



**UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL**

**Análisis Estructural de Conchas de Concreto Reforzado  
Empleadas como Cubiertas**

**TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

Presentado ante la

**UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO**

Como parte de los requisitos para optar al título de

**INGENIERO CIVIL**

**REALIZADO POR**

Curiel R., José D.

**TUTOR**

Silva M., José R.

**FECHA**

Junio, 2019



UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

Análisis Estructural de Conchas de Concreto Reforzado  
Empleadas como Cubiertas

Este Jurado, una vez realizado el examen del presente trabajo ha evaluado su contenido con el resultado de: Diecinueve (19).

JURADO EXAMINADOR

Firma:	Firma:	Firma:
Nombre: <u>José M. Velásquez</u>	Nombre: <u>José R. Silva M.</u>	Nombre: <u>Curiel R., José D.</u>

REALIZADO POR

TUTOR

FECHA



Curiel R., José D.

Silva M., José R.

Junio, 2019

# ÍNDICE DE CONTENIDO

Índice de tablas	IV
Índice de figuras	VI
Resumen	XV
Introducción	1
Capítulo I. El problema	2
Planteamiento del problema	3
Metodología	7
Tipo de investigación	7
Diseño de la investigación	7
Objetivos	10
Objetivo general	10
Objetivos específicos	10
Justificación	11
Alcance	11
Limitaciones	12
Capítulo II. Marco teórico	13
Antecedentes	14
Teoría de la elasticidad	14
Tensiones	15
Componentes de las tensiones	17
Fuerzas internas resultantes	18
Deformación	20
Componentes de la deformación	22
Ley de Hooke y relación de Poisson	26

Tensiones planas _____	29
Deformaciones planas _____	29
Tensiones en un punto _____	30
Ecuaciones diferenciales de equilibrio _____	33
Introducción a las conchas de concreto _____	37
Aspectos Generales de las Conchas de Concreto _____	43
Teoría general de las conchas _____	46
Ecuaciones que gobiernan la teoría general de las conchas _____	57
Análisis general de las conchas _____	68
Clasificación de las conchas _____	78
Análisis de elementos finitos _____	85
Capítulo III. Marco metodológico _____	88
Conchas cilíndricas _____	89
Conchas cilíndricas empleadas como cubiertas _____	91
Métodos de diseño _____	99
Solución analítica de una concha cilíndrica _____	101
Soluciones prácticas para el diseño de conchas cilíndricas _____	116
Comparación de los métodos de diseño de conchas cilíndricas _____	140
Criterios de diseño y de armado _____	179
Cúpulas _____	185
Clasificación _____	186
Definiciones _____	190
Cúpulas esféricas _____	192
Solución analítica de las cúpulas _____	199
Cúpula elíptica _____	217
Criterios de Diseño y Armado _____	223
Paraboloide hiperbólico _____	227

Tipos de paraboloides hiperbólicos	229
Teoría general de membrana	230
Paraboloide Hiperbólico de Bordes Rectos	232
Análisis de un paraboloide hiperbólico rectangular de bordes rectos	239
Criterios de diseño y armado	244
Conclusiones	249
Recomendaciones	251
Referencias bibliográficas	253

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Relaciones empleadas en la teoría clásica de conchas _____	45
Tabla 2. Tensiones originadas por fuerzas _____	48
Tabla 3. Coeficientes de conchas cilíndricas para funciones complementarias (par) _____	111
Tabla 4. Coeficientes de conchas cilíndricas para funciones complementarias (non) _____	112
Tabla 5. Resultante de tensiones de membrana para diferentes cargas _____	119
Tabla 6. Resultados obtenidos de la solución analítica _____	142
Tabla 7. Comparación de resultados obtenidos de la concha cilíndrica aislada larga sin vigas de borde _____	143
Tabla 8. Comparación de resultados obtenidos de la concha cilíndrica aislada larga con vigas de borde _____	151
Tabla 9. Comparación de las fuerzas obtenidas por medio de la solución analítica de una concha cilíndrica aislada larga sin y con vigas de borde _____	157
Tabla 10. Comparación de resultados obtenidos de la concha cilíndrica aislada corta sin vigas de borde _____	163
Tabla 11. Comparación de las fuerzas obtenidas por medio de una solución analítica de una concha cilíndrica larga con una concha cilíndrica corta _____	170
Tabla 12. Dimensiones de las conchas cilíndricas largas sin vigas de borde _	173
Tabla 13. Comparación de las fuerzas obtenidas por medio de una solución analítica en conchas cilíndricas sin vigas de borde de distintas dimensiones_	176
Tabla 14. Dimensiones típicas en conchas cilíndricas circulares _____	184
Tabla 15. Fuerzas y desplazamiento en una cúpula esférica cargada por fuerzas de borde uniformes alrededor de un círculo paralelo _____	201
Tabla 16. Comparación de resultados obtenidos por distintos métodos de una cúpula esférica sin anillo de borde _____	209

