TRAB
ED2016
G3

Análisis matemático para profesores

José Ramón Gascón Márquez

A mis hijos José Rafael y Carlos Arturo

Prof: Asociado

Caracas, Mayo 2016

Índice general

Parte 1. El texto 5

Capítulo 1. Los conjuntos infinitos 8
1.1. Introducción 8
1.2. Conjuntos equipotentes 10
1.3. Conjuntos infinitos 13
1.4. La no numerabilidad de los reales 14
1.5. Notas didácticas e históricas 17
1.6. Ejercicios del capítulo 1 18
1.7. Proyecto: El Teorema de Cantor y una nueva demostración que $\mathbb{R}$ es no numerable 19

Capítulo 2. Los números reales $\mathbb{R}$ 21
2.1. Introducción 21
2.2. Las cortaduras de Dedekind 22
2.3. El concepto de supremo y la completitud de los números reales 25
2.4. Operaciones en $\mathbb{R}$, ¿cómo sumar y multiplicar cortaduras? 27
2.5. La propiedad arquimediana de los números reales 28
2.6. Notas didácticas e históricas 29
2.7. Ejercicios del capítulo 2 30
2.8. Proyecto: Existencia de números trascendentes de acuerdo a Cantor 31

Capítulo 3. Abiertos y cerrados en $\mathbb{R}$ 33
3.1. Los reales como espacio métrico 33
3.2. Abiertos en $\mathbb{R}$ 34
3.3. Conjuntos cerrados 37
3.4. Sucesiones y completitud de los reales 38
3.5. Teorema de Cantor de los intervalos encajados 42
3.6. El Teorema de Baire 43
3.7. Notas didácticas e históricas 44
3.8. Ejercicios del capitulo 3 47
3.9. Proyecto: La construcción de los reales debida a Cantor 47

Capítulo 4. Conjuntos compactos y conexos 50
4.1. Conjuntos compactos y teorema de Bolzano-Weierstrass 50
4.2. Teorema de Heine-Borel 51
4.3. Conjuntos conexos 53
4.4. El conjunto de Cantor 54
4.5. Ejercicios del capítulo 4 57

Capítulo 5. Funciones continuas 59

5.1. Conceptos y resultados básicos 59
5.2. Preservación de la compacidad y conexidad 62
5.3. Algunos resultados básicos de continuidad 66
5.4. La función de Cantor 68
5.5. Ejercicios del capitulo 5 69

Capítulo 6. Funciones derivables 70
6.1. Nociones y resultados básicos 70
6.2. Recordando las series 76
6.3. El ejemplo de Weierstrass 82
6.4. La serie de Taylor: un ejemplo negativo 86
6.5. Reflexiones sobre la formalización del análisis 89
6.6. Ejercicios 94
6.7. Proyecto Funciones Convexas y Desigualdad de Jensen 95

Capítulo 7. La integral de Henstock-Kurzweil o de calibre 98
7.1. Introducción 98
7.2. Recordando la integral de Riemann 98
7.3. El concepto de calibre y el lema de Cousin 102
7.4. La integral de calibre y el teorema Fundamental del Cálculo 104
7.5. Notas didácticas e históricas 110
7.6. Ejercicios del capítulo 111
7.7. Proyecto Desigualdades 111

Parte 2. Soluciones y respuestas a los problemas 113

Bibliografía 121

Parte 1

El texto

PRÓLOGO

Este libro surge de una serie de cursos y seminarios de análisis matemático que el autor ha dictado en la UCAB y en la UPEL (IPC y Siso Martinez) para futuros profesores de bachillerato. Los cursos han sido a nivel de pregrado y postgrado pero siempre para estudiantes de Educación Matemática. Surge de manera natural la pregunta de que contenidos incluir, como evaluar y que enfoque usar para contribuir en la formación de los futuros profesores. Lo primero que se debe destacar en cualquier curso de análisis Matemático es su relación con el infinito, luego un curso de análisis es un lugar propicio para discutir sobre lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, así como sobre los conjuntos infinitos. Los conjuntos infinitos se estudian en la matemática del bachillerato dentro del marco de los sistemas numéricos como los números naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$ y los racionales $\mathbb{Q}$. Creo que una reflexión profunda sobre la idea de infinito es fundamental para el docente de matemáticas de educación media. Los números reales son otro tema que es tratado en la educación media y muchas veces se hace de manera superficial. Por ejemplo, la mayor parte de los números irracionales que son presentados son algebraicos y el docente entiende muy poco la necesidad de construir el *continuo*. Incluso, muchas veces los docentes no conocen la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Otro aspecto que he tratado de resaltar, y que considero importante para el profesor, es la idea de función resaltando la importancia de dar claramente su conjunto de partida y conjunto de llegada. Muchas veces el docente habla de la función $y = \cos x$ sin entender que esto es solamente una regla de asignación que no determina la pintura completa de la función.

La noción de distancia se introduce por medio de la distancia usual en los reales, indicando al lector la posibilidad de estudiar espacios métricos generales. De la distancia se derivan las nociones importantes de limite y convergencia, cruciales en el análisis matemático de funciones de variable real. Se analiza la idea de continuidad usando sucesiones para definirla y estudiando sus propiedades fundamentales. Hemos dado el importante ejemplo de una función continua que no admite derivada en punto alguno para destacar la necesidad de trabajar de manera lógica y formal en análisis matemático. De hecho, pretendemos que el estudiante se de cuenta que muchas propiedades de los números reales desafían la interpretación geométrica. Incluimos también el ejemplo de una función con derivadas de cualquier orden que no admite serie de Taylor en el origen. Hemos incluido en el ultimo capitulo del texto una introducción a la integral de Henstock-Kurzweil pensando en hacer un aporte en la actualización de la formación de los profesores de media que son expuestos únicamente a la integral de Riemann. Como es conocido la integral de Henstock-Kurzweil se basa en el concepto de calibre o *gauge* y su construcción es similar a la de Riemann. Por comentarios de los estudiantes se deduce que incluso la presentación de la integral de Riemann es deficiente y poco formal a nivel de pregrado. La integral de Henstock-Kurzweil es muy poderosa y no necesita el aparato de la Teoría de la Medida, necesario para construir la integral de Lebesgue. El autor de este trabajo, usando el concepto de calibre, ha encontrado una nueva demostración de la no numerabilidad de los numerabilidad de los reales recientemente publicada (ver bibliografía).

Complementan el libro una serie de notas didácticas e históricas, cuya motivación es motivar la reflexión del docente. Creo que el uso de la historia de la

matemática es una de las mejores herramientas que puede emplear el profesor en su clases, espero que las notas que aparecen en este texto ilustren este punto.

Una serie de ejercicios y proyectos son presentados para el trabajo del lector, su motivación, en el caso de los ejercicios, es verificar la comprensión del material expuesto en el texto. Los proyectos quieren extender algún tema en particular y son un reto para el lector.

Espero que este texto sea útil a los jóvenes profesores de matemática y que su lectura los motive a continuar indagando en las ideas que aparecen en el mismo y en su practica profesional.

José Gascón
Guarenas

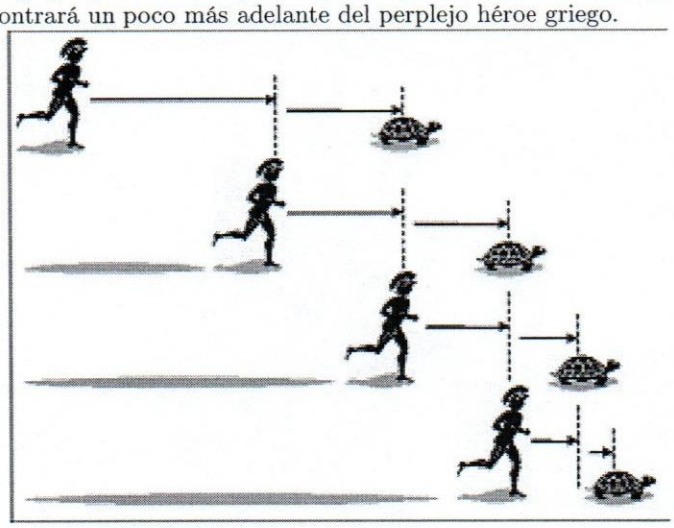
Capítulo 1

Los conjuntos infinitos

El infinito, por si solo, excede nuestra capacidad de comprensión, lo mismo que ocurre con los indivisibles
Galileo Galilei, Dialogo sobre dos nuevas ciencias

1.1. Introducción

Una comprensión del concepto de infinito es necesaria para estudiar con propiedad los números reales. Desde los matemáticos griegos el uso del infinito ha sido cuestionado dentro de la argumentación matemática, uno de los críticos más agudos del uso del infinito fue el griego Zenón de Elea. Propuso varias paradojas, derivadas del uso del infinito, entre ellas la famosa paradoja de Aquiles y la tortuga, repitamos su sorprendente argumento. Aquiles, el de los pies ligeros, reta a la lenta tortuga a una carrera de 1 km. Por supuesto, el héroe griego decide darle a la tortuga una ventaja de 900 metros convencido de su victoria. La carrera empieza y Aquiles rápido como el viento alcanza la marca de los 900 metros antes que la tortuga llegue a la meta. Sin embargo, la tortuga que es lenta algo adelanto, en este caso A_1 mts y se encuentra ahora en la posición 900 mts + A_1. Cuando Aquiles llega al punto $900 + A_1$ la tortuga recorrió una distancia A_2, muy pequeña pero sin duda positiva y se encuentra en la posición $900+A_1 + A_2$, todavía delante del gran griego. Cuando Aquiles llegue al punto $900 + A_1 + A_2$, la tortuga habrá avanzado...Creo que el lector ya entiende el argumento de Zenón. Aquiles no alcanzará jamás a la tortuga ya que cada vez que ocupe una posición donde la tortuga ha estado está se encontrará un poco más adelante del perplejo héroe griego.



Recomendamos al profesor que reflexione sobre esta carrera y busque información sobre las otras paradojas de Zenón. Este tipo de razonamiento alertó a los griegos sobre lo delicado que era el uso del infinito en matemática y grandes matemáticos, como Arquímedes y Euclides, evitaron razonar con lo infinitamente grande o pequeño. Ejemplos claros de esto, es el trabajo de Arquímedes sobre a cuadratura de la parábola donde evita sumar una serie infinita mediante un hermoso argumento o la forma como Euclides enuncia el teorema de la infinitud de los números primos. El siguiente matemático que alerta sobre lo absurdo de incluir el infinito en matemáticas es el gran físico Galileo Galilei. Galileo observa con asombro que podamos establecer una correspondencia biunívoca o biyección entre el conjunto de los números naturales y sus cuadrados

$$1 \leftrightarrow 1,\ 2 \leftrightarrow 4,\ 3 \leftrightarrow 9,\ \cdots,\ n \leftrightarrow n^2, \cdots,$$

y opina que tal paradoja se debe a trabajar con conjuntos infinitos. Observe que si entre dos conjuntos A, B existe una biyección los dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Pero, hay "muchos más" naturales que cuadrados ya que los números que son cuadrados forman un subconjunto propio de los números naturales. Galileo concluye que se debe evitar tratar con el infinito en matemáticas. Gauss pensaba que el infinito en matemática era algo potencial, *uno manera de hablar,* pero que nunca alcanzamos y que carece de existencia actual.

Corresponde al genio de Bolzano reconocer la posibilidad de trabajar con el concepto de un conjunto infinito. Sin embargo, no podemos omitir de este breve recuento histórico la importancia del Cálculo de Newton y Leibniz para rescatar al infinito del limbo donde lo colocaron los matemáticos griegos. La aparición en el Cálculo de los infinitesimales, las series y otros procesos que involucran el concepto de límite vuelven a poner al infinito sobre el tapete. Bolzano tuvo la gran intuición de observar que, lo que a Galileo le pareció paradójico, captura la esencia de tener un conjunto infinito. Este sacerdote nacido en lo que ahora llamamos Checoslovaquia dio también el concepto de límite de manera muy similar a la de Cauchy y es uno de los padres del análisis moderno.

Por último, debemos al trabajo de Cantor y su colaborador Dedekind, entre 1872 y 1881, que el infinito haya adquirido un estatus fundamental en la matemática moderna. Fue un trabajo revolucionario ya que el infinito entró en la matemática como un objeto de estudio y los conjuntos como la base del lenguaje matemático. Cantor estableció que existe una escala para medir el infinito con su concepto de cardinal transfinito. Además, formuló una aritmética para estos cardinales. El primer problema de la histórica lista de 23 problemas que David Hilbert presentó en el congreso de Matemáticas de París en 1900 era el de determinar el cardinal de los números reales: la hipótesis del continuo. Esto revela la importancia que la comunidad matemática le daba a la teoría de conjuntos infinitos y sus cardinales creada por Cantor.

Bernardo Bolzano

Nació en Praga en 1781 de una familia de origen italiano. Fue matemático y filosofo, aunque su concepción de la filosofía estaba fundamentada en la matemática. Ordenado como sacerdote enseñó filosofía en la universidad de Praga. Diversos problemas ocasionados por su visión de la sociedad y la religión hacen que tenga que separarse de su cátedra en 1820. Su obra fundamental en matemáticas es *Paradojas del infinito(1851)* publicada tres años después de su muerte. Muere en Praga en 1848 dentro de un aislamiento que impidió la difusión de su importante trabajo.

1.2. Conjuntos equipotentes

Vamos a recordar la definición de biyección entre dos conjuntos A, B que el lector estudio tanto en bachillerato como en la universidad. Para esto vamos a repasar algunos hechos básicos de la teoría de conjunto. Un conjunto A lo entendemos como una colección de objetos. Usaremos en el texto letras mayúsculas como $A, B, \cdots$ para designar un conjunto. Los elementos de un conjunto A serán denotados por letras minúsculas $x, y, \cdots$. Tomemos dos conjuntos A y B cuyos elementos denotamos por letras como $x, y, \cdots$. Así, al escribir $x \in A$ indicamos que x es un elemento de A. Si escribimos $y \in B$ y $y \notin A$ esto significa que y esta en B pero no pertenece a A. Un conjunto A se dice subconjunto de un conjunto B, denotado por medio de $A \subset B$ si y sólo si $x \in A \Rightarrow x \in B$. Es decir, cualquier elemento de A es también un elemento de B.

EJEMPLO 1. Consideremos el conjunto de todos los números naturales $\mathbb{N}$ determinado por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

Claramente, 0 pertenece a $\mathbb{N}$ pero -1 no pertenece a $\mathbb{N}$, simbólicamente $0 \in \mathbb{N}$ y $-1 \notin \mathbb{N}$. Si llamamos al conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ entonces

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

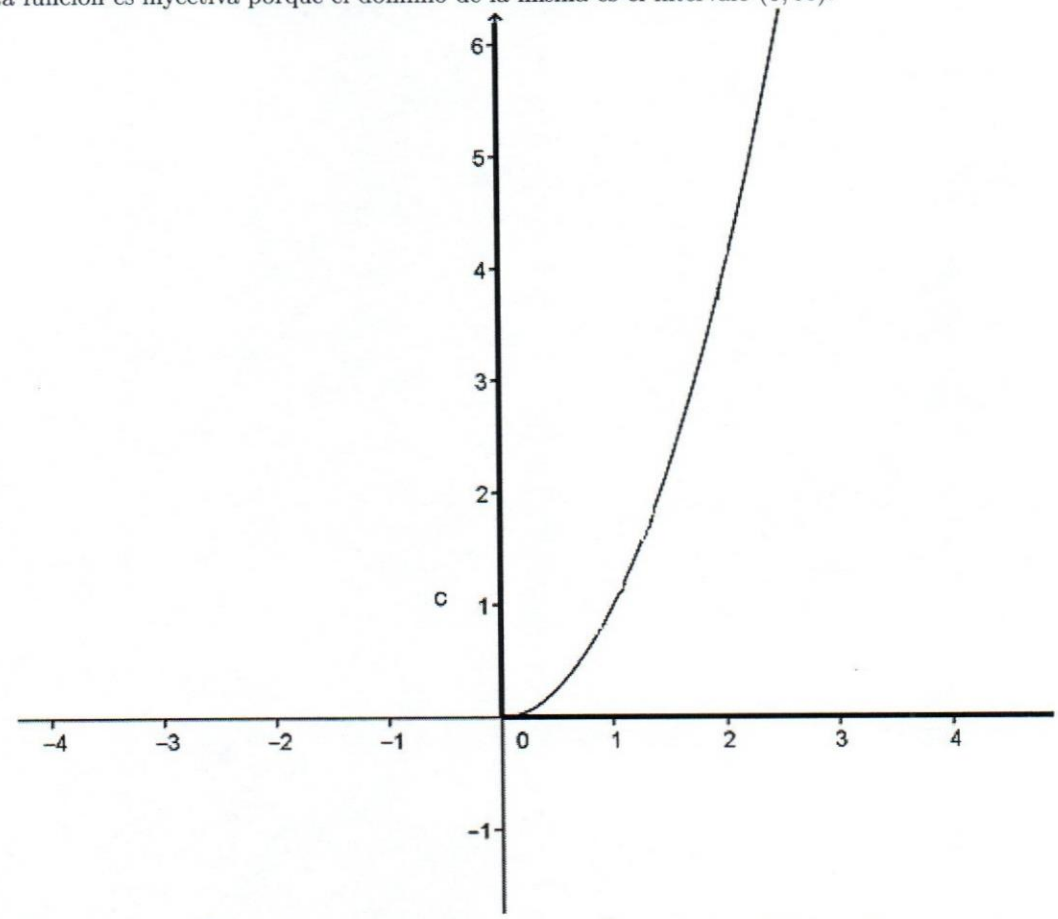
Tenemos entonces que $-1 \in \mathbb{Z}$. Cualquier número natural es un número entero, luego $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Una *función entre dos conjuntos A y B, denotada $f : A \to B$, asocia a cada elemento x de A un elemento único y=$f(x)$ de B.* Este concepto abstracto tardó mucho tiempo en ser formulado en esta forma.

DEFINICIÓN 2. Una función f del conjunto A al conjunto B, $f : A \to B$, se denomina inyectiva si y sólo si $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Siempre que demos una definición la debemos ilustrar con un ejemplo. Aprovecharemos el ejemplo que sigue para discutir algunas cosas importantes relacionados con la idea de función. En primer lugar, si tenemos una representación gráfica de una función real de variable real entonces la función es inyectiva si y solo si toda recta horizontal(paralela al eje x) corta la gráfica en un solo punto. El lector debe reflexionar el porque. También debemos señalar la importancia del dominio para determinar si una función es o no inyectiva.

EJEMPLO 3. Consideremos la función $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dada por $f(x) = x^2$. Esta función es inyectiva porque el dominio de la misma es el intervalo $(0, \infty)$.



La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la regla $g(x) = x^2$ no es inyectiva ya que $g(-1) = g(1)$. Esto demuestra al lector que es incorrecto hablar en matemática de la función $f(x) = x^2$ sin especificar su dominio. Incluso, las funciones $f(x) = x$ y

$g(x) = x^2$ son exactamente la misma función si tomamos como dominio el conjunto $\{0, 1\}$. El lector debe indicar porqué.

DEFINICIÓN 4. Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si y sólo si dado cualquier elemento $y \in B$ existe un elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

EJEMPLO 5. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ es sobreyectiva ya que, dado cualquier $y \in \mathbb{R}$, la ecuación $x^3 = y$ siempre tiene la solución $x = \sqrt[3]{y}$. La función $g(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es sobreyectiva ya que la ecuación $x^2 = y$ no admite soluciones en $\mathbb{R}$ si y es negativa. En cambio, la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $h(x) = x^2$ si es sobreyectiva. Observe el rol que juegan siempre el conjunto de llegada para caracterizar las propiedades de una función, por ello se debe evitar indicar una función dando solo una regla de asignación.

Estamos listos para dar una definición importante en esta sección.

DEFINICIÓN 6. Una función $f : A \to B$ se denomina biyectiva si y sólo si f es inyectiva y sobreyectiva.

EJEMPLO 7. Consideremos la función $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ definida por la asignación $f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 2$ es biyectiva. Observe que tanto el conjunto de partida como el de llegada tienen 3 elementos.

Un bello y elemental principio en matemáticas es llamado "principio del palomar". El dice que si tenemos n objetos y m cajas, donde $n > m$ y colocamos todos los objetos en las cajas, entonces alguna caja debe contener al menos 2 objetos distintos. No vamos a demostrar el principio del palomar, el lector interesado puede encontrar una demostración del mismo en **[Za]**.

EJEMPLO 8. Supongamos que tenemos una función $f : A \to B$ donde A tiene n elementos y B tiene m elementos con $n > m$. Concluimos, usando el principio del palomar, que es imposible que f sea inyectiva. En efecto, pensemos que escribir $f(a) = b$ significa que colocamos elemento(objeto) $a \in A$ en la caja representada por el objeto $b \in B$. El principio del palomar indica que debe existir un $b_0 \in B$ tal que $f(a_1) = b_0, f(a_2) = b_0$ con $a_1 \neq a_2$. Luego, f no es inyectiva.

Igualmente se puede demostrar que si $f : A \to B$ es una función donde A tiene n elementos y B tiene m elementos con $n < m$ entonces f no puede ser sobreyectiva. Eso implica que si A y B son conjuntos finitos con n y m elementos respectivamente y f es una biyección de A en B entonces

$$n = m$$

Luego, si A y B son conjuntos finitos con n y m elementos respectivamente es una condición necesaria y suficiente que $n = m$ para que exista una biyección f de A en B. Hemos demostrado en el texto que la condición es necesaria, en los ejercicios del capítulo el lector demostrará que es una condición suficiente.

Ahora la definición más importante de la sección. Definiremos el concepto de conjuntos equipotentes que nos indica cuando dos conjuntos A y B tienen la misma cantidad de elementos, sean los conjuntos finitos o no.

DEFINICIÓN 9. Dos conjuntos A, B son equipotentes si y sólo si existe una biyección f de A en B.

EJEMPLO 10. Los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ son equipotentes. Invitamos al lector a construir una biyección de A en B. ¿Puede el lector decir cuantas biyecciones existen? .

El siguiente ejemplo debe sorprender al lector ya que demostraremos que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales es equipotente con el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Esto sorprende ya que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

EJEMPLO 11. Los números naturales $\mathbb{N}$ constituyen un conjunto equipotente con el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$. Para ver esto, listemos los enteros de la siguiente manera

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots, k, -k, \cdots$$

Una vez agrupados los enteros de esta manera definimos la función $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = -1, f(3) = 2, \cdots$. Invitamos al lector a encontrar la fórmula explícita para la f pero la construcción que hemos hecho implica claramente que los dos conjuntos, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son equipotentes.

Si establecemos la siguiente relación entre los subconjuntos de un conjunto X

1.3. Conjuntos infinitos

Los números naturales conforman un conjunto infinito ya que a sucesión $0, 1, 2, 3, \cdots$ no tiene un último término. Esto es intuitivo pero podemos ver que el intervalo $[0, 1]$ tiene infinitos elementos y un mayor elemento que es el 1. Entonces, ¿cómo caracterizamos los conjuntos que tienen infinitos elementos?. Correspondió a Bolzano resolver este problema matemático.

DEFINICIÓN 12. Un conjunto A es infinito si existe una biyección f entre B y A donde B es una parte propia de A, esto es $B \subset A$ y $B \neq A$.

Ahora podemos afirmar con propiedad que los números naturales constituye un conjunto infinito. Veamos esto en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 13. La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n^2$ establece una biyección entre el conjunto de los números naturales y los números naturales que son cuadrados perfectos. Pero los números que son cuadrados perfectos son un subconjunto propio de los naturales $\mathbb{N}$ ya que $3 \in \mathbb{N}$ y 3 no es un cuadrado perfecto. Luego, $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

El siguiente resultado parece muy plausible. Nos dice que si A es un conjunto infinito y B es un conjunto que contiene a A, esto es $A \subset B$, entonces B es infinito. El resultado es natural ya que B contiene un conjunto infinito y por ende debe ser también infinito. Sin embargo su demostración es bastante técnica y debe ser analizada cuidadosamente por el lector.

TEOREMA 14. *Si A es un conjunto infinito y B es un conjunto que contiene a A, esto es $A \subset B$ entonces B es infinito.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que A es infinito y por ende debe existir una biyección f entre A y un conjunto $A_1 \subset A$ que verifica además $A_1 \neq A$. Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que el conjunto B contiene a A propiamente. Luego, $B = A \cup (B \setminus A)$. Observe que cualquier $x \in B$ puede estar solamente en A

DEMOSTRACIÓN. Presentemos los elementos de la unión como una matriz cuadrada infinita

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & \cdots \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

donde en la fila i, $i = 1, 2, \cdots$ colocamos los elementos del conjunto A_i listados como $a_{i1}, a_{i2}, \cdots$. Ahora vamos a recorrer los elementos de la matriz serpenteando por la misma empezando por el elemento a_{11} y recorriendo todos los elementos y pasando por cada elemento una sola vez. El siguiente diagrama ilustra lo que decimos. Las flechas nos indican como pasamos de un elemento al siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \\ a_{21} & \leftarrow & a_{22} & & a_{23} & & \\ \downarrow & & & & \uparrow & & \\ a_{31} & \rightarrow & a_{32} & \rightarrow & a_{33} & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \end{array}$$

Así, la enumeración de los elementos de la unión está dada por $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, \cdots$. Observe que pasamos por cada elemento una y sólo una vez. □

Quizás algún lector no encuentre muy formal la demostración anterior. Es una demostración pictórica pero contra la cual difícilmente se puede levantar objeción alguna.

Como aplicación veamos que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable. Basta demostrar que los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ es numerable.

TEOREMA 19. *El conjunto de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Queda para el lector como ejercicio, observe que el conjunto de los racionales con denominador $n \in \mathbb{N}$ fijo es numerable. □

Esto fue una sorpresa para Cantor y empezó a pensar que cualquier conjunto infinito es numerable. Como veremos esto no es cierto. Sin embargo, dentro de cualquier conjunto infinito "vive" un conjunto numerable.

TEOREMA 20. *Sea K un conjunto infinito entonces K contiene un conjunto infinito A que es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un elemento cualquiera $x \in K$, tal elemento debe existir ya que K es infinito. Etiquetemos ese elemento por x_0. Consideremos ahora el conjunto $K - \{x_0\}$ que debe contener infinitos elementos. Tomemos ahora $x_1 \in (K - \{x_0\})$ y continuamos este proceso escogiendo $x_n \in K - \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$. El conjunto $A = \{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\} \subset K$ es, por construcción numerable, esto termina la demostración. □

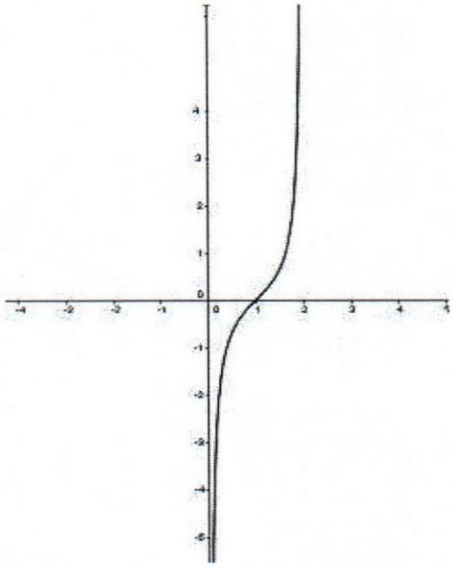
Lo que sigue es una muestra del genio infinito de Cantor. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es uno de los objetos centrales de nuestro trabajo; es uno de los objetos más importantes y complejos de la matemática. En esta parte de nuestro libro usaremos para representarlo la concepción de Stevin (año??) de ver a los reales representados por su expansión decimal

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots$$

donde a_i representa la parte entera(no confundir con la función parte entera) y $0{,}a_1 a_2 a_3 \cdots$ la parte decimal. Es decir, hemos fijado la base 10 y por ende $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ para cualquier $i \geq 1$. Queremos demostrar que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es numerable. Para comodidad trabajaremos en el intervalo $[0, 1]$ donde cada real puede ser representado por medio de una expresión de la forma $0, a_1 a_2 a_3 \cdots$. Observe que $0,9999 \cdots = 1$. Verifiquemos en primer lugar que el conjunto de los números reales es infinito.

TEOREMA 21. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es infinito.*

DEMOSTRACIÓN. La función $f(x) = \frac{x-1}{x(2-x)}$ es una biyección entre el intervalo $(0, 2)$ y el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$. Como $(0, 2) \subset \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R}$ es infinito. □



En los problemas demostramos de manera pictórica que hay tantos puntos en un intervalo como en toda la recta real.

Como ya señalamos, al demostrar Cantor que $\mathbb{Q}$ es numerable empezó a pensar que todos los conjuntos infinitos eran numerables. El siguiente importantísimo resultado le indicó que su suposición era incorrecta. El mismo se basa en un argumento denominado "la diagonal de Cantor" que se ha aplicado de manera exitosa en otras situaciones de la matemática.

TEOREMA 22. *El conjunto de los números reales no es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que podemos listar los elementos o puntos del intervalo $[0, 1]$ de la forma $x_0, x_1, x_2, \cdots$

donde cada real x_i admite una representación de la forma $x_i = 0,\ a_{i1}a_{i2}\cdots$. Coloquemos los elementos $x_0, x_1, x_2, \cdots$ de la numeración del intervalo $[0,1]$ mediante el arreglo

$$\begin{array}{lllll} 0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ 0, & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \ddots \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Construyamos ahora un real x en $[0,1]$ de la manera siguiente: el primer decimal de x, denotado por b_1 no es a_{11}, el segundo decimal b_2 de x no es a_{22}, el $k-$esimo decimal de x no es a_{kk}. Continuamos este proceso moviéndonos desde $k = 1$ hasta ∞.

$$\begin{array}{lllll} 0, & \breve{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ 0, & a_{21} & \breve{a_{22}} & a_{23} & \cdots \\ 0, & a_{31} & a_{32} & \breve{a_{33}} & \\ 0, & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \ddots \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Es decir, nos movemos sobre los elementos en la diagonal escogiendo en cada posición k de la diagonal un número distinto a a_{kk}. Esto lo podemos hacer porque tenemos a nuestra disposición 9 elecciones posibles. El real x construido debe estar en la numeración señalada ya que es un elemento de $[0,1]$, digamos que es el elemento a_j de la numeración, pero $a_j \neq x$ ya que difieren, por construcción, en el $j-$ésimo decimal. □

La demostración de Cantor, además de ser hermosa e ingeniosa, constituye una técnica matemática de demostración conocida como "argumento diagonal". Cantor dio distintas pruebas de la no numerabilidad de los reales $\mathbb{R}$. La implicación más importante del resultado de Cantor es que existen distintos tipos de infinitos. Los conjuntos numerables corresponden al primer peldaño de la escalera del infinito, su cardinal de denota por medio de $\aleph_0$ (se lee alef 0). El cardinal de los números reales se denota por medio de c. El resultado de Cantor se puede escribir como

$$\aleph_0 < c \tag{1.4.1}$$

Cantor generalizó este resultado y demostró que el conjunto de partes o subconjuntos de un conjunto finito o infinito tiene un cardinal mayor que el conjunto original, este es el contenido del teorema de Cantor que constituye uno de nuestros proyectos.

1.5. Notas didácticas e históricas

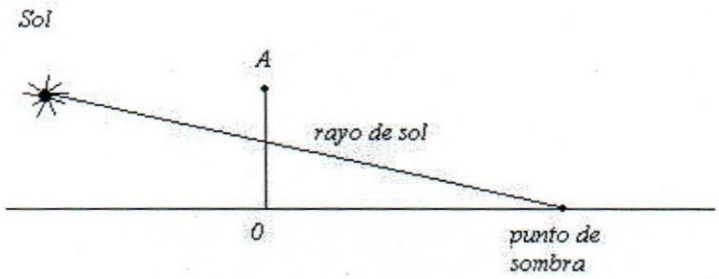
1. Establecer una biyección entre dos conjuntos es una manera de contar sin contar. Sorprende que en muchas culturas se aplica esta idea que parece muy abstracta. Por ejemplo, los pastores usan la idea de biyección para saber si todas las ovejas regresaron al corral después de pastar todo el día. ¿Cómo lo hacen?. Al salir a pastar en la mañana echan una piedra pequeña en una bolsa de cuero por cada oveja que sale del corral. En la tarde, cuando regresan al corral sacan una piedra por cada oveja que se mete en el mismo.

Si le sobran piedras en la bolsa de cuero entonces el pastor sabe que quedan ovejas en el campo y va a buscarlas.

2. Lo que le pareció paradójico a Galileo es lo que usa Bolzano para definir que es un conjunto infinito: un conjunto es infinito si se puede poner en relación biunívoca con una parte propia. Esto tiene consecuencias sorprendentes. Por ejemplo, el lector debe conocer el ejemplo conocido como el "Hotel de Hilbert". Este hotel está completamente lleno cuando llega un viajero a las dos de la mañana. El viajero pide una habitación y un recepcionista soñoliento le dice que el hotel está lleno. Sin embargo, el recepcionista tiene una solución basada en el hecho que el hotel tiene infinitas habitaciones. Le dice a la persona que está en el cuarto 1 se pase al cuarto 2, a la del cuarto 2 al tres y así sucesivamente. El cuarto 1 queda vacío y cada persona que ocupaba un cuarto, digamos la habitación n, queda en la habitación $n+1$. El profesor le puede proponer como reflexión a los estudiantes que hacer si llegan infinitas(numerable) personas al hotel cuando está lleno.

1.6. Ejercicios del capítulo 1

1. Estudie la inyectividad y sobreyectividad de la función $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$ dada por la regla $f(x) = \sqrt{x+1}$.
2. Demuestre que dada cualquier función biyectiva $f : A \to B$ existe una función biyectiva $g : B \to A$ tal que $f \circ g = I_d, g \circ f = I_d$ donde $\circ$ representa la composición usual de funciones y I_d la función que asigna a un x el mismo$x$. La función g se denomina la inversa de f.
3. ¿Cuál es la inversa de la función del ejercicio 1?.
4. Demuestra que si tenemos n objetos y m cajas con $n < m$ y colocamos los objetos en las cajas alguna caja queda vacía.
5. Demuestra que si A tiene n elementos con $n < \infty$ entonces existe una biyección entre A y el conjunto $\{1, 2, \cdots, n\}$.
6. Construye la fórmula de la función f del ejemplo 11.
7. Usa los números pares o impares para construir, similarmente a lo hecho en el Ejemplo 13., una biyección entre los números naturales y los números pares.
8. Usando el Ejemplo 11. concluya que el conjunto de todos los enteros $\mathbb{Z}$ es infinito.
9. Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}^+$ es numerable.
10. ¿Es la unión de dos conjuntos infinitos un conjunto infinito?. Si es cierto demuestrelo, si es falso de un contra ejemplo. ¿Es la intersección de conjuntos infinitos un conjunto infinito? Si es cierto demuestrelo, si es falso de un contraejemplo.
11. Demuestre que $0,9999\cdots = 1$.
12. El siguiente dibujo muestra que hay tantos puntos en el segmento $0A$ que en una semirrecta, en este caso la semirrecta con origen 0 y que va en sentido positivo. Debe suponer que la altura de la fuente de luz(el sol) es igual a la longitud del segmento $0A$. ¿Qué ocurre cuando un rayo de luz corta el segmento en puntos que se aproximan a A.? De una ecuación que represente analíticamente la correspondencia entre los puntos del segmento OA y la semirrecta que va de O a ∞.



