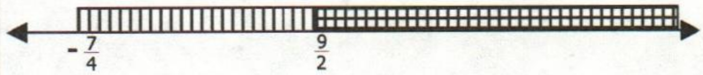
Es una práctica común el resolver este tipo de inecuaciones de una manera **errónea** aplicando la propiedad 6 de valor absoluto, como se muestra a continuación:

$$|x+8| \leq 3x-1 \Rightarrow \quad -3x+1 \leq x+8 \quad \wedge \quad x+8 \leq 3x-1$$

$$4x \geq -7 \qquad\qquad 2x \geq 9$$

$$x \geq -\frac{7}{4} \qquad\qquad x \geq \frac{9}{2}$$

$$\text{Solución: } x \in \left[-\frac{7}{4}, \infty\right) \cap \left[\frac{9}{2}, \infty\right) \Rightarrow x \in \left[\frac{9}{2}, \infty\right)$$



La razón por la que se ha extendido esta práctica equivocada es porque en muchos casos se llega a la solución correcta usando un método que matemáticamente no es válido, pues las propiedades de la 6 a las 9 tienen como hipótesis que el número "a" es positivo.

En el siguiente ejemplo se muestra un caso en el que no se llega a la respuesta correcta usando la propiedad 6 y posteriormente se justifica de una manera general el por qué si se llega a la respuesta en muchos casos.

4) $|x^2-7x+10| \leq x^2-3x-7$

Aplicando la definición se tiene:

$$|x^2-7x+10| = \begin{cases} x^2 - 7x + 10, & \text{si } x^2 - 7x + 10 \geq 0 \\ -x^2 + 7x - 10, & \text{si } x^2 - 7x + 10 < 0 \end{cases}$$

Resolviendo cada inecuación de la definición para obtener los valores de x, se tiene:

$X^2-7x+10 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) \geq 0$

+++++|------|++++++, entonces $x \leq 2$ v $x \geq 5$

2 5

$X^2-7x+10<0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5)<0$, entonces $2<x<5$

Por lo que

$$|x^2-7x+10| = \begin{cases} x^2 - 7x + 10, & \text{si} \quad x \le -2 \vee x \ge 5 \\ -x^2 + 7x - 10, & \text{si} \quad -2 < x < 5 \end{cases}$$

La solución de la inecuación (4) es la solución del siguiente conjunto de sistemas:

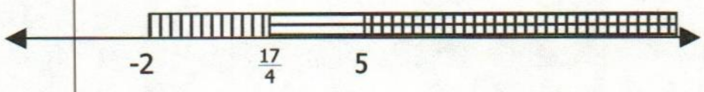
$$(A)\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \le x^2 - 3x - 7 \\ x \le -2 \vee x \ge 5 \end{cases};(B)\begin{cases} -x^2 + 7x - 10 \le x^2 - 3x - 7 \\ -2 < x < 5 \end{cases}$$

Resolviendo (A)

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 \le x^2 - 3x - 7 \\ x \le -2 \vee x \ge 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x \le -17 \\ x \le -2 \vee x \ge 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{17}{4} \\ x \le -2 \vee x \ge 5 \end{cases}$$

Solución (A): $x \in \left[\dfrac{17}{4}, \infty\right) \cap \{(-\infty,-2] \cup [5, \infty)\} \Rightarrow x \in [5, \infty)$



Resolviendo (B):

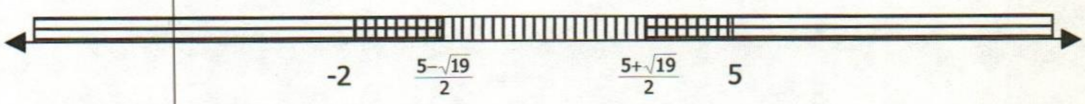
$$\begin{cases} -x^2 + 7x + 10 \le x^2 - 3x - 7 \\ -2 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 10x - 3 \le 0 \\ -2 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 10x + 3 \ge 0 \\ -2 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \dfrac{5 + \sqrt{19}}{2}\right)\left(x - \dfrac{5 - \sqrt{19}}{2}\right) \ge 0 \\ -2 < x < 5 \end{cases}$$

$$\text{+++++++++++} \mid \text{-------------------------} \mid \text{+++++++++}$$

$$\qquad \frac{5-\sqrt{19}}{2} \qquad\qquad\qquad \frac{5+\sqrt{19}}{2}$$

$$\text{Solución (B)}: x \in \left\{ \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{19}}{2} \right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{19}}{2}, \infty \right) \right\} \cap \left(-2{,}5 \right)$$



$$\text{Solución (B)}: x \in \left(-2, \frac{5-\sqrt{19}}{2} \right] \cup \left[\frac{5-\sqrt{19}}{2}, 5 \right)$$

Solución Final = Solución (A) $\cup$ Solución (B)

$$\text{Solución Final}: x \in \left[5, \infty\right) \cup \left\{ \left(-2, \frac{5-\sqrt{19}}{2} \right] \cup \left[\frac{5-\sqrt{19}}{2}, 5 \right) \right\}$$

$$\text{Solución Final}: x \in \left(-2, \frac{5-\sqrt{19}}{2} \right] \cup \left[\frac{5-\sqrt{19}}{2}, \infty \right)$$

Comentario

Esta inecuación sólo puede ser resuelta aplicando la definición de valor absoluto.

Una práctica muy común, a pesar de que es **errónea**, es resolver la inecuación como se muestra a continuación:

Aplicando la propiedad 6 de valor absoluto se tiene:

$|x^2-7x+10| \leq x^2 -3x-7 \Leftrightarrow -x^2+3x+7 \leq x^2-7x+10 \leq x^2 -3x-7$

Es decir, la solución de la inecuación es la solución del sistema:

$$\begin{cases} -x^2 + 3x + 7 \leq x^2 - 7x + 10 & (1) \\ x^2 - 7x + 10 \leq x^2 - 3x - 7 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo (1):

$$-2x^2+10x-3 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2-10x+3 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{5+\sqrt{19}}{2}\right)\left(x - \frac{5-\sqrt{19}}{2}\right) \geq 0$$

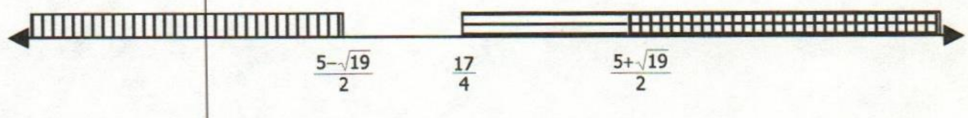
Solución (1): $x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{19}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{19}}{2}, \infty\right)$

Resolviendo (2):

$$-4x \leq -17 \Leftrightarrow x \geq \frac{17}{4} \Rightarrow \text{Solución (2): } x \in \left[\frac{17}{4}, \infty\right)$$

Solución Final = Solución(1) $\cap$ Solución (2)

Solución Final: $x \in \left\{\left(-\infty, \frac{5-\sqrt{19}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{19}}{2}, \infty\right)\right\} \cap \left[\frac{17}{4}, \infty\right)$



Solución Final: $x \in \left[\frac{5+\sqrt{19}}{2}, \infty\right)$

Observe que en este caso no se obtuvo la respuesta correcta. Entonces surgen las preguntas, qué ocurre, por qué en algunos casos se cumple.

La respuesta a estas interrogantes se aclara de una manera general en el siguiente análisis lógico:

Sea la inecuación $|f(x)| \leq g(x)$ (I)

que se resuelve de la siguiente forma:

a) Aplicando la definición

$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$, por lo que la solución de la inecuación (I) es la solución del siguiente conjunto de sistemas de inecuaciones:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} -f(x) \leq g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$$

La solución de este conjunto de inecuaciones viene dada por la siguiente proposición compuesta:

$$\lfloor (f(x) \leq g(x)) \wedge f(x) \geq 0 \rfloor \vee \lfloor (-f(x) \leq g(x)) \wedge f(x) < 0 \rfloor \qquad \text{(A)}$$

Que se puede traducir a un lenguaje lógico identificando cada una de las proposiciones simples de la siguiente forma:

P: $f(x) \leq g(x)$

Q: $f(x) \geq 0 \Rightarrow \overline{Q} : f(x) < 0$

R: $-f(x) \leq g(x)$

Entonces (A) se puede escribir así:

$$(P \wedge Q) \vee (R \wedge \overline{Q}) \qquad \text{(A.1)}$$

b) Aplicando la propiedad 6 de valor absoluto

$$|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -g(x) \leq f(x) \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

La solución de este sistema de inecuaciones viene dada por:

$$\left(-g(x) \leq f(x)\right) \wedge \left(f(x) \leq g(x)\right) \qquad (B)$$

Observe que $f(x) \leq g(x)$ es la proposición P, y, $-g(x) \leq f(x)$ es la proposición R. Por lo que (B) traducido a un lenguaje lógico es:

$$P \wedge R \qquad (B.1)$$

Si el segundo método conduce a la respuesta correcta, entonces las proposiciones (A.1) y (B.1) deben ser equivalentes, es decir la proposición:

$$\left(P \wedge Q\right) \vee \left(R \wedge \overline{Q}\right) \Leftrightarrow P \wedge R \quad (C)$$

debe ser una tautología.

Al realizar la tabla de verdad de la proposición compuesta (C), se tiene:

P	Q	R	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$ (M)	$R \wedge \overline{Q}$ (N)	(M)v(N)	$P \wedge R$	(c)
V	V	V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F	V

CONCLUSIONES

La proposición (C) no es una tautología, por lo tanto la propiedad no puede ser aplicada como un método de resolución a menos que el miembro que no contiene módulo sea siempre positivo.

Observe que en el 75% de los casos la proposición es verdadera, esta es la causa por la cual es tan común esta práctica errónea. El ejemplo 3 es una muestra de ese 75% , mientras que el ejemplo 4, es una muestra del 25% de los casos en los que la proposición es falsa, por este motivo no se llegó a la respuesta correcta.

Esta situación se repite con el resto de las propiedades 7,8 y9 de valor absoluto, por lo tanto éstos sólo deben aplicarse cuando se cumple la condición a>0, de los contrario se corre el riesgo de obtener una respuesta incorrecta.

5) $x^2 + 2|x| - 3 \leq 0$

Se resuelve aplicando la definición:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La solución de la inecuación (4) es la solución del siguiente conjunto de sistemas de inecuaciones:

$$(A)\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad ; \quad (B)\begin{cases} x^2 + 2(-x) - 3 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

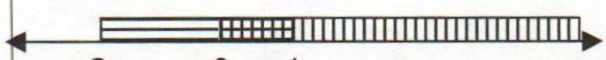
Resolviendo (A):

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 1) \leq 0 \ (A.1) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Estudio signos de (A.1): +++++++|-------------|+++++++

-3 1

Solución (A): $x \in [-3,1] \cap [0, \infty) \Rightarrow$ Solución (A): $x \in [0,1]$



-3 0 1

Resolviendo (B):

$$\begin{cases} x^2 + 2(-x) - 3 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)(x + 1) \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Estudio signos (B.1): +++++++|-------------|+++++++

-1 3

Solución (B): $x \in [-1,3] \cap (-\infty,0) \Rightarrow$ Solución (B): $x \in [-1,0)$

-1 0 3

Solución Final = Solución (A) $\cup$ Solución (B)

Solución Final: $x\lfloor 0,1\rfloor \cup \lfloor -1,0) \Rightarrow$ Solución: $x\in[-1,1]$

6) $|2x+1|-|x-2| \geq 1$

Se resuelve aplicando la definición:

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \geq -\dfrac{1}{2} \\ -2x-1, & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad |x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{si } x \geq 2 \\ -x+2, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Entonces resolver la inecuación (6) se reduce al resolver el siguiente conjunto de sistemas:

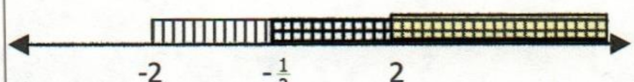
$$(A)\begin{cases} 2x+1-(x-2) \geq 1 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} -2x-1-(-x+2) \geq 1 \\ x < -\dfrac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases}$$

$$(C)\begin{cases} 2x+1-(-x+2) \geq 1 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x < 2 \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} -2x-1-(x-2) \geq 1 \\ x < -\dfrac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Resolviendo (A):

$$\begin{cases} 2x+1-(x-2) \geq 1 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x \geq 2 \end{cases}$$

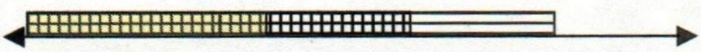
Solución (A): $x\in\left[-2,\infty\right)\cap\left[-\frac{1}{2},\infty\right)\cap\left[2,\infty\right)\Leftrightarrow x\in\left[2,\infty\right)$



Resolviendo (B):

$$\begin{cases}-2x-1-(-x+2)\geq 1\\ x<-\dfrac{1}{2}\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x\geq 4\\ x<-\dfrac{1}{2}\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq -4\\ x<-\dfrac{1}{2}\\ x<2\end{cases}$$

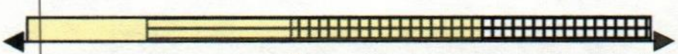
Solución (B): $x\in\left(-\infty,-4\right]\cap\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cap\left(-\infty,2\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-4\right)$



Resolviendo (C):

$$\begin{cases}2x+1-(-x+2)\geq 1\\ x\geq -\dfrac{1}{2}\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x\geq 2\\ x\geq -\dfrac{1}{2}\\ x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq \dfrac{2}{3}\\ x\geq -\dfrac{1}{2}\\ x<2\end{cases}$$

Solución (C): $x\in\left[\frac{2}{3},\infty\right)\cap\left[-\frac{1}{2},\infty\right)\cap\left(-\infty,2\right)\Leftrightarrow x\in\left[\frac{2}{3},2\right)$



La solución de (D) es $\varnothing$, porque los conjuntos $x < -\frac{1}{2} \wedge x \geq 2$ no tiene elementos comunes.

Solución Final = Solución (A) $\cup$ Solución (B) $\cup$ Solución (C) $\cup$ Solución (D)

Solución Final: $x \in [2, \infty) \cup (-\infty, -4) \cup \left[\frac{2}{3}, 2\right) \Leftrightarrow$

$$x \in (-\infty, -4) \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Resolver las siguientes ecuaciones

1) $|2x| = 3$

2) $|x|+x^3=0$

3) $(x-1)(|x|-1)=-\frac{1}{2}$

4) $|3x + 5| = 1$

5) $|x - 3| = -2$

6) $|2x + 1| = -x$

7) $\left|\frac{2x - 1}{x + 1}\right| = 3$

8) $\frac{4x - 8}{|x - 2|} = x$

9) $\frac{7x + 4}{5} - x = \frac{|3x - 5|}{2}$

10) $7-4x=|4x-7|$

11) $|3x-5|=5-3x$

12) $|x^2-3x+3|=2$

13) $(x+1)^2-2|x+1|+1=0$

14) $|x-1|-|x-2|=1$

15) $|x + 3| = |2x + 1|$

16) $\left|\frac{3 - x}{2x + 5}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$

17) $|x^2 - 4| = -2x + 4$

18) $\left|\frac{x - 3 + x^2}{1 - x} = x\right|$

19) $\left|\frac{-\frac{1}{2} - x^2}{1 - \frac{1}{2}x^2}\right| = \frac{4}{3}$

20) $\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} = 1$

B) Demuestre que

1) $|a| = \sqrt{a^2}$

2) $|ab| = |a||b|$

3) $|x - 3| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{x + 4} < \dfrac{1}{6}$

4) $|x - 1| < 2 \Rightarrow 0 \leq |2x - 3| < 5$

C) Resolver las siguientes inecuaciones

1) $|x| < 5$

2) $|x| \geq \sqrt{2}$

3) $|x - 4| < 1$

4) $|x-1|<5$

5) $|2x-5|\leq 9$

6) $|x+5|>11$

7) $|3x+1|\geq 5$

8) $1 \leq |x| \leq 4$

9) $||x| - 2| \leq 1$

10) $2|x| + x > 0$

11) $1 \leq \left|\dfrac{1}{x}\right| < 5$

12) $\left|\dfrac{x + 2}{2x - 3}\right| < 4$

13) $\left|\dfrac{3x - 2}{x^2 - 2}\right| > 1$

14) $\left|\dfrac{2 - 3x}{1 + 2x}\right| \leq 4$

15) $\left|\dfrac{2}{x} - \dfrac{x}{4}\right| \geq \dfrac{2}{x}$

16) $|1-2x-x^3|\geq x^3-3$

17) $|x(x+1)(x+2)|<x+2$

18) $|x^2-3x-15|<2x^2-x$

19) $|2x^2+x+11|>x^2-5x+6$

20) $\dfrac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$

21) $\left|\dfrac{x^2+x-3}{x-1}\right| < x$

22) $\dfrac{|x-2|}{|2x-1|-4} \leq 0$

23) $\dfrac{|x+5|}{|x+3|+1} > 1$

24) $|2x-5| \leq |x+4|$

25) $|9-2x| \geq |4x|$

26) $|x-1| \geq 4|x+2| - 8x$

27) $|1-x| > \dfrac{3-2x}{|3x+2|}$

28) $\dfrac{|x^2-5x+7|}{2x^2+13x+20} + 1 < 0$

29) $3 < \dfrac{|x+1|}{|x-5|} < 5$

30) $\dfrac{1}{5} < \dfrac{|x^2-10|}{|x^2+2|} < \dfrac{1}{3}$

31) $\sqrt{|x+1|} > 2$

32) $\sqrt{|x^4 + 3x^2 - 4|} < 6$

33) $\sqrt{x^2 + x + 7} > |3x|$

34) $\dfrac{1}{|2x^2 + x + 1|} \leq \dfrac{1}{(2x-1)|x-1|}$

D) Hallar el dominio de las siguientes funciones

1) $F(x)=\dfrac{\sqrt{|x-1|-2} + \sqrt{(x-1)^2+1}}{|x+3|-1}$

2) 2) $F(x)=\sqrt{\dfrac{|x+2|+x}{|x-3|-4}}$

3) $F(x)=\sqrt{\dfrac{|x-2|+x}{|x-5|}}$

4) $F(x)=\sqrt{\dfrac{3+(x-1)^6}{x^2-6x+9}}$

5) $F(x)=\sqrt{\dfrac{|x^2-4x+5|}{1+|2-x^2|}}$

6) $F(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{|3x-5|+4}$

7) $F(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{|x^2-4|}}$

8) $F(x)=\sqrt{\dfrac{|x+1|-2}{|x|-1}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x^2-x^3}}$

CAPÍTULO VI

FUNCIONES

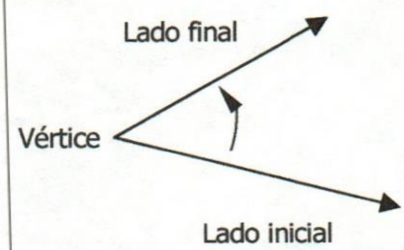
TRIGONOMÉTRICAS

1) ÁNGULO

Es cualquiera de las dos regiones del plano determinadas por dos semirrectas que tienen el mismo origen.

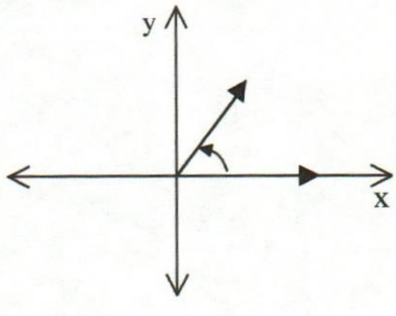
Una de las semirrectas (o rayo) es el lado inicial y la otra el lado terminal o final.

El ángulo es el resultado de realizar una rotación desde el lado inicial hasta el lado final o terminal.



1.1) POSICIÓN NORMAL O POSICIÓN ESTÁNDAR DE UN ÁNGULO

Es el ángulo cuyo vértice coincide con el origen del sistema de coordenadas, y su lado inicial con el semieje "x" positivo.



Los ángulos que se describen en sentido antihorario son positivos y los que se describen en sentido horario son negativos.

1.2) SISTEMA DE MEDIDA DE ÁNGULOS

1.2.1) Sistema Sexagesimal

Su unidad de medida es el grado.

Se asigna un valor de 360° a una revolución o vuelta completa del lado terminal, porque se divide la circunferencia en 360 partes iguales y cada parte es un grado.

Un grado se divide en sesenta partes iguales que se denominan minutos

$$1^{\circ} \approx 60'$$

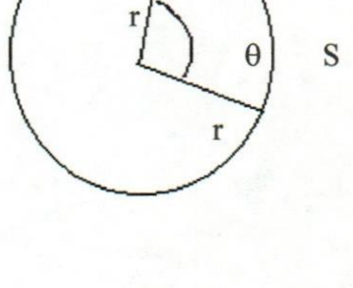
A su vez, un minuto se divide en 60 segundos

$$1' \approx 60''$$

1.2.2) SISTEMA CIRCULAR

1.2.2.1) Conceptos Previos:

✓ **ÁNGULO CENTRAL:** es el ángulo cuyo vértice está en el centro de la circunferencia.



S: longitud de arco.

θ: ángulo central.

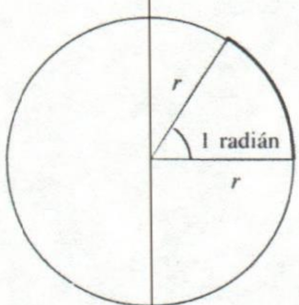
r: radio del círculo trigonométrico.

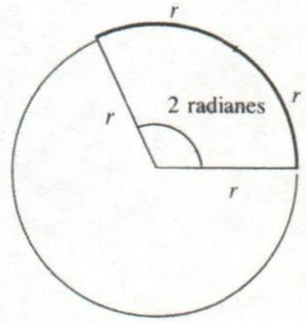
✓ **LONGITUD DE ARCO:** es la distancia recorrida sobre la circunferencia limitada por un ángulo central.

SISTEMA CIRCULAR

Su unidad de medida es el **radian**.

Se define al radian como el ángulo central que sustenta un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia con que fue descrito.





Entonces en general la medida de un ángulo en radianes se define: como la longitud de arco que lo sustenta entre la longitud del radio de la circunferencia que lo define:

$$\vartheta = \frac{s}{r}$$

Ahora, por la definición de radianes se deduce que **la longitud de arco** se calcula con la siguiente fórmula s= ϑ r, donde ϑ es el ángulo central en **radianes**.

1.2.3) EQUIVALENCIA ENTRE AMBOS SISTEMAS

En una circunferencia cualquiera una vuelta completa en el sistema sexagesimal es 360° y el circular 2π rad, por definición de la unidad en cada uno de los sistemas.

Entonces se establece la equivalencia entre radianes y grados

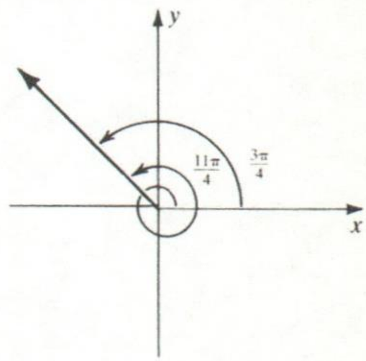
$$2\pi \text{ rad} = 360° \Rightarrow \ \pi \text{ rad} = 180° \Rightarrow \ 1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi}$$

1.3) ÁNGULOS COTERMINALES

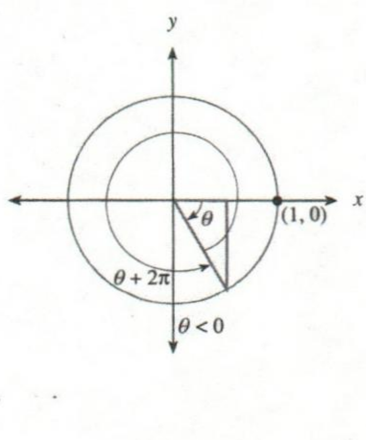
Son dos ángulos que en posición normal o estándar tienen el mismo lado terminal

Por ejemplo

$\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{11\pi}{4}$ son coterminales



En general, ϑ y $\vartheta \pm 2\kappa\pi$, $\kappa \in Z$ son coterminales, sea ϑ positivo o negativo.