Tabla 17. Comparación de resultados obtenidos por distintos métodos de una cúpula esférica sin anillo de borde _____	214
Tabla 18. Resultados de las fuerzas paralelas en $kgf/m^2$ , para cada relación $y/b$ de cada cúpula _____	220
Tabla 19. Resultados de las fuerzas meridionales en $kgf/m^2$ , para cada relación $y/b$ de cada cúpula _____	221
Tabla 20. Dimensiones típicas de una cúpula esférica _____	226
Tabla 21. Dimensiones típicas de una cúpula esférica _____	239
Tabla 22. Comparación de tensiones obtenidas por medio de la teoría de membrana y por un análisis de elementos finitos en un paraboloides hiperbólico de bordes rectos _____	241

# ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Concha de concreto reforzado con forma de “concha de naranja” empleada en los accesos de la Ciudad Universitaria de Caracas _____	4
Figura 2. Curvas gaussianas, (a) concha con curvatura gaussiana positiva, (b) concha con curvatura gaussiana cero, (c) concha con curvatura gaussiana negativa _____	5
Figura 3. Algunos tipos de conchas construidas en concreto reforzado _____	6
Figura 4. Metodología para la elaboración del Trabajo Especial de Grado presentado en forma de diagrama de proceso _____	9
Figura 5. (a) Seccionamiento de un cuerpo; (b) diagrama de cuerpo libre _____	16
Figura 6. Tensiones sobre un elemento tridimensional, las cuales están actuando en sentido positivo _____	17
Figura 7. Sección aislada de un cuerpo, en donde se observa las fuerzas internas resultantes _____	19
Figura 8. Deformación de una barra prismática por la acción de una fuerza axial _	21
Figura 9. Deformación por corte de una placa rectangular _____	22
Figura 10. Elemento de dimensiones $dx$ , $dy$ , $dz$ _____	23
Figura 11. Variación del ángulo de los elementos OA y OB _____	24
Figura 12. Deformación de un elemento bidimensional: (a) deformación lineal; (b) deformación por corte _____	25
Figura 13. Elemento sometido a un estado de tensión biaxial _____	28
Figura 14. Variación del ángulo de los elementos OA y OB _____	30
Figura 15. Elementos de un plano de tensiones _____	32
Figura 16. Componentes de las tensiones en un plano inclinado _____	32
Figura 17. Elemento con distintas tensiones en cada una de sus caras _____	34
Figura 18. Forma general de un elemento que presenta tensiones y fuerza másica_	36