1.7. Proyecto: El Teorema de Cantor y una nueva demostración que $\mathbb{R}$ es no numerable

El objetivo de este proyecto es demostrar el teorema de Cantor que establece que no se puede construir una biyeccion entre un conjunto A y su conjunto de partes o subconjuntos $P(A)$. Luego, A no es equipotente con $P(A)$. El conjunto $P(A)$ se define como

$$P(A) = \{B \text{ tal que } B \subset A\}.$$

Por ejemplo, si $A = \{a, b\}$ entonces $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Vamos a probar este enunciado y luego aplicarlo para dar una nueva demostración de que el conjunto de los números reales no es numerable.

a) Examinemos el caso que A es un conjunto finito. Veremos que la demostración del teorema de Cantor se reduce a una desigualdad que involucra a los números naturales. Suponga que A sea finito con n elementos el lector debe demostrar que el conjunto de partes de A tiene 2^n elementos.Recomendamos que antes de hacer una demostración formal, el lector examine varios ejemplos. Arriba dimos un ejemplo de un conjunto $A = \{a, b\}$ y verificamos que el conjunto de partes tiene precisamente $2^2 = 4$ elementos. ¿Cuales son los subconjuntos o partes del conjunto $\{a, b, c\}$?. Liste los mismos y cuente cuantos hay, ¿qué observa?. Repita el experimento con el conjunto $\{a, b, c, d\}$.¿Qué observó?. ¿Puede inferir lo que ocurre con el conjunto de partes cuando le agregamos un solo elemento a un conjunto dado?.

Supongamos que ya demostró que el conjunto de partes de A tiene 2^n elementos si A tiene n elementos. demuestre ahora la desigualdad

$$n < 2^n \text{ para } n = 0, 1, 2, \cdots$$

Como $n < 2^n$ es imposible que se pueda establecer la biyección entre A y $P(A)$ ya que entre dos conjuntos finitos sólo se puede establecer una biyección si tienen el mismo número de elementos.Sugerencia: para la desigualdad $n < 2^n$ el camino es claro y pasa por usar inducción matemática, mi profesor Charles Saltzer en Ohio State University decía: just one word induction!

b) Dado un conjunto A que supondremos infinito queremos investigar la posibilidad de establecer una biyección entre A y $P(A)$. Usaremos reducción al absurdo. Supongamos que exista tal función biyectiva $F : A \to P(A)$ y consideremos $B = \{x \in A \text{ tales que } x \in B \Leftrightarrow x \notin F(x)\}$. Es claro que $B \subset A$ y por ende existe un $x_0 \in A$ tal que $F(x_0) = B$. Pregunta que el lector debe responder ¿ $x_0 \in B = F(x_0)$?. Demuestre que si responde de manera afirmativa o negativa a esa pregunta llega a una contradicción. Luego, es imposible que se pueda establecer tal biyección.

c)En las dos últimas partes del proyecto aplicaremos el Teorema de Cantor para demostrar de una nueva manera que los números reales no son numerables. Dar un subconjunto E del conjunto F equivale a dar una función de F en $\{0,1\}$ que vale 1 si $x \in E$ y 0 en caso contrario. Este tipo de funciones se llaman funciones características. La idea es que el valor 1 corresponde a estar en E y el valor 0 corresponde a no estar en E. Establezca una biyección entre el conjunto de partes de F y el conjunto de todas las funciones de F en $\{0,1\}$. Denotaremos al conjunto de todas las funciones de F en $\{0,1\}$ como

$$\{0,1\}^F$$

d) Estudie la representación binaria de un número en los reales, responda esta pregunta ¿que número en base 10 es el número 1011,10100 ? Los números 1011,10100 están representados en base 2. Veamos como representamos un número $x \in [0,1]$ en base 2. Considere el intervalo $[0,1]$ y tome un elemento x en el intervalo $[0,1]$. Al bisecar el intervalo $[0,1]$ en los intervalos $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{2},1\right]$, el punto pertenece a uno de ellos y esto decide su primer valor en su expansión binaria, 0 si esta en $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ y 1 si esta en $\left[\frac{1}{2},1\right]$. Luego nos paramos en el intervalo donde este el número y lo volvemos a bisecar, si el punto está en el intervalo de la izquierda tendrá un 0 en su siguiente posición en su expansión binaria o tendrá un 1 si está en el intervalo de la derecha. Se continua indefinidamente este proceso para hallar la expansión binaria de un número. Esto es similar a determinar una información haciendo preguntas que tienen como respuesta si o no. Al final del día el número se verá como $0,1111011000001\cdots$. Es decir como una sucesión con valores 0 y 1, esto es, dar un punto $x \in [0,1]$ equivale a dar una función $g : \mathbb{N} \to \{0,1\}$. El valor de $g(n)$ representa el número que se ha determinado en la posición n de la expansión binaria de $x \in [0,1]$. Esperamos que el lector este en condiciones de demostrar que se puede establecer una biyeccion entre el intervalo $[0,1]$ y todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\{0,1\}$. Concluya que $\mathbb{R}$ no puede ser numerable aplicando el Teorema de Cantor demostrado arriba.

Capítulo 2

Los números reales $\mathbb{R}$

Hay algo que me gustaría saber, dijo Annabelle...¿Existe un conjunto A que sea mayor $\mathbb{N}$ *pero menor que* $P(\mathbb{N})$*? ...Ah! Exclamo el Brujo, les gustaría saberlo. A mi también me gustaría saberlo, y a todo el mundo matemático!*

Raymond Smullyan, *Satan, Cantor y el infinito*

2.1. Introducción

Los números reales constituyen el sistema numérico fundamental para el análisis matemático. Por ello, es fundamental dar una descripción adecuada de los mismos que sea compatible con el rigor matemático. La idea de número real esta asociada, desde los griegos, al concepto de medición cantidades continuas. Para las cantidades discretas empleamos el conjunto de los números naturales, pero como asignamos una medida de longitud usando los naturales o aun los racionales? Fue un descubrimiento de los pitagóricos que la longitud de la hipotenusa de un triangulo rectángulo isósceles era inconmensurable respecto a los lados. Esto indicaba que los números racionales no eran suficientes para lo procesos de medición de longitudes, áreas o volúmenes. Los griegos, siempre sumergidos en el lenguaje geométrico, crearon una teoría de las proporciones para manejar esta situación. Sin embargo, nuestra comprensión y representación de los números reales esta condicionada por otros avances de la matemática como la introducción de los numerales indo-arábigo. La introducción se debe a Fibonacci quien en 1202 publico un libro fundamental *Liber abbaci*(Libro del ábaco o Libro del cálculo). Una serie de algoritmos se hacen altamente efectivos con los números indo-arábigos lo que hace que se aumente su difusión. Corresponde a Stevin hacia finales del siglo XVI la escritura de expresiones decimales finitas que representan ciertos racionales. También se percata que mediante un proceso de aproximación se pueden representar otros números mediante expresiones decimales finitas. Sin embargo, es a Dedekind ya en el siglo XIX a quien corresponde establecer una construcción rigurosa de los números reales basada en la idea de cortadura. La construcción de Dedekind era parte del espíritu matemático del ultimo tercio del siglo XIX que reclamaba entender en profundidad a los números reales.

En este capitulo desarrollamos la construcción de Dedekind y sus consecuencias aritméticas y topológicas. El hecho que los reales construidos por medio de las cortaduras verifican las propiedades aritméticas elementales es crucial. Nosotros demostraremos la importante propiedad de la completitud de los números reales, así como demostraremos la densidad de los números racionales.

2.2. Las cortaduras de Dedekind

Un racional $\frac{p}{q}$ con $q \neq 0$ y $p, q \in \mathbb{Z}$ es un número familiar a los estudiantes desde la primaria. No voy a realizar una construcción de los racionales $\mathbb{Q}$ o de los números enteros $\mathbb{Z}$, nos vamos a concentrar en construir el conjunto más importante del análisis: los números reales. Sin embargo, recordaremos las más importantes propiedades de los números racionales resumiendolas brevemente. El conjunto $\mathbb{Q}$ está dotado de una ley de composición interna $+$ respecto a la cual es un grupo abeliano, dicha operación se define por medio de

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$$

Recordamos acá que dos racionales $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ se consideran iguales si y sólo si $ps = rq$. También, se define en $\mathbb{Q}$ una ley de composición definida por

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

De ahora en adelante escribiremos el producto como $\frac{p}{q}\frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$ omitiendo el punto. Con esta ley de composición del producto, los racionales $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ son un grupo abeliano. Las operaciones de suma y producto están relacionadas por medio de la ley distributiva

$$\frac{p}{q}\left(\frac{r}{s} + \frac{u}{v}\right) = \frac{p}{q}\frac{r}{s} + \frac{p}{q}\frac{u}{v}$$

Estas leyes de composición las conoce el lector desde primaria y se refiere a ellas como la suma $+$ y el producto $\cdot$ de números racionales.

Hablemos un poco del orden en $\mathbb{Q}$, esta discusión es importante para formular el concepto de cortadura. Un racional $\frac{p}{q}$ es positivo, lo escribimos $\frac{p}{q} > 0$ si y sólo si $pq > 0$. Esto implica que los enteros p, q son del mismo signo y $p \neq 0$. Decimos que un racional $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ si y sólo si $\frac{p}{q} + \frac{t}{v} = \frac{r}{s}$ con $\frac{t}{v} > 0$. Es decir, $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ si y solo si $\frac{r}{s} - \frac{p}{q} > 0$. Tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 23. *Si* $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ *y* $\frac{r}{s} < \frac{t}{v}$ *entonces*

$$\frac{p}{q} < \frac{t}{v}$$

Se omite la demostración que queda como ejercicio. El último teorema indica que tenemos una relación de orden en $\mathbb{Q}$. Si tenemos dos racionales cualesquiera y distintos entre si $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ siempre podemos encontrar un racional $\frac{t}{v}$ que está entre ellos

$$\frac{p}{q} < \frac{t}{v} < \frac{r}{s}$$

Para ver esto, tomemos sencillamente el promedio de los racionales $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$, así

$$\frac{t}{v} = \frac{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}{2}$$

Es un ejercicio para el lector verificar que el promedio está entre los dos racionales considerados. Aplicando este resultado infinitas veces vemos que entre dos racionales cualesquiera hay infinitos racionales.

Un hecho que hemos resaltado en la introducción es que no existe un racional que verifique la ecuación

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

Observe que no hemos hablado de raíz cuadrada de 2, desde un punto de vista riguroso tal expresión no tiene sentido ya que la definición de raíz cuadrada depende de nuestra construcción y propiedades de los números reales. Que no podamos resolver la ecuación $x^2 = 2$ en los racionales debe ser demostrado. Antes de ofrecer la demostración recordamos un hecho básico de la aritmética: todo número natural se escribe de manera única como producto de primos. Por única se entiende que solo podemos cambiar el orden de los factores. Así, si $n \in \mathbb{N}$ entonces existen números primos $p_1, p_2, \cdots, p_j$ y enteros positivos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j$ tal que

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_j^{\alpha_j}$$

No daremos la demostración de este resultado, la misma puede ser encontrada en [Co].

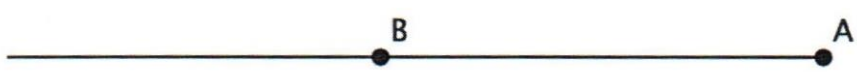
TEOREMA 24. *Es imposible resolver la ecuación $x^2 = 2$ dentro de los números racionales.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que exista un racional $\frac{p}{q}$ tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Podemos suponer que tanto p como q son números naturales no nulos. Cualquier número natural admite una descomposición en factores primos única, es decir $p = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3} \cdots t_n^{\alpha_n}$ y $q = v_1^{\beta_1} v_2^{\beta_2} v_3^{\beta_3} \cdots v_m^{\beta_m}$ donde los $t_i, i = 1, 2, \cdots n$ y $v_j, j = 1, 2, \cdots m$ son números primos. Pero, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$. Luego,

$$t_1^{2\alpha_1} t_2^{2\alpha_2} t_3^{2\alpha_3} \cdots t_n^{2\alpha_n} = 2 v_1^{2\beta_1} v_2^{2\beta_2} v_3^{2\beta_3} \cdots v_m^{2\beta_m}$$

La ecuación arriba tiene un problema muy serio, todas las potencias del lado izquierdo son pares pero la potencia de 2 en lado izquierdo va a ser impar. Esto es absurdo y concluye la prueba. □

Las cortaduras constituyen un modelo creado por Dedekind para representar los números reales. Intuitivamente, cualquier punto A determina en una recta dos semirrectas.



También es importante que el lector note que si α es una cortadura y $r \notin \alpha$ entonces $r > u$ para cualquier elemento de $u \in \alpha$.

Richard Dedekind

Nace en Brunswick en 1831. Estudio bajo Gauss y Dirichlet. Gran amigo de Cantor con quien mantuvo una larga y fructífera colaboración, principalmente epistolar. Dicha relación se vio afectada cuando Dedekind no aceptó un puesto de trabajo que Cantor le consiguió un trabajo en la Universidad de Halle donde Cantor trabajaba. Su trabajo de fundamentación del sistema numérico lo desarrolló en *Continuidad y números irracionales* (1862) y en *¿Qué son y qué deben ser los números?* (1888). También le debemos el concepto de conjunto *Dedekind finito* en contraposición a la idea de conjunto infinito.

2.3. El concepto de supremo y la completitud de los números reales

Recordamos que en un conjunto A una *relación de orden* R está caracterizada por verificar la propiedad transitiva: si $a\,R\,b$ y $b\,R\,c$ entonces $a\,R\,c$, donde $a, b, c \in A$. Si en A está definida una relación de orden R, un subconjunto B de A se denomina *acotado superiormente* si y sólo si existe un $b \in A$ tal que $x\,R\,b$ para cualquier $x \in B$. Un elemento b de un conjunto B se denomina mínimo si y sólo si bRa para cualquier elemento a de B. Similarmente se define el concepto de máximo.

Vamos a definir un orden en el conjunto de los números reales de manera bastante natural. Supongamos que α, β son dos cortaduras o equivalentemente dos números reales, decimos que

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subset \beta$$

Veamos que $\leq$ es de hecho una relación de orden en $\mathbb{R}$.

TEOREMA 31. *La relación $\alpha \leq \beta$ es en los reales $\mathbb{R}$ una relación de orden.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que verificar que $\leq$ es transitiva. Supongamos que $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$ entonces $\alpha \subset \beta$ y $\beta \subset \gamma$ lo que implica que $\alpha \subset \gamma$. Luego, $\alpha \leq \gamma$. □

Una relación de orden R se denomina un orden total o lineal si dos elementos cualesquiera a, b se tiene o $a\,R\,b$ o $b\,R\,a$. Comprobemos ahora que el orden $\leq$ es un orden total. Supongamos que tenemos dos cortaduras α, β . Podemos suponer sin perdida de generalidad que $\alpha \neq \beta$. Entonces, existe un $x_0 \in \beta$ tal que $x_0 \notin \alpha$ o un $x_0 \in \alpha$ tal que $x_0 \notin \beta$. Ya que estas dos situaciones son simétricas, supondremos que ocurre la primera. Entonces, todo $y \in \alpha$ verifica que $y < x_0$. De donde, $y \in \beta$. Así,

$$\alpha \leq \beta$$

lo que indica que el orden es total o lineal.

COROLARIO 32. *Si tenemos dos cortaduras $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$ entonces $\alpha = \beta$.*

DEMOSTRACIÓN. Sigue de la doble contención $\alpha \subset \beta$ y $\beta \subset \alpha$. □

Consecuencia de los dos resultados anteriores es la propiedad de tricotomía de los números reales. Para ver en que consiste digamos en primer lugar que significa que $\alpha < \beta$.

DEFINICIÓN 33. Decimos que $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \neq \beta$.

Así, para dos reales cualesquiera se debe tener una y sólo una de las siguientes condiciones:

- $\alpha < \beta$
- $\beta < \alpha$
- $\alpha = \beta$

Al comenzar la sección definimos de manera abstracta el concepto de conjunto acotado superiormente respecto a un orden R. Así, un conjunto A de cortaduras o de reales se denomina acotado superiormente si y sólo si existe una cortadura β tal que $\alpha \leq \beta$ para cualquier $\alpha \in A$. El real β se denomina cota superior de A si $\alpha \leq \beta$ para cualquier $\alpha \in A$. Si tenemos un orden lineal o total R en un conjunto A decimos que $x_0 \in B \subset A$ es el elemento mínimo de B si y sólo si $x_0 \leq \alpha$ para cualquier $\alpha \in B$. Claramente, en un orden lineal si un conjunto tiene mínimo este debe ser único. El siguiente resultado es fundamental.

TEOREMA 34. *Si A es un conjunto de números reales no vacío acotado superiormente entonces existe una cota superior mínima que denominamos el supremo de A, denotado por* $\sup A$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el siguiente conjunto

$$M = \{\beta \in \mathbb{R} \text{ tales que } \beta \text{ es cota superior de } A\}.$$

Sea $\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$, tenemos que verificar γ es una cortadura. Claramente γ es un conjunto no vacío ya que es unión de conjuntos no vacíos. Tampoco puede ser que γ sea$\mathbb{Q}$ ya que cualquier elemento β de M verifica

$$\bigcup_{\alpha \in A} \alpha \subset \beta \subset \mathbb{Q}$$

$$\left\{ \frac{}{q} \in \mathbb{Q} \text{tales que } \frac{}{q} = \frac{}{s} + \frac{}{u} \text{ donde } \frac{}{s} \in \alpha, \frac{}{u} \in \beta \right\} =$$

2. La idea de Hilbert es que los números reales quedan representados por un conjunto de axiomas: son un cuerpo arquimediano y completo. Hilbert fue el campeón del uso del método axiomático y el lector puede encontrar en la red una copia de su obra fundamental : Fundamentos de Geometría(Grundlagen der Geometrie, 1899). En ella se refleja la visión de Hilbert que el método axiomático debe regir las matemáticas. En una gran medida esa visión prevaleció en la matemática del siglo XX, llevando al concepto de estructura matemática.
3. La existencia de números trascendentes es propuesta como un ejercicio al lector usando las ideas de Cantor. Desde un punto de vista histórico el primer ejemplo de un número trascendente fue dado por el extraordinario matemático francés Joseph Liouville. Liouville demostró que

$$0,101001000000100000000000000000000001\cdots$$

era trascendente. La cantidad de ceros entre dos 1 va como la sucesión $n!$. El lector interesado en una demostración que este número es trascendente debería consultar el excelente libro de M. Spivak, *Calculus* **[Spi]** donde aparece propuesto como ejercicio. La demostración de Cantor no es completamente constructiva pero como veremos en el proyecto de este capítulo es muy próxima a ser una demostración constructiva. Veremos que usando el teorema de los intervalos encajados del Capítulo 3 uno puede construir una sucesión que converge con seguridad a un número trascendente. Esto en buena medida fue lo que motivo a Cantor a usar su teorema de los intervalos encajados ya que una demostración puramente existencial traería el criticismo de los matemáticos como Kronecker de pensamiento intuicionista.
4. Hemos demostrado que existen más puntos en la recta real que en el conjunto de los números naturales pero sin embargo Cantor se planteo la interrogante si existe un subconjunto A de los números reales $\mathbb{R}$ que tuviese un cardinal mayor que el de los naturales $\mathbb{N}$ y menor que el de los números reales $\mathbb{R}$. Si $|A|$ denota el cardinal de A entonces el problema de Cantor se puede expresar así: ¿existe un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\aleph_0 < |A| < c$?. Cantor pensaba que era imposible conseguir tal conjunto. Su hipótesis es conocida como *la hipótesis del continuo*. Se demostró que es imposible refutarla o probarla dentro de la axiomática de la teoría de conjuntos, es decir, los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Fue un resultado muy importante que lograron los matemáticos Kurt Godel(1906-1978) y Paul Cohen(1934-2007). Si Euclides no hubiese enunciado su quinto postulado y lo hubiese planteado como la pregunta, ¿dado un punto externo a una recta existirá una y solo una paralela a la recta dada que pasa por este punto?, entonces la respuesta a este problema sería similar a lo encontrado por Godel y Cohen. Geómetras posteriores hubiesen demostrado que es imposible demostrar o negar esta hipótesis. Sin embargo, es intrigante que el más importante conjunto de las matemáticas como son los números reales genere esta situación y esta laguna.

2.7. Ejercicios del capítulo 2

1. Demostrar el teorema 23. del texto.

2. Verifique lo siguiente: si $\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{t}{u} < \frac{r}{s}$ donde $\frac{t}{u} = \frac{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}{2}$.
3. Demuestra que $\sqrt{3}$ es irracional.
4. Demuestra que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es irracional.
5. Demuestra que $\sqrt{n}$ es irracional si y sólo si n no es un cuadrado.
6. Un número real α es *algebraico* si existe un polinomio p con coeficientes *enteros* tal que $p(\alpha) = 0$. Demuestre que los números algebraicos son numerables. Sugerencia: use el teorema de álgebra que nos dice que un polinomio no nulo de grado n tiene a lo más n raíces. Numere de manera adecuada los polinomios con coeficientes enteros.
7. Un número real β es trascendente si y sólo si no es algebraico. Demuestre, aplicando el problema 5 y la no numerabilidad de los reales $\mathbb{R}$, la existencia de números trascendentes.
8. Demuestre que si α es una cortadura y $r \notin \alpha$ entonces $r > u$ para cualquier elemento de $u \in \alpha$.
9. Construya la multiplicación de dos cortaduras positivas.
10. Dado el número real $\alpha > 0$ en su expansión decimal usual $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, $a_j \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 9\}$ para cualquier $j = 0, 1, 2, \cdots$ ¿cómo construye D. la cortadura que lo representa?.
11. Si x, y son dos números irracionales positivos indique si, necesariamente, $x + y, xy$ y x^yson números irracionales.
12. Demuestre que si x es racional e y es irracional entonces $x + y, xy$ son números irracionales.
13. Demuestre que entre dos reales cualquiera siempre hay un irracional.

2.8. Proyecto: Existencia de números trascendentes de acuerdo a Cantor

Si el lector resolvió los problemas 6 y 7 de este capitulo puede omitir este proyecto.

Debe ser señalado que la primera demostración de Cantor de la no numerabilidad de los números reales tenía como objeto demostrar la existencia de números trascendentes. Su argumento es bastante constructivo ya que esperaba evitar la crítica de matemáticos como Kronecker. Empezamos este proyecto con una definición.

DEFINICIÓN 40. Un número real α es algebraico si existe un polinomio p no constante y con coeficientes enteros tal que

$$p(\alpha) = 0$$

Por ejemplo, cualquier número racional es algebraico pero hay irracionales algebraicos. Ya sabemos que $\sqrt{2}$ es irracional pero es algebraico ya que si tomamos $p(x) = x^2 - 2$ tenemos un polinomio con coeficientes enteros y $p\left(\sqrt{2}\right) = 0$. *El conjunto de todos los polinomios con coeficientes en los enteros $\mathbb{Z}$ lo llamaremos P.* En la primera parte de este proyecto le proponemos la actividad siguiente.

a) Demuestre que $\sqrt{3}, \sqrt{2}+\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$ son números algebraicos. ¿Qué puede decir de los números reales $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$?.

Observe que estos números irracionales son todos algebraicos, ¿existirán números reales irracionales que no sean algebraicos. *Un número real que no es algebraico se denomina trascendente.* El propósito del proyecto es demostrar la existencia de números trascendentes usando el camino de Cantor. Liouville había dado otra manera de mostrar la existencia de números y trascendentes y Hermite

había probado, lo que fue un gran resultado, que el conocido número e es trascendente. Ahora seguimos con una definición muy sencilla, si tenemos un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ con coeficientes enteros, $p \in P$, $a_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \cdots, n$ definimos la altura de p, denotada por $h(p)$, como

$$h(p) = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n| \in \mathbb{N}$$

Por ejemplo, si tomo los polinomios de grado 1 $p(x) = -4+2x$, $q(x) = 1-x$ entonces $h(p) = 6$ y $h(q) = 2$. También debe observar que el único polinomio de altura 0 es el polinomio constante 0. Debe ser claro que si fijamos el grado de los polinomios que consideramos sólo hay una cantidad finita de ellos que tienen determinada altura. Por ejemplo, los polinomios de segundo grado que tienen altura 3 son

$$0 + x + 2x^2, 0 + x - 2x^2, 0 - x + 2x^2, 0 - x - 2x^2, \text{etc}$$

Sea P_k todos los polinomios con coeficientes enteros de grado $k \geq 1$ el lector debe demostrar la siguiente parte de nuestro proyecto.

b) Demuestre que $P_k = \cup_{n=1}^{\infty} P_{k,n}$ donde $P_{k,n}$ son los polinomios de P_k que tienen altura n. Usando nuestra observación que decía que si fijamos el grado de los polinomios que consideramos sólo hay una cantidad finita de ellos que tienen determinada altura demuestre que P_k es numerable.

c) Si llamamos P_0 a los polinomios constantes con valor de la constante en $\mathbb{Z}$ es claro que

$$P = \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k$$

Demuestre, usando esta representación de P, que P es numerable.

d) El teorema fundamental del álgebra garantiza que un polinomio cualquiera no constante de grado n tiene a lo más n raíces reales o complejas. Use esto para demostrar que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Supongamos que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$ es una numeración de los números algebraicos. Vamos a construir un número β trascendente en el intervalo $[0, 1]$. Al estar en $[0, 1]$, β debeser de la forma

$$\beta = 0, b_1b_2 \cdots$$

Veamos el primer decimal de α_1, digamos que es $a_1$entonces el primer decimal b_1 de β es 5 si a_1 no es 5 y lo hacemos igual a 6 si $a_1 = 5$. Vemos el segundo decimal a_2 de α_2 y definimos el segundo decimal b_2 de β como 5 si a_2 no es 5 y lo hacemos igual a 6 si $a_2 = 5$. Continuamos este proceso indefinidamente, es claro que si hemos hecho la construcción de los primeros k decimales de β podemos hacer la elección del decimal $k + 1$, esto es b_{k+1}. Verifique que β nopuede ser igual a algún α_i, para $i = 1, 2, \cdots$ de donde debe ser trascendente.

Capítulo 3

Abiertos y cerrados en $\mathbb{R}$

Un cronopio pequeñito buscaba la llave de la puerta de calle en la mesa de luz, la mesa de luz en el dormitorio, el dormitorio en la casa, la casa en la calle. Aquí se detenía el cronopio, pues para salir a la calle precisaba la llave de la puerta.

Julio Cortazar, Historias de Cronopios y Famas.

3.1. Los reales como espacio métrico

Una vez que hemos construido los números reales y sus operaciones de suma y producto podemos dejar de lado el expediente de las cortaduras y pensar de la manera usual en los números reales. Usamos las cortaduras para demostrar que se le puede dar una base lógica a los reales $\mathbb{R}$ pero una vez entendido el proceso volvemos a una visión más práctica del cálculo con números reales. Es decir, pensamos que un número real x está dado por su expansión decimal(binaria,ternaria,...)

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

y en este caso podemos trabajar como lo hacíamos en nuestro curso de Cálculo con las funciones usuales. En particular, podemos usar la conocida función valor absoluto de x , $|x|$, definida en todo $\mathbb{R}$. Dicha función es importante en este capítulo y recordaremos como nuestros profesores definen el valor absoluto en nuestro comienzo como estudiantes de matemática. Se define el valor absoluto de la manera siguiente

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En otros textos se define como $|x| = +\sqrt{x^2}$. Debo decir que estas definiciones me parecen poco adecuadas y prefiero una definición verbal: *el valor absoluto de x es la distancia entre x y el punto 0.* Con esta definición en mente se tiene claramente que:

1. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$ ya que cualquier distancia es un número positivo
2. $|x| = 0 \iff x = 0$ ya que el único punto a distancia 0 del origen es el propio 0
3. $|x| = |-x|$para cualquier $x \in \mathbb{R}$ ya que los puntos $x, -x$ son simétricos respecto el origen
4. Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene $|x + y| \leq |x| + |y|$
5. Para cualesquiera $x, \alpha \in \mathbb{R}$ se tiene $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$

También podemos resolver de manera sencilla inecuaciones que involucran el valor absoluto.

EJEMPLO 41. Resolver en $\mathbb{R}$ la inecuación $|x-2|>1$. Buscamos todos los x cuya distancia al 2 sea mayor que 1. Una corta reflexión nos indica que los reales 1 y 3 están precisamente a distancia 1 de 2. Luego,

$$(-\infty,1)\cup(3,\infty)$$

es la solución de la inecuación. Uno resuelve usualmente este tipo de problemas mediante un procedimiento que por suerte he olvidado.

Estamos listos para la definición de la distancia usual en $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN 42. La distancia usual o euclídea d en los reales es una aplicación $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por la regla $d(x,y)=|x-y|$.

Claramente se tienen las siguientes propiedades de la distancia:

1. $d(x,y)\geq 0$ ya que el valor absoluto de un número siempre es positivo
2. $d(x,y)=d(y,x)$ para cualquier par $x,y\in\mathbb{R}$ ya que $|x-y|=|y-x|$
3. $d(x,y)=0 \iff x=y$
4. $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ para todo $x,y,z\in\mathbb{R}$

Debemos señalar que en los reales se puede definir otras distancias distintas a la distancia euclidiana. En las notas ahondaremos sobre estas ideas. La propiedad 4. es sumamente importante se denomina desigualdad triangular. La razón de esta denominación es que en Geometría Euclidiana del plano hay un resultado que indica que en cualquier triangulo la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Uno usualmente aplica la desigualdad triangular para demostrar que dos cosas están próximas mostrando que están cerca de una tercera. Veamos esto con un ejemplo.

EJEMPLO 43. Queremos ver que $\frac{\sin x}{x}$ está muy próximo a $\frac{1}{x+1}$ si x es muy cercano a 0. El lector debe recordar que $\frac{\sin x}{x}$ se acerca a 1 si x está cerca de 0 y claramente lo mismo ocurre con $\frac{1}{x+1}$. Luego la distancia entre $\frac{\sin x}{x}$ y $\frac{1}{x+1}$ se puede estimar así

$$\left|\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{x+1}\right|=\left|\frac{\sin x}{x}-1+1-\frac{1}{x+1}\right|\leq\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|+\left|1-\frac{1}{x+1}\right|$$

Como cada sumando del lado derecho está cerca de 0 lo mismo ocurre con la expresión $\frac{\sin x}{x}-\frac{1}{x+1}$.

La importancia del concepto de distancia se aclara si examinamos el concepto fundamental del análisis matemático: la idea de límite. ¿Qué queremos decir cuando afirmamos que $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a x_0? ¿Cómo medimos la proximidad? El concepto básico es el de distancia que ya hemos caracterizado arriba. Mediante esta idea y la técnica $\epsilon-\delta$ el análisis matemático se libro de ambigüedades y de la representación geométrica.

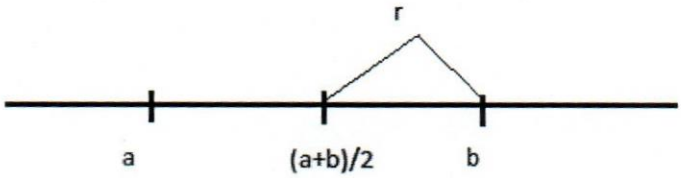
3.2. Abiertos en $\mathbb{R}$

Un intervalo abierto (a,b) en $\mathbb{R}$ es, por definición,

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\text{ tales que }a<x<b\}$$

No descartamos que a,b sean infinitos en la definición de intervalo abierto. Hablaremos de intervalo abierto finito (a,b) si $a,b\neq\pm\infty$. Diremos que un intervalo abierto finito (a,b) tiene centro en $x_0\in\mathbb{R}$ si y sólo si $(a,b)=(x_0-r,x_0+r)$. El número r

se denomina el radio del intervalo $(x_0 - r.x_0 + r)$. Claramente se tiene que si (a, b) es un intervalo finito su centro y su radio son, respectivamente, $x_0 = \frac{a+b}{2}, r = \frac{|a-b|}{2}$.



DEFINICIÓN 44. Un conjunto A de números reales es abierto si y sólo si para cualquier $x_0 \in A$ existe un $r > 0$ tal que el intervalo abierto de centro x_0 y radio $r > 0$ verifica

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subset A.$$

EJEMPLO 45. El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ son abiertos. El hecho que el vacío sea abierto se debe a que no podemos encontrar algún x_0 en el vacío que viole la definición anterior.

Es lo que se llama en matemáticas una demostración por vacuidad.

Cualquier intervalo abierto, finito o no, es un conjunto abierto también. Eso lo proponemos como un ejercicio al final del capítulo.

EJEMPLO 46. El conjunto $(0, 1]$ no es abierto. ¿Porqué?

El siguiente teorema es importante.

TEOREMA 47. *La unión de una familia $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. La intersección de dos conjuntos abiertos A, B es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos la primera afirmación. Consideremos el conjunto $A = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$ y tomemos un $x_0 \in A$. Se tiene que x_0 debe estar en algún A_{α_0} para un índice α_0 en I. Pero A_{α_0} es un conjunto abierto y por ende debe existir un intervalo abierto de centro x_0 y radio $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A_{\alpha_0}$. Luego

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subset \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

de donde A es abierto. Veamos la segunda afirmación. En primer lugar observe que si tiene dos intervalos abiertos centrados en el mismo punto entonces uno de ellos debe estar incluido en el otro. De hecho, aquel que tenga el radio más pequeño queda incluido en el otro. Sea x_0 en el conjunto $A \cap B$, con A, B abiertos. Luego existe un r_1 tal que $(x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subset A$ y existe un r_2 tal que $(x_0 - r_2, x_0 + r_2) \subset B$. Pero uno de estos intervalos centrados en x_0 debe estar contenido en el otro, luego debe estar contenido en $A \cap B$. $\square$

Esta demostración se traslada sin modificación alguna a espacios métricos arbitrarios. Observe que la intersección de una cantidad finita de abiertos es siempre un conjunto abierto pero que esto es falso para intersecciones arbitrarias.

EJEMPLO 48. Tomemos la familia de intervalos abiertos $I_n = \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$, para $n = 1, 2, 3, \cdots$. El lector puede verificar que $\cap_{n=0}^{\infty} I_n = \{0\}$ que no es un conjunto abierto.

OBSERVACIÓN 49. El concepto de espacio topológico se modela entorno al teorema anterior. *Un espacio topológico X es un conjunto con una familia τ de subconjunto de X que verifica: a) $\emptyset, X$ está en τ. b) La intersección de dos conjuntos $A, B \in \tau$ está en τ. c) La unión de una familia $((A_\alpha)_{\alpha \in I}$ de τ es un elemento de τ. Los elementos de τ se denominan los abiertos del espacio X y la familia τ se denomina una topología en X.* Así, la teoría de espacios topológicos es una generalización de la teoría de espacios métricos.

Un número real $x_0 \in \mathbb{R}$ se denomina *punto interior* de A si y sólo si existe un $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$. *El conjunto de todos los puntos interiores de A se denomina el interior del conjunto A y se denota por $\dot{A}$.* Si x_0 es un punto interior de A entonces $x_0 \in A$ ya que $x_0 \in (x_0 - r, x_0 + r)$ si $r > 0$. Luego,

$$\dot{A} \subset A$$

TEOREMA 50. *El interior $\dot{A}$ de A es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Si el interior de A, $\dot{A}$, es vacío no hay nada que probar. De lo contrario, sea $x_0 \in \dot{A}$ entonces existe un $r > 0$ tal que $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$ pero cualquier miembro de $(x_0 - r, x_0 + r)$ está en $\dot{A}$. Luego, $\dot{A}$ es abierto. □

De hecho se tiene una mejora del resultado anterior.