A continuación se resuelven algunos ejemplos de aplicación de los conceptos mencionados:

1) Convertir de grados a radianes

a) $15° = \frac{\pi}{12}$

b) $135° = \frac{3\pi}{4}$

c) $45° = \frac{\pi}{4}$

d) $-60° = \frac{\pi}{3}$

e) $48° = \frac{12\pi}{45}$

2) Convertir de radianes a grados

a) $\frac{3\pi}{2} = 90°$

b) $16 = \left(\frac{4}{45\pi}\right)^{\circ}$

c) $\frac{5\pi}{9} = 100°$

d) $15\pi \quad = 2700°$

1.4) ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

α y β son suplementarios si y sólo si $\alpha + \beta = \pi$.

Entonces, los ángulos α y $\pi - \alpha$ son suplementarios.

1.5) ÁNGULO COMPLEMENTARIO

α y β son complementarios si y sólo si $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Entonces, los ángulos α y $\frac{\pi}{2} - \alpha$ son complementarios.

1.6) ÁNGULO OBTUSO

Es el ángulo que es mayor que un recto pero menor que un llano, es decir es mayor que $\frac{\pi}{2}$ pero menor que π.

Entonces α es obtuso si y sólo si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Algunos ejemplos de aplicación, son los siguientes

3) Encuentre la medida en radianes del ángulo obtuso que forman las manecillas del reloj a las 7:00 y a las 5:30.

   A las 7 las manecillas del reloj forman un ángulo de $\frac{5}{6}\pi$ radianes

   A las 5:30 el ángulo que forman no es obtuso.

4) Encuentre la medida de un ángulo ϑ en una circunferencia de radio 2, si sustenta un arco de $\frac{2\pi}{3}$ cm de longitud.

$$S=\vartheta .r \Rightarrow \vartheta=\frac{s}{r} \Rightarrow \vartheta=\frac{\frac{2\pi}{3}}{2} \Rightarrow \vartheta=\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

5) A un ángulo agudo α se le suma la mitad de su complemento y se le resta la mitad de su suplemento, la medida del ángulo resultante es

a) mayor que $\pi/4$

b) menor que $\pi/4$

c) igual a $\pi/4$

d) mayor o igual a $\pi/4$

$$\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{2}(\pi - \alpha) =$$

$$\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha - \frac{\pi}{4}$$

Pero, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 - \frac{\pi}{4} < \alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$

La medida del ángulo resultante es menor que $\frac{\pi}{4}$.

6) La suma de un ángulo α y el doble de otro ángulo β es 120°. Calcular sus valores sabiendo que la suma de sus complementos es 105°. Expresar los resultados en radianes

$$120°.\frac{\pi}{180°} = \frac{2\pi}{3} \qquad 105°\,\frac{\pi}{180°} = \frac{7}{12}\,\pi$$

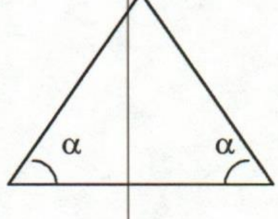
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = \dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{\pi}{2} - \alpha + \dfrac{\pi}{2} - \beta = \dfrac{7\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = \dfrac{2\pi}{3} \\ -\alpha - \beta = \dfrac{-5\pi}{12} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha + \frac{2\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

7) El ángulo que une los lados iguales de un triángulo isósceles mide $\frac{\pi}{5}$.

Hallar en radianes los otros dos ángulos.



$$\frac{\pi}{5} + 2\alpha = \pi$$

$$2\alpha = \frac{4\pi}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{5}$$

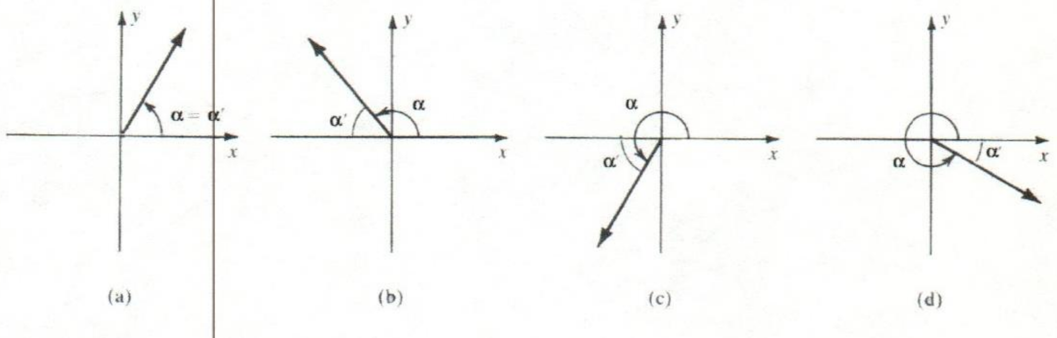
8) ¿Qué distancia recorre una carreta cuya rueda tiene 2m de diámetro cuando esta de una vuelta completa?

$$L = 2\pi r \Rightarrow L = 2\pi(1m)$$

La carreta recorre $2\pi m$

1.7) ÁNGULO DE REFERENCIA

Se define al ángulo de referencia α_r o α' como el menor ángulo positivo entre el lado final de α y el eje x.



Si α es un ángulo en posición normal que mide t radianes, entonces la medida t_r se llama número de referencia.

Así, por ejemplo si $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ rad. Entonces el número de referencia es

$\frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha_r = \frac{\pi}{6}$

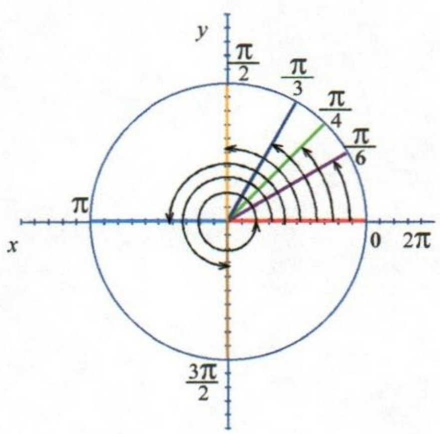
si $\alpha \in II_c \Rightarrow \alpha_r = \pi - \alpha$

si $\alpha \in III_c \Rightarrow \alpha_r = \alpha - \pi$

si $\alpha \in IV_c \Rightarrow \alpha_r = 2\pi - \alpha$

1.8) ÁNGULOS NOTABLES

Se conocen como ángulos notables aquellos que se usan con mucha frecuencia y sus medidas en radianes son: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$

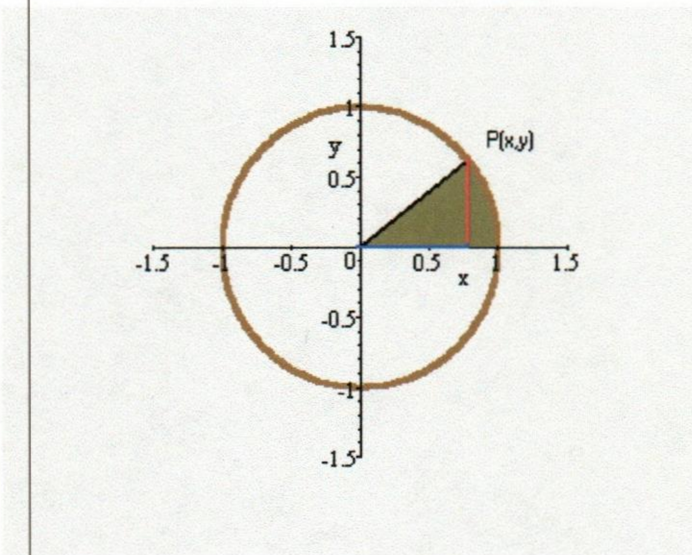


Según lo tratado en el punto anterior son ángulos notables también, todos lo ángulos en el II, III, y IV cuadrante cuyo ángulo de referencia es alguno de los notables ya mencionados.

Así por ejemplo $\frac{5\pi}{6}$ es notable porque su ángulo de referencia es $\frac{\pi}{6}$, de igual modo $\frac{5\pi}{4}$ porque su ángulo de referencia es $\frac{\pi}{4}$, etcétera.

2) FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

El círculo trigonométrico o unitario es el que tiene centro en el origen y radio 1. Su ecuación es $x^2+y^2=1$, en él se definen a las funciones trigonométricas.



2.1) FUNCIONES SENO Y COSENO

Tal como se muestra en la figura, si se parte del punto A(1.0) desplazándose sobre el círculo hasta un punto P(x,y), para cualquier valor ϑ, en radianes, se define a la función trigonométrica seno de ϑ, que se escribe sen ϑ, como la ordenada de P, es decir sen ϑ =y. La función trigonométrica coseno de ϑ, que se escribe cos ϑ, como la abscisa de P, es decir cos ϑ =x

Para cualquier arco que se recorra en el círculo trigonométrico va a existir un punto P definido por un par de números reales, por consiguiente el dominio de las funciones sen ϑ y cos ϑ es el conjunto de los números reales.

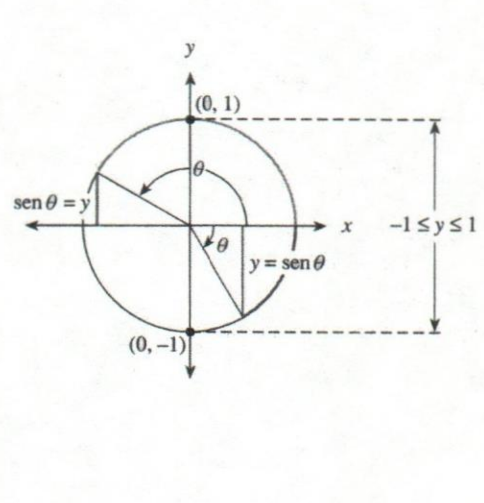
2.1.1) IDENTIDAD FUNDAMENTAL

Para cualquier ϑ se verifica en el círculo que $x^2+y^2=1$, pero $x=\cos\vartheta$ $y=\cos\vartheta$, entonces

$$\cos^2\vartheta+\text{sen}^2\vartheta=1$$

2.1.2) GRÁFICA DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

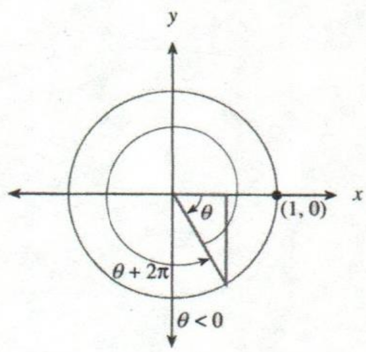
El rango de la función $y=\text{sen}\,\vartheta$ es el intervalo $\lfloor -1,1 \rfloor$, pues como puede observarse en la figura la ordenada más grande que puede obtener el punto P es 1, y la más pequeña es –1, así



Ahora bien, para graficar la función y=sen ϑ en un sistema de coordenadas cartesianas, el arco recorrido s= ϑ se representa en el eje x, y en el eje y, los valores y=sen ϑ correspondientes.

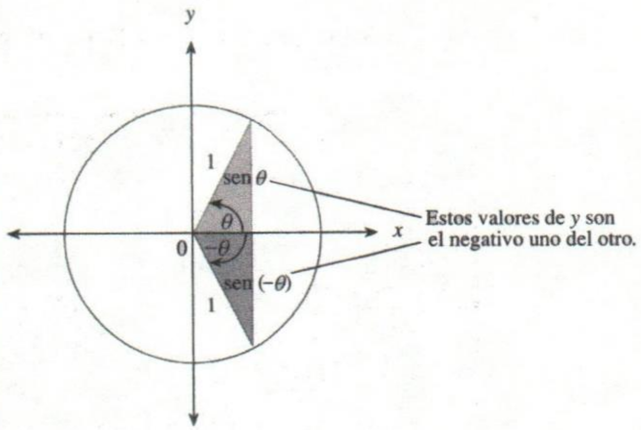
Obviamente, dada la definición de la función seno, esta será positiva en el I y II cuadrante y será negativa en III y IV cuadrante.

Como los ángulos ϑ y $\vartheta \pm 2\kappa\pi$, con $\kappa \in Z$ son coterminales, ocurre que y=sen ϑ =sen ($\vartheta \pm 2\kappa\pi$) entonces la función seno es periódica de período 2π.



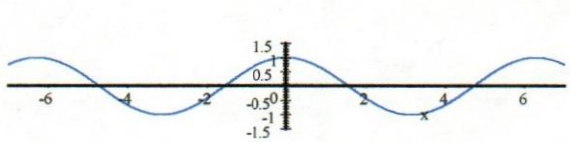
Se dice que una función f es **periódica** con período "p" siempre que "p" sea la menor constante positiva, si existe, tal que f(x+p)=f(x), para toda x en el dominio de f.

La función seno es una función impar, pues $\text{sen}\vartheta = y \wedge \text{sen}(-\vartheta) = -y$, es decir $\text{sen}(-\vartheta) = -\text{sen}\vartheta$.



En general una función f, es impar si f(-x)=-f(x). Geométricamente significa que la función es simétrica con respecto al origen del sistema de coordenadas

La gráfica de $y = \text{sen}\,\vartheta$



Gráfica:senoide o sinusoide.

Dominio:R

Rango: [-1,1]

Período: 2π

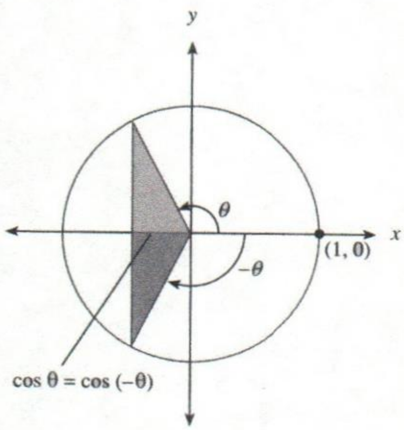
Es impar: $\text{sen}(-\vartheta) = -\text{sen}\vartheta$

Análogamente se realiza el estudio de la función coseno, entonces para graficar la función $y=\cos\vartheta$ en un sistema de coordenadas, el arco recorrido $s=\vartheta$, se representa en el eje x y en el eje y, los valores de coseno de ϑ correspondientes.

Obviamente, dada la definición de la función coseno, ésta será positiva en el I y IV cuadrante y será negativa en el II y III cuadrante.

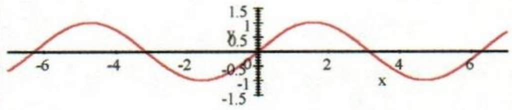
De igual modo, la función coseno es periódica de período 2π, por ser ϑ y $\vartheta \pm 2\kappa\pi$, $\kappa \in Z$ ángulos coterminales.

La función coseno es una función par, pues $\cos\vartheta = x \wedge \cos(-\vartheta) = x$, es decir $\cos(\vartheta) = \cos(-\vartheta)$.



Geométricamente esto significa que su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

La gráfica de la función coseno es:



Gráfica: cosenoide o cosinusoide.

Dominio: R

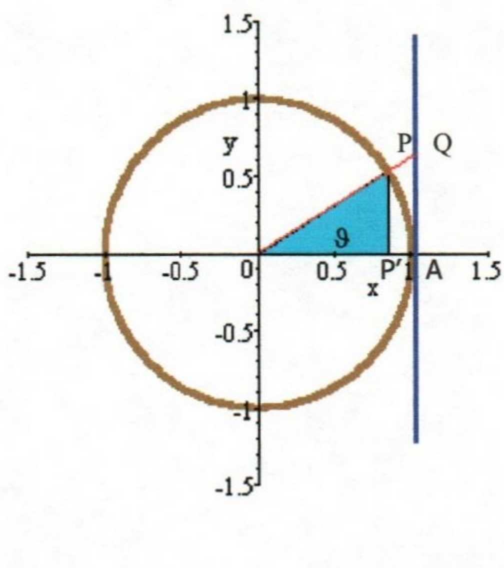
Rango: [-1,1]

Período: 2π

Es par: $\cos(\vartheta) = \cos(-\vartheta)$

2.2) LAS FUNCIONES TANGENTE Y SECANTE

En el círculo trigonométrico por el punto A(1,0) se traza una recta L paralela al eje y. Se define a la tangente de ϑ, que se escribe tg ϑ, como el segmento definido por los puntos $\overline{AQ}$, siendo Q el punto de intersección de la prolongación del segmento OP con la recta L y O el origen del sistema.

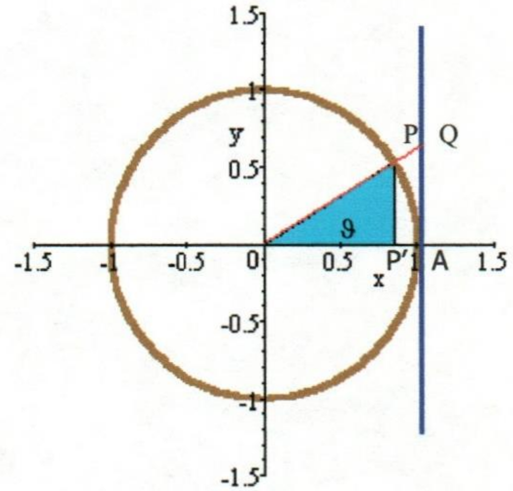


Si Q está por encima de A, el segmento $\overline{AQ}$ tiene longitud positiva.

Si Q está por debajo de A, el segmento $\overline{AQ}$ tiene longitud negativa.

En la medida en que P recorre el círculo ϑ va tomando diferentes valores, se van formando segmentos $\overline{AQ}$ positivos y negativos, pero cuando $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, por más que se prolongue al segmento OP, no se intersecta con la recta L, entonces en $\frac{\pi}{2}$, no hay tangente, de igual modo en $\frac{3\pi}{2}$, o en cualquiera de sus coterminales.

En la figura se forman dos triángulos semejantes



$$\Delta OPP' \approx \Delta OQA \Rightarrow \frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} = \frac{PP'}{OP'}$$

$$\overline{QA} = tg\vartheta; \overline{OA} = 1; \overline{PP'} = x = \cos\vartheta$$

$\overline{OP'} = y = \text{sen}\vartheta$, entonces

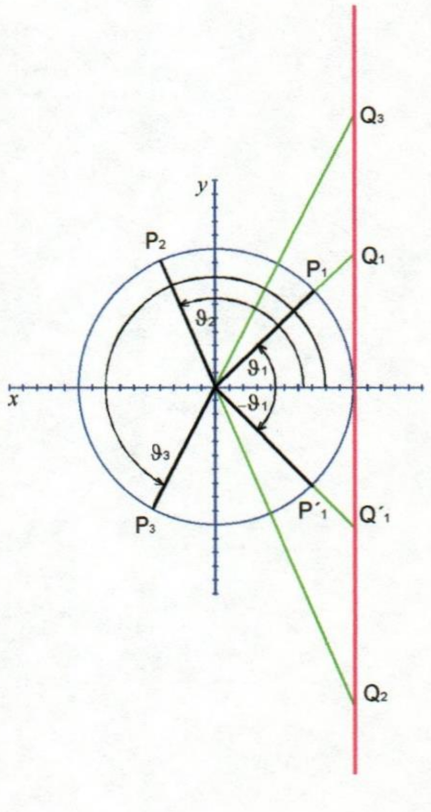
$$\text{tg}\vartheta = \frac{\text{sen}\vartheta}{\cos \vartheta}$$

Conocida esta relación se puede determinar el signo de tgϑ a través del signo del senϑ y del cosϑ, así:

$$\text{tg}\vartheta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\vartheta > 0 \wedge \cos\vartheta > 0 \Rightarrow \vartheta \in \text{Ic} \\ \vee \\ \text{sen}\vartheta < 0 \wedge \cos\vartheta < 0 \Rightarrow \vartheta \in \text{IIIc} \end{cases}$$

$$\text{tg}\vartheta < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\vartheta > 0 \wedge \cos\vartheta < 0 \Rightarrow \vartheta \in \text{IIc} \\ \vee \\ \text{sen}\vartheta < 0 \wedge \cos\vartheta > 0 \Rightarrow \vartheta \in \text{IVc} \end{cases}$$

Ahora bien, la tangente para diferentes valores de ϑ se representa geométricamente en la siguiente figura



Para graficar la función tangente de ϑ en un sistema de coordenadas cartesianas, el arco recorrido $s = \vartheta$ se representa en el eje x, y en el eje y, los valores de la tg ϑ correspondientes.

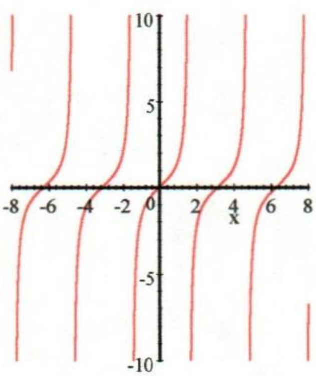
$\vartheta_4 = \vartheta_1 + \pi$

tg ϑ_4=tg($\vartheta_1 + \pi$)

La función tangente es periódica de período π

La función tangente es impar, porque -tg ϑ_1= tg(- ϑ_1).

2.2.1) LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN TANGENTE



Gráfica: tangentoide.

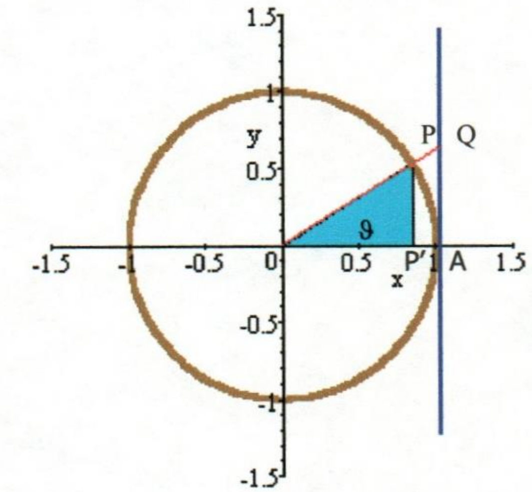
Dominio: $R - \left\{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in Z\right\}$

Rango: R

Período: π.

Es impar: tg(- ϑ). = -tg ϑ

Análogamente, se define a la secante de ϑ, que se escribe, $\sec\vartheta$, como el segmento definido por los puntos O y Q.



Según esta definición se observa que para los ángulos $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, así como todos sus coterminales, no existe la secante. Por otro lado, el segmento $\overline{OQ}$ siempre va a tener una longitud mayor que 1 o igual, (en valor absoluto), pero nunca menor, porque el radio del círculo trigonómetrico es 1, y debe prolongarse este radio hasta intersectar a la recta L para que la secante quede definida..