Figura 19. Experimento de una simple hoja de papel en donde se muestra la eficiencia de las estructuras resistentes por su forma, como es el caso de las conchas	38
Figura 20. Membrana bajo la acción de cargas externas, la cual es resistente a la tracción que genera la carga externa gracias a su curvatura	39
Figura 21. Nave de montaje en la planta ensambladora de Volkswagen en Morón, estado Carabobo, Venezuela	42
Figura 22. Instituto de hidrología, Technische Hochschule de Darmstadt, Alemania	42
Figura 23. Cubierta de las tribunas del hipódromo de La Zarzuela, España	43
Figura 24. Planteamiento del diseño actual de las conchas de concreto reforzado	44
Figura 25. Componentes característicos de un elemento infinitamente pequeño extraído de una concha	47
Figura 26. Fuerzas que actúan en un elemento infinitamente pequeño extraído de una concha	49
Figura 27. Elemento infinitamente pequeño extraído de una concha	50
Figura 28. (a) Resultante de tensiones y (b) pares de tensiones que actúan sobre un elemento infinitamente pequeño de la concha	58
Figura 29. (a) Elemento infinitamente pequeño después de la deformación y (b) vista del plano xy del elemento diferencial después de la deformación	60
Figura 30. Plano yz, deformación del elemento diferencial	63
Figura 31. (a) compatible con el estado de membrana; (b) incompatible con el estado de membrana; (c) efectos localizados de borde	71
Figura 32. (a) carga distribuida aplicada sobre la concha, (b) cambio de temperatura sobre la concha	72
Figura 33. (a) Carga puntual, (b) cambio en la geometría	73
Figura 34. (a) estado inicial de la concha bajo la acción de una carga externa distribuida; (b) teoría de membrana, en donde solo se toma en consideración la fuerza externa distribuida sin la flexión y/o torsión; (c) efectos de bordes en la cocha analizados por medio de la teoría de flexión	76

Figura 35. Orden de clasificación de las conchas _____	78
Figura 36. Tipos de curvas gaussianas que se presentan en las conchas _____	80
Figura 37. Conchas con superficie de revolución _____	81
Figura 38. Conchas con superficie de traslación _____	82
Figura 39. Conchas con superficie reglada _____	82
Figura 40. Conchas con superficies compuestas _____	83
Figura 41. Concha cilíndrica empleada como cubierta de la caseta de bombas y transformadores _____	90
Figura 42. Conchas cilíndricas múltiples pretensadas, empleadas como cubierta de las tribunas del Hipódromo La Rinconada _____	90
Figura 43. Superficie geométrica de una concha cilíndrica compuesta por dos directrices y las generatrices paralelas al eje del cilindro _____	91
Figura 44. Distintos tipos de miembros finales _____	93
Figura 45. Diferentes tipos de terminación de los bordes longitudinales de la concha cilíndrica _____	94
Figura 46. Naturaleza de la superficie de la concha cilíndrica _____	94
Figura 47. Disposición de las cubiertas contiguas _____	95
Figura 48. Aspecto de conjunto de las conchas cilíndricas _____	96
Figura 49. Vigas de borde, (a) concha larga, (b) concha corta _____	97
Figura 50. Conchas cilíndricas, empleadas como cubiertas de las áreas sociales del hotel Humboldt _____	98
Figura 51. Terminal de carga Union Pacific _____	98
Figura 52. Representación de las cargas por medio de series de Fourier _____	102
Figura 53. Elemento diferencial de una concha cilíndrica _____	103
Figura 54. Diagrama de tensiones del elemento diferencial de la concha cilíndrica _____	104
Figura 55. Tensiones longitudinales $\sigma_x$ actuando en el elemento diferencial de una concha cilíndrica _____	108

Figura 56. Sección transversal de la concha cilíndrica _____	123
Figura 57. Dimensiones de una concha cilíndrica _____	127
Figura 58. Dimensiones del elemento infinitamente pequeño perteneciente a una concha cilíndrica de sección transversal circular y las fuerzas que actúan sobre el elemento _____	128
Figura 59. Componentes en las direcciones $y$ y $z$ de la carga uniformemente distribuida sobre la superficie de la concha cilíndrica _____	130
Figura 60. Concha cilíndrica circular soportada en sus dos extremos por diafragmas, distribución de $N_x$ y $N_\phi$ _____	131
Figura 61. Distribución de las fuerzas en una concha cilíndrica circular _____	133
Figura 62. Resultante de tensiones sobre la directriz de una concha cilíndrica elíptica _____	135
Figura 63. Elementos que describen una directriz cicloidal _____	136
Figura 64. Distribución de fuerzas sobre la directriz de una concha cilíndrica cicloidal _____	137
Figura 65. Dimensiones de la concha cilíndrica circular – Ejemplo #1. _____	141
Figura 66. Modelo de la concha cilíndrica circular larga sin vigas de borde mediante elementos finitos _____	144
Figura 67. Fuerza longitudinal $N_x$ (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos _____	144
Figura 68. Fuerza transversal $N_\phi$ (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos _____	145
Figura 69. Fuerza cortante $N_x\phi$ (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos _____	145
Figura 70. Comparación de las fuerzas longitudinales $N_x$ obtenidas por distintos métodos _____	146
Figura 71. Comparación de las fuerzas transversales $N_\phi$ obtenidas por distintos métodos _____	146
Figura 72. Comparación de las fuerzas cortantes $N_x\phi$ obtenidas por distintos métodos _____	147