TEOREMA 51. *El interior $\dot{A}$ de A es el mayor conjunto abierto contenido en A.*

DEMOSTRACIÓN. Sea B un abierto cualquiera de $\mathbb{R}$ contenido en A. Si $x_0 \in B$ entonces existe un $t > 0$ tal que $(x_0 - t, x_0 + t) \subset B \subset A$. Luego, $x_0 \in \dot{A}$ y tenemos que $B \subset \dot{A}$. □

Del teorema anterior se deduce de manera inmediata la siguiente importante condición: un conjunto A es un abierto de $\mathbb{R}$ si y sólo si

$$A = \dot{A}$$

Para demostrar la doble implicación tenemos en primer lugar que, si $A = \dot{A}$ entonces A es abierto ya que el interior de cualquier conjunto es abierto. Para ver la otra implicación observe que ya sabemos que $\dot{A} \subset A$ y que si A es abierto entonces, por el teorema anterior, $A \subset \dot{A}$, de aquí, por doble contención de conjuntos, sigue que $A = \dot{A}$. La siguiente proposición resume algunas propiedades del interior de un conjunto y son demostrables en el contexto más general de espacios métricos. La demostración es un ejercicio para el lector.

TEOREMA 52. *Si $A \subset B$ entonces $\dot{A} \subset \dot{B}$. También se tiene que para cualquier conjunto A, $\dot{\dot{A}} = \dot{A}$.*

DEFINICIÓN 64. Una sucesión (x_n) de números reales se denomina convergente al número real L si y sólo si $\forall \epsilon > 0\, \exists N > 0$ tal que si $n > N \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon$.

EJEMPLO 65. La sucesión $x_n = \frac{1}{n+2}$ converge a 0 ya que podemos hacer $\frac{1}{n+2} < \epsilon$ si $n > N = \frac{1}{\epsilon}$.

Intuitivamente, una sucesión converge a L si a medida que n aumenta los valores de la sucesión se aproximan L. En la mayoría de los textos se escribe $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ en caso que (x_n) converge a L.

No toda sucesión es convergente, por ejemplo, $a_n = (-1)^n$ no converge ya que oscila entre -1 y 1.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se denomina *acotado si y sólo si existe un $r > 0$ tal que*

$$A \subset (-r, r)$$

Es decir, podemos encerrar al conjunto dentro de un *intervalo finito*. Por ejemplo, la sucesión $x_n = n$ tiene un rango no acotado. Para no hacer más engorrosa la notación diremos que una sucesión es acotada si y sólo si su rango es un conjunto acotado. Es decir, (x_n) es acotada si y sólo si $A = \{x_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ es un conjunto acotado.

PROPOSICIÓN 66. *Si x_n converge a $L \in \mathbb{R}$ entonces x_n es acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $\epsilon = 1$ y N tal que si $n > N \Rightarrow |x_n - L| < 1$ luego $x_n \in (L-1, L+1)$ si $n > N$. Pero los primeros términos de la sucesión $x_1, x_2, \cdots, x_N$ se pueden atrapar en un intervalo $(-k, k)$. Luego toda la sucesión se puede incluir en un intervalo del tipo $(-r, r)$. □

El hecho de que una sucesión (x_n) sea acotada no garantiza su convergencia como lo muestra $x_n = (-1)^n$ que es acotada pero vimos que no es convergente.

PROPOSICIÓN 67. *(Aritmética de los límites) Si x_n converge a L y w_n converge a L' entonces $x_n + w_n$ converge a $L + L'$ y $x_n w_n$ converge a LL'. Aún más, si $L' \neq 0$ entonces $\frac{x_n}{w_n}$ converge a $\frac{L}{L'}$, acá la sucesión $\frac{x_n}{w_n}$ la consideramos en los n en las cuales tenga sentido.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar únicamente que si $x_n$converge a L y $w_n$converge a L' entonces $x_n w_n$ converge a LL'. Tenemos que

$$|x_n w_n - LL'| = |x_n w_n - w_n L + w_n L - LL'|$$

Luego,

$$|x_n w_n - LL'| \leq |x_n w_n - w_n L| + |w_n L - LL'| = |w_n|\,|x_n - L| + |L|\,|w_n - L'|\,.$$

Al sumar y restar $w_n L$ se construye un puente entre $x_n w_n$ y LL'

Al ser w_n convergente debe ser acotada, esto es $|w_n| \leq M, M > 0$ para cualquier n. Suponemos sin perdida de generalidad que $L \neq 0$ y damos un $\epsilon > 0$. Es claro que, al ser x_n convergente a L, podemos encontrar un $N_1 > 0$ tal que

$$|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2M}$$

Por otro lado, como w_n convergente a L' entonces podemos encontrar un $N_2 > 0$ tal que si $n > N_2$ entonces

$$|w_n - L'| < \frac{\epsilon}{2\,|L|}$$

Luego,

$$|x_n w_n - LL'| \leq |w_n|\,|x_n - L| + |L|\,|w_n - L'| \leq |w_n|\,\frac{\epsilon}{2M} + |L|\,\frac{\epsilon}{2\,|L|} < \epsilon$$

si $n > \text{máx}\{N_1, N_2\}$. □

TEOREMA 68. *Si x_n es acotada y x_n es creciente, esto es, $x_n \leq x_{n+1}$ entonces x_n es convergente al número $L = \sup_n x_n$.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente, al ser x_n acotada, existe el supremo de $\{x_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ que llamaremos L. Por definición de supremo, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un x_N tal que $L - \epsilon < x_N \leq x_{N+1} \leq \cdots \leq L$. De donde, $|x_n - L| < \epsilon$ si $n > N$. Hemos probado que x_n converge a L. □

Si A tiene a z como punto de acumulación entonces podemos "aproximar a z" con elementos de A.

TEOREMA 69. *Si z es un punto de acumulación de A entonces podemos encontrar una sucesión de puntos $x_n \in A$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z$$

DEMOSTRACIÓN. Por ser z punto de acumulación de A, sabemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un x_n en A tal que $x_n \in A - \{z\} \cap (z - \frac{1}{n+1}, z + \frac{1}{n+1})$. En particular, $|z - x_n| < \frac{1}{n+1}$ para cualquier n y el teorema del sandwich(ver ejercicios) implica que $\lim_{n\to\infty} x_n = z$. □

Un concepto que los estudiantes no comprenden en primera instancia es el concepto de sucesión de Cauchy, esto se debe en buena medida a que en los números reales los conceptos de sucesión convergente y sucesión de Cauchy son equivalentes. Veamos en primer lugar el concepto de sucesión de Cauchy.

DEFINICIÓN 70. Una sucesión (x_n) de números reales es una sucesión de Cauchy si y sólo si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Intuitivamente, si (x_n) es de Cauchy los términos de la sucesión se aproximan unos a otros con un error tan pequeño como queramos. Claramente se tiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 71. *Cualquier sucesión (x_n) que sea convergente a L es de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ esto implica que, dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces $|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$. Pero $|x_n - x_m| \leq |x_n - L| + |x_m - L| < \epsilon$ si $n, m > N$. Luego (x_n) es de Cauchy. □

Similarmente a lo que ocurre con las sucesiones convergentes cualquier sucesión de Cauchy debe ser acotada. La demostración es similar a la hecha anteriormente para sucesiones convergentes.

PROPOSICIÓN 72. *Si (x_n) es de Cauchy entonces (x_n) es acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $\epsilon = 1$ y $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces $|x_n - x_m| < \epsilon$. Fijemos un $n_0 > N$, vamos a tener que $|x_m| - |x_{n_0}| \leq |x_{n_0} - x_m| \leq 1$ para cualquier $m > N$. Luego,

$$|x_m| \leq |x_{n_0}| + 1$$

Lo que indica que todos los términos de (x_n) con subíndices superiores a $N+1$ están acotados. Pero los primeros términos de la sucesión constituyen sin duda un conjunto acotado, luego (x_n) es acotada ya que la unión de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado(ver los ejercicios). □

Un concepto importante es el concepto de *subsucesión*. En muchos problemas es imposible demostrar la convergencia de una sucesión pero es posible hallar una subsucesión convergente que resuelve el problema considerado. Una *subsucesión* (x_{n_k}) *de una sucesión* (x_n) *consiste en dar una función* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente con* $\phi(k) = n_k$ *y* $x_{\phi(k)} = x_{n_k}$. El lector puede pensar que se extrae de la sucesión original una parte manteniendo *el orden de los índices.*

EJEMPLO 73. Consideremos la sucesión $a_n = (-1)^n$. La subsucesión $a_{2n} = 1$ tiene un comportamiento mejor que la sucesión original ya que es convergente. Lo mismo ocurre con la subsucesión $a_{2n+1} = -1$.

Si una sucesión es convergente a L entonces cualquier subsucesión de la misma es convergente al mismo valor L. El siguiente resultado es más interesante.

TEOREMA 74. *Si una sucesión* (x_n) *es de Cauchy y admite una subsucesión convergente* x_{n_k} *a* L *entonces* (x_n) *es convergente a* L.

DEMOSTRACIÓN. La sucesión verifica que podemos hacer $|x_n - x_m|$ muy pequeño si $n, m > N$. Por otro lado, $|x_{n_k} - L|$ es muy pequeño para índices muy grandes. Luego, $|x_k - L| \leq |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L|$ es arbitrariamente pequeño si tomamos k suficientemente grande. De donde, $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. □

El siguiente concepto es muy importante. Nosotros vimos, cuando construimos las cortaduras de Dedekind, que los números reales eran completos respecto al orden. Uno puede afirmar con certeza que la construcción hecha por Dedekind tiene como objetivo principal mostrar ese resultado. Ahora vamos a hablar del concepto de completitud topológica. En los números reales dichos conceptos están íntimamente relacionados. Enunciaremos el concepto de completitud métrica con la amplitud que se requiere para su cabal comprensión.

DEFINICIÓN 75. Decimos que un espacio métrico E es completo si y sólo si cualquier sucesión (x_n) de Cauchy es convergente.

En nuestro caso, el espacio métrico son los números reales con la distancia euclídea $d(x, y) = |x - y|$. El siguiente es un lema técnico que no demostraremos pero que usaremos para verificar que $\mathbb{R}$ es completo.

LEMA 76. *Dada cualquier sucesión de números reales siempre es posible extraer de la misma o una subsucesión creciente o una subsucesión decreciente.*

Ahora describiremos la demostración de que los reales son un conjunto completo. La dividimos en una serie de pasos para que el lector pueda ver claramente la misma. Partimos de una sucesión (x_n) de números reales que es de Cauchy.

1. Observamos que cualquier sucesión (x_n) de Cauchy es acotada(proposición 67)
2. Usamos que de la sucesión (x_n) se puede extraer una subsucesión (x_{n_k}) creciente(o decreciente) (lema 71)que va a ser acotada por paso 1.
3. Dicha subsucesión (x_{n_k}), al ser creciente y acotada es convergente(teorema 64)

4. Pero entonces la sucesión (x_n) es convergente ya que contiene una subsucesión convergente(teorema 69)
5. El espacio de los números reales $\mathbb{R}$ es completo

Observe la manera crucial como usamos en la prueba, en el paso 3, la completitud respecto al orden de los números reales.

3.5. Teorema de Cantor de los intervalos encajados

El siguiente resultado es muy importante en el análisis matemático y desde el punto de vista histórico proporciona la primera demostración que el conjunto de los números reales no es numerable. Cantor quería demostrar la existencia de números trascendentes mediante el aparato que había construido que le permitía lidiar con el infinito actual y medir su cardinal. Recurrió de manera brillante al siguiente teorema que es importante en si mismo.

TEOREMA 77. *(Teorema de los intervalos encajados de Cantor) Consideremos una familia $I_n, n = 0, 1, 2 \cdots$ de intervalos cerrados y finitos, esto es $I_n = [a_n, b_n]$. Suponemos además que $I_0 \supset I_1 \supset \cdots$, es decir los I_n constituyen una familia de intervalos encajados. Si $l(I_n) = b_n - a_n$ converge a 0 entonces*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{a\}$$

Es decir, la intersección de todos los intervalos I_n es no vacía y consiste en exactamente un punto.

DEMOSTRACIÓN. Veamos por un momento la sucesión a_n de los extremos izquierdos de los intervalos I_n. Notemos que $a_n \leq b_0$ ya que $I_n \subset I_0$ para cualquier $n = 0, 1, 2, \cdots$. Por otro lado, el hecho de tener una sucesión de intervalos encajados implica que $a_k \leq a_{k+1}$, esto es, la sucesión (a_n) es creciente. El teorema 64. implica que la sucesión a_n converge a $L = \sup\{a_n, n = 0, 1, 2 \cdots\}$. Como cada I_n contiene todos los elementos de a_n salvo los primeros entonces $L \in \cap I_n$. Un análisis similar demuestra que b_n es decreciente y acotada, luego b_n converge a $L' = \inf\{b_n, n = 0, 1, 2, \cdots\} \in \cap I_n$. Hemos demostrado que la intersección de todos los I_n es no vacía. Para ver que consiste en un sólo punto observe que $L' - L = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. De donde $L = L'$. □

Veamos ahora como Cantor demostró, usando el resultado anterior, que los números reales son no numerables, lo que a su vez implica la existencia de números trascendentes como ya vimos en el capítulo anterior.

TEOREMA 78. *Los números reales $\mathbb{R}$ es un conjunto no numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que el intervalo $[0, 1]$ es no numerable. Supongamos lo contrario, es decir, que $[0, 1]$ es numerable. Luego podemos hacer una numeración de sus elementos y afirmar $[0, 1] = \{a_0, a_1, a_2, \cdots, \}$. Tomemos el elemento $a_0 \in [0, 1]$ y encontremos un intervalo cerrado $I_0 \subset [0, 1]$ tal que $a_0 \notin I_0$. Procedemos ahora a encontrar un intervalo cerrado $I_1 \subset I_0$ tal que $a_1 \notin I_1$.Claramente podemos encontrar estos intervalos y en general encontrar un intervalo $I_n \subset I_{n-1}$ con la propiedad que

$$a_n \notin I_n$$

tal representación puede llevarnos a situaciones en las cuales el modelo es poco explicativo. El "continuo" de los números reales tiene propiedades poco intuitivas que revelan su compleja naturaleza. Por ejemplo, uno puede considerar el siguiente experimento mental: arroje sobre cada número racional en la recta real, un intervalo abierto. Considere la colección de todos esos intervalos abiertos. Le preguntamos, ¿cubre esta colección a toda la recta?. La respuesta es que necesariamente no. Esto choca contra nuestra intuición y con el resultado que los racionales $\mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$. Veamos lo que dice el matemático francés Roger Apery, cito "La recta real posee propiedades que están en contra de la intuición: existe un abierto de medida $< \epsilon$, en el cual contra todas las apariencias están contenidos todos los racionales". Tal construcción se puede hacer de esta forma, enumeremos los racionales como $a_0, a_1, \cdots$. Tome un intervalo abierto I_0 de longitud menor que $\epsilon/2$ que contenga a_0, luego considere un intervalo abierto I_1de longitud menor que $\epsilon/4$ que contenga a_1 y continuemos indefinidamente este proceso. Claramente,

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$$

y la suma $\sum_{n=0}^{\infty} l(I_n) < \epsilon$ donde $l(I)$ es la longitud del intervalo I. Esto choca con el hecho que los racionales son densos en los números reales y con la representación mental de los números reales como los puntos de una recta o de un continuo.

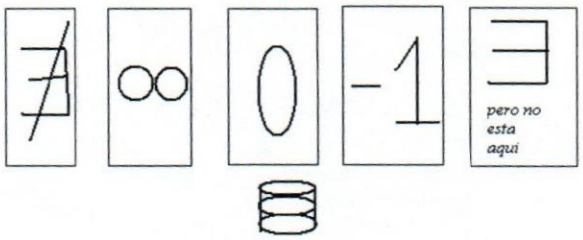
5. *Un juego matemático: El juego de Banach-Mazur.* El juego lo practican dos jugadores quienes se alternan en sus jugadas. Tomamos un subconjunto A del intervalo $[0,1]$ y su complemento A^c. En cada turno el jugador selecciona un intervalo $I_k \supset I_{k+1}, k = 1, 2, \cdots$ cerrado en el $[0,1]$, el objeto del primer jugador es forzar que $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ interseque al conjunto A , mientras el segundo jugador intenta que esto no ocurra, es decir $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$ este contenido A^c. Por ejemplo, ¿cómo jugaría Ud. si fuese el segundo jugador y A fuese el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$?. La idea de la estrategia ganadora para el segundo jugador está contenida en lo que hemos hecho en las páginas anteriores. La estrategia ganadora del segundo jugador es sencilla, independientemente de lo jugado por el primer jugador, el segundo jugador enumera los racionales $a_0, a_1, \cdots$ y escoge su intervalo I_{2k} de forma que $a_k \notin I_{2k}$. Es claro que $\mathbb{Q}$ no interseca $\cap_{n=1}^{\infty} I_n$. Para un conjunto más general A se pueden tener resultados similares donde el segundo jugador tiene una estrategia ganadora. Por ejemplo, si

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$$

y cada E_n es cerrado y sin interior, $\dot{E}_n = \emptyset$ vemos que el segundo jugador tiene de nuevo uno estrategia ganadora. Invitamos al lector a descubrir la estrategia ganadora, la cual se basa en el argumento que usamos para la demostración del teorema de Baire. Por último, si A fuese un conjunto como un intervalo cerrado de longitud mayor que 0 es claro que A tiene una estrategia ganadora, basada en el teorema de los intervalos encajados de

Cantor. Para el primer jugador basta escoger su intervalo cerrado dentro de A.

6. El juego $N(\epsilon)$ (se lee N de epsilon)Bartle y Sherbert en su libro **[Bar]** plantean un juego para mejorar la comprensión del concepto de límite de una sucesión. Nosotros habíamos pensado de manera independiente en una posibilidad similar. El juego que planteamos es el siguiente. Dividimos el salón en dos equipos A y B, el profesor va a ser el croupier. Hay 4 grupos de cartas: las sucesiones,los límites,los epsilon,los $N \in \mathbb{N}$ Como en muchos juegos ambos bandos empiezan con una pequeña apuesta común que va al pozo. Uno de los equipos habla primero y este rol se alterna después de cada juego. El profesor para empezar el juego levanta una tarjeta del grupo de las sucesiones, por ejemplo la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$. El profesor coloca entonces 5 cartas sobre la mesa con distintos valores numéricos, siempre va a colocar una carta que dice "no existe el límite" y otra que dice "el límite existe pero no está sobre la mesa". Las otras tres cartas muestran distintos valores numéricos que pueden incluir los símbolos ∞ o $-\infty$. El equipo A habla y coloca una apuesta en una de las opciones mostradas. Digamos que A habla primero por ser favorecido en el sorteo. Las cartas sobre la mesa son



Vemos que el equipo A coloco sus fichas en el 0. Ese equipo ahora jugara con las cartas N y el equipo B jugara con los *epsilon*. El equipo B pide al croupier una carta del tipo $\epsilon > 0$, este tira una a la mesa digamos $\epsilon = 10^{-2}$, ahora el equipo A debe calcular que N garantiza que si $n > N$ entonces

$$\frac{1}{n} < 10^{-2}$$

El lector debe estar de acuerdo que podemos tomar cualquier N natural mayor que 100. El equipo A pide cartas al croupier del tipo N hasta que vea una carta mayor que 100 e indica que esa le sirve. El croupier le pregunta a B si va a realizar alguna apuesta contra esa elección. De lo contrario arroja otro $\epsilon > 0$ sobre la mesa y repite el procedimiento. Puede ser que en algún momento aparezca la carta $\epsilon-$comodín. En ese caso el equipo A que juega con los N puede construir una carta que termine con la ronda de juego indicando que N en función de ϵ resuelve el problema. Si no lo puede hacer el bando ganador es el B. Dejamos al lector pensar variaciones del juego, por ejemplo, el uso de la moneda no es necesario y cada bando se puede alternar para decidir quien habla primero. Piense también un mecanismo para jugar cuando un bando decide jugar con la carta no existe o existe pero no está en la mesa. Una versión de este juego fue realizada

por la Profesora María Belén García y el Profesor José Gascón para el seminario de Análisis Matemático de la carrera de Educación Matemática de la Universidad Católica Andrés Bello.

3.8. Ejercicios del capitulo 3

1. ¿Es el conjunto de todos los números racionales $\mathbb{Q}$ abierto?. ¿Cual es el interior de $\mathbb{Q}$?.
2. Demuestre, usando inducción matemática, que la intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ es siempre un conjunto abierto.
3. Construye una familia de cerrados $C_n, n = 0, 1, 2, \cdots$ tal que la unión de sus miembros no es un conjunto cerrado.
4. Demuestre que el conjunto $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$ no es un conjunto cerrado.
5. Demuestre que si $A \subset B$ entonces $\dot{A} \subset \dot{B}$.
6. Demuestre que para cualquier conjunto A, $\dot{\dot{A}} = \dot{A}$.
7. Demuestre que la clausura de un conjunto es el menor conjunto cerrado que contiene a A.
8. Demuestre el teorema del sandwich: si x_n, y_n y z_n son sucesiones reales que verifican
$$x_n \leq y_n \leq z_n$$
y $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = L$ entonces $\lim_{n\to\infty} y_n = L$.
9. Demuestre que si (x_n) es una sucesión de términos positivos $x_n > 0$ y converge a L entonces $L \geq 0$.
10. Demuestre las leyes de De Morgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ para cualesquiera subconjuntos del conjunto X.
11. Demuestre que la unión de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado. Demuestre que la intersección de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado.
12. Demuestra que un intervalo abierto es un conjunto abierto.
13. Demuestre que si $x_n$converge a L y $w_n$converge a L' entonces $x_n + w_n$ converge a $L + L'$. Sugerencia: use la desigualdad triangular.
14. En el juego de Banach-Mazur discutido en las notas didácticas e históricas diga si el segundo jugador tiene una estrategia ganadora si A es el conjunto de los números algebraicos. Demuestre en general que si A^c es numerable entonces el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.

3.9. Proyecto: La construcción de los reales debida a Cantor

En este proyecto desarrollamos la idea de Cantor de dar una construcción de los números reales alternativa a la de cortadura de Dedekind. Lo bonito de la idea de Cantor es que el lector la puede trasladar sin ningún problema a espacios métricos generales y obtener la completación del mismo. Recordamos que si tenemos un conjunto X cualquiera una relación R es de equivalencia en X si

- aRa para cualquier elemento a de X(propiedad reflexiva)
- $aRb \Rightarrow bRa$ para $a, b \in X$ (propiedad de simetría)
- Si aRb y bRc entonces aRc (propiedad transitiva)

Relaciones de equivalencia son fundamentales en Matemática. Es una manera de identificar elementos que comparten una propiedad. Ejemplos notable de relaciones de equivalencia son los siguientes:

EJEMPLO 80. Considere X como el conjunto de todas las rectas del plano y definamos R de la siguiente manera, si L, L' son rectas arbitrarias decimos que $L\,R\,L'$ si y sólo si L es paralela a L'. Acá entendemos que dos rectas son paralelas si tienen la misma dirección. Es claro que R es de equivalencia y el lector deberá completar los detalles.

El ejemplo que sigue es muy importante y apareció en el trabajo de Gauss *Disquisitiones.*

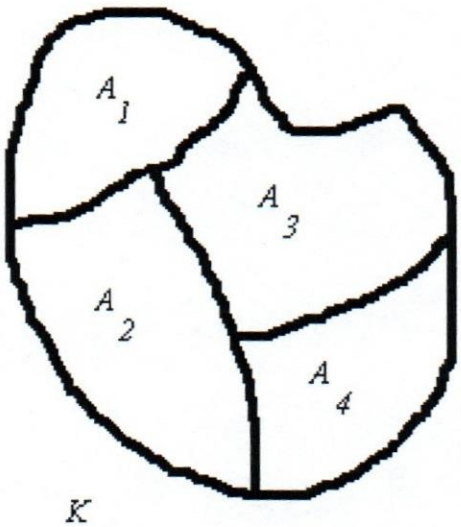
EJEMPLO 81. Sea $\mathbb{Z}$el conjunto de los números enteros decimos que el entero n divide al entero m si y sólo si $m = cn$ para algún entero c. Fijemos ahora un entero n decimos que los enteros m y k están relacionados módulo n y se escribe

$$m \equiv k \quad \text{mód } n$$

si y sólo si n divide a $m - k$. El lector debe demostrar como parte del proyecto que la relación definida es de equivalencia.

Cualquier relación de equivalencia particiona el conjunto donde es definida en clases de equivalencia. Expliquemos esto en detalle. Si K es un conjunto cualquiera la familia (A_α),$\alpha \in I$ se denomina una partición de K si y sólo si

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = K \text{ y } A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset \text{si } \alpha \neq \beta$$



Por ejemplo, la dicotomía par o impar particiona el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en dos conjuntos, el primero los números pares

$$P = \{n \in \mathbb{N} \text{ tales que } n = 2k \text{con } k \in \mathbb{N}\}$$

y el segundo el conjunto de los números impares

$$I = \{n \in \mathbb{N} \text{ con } n = 2k + 1 \text{con } k \in \mathbb{N}\}.$$

.Es claro que $P \cap I = \emptyset$ y que $\mathbb{N} = P \cup I$.

a) Demuestre que una relación de equivalencia R definida en un conjunto E particiona E en los conjuntos $E_a = \{x \in E \text{ tal que } xRa\}$, es decir, dado $a \in E$ el conjunto E_a está formado por todos los elementos $x \in E$ que están relacionados con a.

b)Demuestre que si se tiene una partición de un conjunto E formada por los conjuntos $K_\alpha, \alpha \in I$ entonces ella induce una relación de equivalencia R.

El conjunto de las clases de equivalencia que induce R en un conjunto E se denota por E/R y se llama el espacio cociente. En este capítulo definimos lo que es una sucesión de Cauchy en los reales $\mathbb{R}$, similarmente podemos definir sin problemas el concepto de sucesión de Cauchy en los racionales. Diremos que la sucesión (x_n) de números racionales, $x_n \in \mathbb{Q}$ es de Cauchy si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ y racional, $\epsilon \in \mathbb{Q}$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

El conjunto de todas las sucesiones de Cauchy con valores en $\mathbb{Q}$ lo denotaremos por C, esto es

$$C = \{(x_n) \text{ donde } x_n \in \mathbb{Q} \text{y } (x_n) \text{es de Cauchy}\}$$

Definimos en C la relación R de la manera siguiente

$$(x_n)R(y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$$

Observe que la condición $\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$ equivale a $\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0$.

c)Demuestre que R es una relación de equivalencia en el conjunto C.

Una vez demostrado la parte c) entonces C queda particionado en clases de equivalencia y *un* número *real es una de las clases de equivalencia del espacio cociente* C/R. Se puede demostrar que estas clases de equivalencia se pueden sumar y multiplicar tal como hicimos con las cortaduras, también que el conjunto así construido constituye un espacio completo. No vamos a proponer al lector esto.

Teorema de Bolzano-Weierstrass. Pero si el rango es finito, esto significa que alguno de los valores de la sucesión se repite infinitas veces, lo que nos permite construir sin problemas una subsucesión convergente.

DEFINICIÓN 83. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se denomina compacto si y sólo si cualquier sucesión (x_n), cuyos elementos $x_n \in A$, admite una subsucesión convergente a un punto $c \in A$.

EJEMPLO 84. El conjunto $[0,1]$ es compacto ya que si tomo cualquier sucesión (x_n) de elementos en el intervalo $[0,1]$ la misma constituye una sucesión acotada al estar contenida en $[0,1]$ y debe contener una subsucesión convergente por el corolario que obtuvimos del Teorema de Bolzano-Weierstrass.

El matemático Dieudonne en su obra **[Di]** piensa que el concepto de compacidad es una generalización del concepto de conjunto finito. El siguiente ejemplo nos da una indicación al respecto.

EJEMPLO 85. Cualquier conjunto finito A es compacto. En efecto, si tomo una sucesión (x_n) el principio del Palomar nos indica que un valor de la sucesión, al menos, se debe repetir infinitas veces lo cual nos permite construir una subsucesión convergente a ese valor. El lector debería completar los detalles.

4.2. Teorema de Heine-Borel

El siguiente teorema brinda una caracterización en la recta real $\mathbb{R}$ de la idea de compacidad. Debemos señalar y alertar al lector que tal caracterización es propia del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y no se verifica en los espacios de infinitas dimensiones como el de Hilbert y el de Banach. Veamos su enunciado y demostración.

TEOREMA 86. *Un conjunto K es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos en primer lugar la condición necesaria. Sea K compacto, queremos ver en primer lugar que K es acotado. Si K no fuese acotado podemos construir una sucesión $x_n \in K$ que verifica

$$|x_1| > 1, |x_2| > 2, \cdots, |x_n| > n, \cdots$$

Por ser K compacto, la sucesión x_n debe admitir una sucesión convergente x_{n_k}, la cual debe ser acotada contradiciendo la construcción de x_n. Demostremos ahora que el ser K compacto implica que es cerrado. Supongamos que $z \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de K, debemos demostrar que $z \in K$. Sabemos que existe una sucesión $x_n \in K$ que converge a z. Pero de esta sucesión se puede extrae una subsucesión convergente, por compacidad, a un elemento de K, luego $z \in K$. Demostremos ahora la condición suficiente. Si K es cerrado y acotado debemos ver que K es compacto. Sea x_n una sucesión de elementos de K. Hay dos posibilidades con la misma. La primera que el rango de x_n sea finito en cuyo caso se puede extraer sin problemas una subsucesión convergente ya que con seguridad al menos uno de los valores de la sucesión x_n se repite infinitas veces. Si el rango de x_n es infinito, el teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza, al ser K acotado, que la sucesión va a tener una subsucesión convergente a un z. Pero como K es cerrado este z debe ser un punto de K y luego Kes compacto por definición. □

Hay un concepto que es el que permite definir la idea de conjunto compacto en otros espacios como los de Hilbert y los espacios topológicos y es el concepto de

recubrimiento abierto. Una familia de conjuntos $B_\alpha \subset \mathbb{R}, \alpha \in I$, cubre al conjunto $E \subset \mathbb{R}$ si y sólo si

$$E \subset \cup_{\alpha \in I} B_\alpha$$

También decimos que (B_α) es un cubrimiento de E. Dicho cubrimiento se denomina abierto si todos los elementos B_α son conjuntos abiertos. Estamos listos para dar una definición de conjunto compacto *equivalente* a la primera que dimos.

DEFINICIÓN 87. (Segunda definición de compacto) Un conjunto K de números reales se denomina compacto si de cualquier cubrimiento abierto $B_\alpha \subset \mathbb{R}, \alpha \in I$ *se puede extraer un subcubrimiento finito* $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \cdots, B_{\alpha_n}$ *con* $K \subset \cup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$.

Vamos a explorar la relación de esta "nueva" definición de compacto con la que dimos originalmente. Para ver que esta definición es equivalente a la dada inicialmente nos falta probar que ser cerrado y acotado es condición necesaria y suficiente para que dado cualquier cubrimiento abierto $B_\alpha \subset \mathbb{R}, \alpha \in I$ *de el se puede extraer un subcubrimiento finito* $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \cdots, B_{\alpha_n}$ *con* $K \subset \cup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$. Veamos que es condición necesaria.

TEOREMA 88. *Si de cualquier cubrimiento abierto $B_\alpha \subset \mathbb{R}, \alpha \in I$ se puede extraer un subcubrimiento finito* $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \cdots, B_{\alpha_n}$ con $K \subset \cup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$ *entonces K debe ser cerrado y acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Si K no fuese cerrado debiera existir un real z punto de acumulación de K y $z \notin K$. Construimos los conjuntos

$$B_n = (-\infty, z - \frac{1}{n+1}) \cup (z + \frac{1}{n+1}, \infty),\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

. Tenemos que

$$\mathbb{R} - \{z\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$$

Como $K \subset \mathbb{R} - \{z\}$ entonces los $B_n, n = 0, 1, 2, \cdots$ constituyen un cubrimiento abierto de K. Luego deben existir, por hipótesis, conjuntos $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \cdots, B_{\alpha_n}$ que cubren a K. Al ser los B_n una familia creciente se va a tener que $K \subset \cup_{i=1}^n B_{\alpha_i} = B_{\alpha_k}$ lo cual es absurdo ya que existen en K puntos arbitrariamente próximos a z. Veamos ahora que K debe ser acotado. Si no fuese el caso entonces la familia $B_n = (-n, n)$ donde n recorre todos los naturales sería un cubrimiento abierto de K (de hecho cubre la recta) del cual no podemos extraer un cubrimiento finito. □

OBSERVACIÓN 89. El autor de estas notas pretende rescatar la bonita terminología condición necesaria y condición suficiente en lugar de la notación simbólica $\Rightarrow, \Leftarrow$ o la expresión compacta si y sólo si, muchas veces escrita iff en inglés. Si yo escribo "Si el punto (x, y) es el origen de coordenadas entonces $x = 0$" Vemos que tener $x = 0$ es una *condición necesaria* para que (x, y) sea el origen. Por otro lado, que el punto (x, y) sea el origen es una condición suficiente(pero no necesaria) para garantizar que $x = 0$.

Significado de condición necesaria y condición suficiente

Veamos ahora que si K es cerrado y acotado entonces de cualquier cubrimiento abierto $B_\alpha \subset \mathbb{R}, \alpha \in I$ se puede extraer un subcubrimiento finito $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \cdots, B_{\alpha_n}$ *con* $K \subset \cup_{i=1}^n B_{\alpha_i}$. Debemos observar, en primer lugar, que si un conjunto K se cubre con una familia de conjuntos (A_α) y no podemos extraer de este cubrimiento un subcubrimiento finito entonces si divido a K en dos conjuntos K_1, K_2 , $K = K_1 \cup K_2$, claramente A_α cubre a cada K_1, K_2 y debe ocurrir que uno de ellos no admita

un subcubrimiento finito con los A_α. De lo contrario, usando estos subcubrimientos finitos se construye, sin problemas, un cubrimiento finito de K. Estamos listos para nuestro teorema.