2.2.2) OTRA IDENTIDAD FUNDAMENTAL

En la misma figura, por aplicación del teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\overline{OA}^2 + \overline{AQ}^2 = \overline{OP}^2, \text{ pero}$$

$$\overline{OA} = 1,\ \overline{AQ} = \operatorname{tg}\vartheta \text{ y } \overline{OP} = \sec\vartheta, \text{ entonces}$$

$$1 + tg^2\vartheta = \sec^2 \vartheta$$

En la figura se forman dos triángulos semejantes $\Delta OPP'$ y ΔOAQ

entonces: $\dfrac{\overline{QO}}{PO} = \dfrac{\overline{OA}}{OP'}$ (I)

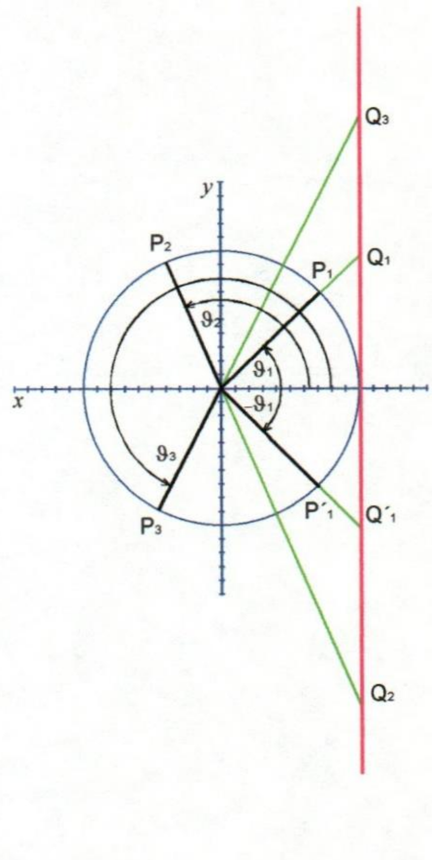
pero $\overline{QO} = \sec \vartheta; \overline{PO} = 1 = \overline{OA}; \overline{OP'} = x = \cos \vartheta$

sustituyendo en (I) se tiene: $\sec\vartheta = \dfrac{1}{\cos \vartheta}$

Según esta relación, el signo de la secante es igual al signo del coseno, es decir positiva en el I y IV cuadrante y negativa en el II y III cuadrante.

Ahora bien, la secante para diferentes valores de ϑ se representa geométricamente en la siguiente figura

$\sec \vartheta_1 = \overline{OQ_1}$ (positiva)
$\sec \vartheta_2 = \overline{OQ_2}$ (negativa)
$\sec \vartheta_3 = \overline{OQ_3}$ (negativa)
$\sec(-\vartheta_1) = \overline{OQ_1}$ (positiva)



La gráfica de la función secante de ϑ en un sistema de coordenadas cartesianas se obtiene representando en el eje x el arco (s) recorrido por P, $\vartheta = s$ y en el eje y, los valores de la sec ϑ correspondientes.

A la luz de la geometría analítica, el signo de la secante[1] se puede explicar así: cuando el segmento $\overline{OQ}$ no contiene al segmento $\overline{OP}$ se considera su longitud negativa sec $\vartheta < 0$ II y III cuadrante. Cuando el segmento $\overline{OQ}$ contiene al segmento $\overline{OP}$ se considera su longitud positiva sec $\vartheta > 0$ en I y IV cuadrante.

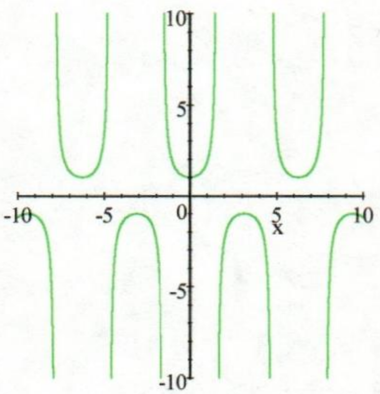
La función secante es periódica de período 2π

La función secante es par pues sec($-\vartheta$)= sec ϑ

Ambas característica pueden visualizarse fácilmente en la figura de la página 280

[1] Tal como define la geometría analítica al segmente dirigido, simplemente se está estableciendo un sentido.

2.2.3) LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN SECANTE



Dominio: $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z\right\}$

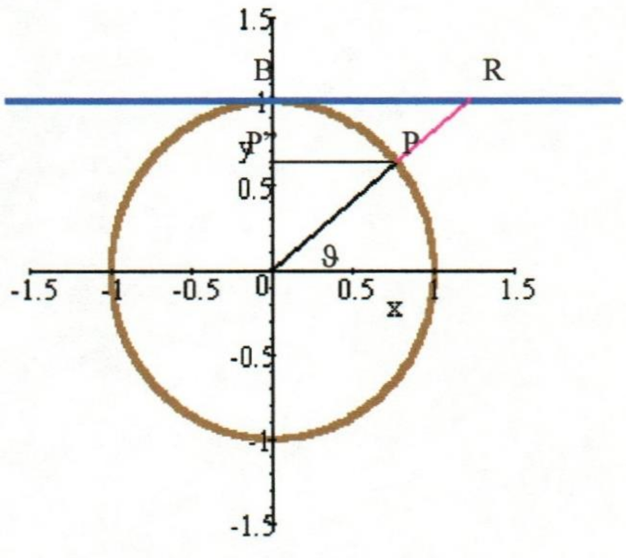
Rango: $(-\infty,-1] \cup [1.\infty)$

Período: 2π.

Es par: sec ϑ = sec(- ϑ).

2.3) LAS FUNCIONES COTANGENTE Y COSECANTE

En el círculo trigonométrico por el punto B(0,1) se traza una recta "m" paralela al eje x. Se define a la cotangente de ϑ, que se escribe ctgϑ, como el segmento definido por los puntos $\overline{BR}$, siendo R el punto de intersección de la prolongación del segmento $\overline{OP}$ con la recta m y O el origen del sistema de coordenadas.



Si R está a la derecha de B, el segmento $\overline{OR}$ tiene longitud positiva.

Si R está a la izquierda de B, el segmento $\overline{OR}$ tiene longitud negativa.

En la medida que P recorre el círculo, ϑ va tomando diferentes valores y se van formando segmentos $\overline{BR}$ positivos y negativos, por cuando ϑ=0, o $\vartheta = \pi$, por más que se prolongue al segmento OP no se intersecta con la recta m, entonces en $0, \pi, 2\pi$ y todos sus coterminales no hay cotangente.

En la figura de la página 283, forman dos triángulos semejantes.

$$\Delta OPP'' \approx \Delta ORB \text{ entonces } \frac{\overline{BR}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{PP''}}{\overline{OP''}}$$

pero, $\overline{BR} = \text{ctg}\vartheta; \overline{BO} = 1, \ \overline{PP''} = x = \cos\vartheta, \ \overline{OP''} = y = \text{sen}\vartheta,$

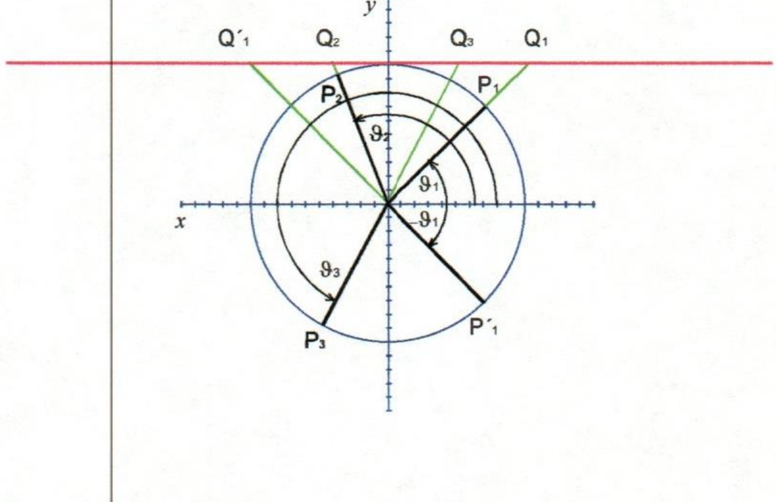
Entonces $\text{ctg}\,\vartheta = \dfrac{\cos\vartheta}{\text{sen}\vartheta}$

Conocida esta relación se puede determinar el signo de ctgϑ a través del signo del senϑ y del cosϑ, así:

$$\text{ctg}\vartheta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\vartheta > 0 \wedge \cos\vartheta > 0 \Rightarrow \vartheta \in \text{Ic} \\ \vee \\ \text{sen}\vartheta < 0 \wedge \cos\vartheta < 0 \Rightarrow \vartheta \in \text{IIIc} \end{cases}$$

$$\text{ctg}\vartheta < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\vartheta > 0 \wedge \cos\vartheta < 0 \Rightarrow \vartheta \in \text{IIc} \\ \vee \\ \text{sen}\vartheta < 0 \wedge \cos\vartheta > 0 \Rightarrow \vartheta \in \text{IVc} \end{cases}$$

Geométricamente la cotangete se representa en la siguiente figura, para diferentes posiciones del punto P y en consecuencia diferentes valores de ϑ



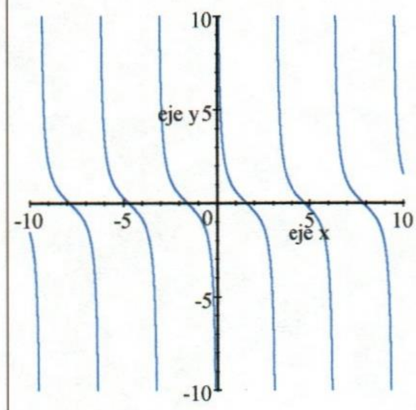
Para graficar la función cotangente de ϑ en un sistema de coordenadas cartesianas, el arco recorrido $s = \vartheta$ se representa en el eje x, y en el eje y, los valores de la ctg ϑ correspondientes.

$\vartheta_4 = \pi + \vartheta_1 \Rightarrow \text{ctg}\vartheta_4 = \text{ctg}\vartheta_1$

La función ctg ϑ es periódica de periódo π.

La función cotagente es impar porque ctg(- ϑ)= -ctg ϑ . Esta característica se visualiza fácilmente en la figura de la página anterior con ϑ_1, y - ϑ_1, sabiendo que B(0,1), se tiene $\overline{BQ_1} = -\overline{BQ'_1}$, como $\overline{BQ_1}$ = ctg ϑ_1 y $\overline{BQ'_1}$=ctg(- ϑ_1).

2.3.1) LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COTANGENTE



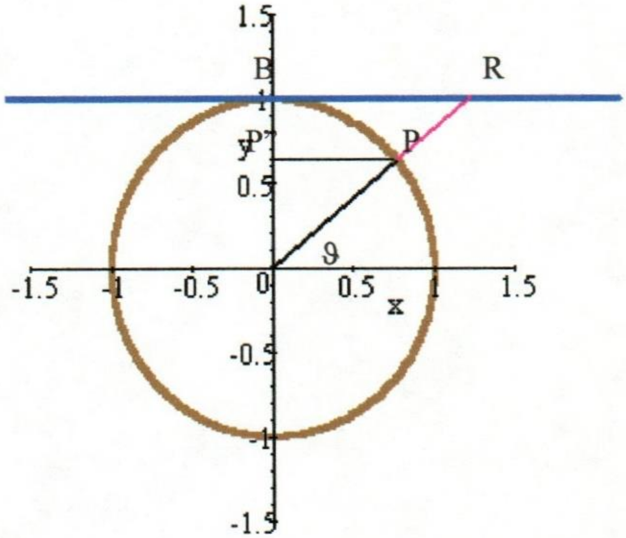
Dominio: $R - \{\kappa\pi, \kappa \in Z\}$.

Rango:R.

Período: π.

Es impar,ctg(- ϑ)=-ctg ϑ.

Análogamente, se define a la cosecante de ϑ, que se escribe $\csc\vartheta$, como el segemento definido por los puntos O y R.



Según esta definición se observa que para los ángulos $0, \pi, 2\pi$, así como todos sus coterminales, no existe la función cosecante. Por otro lado, el segmento $\overline{OR}$ siempre va a tener una longitud mayor a 1 o igual (en valor absoluto), pero nunca menor que 1, porque el radio del círculo trigonométrico es 1.

2.3.2) OTRA IDENTIDAD FUNDAMENTAL

En esa misma figura, por aplicación del teorema de Pitágoras, se tiene

$$\overline{OB}^2 + \overline{BR}^2 = \overline{OR}^2, \text{ pero}$$

$$\overline{OB} = 1;\ \overline{OR} = \csc\vartheta \text{ y } \overline{BR} = \text{ctg}\vartheta, \text{ entonces}$$

$$1+\text{ctg}^2\vartheta=\csc^2\vartheta.$$

Por otra parte, en la misma figura se forman dos triángulos semejantes

$\Delta OPP'' \approx \Delta OBR$, entonces $\frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OP''}}$

pero $\overline{OR} = \csc \vartheta$ $\overline{OP} = \overline{OB} = 1$ $\overline{OP''} = y = \operatorname{sen}\vartheta$

Por lo tanto, se cumple que: $\csc \vartheta = \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}$

Según esta relación se deduce que el signo de la cosecante de ϑ es igual al del seno de ϑ, en el I y II cuadrante es positivo, mientras que en el III y en IV cuadrante es negativo.

Geométricamente la cotangente para diferentes posiciones del punto P y en consecuencia diferentes valores de ϑ, se muestra en la siguiente figura

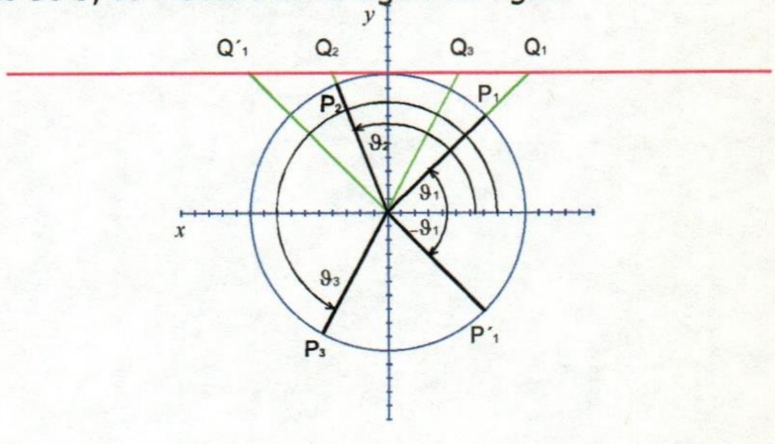
$\csc \vartheta_1 = \overline{OQ_1}$ (positiva)

$\csc \vartheta_2 = \overline{OQ_2}$ (positiva)

$\csc \vartheta_3 = \overline{OQ_3}$ (negativa)

$\csc(-\vartheta_1) = \overline{OQ_1'}$ (negativa)

siendo O(0,0)



La gráfica de la función cosecante de ϑ en un sistema de coordenadas cartesianas se obtiene representando en el eje x el arco recorrido por P, $\vartheta = s$ y en el eje y, los valores de la csc ϑ correspondientes.

Según la figura de la página anterior, se observa que cuando el segmento $\overline{OQ}$ contiene el segmento $\overline{OP}$ se considera su longitud positiva. Entonces la cosecante es positiva en el I y II cuadrante.

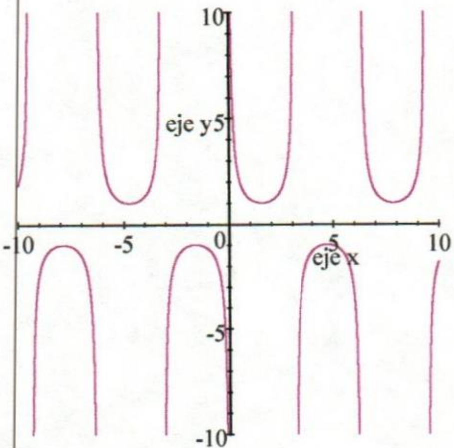
Cuando el segmento $\overline{OQ}$ no contiene al segmento $\overline{OP}$ se considera su longitud negativa. Entonces la cosecante es negativa en el III y IV cuadrante.

La función cosecante es periódica de periodo 2π .

La Función cosecante es impar, pues $\csc(-\vartheta) = -\csc(\vartheta)$.

Estas dos características se visualizan fácilmente en la figura de la página anterior, donde está representada geométricamente la cosecante

2.3.3) LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN COSECANTE



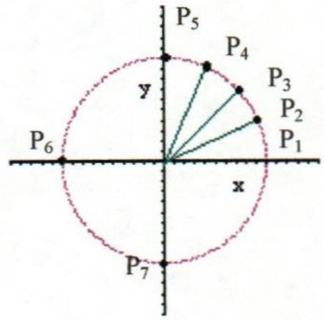
Dominio: $R - \{\kappa\pi,\ \kappa \in Z\}$.

Rango: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Periódo: 2π.

Es impar csc $(-\vartheta)$= -csc(ϑ).

2.4) FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS NOTABLES



El punto P_1 que corresponde a $\vartheta = 0$ tienen coordenadas $P_1\,(1,0)$.

El punto P_2 que corresponde a $\vartheta = \dfrac{\pi}{6}$ tiene coordenadas $P_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

El punto P_3 que corresponde a $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$ tiene coordenadas $P_3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

El punto P_4 que corresponde a $\vartheta = \dfrac{\pi}{3}$ tiene coordenadas $P_4\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

El punto P_5 que corresponde a $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ tiene coordenadas $P_5(0,1)$.

El punto P_6 que corresponde a $\vartheta = \pi$ tiene coordenadas $P_6\,(0,-1)$.

El punto P_7 que corresponde a $\vartheta = \dfrac{3\pi}{2}$ tiene coordenadas $P_7(0,-1)$.

Entonces según la definición de las funciones trigonométricas se deduce lo siguiente:

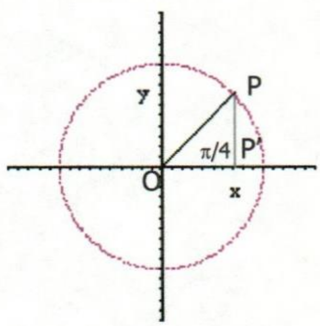
ϑ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sen(ϑ)	0	1	0	-1	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos(ϑ)	1	0	-1	0	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tg(ϑ)	0	$\nexists$	0	$\nexists$	1	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

¿Cómo se obtuvieron las coordenadas del punto P correspondiente?

El problema consiste en determinar la abscisa y la ordenada P, pues a través de ellas definen a todas las funciones trigonométricas.

Para ello trabajamos con los triángulos que define cada ángulo en el círculo.

- Para $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$



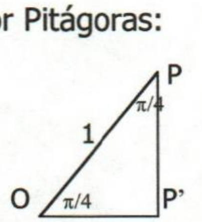
$\overline{PP'} = y_p$ y $\overline{OP'} = X_p$.

El ΔOPP' es isorrectángulo

porque $\angle P'OP = \angle OPP' = \dfrac{\pi}{4}$ entonces $\overline{OP'} = P'P$,

como OP=1, se tiene:

Por Pitágoras:



$1^2 = x_p^2 + y_p^2$ pero $y_p = x_p$, entonces $1 = x_p^2 + y_p^2$

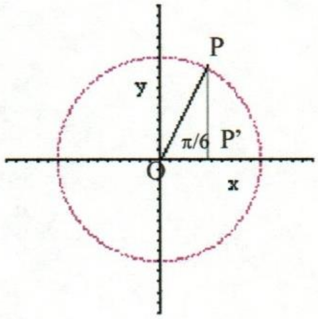
$1 = 2x_p^2 \Rightarrow x_p^2 = \frac{1}{2} \qquad |x_p| = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow x_p = \frac{\sqrt{2}}{2}$, por ser un punto del primer cuadrante

Entonces las coordenas de P_3 son $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

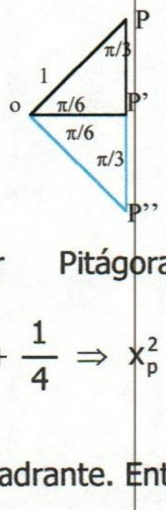
- Para $\vartheta = \frac{\pi}{6}$

En el $\Delta OPP'$ $\angle POP' = \frac{\pi}{6}$

entonces $\angle OPP' = \frac{\pi}{3}$



Haciendo una construcción auxiliar se tiene:

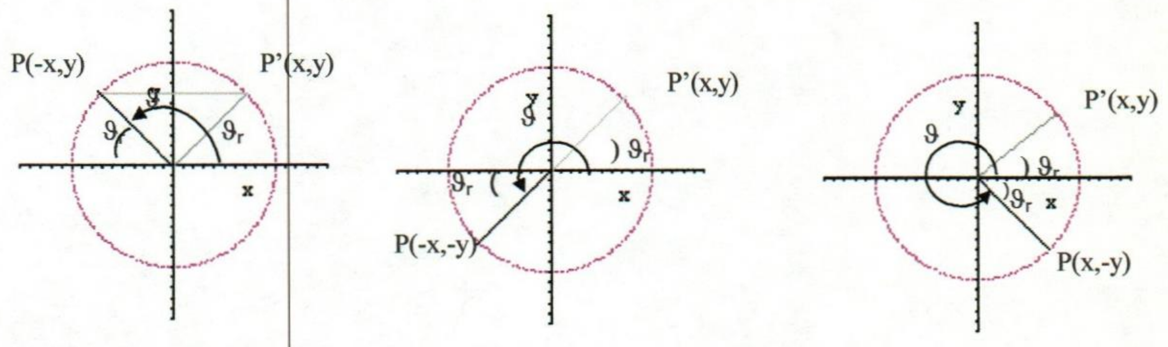


El $\Delta OPP''$ es equilátero entonces OP=OP″=PP″=1

pero PP′=P′P″, por lo tanto $\overline{PP'} = \frac{1}{2}$.

Por Pitágoras $1^2 = \overline{OP'}^2 + \overline{PP'}^2$, pero $\overline{OP'} = x_p$ y $\overline{PP'} = y_p$ entonces $1 = x_p^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x_p^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow |x_p| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_p = \frac{\sqrt{3}}{2}$., por ser un punto del primer cuadrante. Entonces las coordenadas de $P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ahora bien, llegado este punto es evidente la importancia del ángulo de referencia, pues permite calcular cualquier función trigonométrica del ángulo ϑ, si se conoce la función del ϑ_r



A continuación se resuelven algunos ejemplos de aplicación de estos conceptos.

1) Calcular el valor de las siguientes funciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

b) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

c) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{-5\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

d) $\sec\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

e) $\csc\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{-\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}} = -2.$

2) Calcular todas las funciones trigonométricas del ángulo α, si se sabe que:

a) $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ y $\alpha \in \mathrm{III}_c$

$\csc\alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{4}{13} = \dfrac{9}{13} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$\sec\alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{-2}{\sqrt{13}}}{\dfrac{-3}{\sqrt{13}}} = \frac{2}{3}$$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{2}$

b) $\sec\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ y $\alpha \in \mathrm{II}_c$

$\cos\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \dfrac{9}{10} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\csc\alpha = \sqrt{10}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{-3}{\sqrt{10}}} = -\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = -3$$

c) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ y $\alpha \in II_c$

α está en el segundo cuadrante y su ángulo de referencia es $\frac{\pi}{6}$, entonces las funciones trigonométricas de α son:.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\csc\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec\alpha = -2$$

3) Calcular las operaciones indicadas en cada caso:

a) $\operatorname{sen}\alpha + \cos(-\beta)$ si $\cos\alpha = \frac{5}{3}$ y $\alpha \in I_c$ y $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$ y $\beta \in II_c$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\beta = \frac{4}{5}$$

$$\cos(-\beta) = \cos\beta = \frac{4}{5}$$

Entonces

$$\operatorname{sen}\alpha + \cos(-\beta) = \frac{12}{13} + \frac{4}{5} = \frac{60+52}{65} = \frac{112}{65}$$

b) $\sec(-\alpha) + 2\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(-\beta)$ si se sabe que $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{5}$ y $\alpha \in IV_c$ y $\cos\beta = -\frac{3}{4}$ y $\beta \in II_c$.