Figura 73. Comparación de los momentos transversales $M\phi$ obtenidos por distintos métodos _____	147
Figura 74. Dimensiones de la concha cilíndrica circular - Ejemplo #2 _____	149
Figura 75. Dimensiones de la viga de borde - Ejemplo #2 _____	150
Figura 76. Modelo de la concha cilíndrica circular larga con vigas de borde mediante elementos finitos, en donde se muestran las vigas de borde (color azul) modeladas como elementos tipo frame _____	152
Figura 77. Fuerza longitudinal $Nx$ (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos _____	152
Figura 78. Fuerza transversal $N\phi$ (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos _____	153
Figura 79. Fuerza cortante $Nx\phi$ (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos _____	153
Figura 80. Comparación de las fuerzas longitudinales $Nx$ obtenidas por distintos métodos _____	154
Figura 81. Comparación de las fuerzas transversales $N\phi$ obtenidas por distintos métodos _____	154
Figura 82. Comparación de las fuerzas cortantes $Nx\phi$ obtenidas por distintos métodos _____	155
Figura 83. Comparación de los momentos transversales $M\phi$ obtenidos por distintos métodos _____	155
Figura 84. Comparación de las fuerzas longitudinales $Nx$ (kgf/m) de una concha cilíndrica circular (a) sin viga de borde y (b) con vigas de borde; obtenidas del análisis de elementos finitos _____	158
Figura 85. Comparación de las fuerzas longitudinales $Nx$ obtenidas de una concha cilíndrica aislada larga sin y con vigas de borde _____	159
Figura 86. Comparación de las fuerzas transversales $N\phi$ obtenidas de una concha cilíndrica aislada larga sin y con vigas de borde _____	159
Figura 87. Comparación de las fuerzas cortantes $Nx\phi$ obtenidas de una concha cilíndrica aislada larga sin y con vigas de borde _____	160

Figura 88. Comparación de los momentos transversales $M\phi$ obtenidos de una concha cilíndrica aislada larga sin y con vigas de borde	160
Figura 89. Modelo de la concha cilíndrica circular corta mediante elementos finitos	164
Figura 90. Fuerza longitudinal $Nx$ (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos	165
Figura 91. Fuerza transversal $N\phi$ (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos	166
Figura 92. Fuerza cortante $Nx\phi$ (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos	167
Figura 93. Comparación de las fuerzas longitudinales $Nx$ obtenidas por distintos métodos	168
Figura 94. Comparación de las fuerzas transversales $N\phi$ obtenidas por distintos métodos	168
Figura 95. Comparación de las fuerzas cortantes $Nx\phi$ obtenidas por distintos métodos	169
Figura 96. Comparación de los momentos transversales $M\phi$ obtenidos por distintos métodos	169
Figura 97. Comparación de las fuerzas longitudinales $Nx$ obtenidas de una concha cilíndrica corta y una concha cilíndrica larga	171
Figura 98. Comparación de las fuerzas transversales $N\phi$ obtenidas de una concha cilíndrica corta y una concha cilíndrica larga	171
Figura 99. Comparación de las fuerzas cortantes $Nx\phi$ obtenidas de una concha cilíndrica corta y una concha cilíndrica larga	172
Figura 100. Comparación de los momentos transversales $M\phi$ obtenidos de una concha cilíndrica corta y una concha cilíndrica larga	172
Figura 101. Dimensiones de la concha cilíndrica #1	174
Figura 102. Dimensiones de la concha cilíndrica #2 y #5	174
Figura 103. Dimensiones de la concha cilíndrica #3	174
Figura 104. Dimensiones de la concha cilíndrica #4	175