TEOREMA 90. *Si K es cerrado y acotado entonces de cualquier cubrimiento abierto $B_\alpha \subset \mathbb{R}, \alpha \in I$ se puede extraer un subcubrimiento finito $B_{\alpha_1}, B_{\alpha_2}, \cdots, B_{\alpha_n}$ con $K \subset \cup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que podemos cubrir a K con una familia (B_α) de conjuntos abiertos de la cual no se puede extraer un subcubrimiento finito. Encerremos a K en un intervalo cerrado y finito $I_0 = [-n, n]$. Dividimos I_0 en los intervalos $[-n, 0], [0, n]$ y consideramos los conjuntos cerrados y acotados $K_1 = K \cap [-n, 0]$ y $K_2 = K \cap [0, n]$. Entonces la familia (B_α) cubre a K_1 y a K_2 y claramente $K = K_1 \cup K_2$. De aquí deducimos que al menos uno de los conjuntos $K_i, i = 1, 2$ no puede admitir un subcubrimiento finito. Llamemos a este conjunto K_1 , para no hacer más engorrosa la notación, y I_1 el intervalo que contiene a K_1. Continuamos este proceso para obtener una sucesión de intervalos encajados $I_0, I_1, \cdots$ y de conjuntos $K_0 = K, K_1, \cdots$ donde $I_i \supset K_i$. Por el teorema de Cantor $\bigcap_i I_i = \{z\}$ que está en K y por ende en algún abierto B_γ del cubrimiento (B_α). Pero entonces alguno de los intervalos I_j cae completamente en B_γ lo que contradice que K_j no admite un cubrimiento finito. □

Hemos demostrado la equivalencia siguiente

$$K \text{ es compacto} \Leftrightarrow K \text{es cerrado y acotado}$$

$$\Leftrightarrow \text{de cualquiercubrimiento abierto} B_\alpha \text{se puede extraer un cubrimiento finito}$$

4.3. Conjuntos conexos

En $\mathbb{R}$ el importante concepto de conexidad queda caracterizado de manera muy sencilla: los conjuntos conexos son los *intervalos*. Como todos recordamos existen distintos tipos de intervalos que pasamos a enumerar,

- Intervalos abiertos que son de la forma $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ donde incluimos la posibilidad que a, b sean $\pm\infty$
- Intervalos cerrados de la forma $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$
- Intervalos semi-abiertos o semicerrados que son de la forma $(a, b]$ o $[a, b)$ donde en el primer tipo de intervalos a puede ser $-\infty$ y en el segundo tipo b pudiese ser $+\infty$

En muchos casos la taxonomía de los intervalos de basa en si son finitos o infinitos, los primeros corresponden a los intervalos que tienen una longitud finita, los segundos lo contrario. Por ejemplo, el intervalo $(1, 5)$ es finito, mientras que $(-\infty, 0)$ es un intervalo infinito. Nosotros debemos señalar que, tanto el conjunto vacío $\emptyset$ como el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$ son intervalos. También, los puntos $\{a\}$ son considerados como intervalos, intervalos cerrados $[a, a]$ en este caso.

Una pregunta interesante es ¿qué característica común tienen todos estos conjuntos que denominamos intervalos. Para responder esta pregunta empezamos con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 91. Un conjunto A de números reales verifica la propiedad del valor medio si dados cualesquiera $x, y \in A$ y $z \in \mathbb{R}$ que está entre ellos, $x < z < y$ entonces $z \in A$.

El siguiente resultado es crucial en nuestra discusión.

TEOREMA 92. *Si $A \subset \mathbb{R}$ verifica la propiedad del valor medio entonces A es un intervalo.*

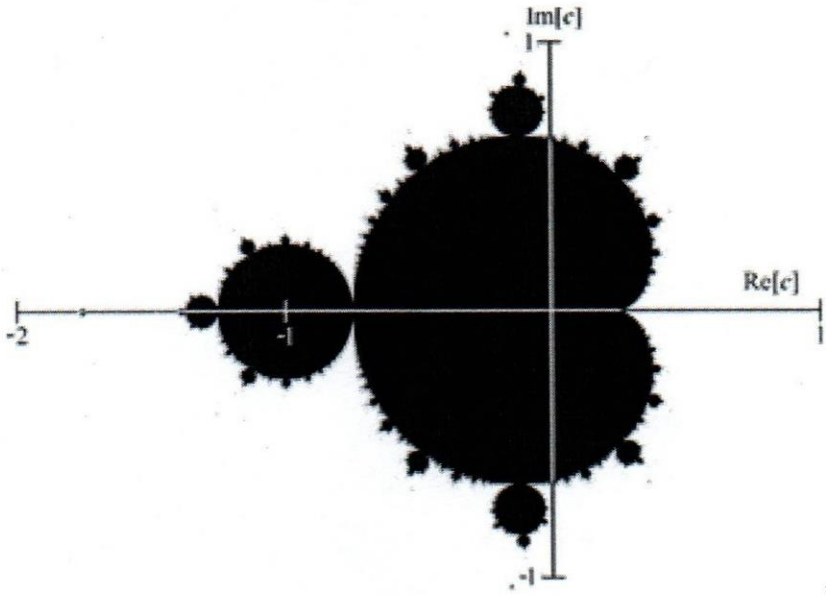
DEMOSTRACIÓN. Es muy sencilla aunque se deben considerar diferentes casos. Veamos el primer caso: un conjunto A que es acotado inferiormente pero no superiormente y verifica la propiedad del valor medio. Sea $a = \inf A$. Claramente solo hay dos opciones o $a \in A$ o $a \notin A$. Si $a \in A$ vamos a demostrar que $A = [a, \infty)$. Consideremos una sucesión creciente $b_n \in A$, $b_0 < b_1 < \cdots$ con $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Los intervalos $I_n = [a, b_n]$ están contenidos en A por la propiedad del valor medio. Es claro que

$$[a, \infty) = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \subset A$$

Veamos ahora que $A \subset [a, \infty)$. Supongamos lo contrario, entonces debería existir un $z \in A$ con $z < a$ pero esto contradice el hecho que a es la mayor de las cotas inferiores de A, luego $A \subset [a, \infty)$ y por ende $A = [a, \infty)$. En el caso que $a \notin A$ se procede de manera análoga pero considerando dos sucesiones, una a_n decreciente con $a_n \in A$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y otra sucesión b_n creciente, $b_n \in A$, y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Claramente, para cada n, $(a_n, b_n) \subset A$ por la propiedad del valor medio y $\cup_n (a_n, b_n) = (a, \infty) \subset A$. El hecho que a es el ínfimo de A implica que se debe tener $A \subset (a, \infty)$. Esto concluye este caso. Dejamos al lector completar el resto de las posibilidades. □

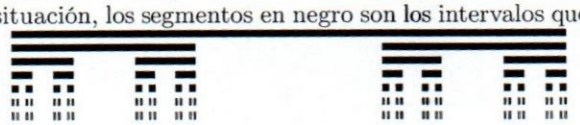
4.4. El conjunto de Cantor

Vamos a realizar una construcción muy importante: el conjunto de Cantor. Estudiaremos también sus propiedades básicas. El conjunto de Cantor es un ejemplo temprano de un área muy activa de interés en la actualidad como lo es la Teoría de Conjuntos Fractales.



\\El conjunto de Mandelbrot

Partimos del intervalo $E_0 = [0,1]$ y en el primer paso de la construcción extraemos de E_0 el tercio central del intervalo, es decir el conjunto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Nos queda el conjunto $E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Observamos dos cosas: el conjunto E_1 es cerrado, los extremos de E_0 que son los puntos $0, 1$ se mantienen en E_1. También notamos que la longitud del intervalo extraído es $\frac{1}{3}$. Repitamos lo hecho en el primer paso en cada uno de los intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Extraemos entonces los tercios $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ de $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ respectivamente. Nos queda ahora $E_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{1}{9}\right]$, que de nuevo es un conjunto cerrado y la longitud que le quitamos a E_1 es $\frac{2}{9}$. Continuamos este proceso una cantidad numerable de veces. Hagamos un dibujo de la situación, los segmentos en negro son los intervalos que quedan en cada iteración.



DEFINICIÓN 93. El conjunto de Cantor C es

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$$

Una pregunta natural es ¿queda algo en esta intersección? , ¿es C no vacío?. El teorema de los intervalos encajados de Cantor garantiza que C es no vacío. También se puede observar que los extremos de los intervalos que se van formando en cada paso de la iteración están en C. De hecho hay una cantidad no numerable de puntos en C.

TEOREMA 94. *El conjunto de Cantor C es no numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos usar la base 3 en lugar de la base 10 para escribir la expansión ternaria de cualquier $x \in [0,1]$. Es decir, cualquier $x \in [0,1]$ lo escribimos

como

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^{n+1}}, a_n \in \{0, 1, 2\}$$

De manera más sencilla, cualquier $x \in [0, 1]$ lo escribimos como $x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$ donde cada a_i toma un valor entre $\{0, 1, 2\}$. En el primer paso de la construcción del conjunto de Cantor, al eliminar el tercio central eliminamos todos y sólo los $x \in [0, 1]$ que son de la forma

$$x = 0, 1 a_2 a_3 \cdots$$

En el siguiente paso se eliminan los x que tienen uno en su segunda posición ternaria y 0 en la primera o los que tienen un uno en la segunda posición y un 2 en la primera. Al continuar este proceso vemos que ¡cualquier x que tenga sólo 0 y 2 en su expansión ternaria es un elemento del conjunto de Cantor!Pero un argumento del tipo diagonal demuestra que el conjunto de todas las sucesiones que toman sólo los valores 0 y 2 es un conjunto no numerable. □

Al ser C una intersección de conjuntos cerrados E_k vemos que C es cerrado, pero $C \subset [0, 1]$ de donde C está acotado. Si colocamos estas observaciones juntas obtenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 95. *El conjunto de Cantor es cerrado y acotado. El conjunto de Cantor es compacto.*

La compacidad del conjunto de Cantor C se obtiene a partir del teorema de Heine-Borel.

Vamos a explorar ahora la suma de las longitudes que extraemos del intervalo $[0, 1]$ al ir eliminando los distintos tercios. En el primer paso eliminamos un intervalo de longitud $\frac{1}{3}$, en el segundo paso sacamos 2 intervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{9}$,es decir eliminamos una longitud de $\frac{2}{9}$. El lector puede ver que en el paso k de la iteración eliminamos $2^{k-1}\frac{1}{3^k}$ o $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ con $k = 1, 2, \cdots$. Luego, para conocer lo que hemos sacado debemos calcular

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

pero si $S_m = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ entonces $\frac{2}{3}S_m - S_m = \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} - 1$, luego

$$S_m = \frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}}{\frac{1}{3}} \to 2 \text{ si } m \to \infty$$

De aquí se concluye que la longitud de lo que extraíamos en el proceso de construir el conjunto de Cantor es precisamente 1. Pero 1 es la longitud del intervalo donde trabajamos, es decir que el conjunto de Cantor "no tiene longitud", es un conjunto de "medida" 0. En particular el conjunto de Cantor no puede tener interior ya que cualquier intervalo abierto tiene una longitud >0.

Por último examinaremos el conjunto de Cantor en relación a uno de los conceptos importantes introducidos en este capítulo, el concepto de conexidad. Un conjunto A *se dice totalmente disconexo si los únicos subconjuntos* $B \subset A$ *que son conexos son los conjuntos formados por un único punto.* Como en $\mathbb{R}$ los conexos son intervalos es claro que el conjunto de Cantor es totalmente disconexo.

Georg Cantor

Nace en San Petersburgo(luego Leningrado) en 1845 dentro de una familia cristiana(madre católica y padre luterano). San Petersburgo es parte de Rusia pero la familia de Cantor se mueve a Alemania y lo consideramos un matemático alemán. Su padre se opone inicialmente a que estudie matemática pura aunque finalmente acepta la inclinación de su hijo. Estudia en Berlín donde se doctora en 1867 bajo la dirección de Kummer mejorando resultados de Gauss. Después de un período enseñando en educación media recibe una invitación de Heine para ir a la Universidad de Halle. Es allí donde realiza su trabajo más importante aunque siempre se ha considerado que un matemático de su talla debió pertenecer al cuerpo profesoral de universidades como la de Berlín o Gotinga. A partir de 1872 inicia su colaboración con Dedekind con quien se comunica fundamentalmente por medio de cartas. Su relación se ve afectada cuando en 1881 Cantor hace arreglos para que Dedekind ocupe la plaza de Heine, quien había muerto, en la Universidad de Halle y Dedekind no acepta. Pasan varios años hasta que Cantor vuelve a hablar con Dedekind. Cantor era de carácter depresivo y sufre constantemente de trastornos nerviosos. Varias veces es internado por esos problemas. Muere durante la primera guerra mundial en 1916 probablemente de hambre cuando estaba hospitalizado. Le debemos a Cantor estudios originales de convergencia de series trigonométricas, análisis matemático y el inicio de la teoría de conjuntos. Su obra es fundamental ya que crea el lenguaje en el cual se expresará la matemática del siglo XX.

4.5. Ejercicios del capítulo 4

1. Demuestre esta versión del principio del Palomar: consideremos una sucesión (x_n) cuyo rango $Ran\,(x_n) = \{x_n, n = 0, 1, 2 \cdots\}$ es un conjunto finito $\{y_1, y_2, \cdots y_m\}$. Para cada y_j con $j = 1, 2, \cdots m$ definimos

$$A_j = \{n \in \mathbb{N} \text{ tales que } x_n = y_j\}$$

   Entonces al menos uno de los A_j debe ser infinito.
2. Usando el ejercicio 1. pruebe que cualquier conjunto finito $K \subset \mathbb{R}$ es compacto.
3. Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ con } p(x) = 0, \text{ ppolinomio con coeficientes reales de grado } 100\}.$$

   ¿Es A compacto?.
4. Sea el conjunto $A = \left\{\cos\left(\frac{2}{n}\right), n = 1, 2, 3, \cdots\right\} \cup \{x/x^2 - 1 = 0\}$, ¿es A compacto?.
5. Demuestre que la unión de una familia *finita* de compactos es un conjunto compacto?. ¿Es cierto el resultado para uniones arbitrarias de compactos?.

6. Considere el conjunto de los números reales a los cuales le añadimos el punto ∞. Decimos que una sucesión de números reales x_n converge a ∞ si dado cualquier número $M > 0$ existe un $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces $|x_n| > M$. Demuestre que si x_n no es acotada debe tener una subsucesión x_{n_k} converge ∞.
7. Demuestre que el conjunto $\mathbb{R} \cup \infty$ es compacto. Dicha compactificación que hemos construido en los ejercicios 6 y 7 se llama compactificación de un punto.
8. Demuestre los casos restantes del teorema de caracterización de los intervalos por medio de la propiedad del valor medio.

Capítulo 5

Funciones continuas

Las cantidades, así como las razones de cantidades, que tienden a la igualdad constantemente en un tiempo finito y antes del límite de dicho tiempo se aproximan mutuamente más que una diferencia dada, al final se hacen iguales.

Sir Isaac Newton

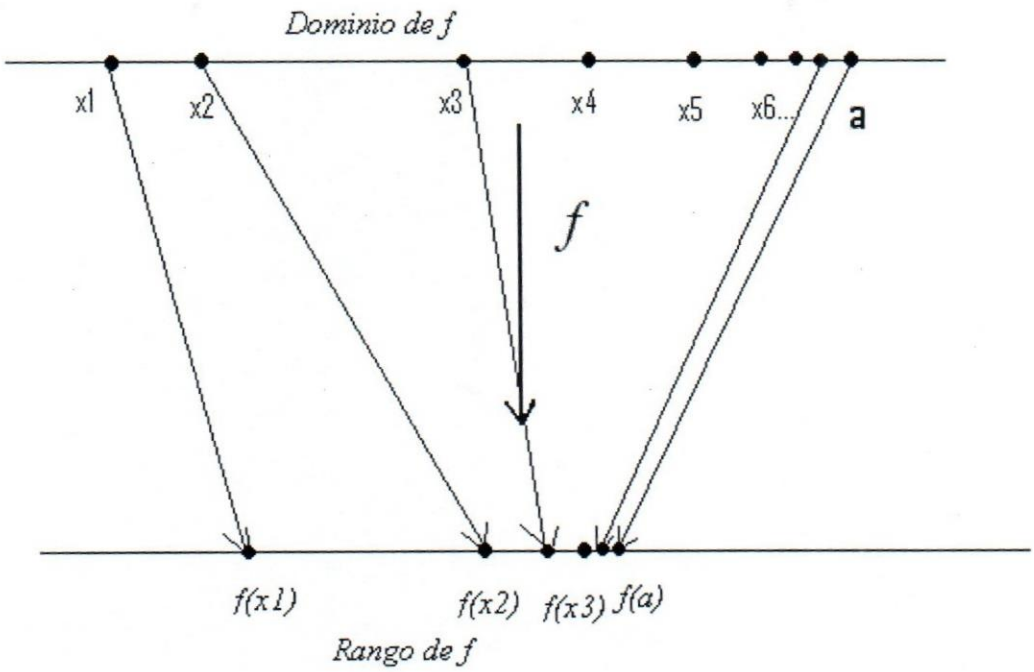
Libro Primero sobre el Movimiento de los Cuerpos, Lema I

5.1. Conceptos y resultados básicos

Para evitar hacer las definiciones más engorrosas voy a suponer que las funciones tienen dominio igual a $\mathbb{R}$. Es decir, trabajaremos con lo que los matemáticos franceses denominan aplicaciones. Existen diversas maneras de definir continuidad en un punto x_0 de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Nosotros adoptaremos la siguiente basada en la idea de sucesiones convergentes.

DEFINICIÓN 96. Una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es continua en un punto a si y sólo si para cualquier sucesión x_n de números reales que converge a a, esto es $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

El siguiente dibujo intenta aclarar la definición.



EJEMPLO 97. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es continua en cualquier punto $z \in \mathbb{R}$. Para ver esto, tomemos x_n una sucesión que converge a z. Esto es $\lim_{n\to\infty} x_n = z$. En particular, por un resultado anterior se debe tener que x_n es acotada. Luego, $\left|x_n^2 - z^2\right| = |x_n - z|\,|x_n + z| \leq |x_n - z|\,(|x_n| + |z|)$ y esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^2 - z^2) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^2 = z^2$$

De donde f es continua.

OBSERVACIÓN 98. Veamos la definición general de continuidad cuando el dominio K es arbitrario. Si $f : K \to \mathbb{R}$ *decimos que f es continua en $x_0 \in K$ si y solo si para cualquier sucesión $x_n \in K$ que converge a x_0 se tiene que $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$*. Por ejemplo si $K = [1, 2] \cup \{3\}$ y ponemos $f(3) = -11$ entonces f es continua en 3 ya que las únicas sucesiones de K que convergen a 3 son las que se hacen constantemente igual a 3 a partir de algún momento.

DEFINICIÓN 99. Diremos que el límite de f en el punto x_0 existe y es igual a L si y sólo si para cualquier sucesión x_n convergente a x_0 se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

Esto lo escribiremos, como es usual, así $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. Luego, el hecho que f sea continua en un punto x_0 se puede escribir con estas dos condiciones:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.
2. $L = f(x_0)$

De manera similar se definen los límites por la izquierda y por la derecha de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Para mantener nuestra exposición completa definamos el límite por la derecha de una función f en un punto x_0, decimos que $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$(se lee límite por la derecha de f en x_0) si y solo si para cualquier sucesión z_n que converge a x_0, $z_n \geq x_0$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = L$. GRAFICOS

Hemos adoptado esta definición de continuidad porque se adapta muy bien a nuestra definición de compacidad como veremos más adelante. Ahora exploraremos la relación de esta definición con la original de Bolzano y Cauchy basada en la idea $\epsilon - \delta$.

TEOREMA 100. *Si f es continua en z entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - z| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la tesis no se verifica, es decir existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ existe al menos un punto x en el intervalo $(z - \delta, z + \delta)$ que verifica

$$|f(x) - f(z)| \geq \epsilon_0$$

Esto permite construir una sucesión $x_n \in (z - \frac{1}{n}, z + \frac{1}{n}), n = 1, 2, \cdots$ que verifica $|f(x_n) - f(z)| \geq \epsilon_0$. La construcción se realiza tomando $\delta_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$ y escogiendo x_n en el intervalo $(z-\delta_n, z+\delta_n)$, $n = 1, 2, \cdots$ verificando $|f(x_n) - f(z)| \geq \epsilon_0$. Es claro que x_n converge a z ya que $|z - x_n| < \frac{1}{n}$ pero que $f(x_n)$ no converge a $f(z)$ de donde, por reducción al absurdo, se debe cumplir la tesis. □

Se puede probar de manera análoga la otra implicación que demuestra la equivalencia entre las dos definiciones, esto lo dejamos como ejercicio al lector. Así, en nuestra exposición podemos usar cualquiera de las versiones del concepto de continuidad ya que son equivalentes. Algunas veces usaremos la definición tradicional del $\epsilon - \delta$ y otras veces la definición usando sucesiones.

OBSERVACIÓN 101. Cuando hablemos de función continua, sin especificar en que punto, el lector debe entender que se trata de una función que es continua en *todo punto de su dominio*. Veamos que ocurre con las funciones continuas y los conjuntos cerrados de $\mathbb{R}$.

TEOREMA 102. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $B \subset \mathbb{R}$ es cerrado entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $f^{-1}(B)$ es no vacío e infinito. Supongamos que $f^{-1}(B)$ no sea cerrado, entonces existe un z punto de acumulación de $f^{-1}(B)$ que no está en $f^{-1}(B)$. Entonces podemos conseguir una sucesión de puntos $x_n = f^{-1}(y_n)$ que converge a z y $y_n \in B$. Pero f es continua, luego

$$\lim_{n\to\infty} f(f^{-1}(y_n)) = \lim_{n\to\infty} y_n = f(z)$$

Pero, al tener que los $y_n \in B$ y ser B cerrado, debemos tener que $f(z) \in B \Rightarrow z \in f^{-1}(B)$, una contradicción, luego $f^{-1}(B)$ es cerrado. □

Esto tiene una consecuencia interesante que sirve muchas veces para definir función continua.

COROLARIO 103. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $A \subset \mathbb{R}$ es abierto entonces $f^{-1}(A)$ es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Si A es abierto entonces $B = A^c$ y por ende $f^{-1}(B)$ es cerrado pero $f^{-1}(A) = f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$,de donde $f^{-1}(A)$ es abierto. □

Vamos a demostrar ahora algunas proposiciones sencillas aunque bastante útiles en relación al concepto de continuidad.

PROPOSICIÓN 104. *Si una función es continua en un punto x_∞ y $f(x_\infty) > 0$ entonces existe un intervalo I centrado en x_∞, $I = (x_\infty - r, x_\infty + r)$, donde la función preserva el signo, es decir $f(x) > 0$ para cualquier $x \in I$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\epsilon = \frac{f(x_\infty)}{2}$, sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_\infty| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_\infty)| < \frac{f(x_\infty)}{2}$. De aquí se obtiene de inmediato que

$$f(x_\infty) - \frac{f(x_\infty)}{2} < f(x)$$

si $|x - x_\infty| < \delta$. Pero $f(x_\infty) - \frac{f(x_\infty)}{2} = \frac{f(x_\infty)}{2} > 0$ de donde se tiene el resultado. □

5.2. Preservación de la compacidad y conexidad

Vamos a demostrar que las funciones continuas preservan los conjuntos compactos, esto requiere un enunciado preciso contenido en nuestro próximo teorema.

TEOREMA 105. *Si $K \subset \mathbb{R}$ es compacto y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces $f(K)$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una sucesión de puntos $y_n \in f(K)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Cada y_n se escribe como $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in K$.Pero K es compacto, luego podemos extraer, de la sucesión, una subsucesión x_{n_k}que converge a $x_\infty \in K$. Al ser f continua debemos tener que $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ debe ser convergente a $f(x_\infty) \in f(K)$. Luego, $f(K)$ es compacto. □

Este teorema tiene una consecuencia muy importante para las aplicaciones. En cualquier problema de optimización se trata de buscar el máximo o el mínimo de una función en un cierto dominio. Garantizar la existencia del máximo es el primer paso para determinar el mismo. Recordamos que si $f : D \to \mathbb{R}$ entonces f tiene un máximo absoluto en $x_0 \in D$ si

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ para cualquier } x \in D$$

Por ejemplo, la función $g(x) = \cos x$ definida en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tiene un máximo absoluto en $x = 0$.

Decimos que f alcanza un máximo local en x_0 en D si existe un intervalo abierto I con $x_0 \in I$ tal que

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ para cualquier } x \in D \cap I$$

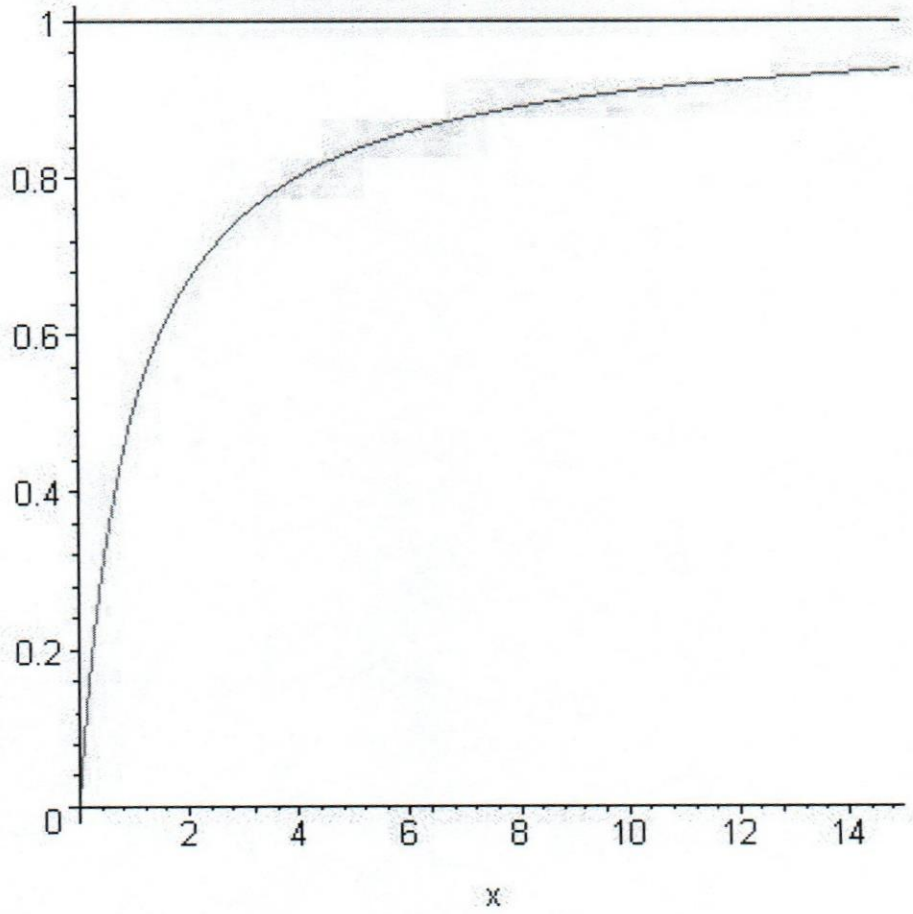
Por ejemplo, $f(x) = x^3 - 9x$ en los reales tiene un máximo local en $x_0 = -\sqrt{3}$ como el lector puede verificar usando las técnicas del cálculo diferencial. Cualquier máximo absoluto de una función $f : D \to \mathbb{R}$ en un punto $x_0 \in D$ es también un máximo local.

Por supuesto, los conceptos de mínimo absoluto y mínimo local se definen de manera similar cambiando las desigualdades y lo dejamos al lector.

TEOREMA 106. *Una función continua siempre alcanza un máximo absoluto en un intervalo $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Un intervalo $[a,b]$ es un conjunto compacto, así $f([a,b])$es compacto. Luego $f([a,b])$ es cerrado y acotado, por el teorema de Heine-Borel, y por ende debe existir $\sup f([a,b]) = L$. Pero como $f([a,b])$ es cerrado entonces $L \in f([a,b])$,es decir $L = f(c)$ para algún $c \in [a,b]$ y así L es el valor máximo de f en el intervalo $[a,b]$. □

El lector debe observar que la hipótesis de trabajar en un intervalo compacto no se puede omitir, el resultado no es valido si solo suponemos que el conjunto es cerrado. Por ejemplo, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{x+1}$ no alcanza un máximo ya que $\frac{x}{x+1}<1$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$.



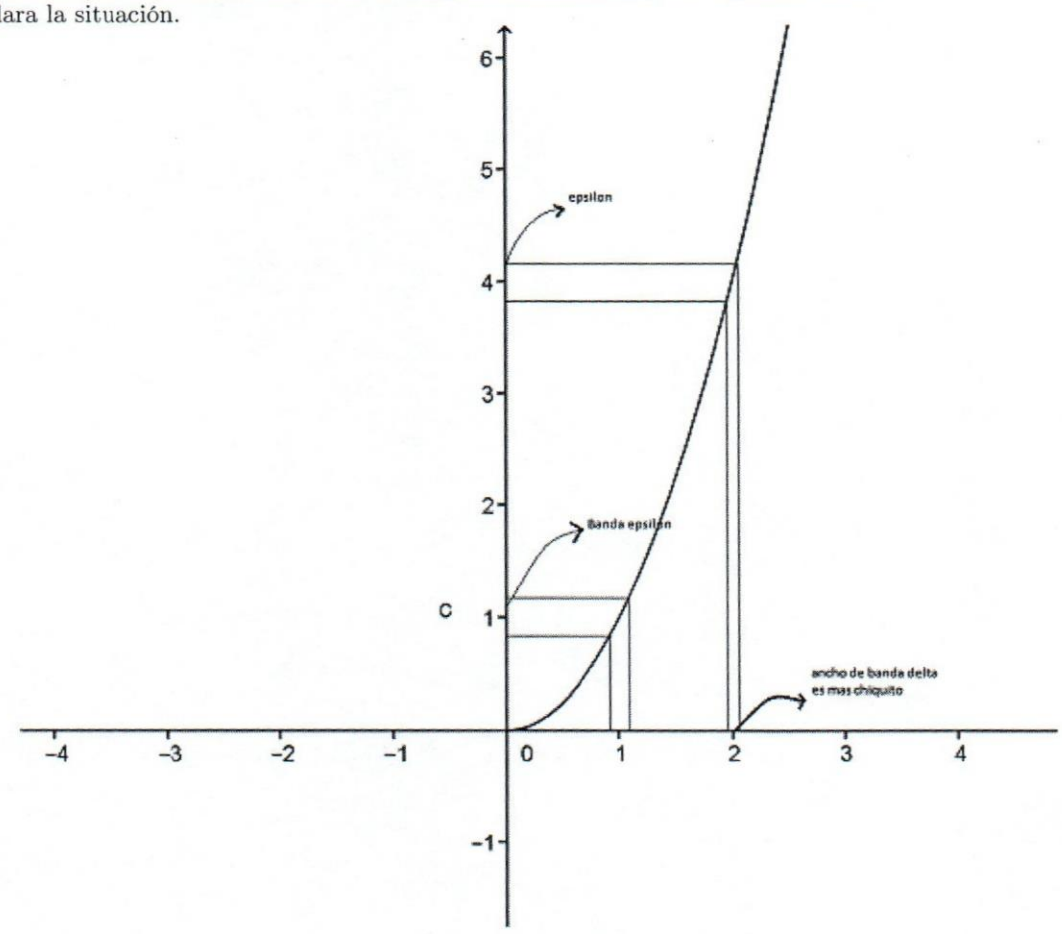
Otra consecuencia importante de la compacidad es que si f es continua en el compacto $[a,b]$ entonces f es *uniformemente continua*. Veamos lo que esto significa.

DEFINICIÓN 107. Una función f de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ es uniformemente continua si y solo si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, *que solo depende de* ϵ, tal que si $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para cualquier x_0 en $[a,b]$.

Por supuesto, si f es uniformemente continua entonces f es continua. La diferencia entre los conceptos, y es una diferencia sutil pero importante, es que en la

continuidad usual de f en el punto x_0 el δ depende del ϵ *y de* x_0. En la continuidad uniforme uniforme δ no depende de x_0 y solo depende de ϵ.

EJEMPLO 108. Ya sabemos $f : [0, \infty) \to \infty$, $f(x) = x^2$ es continua en todo su dominio, pero $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0|$ vemos que a medida que x_0 aumenta entonces δ debe ser escogido más pequeño para que $|x - x_0| < \delta$ implique que $|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0| < \epsilon$. Veamos esto con cuidado, ya que $|x + x_0| \leq |x| + |x_0|$ y como $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$ debemos escoger δ como $\frac{\epsilon}{1+|x_0|}$. Luego no hay continuidad uniforme en este caso. Observe que si el intervalo hubiese sido acotado si tendríamos continuidad uniforme ya que podemos acotar $|x_0|$. El siguiente dibujo aclara la situación.



TEOREMA 109. *Si f es continua en el compacto K entonces f es uniformemente continua en K.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f no fuese uniformemente continua en K. Entonces debe existir un $\epsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ y $x_0 \in K$ hay un z tal que $|z - x_0| < \delta$ pero $|f(z) - f(x_0)| > \epsilon$. Tomemos $\delta_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2 \cdots$ y z_n, x_n que verifican $|f(z_n) - f(x_n)| > \epsilon$ y $|z_n - x_n| < \frac{1}{n} = \delta_n$. Al ser compacto K podemos suponer, sin perdida de generalidad, que x_n converge a un x_∞ y por ende z_n lo

hace también, esto es $\lim_{n\to\infty} z_n = x_\infty$. Pero como f es continua debemos tener que

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(z_n)| = 0$$

Lo que es absurdo ya que por construcción $|f(z_n) - f(x_n)| > \epsilon$. Luego, f es uniformemente continua. □

Este teorema se lo debemos a E. Heine(1821-1881) quien trabajaba con Cantor en la Universidad de Halle. Cauchy lo necesitaba para su construcción de la integral pero omitió esta idea de la continuidad uniforme.

El teorema del valor medio demostrado inicialmente por Bolzano fue un paso importante en la comprensión del sistema de los números reales y de la necesidad de formalizar el análisis matemático. Vamos a enunciar el mismo y demostrarlo en el espíritu del capítulo anterior.