$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sec(-\alpha) = \frac{5}{4}$$

$$\sec(-\alpha) + 2\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(-\beta)$$

$$\operatorname{sen}^2\beta = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}(-\beta) = \frac{-\sqrt{7}}{4}$$

$$\sec(-\alpha) + 2\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(-\beta) =$$

$$\frac{5}{4} + 2\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{7}+1}{4} - \frac{3}{5} = \frac{5\sqrt{7}+5-12}{20} = \frac{5\sqrt{7}-7}{20}$$

c) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\csc\frac{25\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{2}\csc\frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\csc\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \csc\left(\frac{3\pi}{2}\right)\csc\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$1\,\frac{1}{\frac{1}{2}} + (-1)\frac{1}{2} + (-1)1 = 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

4) Verifique que $P\left(-\frac{2}{5}, \frac{\sqrt{21}}{5}\right)$ es un punto del círculo unitario y escriba los valores de las seis funciones trigonométricas para ϑ, donde ϑ es la medida del ángulo cuyo lado final contiene al punto P.

Ecuación del círculo trigonométrico $x^2+y^2=1$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{21}{25} = 1$$

$$\operatorname{sen}\vartheta = \frac{\sqrt{21}}{5} \qquad \cos\vartheta = -\frac{2}{5}$$

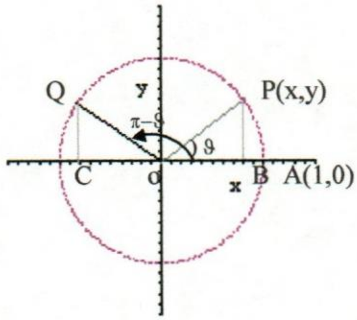
$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\sqrt{21}}{2} \qquad \sec\vartheta = -\frac{5}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\vartheta = -\frac{2}{\sqrt{21}} \qquad \csc\vartheta = \frac{5}{\sqrt{21}}$$

2.5) PROPIEDADES ADICIONALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

2.5.1) IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Sobre el círculo trigonométrico se define al punto P(x,y) tal que $\angle AOP = \vartheta$, donde $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ y el punto Q tal que $\angle AOQ = \pi - \vartheta$, como indica la figura.



Los triángulos rectángulos ΔOBP y ΔOCQ son congruentes porque $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$, $\angle COQ = \angle BOP = \vartheta$, $\angle CQO = \angle OPB$, entonces $\overline{QC} = \overline{BP} = y$, $\overline{OC} = \overline{OB} = |x|$, como $Q \in$ II cuadrante sus coordenadas son Q(-x,y), pero por definición de seno y coseno se tiene que $Q(-x, y) = Q(\cos(\pi - \vartheta), \operatorname{sen}(\pi - \vartheta))$.

Análogamente $P(x, y) = P(\cos \vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$ entonces

$x = \cos \vartheta \Rightarrow -x=-\cos\vartheta$

$y = \operatorname{sen}\vartheta$

al sustituir en Q., se deduce que:

$$\boxed{\cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\pi - \vartheta) = \operatorname{sen}\vartheta}$$

Estas relaciones permiten deducir todas las demás funciones trigonométricas para **ángulos suplementarios**.(ϑ, y $\pi-\vartheta$ son suplementarios)

Así:

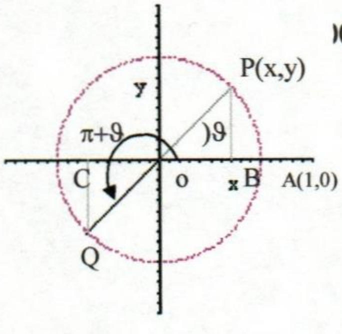
$$\operatorname{tg}(\pi - \vartheta) = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \vartheta)}{\cos(\pi - \vartheta)} = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{-\cos\vartheta} = -\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\vartheta}$$

$\operatorname{tg}(\pi - \vartheta) = -\operatorname{tg}\vartheta$
$\operatorname{ctg}(\pi - \vartheta) = -\operatorname{ctg}\vartheta$
$\sec(\pi - \vartheta) = -\sec\vartheta$
$\csc(\pi - \vartheta) = \csc\vartheta$

2.5.2) IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN π RADIANES

Sobre el círculo trigonométrico se define al punto P(x,y) tal que $\angle AOP = \vartheta$

donde $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ y)Q $= \pi + \vartheta$ como indica la figura.



Los triángulos rectángulos ΔOCQ y ΔOBP son congruentes porque $\angle POB = \angle QOC = \vartheta$, $\overline{QO} = \overline{QP} = 1$, $\angle OPB = \angle OQC$, entonces

$\overline{CQ} = \overline{PB} = |x|$, y , $\overline{OC} = \overline{OB} = |y|$, como Q pertenece al III cuadrante sus coordenadas son Q(-x,-y) por definición de seno y coseno $Q(\cos(\pi + \vartheta), \text{sen}(\pi + \vartheta)) = Q(-x,-y)$.

Por otro lado las coordenadas de P son $P(x, y) = P(\cos\vartheta, \text{sen}\vartheta)$, $x = \cos\vartheta \Rightarrow -x = -\cos\vartheta$, $y = \text{sen}\vartheta \Rightarrow -y = -\text{sen}\vartheta$ sustituyendo en Q, se deduce que:

$$\boxed{\cos(\pi + \vartheta) = -\cos\vartheta}$$

$$\boxed{\text{sen}(\pi + \vartheta) = -\text{sen}\vartheta}$$

A partir de esta relación se deducen las demás funciones trigonométricas del ángulo $\pi + \vartheta$, así

$$\text{tg}(\pi + \vartheta) = \frac{\text{sen}(\pi + \vartheta)}{\cos(\pi + \vartheta)} = -\frac{\text{sen}\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{\text{sen}\vartheta}{\cos\vartheta}$$

$$\boxed{\text{tg}(\pi + \vartheta) = \text{tg}\vartheta}$$

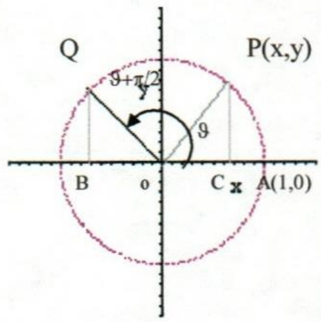
$$\boxed{\text{ctg}(\pi + \vartheta) = \text{ctg}\vartheta}$$

$$\boxed{\sec(\pi + \vartheta) = -\sec\vartheta}$$

$$\boxed{\csc(\pi + \vartheta) = -\csc\vartheta}$$

2.5.3) IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN $\pi/2$ RADIANES

Sobre el círculo trigonométrico se define al punto P(x,y) tal que $\angle AOP = \vartheta$, donde $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ y el punto Q tal que $\angle AOQ = \vartheta + \frac{\pi}{2}$,como muestra la figura



Los triángulos rectángulos ΔBOQ y ΔOCP son congruentes porque $\overline{QO} = OP = 1$, $\angle BQO = \angle POC = \vartheta, \angle QOB = \angle OPC = \frac{\pi}{2} - \vartheta$.Entonces $\overline{OC} = \overline{QB} = |x|$ $\overline{CP} = \overline{OB} = |y|$ como Q es un punto del II cuadrante sus coordenadas son Q(-y,x) pero por definición de las funciones seno y coseno se sabe que $Q = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right)\right) = Q(-y, x)$

Por otro lado las coordenadas de $P(x,y) = P(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$, pero $-y = -\operatorname{sen}\vartheta$ "y" $x = \cos\vartheta$ de aquí se deduce que:

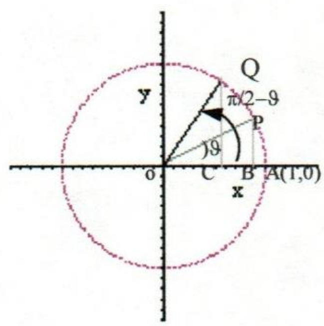
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\operatorname{sen}\vartheta$
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = \cos \vartheta$

Las demás funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{2} + \vartheta$ son:

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\operatorname{ctg}\vartheta$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\operatorname{tg}\vartheta$
$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\csc \vartheta$
$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = \sec \vartheta$

2.5.4) IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Sobre el círculo trigonométrico se define al punto P(x,y) tal que $\angle AOP = \vartheta$ donde $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ y el punto Q tal que $\angle AOQ = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, como indica la figura:



Los triángulos rectángulos $\triangle OBP$ y $\triangle OQC$ son congruentes porque $\overline{OQ} = \overline{OP} = 1$, $\angle BOP = \angle OQC = \vartheta$, $\angle QOC = \angle OPB$, entonces $\overline{OC} = \overline{BP} = |y|$, $\overline{QC} = \overline{OB} = |x|$, luego las coordenadas de Q son Q(y,x) por definición de seno y coseno se tiene $Q = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right) = Q(y, x)$, las coordenadas de P son $P(x,y) = P(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$ es decir $x = \cos\vartheta$; $y = \operatorname{sen}\vartheta$, sustituyendo en Q se tiene:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \operatorname{sen}\vartheta$
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \cos\vartheta$

A partir de aquí pueden deducirse las demás funciones trigonométricas de **los ángulos complementarios** $\left(\vartheta \text{ y } \frac{\pi}{2} - \vartheta \text{ son complementarios}\right)$.

Así: $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)} = \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}$$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \operatorname{ctg}\vartheta$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \operatorname{tg}\vartheta$
$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \csc\vartheta$
$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sec\vartheta$

2.5.5) IDENTIDAD DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

Sean los triángulos OAB y OPQ en el círculo trigonométrico, donde $\alpha > \beta$.

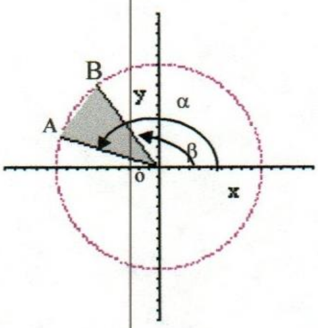


Figura (1)

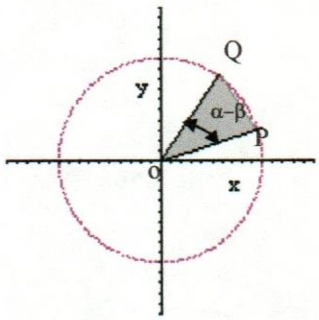


Figura (2)

Como el punto A está sobre el círculo trigonométrico y el segmento AO es el lado terminal de α, entonces las coordenadas de A son $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, análogamente las coordenadas de B son $(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$, entonces la longitud del segmento AB, al cuadrado es:

$$\overline{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

$$\overline{AB}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$$

$$\overline{AB}^2 = \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta$$

$$\text{pero } \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ y } \cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta = 1$$

$$\overline{AB}^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\overline{AB}^2 = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) \qquad (1)$$

En el triángulo OPQ (ver figura 2), congruente OAB, (porque tiene los lados iguales y el ángulo que sustentan también es igual) se tiene que las coordenadas de Q son $(\cos(\alpha - \beta), \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$ por ser Q un punto del círculo unitario, entonces la longitud al cuadrado del lado PQ es:

$$\overline{PQ}^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(\alpha - \beta))^2$$

$$\overline{PQ}^2 = \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)$$

pero $\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) = 1$, entonces

$$\overline{PQ}^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \qquad (2)$$

Pero $\overline{PQ} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{PQ}^2 = \overline{AB}^2$ por ser ΔOPQ congruente a ΔOAB. Entonces: $2\text{-}2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta)$.

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \quad (I)}$$

A partir de esta identidad se puede hallar otra para $\cos(\alpha + \beta)$.Así:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$ pero $\cos(-\beta) = \cos\beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta$ entonces:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \quad (II)}$$

Un ejemplo de aplicación es el siguiente:

Verificar, usando la identidad de $\cos(\alpha + \beta)$, que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\text{sen}\vartheta$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\vartheta - \text{sen}\frac{\pi}{2}\,\text{sen}\vartheta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = (0)\cos\vartheta - (1)\text{sen}\vartheta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) = -\text{sen}\vartheta$$

Para deducir la identidad de $\text{sen}(\alpha + \beta)$ se puede aplicar la identidad (I), así:

Por la identidad de ángulos complementarios se sabe que:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right).$$

Aplicando la propiedad asociativa de la adición de números reales se tiene:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right).$$

Aplicando la identidad (I):

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\text{sen}\beta.$$

Pero se demostró que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\alpha$, y, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

Entonces sustituyendo en la igualdad anterior, se tiene:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Finalmente

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \quad \text{(III)}}$$

Análogamente $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta)\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right)$$

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\beta, \text{ entonces}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta \quad \text{(IV)}}$$

Se deduce $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ a partir de (I) y (II).

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cos\beta}$$

al dividir numerador y denominador por $\cos\alpha \cos\beta$, siendo $\cos\alpha \neq 0 \wedge \cos\beta \neq 0$ se tiene:

$$\boxed{tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} \quad (V)}$$

Análogamente:

$$\boxed{tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta} \quad (VI)}$$

A continuación se muestran algunos ejemplos de aplicación de las identidades demostradas en los puntos previos.

Usando las identidades vistas, calcular el valor exacto de:

1) sen15°=sen (60°-45°)=sen60°cos45°-cos60°sen45°

$$sen15° = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4}$$

2) $$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - sen\left(\frac{\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{4}$$

3) $tg(285°)=tg(180°+105°)=tg105°$

$$tg(105°) = tg(45° + 60°) = \frac{tg45° + tg60°}{1 - tg45°tg60°}$$

$$tg(105°) = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2}{1 - 3} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{-2}$$

$$tg(285°) = tg(105°) = -2 - \sqrt{3}.$$

2.5.6) IDENTIDADES DEL ÁNGULO DOBLE

Como caso particular de las identidades anteriores se tiene $\alpha = \beta$, así

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - sen\alpha sen\alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha \quad \text{(VII)}}$$

$$sen(\alpha + \alpha) = sen\alpha\cos\alpha + \cos\alpha sen\alpha$$

$$\boxed{sen2\alpha = 2sen\alpha\cos\alpha \quad \text{(VIII)}}$$

$$tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha tg\alpha}$$

$$\boxed{tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \quad \text{(IX)}}$$

2.5.7) IDENTIDADES DEL ÁNGULO MEDIO

La identidad (VII) se puede escribir así:

$$\cos 2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

Despejando $\operatorname{sen}^2\alpha$ en la igualdad anterior se tiene: $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$,

despejando $\operatorname{sen}\alpha$: $|\operatorname{sen}\alpha| = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$

Esta identidad se conoce con el nombre de seno del ángulo medio y suele expresarse así:

$$\boxed{\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{2}} \qquad \text{(X)}}$$

A partir de (VII), también se tiene:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right) \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Despejando $\cos^2\alpha$ se tiene:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad |\cos\alpha| = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

Esta identidad se conoce con el nombre de coseno del ángulo medio y suele escribirse así:

$$\boxed{\cos\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{2}} \qquad \text{(XI)}}$$

A partir de (X) y (XI) puede deducirse:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}}$$

Dado que 1-cosβ y 1+ cosβ son siempre positivos o cero, pues $-1 \leq \cos\beta \leq 1$, se deduce entonces:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} \qquad \text{(XII)}}$$

Algunos ejemplos de aplicación de estas identidades son los siguiente:

Calcular el valor exacto de:

1) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4-2}}$$

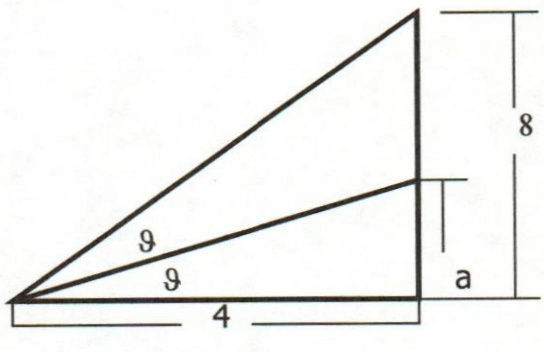
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$$

2) $\sec(-15°) = \dfrac{1}{\cos(-15°)} = \dfrac{1}{\cos 15°}$

$$\cos 15° = \cos\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\cos 15° = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \cos 15° = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

3) Calcular a en la figura siguiente, siendo a>0



$\text{tg}\vartheta = \dfrac{a}{4}$ $\qquad$ $\text{tg}2\vartheta = \dfrac{8}{4} = 2$

pero $\text{tg}2\vartheta = \dfrac{2\text{tg}\vartheta}{1-\text{tg}^2\vartheta}$,sustituyendo

$$2 = \frac{2.\frac{a}{4}}{1-\frac{a^2}{16}} \Rightarrow 2 = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{16-a^2}{16}} \Rightarrow 2 = \frac{8a}{16-a^2} \Rightarrow \frac{8a-32+2a^2}{16-a^2} =$$

$a^2+4a-16=0$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-16)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$a = -2 \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow a = 2\sqrt{5} - 2$$

2.5.8) OTRAS IDENTIDADES

Sumando miembro a miembro las identidades (I) y (II) se tiene

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \underline{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} \\ \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \end{array}$$

entonces

$$\boxed{\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right] \quad \text{(XIII)}}$$

Restando miembro a miembro (I) de (II) se tiene:

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \underline{-\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} \\ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{array}$$

entonces

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right] \quad \text{(XIV)}}$$

Análogamente, sumando miembro a miembro las identidades (III) y (IV)

$$\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \underline{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta} \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \end{array}$$

entonces

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right] \quad \text{(XV)}}$$

Restando miembro a miembro (III) de (IV) se tiene:

$$\begin{array}{l} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \underline{-\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta} \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{array}$$

entonces

$$\boxed{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)\right] \quad \text{(XVI)}}$$

Si en las identidades de la XII a la XVI se realiza el cambio de variable siguiente: $\alpha+\beta=x \wedge \alpha-\beta = y$

Se tiene:

$$\begin{array}{l} \alpha+\beta = x \\ \underline{\alpha-\beta = y} \\ 2\alpha = x + y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \alpha+\beta = x \\ \underline{-\alpha+\beta = - y} \\ 2\beta = x - y \end{array}$$

$\alpha = \dfrac{x + y}{2}$ $\qquad\qquad$ $\beta = \dfrac{x - y}{2}$

Al sustituir en las identidades de la XII a la XVI se obtiene otras identidades, que permiten **factorizar la suma y diferencia de senos y cosenos de ángulos distintos,** así:

$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$	(XVII)
$\cos x - \cos y = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$	(XVIII)
$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}y = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$	(XIV)
$\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$	(XX)

3) IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una identidad trigonométrica es una igualdad que es verdadera para todos los valores de las variables donde estén definidas las expresiones contenida en la igualdad. Así por ejemplo una igualdad que contenga a $tg\alpha$ será identidad si se cumple para cualquier $\alpha \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$, pues el dominio de la función tangente no contiene a ninguno de esos valores. Por supuesto debe respetarse el dominio de las funciones trigonométricas involucradas en la igualdad, así como no admitir división entre cero, ni cantidades subradicales negativas en las raíces de índice par.

Una igualdad es una equivalencia, una forma en lógica, de demostrar equivalencias, es plantear la implicación directa y la recíproca y demostrar cada una de ellas. Esto permite obtener un método para demostrar identidades trigonométricas, pues verificar una identidad consiste en demostrar que las expresiones dadas son equivalentes.

Por lo tanto para demostrar identidades trigonométricas se recomiendan los siguientes pasos:

Se toma uno de los dos miembros de la igualdad, por ejemplo el primero, y se le aplican transformaciones trigonométricas, usando las definiciones y las identidades demostradas previamente, (identidades fundamentales, de suma y resta de ángulos, de ángulo medio, etc) y transformaciones algebraicas hasta obtener el segundo miembro. Para que la demostración sea completa se debería tomar ahora, el segundo miembro y trasformarlo hasta obtener el primero. Este último paso en la práctica no se lleva a cabo, pues se reduce a repetir los paso efectuados en la primera transformación, pero ahora de una manera regresiva.

Se sugiere tomar para realizar la demostración el miembro de la igualdad que esté más complicado pues en él será más sencillo aplicar transformaciones.

Cuando no se logre obtener la expresión buscada, se puede aplicar la propiedad transitiva de los números reales en el proceso de demostración. Así, se toma el primer miembro y se aplican transformaciones hasta obtener una expresión "c". Ahora se toma el segundo miembro y se aplican transformaciones hasta obtener la misma expresión "c". Por la propiedad transitiva, como ambos miembros son iguales a "c", queda demostrada la igualdad entre ellos. Esta situación se muestra en el ejemplo d.

Durante el proceso de demostración de una identidad **no debe** aplicarse la misma operación a ambos miembros de la igualdad, por ejemplo elevar ambos miembros al cuadrado, pues esta práctica sólo es válida en expresiones que son iguales y en este caso es eso lo que se desea demostrar, esto implica un error de concepto pues se estaría asumiendo que es una identidad en lugar de demostrarla.

Ejemplos:

Demostrar las siguientes identidades

1) $$\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{ctg}\vartheta = \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta}$$

Observe que esta igualdad tiene sentido solamente si $\vartheta \neq n\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$

Se toma el primer miembro y se aplican las transformaciones: definición de tangente y cotangente, suma de fracciones usando el m.c.m, identidad fundamental y todo esto permite obtener el segundo miembro de la igualdad, por lo que la identidad está demostrada como se muestra a continuación:

$$\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{ctg}\vartheta = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\vartheta} + \frac{\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta} = \frac{\operatorname{sen}^2\vartheta + \cos^2\vartheta}{\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta} = \frac{1}{\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}$$

2) $$\frac{\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta - \cos\vartheta} = \frac{\sec\vartheta + \csc\vartheta}{\sec\vartheta - \csc\vartheta}$$

Observe que está igualdad está definida si $\vartheta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ y

$\vartheta \neq n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

Se trabaja el primer miembro hasta obtener el segundo:

$$\frac{\sec\vartheta + \csc\vartheta}{\sec\vartheta - \csc\vartheta} = \frac{\frac{1}{\cos\vartheta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}}{\frac{1}{\cos\vartheta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}}{\frac{\operatorname{sen}\vartheta - \cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\vartheta + \cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta - \cos\vartheta}$$

Se puede simplificar la expresión $\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta$ porque la igualdad original no está definida cuando ese producto es igual a cero. De no ser así, al realizar esta simplificación se estaría admitiendo la división entre cero y la demostración sería incorrecta.

3) $\operatorname{ctg}^2\vartheta - \cos^4\vartheta \csc^2\vartheta = \cos^2\vartheta$

Esta igualdad está definida si $\vartheta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Se desarrolla el primer miembro hasta obtener el segundo, así:

$$\operatorname{ctg}^2\vartheta - \cos^4\vartheta \csc^2\vartheta = \frac{\cos^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta} - \cos^4\vartheta \frac{1}{\operatorname{sen}^2\vartheta}$$

$$\frac{\cos^2\vartheta - \cos^4\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta} = \frac{\cos^2\vartheta\left(1 - \cos^2\vartheta\right)}{\operatorname{sen}^2\vartheta} = \cos^2\vartheta \frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{\operatorname{sen}^2\vartheta} = \cos^2\vartheta$$

En este ejemplo la simplificación de $\operatorname{sen}^2\vartheta$ tiene la misma explicación del ejemplo anterior.

4) $\dfrac{\cos\vartheta}{\csc\vartheta + 2\operatorname{sen}\vartheta} = \dfrac{\operatorname{tg}\vartheta}{1 + 3\operatorname{tg}^2\vartheta}$

Observe que en esta igualdad los dos denominadores son diferentes de cero, pues se están sumando en ambos casos dos números positivos. Pero $\csc\vartheta$ y $\operatorname{tg}\vartheta$ no están definidas para cualquier valor real de ϑ. Por lo tanto está igualdad está definida si $\operatorname{sen}\vartheta \neq 0 \wedge \cos\vartheta \neq 0$, es decir $\vartheta \neq n\dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$.