Figura 105. Comparación de las fuerzas longitudinales $Nx$ obtenidas en conchas cilíndricas circulares de distintas dimensiones _____	177
Figura 106. Comparación de las fuerzas transversales $N\phi$ obtenidas en conchas cilíndricas circulares de distintas dimensiones _____	177
Figura 107. Comparación de las fuerzas cortantes $Nx\phi$ obtenidas en conchas cilíndricas circulares de distintas dimensiones _____	178
Figura 108. Comparación de los momentos transversales $M\phi$ obtenidos en conchas cilíndricas circulares de distintas dimensiones _____	178
Figura 109. Refuerzos principales en la concha _____	180
Figura 110. Arreglos de los tres tipos de acero de refuerzo en un cuarto de la concha cilíndrica _____	181
Figura 111. Diferentes tipos de conchas que pueden obtenerse del rebanamiento de una concha de revolución _____	188
Figura 112. El auditorio Kresge _____	189
Figura 113. Auditorio Kresge, Instituto Tecnológico de Massachussets _____	190
Figura 114. Elementos diferencial de una concha de revolución _____	191
Figura 115. Tipos de fuerzas desarrolladas en una cúpula esférica _____	192
Figura 116. Edificio Angloven _____	193
Figura 117. Distribución de fuerzas de membrana _____	195
Figura 118. Las fuerzas paralelas se encuentran en compresión en la zona superior de la concha hasta $51^{\circ}52'$ en donde empiezan estar a tracción; las fuerzas meridionales se encuentran siempre en compresión _____	196
Figura 119. Distribución de fuerzas de membrana debido a una carga uniforme sobre la proyección horizontal de la superficie de la cúpula esférica _____	197
Figura 120. Palacio de los deportes _____	198
Figura 121. Análisis de una cúpula esférica con tragaluz _____	198
Figura 122. Problema estructural al colocar solo apoyos verticales en una cúpula esférica _____	203

Figura 123. Distintos apoyos en una cúpula esférica _____	204
Figura 124. Tipos de apoyo en una cúpula esférica _____	205
Figura 125. Fuerza y momento que actúan en el anillo de borde _____	205
Figura 126. Desplazamientos que se generan entre la cúpula y el anillo _____	207
Figura 127. Modelo de la cúpula esférica sin anillo de borde mediante elementos finitos _____	210
Figura 128. Comparación de las fuerzas meridionales $N\phi$ obtenidas de una cúpula esférica sin anillo de borde _____	210
Figura 129. Comparación de las fuerzas paralelas $N\theta$ obtenidas de una cúpula esférica sin anillo de borde _____	211
Figura 130. Comparación del momento flexionante $M\theta$ obtenidos de una cúpula esférica sin anillo de borde _____	211
Figura 131. Modelo de la cúpula esférica con anillo de borde mediante elementos finitos, en donde se muestra el anillo de borde (color azul) modelado como elemento tipo frame _____	215
Figura 132. Comparación de las fuerzas meridionales $N\phi$ obtenidas de una cúpula esférica sin anillo de borde _____	215
Figura 133. Comparación de las fuerzas paralelas $N\theta$ obtenidas de una cúpula esférica sin anillo de borde _____	216
Figura 134. Comparación del momento flexionante $M\theta$ obtenidos de una cúpula esférica sin anillo de borde _____	216
Figura 135. Distribución de fuerzas meridionales y paralelas en una cúpula elíptica _____	219
Figura 136. Comparación de las fuerzas paralelas $N\theta$ obtenidas de una cúpula elíptica _____	222
Figura 137. Comparación de las fuerzas meridionales $N\phi$ obtenidas de una cúpula elíptica _____	222
Figura 138. Detallado del acero de una cúpula esférica con anillo de borde superior e inferior _____	225