TEOREMA 110. *(Teorema del Valor Medio de Bolzano) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$ entonces existe un $\gamma \in (a, b)$ tal que $f(\gamma) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 = \frac{a+b}{2}$ el punto medio del intervalo $[a, b]$, evaluamos $f(x_0)$. Si $f(x_0) = 0$ detenemos nuestro proceso y la demostración es completa. Así, suponemos que $f(x_0) \neq 0$ y sin perdida de generalidad, podemos suponer que $f(x_0) < 0$. Luego en el intervalo $I_1 = [x_0, b]$ la función cambia de signo. Tomemos x_1 el punto medio de I_1 y evaluemos $f(x_1)$. De nuevo, si $f(x_1) = 0$ paramos el proceso, luego podemos suponer que $f(x_1) \neq 0$ y tomar el intervalo, con extremo x_1 donde f cambia de signo. Llamemos ese intervalo I_2, tenemos $I_2 \subset I_1$ y la longitud de I_2 es la mitad de la longitud de I_1. Continuamos este proceso indefinidamente para obtener una sucesión de intervalos $I_1, I_2, \cdots$ con $I_{j+1} \subset I_j$ y con la longitud de los mismos verificando $l(I_j) = \frac{b-a}{2^j}$. Luego, $\lim_j l(I_j) = 0$. De esto se deduce, por el principio de los intervalos encajados, que

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = \{x_\infty\}$$

donde $x_\infty \in [a, b]$. Evaluemos $f(x_\infty)$. Si, por ejemplo, $f(x_\infty) < 0$ debiera existir un intervalo I no degenerado donde para cualquier $x \in I$ se tiene que $f(x) < 0$. Pero para algún j, quizás j muy grande, se debe tener que $I_j \subset I$. Esto es una contradicción ya que f cambia de signo en I_j. De manera completamente análoga verificamos que no se puede tener $f(x_\infty) > 0$, luego, por la propiedad de tricotomía de los números reales, se debe tener que $f(x_\infty) = 0$ que es lo que queríamos demostrar. □

Este teorema, junto con su versión más general contenida en el Ejercicio 2, demuestran que las funciones continuas *preservan los intervalos*, esto es: si f es una función continua en $\mathbb{R}$ y I es un intervalo de números reales entonces $f(I)$ es también un intervalo. El lector debiera resolver el Ejercicio 2 e indicar porqué nuestra afirmación es cierta. Podemos resumir hasta el momento nuestros hallazgos sobre las funciones continuas:

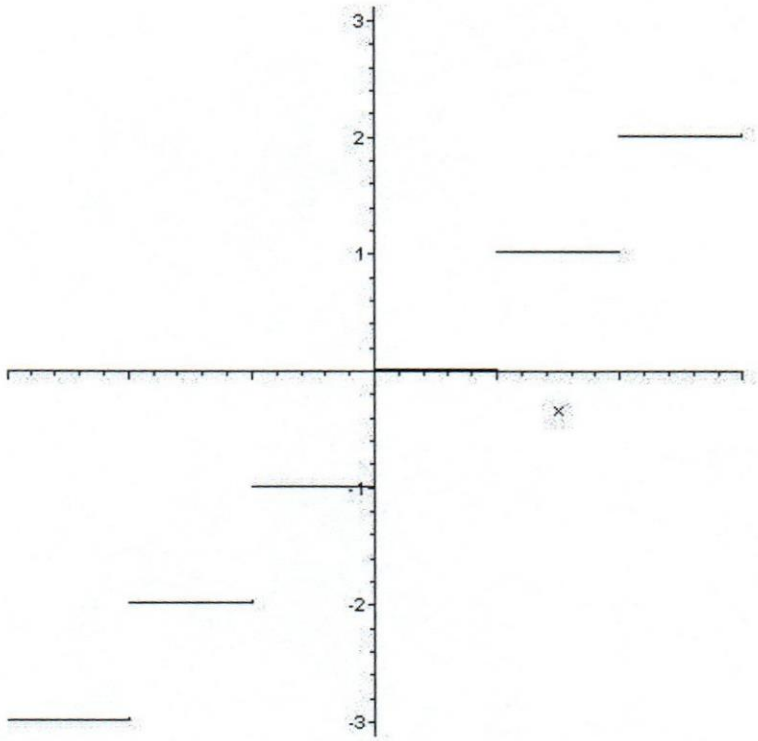
- Las funciones continuas preservan las sucesiones convergentes
- Las funciones continuas preservan los intervalos
- La imagen inversa de un cerrado por una función continua es un cerrado
- La imagen inversa de un abierto por una función continua es un abierto

5.3. Algunos resultados básicos de continuidad

Recordamos que *una función $f : I \to \mathbb{R}$ es creciente(resp. decreciente) si para dos reales $x, y \in I$ que verifican $x < y$ se tiene $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) \geq f(y)$).* Si la desigualdad es estricta, esto es, $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$(resp. $f(x) > f(y)$) decimos que f es *estrictamente creciente(resp. estrictamente decreciente).* Por ejemplo, la función e^x es estrictamente creciente en cualquier intervalo en la recta y la función $\cos x$ es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$.

DEFINICIÓN 111. Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$ presenta una discontinuidad de tipo salto en el punto $c \in (a, b)$ si y sólo si $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ existe y $\lim_{x \to c^-} f(x) = L'$ existe pero $L \neq L'$.

Por ejemplo, la conocida función $g(x) = [x]$,parte entera de x, definida sobre todo $\mathbb{R}$ tiene discontinuidades de salto en cada $x \in \mathbb{Z}$. Su gráfico se da a continuación



El siguiente resultado relaciona funciones crecientes y continuas.

TEOREMA 112. *Si f va de (a, b) en los reales y f es creciente entonces las únicas discontinuidades que puede tener f son de salto.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos $c \in (a, b)$ y el conjunto $(a, c]$. Claramente $f(x)$ está acotada en $(a, c]$ ya que

$$f(x) \leq f(c)$$

en este intervalo. Así, existe $L = \sup\{f(x)/x \in (a, c]\}$. Afirmamos que $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$. Si reflexionamos vemos que la sucesión $f(x_n)$ es monótona y acotada si x_n es una sucesión creciente que converge a c en el intervalo $(a, c]$. Luego, $f(x_n)$ debe ser convergente y esto nos dice que el $\lim_{x \to c^-} f(x)$ existe . Con seguridad se tiene que $\lim_{x \to c^-} f(x) \leq L$. Si esta desigualdad fuese estricta podríamos encontrar un $c' < c$ con $f(c') > \lim_{x \to c^-} f(x)$ y esto es imposible ya que dicha desigualdad se debe preservar en el intervalo $[c', c]$ .De idéntica forma se demuestra que $\lim_{x \to c^+} f(x)$ existe y por ende si f tiene una discontinuidad en c es de salto como deseábamos demostrar. □

Vamos a continuación a refinar el resultado anterior, vamos a demostrar que si f es creciente en el intervalo $[a, b]$ f solo puede tener una cantidad numerable de discontinuidades de salto. Empezamos con un lema.

LEMA 113. *Si J es un conjunto no numerable de números reales positivos entonces dado cualquier número real $M > 0$ existe una cantidad finita de elementos de J $x_1, x_2, \cdots, x_r$ que verifican*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r > M$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a escribir J como la unión numerable $J = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ donde

$$J_n = \left\{ x \in J \text{ tal que } x > \frac{1}{n} \right\}, n = 1, 2, \cdots$$

Veamos en efecto que $J = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$. Como cada $J_n \subset J$ tenemos que $\cup_{n=1}^{\infty} J_n \subset J$. Por otro lado, para verificar la contención $J \subset J = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$, al ser cada $x \in J$ estrictamente positivo, $x > 0$, podemos encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{x} \Rightarrow x > \frac{1}{n}$$

Luego, $x \in J_n \subset \cup_{k=1}^{\infty} J_k$ y tenemos entonces que $J = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$. En particular, de la escritura que hemos hecho de J se deriva que al menos un J_n debe ser infinito. Para ver esto, si cada J_n fuese finito o vació entonces J fuese numerable contrario a la hipótesis del lema. Tomemos y fijemos un J_{n_0} infinito. Demos ahora un número cualquiera positivo M, por propiedad arquimediana de los números reales podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N \frac{1}{n_0} > M$$

Luego si escogemos N elementos de J_{n_0} y los designamos por $x_1, x_2, \cdots, x_N$ cada uno de ellos verifica $x_j > \frac{1}{n_0}$. Luego, $\sum_{j=1}^{N} x_j > N \frac{1}{n_0} > M$ y la prueba se concluye. □

Ahora estamos listos para demostrar el resultado que indica que tenemos a lo más una cantidad numerable de discontinuidades si f es creciente en el intervalo $[a, b]$.

TEOREMA 114. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente entonces f tiene a lo sumo una cantidad numerable de discontinuidades.*

DEMOSTRACIÓN. Ya sabemos que todas las discontinuidades son del tipo salto. Supongamos que en los puntos $x_1, x_2, \cdots, x_N$ tenemos discontinuidades con saltos $S_i, i = 1, 2, \cdots, N$ dados por

$$\lim_{x \to x_i^+} f(x) - \lim_{x \to x_i^-} f(x) = S_i$$

para $i = 1, 2 \cdots N$. Es claro que la suma $\sum_{i=1}^{N} S_i$ de los saltos S_i no puede exceder $f(b) - f(a)$ de donde, por el lema anterior, solo puede haber una cantidad numerable de discontinuidades de salto. □

5.4. La función de Cantor

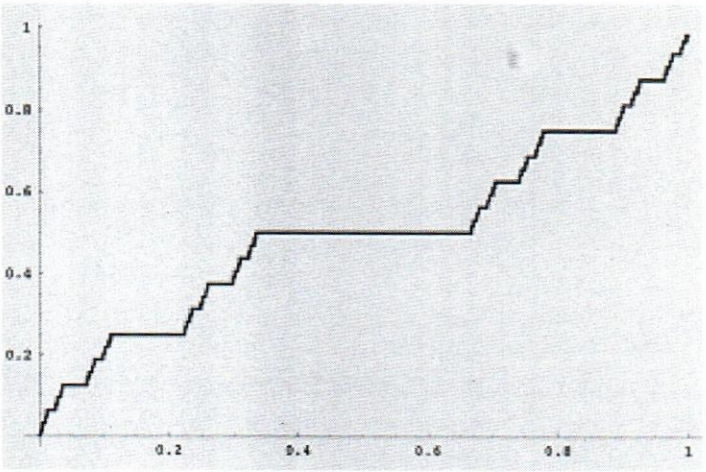
Nuestro ejemplo que sigue es muy importante en análisis matemático. Recordamos que cualquier $x \in C$, donde C es el conjunto de Cantor, se escribe en base 3 como una sucesión de 0 y 2. Esto es,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

con a_n es 0 o 2. En base 3 tenemos solo tres símbolos 0,1 y 2 para representar cualquier número.Veamos como se realiza esta representación, al estar x en el conjunto de Cantor se debe tener que $0 \leq x \leq 1$ y luego $x = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$. Como x debe estar o en primer o en el ultimo tercio del intervalo entonces $a_1$es 0(si está en el primer tercio) o 2(si está en el tercer tercio). Luego se divide el tercio donde este en tres partes iguales y se determina, de manera análoga, el valor de a_2 y se continua este proceso indefinidamente. Si x está en el conjunto de Cantor y es un extremo de uno de los intervalos abiertos que vamos extrayendo puede ocurrir que el 1 aparezca en su representación ternaria. Por ejemplo, $0,1 \in C$ pero en este caso tomamos la representación de x que tiene infinitos 2, así $0,1 = 0,02222 \cdots$. El Teorema de los intervalos encajados de Cantor garantiza que determinaremos de esta manera al número x y nuestra construcción nos indica su expansión ternaria. Definimos la función de Cantor en el conjunto C como

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n/2}{2^n}$$

Esta ultima serie debe entenderse como la representación de un número en $[0, 1]$ en base 2. Tenemos que $a_n/2$ solo toma el valor 0 o 1 ya que a_n es 0 o 2. Es claro que si $x, y \in C$ y $x < y$ entonces $F(x) \leq F(y)$. La función no es estrictamente creciente ya que F toma el mismo valor en los extremos de los intervalos que vamos eliminando en el proceso de construcción del conjunto de Cantor. Por ejemplo, si $x = 0,0222222 \cdots \Rightarrow F(x) = 0,01111 \cdots$ y si $x = 0,20000 \cdots$ se tiene que $F(x) = 0,100000 \cdots$ pero en base 2 se tiene que $0,1 = 0,011111 \cdots$. Esto da una idea de como prolongar la función F fuera del conjunto Cantor. En el primer tercio abierto que eliminamos, I_1 definimos el valor de F como $F(\frac{1}{3}) = F\left(\frac{2}{3}\right)$. Es decir, F es constante en ese intervalo. En el intervalo $I_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ tenemos que $\frac{1}{9} = 0,002222 \cdots$ y $\frac{2}{9} = 0,020000 \cdots$, de donde F en ese intervalo tomara el valor $F(\frac{1}{9}) = F(\frac{2}{9}) = 0,01 = 0,001111 \cdots$. La siguiente gráfica de la función de Cantor o "escalera del diablo" ayuda a entender la construcción



TEOREMA 115. *La función de Cantor F es continua de* $[0,1]$ *en* $[0,1]$.

DEMOSTRACIÓN. La función F es sobreyectiva ya que para cualquier y en $[0,1]$ vamos a tener que, en base dos, $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$ donde y_n es 0 o 1. Luego, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2y_n}{3^n}$ pertenece a C y claramente $F(x) = y$. Es imposible que F tenga una discontinuidad ya que si la tuviese fuese de salto y omitiría un conjunto de valores de $[0,1]$ lo que no ocurre al ser F sobreyectiva. □

Aplicando el concepto de derivada, que el lector conoce desde su curso de cálculo, vemos que la derivada de la función de Cantor es 0 salvo en el conjunto C de Cantor que tiene longitud 0. Pero la función está lejos de ser constante ya que la función toma todos los valores entre 0 y 1. Un comportamiento poco intuitivo que revela la importancia de definir con precisión los conceptos básicos del análisis matemático.

5.5. Ejercicios del capitulo 5

1. Construya una función g que sea continua solamente en el punto 0.
2. Supongamos que $f : [a,b]$ es continua y $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ con $\alpha < \beta$. Demuestre que para cualquier γ que verifique $\alpha < \gamma < \beta$ debe existir un $z \in (a,b)$ con $f(z) = \gamma$. Sugerencia: considere la función $g(x) = f(x) - \gamma$ y aplique el teorema del valor medio.
3. Demuestre el teorema del punto fijo de Brouwer, si $f : [0,1] \to [0,1]$ es continua entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe un $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.
4. Construya una función continua g y un conjunto cerrado C tal que $g(C)$ no sea cerrado. Sugerencia: El conjunto C no puede ser acotado. ¿Porqué?. Use esto para la construcción.
5. Demuestre que la función de Dirichlet d definida en el intervalo $[0,1]$ por medio de $d(x) = \begin{cases} 1 \text{ si} & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$ es discontinua en cualquier punto del intervalo $[0,1]$.

Capítulo 6

Funciones derivables

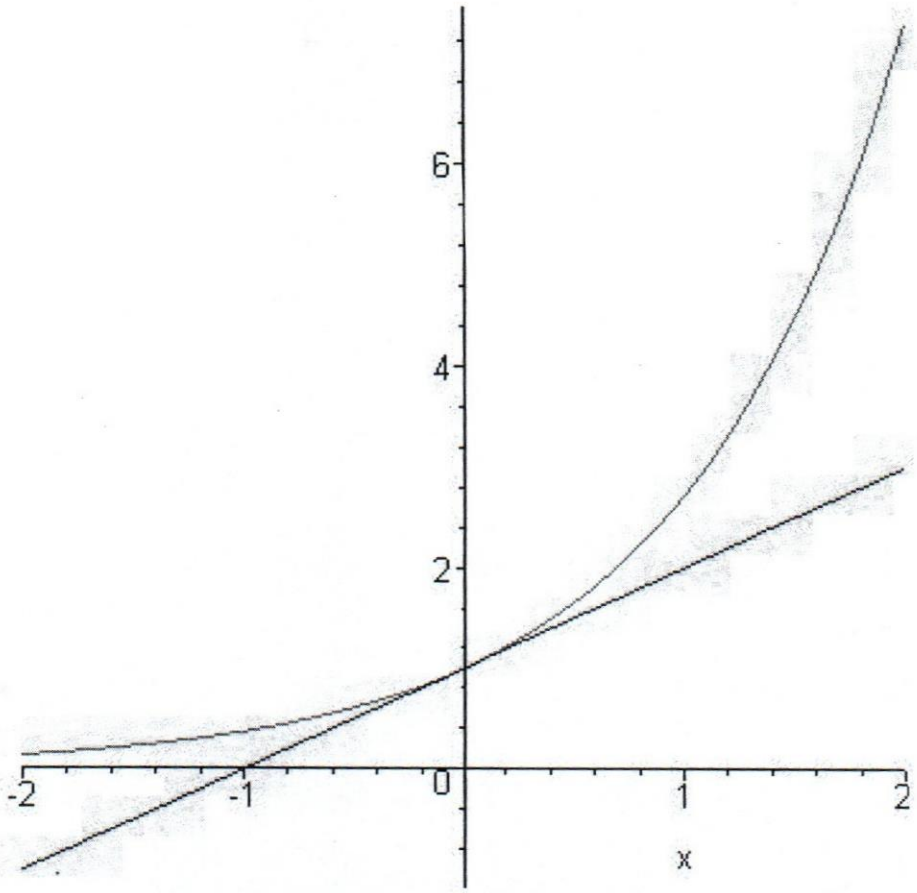
Huyo despavorido de esta proliferación de funciones que no tienen derivada en punto alguno.
Charles Hermite(1822-1901)

6.1. Nociones y resultados básicos

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se denomina derivable en un punto x_0 si y sólo si existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

y es finito. El valor del límite se denomina la derivada de f en x_0 y se denota por medio $f'(x_0)$. La idea principal de la derivada es que podemos aproximar a la función f en un punto x_0 "muy bien" mediante una función lineal(de hecho afín), como el lector conoce la aproximación se realiza por medio de la recta tangente.



Como señala Dieudonne, en su obra cálculo Infinitesimal **[Iri2]** pag. 145, esta idea queda oculta para las funciones de una variable porque en $\mathbb{R}$ las funciones o transformaciones lineales quedan caracterizadas por un número: la pendiente de la recta. En cambio si estamos en $\mathbb{R}^n$ la idea de la derivada, como transformación lineal, aparece de manera transparente por la matriz jacobiana asociada a la transformación lineal. Pero intentemos ver en el caso real como aparece una transformación afín que aproxima muy bien a f en la proximidad de x_0. Recordamos que cualquier función lineal T de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ esta dada por medio de $T(x) = ax$, donde $a \in \mathbb{R}$ es constante, luego si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - (T(x) - T(x_0))}{x - x_0} = 0$$

donde $T(x) = f'(x_0)x$. Observe que el denominador del límite anterior se aproxima a 0, luego el numerador debe ser realmente pequeño para que el límite de 0.

OBSERVACIÓN 116. Al tener que $f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))$ es muy pequeño vemos que la recta

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

es la recta tangente a f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Si usamos el símbolo $a \simeq b$ para indicar que las cantidades a, b son muy próximas entre si entonces podemos escribir

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

si x está cerca de x_0.

EJEMPLO 117. Estimemos, usando la derivada, el valor de la exponencial en $0,02$, es decir queremos calcular una aproximación de $e^{0,02}$ usando una función lineal. La idea es "pararnos" en el punto $x = 0$ y calcular la recta tangente que esta dada por $y = f(0) + f'(0)x = 1 + x$ ya que $f(0) = f'(0) = e^0 = 1$. Usando la recta tangente vemos que $e^{0,02} \simeq 1 + 0,02$. Usando la calculadora del ordenador vemos que $e^{0,02} = 1,020201340026756\cdots$. Lo cual indica que nuestra aproximación es correcta hasta la tercera cifra decimal.

El siguiente lema es técnico pero sera usado cuando veamos la integral de Henstock-Kurzweil. Observe que si f es derivable en t_0 entonces dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|z - t_0| < \delta$ entonces

$$|f(z) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)| < \epsilon\,|t - t_0|$$

LEMA 118. *Si f está definida en $[a, b]$ y f es derivable en $t \in [a, b]$. Dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta(t)$ tal que para $x, y \in [a, b]$ que verifican $t - \delta(t) < x \leq t \leq y < t + \delta(t)$ se tiene*

$$|f(x) - f(y) - f'(t)(x - y)| \leq \epsilon\,|x - y| = \epsilon(y - x)$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $\epsilon > 0$ existe, por nuestra observación antes del lema, un $\delta(t) > 0$ tal que si $|z - t| < \delta(t)$ entonces

$$|f(z) - f(t) - f'(t)(z - t)| < \epsilon\,|z - t|$$

Si $x, y \in [a, b]$ verifican $t - \delta(t) < x \leq t \leq y < t + \delta(t)$ se tiene que $|x - t| < \delta(t)$ y $|y - t| < \delta(t)$. Luego,

$$|f(x) - f(y) - f'(t)(x - y)| = |f(x) - f(t) + f(t) - f(y) - f'(t)(x - t) - f'(t)(t - y)|$$

$$\leq |f(x) - f(t) - f'(t)(x - t)| + |f(y) - f(t) - (y - t)|$$

$$\leq \epsilon(t - x) + \epsilon(y - t) = \epsilon(y - x)$$

□

El siguiente resultado es conocido por el lector y nos dice que la continuidad en un punto x_0 es una condición necesaria para la existencia de la derivada en un punto.

TEOREMA 119. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $x_0 \in (a, b)$ entonces f es continua en x_0.*

DEMOSTRACIÓN. Si f no fuese continua en x_0 debe existir una sucesión z_n que converge a x_0 pero $f(z_n)$ no converge a $f(x_0)$. En particular, debe existir un $\epsilon > 0$ e infinitos indices $n_k, n_1 < n_2 < \cdots$ con

$$|f(z_{n_k}) - f(x_0)| > \epsilon$$

Pero, si $x \to x_0$ es claro que el cociente $\left|\frac{f(z_{n_k})-f(x_0)}{z_{n_k}-x_0}\right|$ no está acotado ya que el denominador $x - x_0$ se aproxima a cero y el numerador es mayor que $\epsilon > 0$, luego es imposible que $\frac{f(z_{n_k})-f(x_0)}{z_{n_k}-x_0}$ sea convergente a $f'(x_0)$ cuando $n_k \to \infty$. □

Por supuesto, la continuidad en el punto x_0 es una condición necesaria para la existencia de la derivada $f'(x_0)$ pero no suficiente como muestra la función valor absoluto $f(x) = |x|$ definida en los reales. Dicha función es continua en 0 pero carece de derivada en este punto ya que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

no existe por ser 1 el límite en 0 por la derecha y -1 el límite en 0 por la izquierda.

No voy a demostrar todas las propiedades conocidas por el lector desde su curso de Cálculo, pero si tocare los hermosos teoremas de Rolle y Lagrange, tan importantes en matemáticas. Empezamos con un lema.

LEMA 120. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo local en $c \in (a, b)$ y f es derivable en c entonces $f'(c) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a descartar que $f'(c) > 0$. Si este fuera el caso, tomando una sucesión $x_n \in (a, b)$ con $x_n > c$ y $x_n \to c$ cuando $n \to \infty$ debemos tener que $f(c) - f(x_n) \geq 0$ a partir de algún n. Esto es debido a que f tiene un máximo local en c. Pero $c - x_n < 0$ y los cocientes

$$\frac{f(c) - f(x_n)}{c - x_n} \leq 0$$

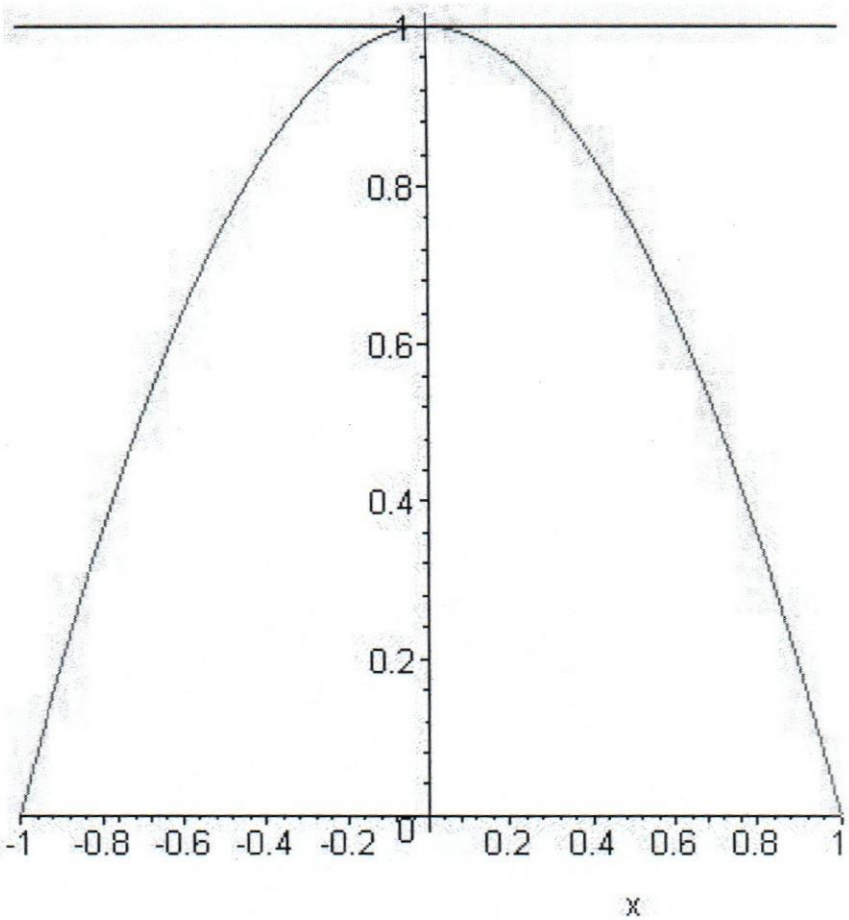
no pueden converger, cuando $n \to \infty$, a una cantidad positiva. Así, es imposible que $f'(c) > 0$. Un argumento similar, que dejamos al lector, implica que es imposible tener que $f'(c) < 0$. Por la propiedad de tricotomia de los números reales se tiene entonces que $f'(c) = 0$ como queríamos demostrar. □

Estamos listo para demostrar el teorema de Rolle, uno de los más hermosos resultados del Cálculo Diferencial.

TEOREMA 121. *(Rolle) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) que verifica $f(a) = f(b)$ entonces existe un $c \in (a, b)$ que cumple*

$$f'(c) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer, sin perdida de generalidad que f no es constante en $[a, b]$ ya que si este fuera el caso entonces su derivada fuese 0 en cualquier punto. Por ser f continua en el compacto $[a, b]$ f debe alcanzar un máximo en este intervalo y al ser f no constante ese máximo debe estar en el interior del intervalo $[a, b]$, es decir, en el intervalo (a, b) .Digamos que el máximo se alcanza en el punto $c \in (a, b)$. Por ser f derivable en c podemos aplicar el lema anterior que nos dice que $f'(c) = 0$, lo que concluye la demostración. □



El Teorema de Rolle tiene diversas aplicaciones. Por ejemplo, usemos el Teorema de Rolle para demostrar que el polinomio $x^3 + x$ tiene a lo más una raíz real. Por inspección vemos que $x = 0$ es una raíz del polinomio, si el polinomio tuviese otra raíz el Teorema de Rolle implicaría que la derivada se anularía en algún punto, pero la derivada es $3x^2 + 1$ que jamas se hace 0. Luego, $x = 0$ es la única raíz real del polinomio. Otra consecuencia importante del Teorema de Rolle es el Teorema de Lagrange que pasamos a enunciar. El lector puede ver que se obtiene del Teorema de Rolle rotando la gráfica de la función.

TEOREMA 122. *(Lagrange) Si f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

DEMOSTRACIÓN. Vamos a construir una función auxiliar que nos va a permitir aplicar el Teorema de Rolle y obtener el resultado. Sea

$$g(x) = f(x) - (f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a))$$

definida en $[a, b]$. Es claro que $g(a) = g(b) = 0$. Ademas, por ser suma de funciones continuas en $[a, b]$ entonces g es continua en $[a, b]$. De manera análoga demostramos que g es derivable en (a, b). Aplicando el Teorema de Rolle vemos que existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Luego, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ que es lo que se quiere demostrar. □

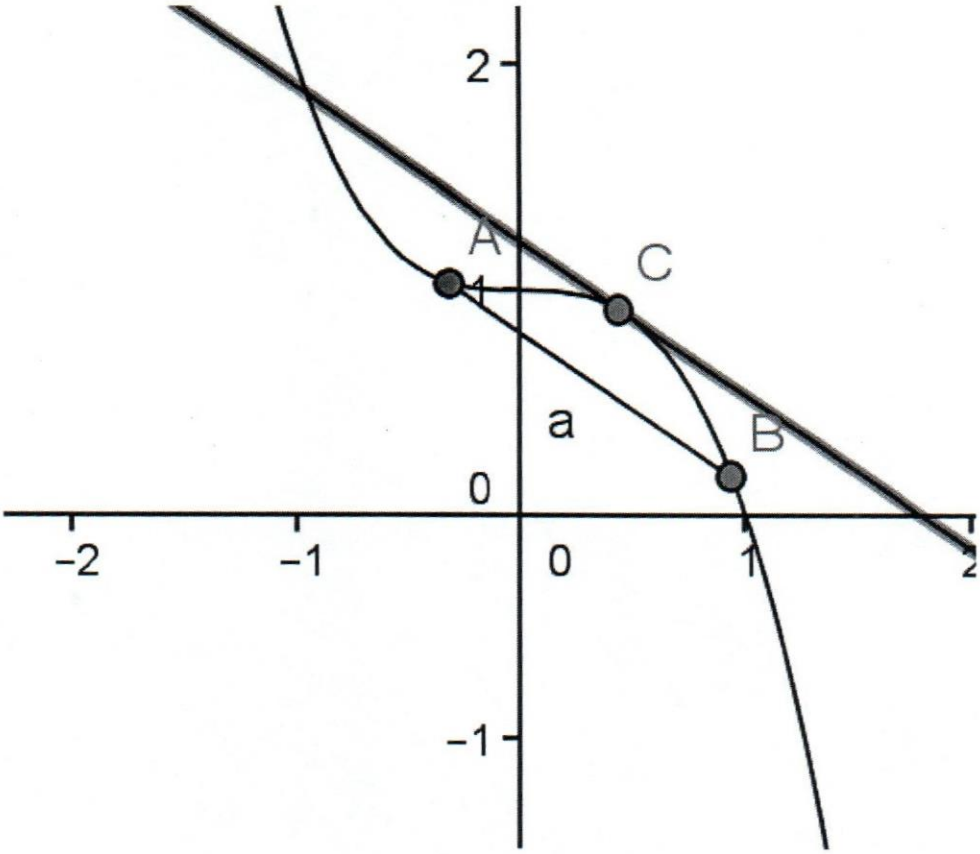
Siempre recordare el comentario de G.B. Thomas en su libro Cálculo(REF) sobre el Teorema de Lagrange, creo que lo explica muy bien. Supongamos que la distancia entre Caracas y Maracay es 100 kms y usted hace el trayecto en una hora. Suponemos también que maneja sin acelerar o frenar bruscamente, entonces el Teorema de Lagrange afirma que en algún momento el velocímetro del carro marco exactamente 100 km/h. Para entender esto, supongamos que $f(t)$ represente la posición del automovilista en un tiempo t medido en horas. La velocidad promedio entre los instantes t_0 y t, estudiada en nuestros cursos de Física de bachillerato, es

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

En particular, si recorremos 100 kms en una hora, tenemos que la velocidad promedio, fijando $t_0 = 0$ como el instante de partida del viaje, es

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 100 \text{ kms/h}$$

Pero, por el Teorema de Lagrange, el cociente anterior es $f'(\psi)$ para algún ψ entre 0 y 1. Ahora, por nuestros cursos de Física en la universidad, $f'(t)$ representa la velocidad instantánea en el tiempo t, es decir la velocidad que nos indica el velocímetro del carro. Luego, en algún tiempo ψ la velocidad instantánea iguala a la velocidad promedio. Una bella interpretación que liga la Física del bachillerato con la universitaria por medio del Teorema de Lagrange.



6.2. Recordando las series

6.2.1. Series numéricas. Nuestros lectores conocen de sus cursos de Cálculo el concepto de serie numérica o suma infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ a_n \in \mathbb{R}.$$

Estudiar tal serie es equivalente a estudiar la convergencia de la sucesión S_n de sumas parciales dada de manera recursiva por $S_0 = a_0, S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$. El lector debe comprobar(ver los ejercicios) que $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. En el caso que $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ escribimos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$$

y decimos que la serie en cuestión es convergente. Muchas veces omitiremos los índices de la suma infinita y hablaremos de la serie $\sum a_n$. Si el límite $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe decimos que la serie es divergente. Una condición necesaria pero no suficiente para que la serie sea convergente es que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Para ver esto observemos que $S_{k+1} = S_k + a_{k+1}$ y luego si tomo límite cuando $k \to \infty$ obtenemos $L = L + \lim_{k\to\infty} a_{k+1}$, de donde $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Supongamos ahora que $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ o lo que es igual $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = L$. Esto significa, por definición de límite de una sucesión, que si damos un $\epsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que si $k > N$ entonces

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_k - L| < \epsilon$$

En particular, esto implica que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = 0$$

Esto usualmente se enuncia diciendo que *la cola de la serie debe ir a 0* para que la serie converja, por cola se entiende una suma del tipo $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Veamos algunos ejemplos que ilustran estos conceptos.

EJEMPLO 123. La serie armónica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ es divergente. En efecto, si fuese convergente tendríamos que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots = L$. Luego, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots) = \frac{L}{2}$. De donde, si sumamos ahora solo los términos con denominador impar debemos tener $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \frac{L}{2}$. Pero $1 > \frac{1}{2}, \frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \cdots$, luego sumando las infinitas desigualdades $\frac{L}{2} > \frac{L}{2}$. Este absurdo demuestra la divergencia de la serie. El ejemplo demuestra que la condición $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ es necesaria pero no suficiente para la convergencia de la serie.

Un ejemplo muy importante en el análisis de las series es la *serie geométrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

donde $a > 0$. Como $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n \Rightarrow aS_n = a + a^2 + \cdots + a^{n+1}$. Restando ambas ecuaciones obtenemos $S_n(a-1) = a^{n+1} - 1 \Rightarrow$

$$S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

y de aquí es claro que la serie geométrica converge si y sólo si $0 < a < 1$.

Las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de términos positivos, esto es $a_n > 0$ para cualquier n, son muy sencillas de estudiar. Ello se debe a la dicotomía siguiente, o la serie converge o las sumas parciales se van a $+\infty$.Para ver esto observe que $S_{k+1} = S_k + a_{k+1} > S_k$. Luego las sumas parciales son una sucesión de números creciente y positivos. Así, o S_n es acotada y converge por el principio fundamental o S_n no es acotada y se va a ∞.

Por lo que ya estudiamos en el capítulo 3, decir que una sucesión S_n de números reales es convergente equivale a decir que es de Cauchy, esto es dado $\epsilon > 0$ debe existir un $N > 0$ tal que si $n, m > N$ entonces $|S_n - S_m| < \epsilon$. Aplicando esto a una serie numérica y a la sucesión de sumas parciales S_n obtenemos la condición de convergencia para una serie: dado $\epsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_n \right| < \epsilon$$

siempre que $n, m > N$. Observe, y esto es una observación importante, que esto implica que si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ es convergente entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente. Esto es

claro ya que por la desigualdad triangular se va a tener que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_n\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_n|$$

El lector debe recordar que es posible tener una serie $\sum a_n$ convergente pero que $\sum |a_n|$sea divergente. Por ejemplo, el criterio de Leibniz garantiza que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ es convergente pero $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ es divergente ya que, como sabemos, la serie armónica es divergente. Esto lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 124. Decimos que una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente si $\sum |a_n|$ es convergente.

Como ya demostramos anteriormente si una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente entonces es convergente. En la próxima sección ampliamos estos conceptos a series de funciones.