Esta identidad se demuestra aplicando la propiedad transitiva.

Se desarrolla el primer miembro:

$$\frac{\cos\vartheta}{\csc\vartheta + 2\operatorname{sen}\vartheta} = \frac{\cos\vartheta}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\vartheta} + 2\operatorname{sen}\vartheta} = \frac{\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{1 + 2\operatorname{sen}^2\vartheta}$$

Ahora se desarrolla el segundo miembro:

$$\frac{tg\vartheta}{1+3tg^2\vartheta}=\frac{\dfrac{sen\vartheta}{\cos\vartheta}}{1+3\dfrac{sen^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}}=\frac{sen\vartheta\cos\vartheta}{\cos^2\vartheta+3sen^2\vartheta}=$$

$$\frac{sen\vartheta\cos\vartheta}{1-sen^2\vartheta+3sen^2\vartheta}=\frac{sen\vartheta\cos\vartheta}{1+2sen^2\vartheta}$$

Entonces se tiene:

$$\frac{\cos\vartheta}{\csc\vartheta+2sen\vartheta}=\frac{\cos\vartheta sen\vartheta}{1+2sen^2\vartheta}\wedge\frac{tg\vartheta}{1+3tg^2\vartheta}=\frac{sen\vartheta\cos\vartheta}{1+2sen^2\vartheta}$$

Por lo tanto se demuestra que: $\dfrac{\cos\vartheta}{\csc\vartheta+2sen\vartheta}=\dfrac{tg\vartheta}{1+3tg^2\vartheta}$

Otra forma de demostrara esta identidad es la siguiente.

Se desarrolla el segundo miembro, así:

$$\frac{tg\vartheta}{1+3tg^2\vartheta}=\frac{\dfrac{sen\vartheta}{\cos\vartheta}}{1+3\dfrac{sen^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}}=\frac{sen\vartheta\cos\vartheta}{\cos^2\vartheta+3sen^2\vartheta}=$$

$$\frac{\dfrac{sen\vartheta\cos\vartheta}{sen\vartheta}}{\dfrac{1-sen^2\vartheta+3sen^2\vartheta}{sen\vartheta}}=\frac{\cos\vartheta}{\csc\vartheta+2sen^2\vartheta}$$

Dado que el dominio de la identidad es $\vartheta\neq n\dfrac{\pi}{2}$, $n\in Z$, no es posible que $sen\vartheta$ sea cero, por lo tanto se puede dividir al numerador y al denominador de la expresión entre $sen\vartheta$, con la finalidad de obtener el primer miembro de la identidad.

5) $\dfrac{\cos 7x + \cos x}{\text{sen}7x + \text{sen}x} = \text{ctg}4x$

El dominio de esta identidad es $x(2n + 1)\dfrac{\pi}{8}$, $n \in Z$.

Para demostrarla se simplificó el primer miembro usando las identidades XVII y XIX que permiten factorizar suma de senos y cosenos, como se muestra a continuación:

$$\frac{\cos 7x + \cos x}{\text{sen}7x + \text{sen}x} = \frac{2\cos\left(\dfrac{7x + x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{7x - x}{2}\right)}{2\text{sen}\left(\dfrac{7x + x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{7x - x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos 4x}{\text{sen}4x} = \text{ctg}4x$$

4) ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación trigonométrica es una igualdad que contiene funciones trigonométricas y es verdadera para determinados valores de la variables, dentro del dominio de la igualdad.

Resolver una ecuación trigonométrica consiste en determinar **todos** los valores que puede tomar el ángulo o la variable para que la igualdad se satisfaga, o mejor dicho, sea verdadera.

Por ejemplo, resolver la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, consiste en hallar cuales son los ángulos que tienen por seno el valor $\frac{1}{2}$. En matemática esto se escribe así: $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \operatorname{arc\,sen}\frac{1}{2}$. Los valores de x que satisfacen esta igualdad son: $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$,.....Cada uno de estos valores se llaman soluciones particulares de la ecuación y las soluciones generales son:

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \wedge x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$. Observe que los valores del ángulo se determinan utilizando el círculo trigonométrico y los ángulos de referencia, así como la periodicidad de la función. Otra opción, es usar la gráfica de la función en cuestión, en este caso específico la gráfica de la función seno.

Para resolver las ecuaciones trigonométricas se emplean dos métodos fundamentales:

I)**La descomposición en factores**, en la que se recomiendan los siguientes pasos a seguir:

a)Expresar todas las funciones trigonométricas que están en la ecuación en términos del mismo ángulo. Por ejemplo, si aparecen funciones de x,2x, $\frac{x}{2}$3x, etc, expresarlas en función de uno de esos ángulos, a través del uso de identidades trigonométricas. Esta recomendación no es importante si la ecuación puede ser factorizada tal como está y ese producto es igual a cero.

b)Expresar toda la ecuación en términos de la misma función trigonométrica, es decir si aparecen distintas funciones como senx, $\cos^2 x$, tgx, etc, expresarlas todas en términos de senx, o de cosx, en general en términos de la función más conveniente. Esta recomendación no es importante si la ecuación puede ser factorizada tal como está y ese producto es igual a cero.

c)Factorizar la ecuación ya transformada y resolverla considerando como incógnita la única función que aparece en la ecuación.

II)**El cambio de variable**, en este caso es fundamental seleccionar adecuadamente la función a través de la cual se desea realizar el cambio de variable, pues puede ocurrir que una función conduzca a una nueva ecuación racional, mientras que otra conduzca a una o varias ecuaciones irracionales, indiscutiblemente, el cambio que reduce la ecuación a una racional es más conveniente.

Por ejemplo al resolver la ecuación $\cos^2 x+3\cos x=4\text{sen}^2 x$

Un cambio puede ser: cosx=y, lo que conduce a la ecuación: $y^2+3y=4(1-y^2)$, se resuelve algebraicamente y se devuelve el cambio, para obtener una o varias ecuaciones sencillas, con una única función trigonométrica, en este caso cosx, que sólo estarán resueltas cuando se hallen los valores de x que las satisfacen.

Otro cambio puede ser y= senx, lo que conduce al conjunto de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{l} 1 - y^2 + 3\sqrt{1 - y^2} = 4y^2 \\ 1 - y^2 - 3\sqrt{1 - y^2} = 4y^2 \end{array}\right.$$

, que se resuelve uniendo las soluciones de cada una de las ecuaciones que forman este conjunto. Luego, se devuelve el cambio, para obtener una o varias ecuaciones sencillas, con una única función trigonométrica, en este caso cosx, que sólo estarán resueltas cuando se hallen los valores de x que las satisfacen.

Obviamente el primer cambio conduce a un proceso de solución mucho más simple, sin el riesgo de modificación del dominio de la ecuación.

En cualquier caso, **la verificación de las soluciones** o comprobación, en una ecuación trigonométrica es **necesaria** cuando:

1)Se produjo la ampliación del dominio[2] de la ecuación. Esto ocurre cuando en el proceso de resolución, debido a ciertas transformaciones, tales como, **simplificación de alguna raíz de índice par** elevando ambos miembros de la ecuación a la potencia correspondiente, eliminación de denominadores, simplificación de fracciones, reducción de términos semejantes, etc., todos éstas pueden conducir a la aparición de raíces extrañas.

[2] Se entiende por dominio de la ecuación trigonométrica los valores para los cuales cada una de las funciones que intervienen en la ecuación están definidas, además de aquellos valores para los cuales el denominador es diferente de cero y las cantidades subradicales de las raíces de índice par son positivas.

2)Se utilizaron identidades trigonométricas cuyos miembros primero y segundo tienen diferentes dominios, por ejemplo $\dfrac{2tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)} = tg\alpha$,

$tg\alpha ctg\alpha=1$, $\quad \dfrac{1 - \cos\alpha}{sen\alpha} = tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

El uso de estas identidades de izquierda a derecha conduce a la ampliación del dominio de la ecuación, es decir, al resolver la ecuación después de transformada pueden aparecer raíces extrañas, situación que se solventa comprobando cada una de las soluciones obtenidas y descartando aquellas que no satisfagan la igualdad. Mientras que, la utilización de estas identidades de derecha a izquierda conduce a la reducción del dominio de la ecuación, es decir al resolver la ecuación después de transformada pueden perderse raíces, lo que es inadmisible en un proceso de solución. Por lo tanto la aplicación de cada una de estas identidades, así como cualquier otro tipo de transformación debe efectuarse cuidadosamente y analizando cada paso par no incurrir en una pérdida de soluciones.

Estos métodos de resolución de ecuaciones trigonométricas se aplican en los ejemplos que se muestran a continuación.

Resolver en R las siguientes ecuaciones trigonométricas

1) $(\text{sen } x - \cos x)^2 = \cos 2x$

Se aplican transformaciones para obtener una ecuación equivalente a (1), por lo que se desarrolla el binomio al cuadrado y se expresa la ecuación en función sólo de x a través de la identidad del coseno del ángulo doble.

$\text{Sen}^2 x - 2 \text{ sen } x \cos x + \cos^2 x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

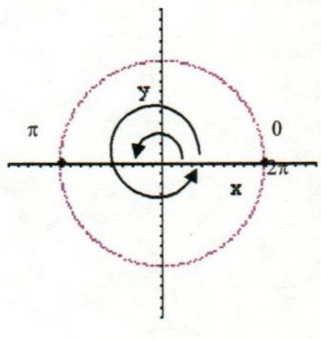
$2\text{Sen}^2 x - 2 \text{ sen } x \cos x = 0$

$2\text{sen } x (\text{sen } x - \cos x) = 0$

Esta ecuación es equivalente al conjunto de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{l} \text{senx} = 0 \\ \text{senx} - \cos x = 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo:



1.1) $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = \text{arc sen}(0) \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi., 3\pi, \ldots..$

Comprobando en la ecuación original:

Para $x = 0$

$(\text{sen}0 - \cos 0)^2 = (-1)^2 = 1$

$\cos 2(0) = \cos 0 = 1$, entonces $x=0$ y todos sus coterminales , sí son solución

Para $x = \pi$

$(\text{sen}\pi - \cos\pi)^2 = (-(-1))^2 = 1$

$\cos 2(\pi) = \cos 2\pi = 1$, entonces $x = \pi$ y todos sus coterminales , sí son solución

Por lo tanto una solución de la ecuación es: $\boxed{x=2k\pi,\ k\in Z}$

1.2) senx – cosx = 0

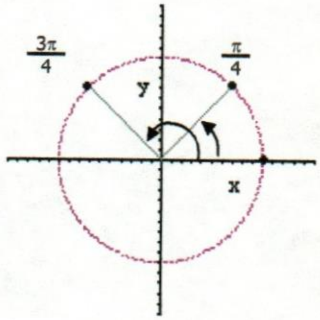
$$\text{senx} = \cos x \Rightarrow \text{senx} = \sqrt{1-\text{sen}^2x} \Rightarrow \text{sen}^2x = \left(\sqrt{1-\text{sen}^2x}\right)^2$$

Al elevar al cuadrado se está ampliando el dominio de la ecuación, por lo que se deben comprobar las soluciones obtenidas, o bien, éstas deben satisfacer la condición $\text{senx}\geq 0$, que es la que garantiza la veracidad de la igualdad $\text{senx} = \sqrt{1-\text{sen}^2x}$, es decir, las soluciones obtenidas deben intersectarse con las soluciones de la inecuación $\text{senx}\geq 0$. Observe que estas condiciones son las mismas que se aplican cuando se resuelve una ecuación irracional[3].

En este ejemplo se resuelve comprobando las soluciones, entonces:

$$2\text{sen}^2x-1=0 \Rightarrow \text{sen}^2x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \left(\text{senx}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\text{senx}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

$$\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \text{arc sen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ldots\ldots$$

Comprobando en la ecuación original

Para $x=\frac{\pi}{4}$

$$\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$\cos 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, entonces $x = \frac{\pi}{4}$ y todos sus coterminales, si son solución

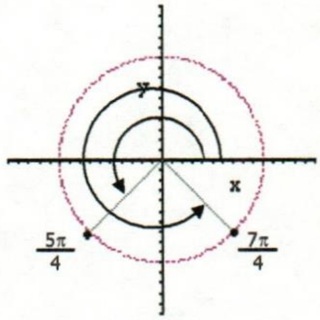
Para $x = \frac{3\pi}{4}$

$$\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 = 2$$

$\cos 2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$, entonces $x = \frac{3\pi}{4}$ y sus coterminales, **no son solución.**

$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \ldots\ldots$



Comprobando en la ecuación original

Para $x = \frac{5\pi}{4}$

$$\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 = 0$$

[3] Ver en el Capítulo III Ecuaciones, la solución de ecuaciones irracionales, página 93

$\cos 2\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{2} = 0$, entonces $x=\frac{5\pi}{4}$ y todos sus coterminales, si son solución

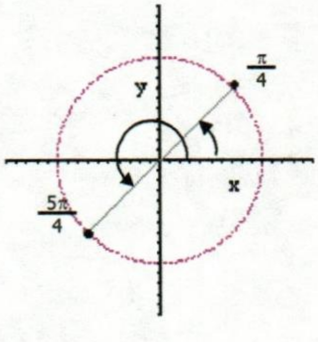
Para $x=\frac{7\pi}{4}$

$$\left(\text{sen}\,\frac{7\pi}{4} - \cos\,\frac{7\pi}{4}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 = 2$$

$\cos 2\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\frac{7\pi}{2} = 0$, entonces $x=\frac{7\pi}{4}$ y sus coterminales, **no son solución.**

Las soluciones de la ecuación son $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5\pi}{4}$ y sus coterminales, lo que se escribe en forma general así:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z}$$



Una forma mucho más simple de resolver la ecuación (1.2) es la siguiente:

senx − cosx = 0

Se puede dividir a la ecuación entre cosx, siempre y cuando cosx$\neq$0, pero cabe la pregunta, ¿cosx=0 es solución de le ecuación?. Observe que cuando cosx=0, senx=1 y senx=-1, es decir $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$, entonces se verifica en la ecuación original por si existe la posibilidad de perder raíces, así:

Para $x=\frac{\pi}{2}$

$$\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}\right)^2 = (1-0)^2 = 1$$

$\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$, entonces $x=\frac{\pi}{2}$ y sus coterminales, **no son solución.**

Para $x=\frac{3\pi}{2}$

$$\left(\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2}\right)^2 = (-1-0)^2 = 1$$

$\cos 2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos 3\pi = -1$, entonces $x=\frac{3\pi}{2}$ y sus coterminales, **no son solución**

Como estos valores de x no satisfacen la ecuación original, no existe el riesgo de admitir división entre cero, ni de perder raíces por lo que obtengo una ecuación equivalente a (1.2) dividiéndola entre cosx.

$(\text{senx}-\cos x=0) \div \cos x \Leftrightarrow \text{tgx}-1=0 \Rightarrow \text{tgx}=1 \Rightarrow x=\text{arctg}1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z}$

Observe que esta forma de resolución es mucho más sencilla, pero **sólo** puede ser aplicada si los valores que hacen cero la expresión por la cual se divide **no satisfacen** la ecuación original. En caso contrario el proceso es incorrecto, si no se hace el análisis correspondiente y se perderán soluciones.

2) $\sqrt{3}$ senx-cosx=0

Esta ecuación trigonométrica puede ser resuelta de la misma forma en que se resolvió en el ejemplo anterior la ecuación (1.2), es decir dividiendo toda la ecuación entre cosx, para ello es necesario que cosx. Observe que cuando cosx=0, senx=1 v senx=-1, es decir $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$, entonces se verifica en la ecuación original por si existe la posibilidad de perder raíces, así:

Para $x=\frac{\pi}{2}$

$\sqrt{3}(1)-0=\sqrt{3}\neq 0$

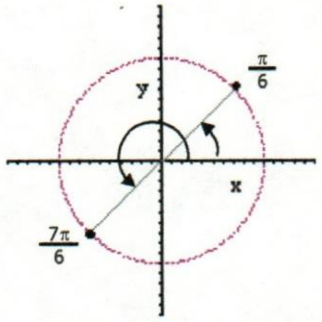
Para $x=\frac{3\pi}{2}$

$\sqrt{3}(-1)-0=-\sqrt{3}\neq 0$

Como estos valores de x no satisfacen la ecuación original, $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$, no son solución, por lo que no existe el riesgo de admitir división entre cero, ni de perder raíces Entonces una ecuación equivalente a (2) es la que se obtiene al dividirla entre cosx.

$$\sqrt{3}\,tgx-1=0 \Leftrightarrow tgx = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = arctg\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x=\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$$



Este procedimiento de dividir la ecuación por una expresión que contenga variable puede ser aplicado siempre que en el proceso de resolución se realice el análisis correspondiente, de lo contrario al dividir sin estudiar que le ocurre a la ecuación se pierden soluciones. Por lo tanto se recomienda en la medida de lo posible, evitar dividir por una expresión que contenga variable.

3) 1-cosx=senx

Para resolver esta ecuación se expresa toda en función de cosx

$$1\text{-}cosx=\pm\sqrt{1-\cos^2 x} \Rightarrow (1-\cos x)^2 = \left(\pm\sqrt{1-\cos^2 x}\right)^2 \text{(A)}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros se está ampliando el dominio de la ecuación original, pues se admite que senx puede ser negativo o positivo, cosa que para la ecuación original es falsa, pues 1-cosx$\leq$0 para cualquier x real, por lo tanto para que esa igualdad se satisfaga es necesario que senx$\geq$0, es decir la ecuación 1-cosx=senx es equivalente a 1-cosx=$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, si y sólo si senx$\geq$0 .

Entonces, al igual que en las ecuaciones irracionales se puede resolver esta ecuación de dos formas:

I)Asegurando la equivalencia en cada transformación que se aplica, o

II)Elevando al cuadrado y verificando en la ecuación original cada una de las soluciones.

En este ejemplo se resolverá usando el método (II)

Desarrollando la ecuación (A) se tiene:

$1\text{-}2\cos x+\cos^2 x=1-\cos^2 x \Rightarrow 2\cos^2 x-2\cos x=0 \Rightarrow 2\cos x(\cos x-1)=0$

$\cos x=0 \quad \vee \quad \cos x-1=0$

Resolviendo $\cos x=0 \Rightarrow x=\arccos 0 \Rightarrow x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in z$

Comprobando en la ecuación original

Para $x=\dfrac{\pi}{2}$

$1-\cos\dfrac{\pi}{2}=1-0=1$; sen $\dfrac{\pi}{2}=1$, entonces $x=\dfrac{\pi}{2}$ y todos sus coterminales son solución de la ecuación original.

Para $x=\dfrac{3\pi}{2}$

$1-\cos\dfrac{3\pi}{2}=1-0=1$; sen$\dfrac{3\pi}{2}=-1$, entonces $x=\dfrac{3\pi}{2}$ y todos sus coterminales **no** son solución de la ecuación original, estas son raíces extrañas.

Una solución de la ecuación es $\boxed{x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k \in Z}$

Resolviendo $\cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=\arccos 1 \Rightarrow x=2k\pi$, $k \in z$

Comprobando en la ecuación original

Para $x=0$

$1-\cos 0=1-1=0$; $\operatorname{sen} 0=0$, entonces $x=0$ y todos sus coterminales son solución de la ecuación original.

Otra solución de la ecuación es $\boxed{x=2k\pi \text{ , } k \in z}$

4) $(1+\cos x)(\csc x-1)=0$

Como la ecuación está factorizada y es igual a cero, simplemente se resuelve el siguiente conjunto de ecuaiones:

$1+\cos x = 0 \quad v \quad \csc x-1=0$

Resolviendo $1+\cos x=0$ (A)

$\cos x = -1 \Rightarrow x=\arccos(-1) \Rightarrow x=\pi + 2k\pi$, $k \in Z$

Resolviendo $\csc x-1=0$ (B)

$$\csc x=1 \Rightarrow \operatorname{sen} x=1 \Rightarrow x=\operatorname{arcsen} 1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$$

Ahora bien, se sabe por la definición de las funciones trigonométricas que $\csc x$ está definida par cualquier x real siempre y cuando $\operatorname{sen} x \neq 0$, es decir $x \neq 2k\pi$, $k \in Z$

Por lo tanto las soluciones obtenidas al resolver la ecuación (A) **no** son solución de la ecuación (4), porque la división entre cero no está definida en los números reales.

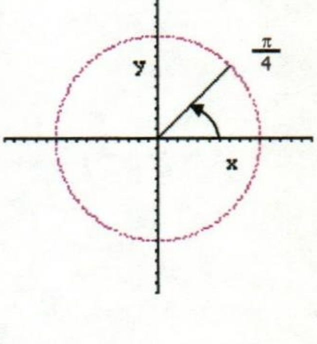
Entonces la solución de la ecuación es $\boxed{x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z}$

Otra forma de analizar esta solución es comprobando en la ecuación original como se mostró en los ejemplos anteriores, entonces al sustituir $x=\pi$, se obtendría una división entre cero, por lo que este resultado debe ser descartado.

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right)=1$

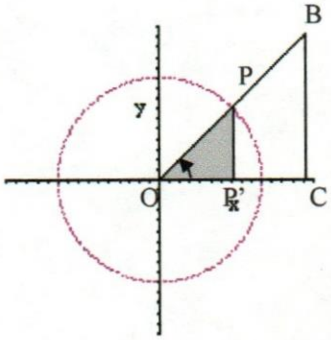
Para resolver esta ecuación se debe trabajar con el ángulo de referencia y el período de la función tangente, o dicho de otra forma, se debe trabajar con la solución general, tal como se muestra a continuación:

$$\frac{x}{3}=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in z \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}+3k\pi$$



5) TRIGONOMETRÍA DEL TRIÁNGULO

Se puede encontrar los valores de las funciones trigonométricas mediante cualquier triángulo semejante al triángulo de referencia definido en el círculo unitario para un ángulo ϑ.



Los $\Delta OPP'$ y ΔOBC son semejantes, por lo tanto sus lados homólogos son proporcionales, así:

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \quad \text{pero,} \quad \overline{OP'} = \cos\vartheta \Rightarrow \cos\vartheta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$$

$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \quad \text{pero,} \quad \overline{PP'} = \operatorname{sen}\vartheta \Rightarrow \operatorname{sen}\vartheta = \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}}$$

Por lo tanto los valores de una función trigonométrica dependen sólo del tamaño del ángulo y no del tamaño del triángulo.

Entonces en cualquier triángulo rectángulo pueden definirse las razones trigonométricas para un ángulo ϑ, en función de las longitudes de los catetos y de la hipotenusa del triángulo, como sigue:

$$\operatorname{sen}\vartheta = \frac{\text{longitud cateto opuesto}}{\text{longitud hipotenusa}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OC}}$$

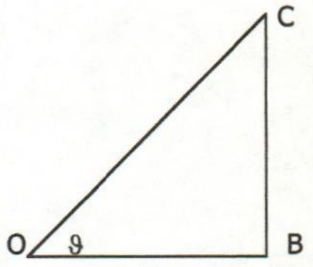
$$\cos\vartheta = \frac{\text{longitud cateto adyacente}}{\text{longitud hipotenusa}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\text{longitud cateto opuesto}}{\text{longitud cateto adyacente}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}}$$

$$\csc\vartheta = \frac{\text{longitud hipotenusa}}{\text{longitud cateto opuesto}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CB}}$$

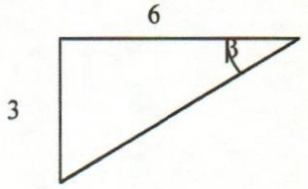
$$\sec\vartheta = \frac{\text{longitud hipotenusa}}{\text{longitud cateto adyacente}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$$

$$\operatorname{ctg}\vartheta = \frac{\text{longitud cateto adyacente}}{\text{longitud cateto opuesto}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{CB}}$$



Ejemplos

1) Hallar las funciones trigonométricas del ángulo que se indica en la figura



$$\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\beta = \frac{6}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{6} \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 2$$

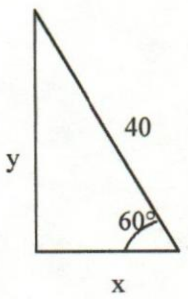
$$\csc\beta = \sqrt{5}$$

$$\sec\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2}$$

2) Calcular en cada figura las incógnitas que se señalan

a) $\text{sen } 60° = \frac{4}{40}$

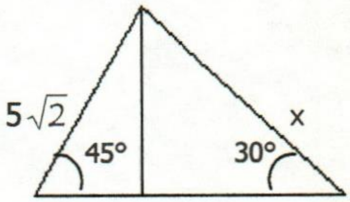


$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{40} \Rightarrow y = 20\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{x}{40}$

$\frac{1}{2} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = 20$

b) $\text{sen } 45° = \frac{h}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{5\sqrt{2}}$



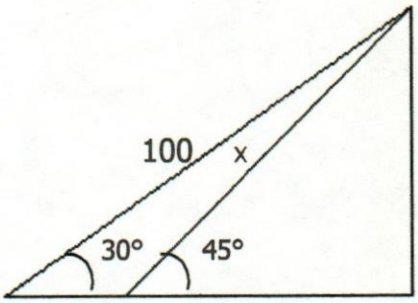
$\text{sen } 30° = \frac{h}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{x}$

$h=5 \Rightarrow x=2.5 \Rightarrow x=10$

c) $\text{sen } 30° = \frac{h}{100} \Rightarrow h = 50$

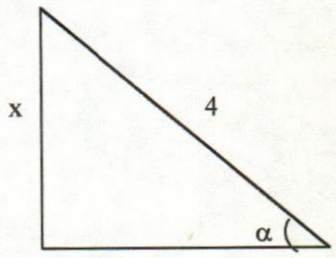
$\text{sen } 45° = \frac{50}{x}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{50}{x} \Rightarrow x = 50\sqrt{2}$



3) Dado el siguiente triángulo

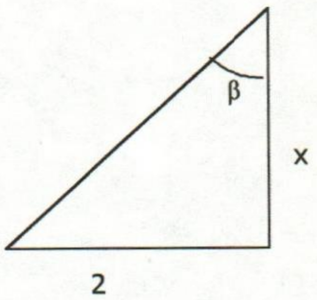
a) Calcule en función de x, $\dfrac{4\,\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$



$$\text{sen}\alpha = \frac{x}{4} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}$$

$$\frac{4\,\text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4\left(\dfrac{x}{4}\right)^2}{\dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{4}} = \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

b) Calcule, $\text{sen}\beta \cos\beta$



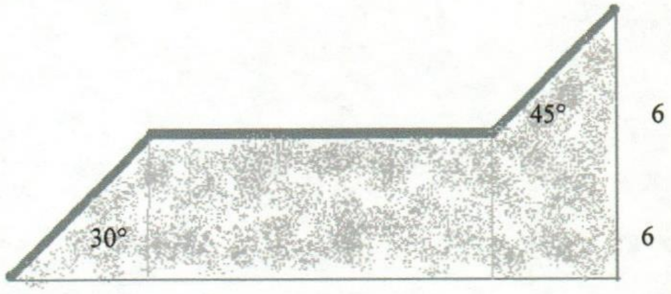
$$\text{sen}\beta = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$\cos\beta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$\text{sen}\beta \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \Rightarrow \text{sen}\beta \cos\beta = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

4) Problemas de Aplicación

En la figura se aprecia parte de un tobogán acuático. Hallar la longitud total del tobogán.



$$\operatorname{tg} 30° = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{18}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 6\sqrt{3}\,\text{m}$$

$$L_1 = \sqrt{36 + 108} = \sqrt{144} = 12$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{6}{y} \Rightarrow 1 = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 6$$

$$L_3 = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}\ \text{m}$$

$$L_2 = 40 - 6 - 6\sqrt{3} = 34 - 6\sqrt{3}$$

$$L_t = L_1 + L_2 + L_3$$

$$L_t = 12 + 34 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$$

$$L_t = 46 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}\ \text{m}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

A) Seleccione la alternativa que usted considera hace verdadera la proposición planteada. Sólo una es la correcta.

1) Al convertir 10° en radianes, se obtiene

a. $\frac{\pi}{18}$

b. $\frac{18}{\pi}$

c. 18π

$$10°\frac{\pi}{180°}=\frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

La respuesta correcta es la **a**

2) Al convertir $\frac{7}{6}$ radianes en grados, se obtiene

a. $\left(\frac{210}{\pi}\right)^{0}$

b. $210\pi°$

c. $210°$

$$\frac{7}{6}\frac{180°}{\pi}=\left(\frac{210}{\pi}\right)^{0}$$

La respuestas correcta es la **a**

3) El área de un sector circular con radio igual a 4 cm mide $\frac{16\pi}{3}$ cm^2. Entonces el ángulo central del sector, en grados, es

a. $\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{0}$

b. $60°$

c. $120°$

$$A=\frac{1}{2}r^2\vartheta \Rightarrow \frac{16\pi}{3}=\frac{1}{2}4^2\vartheta \Rightarrow \vartheta=\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \vartheta=120°$$

La respuesta correcta es la **c**

4) El punto P se desplaza 3 unidades sobre el círculo unitario partiendo del punto (1,0), el cuadrante en el que se encuentra P es

a. Segundo

b. Tercero

c. Cuarto

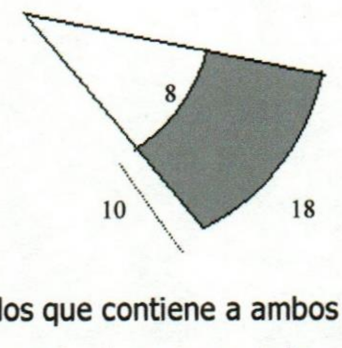
La respuesta es la **a**

Comentario

En las preguntas 1 y 2 se aplicó la fórmula de la equivalencia entre los dos sistemas para medición de ángulos, que son el sistema Circular y el Sexagesimal. Es importante mencionar que cualquier número real puede representar la medida de un ángulo en radianes, esto es obvio cuando se tiene clara la definición de radian.

En las preguntas 3 y 4 simplemente se aplicó la fórmula de área de un sector circular. En el caso específico de la pregunta 4, observe que al aplicar esta fórmula, como el radio del círculo trigonométrico es 1, se obtiene que el arco recorrido es igual al valor del ángulo que lo sustenta, medido en radianes, por lo que $\vartheta = 3$ radianes. Además se sabe que los ángulos en el segundo cuadrante cumplen con la condición de ser mayores que $\frac{\pi}{2}$, pero menores que π, por lo tanto ϑ pertenece al segundo cuadrante.

B) Determine el valor del área sombreada, sabiendo que se trata de dos sectores circulares concéntricos



Si los círculos que contiene a ambos sectores son concéntricos, entonces el ángulo central es el mismo para ambos, y es ϑ, además el círculo de mayor radio r_2, cumple: $r_2=r_1+10$

Entonces: $\vartheta = \frac{8}{r_1} \wedge \vartheta = \frac{18}{r_2} \Rightarrow \frac{8}{r_1} = \frac{18}{r_1+10} \Rightarrow 8r_1+80=18r_1 \Rightarrow r_1=8$

$r_2=18 \wedge \vartheta=1$.

Ahora el área sombreada es: $A_s = \frac{1}{2}r_2^2\vartheta - \frac{1}{2}r_1^2\vartheta = 162\text{-}32=130u^2$

C) A continuación se plantean una serie de proposiciones. Coloque una V o una F si la proposición es verdadera o falsa

a) El punto $P\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ está sobre el círculo trigonométrico o unitario *Justificación* La ecuación del círculo trigonométrico es $x^2+y^2=1$, si el punto pertenece, debe satisfacer esa ecuación. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1$	**V**
b) Si α es el ángulo central definido por P, entonces $ctg\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ *Justificación* Como P es un punto sobre el círculo trigonométrico se cumple que $ctg\alpha = \frac{x_P}{y_P} \Rightarrow ctg\alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$	**F**
c) Si $\cos\alpha = -\sqrt{3}$ y $sen\alpha = -\frac{1}{2}$ entonces α es un ángulo del cuarto cuadrante *Justificación* Por definición se sabe que P(x,y)=P(cosα,senα),entonces si $x<0$, $y<0$ el punto P pertenece al III cuadrante, por lo que α también	**F**
d) El dominio de la función cotangente es $R - \{n\pi,\ n \in z\}$ *Justificación* Para que la función ctgx esté definida es necesario que $senx \neq 0$, y esto ocurre cuando $x \neq n\pi$, siendo n entero. Por lo tanto estos valores x no pueden estar en el dominio de la función	**V**
e) $sen\left(\frac{39\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *Justificación* $\frac{39\pi}{4}$ es un ángulo mayor que 2π y es coterminal de $\frac{7\pi}{4}$	**V**

D) Escriba el valor exacto de las funciones trigonométricas que se piden

1) Sen(315°)= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Tg(11π/6)= $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3) Sec(5π/4)= $-\sqrt{2}$

4) Cos(330°)= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) Ctg(7π/4)=-1

6) Csc(7π/6)=-2

7) Sec(300°)= 2

8) Cos(135°)= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

9) Ctg(5π/6)= $-\sqrt{3}$

10) Sen(3π/4)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$

E) Calcular

1) $\frac{1}{2}$ senα + cos β − 2senα cos β **si se sabe que** $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, $\alpha \in$ **IV cuadrante** $\cos\beta = -\frac{1}{5}$, $\beta \in$ **II cuadrante**

$$\cos\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\frac{4}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Sustituyendo

$\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ **=**

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) - \frac{1}{5} - 2\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{-10-9\sqrt{21}}{50}$$

2) $\text{sen}\left(\dfrac{126\pi}{7}\right) + \cos(-5\pi)\text{tg}\left(\dfrac{29\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(-\dfrac{25\pi}{3}\right)$

Cuando un ángulo está dado en radianes y es mayor que 2π se puede obtener su coterminal dentro del intervalo $[0,2\pi]$, usando el **Máximo Cociente Par**, como se muestra a continuación

$$\begin{array}{r|l} 126 & 7 \\ \hline 56 & 18 \\ 0 & \end{array}$$

Máximo Cociente Par
(Representa el número de vueltas en el círculo trigonométrico)

$\frac{0\pi}{7}$ es coterminal de $\frac{126\pi}{7}$

Repitiendo este procedimiento para los demás ángulos, se tiene

$$\begin{array}{r|l} 29 & 4 \\ \hline 5 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 3 \\ \hline 1 & 8 \end{array}$$

Sustituyendo: $\text{sen}\,0 + \cos(\pi)\,\text{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 0+(-1).1-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-2-\sqrt{3}}{2}$

3) $\dfrac{5\,\text{sen}\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\,\text{sen}\alpha}$, si $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{5}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$1+\dfrac{16}{25} = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec^2\alpha = \dfrac{41}{25} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{25}{41} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$

$\text{sen}\alpha =$

4) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$, si sen $\alpha = -\frac{12}{13} \wedge \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{13}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \text{sen}\frac{\pi}{3}\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{13} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5-12\sqrt{3}}{26}$

5) $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{4}\right)$, si se sabe que $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1$ y $\alpha \in$ I cuadrante.

Si $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ahora

$$\text{tg}\left(\tfrac{\alpha}{4}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\alpha}{4}\right)}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

F) Simplifique la expresión usando identidades fundamentales

1) $\frac{\sec(-\alpha)}{\csc\alpha}\text{tg}\alpha + 1 =$

$\frac{\sec\alpha}{\csc\alpha}\text{tg}\alpha + 1 = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\text{tg}\alpha + 1 = \text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$, si $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in z$

2) $\left(1 - \cos^2(-\alpha)\right)\csc^2\alpha =$

$\left(1-\cos^2\alpha\right)\frac{1}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = 1$, si $\alpha \neq k\pi$, $k \in Z$

G) Haciendo uso de las identidades trigonométricas

1) Exprese tg4x en función de 2x: $tg4x = \dfrac{2tg2x}{1 - tg^2 2x}$

2) Exprese sen6x en función de 12x: $sen6x = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 12x}{2}}$

3) Exprese cos5x en sólo función del $sen\left(\dfrac{5}{2}x\right)$: $\cos 5x = 1 - 2sen^2\left(\dfrac{5}{2}x\right)$

Comentario

En el ejemplo 1 se usó la identidad de $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$, observe que α es la mitad de 2α, y esa relación entre los ángulos debe respetarse al aplicar esta identidad, o cualquier otra, a una función trigonométrica dada. Análogamente, en el ejemplo 2, se aplicó la identidad $sen\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$, en este caso α es el doble de $\dfrac{\alpha}{2}$, y finalmente en el ejercicio 3, se aplicó la identidad $\cos 2\alpha = 1 - 2sen^2\alpha$.

H) Escribir la siguiente expresión solamente en función de cosx

1) $\sec x\, sen^2x + \sec x \cos^2 x =$

$\sec x(sen^2x + \cos^2 x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

2) $\dfrac{\cos(-x)\cos x - sen(-x)senx}{\sec x} =$

$$\frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\sec x} = \cos x$$

3) $\sec^2 x - tg^2 x + \cos^2 x - 2ctg^2 x =$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} + \cos^2 x - \frac{2\cos^2 x}{1-\cos^2 x} =$$

$$\frac{1-\cos^2 x - (1-\cos^2 x)(1-\cos^2 x) + \cos^2 x \cos^2 x(1-\cos^2 x) - 2\cos^4 x}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x} =$$

$$\frac{1-\cos^2 x - (1-2\cos^2 x + \cos^4 x) + \cos^4 x - \cos^6 x - 2\cos^4 x}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x - \cos^6 x - 2\cos^4 x}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x(1-\cos^4 x - 2\cos^2 x)}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x} = \frac{1-\cos^4 x - 2\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$$

I)Demuestre las siguientes identidades

1) $\frac{\text{senx}}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$

Desarrollando el primer miembro

$$\frac{\text{senx}}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = \frac{\text{senx}}{\frac{1}{\text{senx}}} + \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} = \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

2) $\frac{tgx - \text{senx}}{\text{sen}^3 x} = \frac{\sec x}{1+\cos x}$

Desarrollando el primer miembro

$$\frac{tgx - senx}{sen^3x} = \frac{\frac{senx}{cosx} - senx}{sen^3x} = \frac{senx - senx\cos x}{\cos xsen^3x} = \frac{senx(1-\cos x)}{\cos xsen^3x} =$$

$$\frac{1-\cos x}{\cos xsen^2x} = \frac{1-\cos x}{\cos x(1+\cos x)(1-\cos x)} = \frac{1}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{\sec x}{1+\cos x}$$

3) $\frac{tgx}{1-ctgx} + \frac{ctgx}{1-tgx} = 1 + tgx + ctgx$

$$\frac{tgx}{1-ctgx} + \frac{ctgx}{1-tgx} = \frac{tgx}{1-\frac{1}{tgx}} + \frac{\frac{1}{tgx}}{1-tgx} = \frac{tg^2x}{tgx-1} + \frac{1}{tgx(1-tgx)} = \frac{-tg^3x+1}{tgx(1-tgx)} =$$

$$= \frac{1-tg^3x}{tgx(1-tgx)} = \frac{(1-tgx)(1+tgx+tg^2x)}{tgx(1-tgx)} = \frac{1}{tgx} + 1 + tgx = 1 + tgx + ctgx$$

4) $(ctgx + tg\,2x)^2(1+\cos 4x) = 2\,ctg^2x$

$$(ctgx + tg\,2x)^2(1+\cos 4x) = \left(\frac{1}{tgx} + \frac{2tgx}{1-tg^2x}\right)^2(1+\cos^2 2x - sen^2 2x) =$$

$$\left(\frac{1-tg^2x+2tg^2x}{tgx(1-tg^2x}\right)^2 2\cos^2 2x = \frac{(1+tg^2x)^2}{tg^2x(1-tg^2x)^2}2\cos^2 2x =$$

$$\frac{(\sec^2 x)^2}{tg^2x\left(\frac{\cos^2 x - sen^2x}{\cos^2 x}\right)^2}2\cos^2 2x = \frac{\frac{1}{\cos^4 x}}{\frac{sen^2x}{\cos^2 x}\frac{(\cos 2x)^2}{\cos^4 x}}2\cos^2 2x = 2ctg^2x$$

5) $\frac{tg(x+\frac{\pi}{6})}{tg(x+\frac{\pi}{3})} = \frac{2\cos 2x - 1}{2\cos 2x + 1}$

$$\frac{tg(x+\frac{\pi}{6})}{tg(x+\frac{\pi}{3})} = \frac{\frac{tgx + tg\frac{\pi}{6}}{1 - tgxtg\frac{\pi}{6}}}{\frac{tgx + tg\frac{\pi}{3}}{1 - tgxtg\frac{\pi}{3}}} = \frac{\frac{3tgx + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}tgx}}{\frac{tgx + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}tgx}} = \frac{3tgx + \sqrt{3} - 3\sqrt{3}tg^2x - 3tgx}{3tgx + 3\sqrt{3} - \sqrt{3}tg^2x - 3tgx} =$$

$$\frac{\sqrt{3}-3\sqrt{3}tg^2x}{3\sqrt{3}-\sqrt{3}tg^2x}=\frac{1-3tg^2x}{3-tg^2x}=\frac{\cos^2 x-3sen^2x}{3\cos^2 x-sen^2x}=\frac{\cos^2 x-3+3\cos^2 x}{3\cos^2 x-1+\cos^2 x}=$$

$$\frac{2\cos^2 x-1+2\cos^2 x-1-1}{2\cos^2 x-1+2\cos^2 x-1+1}=\frac{2\cos 2x-1}{2\cos 2x+1}$$

$$6)\, sen(\alpha+\beta+\pi)\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta+\pi)sen(\tfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta)=\cos 2\alpha$$

$$sen(\alpha+\beta+\pi)\cos(\tfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta+\pi)sen(\tfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta)=$$

$$sen[(\alpha+\beta+\pi)-(\tfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta)]=sen(\alpha+\beta+\pi-\tfrac{\pi}{2}+\alpha-\beta)=sen(2\alpha+\tfrac{\pi}{2})=$$

$$sen2\alpha\cos\tfrac{\pi}{2}+\cos 2\alpha sen\tfrac{\pi}{2}=\cos 2\alpha$$

J) Resolver las siguientes ecuaciones en R

$$1)\sec\left(\frac{x}{3}\right)=-1$$

$$\frac{x}{3}=\pi+2k\pi\Rightarrow x=3\pi+6k\pi, k\in Z$$

2) $\cos^4x-2\cos^2x+1=0$

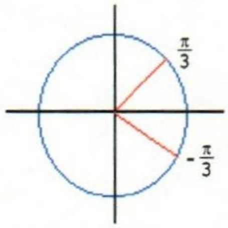
$(\cos^2x-1)^2=0\Rightarrow \cos^2x-1=0\Rightarrow(\cos x-1)(\cos x+1)=0\Rightarrow \cos x=1 \vee \cos x=-1\Rightarrow$

$x=k\pi, k\in Z$

K) Resolver la siguiente ecuación en el intervalo $0\leq x\leq 2\pi$

1) sec3x=2

$3x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{9}+2k\frac{\pi}{3}$



Ahora, se le dan valores enteros a K, para obtener las soluciones en el intervalo $[0,2\pi]$

$K=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{9} \vee x=-\frac{\pi}{9}$, descartado porque $x \in [0,2\pi]$

$K=1 \Rightarrow x=\frac{7\pi}{9} \vee x=\frac{5\pi}{9}$

$K=2 \Rightarrow x=\frac{13\pi}{9} \vee x=\frac{11\pi}{9}$

$K=3 \Rightarrow x=\frac{19\pi}{9}$, descartado porque $x \in [0,2\pi] \vee x=\frac{17\pi}{9}$

Entonces la solución es $x=\left\{\frac{\pi}{9},\frac{5\pi}{9},\frac{7\pi}{9},\frac{11\pi}{9},\frac{13\pi}{9},\frac{17\pi}{9}\right\}$

Comentario

Un error frecuente de los estudiantes es resolver la ecuación a partir de las soluciones particulares, en lugar de la solución general, entonces se pierden soluciones. Tal proceso **incorrecto** se muestra a continuación

$3x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{\pi}{9}$

El equivalente a $-\frac{\pi}{3}$ en el intervalo $[0,2\pi]$ es $\frac{5\pi}{3}$, entonces

$3x=\frac{5\pi}{3} \Rightarrow x=\frac{5\pi}{9}$ **"INCOMPLETO"**

Observe que así sólo se obtuvieron dos soluciones y la ecuación en realidad tiene seis, en un proceso de resolución es inadmisible la pérdida de raíces, por lo que se debe trabajar siempre a partir de la solución general.

2) $\sqrt{3}\cos x = \operatorname{sen} x$

$\operatorname{tg}x = \sqrt{3} \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

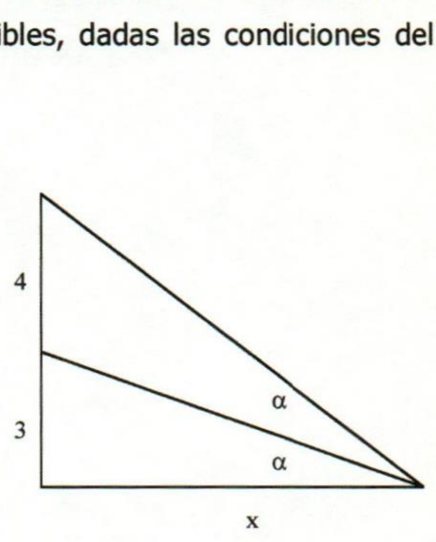
Ahora, se le dan valores enteros a K, para obtener las soluciones en el intervalo $[0,2\pi]$

$K=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$K=1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$

Cualquier otro valor de K, hace que x sea mayor que 2π o menor que 0, entonces esas son las únicas respuestas posibles, dadas las condiciones del enunciado

L) Calcular x en el siguiente triángulo



En la figura $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{x}$ y $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{7}{x}$

Por identidad de ángulo doble se tiene

$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, sustituyendo

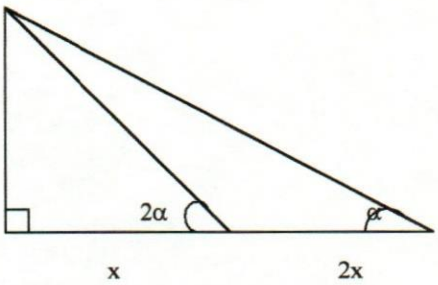
$$\frac{7}{x} = \frac{2\cdot\frac{3}{x}}{1-\frac{9}{x^2}} \Rightarrow \frac{7}{x} = \frac{6x}{x^2-9}, \text{si } x \neq 0,$$

no tiene sentido que x=0, porque sino no se forma el triángulo

$$\frac{6x^2-7x^2+63}{x(x^2-9)} = 0 \Rightarrow -x^2+63=0 \Rightarrow |x| = \sqrt{63} \Rightarrow x = 3\sqrt{7}$$

Dadas las características del problema, no tiene sentido que x sea un número negativo.