6.2.2. Series de funciones. La idea de sucesión se puede ampliar considerando un conjunto de llegada distinto a $\mathbb{R}$. Recordamos que hemos considerado en este texto hasta ahora sucesiones reales a_n, es decir funciones que van de $\mathbb{N}$ en los números reales $\mathbb{R}$. Vamos a consideras sucesiones f_n donde f_n es una función a valores reales cuyo dominio es $A \subset \mathbb{R}$. Esta idea lleva a considerar las funciones como puntos de ciertos espacios de infinitas dimensiones y es crucial en la tesis de Riemann *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la Geometría.* Para ver esto con claridad piense en un punto de $\mathbb{R}^3$, este punto queda completamente definido si hacemos tres determinaciones: sus coordenadas x, y, z. En cambio, una función f definida en el intervalo $[0, 1]$ queda determinada completamente por medio del cálculo de infinitos valores $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

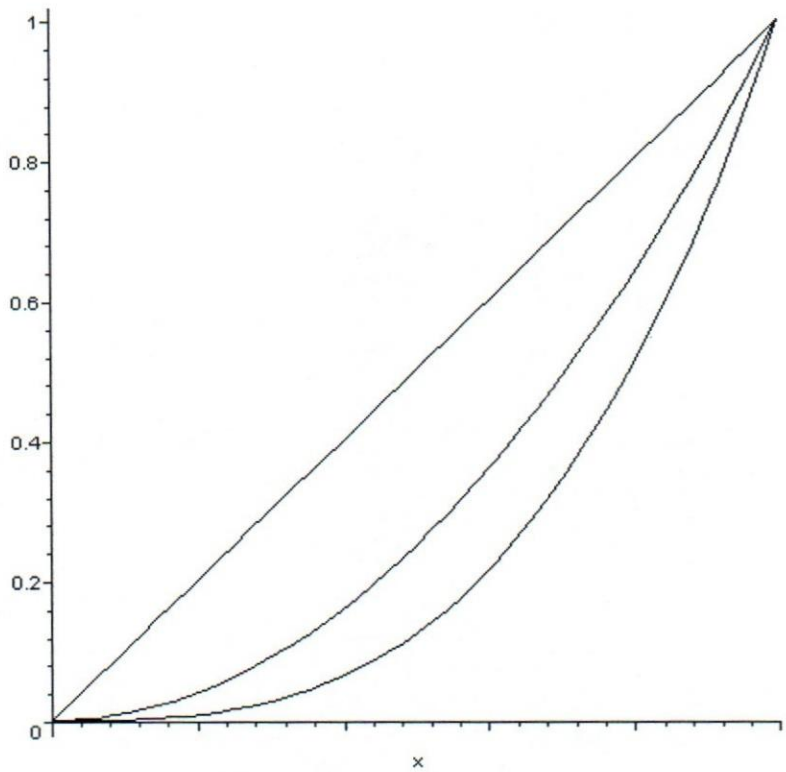
Bernhard Riemann

Matemático alemán nacido en Selasca en 1826. Uno de los fundadores del análisis moderno realizó importantes y originales investigaciones en distintas áreas de la matemática. Realiza, en la Universidad de Gotinga, bajo la tutoría del gran Gauss su trabajo doctoral ya mencionado. El mayor problema abierto de las matemáticas es la celebre hipótesis de Riemann que afirma que todos los ceros de la función zeta $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$, $z \in \mathbb{C}$, se encuentran todos sobre la recta $x = \frac{1}{2}$. Debemos a Riemann la construcción formal de la integral más usada en Cálculo, su conocida integral de Riemann. Sus trabajos en el área de topología son también fundamentales y marcan nuevos caminos. Muere de tuberculosis en Italia en 1886 cuando estaba en su madurez matemática.

DEFINICIÓN 125. Una sucesión de funciones (f_n) asocia a cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : A \to \mathbb{R}$ donde A es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Hemos fijado el conjunto de partida y llegada de las funciones f_n pero esto no es estrictamente necesario, sin embargo en la mayor parte de los ejemplos y aplicaciones del concepto de sucesión de funciones estos están indicados. Además, si se quiere ver a los elementos de una sucesión de funciones como puntos de un espacio vectorial es fundamental indicar su dominio y rango. También, las nociones de convergencia que vamos a definir más adelante requieren que el rango tenga una estructura de espacio métrico.

EJEMPLO 126. Consideremos la sucesión de funciones dada por $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = x^n$. Sus primeros términos son las funciones $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2, \cdots$ todas definidas en el intervalo $[0,1]$. Veamos las gráficas de las tres primeras funciones de la sucesión.



La siguiente definición es muy importante.

DEFINICIÓN 127. Una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \cdots$ converge puntualmente a la función $f : A \to \mathbb{R}$ si y sólo si para cualquier $x \in A$ se

tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

EJEMPLO 128. Consideremos la sucesión de funciones (g_n) dada por $g_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{x}{n}$. Al tener que $\left|\frac{x}{n}\right| \leq \frac{2}{n}$ vemos que, por el teorema del Sandwich, la sucesión de funciones converge puntualmente a la función idénticamente nula en $[-1,1]$.

El siguiente ejemplo nos dice que aunque los elementos de una sucesión de funciones sean funciones continuas su límite puntual puede fallar en ser continuo.

EJEMPLO 129. Si tomamos la sucesión $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ con $f_n(x) = x^n$ vemos que $\lim_{n\to\infty} x^n$ es 0 si $0 \leq x < 1$ y es 1 en el caso que $x = 1$. Es decir el límite puntual es la función g dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Esta función g tiene una discontinuidad en $x = 1$ aunque es el límite puntual de una sucesión de funciones continuas.

Leyendo el ejemplo anterior uno se puede preguntar, ¿cómo garantizar que el límite puntual de una sucesión de funciones continuas es continuo?. La siguiente definición nos va a dar una respuesta.

DEFINICIÓN 130. Una sucesión de funciones f_n, $f_n : A \to \mathbb{R}$, converge uniformemente a f , $f : A \to \mathbb{R}$ si y sólo si dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, donde el N no depende del $x \in A$.

Varias observaciones son necesarias para aclarar este concepto y distinguirlo de la convergencia puntual.

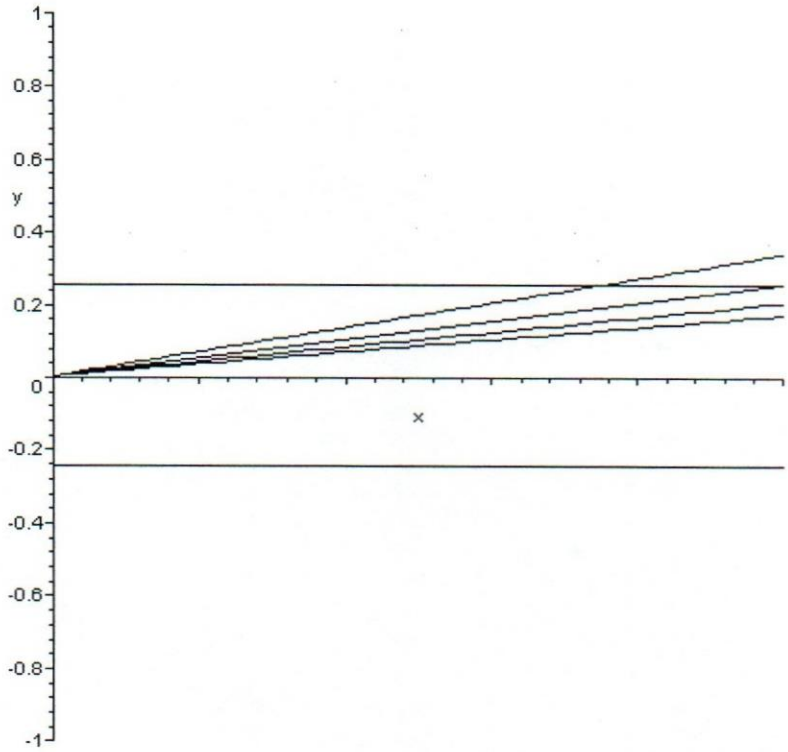
OBSERVACIÓN 131. Una sucesión f_n que converja uniformemente a f entonces converge puntualmente a f. Es decir, la convergencia uniforme es una condición suficiente para tener garantizada la convergencia puntual. La distinción entre los dos conceptos es que cuando definimos la convergencia puntual el N que encontramos depende, tanto del $\epsilon > 0$ como del punto x que consideremos. Veamos esto, tomemos la sucesión $f_n(x) = x^n$ definida las funciones f_n en el $[0,1]$. Vemos que $x^n < \epsilon$ implica que $n \ln x < \ln \epsilon$ de donde vemos que podemos tomar $N = \frac{\ln \epsilon}{\ln x}$, así ha medida que el x se aproxima a 1 debemos tomar un N más grande. Claramente N tiene una dependencia de x y de ϵ y podríamos escribir $N(x, \epsilon)$.

Es importante entender el significado geométrico de la convergencia uniforme para ello la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 132. Que exista convergencia uniforme de una sucesión de funciones f_n a una función f, donde cada función está definida en el intervalo $[a,b]$, significa que si damos un $\epsilon > 0$ y consideramos la banda determinada por las funciones $f - \epsilon, f + \epsilon$ entonces las funciones f_n "caen" dentro de la banda si $n > N$ donde el N sólo depende del epsilon. Veamos esto con un ejemplo. Consideremos la sucesión de funciones (g_n) dada por $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{x}{n}$. Esta sucesión converge uniformemente a la función $g \equiv 0$ en el intervalo $[0,1]$ ya que $\left|\frac{x}{n}\right| \leq \frac{2}{n} < \epsilon$ siempre que $n > N = \frac{2}{\epsilon}$. Tomemos ahora la banda determinada por $\epsilon = \frac{1}{4}$. Como la función límite de la sucesión es la función idénticamente nula, la banda queda

Interpretación geométrica de la convergencia uniforme

determinada por las funciones constantes $\pm\frac{1}{4}$. En el siguiente dibujo graficamos los elementos $\frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \frac{x}{5}, \frac{x}{6}$ de la sucesión. Observe como todos ellos entran en la banda salvo $\frac{x}{3}$. Explique el porqué.



El siguiente teorema usa una técnica muy útil en el análisis matemático denominada argumento $\epsilon/3$ (epsilon tercio).

TEOREMA 133. *Si $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces f es continua en $[a,b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un $\epsilon > 0$. Queremos ver que si tomo cualquier $x_0 \in [a,b]$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Pero

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$
$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

Observamos que, por convergencia *uniforme*, de la sucesión f_n a f puedo encontrar un $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$,$|f(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Por otro lado, para un n_0 fijo que verifica $n_0 > N$, por la continuidad de f_{n_0}, puedo

El argumento del $\epsilon/3$ es muy importante en análisis

encontrar un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. Luego, $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. □

Todo lo que hemos estudiado como la convergencia puntual o uniforme se puede extender sin modificación alguna a las series de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Como recordará el lector, el estudio de una serie equivale a estudiar una *sucesión*: la sucesión de sumas parciales $S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f_n(x)$. Nuestro siguiente resultado es importante en las aplicaciones ya que reduce el problema de estudiar la convergencia uniforme de una serie de funciones a estudiar la convergencia de una serie numérica.

TEOREMA 134. *(Prueba M- de Weierstrass) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie de funciones, donde f_n está definida en el intervalo $[a, b]$, $n = 0, 1, 2 \cdots$, y verifica que existen números reales $M_n > 0$, $|f_n(x)| \leq M_n$ para cualquier $x \in [a, b]$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a la función f en $[a, b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ verifica que $\sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |M_k|$ vemos que, para cada $x \in [a, b]$, $S_n(x)$ converge absolutamente y luego es convergente. Así, podemos definir sin problemas la función $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. Falta ver que la convergencia es uniforme. Estimemos

$$|f(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

pero la cola de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ se hace arbitrariamente pequeña si n es suficientemente grande. Luego, si damos un $\epsilon > 0$ podemos encontrar un $N > 0$ tal que si $n > N$ entonces $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon$,luego $|f(x) - S_n(x)| < \epsilon$ si $n > N$ lo que implica que la convergencia es uniforme. □

6.3. El ejemplo de Weierstrass

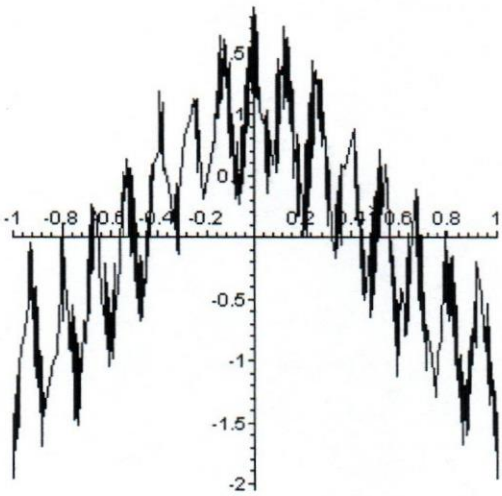
Vamos a examinar un ejemplo importante que condujo en buena medida, junto con la demostración del Teorema del Valor Medio de Bolzano, a la necesidad de formalizar el análisis matemático. Dicho ejemplo se debe a Weierstrass aunque como otros resultados del análisis matemático ya aparece, de manera geométrica, en la obra de Bolzano.

Karl Weierstrass

Matemático alemán nacido en Ostenfelde en 1815, fue durante mucho tiempo profesor de educación media, realizando sus originales investigaciones muy tarde en la noche cuando disponía de tiempo. Le debemos importantes trabajos en las

integrales elípticas y en el concepto de función analítica que baso en las series de potencias. Fue uno de los primeros matemáticos en reconocer y aplicar las ideas de Cantor. Le debemos el Teorema de Bolzano-Weierstarass que aparece en el capítulo 4 de este texto. A la edad de 41 anos llega a la Real Escuela Politécnica de Berlín que reconoce su trabajo. Da el ejemplo de una función continua que no admite derivada en punto alguno. También nos deja una construcción de los números reales muy próxima en espíritu a la de Meray. Entre sus discípulos destacados están el sueco Mittag-Leffler, H.A. Schwarz y la rusa Sofía Kowaleskaya. Muere en 1897 en la ciudad de Berlín.

Weierstrass dio como ejemplo la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ donde $0 < a < 1$ y b es un entero impar que verifica $ab > 1 + 3\frac{\pi}{2}$. Por ejemplo $a = \frac{1}{2}$,$b = 15$ hacen el trabajo. Veamos las gráfica, para estos valores de a, b, de la suma parcial S_5dada $\sum_{n=0}^{5} (\frac{1}{2})^n \cos(15^n \pi x)$.



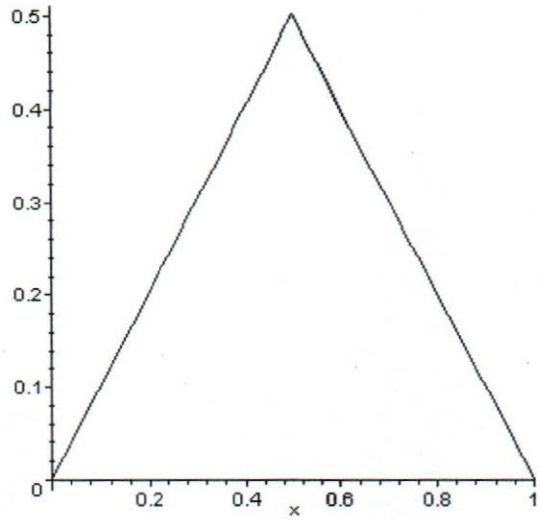
Observe como se van formando picos en la gráfica, hecho con MapleV

De hecho vamos a trabajar con una versión simplificada del ejemplo de Weierstrass debida al matemático holandés B. Van der Warden[1]. En primer lugar definimos la función $\{x\}$ para cualquier real x como *la distancia de x al entero más próximo a x*. Por ejemplo, $\{-3\} = 0, \{\pi\} = \pi - 3$, etc. Listamos algunas de las propiedades de la función $\{x\}$:

- $\{x\}$ es continua
- $\{x\}$ es periódica de periodo 1, esto es $\{x+1\} = \{x\}$ para cualquier x
- Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $\{x\} = x$, caso que $\frac{1}{2} < x \leq 1$ se tiene $\{x\} = 1 - x$
- Para cualquier real x se tiene que $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Hagamos el gráfico de la función $\{x\}$, como es periódica de periodo 1 sólo lo haremos en el intervalo $[0, 1]$.

[1]Este matemático publicó en 1930 un tratado de álgebra muy importante, *Moderne Algebra*



DEFINICIÓN 135. La función de Van der Warden está dada por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$$

para cualquier $x \in [0,1]$.

Demostremos en primer lugar que la función de Van der Warden es continua. Usaremos de manera crucial el criterio M de Weierstrass.

TEOREMA 136. *La función f de Van der Warden es continua en cualquier punto $x \in [0,1]$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que para cada n la función $f_n(x) = \frac{\{10^n x\}}{10^n}$ es continua en $[0,1]$. Por otro lado,

$$f_n(x) = \frac{\{10^n x\}}{10^n} \leq \frac{1}{10^n}$$

Al ser la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ convergente, se tiene, por el criterio$M$ de Weierstrass, que la serie $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$ define una función en $[0,1]$ y aún más, la convergencia es uniforme. Pero cada suma parcial $S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$ representa a una función continua por ser una suma finita de funciones continuas. Luego, aplicando el resultado que nos dice que convergencia uniforme de una serie de funciones continuas es una función continua, tenemos que f es continua en $[0,1]$. □

Vamos ahora a demostrar que la función f de Van der Waarden no es diferenciable en cualquier punto $a \in [0,1]$. El plan para hacer la demostración es encontrar una sucesión h_m que tiende a cero cuando m tiende a infinito y para la cual se tiene

$$\lim_{h_m \to 0} \frac{f(a+h_m) - f(a)}{h_m}$$

no existe. Empecemos con un par de lema bastante sencillos.

LEMA 137. *Si tenemos una sucesión numérica a_n con cada a_n entero y ella es convergente entonces a_n debe ser constante a partir de algún $n = N_0$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si p, q son enteros *distintos* entonces $|p - q| \geq 1$ de donde si la sucesión converge es porque, necesariamente, los términos de la misma se hacen iguales a partir de algún momento. □

LEMA 138. *Si consideramos la suma $S_k = \sum_{n=0}^{k} \pm 1$ entonces para distintos valores de k, S_k es siempre un entero y de k a $k+1$ se alterna la paridad.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente cualquier S_k es un entero. Observe que si le sumamos o restamos uno a un número par se obtiene un número impar. Lo mismo ocurre si le sumamos o restamos uno a un impar entonces se obtiene un número par. Eso concluye la demostración. □

Vamos a enunciar el resultado más importante de esta sección.

TEOREMA 139. *La función de Van der Warden $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$ no admite derivada en punto alguno de $[0, 1]$.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos un $a \in [0, 1]$, si trabajamos en base 10 se tiene que $a = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots$ con $a_i \in \{0, 1, 2, 3, \cdots, 9\}$ .Para evitar ambigüedades, si a admite dos representaciones decimales distintas tomaremos siempre la representación finita de a,es decir la representación decimal que se hace 0 a partir de alguna posición decimal. Claramente, $10^n a = entero + 0, a_{n+1} a_{n+2} \cdots$. Tomamos la sucesión de los h_m como $h_m = 10^{-m}$ si $a_m$no es 4 o 9 y $h_m = -10^{-m}$si $h_m = 4$ o 9. El lector entenderá la razón de estas distinciones muy pronto. Debemos calcular el cociente incremental

$$\frac{f(a + h_m) - f(a)}{h_m}$$

Pero, $\frac{f(a+h_m)-f(a)}{h_m} = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} \frac{\{10^n(a+h_m)\}-\{10^n a\}}{h_m} = \sum_{n=1}^{\infty} \pm 10^{m-n}(\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\})$. La serie es en realidad una suma finita ya que si $n \geq m$ se tiene que $10^n h_m$ es entero y luego, por ser $\{x\}$ periódica de período 1, $\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\} = 0$. Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pm 10^{m-n}(\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\}) = \sum_{n=1}^{m-1} \pm 10^{m-n}(\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\})$$

Por otro lado, $10^n a = entero + 0, a_{n+1} a_{n+2} \cdots$ y $10^n (a + h_m) = entero + 0, a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_m \pm 1 a_{m+1} \cdots$ Aquí vemos la necesidad de escoger $h_m = -10^{-m}$ si $a_m = 9$ ya que de lo contrario la segunda ecuación no sería cierta. Supongamos ahora que

$$0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \cdots \leq \frac{1}{2}$$

Entonces

$$0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \cdots a_m \pm 1 a_{m+1} \cdots \leq \frac{1}{2}$$

Ya que hemos escogido $h_m = -10^{-m}$ si $a_m = 4$, de lo contrario la desigualdad fallaría en el caso que $m = n + 1$. Luego,

$$\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\} = \pm 10^{n-m}$$

Es claro que $(\pm 1)(\pm 1) = \pm 1$ y que $10^{n-m} 10^{m-n} = 1$,de aquí que $\sum_{n=1}^{m-1} \pm 10^{m-n}(\{10^n(a + h_m)\} - \{10^n a\}) = \sum_{n=1}^{m-1} \pm 10^{m-n}(\pm 10^{n-m})$, pero esta última suma es $\sum_{n=1}^{m-1} \pm 1 = S_m$ que diverge cuando $m \to \infty$. El caso $0, a_{n+1} a_{n+2} \cdots > \frac{1}{2}$ se maneja igual. □

6.4. La serie de Taylor: un ejemplo negativo

En nuestros cursos iniciales de Cálculo surge un concepto importante y es el de serie de Taylor de una función f en el punto $x = x_0$ o el de serie de Maclaurin de una función f en $x = 0$.[2]Veamos estos desarrollos de manera formal. Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función infinitamente diferenciable, esta condición es necesaria porqué en la fórmula de la serie de Taylor aparecen las derivadas $f', f'', \cdots$.

DEFINICIÓN 140. La serie de Taylor de f en $x = 0$ es por definición la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

La suma parcial $S_k(x)$ de esta serie constituye *el polinomio de Taylor de grado* k de f. Es decir,

$$S_k(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$$

OBSERVACIÓN 141. Observe que el polinomio de Taylor de grado 1 es la función $f(0) + f'(0)x$ que corresponde a la recta tangente a f en $x = 0$.

No hemos hecho la afirmación que la serie converja a la función f, esto siempre es un problema delicado que aparece tanto en las series de Taylor como en las series de Fourier. Escribiremos más precisamente $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$. Recordemos algunas series de Taylor notables.

EJEMPLO 142. La función exponencial es sin duda la función más importante de la matemática. Ella tiene la interesante propiedad que $(e^x)' = e^x$. Luego, su serie de Taylor es

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

En este importante caso, si se puede escribir $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$.

El siguiente ejemplo es muy bonito y recomendamos que el lector lo lea con atención ya que contiene la fórmula más hermosa de la matemática.

EJEMPLO 143. El lector recordará de su curso de Cálculo que las series para las funciones seno y coseno son

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \cdots \\ \cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

Se puede demostrar que las series de las funciones seno, coseno y exponencial son válidas en el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Luego, si tomamos x real e i la unidad imaginaria se tiene

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = \cdots$$

Luego, separando las partes reales e imaginarias de la igualdad anterior obtenemos el impresionante resultado

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

[2]De hecho fue Taylor el que descubrió lo que llamamos ahora serie de Maclaurin y Maclaurin lo que conocemos como serie de Taylor.

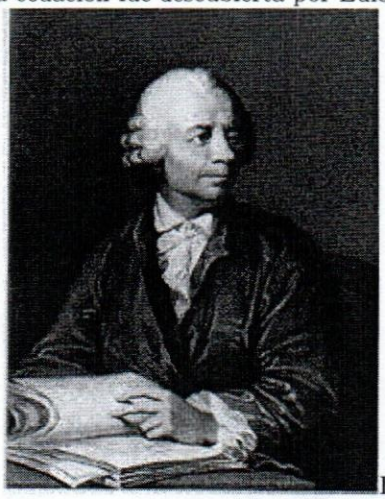
Ahora viene lo hermoso, hacemos $x = \pi$ en la identidad anterior y recordemos que $\cos \pi = -1$ y que sen $\pi = 0$ para obtener

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

La más hermosa fórmula de la matemática ya que en ella aparecen los cinco números cruciales en el desarrollo de nuestra ciencia y en sus aplicaciones:

1. El número 1, la unidad que genera todas las otras cantidades
2. El número 0, herencia de los mayas, que captura la ausencia de cantidad
3. El número π, que nos llega desde Grecia para expresar las medidas del círculo
4. El número e, la base de los logaritmos neperianos
5. El número i, la creación de los algebristas italianos para resolver la ecuación de tercer y cuarto grado

Esta ecuación fue descubierta por Euler, un artista en el manejo de las series.


Leonard Euler

Leonard Euler nacio en Basilea, Suiza en 1707. Apadrinado por la familia Bernoulli, los superó a todos convirtiendose en uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Su obra no ha sido completamente publicada y supera los 50 volumenes. Semejante contribución es imposible resumir y solamente recordaré que el concepto de función, la notación matemática, la hidrodinámica, la mecánica analítica, las ecuaciones diferenciales, el álgebra abstracta, la combinatoria,...en todos estos campos su contribución es esencial. Gran parte de su vida estuvo en Rusia, en la corte de Catalina La Grande, donde fue victima de bromas por su poca disposición al debate filosófico. Muere en 1783 en San Petersburgo.

¿Cómo podemos investigar si es valida la representación de una función por medio de su serie de Taylor? La manera natural es considerar la suma parcial de la serie de Taylor $S_k(x) = \sum_{n=0}^{k} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!}$ y escribir $f(x) = S_k(x) + E_k(x)$ donde E_k es la función error o resto de aproximar la función f por medio del polinomio de Taylor de grado k dado por S_k. La idea es tratar de mostrar que $E_k(x) \to 0$ si $k \to \infty$. Observemos lo siguiente

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$$

Integremos ahora por partes $\int_0^x f'(t)dt$ tomando $u = f'(t) \Rightarrow du = f''(t)dt$ y $dv = dt \Rightarrow v = t - x$. Luego

$$f(x) = f(0)+f'(t)(t-x)\Big|_0^x - \int_0^x f''(t)(t-x)dt = f(0) + f'(0)x + \int_0^x f''(t)(x-t)dt$$

Volvamos a integrar por partes, tomando $u = f''(t) \Rightarrow du = f''(t)dt, dv = (x-t)dt \Rightarrow v = -\frac{(x-t)^2}{2}$. Obtenemos

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \int_0^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt$$

Si continuamos este proceso obtendremos la importante fórmula

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

Luego, si tenemos una función infinitamente derivable se puede escribir $f(x) = S_n(x) + E_n(x)$ donde S_n es el polinomio de Taylor de grado n de f y E_n es el error o resto asociado a tomar la aproximación dada por el polinomio de Taylor de grado n. En particular,

$$E_n = \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$$

Usualmente en nuestro curso de Cálculo aplicamos integración por partes de otra forma, tratando que las integrales se vuelvan más sencillas. Pero acá no, la integrales se vuelven más complicadas pero aparece el polinomio de Taylor y una representación del error, este lindo truco lo aprendí del matemático chileno-venezolano Gerardo Mendoza.

Vamos a desarrollar un bonito ejemplo que ilustra que la serie de Taylor tiene limitaciones para representar a cualquier función que sea diferenciable infinitas veces. Para muchos matemáticos del siglo XVIII, como Lagrange, las funciones se representaban por medio de una serie de potencias

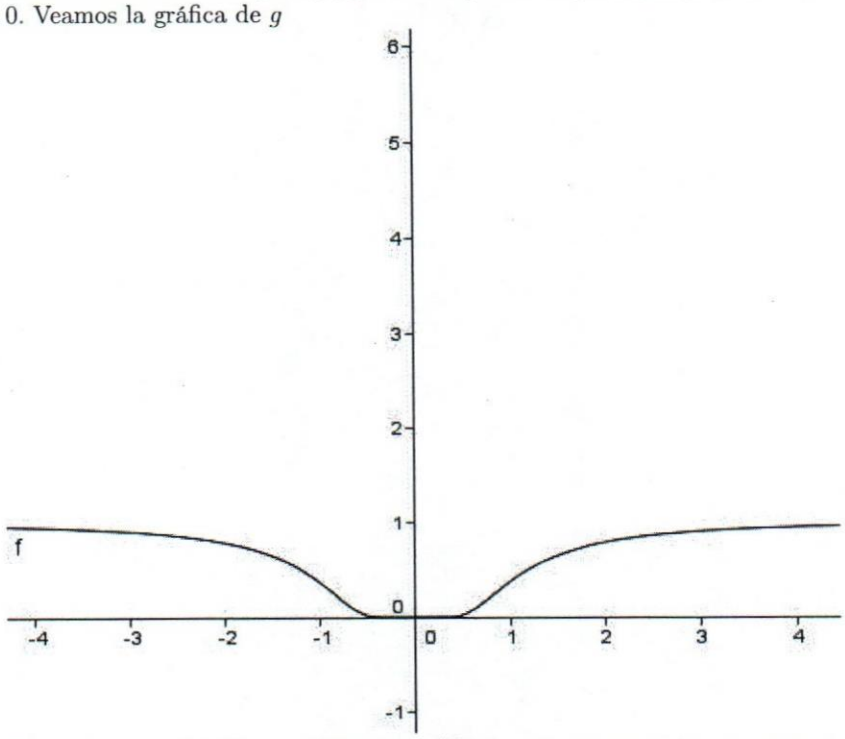
$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

La evolución del concepto de función es un tema apasionante.

Otros matemáticos pensaban que una función debe estar representada con una fórmula y sólo una fórmula en su dominio de definición. Se tardó en llegar al consenso que tenemos actualmente sobre el concepto de función. Las representación por medio de serie de potencias es insuficiente para caracterizar el concepto moderno de funciones real y sólo determinan una clase de ellas: las funciones analíticas. Veamo esto con un ejemplo importante. Consideremos la función

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Como el lector observa, $\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}=0$ y esto implica que g es continua en $x=0$. Veamos la gráfica de g



La gráfica es "muy plana" alrededor de 0.

Es un ejercicio del libro verificar que $g^{(j)}(0)=0$ para cualquier $j=0,1,2,\cdots$ donde $g^{(j)}$ denota la derivada de orden j de g. En particular la serie de Taylor de g es la función 0 ya que esta serie es, por definición,

$$g(0)+g'(0)x+\frac{1}{2!}g''(0)x^2+\cdots=0$$

Sin embargo, en cualquier punto x distinto del 0 se tiene que $g(x)\neq 0$. Luego, la serie de Taylor *nunca converge a la función dada salvo en el punto* $x=0$.

6.5. Reflexiones sobre la formalización del análisis

Hablar sobre la formalización del análisis matemático ha sido una de las motivaciones para escribir este trabajo ya que deseamos inducir la reflexión del lector sobre este proceso. Consideramos muy importante que el futuro docente profundice en la necesidad de enunciar rigurosamente los conceptos de límite, número real e infinito. En términos generales, la formalización del análisis, puede ser vista como una vuelta al rigor que vemos en los *Elementos* de Euclides e impregna e influye desarrollos posteriores en álgebra, topología, entre otras áreas de la matemática.

Desde la aparición de los inconmensurables o irracionales en la escuela pitagórica y las paradojas de Zenon en la filosofía griega, los matemáticos y filósofos han intentado responder diversas preguntas. ¿Qué son los números reales? ¿Qué es lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño? ¿Qué significa el cambio instantáneo? ¿Qué significa la razón de cambio instantánea? Algunos de estos problemas fueron enfrentados de manera exitosa por los matemáticos griegos, por ejemplo, el

trabajo de Eudoxo sobre el manejo de las proporciones resuelve el problema de los irracionales. Pero en general el manejo del infinito y lo infinitamente pequeño, los problemas derivados de su uso y la noción de continuidad y cambio tuvieron que esperar por la aparición del Cálculo de Newton y Leibniz para ser enfrentados. En un proceso que duró casi dos siglos para establecer con propiedad las siguientes ideas:

- El concepto de función
- El concepto de límite y función continua
- La noción de derivada
- La integral de una función
- El concepto de número real
- El concepto de conjunto infinito

Vamos a describir brevemente este proceso. Desde el punto de vista moderno fue el arzobispo Berkeley quien señaló problemas en la fundamentación del Cálculo. La motivación de Berkeley, en mostrar deficiencias en el razonamiento matemático de Newton, era en gran medida religiosa. Debemos recordar que se iniciaba en el siglo XVIII la mayor explosión del conocimiento humano bajo el paradigma científico-matemático y esto causaba preocupación en las personas que se movían en el ámbito de la fe. La crítica de Berkeley está contenida en un ensayo titulado *El analista, o discurso dirigido a un infiel matemático* que fue publicado en 1734. Berkeley objeta el cálculo de fluxiones de Newton basado en los infinitesimales. Por ejemplo, en el cálculo de la derivada de $f(x) = x^2$ si pensamos que h es un infinitesimal formamos el cociente

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Un infinitesimal h se piensa como algo *mayor que* 0 pero menor que cualquier número real positivo p, esto es $0 < h < p$ para *cualquier* $p \in \mathbb{R}^+$. Luego el cociente anterior tiene sentido ya que no dividimos por 0. Pero

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Y ahora se concluye que la fluxión o derivada de x^2 es $2x$, es decir despreciamos el infinitesimal h respecto al número $2x$. Es decir, hay una manipulación con el infinitesimal h bastante sospechosa. Es 0 cuando me conviene y es distinto de 0 cuando me interesa. Además, un infinitesimal, y esto le molestaba al propio Newton, no satisface la propiedad arquimediana ya que $h < \frac{n}{m}$ para cualesquiera naturales n, m con $m \neq 0$. De aquí se deduce que $mh < n$ para cualesquiera n, m naturales y esto viola la propiedad arquimediana que dice que si $x > 0$ y sumamos $x + x + x \cdots + x$ un número suficiente de veces excedemos cualquier número positivo que tomemos. Estas objeciones de Berkeley eran difíciles de rebatir para los matemáticos de la época ya que eran justificadas. Sin embargo, el flujo de resultados que matemáticos como los Taylor, Maclaurin, Bernoulli, Euler, D'Alembert, Laplace y Lagrange entre otros encontraron, dejó de lado el problema de la fundamentación del análisis matemático. Quizás sean Maclaurin y Lagrange los únicos que colocan entre los problemas que los matemáticos deben enfrentar la fundamentación del análisis. En particular, Lagrange en una vuelta al espíritu griego desea evitar el infinito en análisis. Trata de fundamentar el mismo en el álgebra y en el desarrollo de Taylor. El lector puede ver en este capítulo que las funciones usuales del análisis matemático

admiten representaciones del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Esta representación asemeja a un polinomio "de grado infinito" y se presta para manipulaciones formales algebraicas. Pero lo más interesante para Lagrange es que este tipo de representación se puede hacer vía el Teorema de Taylor donde, como sabemos aparece un polinomio de grado n y el término de resto, es decir aparece una representación finita de la función que evita el concepto de serie de potencias. Los coeficientes del desarrollo están dados por la *derivada* que empieza de este modo a ser apreciada como una función, idea que le debemos a Lagrange. Lagrange entendía que el manejo adecuado del paso al límite era el problema central del análisis y quería evitarlo. Quería que el análisis fuera álgebra. Sin embargo, el programa de Lagrange tenía un inconveniente importante, la clase de funciones que admiten una representación como la que el buscaba es muy limitada, corresponden a lo que hoy denominamos funciones analíticas. El concepto de función es discutido por Joham Bernoulli, Euler, D'Alembert, Lagrange y Fourier entre otros en relación a las ecuaciones diferenciales. Es claro que la visión de Lagrange no encajaba con la necesidad impuesta por las aplicaciones. Para Bernoulli una función es "una cantidad formada por la combinación de alguna manera de una indeterminada y ciertas constantes". Esto lleva a pensar que una función está dada por una fórmula, lo cual sabemos que tiene graves limitaciones. Mucho más interesante es la discusión entre D'Alembert y Euler. Consideremos la ecuación de ondas en una dimensión

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

donde $f(x,t)$ es la función a determinar o incógnita, x es la variable que indica la posición y t el tiempo. Aquí, D'Alembert propone una solución de la forma

$$f(x,t) = g(x-ct) + g(x+ct)$$

que puede ser interpretada como la superposición de dos ondas, una que viaja a la izquierda con velocidad $-c$ y otra que viaja a la derecha con velocidad c. El lector puede aplicar la regla de la cadena para verificar que f satisface la ecuación de ondas. Una vez propuesta esta solución D'Alembert exige una serie de condiciones a la función g que a Euler le parecen, desde el punto de vista físico, excesivas. Comienza una fructífera discusión sobre el concepto de función que podemos considerar sintetizada en la definición, muy próxima a la moderna, que da Euler "*si algunas cantidades dependen de otras cantidades de forma que si estas cambian las primeras también lo hacen. Esta definición se aplica de manera muy amplia e incluye todas las formas en la cual una cantidad queda determinada por otra, luego, si x denota una cantidad variable, entonces cualquier cantidad que dependa en cualquier forma, o que sea determinada por x, se denomina función de x*". Esta era la definición que se necesitaba para poder trabajar con funciones definidas por medio de reglas de correspondencia como la función de Heavyside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Anteriormente los matemáticos pensaban que dar una función equivalía a dar *una única fórmula o expresión analítica de correspondencia* lo que eliminaba poder

utilizar funciones como la anterior. En el ámbito de las series de Fourier hubo otra discusión importante sobre las ideas de función y convergencia que no voy a discutir pero que son la génesis de la teoría de cardinales de Cantor.