M)Calcular α en el siguiente triángulo



En la figura se cumple que

$$tg\alpha = \frac{h}{3x} \Rightarrow h = 3xtg\alpha$$

$$tg2\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow h = xtg2\alpha$$

Igualando, se tiene $3xtg\alpha = xtg2\alpha \Rightarrow 3tg\alpha = tg2\alpha, x \neq 0$

No tiene sentido que x=0, porque no se formaría triángulo. Aplicando la identidad de ángulo doble, se tiene:

$$3tg\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \Rightarrow \frac{3tg^3\alpha - tg\alpha}{tg^2\alpha - 1} = 0 \Rightarrow tg\alpha(3tg^2\alpha - 1) = 0$$

Entonces:

$tg\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$. No puede ser, porque no existiría el triángulo

$$(3tg^2\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \left(tg\alpha - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(tg\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

$$tg\alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Rightarrow tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$tg\alpha + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Rightarrow tg\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha > \frac{\pi}{2}$, no puede ser, porque el triángulo es rectángulo.

Entonces la respuesta es $\alpha = \frac{\pi}{6}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

A) Encuentre el cuadrante que contiene a "x", suponiendo que:

1) $\sec x<0$ y $\operatorname{sen} x>0$
2) $\operatorname{ctg} x>0$ y $\csc x<0$
3) $\cos x>0$ y $\operatorname{tg} x<0$.

B) Transformar a radianes los siguientes ángulos y reducirlos al intervalo $[0,2\pi]$.

1) 120°
2) 300°
3) 285°
4) –150°
5) 420°
6) 1500°

C) Calcular con radianes el valor de α en cada uno de los siguientes casos:

1) α es igual a su complemento.
2) α es igual a 4/5 de su suplemento.
3) α es igual a un 1/3 de su suplemento menos dos veces su complemento.

D) Hallar en grados la medida del ángulo correspondiente a un arco cuya longitud es 50 m en un círculo de 25 m radio.

E) Hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de 4 radianes en un círculo cuyo radio es 25 m.

F) Hallar todas las funciones trigonométricas de α, si sabe que $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ y α pertenece al III cuadrante.

G) Hallar todas las funciones trigonométricas de β, si se sabe que sec β=-5/4 y β pertenece al II cuadrante.

H) Hallar sen β, si se sabe que $\cos\beta = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, y β pertenece al III cuadrante.

I) Hallar sen α, si se sabe que $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$ y α pertenece al II cuadrante.

J) Transformar tg2x usando la identidad de tg(α/2).

K) Transformar tg5x usando la identidad de tg2α.

L) Transformar sen^2(α/8) usando la identidad de sen(α/2).

M) Transformar cos(α/4) usando la identidad de cos2α.

N) Si $\alpha + \beta = \pi / 2$, expresar sólo en función de sen2β, la siguiente fracción $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha(1 - \cos^2\beta)}{\operatorname{tg}^2\alpha(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha)}$.

O) Escribir las siguientes expresiones sólo en función de ctgα.

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha$.

2) $\sec^2\alpha(\sec^2\alpha - 1) - \dfrac{1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 1}$

P) Simplificar las siguientes expresiones:

1) $2sen(5\pi/2)+4\cos\pi-2tg(3\pi+\alpha)-\cos(3\pi/2)\,4sen(7\pi/2)$

2) $tg(-x)ctg(x+\pi/2)-ctg(\pi/2-x)-tg(\pi-x)$

3) $sen(\pi+x)\csc(\pi-x)sen(\pi/2-x)\cos(\pi/2+x)$

4) $a^2\cos(\pi+x)+b^2\cos(\pi-x)-2absen(-x)tg(\pi/2-x)$

5) $\dfrac{\frac{1}{x}\,tg\left(\pi+x^2\right)}{sen\pi x}$

6) $\dfrac{tg2xtg\left(x+\pi/4\right)}{\left(1-tgx\right)\sec 2x}$

7) $\dfrac{tgx-senx}{sen^3x}+\dfrac{\cos 2x-\cos x}{sen^2x}$

8) $\dfrac{a^2ctg\left(\pi+x\right)+b^2tg\left(\pi/2+x\right)}{\left(a-b\right)ctg\left(\pi-x\right)}+\dfrac{\left(a+b\right)tg\left(x-3\pi/2\right)}{tg\left(3\pi/2-x\right)}$

9) $2cosxsenxcos(\cos^2x)\cos(sen^2x)-senxcosxsen(sen^2x)sen(\cos^2x)$

Q) Demostrar las siguientes identidades:

1) $\dfrac{1}{senx\cos x}-\dfrac{\cos x}{senx}=tgx$

2) $\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right]$

3) $senx=\dfrac{2tg\left(x/2\right)}{1+tg^2\left(x/2\right)}$

4) $\dfrac{1-sen2x}{1+sen2x}=\dfrac{tg\left(\pi/4-x\right)}{tg\left(\pi/4+x\right)}$

5) $senx+seny=2sen\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

R) Demostrar que si cos(x+y)=0 entonces sen (x+2y)=senx.

S) Hallar el valor de las siguientes expresiones:

1) Sen(arc sen5/7).
2) $\cos\left[\text{arc}\cos\left(-\sqrt{3}/2\right)\right]$.
3) tg(arc cos 5/6).
4) ctg(2arc cos 4/5).
5) sen (arc sen 12/13 +arc cos 4/5).

T) Demostrar cada una de las siguientes identidades:

1) arc tg ½+arc tg 1/3=$\pi/4$.
2) arc sen 4/5+arc tg ¾ = $\pi/2$.
3) 2arc sena= arc cos(1-2a^2).

U) Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para $0 \le x \le 2\pi$.

1) –2sen2xsecx=0.
2) $\frac{1}{\sec^2 x - 3} = 1$.
3) 2cos(2x+$\pi/6$)=0.
4) 2cosx-2cos2x=0.
5) $r^2\cos x + r^2\cos 2x = 0$
6) $-\frac{b}{a}\,\text{ctg}x = \frac{b\,\text{sen}a}{a\cos a - a}$.
7) $2\text{sen}^3x + \text{sen}^2x - 2\text{sen}x - 1 = 0$.
8) $4\text{sen}^2x\,\text{tg}x - \text{tg}x = 0$.
9) $\frac{1-\cos 2x}{1+\cos x} = \frac{\text{tg}x}{2\cos x}$.

10) $\operatorname{ctg}x - \operatorname{tg}x = \dfrac{2\cos 2x}{1-\cos 2x}$.

V) Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para x en R.

1) $\operatorname{sen}x = \dfrac{1}{2}$

2) $\operatorname{tg}x = -1$

3) $\cos 2x = 0$

4) $\operatorname{sen}x\operatorname{tg}x = \operatorname{sen}x$

5) $2\operatorname{sen}^2x - \cos x - 1 = 0$

6) $4\operatorname{sen}^2x\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}x = 0$

7) $\csc^2 2x - 4 = 0$

8) $\dfrac{\cos x}{1+\cos 2x} = 0$

9) $\dfrac{\operatorname{sen}x + \cos x}{\cos 2x} = 0$

10) $\operatorname{sen}^2x + 2\operatorname{sen}x\cos x - 3\cos^2x = 0$

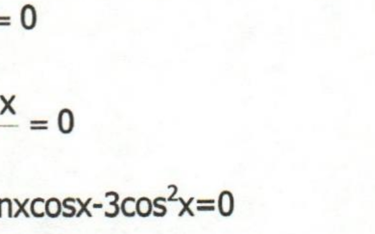
11) $6\operatorname{sen}^2x - 3\operatorname{sen}2x = 0$.

12) $3^{1/2}\operatorname{sen}x\cos x + 4\cos^2x = 15/4$.

13) $4\cos^4 - \cos^2x = 3/2$.

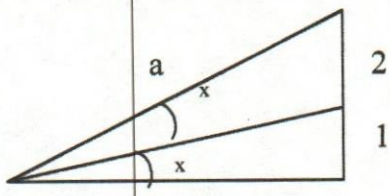
14) $2\cos^2x - \operatorname{sen}x - 1 = 0$.

W)Calcular x en siguiente triángulo rectángulo:

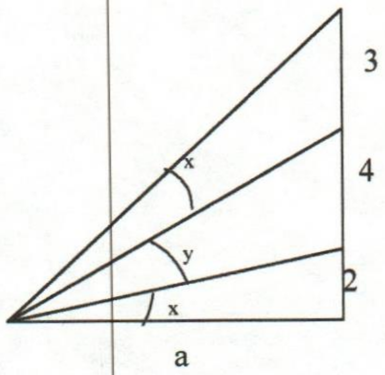


X) Calcular a en los siguientes triángulos rectángulos:

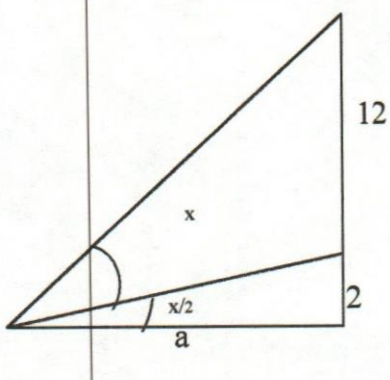
1)



2)



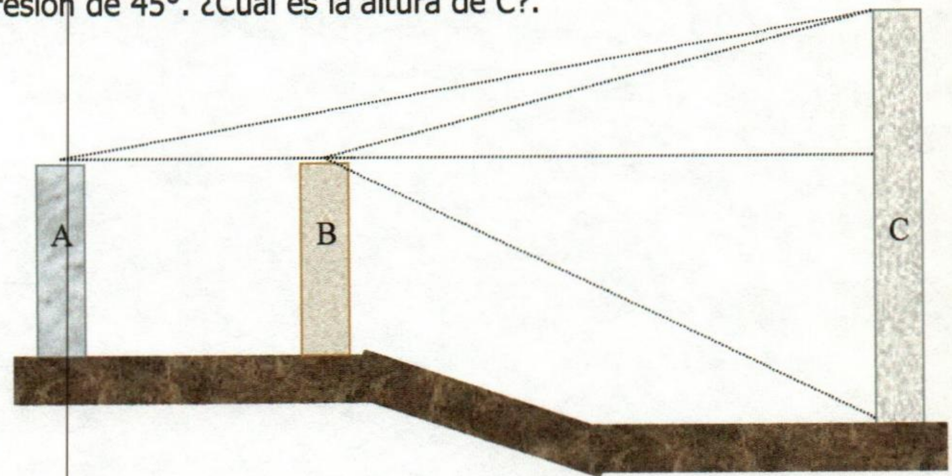
3)



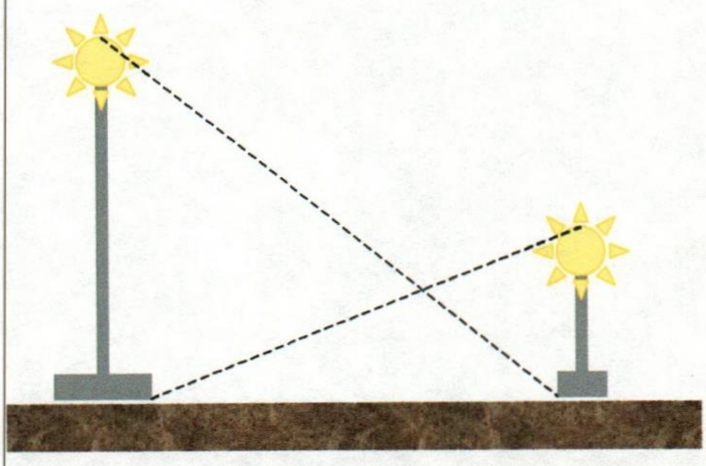
Y) Resolver los siguientes problemas:

1) Una escalera está apoyada sobre una pared, forma con el suelo un ángulo de 60° y la distancia entre el punto donde se apoya la escalera en el suelo y la pared es de 2m. Hallar la longitud de la escalera.

2) Desde un punto de observación A que está a 5m del nivel cero, se observa la cúspide de un edificio C con un ángulo de elevación de 15°. La distancia de A hasta B es 40m y desde B se observa la cúspide de C con un ángulo de elevación de 30° y su planata baja con un ángulo de depresión de 45°. ¿Cuál es la altura de C?.



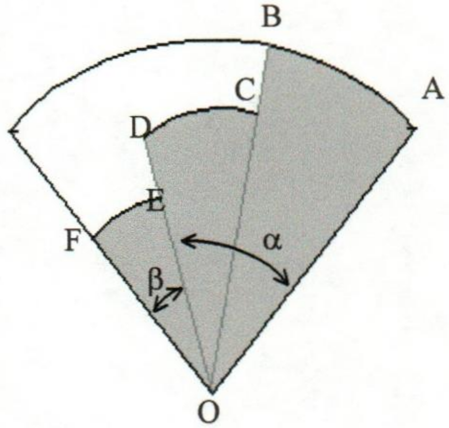
3) Dos postes de luz de altura H y H/2, están separados por una distancia L. Si se unen los postes mediante dos cables, tal como indica la figura. ¿A qué altura sobre el suelo se cruzan dichos cables?.



4) La figura muestra un pedazo de cartulina OAG de forma de sector circular. Se desea cortar un pedazo con la forma de la parte sombreada que se indica en la figura. Calcular cuánta cartulina sobra si sabe que:

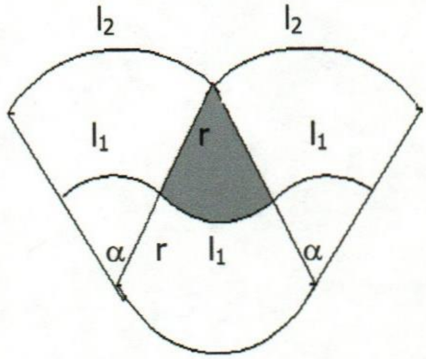
$DC = \frac{\pi}{90} m; \beta = \left(\frac{540}{180}\right)^{\circ}; \overline{AO} = 3m; \overline{OF} = \frac{1}{2} m; FE = \frac{\pi}{180} m;$

OC es bisectriz de α.



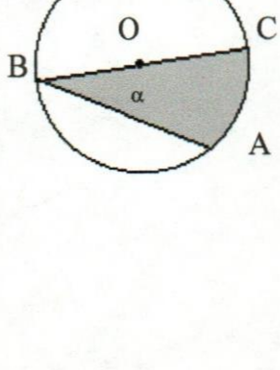
5) Uno de los lados de un triángulo isósceles mide 3m y altura correspondiente a ese lado mide 1,5m. Hallar las dimensiones de los otros lados y la medida de los ángulos de ese triángulo.

6) Un diseñador gráfico desea realizar un logotipo con la forma de la figura sabiendo que el área total es 25 veces el área de la figura sombreada, y además que K es la relación entre 1_1 y 1_2 (K>1). Hallar el valor de K.



7) Dos torres verticales A y B están separadas por una distancia de 24m. El ángulo de elevación con que se ve el extremo superior de la torre B desde el pie de la torre A es el doble del ángulo con que se ve el extremo superior A desde el pie de B. Si se miran las torres desde el punto medio de la distancia que las separa, el extremo superior de A se ve con un ángulo de elevación que es el complemento del ángulo de elevación con que se ve el extremo superior de B. ¿Cuándo mide las torres?.

8) Hallar la longitud del arco AC, si la circunferencia tiene 10m de diámetro y el ángulo α de la figura mide $\pi/8$.



RESPUESTAS

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

CAPÍTULO I

A) Página 24

1) (F)
2) (F)
3) (F)
4) (V)
5) (F)
6) (F)
7) (F)
8) (F)
9) (V)
10)(F)
11)(V)
12)(F)
13)(F)
14)(F)
15)(F)
16)(F)
17)(V)
18)(F)
19)(F)
20)(V)
21)(V)
28)(F)
29)(V)
30)(F)
31)(F)
32)(V)
33)(V)
34)(F)
35)(F)
36)(F)
37)(V)
38)(F)
39)(F)
40)(F)
41)(F)
42)(F)
43)(F)
44)(V)
45)(F)
46)(F)
47)(V)
48)(V)

22)(F)

23)(V)

24)(V)

25)(V)

26)(F)

27)(F)

49)(F)

50)(V)

B) Página 26

1) -96

2) -33

3) -24

4) -45

5) $-5^{-10}.3^{-3}$

6) $\frac{25}{4}$

7) $\frac{7}{6}$

8) $\frac{2}{9}$

9) $-\frac{206}{81}$

10) -10

11) $-\frac{1}{3}$

12) $\frac{4}{5}$

16) $\mathbf{-4}$

17) 0

18) $74\sqrt{2}$

19) $-\frac{2}{9}$

20) $12\sqrt{5}$

21) $\frac{5}{2^7}$

22) $\frac{7}{2}$

23) 18

24) 2

25) 1

26) 2

27) 39

28) 1

29) $3\sqrt{3}$

13) -9

14) 10.100

15) $\frac{215}{64}\pi^2$

30) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$

CAPÍTULO II

A) Página 75

1) $4x^2+4x+1$

2) $\frac{1}{4}a^{2m} + a^{m+n} + a^{2n}$

3) $x^{2(a+1)}+2x^{a+1}y^{x-2}+y^{2(x-2)}$

4) $1+2\cos x + \cos^2 x$

5) $1-\operatorname{sen} 2x$

6) $\frac{1}{4}x^4y^2 - \frac{z^6}{9}$

7) $4-x^2$

8) a^4-4b^6

9) $y^{2(x+1)}-4z^{2(x-1)}$

10) $\operatorname{tg}^2(2\alpha) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

11) $-\operatorname{tg}^2\alpha$

12) $\operatorname{sen}^2 x$

13) $8n^3+36n^2+54n+27$

14) $8x^3+12x^2+6x+1$

15) $x^3-3x^2h+3xh^2-h^3$

26) $9x^2y^2+21xya+10a^2$

27) $4x^2+20xy+25y^2$

28) $25x^6-40x^3y^5+16y^{10}$

29) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{25}{64}$

30) $64x^3-48x^2+4x-1$

31) $9a^4-144b^6$

32) y^2-6y+1

33) $x + 15\sqrt[3]{x^2} + 75\sqrt[3]{x} + 125$

34) x^3+8

35) $4\operatorname{sen}^2x-6\operatorname{sen}x-28$

36) $\operatorname{tg}^2x-4y^2$

37) $\cos^2x+2\operatorname{sen}x+\operatorname{tg}^2x$

38) sen^3x-1

39) $\sec^2x-13\sec x-48$

40) $\frac{1 - 2\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2x}{\operatorname{sen}x}$

41) $6x^2-7x-5$

16) $x - 6x^{5/3} + 12x^{7/3} - 8x^3$

17) $9x^2-15x-14$

18) $sen^2x-5senx+6$

19) $-cos2x$

20) $-cos^4x-cos^3x+4cos^2x-1$

21) $x^2+y^2+1+2xy+2y+2x$

22) $4x^2+9+y^2-12x-4xy+6y$

23) –

24) –

25) $10y^2-120y-45$

42) $4x^2-20xy+25y^2$

43) $x^2+2xy+y^2-6x-6y+9$

44) x^2-4y^2

45) m^2-n^2-6m+9

46) $x^2+2xy+y^2-1$

47) x^3+3x^2+3x+1

48) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

49) $x^3-5x+4x^2-20$

50) $x + 6\sqrt{x} - 40$

B) Página 76

1) $(a+b)(2x-3)$

2) $(x+a)(x-a+1)$

3) $(v-6)(v-1)(v+1)$

4) $(1-2senx)(1+2cos^2x)$

5) $2sen^22x(senx+cosx)^2$

6) $2senax\,(cosax+1)$

7) $2sena(cosx-1)$

8) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

9) $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$

10) $\left(\sqrt[8]{x} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt[8]{x} + \sqrt{2}\right)$

31) $(2tgx - 1)(tgx - 1) = 2\left(tgx - \frac{1}{2}\right)$

32) $(2\sec - 3)(4\sec - 1) = 8\left(\sec x - \frac{3}{2}\right)\left(\sec x - \frac{1}{4}\right)$

33) $(x-3)(x^2+3x+9)$

34) $(2-x)(4+2x+x^2)$

35) $(1-cosx)(1+cosx+cos^2x)$

36) $(senx+2)(sen^2x-2senx+4)$

37) $x(x^2+3hx+3h^2)$

38) $(x+a)(x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4)$

39) $tg^3x(1-cosx)(1+cosx+cos^2x)$

11) $\left(\sqrt[4]{9x} - 2\right)\left(\sqrt[4]{9x} + 2\right)$

12) $\sqrt{x}\,(x - 2)(x + 2)$

13) $\left(\csc 2x + \sqrt{2}\cos x\right)\left(\csc 2x + \sqrt{2}\cos x\right)$

14) (tg2x-ctgx) (tg2x-ctgx)

15) $\sec^2 x(1+\mathrm{sen}^2 x)$

16) $(x-1)^2$

17) $(x^2-9)^2$

18) (x+3)(x+2)

19) (t+6)(t-4)

20) $(x^2+1)^2$

21) t(t-4)(t+2)

22) (cosx+1)(cosx+2)

23) (tgx+2)(tgx-1)

24) $(\cos x+\mathrm{sen}x)^2$

25) $\cos^2 2x$

26) $(z - 1)(3z + 1) = 3(z - 1)\left(z + \frac{1}{3}\right)$

27) $(x + 3)(2x - 1) = 2(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

40) $\mathrm{sen}x(\mathrm{sen}x+1)(\mathrm{sen}^2 x-\mathrm{sen}x+1)$

41) $x\left(4 + \frac{\mathrm{sen}x}{x}\right)$

42) $\mathrm{sen}x(\mathrm{sen}x-1)(\mathrm{sen}^2 x+\mathrm{sen}x+1)$

43) $\mathrm{sen}x(\mathrm{ctg}x+x^2)$

44) (2senx-3)(2senx+3)

45) 2cosx(cosx-1)

46) (t-3)(t-2)

47) (y-20)(y-10)

48) (3x+1)(3x+2)

49) $(\csc x-2)(\csc^2 x+2\csc x+4)$

50) $(3\mathrm{tg}x+4)(9\mathrm{tg}^2 x-12\mathrm{tg}x+16)$

51) $(x+3)(2-x^3)$

52) $4x^2\left(\frac{y}{4x^2} - 1\right)$

53) $(\sec^2 x+2)(\sec x-1)$

54) $(2\mathrm{tg}x-1)(\mathrm{tg}^2 x-3)$

55) (2x-1)(4senx+(2x-1))

56) $\mathrm{sen}^2 y(x-2)(x^2+2x+4)$

57) secx(secx-1)

58) –x(x+10)

59) $(x+2)^3$

60) $(x+6)(x^2-3x+21)$

61) –2cosx(1-cosx)

28) $(3k - 2)(2k - 3) = 6\left(k - \frac{2}{3}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right)$

29) $(2a - 5)(5a + 3) = 10\left(a - \frac{5}{2}\right)\left(a + \frac{3}{5}\right)$

30) $(\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 2(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$

C) Página 78

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$

2) $\dfrac{4}{(x + 3)\left(\sqrt{3}x + \sqrt{12 - x}\right)}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{x + 2} + \sqrt{x}}$

4) $\dfrac{x - 1}{x\left(\sqrt{x} + 1\right)}$

5) $\dfrac{2\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}x} + \sqrt{1 - \operatorname{sen}x}}$

6) $\dfrac{2\sec x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}x} + \sqrt{1 - \operatorname{tg}}}$

11) $\dfrac{\cos x(\operatorname{sen}x + \cos x)}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x} + \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} + \sqrt[3]{\cos^4 x}}$

12) $2\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

13) $\dfrac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}\right)\left(a + b - c + 2\sqrt{ab}\right)}{(a + b - c)^2 - 4ab}$

14) $\dfrac{1 + \sqrt[4]{a} + \sqrt{a} + \sqrt[4]{a^3}}{1 - a}$

15) $\dfrac{4 + 2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{8 - a}$

16) $\dfrac{1 - \sqrt[4]{a} + \sqrt{a} - \sqrt[4]{a^3}}{1 + a}$

17) $\dfrac{a + 1 + 2\sqrt{a}}{a - 1}$

7) $\dfrac{8x}{\sqrt[3]{x(x+8)^2}+\sqrt{x^2(x+8)}+x}$

8) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(8+x)^2}+\sqrt[3]{64+8x}+4}$

9) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{sen^2x}+\sqrt[3]{senx\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2}}$

10) $\dfrac{1+2senx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}-\sqrt[3]{sen2x\cos x}+\sqrt[3]{ser}}$

18) $\dfrac{sen^2x-2senx\sqrt{\cos x}+\cos x}{sen^2x-\cos x}$

D) Página 79

1) $\dfrac{x(x+2)}{x-3}$

2) $3n^2+2n+1$

3) $(v-6)(v+1)$

4) $\dfrac{4+2t+t^2}{-t}$

5) $\dfrac{x^4+3x^3+9x^2+27x+81}{x+3}$

6) $\dfrac{u-5}{u-2}$

7) $\dfrac{t-5}{t}$

17) $\dfrac{\cos x-2}{\cos x-1}$

18) $\dfrac{4\cos x}{\cos x+senx}$

19) $\dfrac{\cos^2 x}{(x-\pi)^2}$

20) $\dfrac{-\cos x}{\cos^2 x+\sqrt[3]{\cos^4 x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}$

21) $tgx\sec^2x(1+\cos x)(1+\cos x+\cos^2x)$

22) $\dfrac{2\sec x}{tgx-1}$

23) $\dfrac{1+ctgx+ctg^2x}{2+ctgx+ctg^2x}$

8) $\dfrac{8y^2 - 3y + 7}{2(y^2 + 1)}$

9) $\dfrac{x^2 + xr + r^2}{(x + r)^2}$

10) π

11) $\dfrac{\sqrt{ax}(x + a) + ax}{a}$

12) $-\dfrac{x + \sqrt{ax} + a}{\sqrt{ax}}$

13) $\dfrac{2x + 3\sqrt{19 - 5x}}{\left(x + \dfrac{57}{4}\right)\left(\sqrt{3x} + \sqrt{12 - x}\right)}$

14) $\dfrac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{1 - x^2} + \sqrt[3]{(1 - x)^2}}$

15) $\dfrac{\sqrt{x}}{4}(x + 2)\left(2\sqrt[3]{2x} + 2\sqrt[3]{4x} - 4\right)$

16) $\dfrac{\cos x + 1}{\cos x - 1}$

24) $\dfrac{\operatorname{sen}2x \cos x}{\cos x + \operatorname{sen}x}$

25) $(1-a)(1-a+a^2)$

26) $\dfrac{(a^2 + b^2)}{(a + b)^2}$

27) $\dfrac{\sqrt{a + b}}{|a|\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}}$

28) $\dfrac{a^{11/2}}{b^{1/3}}$

29) $\dfrac{-b^{11/6}}{(a + b)(a^2 + b^2)a^{1/3}}$

30) $10 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$

31) Se dividió entre cero, y esta operación no está definida en $\Re$.

E) Página 81

1) $\dfrac{1}{y}$

2) $\dfrac{(x+3)^3}{2x(x-3)}$

3) $\dfrac{1}{2y+1}$

4) $-\dfrac{2x+h}{x^2(x+h)^2}$

5) $-\dfrac{1}{x+2}$

6) $\dfrac{x+2}{x-1}$

7) $\dfrac{2x^2+x+4}{-x}$

8) $\dfrac{2x-1}{2x}$

9) $\dfrac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

10) $\dfrac{3x-1}{3}$

11) $\dfrac{x^2-2}{x^3(1-x^2)^{1/2}}$

12) $\dfrac{x^2-2}{x^3(1-x^2)^{1/2}}$

13) $\dfrac{b}{a\left(\sqrt{b}-a\right)}$

14) $\dfrac{2b}{a^2}$

15) $\dfrac{\sec x}{(1+\cos x)(1+\operatorname{sen}x)}$

16) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

17) $1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}a$

18) $\dfrac{-2\cos x-1}{1+\cos x}$

19) $\cos x(\cos x-\operatorname{sen}x)$

20) $\cos x\operatorname{sen}2x$

CAPÍTULO III

A) Página 143

1) x=-1
2) x=-2
3) $x = \left\{-3,-1,-\frac{1}{2},5\right\}$
4) –
5) $y = \left\{0, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}\right\}$
6) –
7) $x = \{-1,-3,-5\}$
8) $x = \left\{\frac{1}{3},-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$
9) $x = \left\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right\}$
10) x=-1
11) $x = \{-3,-5\}$
12) –
13) x=1
14) $x = \left\{-1,\frac{15}{13}\right\}$
15) $x = \{4,1\}$
16) x={0,1}
17) x={1,2}
18) $x = \{+\sqrt{5},-\sqrt{5}\}$
19) $x = \left(\frac{7}{3}\right)^{3/2} + 1$
20) x=3
21) x=3
22) $\varnothing$
23) x=1
24) x={7,8}
25) $x = \frac{5}{4}$
26) $x = \left\{1,-\frac{1}{3}\right\}$
27) x={6,-2}
28) x={4}

B) Página 144

1) (-2,6)
2) $\left(\frac{33}{5},-\frac{9}{5}\right)$
3) (1,2)
4) (0,5)
5) (2,-3)
6) $\not\exists$
7) $\left(x, \frac{3x-11}{5}\right)$
8) $(1,1);\left(-\frac{2}{5},-\frac{2}{5}\right)$
9) $(1,-3)\left(-\frac{43}{49},\frac{25}{7}\right)$
10)(10,-11);(-11,10)
11)(3,-4);(-2,6)
12) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$
13) $\left(4,\frac{5}{2}\right);\left(-4,-\frac{5}{2}\right)\left(4,-\frac{5}{2}\right)\left(-4,\frac{5}{2}\right)$
19) $\left(0,\sqrt{3}\right)$
20) (2,0);(-2,8)
21) $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$
22) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$
23) $\left(\sqrt{\frac{3}{5}},\sqrt{\frac{3}{5}}\right);\left(-\sqrt{\frac{3}{5}},-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
24) $\left(\sqrt[3]{12},\frac{3}{2}\right);\left(\sqrt[3]{12},-\frac{3}{2}\right)$
25)(1,-2)
26) $\left(\frac{14}{5},-\frac{2}{5}\right);\left(-\frac{7}{5},\frac{19}{5}\right)$
27)(5,0);(-1,2)
28)(4,3);(3,4)
29) $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$
30) $\left(\frac{a}{4},\frac{\sqrt{3}+4}{4}a\right)$
31) $\left(\frac{2b+ar}{2+r},\frac{2c}{2+r}\right)$

14) $\left(\sqrt{5},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\sqrt{5},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
$\left(\sqrt{5},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\sqrt{5},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

15)(5,4)(-5,-4)

16) $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$

17)(7,-6);(-7,6)

18) $\left(-\frac{12}{17},-\frac{14}{17}\right)$

32)(a,0)

33)(4,1);(1,4)

34)(-4,-5);(5,4)

35)(4,1)

36)(2,0);(0,-2)

37)(0,0);(4,2);(-2,-4)

38)(1,0)

$(0,0)$; $\left(\sqrt{7},\sqrt{7}\right)$; $\left(-\sqrt{7},-\sqrt{7}\right)$

39) $\left(\sqrt{19},-\sqrt{19}\right)$; $\left(-\sqrt{19},\sqrt{19}\right)$; (2,3)
(−2,−3); (3,2); (−3,−2)

40)(-2,3);(3,-2)

C) Página 147

1) $4x^2-4y^2-8xy+4x-4y+1=0$

2) $V=15x^2$

3) $V = \frac{2\pi x}{(x^2+1)^2}$

4) $A = \left(R + \sqrt{R^2+y^2}\right)y$

4.1) $A = (R + x)\sqrt{R^2 - x^2}$

5) $V = \frac{\pi}{6}\left(6R - 5R^3\right)$

10.2) $S = 2\pi\left(R^2 + 2R\sqrt{100 - R^2}\right)$

11) $V = \frac{\pi}{48}\left(H^3 + 24H^2 + 192H\right)$

12) $A = 4r^2 \operatorname{sen}\alpha \cos^3\alpha$

13) $V = \frac{36x^2 - x^3}{4\pi}$

14) $A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$

15) $A = \frac{Rh^2}{\sqrt{h^2 - 2rh}}$

6) $V = \frac{1}{16}\left(9y - 12y^2 + 4y^3\right)$

7)

7.1) $V = \frac{\pi}{27} H^3$

7.2) $V = \pi R^3$

8) $A = \frac{(2m-1)^2}{2|m|}$

9) $8y^2 - x^2 - 34y + 8x + 19 = 0$

10)

10.1) $S = \frac{\pi}{2}\left(4000 - H^2\right) + \pi H\sqrt{400 - H^2}$

16) $A = 2ah - \frac{h^3}{8p}$

17) $C = 4a\left(x^2 + \frac{1000}{x}\right)$

18) $V = \pi \frac{R^2h - h^3}{3}$

19) $L = \sqrt{16 - x^2} + \sqrt{40 - 12x}$

20) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 4}}$

CAPÍTULO IV

A) Página 204

1) $x \in (-\infty, 1]$

2) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

3) $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

4) $x \in \left(-\infty, \frac{2}{33}\right]$

29) $x \in (-\infty, -5)$

30) $x \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

31) $x \in (-\infty, -3] \cup (-2, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right] \cup$

32) $x \in [-2, -1] \cup [3, \infty)$

33) $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

5) $x \in \left(\frac{75}{88}, \infty\right)$

6) $x \in \left(\frac{73}{7}, \infty\right)$

7) $x \in \Re$

8) $\not\exists$

9) $x \in \left(-\infty, \frac{10\sqrt{2} - 9}{2}\right]$

10) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{2\left(\sqrt{6} + 6\right)}\right)$

11) $x \in \left[\frac{1}{5}, \infty\right)$

12) $x \in (-\infty,-2) \cup (2, \infty)$

13) $x \in \left[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right]$

14) $x \in (-7,3)$

15) $x \in (-\infty,-5] \cup (1, \infty]$

16) $x \in (-\infty,-1) \cup (1, \infty)$

17) $x \in (-3,1)$

18) $x \in (-\infty,0) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right)$

19) $x \in [-2,0] \cup [2, \infty)$

34) $x \in \left(-1, \frac{1 - \sqrt{65}}{8}\right] \cup \left(1, \frac{1 + \sqrt{65}}{8}\right]$

35) $x \in (-\infty,-3) \cup (-2, \infty)$

36) $x \in (1,6)$

37) $x \in [9,19)$

38) $x \in \left(-\frac{26}{3}, \frac{16}{3}\right]$

39) $x \in (6,12]$

40) $x \in \left(-\frac{3}{2}, 4\right)$

41) $x \in \left[-\frac{17}{23}, \frac{1}{7}\right]$

42) $x \in (0,1)$

43) $x \in (2, \infty)$

44) $x \in [3,7]$

45) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup [1, \infty)$

46) $x \in \left(\frac{-3 - \sqrt{7}}{2}, 1\right]$

47) $x \in \left(\frac{7}{6}, \infty\right)$

48) $x \in (-\infty,-2) \cup [1,4]$

20) $x=0$

21) $x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

22) $x \in \left[-\frac{1}{3},\infty\right)$

23) $x \in \left[\frac{1}{2},\infty\right) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

24) $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$

25) $x \in (-\infty,-1) \cup (4,\infty)$

26) $x \in \left(-5,-\frac{3}{2}\right) \cup (-1,\infty)$

27) $x \in (0,\infty)$

28) $x \in [-7,-5]$

49) $x \in \left[\frac{4}{9},4\right]$

50) $x \in \left[2\sqrt{2},\infty\right)$

51) $x \in (-\infty,a] \cup (0,-a]$

52) $x \in (2a,0)$

53) $x \in \left(-\frac{b}{a},\infty\right) \wedge a \neq 0$

54) $x \in (-\infty,-1] \cup \left(-\frac{b}{a},1\right]$

55) $x \in (-\infty,-1] \cup \left(0,-\frac{b}{a}\right) \cup [1,\infty)$

56) $x \in (-\infty,-1] \cup \{1\}$

B) Página 207

1) La desigualdad no se satisface para

$$x \in \left(-\infty,\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2},\infty\right).$$

2) En eliminar el denominador y cambiar la desigualdad sin realizar ningún análisis.

3) $x \in \left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2},\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)$

C) Página 208. a=1

D) Página 208

1) $x \in (-\infty,5)$
2) $x \in \left[\frac{23}{15},3\right]$
3) $x \in \left(\frac{27}{10},6\right)$
4) $x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right) \cup [3,\infty)$
5) $x \in (1,2)$
6) $x \in [1,2)$
7) $x \in \left(-3,-\sqrt{7}\right) \cup \left(\sqrt{7},3\right)$
8) $x \in \left(-\infty,\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4},2\right)$
9) $x \in (-4,-3) \cup [-2,1] \cup [1,2)$
10) x=2

E) Página 210

1) $x \in [2,4) \cup (4,\infty)$
2) $x \in [-3,-2) \cup (-2,0] \cup [1,\infty)$
3) $x \in R - \{-2,-1,1\}$
4) $x \in (-\infty,-3] \cup [0,3) \cup [7,\infty)$
5) $x \in (-\infty,-4] \cup \left(-\frac{1}{2},1\right] \cup (3,\infty)$

CAPÍTULO V

A) Página 254

1) $x = \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$

2) $x = \{0, -1\}$

3) $x = \left\{\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

4) $x = \left\{-\dfrac{4}{3}, -2\right\}$

5) ϕ

6) $x = \left\{-\dfrac{1}{3}, -1\right\}$

7) $x = \left\{-4, -\dfrac{2}{5}\right\}$

8) $x = \{-4, 4\}$

9) $x = \left\{3, \dfrac{17}{19}\right\}$

10) $x \in \left(-\infty, \dfrac{7}{4}\right]$

11) $x \in \left(-\infty, \dfrac{5}{3}\right)$

12) $x = \left\{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

13) $x = \{-2, 0\}$

14) $x \in [2, \infty)$

15) $x = \left\{-\dfrac{4}{3}, 2\right\}$

16) $x = \left\{\dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}, \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right\}$

17) $x = \{-4, 0, 2\}$

18) $x = \left\{-\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{3}{2}\right\}$

19) $\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

20) $x = \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}, 2\right\}$

C) Página 255

1) $x \in (-5,5)$

2) $x \in \left(-\infty,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2},\infty\right)$

3) $x \in (3,5)$

4) $x \in (-4,6)$

5) $x \in [-2,7]$

6) $x \in (-\infty,-16) \cup (6,\infty)$

7) $x \in \left(-\infty,-\frac{4}{3}\right] \cup [2,\infty)$

8) $x \in [-4,1] \cup [1,4]$

9) $x \in [-3,-1] \cup [1,3]$

10) $x \in R - \{0\}$

11) $x \in \left[-1,-\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5},1\right]$

12) $x \in \left(-\infty,\frac{10}{9}\right) \cup (2,\infty)$

13) $x \in (-4,0) \cup (1,3) - \{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

14) $x \in \left(-\infty,-\frac{5}{6}\right] \cup \left[-\frac{2}{11},\infty\right)$

15) $x \in (-\infty,0) \cup [4,\infty)$

16) $x \in \Re$

22) $x \in \left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$

23) $x \in \left(-\frac{7}{2},\infty\right)$

24) $x \in \left[\frac{1}{3},9\right)$

25) $x \in \left[-\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right]$

26) $x \in \left[\frac{9}{5},\infty\right)$

27) $x \in \left(-\infty,\frac{-3-\sqrt{21}}{6}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{21}}{6},\infty\right)$

28) $x \in \left(-4,-\frac{5}{2}\right)$

29) $x \in \left(\frac{13}{2},8\right)$

30) $x \in \left(-4,-\sqrt{13}\right) \cup \left(\sqrt{13},4\right)$

31) $x \in (-\infty,-5) \cup (3,\infty)$

32) $x \in \left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$

17) $x \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$

18) $x \in \left(-\infty, -\dfrac{5}{3}\right) \cup (3, \infty)$

19) $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$

20) $x \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right)$

21) $x \in \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \dfrac{3}{2}\right)$

33) $x \in \left(-\dfrac{7}{8}, 1\right)$

34) $x \in \left(\dfrac{1}{2}, \infty\right) - \{1\}$

D) Página 257

1) $x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -3] \cup [3, \infty)$

2) $x \in (7, \infty)$

3) $x \in \Re - \{5\}$

4) $x \in \Re - \{3\}$

5) $x \in \Re$

6) $x \in \Re$

7) $x \in (-\infty, -2) \cup [3, \infty)$

8) $x \in (-\infty, -3] \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

CAPÍTULO VI

A) Página 355

1) II c

2) IIIc

3) IV c

B) Página 355

1) $\frac{2\pi}{3}$

2) $\frac{5\pi}{3}$

3) $\frac{19\pi}{12}$

4) $\frac{7\pi}{6}$

5) $\frac{\pi}{3}$

6) $\frac{\pi}{3}$

C) Página 355

1) $\frac{\pi}{4}$

2) $\frac{4\pi}{9}$

4) π

D) Página 355. $\left(\frac{360}{\pi}\right)^0$

E) Página 355. 100

Página 356

F) $\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}; \sec\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{3}; \csc\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{2}; \text{tg}\alpha = \frac{2}{3}; \text{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$

G) $\cos\beta = -\frac{4}{5}; \text{sen}\beta = \frac{3}{5}; \csc\beta = \frac{5}{3}; \text{tg}\beta = -\frac{3}{4}; \text{ctg}\beta = -\frac{4}{3}$

H) $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{-2xy}{x^2+y^2}$

I) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

J) $tg2x = \sqrt{\dfrac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}}$

K) $tg5x = \dfrac{2tg\frac{5x}{2}}{1-tg^2\frac{5x}{2}}$

L) $\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{8} = \dfrac{1-\cos\frac{\alpha}{4}}{2}$

M) $\cos\frac{\alpha}{4} = 2\cos^2\frac{\alpha}{8} - 1$

N) $\dfrac{\operatorname{sen}^4 2\beta}{16}$

O)

1) $\dfrac{1+3ctg^2\alpha - ctg^4\alpha}{ctg^2\alpha(1+ctg^2\alpha)}$

2) $ctg^{-4}\alpha$

P) Página 357

1) $-6-2tg\alpha$

2) tg^2x

3) $-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2x$

4) $-(a-b)^2\cos x$

5) $\dfrac{\frac{1}{x}tg(\pi+x^2)}{\operatorname{sen}\pi x}$

6) $\dfrac{\operatorname{sen}2x\cos x}{\cos x+\operatorname{sen}x}$

7) $(1-2\cos x)\sec x$

8) 0

9) $-\operatorname{sen}2x\cos(\cos 2x)$

S) Página 358

1) $\frac{5}{7}$

2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\frac{\sqrt{11}}{5};-\frac{\sqrt{11}}{5}$

4) $\frac{7}{24};-\frac{7}{24}$

5) $\frac{63}{65}$

U) Página 358

1) $x=\{0,\pi,2\pi\}$

2) $x=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

3) $x=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{3}\right\}$

4) $x=\left\{0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},2\pi\right\}$

5) $x=\left\{\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}\right\}$

6) $x=\frac{a}{2}$

7) $x=\left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

8) $x=\left\{0,\pi,2\pi,\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

9) $x=\left\{0,\pi,2\pi,\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$

10) $x=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$

V) Página 359. En todas las respuestas $k\in Z$

1) $$\begin{aligned} x&=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ x&=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \end{aligned}$$

2) $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

3) $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

4) $$\begin{aligned} x&=k\pi \\ x&=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{aligned}$$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

5) $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \pi + 2k\pi$

6) $x = k\pi$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

7) $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$

8) $\varnothing$

9) $\varnothing$

10) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$x = \operatorname{arctg}(-3) + k\pi$

11) $x = k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

12) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{15}\right) + k\pi$

13) $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

14) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

W) Página 359.

$x = \frac{\pi}{6}$

X) Página 360.

1)$a = 2\sqrt{3}$

2) Sugerencia: x+y=α.

$a = 6\sqrt{3}$

3)$a = 2\sqrt{5}$

Y) Página 360

1) 4 m

2) $\left(20 + 20\sqrt{3}\right)$m

3)H/3

4) $\frac{\pi}{16}$ m

5) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}$ m

6) $\frac{25}{6}$

7) 8m, 18 m

8) $\frac{5\pi}{4}$ m

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

ALLENDOERFER, Carl y OAKLEY Cletus. *Fundamentos De Matemáticas Universitarias.* Tercera Edición. Mc Graw Hill.

APÓSTOL, Tom M. *Calculus.* Volumen 1. Segunda Edición. Editorial Reverté, s.a.

ASAPCHI, José. *Problemario De Geometría Analítica Y Cálculo Diferencial. Impresión Copy Press. 1.997.*

BALDOR, J.A. *Álgebra.* Edición 1985. Cultural Venezolana, s.a.

BALDOR, J.A. *Aritmética Teórico-Práctica Con 7008 Ejercicios Y Problemas.* Edición 1986. Cultural Venezolana, s.a.

BALDOR, J.A. *Geometría Plana Y Del Espacio Con Una Introducción A La Trigonometría.* Edición 1986. Cultural Venezolana, s.a.

FLEMING, Walter y VARBERG, Dale. *Algebra Y Trigonometría Con Geometría Analítica.* Tercera Edición. Prentice Hall.

GID HOFFMANN, Jorge. *Selección De Temas De Matemática.* Cuarta Edición corregida. Sphix. Caracas.

GIMÉNEZ ROMERO, J. *2650 Ejercicios De Matemáticas Resueltos Y Propuestos Con Sus Resultados.* Edición 1994. Ediciones Eneva.

LARSON, Roland & HOSTETLER Robert. *Precalculus.* Second Edition. D.C. Heath and Company. Lexington. Masachusetts

LITVINENKO, V. Y MORDKÓVICH A. *Prácticas Para resolver Problemas Matemáticos.* Editorial Mir Moscú

MATAIX PLANA, José Luis. *Mil Problemas De Aritmética Y Álgebra.* Cuarta Edición. Editorial Dossat, s.a.

MERCADO, Carlos. *Curso de Matemática Elemental I. Algebra.* Editorial Universitaria.

PISOT y ZAMANSKY. *Matemáticas Generales. Álgebra-Análisis.* Montaner y Simon, s.a.

RADA SAUDO, Aranda. *Aritmética.* CENAMEC. Caracas. Venezuela.1992

ROJO, Armando. *Álgebra I.* Séptima Edición. Librería 'El Ateneo' Editorial.

SOBEL, Max y LERNER, Norbert. *Precálculo.* Quinta edición. Prentice Hall.

SWOKOWSKI & COLE. *Algebra Y Trigonometría Con Geometría Analítica.* Novena Edición. International Thomson.

ZILL, Dennis y DEWAR, Jacqueline. *Algebra Y Trigonometría.* Segunda Edición Actualizada. Mc Graw Hill.