Sin embargo, el punto crucial del proceso de formalización está centrado en el concepto de límite. Los griegos sin duda alguna utilizaron procesos que involucraban el paso al límite. Eso es notable en el trabajo de Arquímedes de aproximación del número π y de su cuadratura del segmento de parábola. Arquímedes también usó una versión del principio de Cavalieri para el cálculo del volumen de la esfera y debe ser considerado el padre del Cálculo Integral. Al aparecer el Cálculo de Newton y Leibniz el concepto de límite es la idea central que debe ser definida. Leibniz enfrenta el problema de definir el límite mediante la introducción de los infinitesimales dh. Estas cantidades son más pequeñas que cualquier número positivo pero no son iguales a 0. Por ejemplo, decir que una función f es continua en $a \in \mathbb{R}$ equivale a decir que $f(a+dh) - f(a)$ es un infinitesimal si dh lo es. En el caso de la derivada Leibniz usaba la representación geométrica del triangulo dx, dy. Newton se dio cuenta que existían problemas con los infinitesimales[3] y prefería pensar de manera cinemática, es decir el h decrece de forma uniforme hacia a 0 y vemos cual es el comportamiento de $f(a+h) - f(a)$ para la continuidad y de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para la derivada. Sin embargo, sus métodos son intuitivos o apelan a lo físico. Es el trabajo extraordinario de Cauchy y de Bolzano lo que permite definir de manera precisa el concepto de límite. Bolzano decía que si $f(x) - L$ se podía hacer más pequeño que cualquier cantidad siempre que $x - a$ fuese lo suficientemente pequeño entonces el límite de f en a es L. Es por el trabajo de Weierstrass que aparecen los conocidos cuantificadores pero en esencia la definición de Cauchy y Bolzano es impecable. Su trabajo lo podemos resumir en la expresión $\epsilon - \delta$ que hemos aprendido en nuestros cursos de Cálculo, decir que el límite de f en el punto a es equivalente a L equivale a

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \text{tal que si } 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Una expresión que debemos recordar como decía Spivak como si fuese un poema. El trabajo de ambos autores es alrededor de 1820. También les debemos a Cauchy y Bolzano las primeras demostraciones formales del Teorema del Valor Medio, básico resultado del análisis matemático. Para Cauchy ya no hay metafísica en el concepto de derivada, la derivada es sencillamente un límite que ya se había definido formalmente. Cauchy también emprende la construcción de la integral pero hay ciertas lagunas en su trabajo, lagunas que se llenarán con el trabajo de Riemann, Darboux y Heine.

[3]Sin embargo, a comienzo de los sesenta en el siglo XX el matemático Abraham Robinson demostró que el uso de los infinitesimales se puede formalizar.

Agustin-Louis Cauchy

Nació en 1789 en París y fue un extraordinario matemático francés cuyo labor no se resume en la formalización del análisis matemático y la creación de un enfoque de la variable compleja basado en la fórmula integral que lleva su nombre. Su trabajo recibió gran influencia de ese portento matemático que fue Joseph-Louis Lagrange. Le debemos también a Cauchy la primera definición de integral y el análisis de sus propiedades. Destaca en álgebra abstracta estudiando los grupos de permutaciones que ya había señalado Lagrange como la clave para entender el problema de la solubilidad de ecuaciones polinómicas mediante radicales. Publica aproximadamente 600 memorias sobre distintos temas. De carácter reservado y conservador, defendió la monarquía en Francia lo que le trajo diversos problemas entre ellos que tuvo que ir al exilio varias veces. También era un ferviente católico. Muere en Sceaux en 1857.

Un poco posterior es la construcción formal de los números reales, construcción que hemos expuesto en detalle en el capítulo 2 y que se debe a Dedekind. Hemos insistido que construcciones análogas fueron realizadas por Cantor y Weierstrass. Observe que en matemáticas la evolución histórica no es lineal ni se parece a lo que encontramos en un libro de texto: los números reales son uno de los últimos elementos a los cuales se les dota de rigor matemático. En los números reales el formalista David Hilbert alrededor de 1900 toma un camino interesante, da los axiomas que $\mathbb{R}$ verifica. Es un camino poderoso: el método axiomático. En el libro **[Spi]** de Spivak se demuestra que estos axiomas caracterizan unívocamente a los reales.

El infinito es de nuestra lista el último problema que se enfrenta en la fundamentación del análisis. En lugar del problema del infinito debiéramos hablar de la teoría de conjuntos (infinitos). El tema ocurre por primera vez en el trabajo de Cantor sobre unicidad en la representación de ciertas funciones mediante series trigonométricas y tiene un impacto crucial en matemáticas. Cantor deja de entender el infinito "como una manera de hablar" y lo ve como un objeto matemático que tiene propiedades, siendo la más importante su cardinal. Crea una aritmética del infinito y demuestra que el conjunto de partes de un conjunto A tiene un cardinal más grande que A. Plantea el importante problema de determinar el cardinal de

los números reales, la hipótesis del continuo. Hilbert escoge este problema, en su famosa conferencia en el Congreso de París de 1900, como el primer problema que debían enfrentar los matemáticos del siglo XX. Lo resuelven Godel y Cohen en un período de seis decadas desde su formulación por Hilbert. Sin embargo, nubarrones aparecieron en la teoría de conjuntos que señalaban que allí se tenía que poner unas bases sólidas para que no aparecieran paradojas y contradicciones. El propio Cantor encontró algunos problemas lógicos con su teoría de conjuntos. Es el trabajo de Frege, Von Neumann, Bernays, Hilbert pero sobre todo de Zermelo y Fraenkel que permite formalizar la teoría de conjuntos infinitos. Dicho lenguaje permea toda la matemática del siglo XX lo que permite afirmar con Hilbert "nadie podrá arrojarnos del Paraíso que Cantor creó para nosotros".

El lector puede apreciar el enorme esfuerzo que permitió aclarar ideas que pensamos básicas como la noción de número, de medida, de continuidad, entre otras. No es el trabajo de un hombre, es el trabajo de la comunidad matemática y sus mejores individuos. Es, ademas, un trabajo grandioso, ya que como señaló Poincare en el Congreso de Matemáticas de 1900 "en análisis se había alcanzado el rigor absoluto"

6.6. Ejercicios

1. Consideremos la función

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

demuestre que $g^{(j)}(0) = 0$ para cualquier $j = 0, 1, 2, \cdots$ donde $g^{(j)}$ denota la derivada de orden j de g.

2. La notación o (se lee o pequeña) de Landau se define así $f = o\,(g)$(se lee f es o pequeña g)en $t = t_0$ si y solo si

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

Demuestra que si f es derivable en t_0 con derivada $f'(t_0)$ entonces $f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0) = o(t - t_0)$.

3. Demuestra que si $f = o(g)$ en t y $g = o(h)$ en el mismo t entonces $f = o(h)$.
4. Demuestre que la sucesión S_n de sumas parciales es equivalente a $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.
5. Demuestre, usando inducción matemática, la fórmula $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt$.
6. Determine la serie de Taylor de las funciones $\sin(x), \cos x, \ln(x+1)$ y $\arctan x$.
7. Demuestre que si f definida en $[a, b]$ tiene una derivada continua f' definida en cualquier punto del mismo intervalo entonces

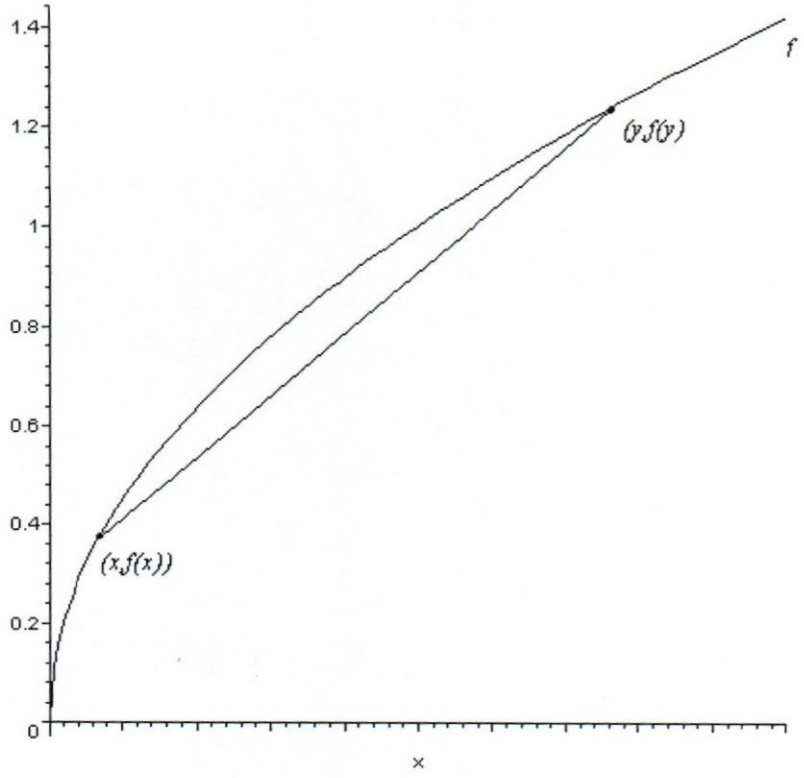
$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|$$

para cualesquiera puntos $x, y \in [a, b]$ .Sugerencia; aplique el Teorema de Lagrange.

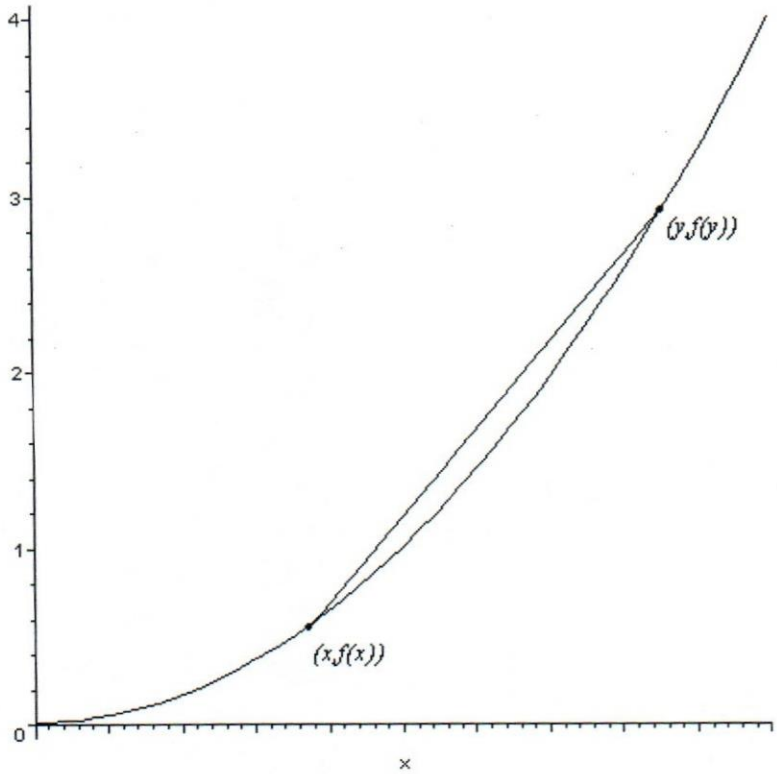
6.7. Proyecto Funciones Convexas y Desigualdad de Jensen

Nuestro contexto en este proyecto son las funciones reales de variable real definidas en un intervalo $[a, b]$. Tomaremos la siguiente definición de función convexa.

DEFINICIÓN 144. Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se denomina convexa si dados dos puntos cualesquiera $x, y \in [a, b]$ la gráfica de f entre x e y queda encima del segmento de extremos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$.



En la primera parte del proyecto le solicito al lector que busque entre las funciones que conoce ejemplos de funciones convexas. Una función *se denomina cóncava si* $-f$ *es convexa*. Es decir, la gráfica de f queda por debajo del segmento de extremos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$.



Le pedimos al lector que de nuevo compile un grupo de ejemplos de funciones cóncavas. Debemos alertar que en algunos libros lo que he llamado función convexa corresponde a lo que en ellos se denomina función cóncava. Continuemos con las actividades del proyecto.

El lector debe demostrar que si f es convexa en $[a, b]$ entonces que para cualquier $x \in [a, b]$ se tiene

$$f(x) > f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Claramente esto implica que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \ a < x < b$$

entonces (el lector debe demostrarlo como parte del proyecto)

$$f(x) \geq f(b)\frac{x - a}{b - a} + (1 - \frac{x - a}{b - a})f(a)$$

Si llamamos $\beta = \frac{x-a}{b-a}$ y $\alpha = \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)$ demuestre que

$$\alpha+\beta=1,\alpha,\beta>0 \text{ y } x = \alpha a + \beta b$$

Luego,

$$f(\alpha a + \beta b) \geq \alpha f(a) + b f(b)$$

Sean ahora n puntos en la recta real $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. El lector debe probar que si $0 < \alpha_i < 1$ para $i = 1, 2, \cdots n$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ entonces

$$x_1 < \sum_{i=1} \alpha_i x_i < x_n$$

Ahora, usando inducción matemática y un bonito truco, que el lector debe descubrir, demuestre que

$$f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

siempre que f sea convexa y que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$. Este resultado es muy importante y es conocido como la *desigualdad de Jensen.*

Por ultimo, el lector debe recordar de su curso de Cálculo que para determinar si una función es cóncava o convexa en un intervalo estudiamos el signo de la derivada segunda, no entraremos en los detalles y remitimos al lector a **[Spi]**.

Capítulo 7

La integral de Henstock-Kurzweil o de calibre

Si el hecho de que un avión vuele o no depende de que una función involucrada en su diseño sea integrable Lebesgue pero no Riemann no volaría en ese avión. ¿Y usted?

Richard Hamming (1915-1998)

7.1. Introducción

Una de las motivaciones para escribir este libro es compartir con el profesor de matemáticas algunos desarrollos del análisis matemático del siglo XX. En un curso usual de Cálculo Diferencial e Integral en la licenciatura los temas y enfoques son propios del siglo XIX. Consideramos que es una obligación del profesor de matemáticas ampliar su formación tanto en análisis como en álgebra abstracta. Por ello, la introducción de una integral que cumpla el estándar moderno en matemática nos parece importante. Debemos señalar el lector que el proceso de integración es fundamental para el análisis matemático y que la integral de Riemann posee deficiencias que deben ser superadas. El enfoque usual para superar los problemas de la integral de Riemann pasa por la construcción de una nueva integral, la integral de Lebesgue. Pero esto implica hacer la construcción de la medida de Borel-Lebesgue sobre la recta real $\mathbb{R}$ y esto es un proceso técnico y delicado. Por ello, el enfoque alterno que ofrece la integral de Henstock-Kurzweil es ideal para el lector que ha estudiado la integral de Riemann. De hecho la integral de Henstock-Kurzweil es, en su definición, muy similar a la integral de Riemann pero tiene un alcance mayor. Para hacer este capítulo autocontenido hemos incluido una breve sección con los puntos más importantes de la construcción de la integral de Riemann o de Cauchy-Riemann como la podríamos llamar con justicia. Luego nos encargamos de exponer la construcción de Henstock y Kurzweil y damos las propiedades básicas de su integral. Por último, se expone el Teorema Fundamental del Cálculo que alcanza una mayor generalidad para la integral de Henstock-Kurzweil para esta integral f' siempre es integrable, un hecho notable que no ocurre ni para la integral de Riemann ni para la de Lebesgue.

7.2. Recordando la integral de Riemann

Vamos a repasar la construcción de la integral de Riemann ya que la integral de Henstock-Kurzweil es una integral a lo Riemann. La construcción de Riemann (y Cauchy) viene directamente de los griegos ya que Arquímedes cuadró la parábola de manera muy similar a lo que hace Riemann como una función arbitraria. Nuestro contexto es el intervalo $[a, b]$ donde tenemos definida una función f acotada. Una partición Σ del intervalo $[a, b]$ es una sucesión finita de puntos x_k con $k = 1, 2, \cdots, n$

que verifican

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Podemos pensar en una partición del intervalo $[a, b]$ como una colección de intervalos $J_i = [x_{i-1}, x_i]$ con $1 \leq i \leq n$ tales que

$$\bigcup_{i=1}^{n} J_i = [a, b]$$

y los J_i son disjuntos entre sí o a lo más se solapan o intersecan en un punto.

EJEMPLO 145. Consideremos el intervalo $[0, 1]$; la sucesión finita de números $x_0 = 0 < \frac{1}{2} = x_1 < 1 = x_2$ constituye una partición del intervalo $[0, 1]$. Invitamos al lector a que escriba esta partición usando intervalos. Otra partición del mismo intervalo $[0, 1]$ la constituyen los intervalos $I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $I_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$, $I_2 = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$. El lector debe indicar que sucesión finita de puntos determina esta partición

DEFINICIÓN 146. La norma de una partición Σ se define como

$$\|\Sigma\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|.$$

Es decir, la norma de Σ equivale a la mayor longitud de los intervalos que componen la partición. Es claro que $x_i - x_{i-1} \leq \|\Sigma\| \leq b - a$ y que si los $(J_i)_{i=1,2\cdots,n}$ constituyen una partición de $[a, b]$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |J_i| = b - a$$

donde $|J_i| = x_i - x_{i-1}$ denota la longitud del intervalo J_i.

Al ser la función f acotada en $[x_{i-1}, x_i]$ entonces f toma un valor ínfimo $m_i = \text{ínf}_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ y un valor supremo $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ en el intervalo J_i y podemos escribir

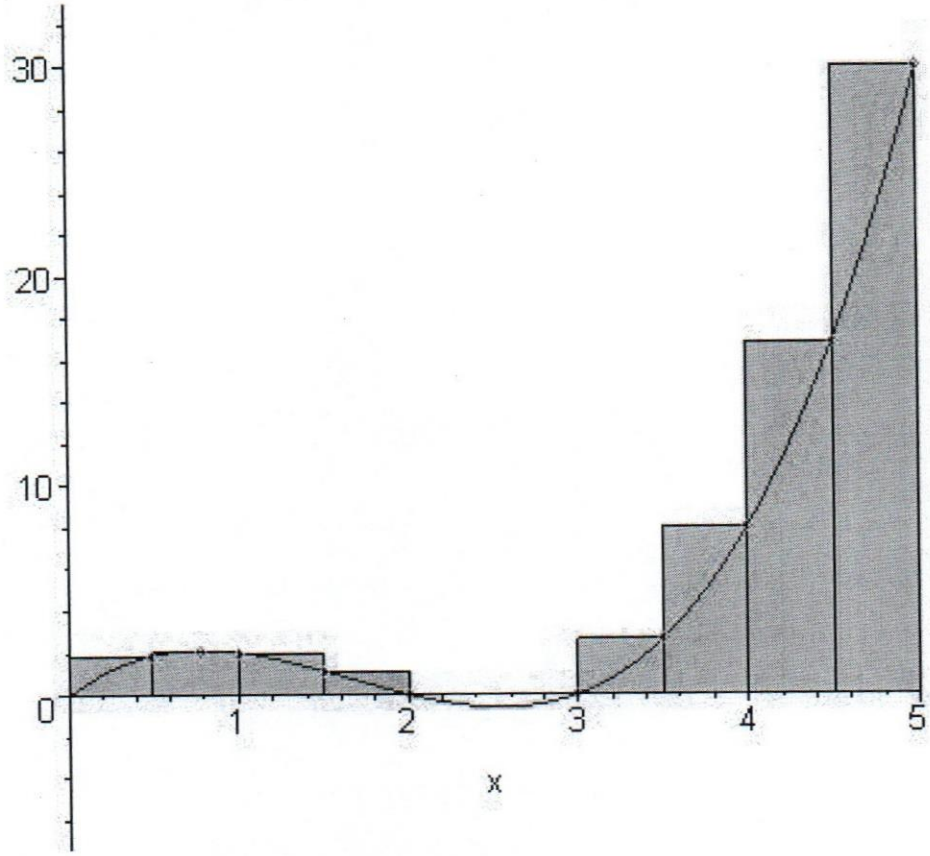
$$m_i \leq f(x) \leq M_i \text{ para todo } x \in J_i$$

DEFINICIÓN 147. Dada una partición Σ $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$ y una función f acotada de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ entonces la suma superior de Riemann $U(\Sigma; f)$, asociada a Σ y f, se define como

$$U(\Sigma; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

La suma inferior de Riemann $L(\Sigma; f)$ se define como

$$L(\Sigma; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$



Suma superior de Riemann

Es inmediato de la definición que $L(\Sigma; f) \leq U(\Sigma; f)$ ya que $m_i \leq M_i \Rightarrow m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1})$.

DEFINICIÓN 148. Una partición Σ del intervalo $[a, b]$dada por los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ es un refinamiento de la partición Γ de $[a, b]$ dada por los puntos $y_0 = a < y_1 < \cdots < y_k = b$ si y solo si

$$\{y_1, y_2, \cdots, y_k\} \subset \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$

El siguiente resultado tiene consecuencias interesantes y es básico en la construcción de la integral de Riemann. Pero antes un resultado elemental que servirá de lema y es útil en análisis.

LEMA 149. *Si A y B son conjuntos acotados con $A \subset B$ entonces*

$$\sup B \geq \sup A, \ \inf A \geq \inf B$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que cualquier cota superior de B es una cota superior de A, luego la menor cota superior de B es una cota superior superior de A. Esto implica que $\sup A \leq \sup B$. La otra desigualdad es similar. □

TEOREMA 150. *Si la partición Σ es un refinamiento de la partición Γ en $[a,b]$ entonces*

$$L(\Gamma; f) \leq L(\Sigma; f)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el caso en que Γ es dada por $y_0 = a < y_1 < \cdots < y_k = b$ y la partición Σ se obtiene agregando solamente un punto a Γ, esto es Σ es

$$y_0 = a < y_1 < \cdots < y_{j-1} < z < y_j < \cdots < y_k = b$$

donde z es el número real que hemos agregado a Γ. Por definición

$$L(\Gamma; f) = \sum_{i=1} m_i(y_i - y_{i-1})$$

donde m_i es el ínfimo de f en el intervalo $[y_{i-1}, y_i]$. Es claro, por el lema anterior, que si llamamos m'_j al ínfimo de f en $[y_{j-1}, z]$ y m'_{j+1} al ínfimo de f en el intervalo $[z, y_j]$ entonces

$$m_j \leq m'_j, m'_{j+1}$$

Luego, $m_j(y_j - y_{j-1}) \leq m_j(y_j - z + z - y_{j-1}) \leq m_j(y_j - z) + m_j(z - y_{j-1}) \leq m'_j(z - y_{j-1}) + m'_{j+1}(y_j - z)$. Al ser iguales el resto de los términos de las sumatorias de $L(\Gamma; f)$ y $L(\Sigma; f)$ se tiene el resultado en el caso que el refinamiento obtenido añadiendo un punto. El caso general se obtiene repitiendo el proceso de añadir un punto de manera iterada. □

Se demuestra de manera completamente análoga que si Σ es un refinamiento de Γ entonces

$$U(\Sigma; f) \leq U(\Gamma; f)$$

El siguiente corolario es importante.

COROLARIO 151. *Para cualquier par de particiones Σ, Γ se tiene que*

$$L(\Gamma; f) \leq U(\Sigma; f)$$

DEMOSTRACIÓN. Tomemos la partición Θ que se obtiene de unir las particiones Σ, Γ se tiene

$$L(\Gamma; f) \leq L(\Theta; f) \leq U(\Theta; f) \leq U(\Sigma; f)$$

□

Fijemos una partición arbitraria Σ_0 del intervalo $[a,b]$. Por el corolario anterior, para cualquier partición Γ vamos a tener que

$$L(\Gamma; f) \leq U(\Sigma_0; f)$$

Por tanto el conjunto $\{L(\Gamma; f)$ donde Γ es una particion arbitraria de $[a,b]\}$ está acotado superiormente y podemos definir

$$M = \sup\{L(\Gamma; f) \text{ donde } \Gamma \text{ es una particion arbitraria de } [a,b]\}$$

De manera análoga se puede definir

$$K = \text{ínf}\{U(\Gamma; f\} \text{ donde } \Gamma \text{ es una particion arbitraria de } [a,b]\}$$

y este ínfimo existe también. Es claro que

$$M \leq K$$

Si $M = K$ este valor común se define como la integral de Riemann de f en $[a, b]$ y este valor se denota por medio de

$$\int_a^b f(x)dx$$

TEOREMA 152. *Si f es continua en $[a, b]$ entonces $M = K$.*

DEMOSTRACIÓN. Como f es continua en un compacto entonces f es uniformemente continua en $[a, b]$. Demos un $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Tomemos cualquier partición $\Sigma : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} = b$ de norma menor que δ, entonces si m_i es el mínimo de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y M_i es el máximo de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces

$$M_i - m_i < \epsilon \text{ ya que } x_i - x_{i-1} < \delta$$

Luego,

$$|U(\Sigma; f) - L(\Sigma; f)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}(x_i - x_{i-1})(M_i - m_i)\right| < \epsilon(\sum_{i=0}^{n-1}(x_i - x_{i-1})) = \epsilon(b - a)$$

Pero

$$L(\Sigma; f) \leq K \leq M \leq U(\Sigma; f)$$

de donde $0 \leq M - K < \epsilon(b - a)$ y al ser $\epsilon > 0$ arbitrario se debe tener que $K = M$. □

7.3. El concepto de calibre y el lema de Cousin

La integral de Riemann se construye a partir del concepto de partición en el dominio de definición de la función. Para la integral de Henstock-Kurzweil usaremos el concepto de partición etiquetada que es una variación del concepto de partición. Las dos integrales tienen una construcción muy similar pero la integral de Henstock-Kurzweil es muy potente, de hecho más potente que la famosa integral de Lebesgue. De allí que sea la integral más adecuada para profundizar en el concepto de integral sin tener que recurrir a la idea de medida. Veamos el concepto de partición con marcas, etiquetas o etiquetada. *Decimos que la partición σ del intervalo $[a, b]$ dada por los intervalos $(I_k)_{k=0,1,\cdots,n-1}$ está marcada o etiquetada por los números t_k, $k = 0, 1, \cdots, n-1$ si y sólo si $t_k \in [x_{k-1}, x_k] = I_k$.* Los números t_k se denominan las *etiquetas o marcas de la partición.* Como siempre señalamos, las definiciones se deben ilustrar con ejemplos.

EJEMPLO 153. . Por último, los intervalos $J_0 = [1, 2]$, $J_1 = \left[2, \frac{5}{2}\right]$, $J_3 = \left[\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right]$, $J_4 = \left[\frac{11}{4}, 3\right]$ y las marcas $t_0 = \frac{3}{2}$, $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{21}{8}$, $t_3 = 3$ determinan una partición marcada del intervalo $[1, 3]$.

La siguiente definición es fundamental en nuestro trabajo, la conforma el concepto de *calibre* o *gauge*.

DEFINICIÓN 154. Una función $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ estrictamente positiva es un calibre o un gauge en el intervalo $[a, b]$.

Es decir, la condición para que la función δ sea un calibre en $[a, b]$ es que

$$\delta(t) > 0$$

para cualquier $t \in [a, b]$. La clase de todos los calibres es muy amplia y es lo que le da gran potencia al método de Henstock-Kurzweil ya que en la integral de Riemann los calibres que se toman son funciones constantes.

EJEMPLO 155. Cualquier función constante y estrictamente positiva como $\delta(t) = \frac{1}{2}$ es un calibre en el intervalo $[a, b]$. Esta clase de calibres son los que se usan en la construcción de la integral de Riemann como veremos adelante.

Un ejemplo de calibre no constante es muy sencillo de dar.

EJEMPLO 156. La función $\delta(t) = e^t$ es un calibre en cualquier intervalo ya que, como recordamos, $e^t > 0$ para cualquier t.

El lector debe revisar cuidadosamente nuestra próxima definición.

DEFINICIÓN 157. Decimos que una partición marcada σ del intervalo $[a, b]$ dada por los intervalos $(I_k)_{k=0,1,2,\cdots n-1}$ y con marcas $t_k \in I_k$ es $\delta-$fina o está calibrada por δ, donde δ es un calibre en $[a, b]$, si y sólo si

$$I_k \subset (t_k - \delta(t_k), t_k + \delta_k),\ k = 0, 1, 2, \cdots n - 1.$$

De esta inclusión se tiene que la longitud del intervalo I_k es menor que $2\delta_k(t_k)$. En general las marcas están determinadas por el calibre δ. El resultado siguiente es básico en la teoría de la integral de calibre, es conocido como el lema de Cousin. Antes de enunciarlo y demostrarlo vamos a hacer una observación interesante. Supongamos que tenemos un calibre δ definido en el intervalo $[a, b]$ y c es un punto interior de $[a, b]$. Claramente una partición (I_j) $\delta-$fina de $[a, c]$ y una partición (J_k) de $[c, b]$ que sea también $\delta-$fina se pueden combinar, de manera natural, en una partición (T_s) de $[a, b]$ que es $\delta-$fina.

TEOREMA 158. *Dado cualquier calibre δ definido en $[a, b]$ entonces existe una partición I_k de $[a, b]$ que es $\delta-$finita.*

DEMOSTRACIÓN. Razonemos por el absurdo. Supongamos que tenemos un calibre δ del intervalo $[a, b]$ que no tiene una partición δ-fina. Dividamos el intervalo en dos intervalos de igual longitud, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Entonces, al menos uno de los intervalos no admite una partición $\delta-$fina. Digamos que, sin perdida de generalidad, es el intervalo $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ el que no admite una partición $\delta-$fina. Continuamos este proceso dividiendo el intervalo $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ en dos intervalos de igual longitud. Ya sabemos que uno de ellos no puede admitir una partición δ-fina. El teorema de Cantor asegura que la intersección de la familia de intervalos que vamos construyendo es un punto $x_0 \in [a, b]$ en el cual el calibre toma el valor $\delta(x_0) > 0$. Claramente alguno de los intervalos que convergen al punto x_0 tiene longitud menor que $\delta(x_0)$ y debe estar contenido en $(x_0 - \delta(x_0), x_0 + \delta(x_0))$ contradiciendo que no admitía una partición $\delta-$ fina. □

El lema de Cousin se usa para demostrar de manera alternativa muchos resultados clásicos del análisis. Vamos a realizar otra demostración de la no numerabilidad de los números reales basada en el Lema de Cousin. Supongamos que el intervalo $[0, 1]$ fuese numerable y enumeremos sus elementos por medio de $r_0, r_1, r_2 \cdots$ .Construyamos el calibre δ que toma en $[0, 1]$ el valor $\delta(r_i) = \frac{1}{2^{i+2}}, i = 0, 1, 2, \cdots$. Sabemos que existe una partición $\Sigma : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_j = 1$ del

intervalo $[0,1]$ que es δ- fina. Sean $t_k, k = 0,1,2,\cdots,j-1$ las etiquetas de esta partición. Se tiene que

$$1 = \sum_{k=0}^{j-1}(x_{k+1} - x_k) \leq 2(\delta(t_0) + \delta(t_1) + \cdots + \delta(t_{k-1})) < 1$$

ya que la serie $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{2} < 1$. Este absurdo implica que no se pueden enumerar los elementos del $[0,1]$. El lector puede ver esto en detalle en **[Gas]**.

7.4. La integral de calibre y el teorema Fundamental del Cálculo

Vamos a realizar la construcción de la integral de calibre o de Henstock-Kurzweil y estudiar sus propiedades fundamentales. Nuestro contexto es el siguiente, consideramos una función

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}$$

Nos proponemos definir la integral H-K de f en el intervalo $[a,b]$ que denotaremos por $H - \int_a^b f(x)dx$. Recordamos que, al igual que la integral de Riemann, la integral H-K de una función f en un intervalo $[a,b]$ se define usando particiones del intervalo en cuestión. La gran diferencia es que la norma de la partición se sustituye por la noción más flexible de calibre. La idea es manejar las sumas de Riemann usando intervalos muy pequeños donde la función cambia mucho y con intervalos más largos donde la función tiene pocos cambios. Si tenemos una partición Σ del intervalo $[a,b]$ dada por los intervalos $(I_k)_{k=0,1,\cdots,n-1}$ y marcada o etiquetada por los números $t_k, k = 0,1,\cdots,n-1$ donde $t_k \in [x_{k-1}, x_k] = I_k$ *definimos la suma de Riemann asociada a la partición etiquetada* Σ *como*

$$S(\Sigma; f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Veamos la definición de la integral de Henstock-Kurzweil o simplemente integral H-K.

DEFINICIÓN 159. Decimos el número real L es la integral Henstock-Kurzweil de f en el intervalo $[a,b]$ y escribimos

$$H - \int_a^b f(x)dx = L$$

si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un calibre δ en $[a,b]$ tal que

$$|S(\Sigma; f) - L| < \epsilon$$

para cualquier partición Σ que sea δ-fina, esto es $\Sigma \preccurlyeq \delta$.

El siguiente resultado indica que de existir la integral H-K de f en el intervalo $[a,b]$ el valor de la misma es único.

TEOREMA 160. *Si* $H - \int_a^b f(x)dx = L$ *entonces* L *es único.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existan L y L' tales que $H - \int_a^b f(x)dx = L$ y $H - \int_a^b f(x)dx = L'$. Dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existen calibres δ, δ' tales que para cualesquiera

particiones etiquetadasΣ, Γ que sean $\delta-$fina y $\delta'-$fina respectivamente tendremos que

$$|L - S(\Sigma; f)| < \frac{\epsilon}{2}; |L' - S(\Gamma; f)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Es claro que $\delta'' = \text{mín}\{\delta, \delta'\}$ es un calibre (ejercicio) y que cualquier partición Θ que sea $\delta''-$fina (y esta partición existe) es a la vez δ y δ'-fina. Luego,

$$|L - L'| = |L - S(\Theta; f) + S(\Theta; f) - L'| \leq |L - S(\Theta; f)| + |L' - S(\Theta; f)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

y al ser $\epsilon > 0$ arbitrario se concluye que $L = L'$ □

Es decir, hemos demostrado que la integral $H - K$ está bien definida. Demostremos ahora que verifica la propiedad de linealidad.

TEOREMA 161. *Si f, g tienen integral H-K en el intervalo $[a, b]$ entonces $f + g$ tiene integral H-K en $[a, b]$ y aun más*

$$H - \int_a^b (f(x) + g(x))dx = H - \int_a^b f(x)dx + H - \int_a^b g(x)dx$$

DEMOSTRACIÓN. Demos un $\epsilon > 0$, sabemos que existe un calibre δ tal que para toda partición Σ que sea $\delta-$fina se va a tener que

$$\left| H - \int_a^b f(x)dx - S(\Sigma; f) \right| < \epsilon.$$

De manera similar, existe un calibre δ' tal que para toda partición Γ que sea $\delta'-$fina se tendrá

$$\left| H - \int_a^b g(x)dx - S(\Gamma; g) \right| < \epsilon$$

Sabemos que $\delta'' = \text{mín}\{\delta, \delta'\}$ es un calibre y sea Δ una partición $\delta''-$fina. Entonces Δ es a la vez δ y δ'-fina, luego

$$\left| H - \int_a^b f(x)dx + H - \int_a^b g(x)dx - S(\Delta, f + g) \right| =$$

$$\left| H - \int_a^b f(x)dx H - \int_a^b g(x)dx - S(\Delta, f) - S(\Delta, g) \right| < 2\epsilon$$

Así, $f + g$ es H-K integrable y

$$H - \int_a^b (f(x) + g(x))dx = H - \int_a^b f(x)dx + H - \int_a^b g(x)dx$$

□

Dejamos como un ejercicio al lector verificar que si f es H-K integrable en el intervalo $[a, b]$ entonces para cualquier α real tenemos que αf es integrable H-K en el intervalo $[a, b]$ y se tiene

$$H - \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Una de las propiedades más importantes de cualquier integral es la monotonía. Vamos a demostrarla en nuestro próximo teorema.

TEOREMA 162. *Si f es admite una integral H-K en el intervalo $[a, b]$ y $f \geq 0$ en el mismo intervalo entonces*

$$H - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier partición etiquetada Σ se tiene que la suma de Riemann $S(\Sigma; f)$ verifica

$$S(\Sigma; f) \geq 0$$

Luego el límite de las mismas que es la integral H-K de f debe ser positivo. □

Este resultado tiene consecuencia inmediata pero importante. Muchas desigualdades importantes en matemáticas se deducen del corolario que vamos a demostrar.

COROLARIO 163. *Si f, g son integrables H-K en el intervalo $[a, b]$ y $f \leq g$ en $[a, b]$ entonces*

$$H - \int_a^b f(x)dx \leq H - \int_a^b g(x)dx$$

DEMOSTRACIÓN. Tomemos la función $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ que es integrable en el sentido $H - K$ por el teorema de la linealidad de la integral. Además, $H - \int_a^b h(x)dx \geq 0$ por el teorema anterior. Luego, $0 \leq H - \int_a^b h(x)dx = H - \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx = H - \int_a^b g(x) - H - \int_a^b f(x)dx$. De aquí se obtiene el resultado. □

COROLARIO 164. *Si f es integrable H-K en el intervalo$[a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$ entonces*

$$m\,(b - a) \leq H - \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b - a)$$

Una pregunta natural es la siguiente: ¿extiende la integral de Henstock-Kurweil a la integral de Riemann? ¿en qué sentido lo hace? La pregunta tiene una respuesta muy clara, si f es integrable en el sentido de Riemann en el intervalo $[a, b]$ entonces f es integrable en el sentido Henstock-Kurzweil y

$$\int_a^b f(x)dx = H - \int_a^b f(x)dx.$$

Veamos el por qué de esto. Observemos con detalle que significa que la partición Σ

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tiene norma $\|\Sigma\| < \delta$. Si esto ocurre entonces cada intervalo de la partición $I_j = [x_j, x_{j+1}]\,, j = 0, 1, \cdots, n-1$ tiene longitud menor que δ. En particular, si tomamos el calibre constante $\delta(x) \equiv \delta$ entonces para cualquier etiqueta $t \in I_j = [x_j, x_{j+1}]$ tendremos

$$I_j = [x_j, x_{j+1}] \subset (t - \delta, t + \delta)$$

Esto implica que si etiquetamos Σ , con etiquetas cualesquiera, se verifica que $\Sigma \preccurlyeq \delta$. Luego, la integral de Henstock-Kurzweil extiende a la integral de Riemann.

Nuestra discusión nos lleva a plantearnos otra pregunta: ¿existen funciones que son integrables Henstock-Kurzweil que no lo son en el sentido de Riemann?. La respuesta es sí y constituye uno de los puntos favorables de utilizar la integral de Henstock-Kurzweil. Tomemos la función de Dirichlet definida en el intervalo $[0, 1]$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

Ya discutimos en la sección anterior que la integral de f no existe en el sentido de Riemann. Veamos que f es integrable en el sentido de Henstock-Kurzweil y que su integral vale 0. Debemos lograr que dado cualquier $\epsilon > 0$ encontrar un calibre $\delta(x) > 0$ tal que si Γ es una partición $\delta - fina$ entonces

$$S(\Gamma; f) < \epsilon$$

La idea es darle poco "peso" a las etiquetas racionales. Demos una numeración de $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ por medio de $r_0, r_1, \cdots$, definimos $\delta(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ya que el calibre puede ser "grande" en la parte buena de la función y definimos $\delta(x) = \frac{\epsilon}{2^{j+2}}$ si $x = r_j$. Tenemos que

$$S(\Gamma; f) = \sum f(t_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{t_k \in \mathbb{Q}} f(t_k)(x_{k+1} - x_k) + \sum_{t_k \in \mathbb{Q}^c} f(t_k)(x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \sum_{t_k \in \mathbb{Q}} f(t_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Pero $\sum_{t_k \in \mathbb{Q}} f(t_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{t_k \in \mathbb{Q}} (x_{k+1} - x_k) < \epsilon$ ya que $x_{k+1} - x_k < 2\delta(t_k)$ y como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \epsilon$ vemos que es correcta la afirmación. Todo esto permite afirmar que f es integrable H-K pero no lo es en el sentido de Riemann. El siguiente cuadro resume la situación.

3. Debo señalar que ya Euler había pensado la idea esencial de la integral de calibre o H-K que es usar intervalos pequeños cuando la función se comporta mal.

7.6. Ejercicios del capítulo

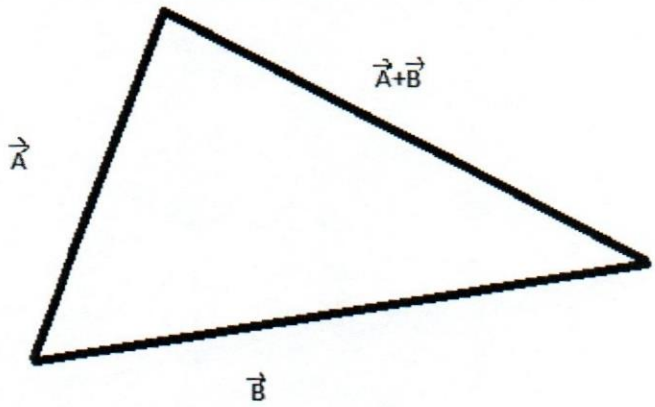
1. Demuestre que cualquier función en$[a, b]$ que es constante (con valor c) salvo en una cantidad numerable de puntos es integrable H-K y su integral vale $c(b-a)$.
2. Demuestre que si f es integrable en el sentido $H-K$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces$\int \alpha f = \alpha \int f$.
3. Demuestre que si δ es estrictamente positiva en $[0, \infty)$ entonces existe una partición Π de $[0, \infty)$que es $\delta-$fina.
4. Usando el lema de Cousin demuestre que que si S es infinito y acotado entonces S tiene un punto de acumulación.
5. Demuestre que si Γ es una partición $\delta-$fina de $[a, c]$ y Σ es una partición $\delta-$fina de $[c, b]$, $a < c < b$ entonces Γ, Σ se pueden combinar en una partición Θ de $[a, b]$ que es $\delta-$fina.
6. Demuestre que la suma de dos calibres δ, μ definidos en $[a, b]$ es un calibre en $[a, b]$. Muestre el análogo para un producto y un cociente de calibres.
7. Demuestre que si δ, δ' son calibres en el intervalo $[a, b]$ entonces mín $\{\delta, \delta'\}$ es un calibre.

7.7. Proyecto Desigualdades

Muchos matemáticos piensan que las desigualdades son el objeto a estudiar en análisis matemático. La primera desigualdad que debemos recordar es la desigualdad triangular

$$|a+b| \leq |a| + |b| \, , \; a \in \mathbb{R}, \, b \in \mathbb{R}$$

es una desigualdad elemental pero muy importante. Su nombre se deriva de la interpretación geométrica, el lector recuerda que en cualquier triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualquiera excede la longitud del tercer lado.



Su demostración fue propuesta como un ejercicio en el capítulo 1 del texto. La siguiente desigualdad, conocida como la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es la más

importante en matemáticas. Supongamos que $b_1, c_1, b_2, c_2, \cdots, b_n, c_n \in \mathbb{R}$ entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i c_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vamos a proponer al lector que demuestre la misma.

a) Sea $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ un polinomio de grado 2 con coeficientes reales, a_0, a_1 y $a_2 \in \mathbb{R}$, el lector debe dar condiciones sobre los coeficientes a_0, a_1 y a_2 para que $f(x) \geq 0$.

b) Considere $g(x) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - xa_i)(b_i - xa_i)$, observe que g es un polinomio en x de grado 2 y que $g(x) \geq 0$. Deduzca a partir de a) la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Estudie cuando la desigualdad se convierte en igualdad.

Otra desigualdad muy importante es la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica. Recordamos que si x_1, x_2 son son dos números positivos se define su media aritmética como

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

Por otro lado, su media geométrica es

$$\sqrt{x_1 x_2}$$

La desigualdad de la media aritmética y geométrica establece que si $x_1, x_2 > 0$

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Demuestre la misma estudiando para que valores de x_1, x_2 se tiene la igualdad.

La siguiente actividad propuesta es demostrar una generalización de la desigualdad anterior. Supongamos que tenemos $x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ entonces se cumple que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

c) Para demostrar la desigualdad anterior aplique logaritmo a ambos lados y use la convexidad de la función $\ln x$. Vea el proyecto de funciones convexas al final del Capítulo 6.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz tiene una versión para integrales. Suponga que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables H-K y lo mismo ocurre con f^2 y g^2 entonces

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

d) Para probar esto primero demuestre que fg es H-K integrable y luego considere $h = f - \lambda g$ aplicando un truco igual a lo hecho en la parte a).

Parte 2

Soluciones y respuestas a los problemas

CAPÍTULO 1

1. La función es inyectiva y sobreyectiva. Observe que $f(0) = 1$ y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, al ser la función f estrictamente creciente y continua se tiene el resultado.
2. Puede examinar
3. Planteamos la ecuación $y = \sqrt{x+1}$ y resolvemos en x, $x = y^2 - 1$, luego la inversa es $f^{-1}(y) = y^2 - 1$ con dominio $[1, \infty)$ y rango $\mathbb{R}^+$.
4. Vamos a hacerlo por inducción sobre la cantidad de objetos. El resultado es cierto si $n = 0$ ya que no tenemos nada que poner en las m cajas con $m > 0$. Supongamos que hemos demostrado el resultado para k objetos y cualquier $m > k$. Tomemos $k+1$ objetos y $m > k+1$ cajas. Tomemos un objeto y coloquemoslo en una caja. Nos quedan k objetos y $m > k$ cajas sin objetos. Por hipótesis inductiva, alguna de estas cajas debe quedar vacía si colocamos los k objetos. Luego, el resultado es cierto para $k+1$ objetos y por inducción vale para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
5. Los objetos del conjunto pueden ser etiquetados como $a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots a_n$. Definamos $\phi : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots a_n\}$,$\phi(j) = a_j$. Claramente, ϕ es una biyección.
6. Recordamos que listamos los elementos así $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots, k, -k, \cdots$. Para $k \geq 1$ y par ponemos $g(k) = \frac{k}{2}$. Para $k \geq 1$ e impar ponemos $g(k) = (-1)\frac{k-1}{2}$. Esto establece una biyección entre el conjunto $\mathbb{N}^*$ y el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$.
7. Sencillamente definimos $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = 2n$. Esto establece una biyección entre los números naturales y los números pares.
8. $\mathbb{Z}$ es equipotente con un conjunto infinito, luego debe ser un conjunto infinito también.
9. Claramente si yo uno un conjunto infinito A con cualquier conjunto C se tiene $A \subset A \cup C$ y por uno de los teoremas del texto $A \cup C$ es infinito. La siguiente afirmación es falsa: la intersección de conjuntos infinitos es infinito. Tome por ejemplo el conjunto de los números pares que es infinito e intersectemoslo con los números impares que es un conjunto infinito. La intersección es el conjunto vacío que carece de elementos.
10. Sea $x = 0,999999\cdots$ entonces $10x = 9,99999\cdots$. Luego $10x - x = 9,99999\cdots - 0,99999\cdots = 9 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$. Este resultado sorprende a muchos estudiantes de matemática, pero sólo deben recordar el proceso de cálculo de la fracción generatriz de una expresión decimal periódica.

CAPÍTULO 2

1. Si escribimos los racionales
2. Para ver que $\sqrt{3}$ es irracional usaremos la misma idea de aplicar reducción al absurdo suponiendo que $\sqrt{3}$ se puede escribir como

$$\sqrt{3} = \frac{n}{m} \Rightarrow 3m^2 = n^2$$

Apliquemos ahora el teorema fundamental de la aritmética y pongamos $m = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} t_3^{\alpha_3} \cdots t_n^{\alpha_n}, n = t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2} t_3^{\beta_3} \cdots t_n^{\beta_n}$ donde si algún factor primo t_i no aparece en n o en m le ponemos un exponente 0 en la descomposición. Luego,

$$3t_1^{2\alpha_1} t_2^{2\alpha_2} t_3^{\alpha_3} \cdots t_n^{2\alpha_n} = t_1^{2\beta_1} t_2^{2\beta_2} t_3^{2\beta_3} \cdots t_n^{2\beta_n}$$

Observe que el primo 3 aparece en el lado izquierdo con un exponente impar pero en el derecho va a aparecer con un exponente par. Esto es un absurdo que concluye la demostración.

3. Supongamos que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es racional. Esto es $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{n}{m}$, de donde $\sqrt{2}=\frac{n}{m}-\sqrt{3}$. Si elevamos ambos lados al cuadrado obtendremos $2=\left(\frac{n}{m}\right)^2+3-2\sqrt{3}\frac{n}{m}$ y despejando $\sqrt{3}$ tendríamos que $\sqrt{3}$ es un número racional.
4. Observe que si n no es un cuadrado entonces n admite en su descomposición en factores primos un primo elevado a un exponente impar. Use esto para construir la demostración.
5. Dado un polinomio $p=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ cualquiera definimos su altura como el número natural $a(p)=|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$. Claramente, si llamamos $A_n=\{p \text{ con altura precisamente } n\}$ entonces el conjunto $\mathbb{Z}[x]$ todos los polinomios con coeficientes enteros es

$$\mathbb{Z}[x]=\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

Pero cada A_n es un conjunto finito de donde $\mathbb{Z}[x]$ es numerable. Como cada polinomio de grado n tiene a lo más n raíces entonces el conjunto de los números algebraicos es numerable.
6. Al ser los reales $\mathbb{R}$ un conjunto no numerable y A el conjunto de todos los números algebraicos numerable, su complemento los números trascendentes debe ser un conjunto no numerable.
7. Un número r que no esté una cortadura α debe ser mayor que cualquier elemento de la cortadura ya que si existiese $u\in\alpha$ con $r<u$ entones por propiedades de cortadura $r\in\alpha$.
8. Lo dejamos al lector como fue propuesto en el texto. Cualquier duda consulte el libro de M. Spivak, *Calculus*.
9. La misma expresión del número $x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{10^n}$ invita a escribir la cortadura. Para cualquier n escribimos $A_n=\left\{\frac{p}{q}<\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{10^k}\right\}$ y tomamos $\alpha=\cup A_n$. Dejamos al lector demostrar que α es una cortadura.

CAPÍTULO 3

1. En cualquier intervalo de longitud positiva hay racionales e irracionales, luego no puede quedar incluido en $\mathbb{Q}$. Para ver esta afirmación recuerde que cualquier intervalo es equipotente con el conjunto de los números reales, luego no puede estar formado sólo por números racionales. Se tiene que $\mathbb{Q}$ no es abierto y su interior es el conjunto vacío $\emptyset$.
2. En el curso demostramos que la proposición era cierta para 2 conjuntos abiertos A,B contenidos en $\mathbb{R}$. Supongamos que esto sea cierto para k abiertos, esto es, si A_1 ,$A_2;\cdots A_k$ son abiertos entonces $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k$ es abierto. Veamos que ocurre para $k+1$ abiertos. Como

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{k+1}=(A_1\cap A_2\cap\cdots A_k)\cap A_{k+1}$$

entonces el resultado es un conjunto abierto ya que interceptamos dos abiertos, uno de ellos $A_1\cap A_2\cdot\cap A_k$ (por hipótesis inductiva) y el otro A_{k+1}.
3. Es claro que el conjunto formado por un punto x_0 es un conjunto cerrado, ya que su clausura es el mismo punto, esto es $\overline{\{x_0\}}=\{x_0\}$. Pero $\mathbb{Q}$ es

numerable, y sea $z_1, z_2 \cdots$ una numeración de $\mathbb{Q}$. Es decir podemos escribir $\mathbb{Q}$ como una unión numerable de puntos:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z_n\}$$

Pero $\mathbb{Q}$ no es cerrado ya que su clausura es todo $\mathbb{R}$. Otro ejemplo es tomar los intervalos cerrados $I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right], I_1 = \left[0, \frac{2}{3}\right], \cdots, I_n = \left[0, \frac{n+1}{n+2}\right], \cdots$. Es claro que $\cup_{n=0}^{\infty} I_n = [0, 1)$ y esta unión no es un conjunto cerrado.

4. Observe que 0 es un punto de acumulación del conjunto $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

pero $0 \notin \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$, luego $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$no es un conjunto cerrado.

5. Recordamos que $A \cup A' = \bar{A}$. Pero si x_0 es un punto de acumulación de A debe ser un punto de acumulación de B ya que $x_0 = \lim_{n\to\infty} y_n$ con $y_n \in A \subset B$. Luego $A' \subset B'$ y se tiene el resultado.
6. Recordamos que un conjunto es abierto si y sólo si coincide con su interior. Pero $\dot{A}$ es abierto, luego $\dot{\dot{A}} = \dot{A}$.
7. Un conjunto C es cerrado si y sólo si $\bar{C} = C$. Sea A cualquier conjunto y C un cerrado que contiene a A. Luego, $A \subset C$ y por el problema 5 $\bar{A} \subset \bar{C} = C$, luego la clausura es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A.
8. Veamos que y_n es una sucesión de Cauchy. Como $x_n - z_m \leq y_n - y_m \leq z_n - x_m$ es claro que

$$|y_n - y_m| \to 0$$

si $n, m \to \infty$. Al ser de Cauchy, y_n es convergente y la convergencia debe preservar las desigualdades, luego $\lim_{n\to\infty} y_n$ debe ser L.

9. Si (x_n) es una sucesión de términos positivos $x_n > 0$ y converge a L debemos ver que $L \geq 0$. Supongamos lo contrario, esto es $L < 0$. Podemos insertar un $\alpha < 0$ entre 0 y L, esto es $L < \alpha < 0$. Como los x_n se aproximan a L a partir de algún momento debemos tener que $x_n < \alpha < 0$ lo cual contradice la hipótesis que los x_n son números positivos.
10. Basta probar una de las leyes, por ejemplo que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, Tomemos un $x \in (A \cup B)^c$ entonces x no puede estar ni en A ni en B, Esto implica que $x \in A^c$ y $x \in B^c$, lo que equivale a decir que $x \in A^c \cap B^c$. Luego hemos demostrado que $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$. Falta ver que $A \cap B^c \subset (A \cup B)^c$. Sea $x \in A^c \cap B^c$, entonces x no está en A ni en B. Luego, x no puede estar en $A \cup B$ y debe estar por ende en su complemento.
11. Si A, B son acotados, existen r, r' positivos tales que

$$A \subset \{x \text{ tales que } |x| < r\}, \; B \subset \{x \text{ tales que } |x| < r'\}.$$

Tomemos ahora el más grande entre r y r', digamos que sea r. Es claro que $\{x \text{ tales que } |x| < r'\} \subset \{x \text{ tales que } |x| < r\}$. Luego, $A \cup B \subset \{x \text{ tales que } |x| < r\}$. Para ver la otra afirmación, partimos de $A \cap B \subset A$ de donde se tiene el resultado.

CAPÍTULO 4

1. Observe que $\mathbb{N}$ es igual a $\cup_{n=0}^{m} A_n$. Si cada $A_n, n = 0, 1, 2, \cdots, m$ fuera finito entonces $\mathbb{N}$ fuera finito lo cual es falso.

2. Sea K un conjunto finito, esto es $K = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$. Tomemos una sucesión $x_n \in K$. Por el teorema anterior, debe existir una subsucesión que toma siempre el mismo valor $y \in K$ y por ende es convergente a ese valor, esto demuestra que K es compacto.
3. Las raíces de cualquier polinomio es un conjunto finito por el teorema fundamental del álgebra, en el caso del problema un polinomio de grado 100 tiene a lo más 100 raíces, luego el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ con } p(x) = 0, \, p \text{polinomio con coeficientes reales de grado } 100\}$$

es finito y por ende compacto.
4. Observe que $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{2}{n}\right) = 1$ que es una de las soluciones de la ecuación $x^2 - 1 = 0$, luego el conjunto es cerrado. Pero como $\cos x$ está siempre entre -1 y 1 el conjunto es acotado, por Heine-Borel es compacto.
5. Basta ver que la unión de dos compactos es compacto. Pero por Heine-Borel basta ver que la unión de dos compactos es un conjunto cerrado y acotado. Pero cada compacto es cerrado y acotado y la unión de dos cerrados es un conjunto cerrado y el lector demostró que unión de conjuntos acotados es un conjunto acotado. El resultado es falso para uniones numerables, por ejemplo $\cup_{n=1}^{\infty}\left[0, 1 - \frac{1}{n+1}\right] = [0, 1)$ que no es compacto.
6. Al no ser acotada la sucesión x_n debe existir un x_{n_1} tal que

$$|x_{n_1}| > 1$$

De manera similar, debe existir un x_{n_2} con $n_1 < n_2$ tal que

$$|x_{n_2}| > 2$$

Seguimos la construcción y obtenemos una subsucesión x_{n_k} que verifica

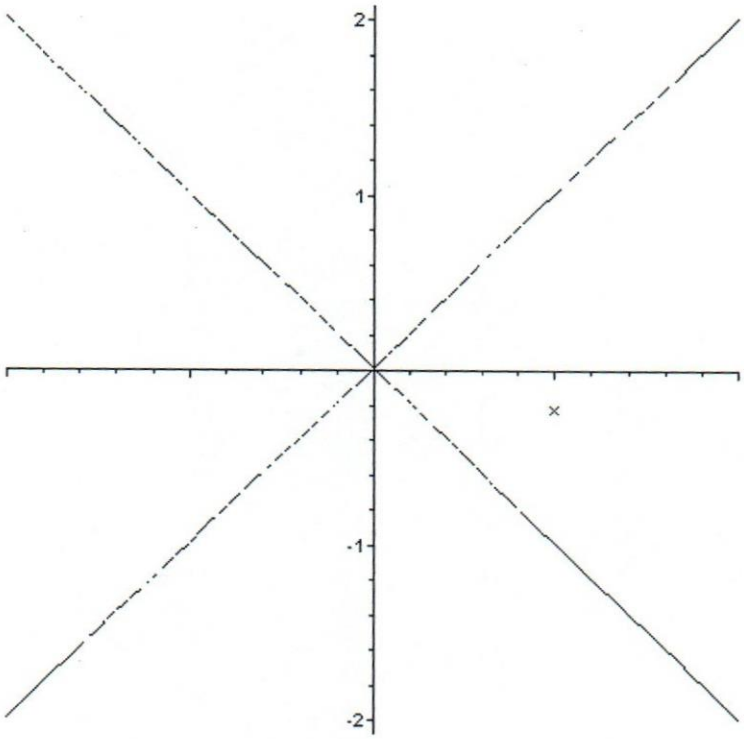
$$|x_{n_k}| > k$$

Es claro que $\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = \infty$.
7. Si consideramos los reales $\mathbb{R}$ y le adjuntamos ∞ obtenemos un conjunto en el cual cualquier sucesión x_n tiene una subsucesión convergente. En efecto, hay dos posibilidades: la primera es que x_n sea acotada y entonces el Teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que x_n tiene una subsucesión convergente. Si x_n es no acotada, aplicamos el ejercicio anterior para obtener una subsucesión que se va a ∞. En cualquier caso, la sucesión siempre admite una subsucesión convergente y el conjunto $\mathbb{R} \cup \infty$ es compacto.
8. Lo dejamos al lector ya que es una iteración de lo discutido en el texto.

CAPÍTULO 5

1. Tomemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$. Es decir, si x es racional $f(x)$ es x y si x es irracional $f(x) = -x$. Es claro que f es continua en 0 ya que si x_n es una sucesión que converge a 0 entonces $|x_n|$converge a 0 también. Veamos ahora que f es discontinua en cualquier otro punto x_0 que suponemos, sin perdida de generalidad positivo. Hay dos posibilidades, x_0 puede ser racional o x_0 es irracional. Si x_0 es racional entonces $f(x_0) = x_0$. Ahora x_0 puede ser aproximado por una sucesión z_n de números irracionales, por ejemplo $z_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ hace el trabajo. Pero, $f(z_n) = -x_0 - \frac{\sqrt{2}}{n}$, de donde $|f(x_0) - f(z_n)| = \left|2x_0 - \frac{\sqrt{2}}{n}\right| \geq 2\,|x_0| - \frac{\sqrt{2}}{n}$ y

esto se puede hacer mayor que $|x_0|$ para n suficientemente grande. Luego, $f$es discontinua en x_0. Un razonamiento similar se puede usar para tratar el caso que x_0 sea irracional, invitamos al lector a completar los detalles.



2. Sigamos la sugerencia del problema. Evaluemos $g(x) = f(x) - \gamma$ en a y en b. Obtenemos, $g(a) = f(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0$ y $g(b) = f(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0$. Apliquemos el teorema del valor medio que garantiza la existencia de un $\theta \in (a, b)$ tal que $g(\theta) = 0$. Pero $g(\theta) = f(\theta) - \gamma = 0 \Rightarrow f(\theta) = \gamma$ que era lo que queríamos demostrar.

3. El teorema de Brouwer o del punto fijo en el caso de una dimensión equivale a demostrar que la función $h(x) = f(x) - x$ tiene un 0 o una raíz en el intervalo $[0, 1]$. Si tal raíz existe y es, digamos, x_0 se tiene

$$h(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$$

Supongamos que h no se anule en $[0, 1]$, entonces $h(0) > 0$ y $h(1) < 0$. El lector debe decir por qué. Pero entonces h es una función continua que cambia de signo en $[0, 1]$. El teorema de Bolzano nos dice que h debe tener una raíz en el intervalo, luego existe un $x_0 \in (0, 1)$ tal que $h(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$ que es lo que queremos demostrar.

4.Veamos que el conjunto C no puede ser acotado. Si C fuera acotado entonces C fuera compacto y por ende $f(C)$ es compacto. De aquí se deduce, por el Teorema de Heine-Borel, que $f(C)$ es cerrado y acotado. Construimos nuestro ejemplo en el intervalo cerrado pero no acotado $[0,\infty)$. Tomemos la función $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

Es claro que $0\leq f(x)<1$ y que $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$. Como $f(0)=0$ se tiene que $f([0,\infty))=[0,1)$ que no es cerrado.

5.Sabemos que cualquier irracional z se puede aproximar por medio de racionales $x_n\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$, $n=0,1,2\cdots$, en el sentido que $\lim_{n\to\infty}x_n=z$. Luego d no puede ser continua en z, ya que $d(x_n)=1$ para cualquier $n=0,1,2,\cdots$ mientras que $d(z)=0$. Similarmente si $x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$ existe una sucesión de irracionales, por ejemplo $z_n=x\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$, que aproximan a z, pero $d(x)=1$ y $d(z_n)=0$, lo que implica la discontinuidad de f en cualquier punto del intervalo $[0,1]$.

CAPITULO 6

1. Consideremos la función

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

La función es continua en $x=0$ ya que $\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$. Su derivada en $x=0$ es

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$

Este límite es equivalente a $\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}x=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=0$ por la regla de L'Hopital o por el hecho que la función exponencial crece mucho más rápido que cualquier polinomio. Si derivamos g en otros puntos $\neq 0$ vemos que $g'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}(-2x^{-3})$, luego

$$g'(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}(-2x^{-3}) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Un Cálculo similar demuestra que $g''(0)=0$. Dejamos al lector concluir el cálculo de este caso. El caso general procede por inducción

2. Sabemos que $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=f'(t_0)\Rightarrow\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)-f'(t_0)(t-t_0)}{t-t_0}=0\Rightarrow f(t)-f(t_0)-f'(t_0)(t-t_0)=o(t-t_0)$.
3. Si $f=o(g)$ en un cierto t se debe tener que $\lim_{z\to t}\frac{f(z)}{g(z)}=0$. Por otro lado sabemos que $\lim_{z\to t}\frac{g(z)}{h(z)}$ si $g=o(h)$. Luego,

$$\lim_{z\to t}\frac{f(z)}{h(z)}=\lim_{z\to t}\frac{f(z)}{g(z)}\frac{g(z)}{h(z)}=\lim_{z\to t}\frac{f(z)}{g(z)}\lim_{z\to t}\frac{g(z)}{h(z)}=0$$

de donde $f=o(h)$.
4. Vamos a hacer la demostración por inducción, claramente $S_1=a_1$.Supongamos que para $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$. Por definición de S_{k+1} tenemos $S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}=a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}$ que es lo que teníamos que probar.
5. Esto fue hecho esencialmente en el texto, aplique inducción matemática y lea cuidadosamente la construcción del polinomio de Taylor.

6. Lo dejamos al lector ya que es un cálculo bastante elemental.
7. Al ser f' continua en $[a,b]$ entonces f'está acotada en ese intervalo, luego existe $M>0$ tal que $|f'(x)|\leq M$ en $[a,b]$. Al considerar el cociente
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$
con $x,y\in[a,b], x\neq y$ tenemos que por el Teorema de Lagrange debe existir un $\phi\in[x,y]$ tal que
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(\phi)\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(\phi)|\leq M\Rightarrow$$
$$|f(x)-f(y)|\leq M\,|x-y|$$
que es lo que deseábamos demostrar.

CAPITULO 7

1. Supongamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función que vale $f(x)=c$ salvo en $z_1,z_2,\cdots\in[a,b]$. En los puntos z_i suponemos que la función toma los valores y_i que podemos suponer sin pérdida de generalidad son no nulos. Demos $\epsilon>0$ y definimos el calibre δ que vale 1 en cualquier punto de $[a,b]$ salvo en $z_i, i=1,2,\cdots$ donde definimos $\delta(z_i)=\frac{\epsilon}{2^{i+1}|y_i|}, i=1,2,\cdots$. Entonces si π es una partición $\delta-fina$ entonces
$$|S(\pi;f)-c(b-a)|=\left|\sum f(t_i)(x_{i+1}-x_i)-c(b-a)\right|$$
Ahora, $\sum f(t_i)(x_{i+1}-x_i)$ se puede descomponer como $\sum f(t_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_{t_i\neq z_i}f(t_i)(x_{i+1}-x_i)+\sum_{t_i=z_i}f(t_i)(x_{i+1}-x_i)$. Es claro que
$$\left|\sum_{t_i=z_i}f(t_i)(x_{i+1}-x_i)\right|<\epsilon$$
Ademas, $\left|\sum_{t_i\neq z_i}f(t_i)(x_{i+1}-x_i)-c(b-a)\right|=\left|\sum_{t_i\neq z_i}c(x_{i+1}-x_i)-c(b-a)\right|<\epsilon$, luego
$$|S(\pi;f)-c(b-a)|<2\epsilon$$
Lo que demuestra el resultado.
2. Si $\alpha=0$ la relación es clara, supongamos que $\alpha\neq0$ entonces $\left|S(\alpha f;\Pi)-\alpha\int_a^b f\right|=|\alpha|\left|S(f;\Pi)-\int_a^b f\right|$lo que demuestra el resultado.
3. En cada intervalo $[n,n+1]$ con $n\in\mathbb{N}$ se tiene una partición Π_n de $[n,n+1]$ que es $\delta-$fina. Claramente $\cup_{n=1}^{\infty}\Pi_n$ es una partición $\delta-$fina de $[0,\infty)$.
4. Esto se deduce de la manera siguiente. Tomemos una partición
5. Esto es claro y lo dejamos al lector, los puntos de la nueva partición son los puntos que aparecen en las particiones de $[a,c]$ y de $[c,b]$ al igual que las etiquetas.
6. Al ser la suma de funciones positivas una función positiva el resultado debe estar claro para el lector. Argumente usted acerca del producto de funciones.
7. Observe que el mínimo de dos cantidades estrictamente positivas es una cantidad estrictamente positiva y de allí deduzca el resultado.

Bibliografía

[Bar] Bartle, R. G., Sherbert, D. R., *Introducción al Análisis Matemático.* Limusa Wiley, México, 2005.

[Bo] Boas, R., *A primer of real functions.* The Mathematical Asociation of America, New Jersey, 1960.

[Co] Cotlar,M.,Sadovsky,C., *Introducción al álgebra.* Eudeba, Buenos Aires, 1963.

[Di] Dieudonne, J., *Fundamentos de Análisis Moderno.* Reverte, Barcelona, 1975.

[Gas] Gascón, J. Another proof that the real numbers $\mathbb{R}$ are uncountable, *Amer. Math. Monthly* **122** (2015) 596-597

[Gra] Grabiner, J., *The origins of Cauchy's rigorous Calculus.* Dover, Mineola, 2005.

[Gue] Guenard,F. et al, *Pensar la matemática.* Editorial Tusquets, Barcelona, 2002.

[Haw] Hawking, S.,(Ed.) *A hombros de gigantes. Las grandes obras de la Fisica y la Astronomia.* Critica, Barcelona, 2003.

[Iri1] Iribarren, I., *Topologia de Espacios Métricos.* Limusa-Wiley, México, 1975.

[Iri2] Iribarren, I., *Un segundo curso de integración. La integral de Henstock-Kurzweil.* Equinoccio, Valle de Sartenejas, 2007.

[Ji] Jimenez,D. *¿Que tan reales son los números reales?* Creative space, 2014.

[Pi] Pietsch, A., *History of Banach Spaces and Linear Operators.* Birkauser, Boston, 2007.

[Spi] Spivak, M., *Calculus.* Reverte, Barcelona, 1975.

[Za] Zaldivar,F. *Fundamentos de álgebra.* Fondo de Cultura Económica, México, 2005.

[Qui] Diccionario Enciclopédico Quillet. Editorial Argentina Arístides Quillet, Buenos Aires, 1972.