Figura 139. Detallado del acero, en donde se aprecia la malla de refuerzo en la corona de la cúpula _____	225
Figura 140. Cubierta con forma de paraboloides elíptico _____	228
Figura 141. Pabellón de rayos cósmicos _____	228
Figura 142. Tipos de paraboloides hiperbólicos _____	230
Figura 143. Elemento diferencial de una concha de doble curvatura y su proyección en el plano horizontal xy _____	231
Figura 144. Superficie de un paraboloides hiperbólicos de bordes rectos _____	232
Figura 145. Paraboloides hiperbólicos en Denver _____	233
Figura 146. Paraboloides hiperbólicos del tipo paraguas invertido _____	234
Figura 147. Comportamiento estructural de un paraboloides hiperbólicos _____	235
Figura 148. Diversas combinaciones con paraboloides hiperbólicos de bordes rectos _____	236
Figura 149. Fuerzas que actúan en un paraboloides hiperbólicos de bordes rectos _	237
Figura 150. Sección de un paraboloides hiperbólicos de bordes rectos _____	237
Figura 151. Cubierta tipo paraguas invertido, compuesto por cuatro paraboloides hiperbólicos _____	240
Figura 152. Modelo por medio de elementos finitos de la cubierta del tipo “paraguas invertido” conformada por cuatro paraboloides hiperbólicos sin elementos de borde _____	242
Figura 153. Comparación de las tensiones máximas de tracción obtenidas por medio de la teoría de membrana y por un análisis de elementos finitos _____	242
Figura 154. Comparación de las tensiones máximas de compresión obtenidas por medio de la teoría de membrana y por un análisis de elementos finitos _____	243
Figura 155. Ubicación y dirección de las tensiones presentadas _____	243
Figura 156. Detallado del acero de refuerzo de un paraguas invertido _____	245
Figura 157. Paraboloides hiperbólicos cargado asimétricamente _____	246

# RESUMEN

Las conchas de concreto reforzado representan una solución óptima para aquellos casos en que se necesite cubrir distintas áreas empleando la menor cantidad de material y apoyos posibles. El desarrollo de las conchas de concreto reforzado empleadas como cubiertas tuvo su origen en Europa a principios del siglo XX, teniendo un gran auge en las décadas posteriores, hasta finales de la década de 1960 en donde empezó a perder popularidad debido al complejo análisis matemático que requiere y a los métodos constructivos, perdiendo así interés en los ingenieros. Las conchas delgadas poseen una gran resistencia gracias a su forma, además de ello, tienen la característica de tener un alto valor estético. Debido a los avances computacionales, hoy en día realizar el análisis de cualquiera tipo de concha es mucho más factible que década atrás, además se han desarrollado diversas técnicas constructivas haciendo posible la construcción de los distintos tipos de conchas de concreto reforzado. Por lo mencionado anteriormente, nace el interés por el desarrollo de este tema como Trabajo Especial de Grado, al ser las conchas de concreto reforzado estructuras con ventajas tanto estructurales como económicas y con un elevado valor estético; por otra parte, es un tema que no es tratado en los distintos cursos de concreto reforzado o proyectos estructurales siendo desconocido por los nuevos ingenieros y tampoco se presentan criterios en cuanto al diseño de las conchas de concreto reforzado en la norma venezolana de Proyecto y Construcción de Obras en Concreto Estructural, FONDONORMA 1753:2006.

# INTRODUCCIÓN

Al momento de buscar una solución para cubrir un área con la menor cantidad de material y de apoyos posibles, las conchas de concreto son una gran solución, aunque cada vez se desconoce más su empleo como estructura entre los nuevos ingenieros. Como consecuencia de la geometría de sus superficies, las conchas de concreto empleadas como cubiertas tuvieron un lento desarrollo en cuanto a su análisis y método de construcción. A pesar de ello, a principios de la década de 1920 y hasta finales de la década de 1960, se desarrolló y empezó a masificar el uso de las conchas de concreto reforzado como una solución para cubrir grandes áreas, y no solo desde el punto de vista estructural, sino también desde el punto de vista económico y estético, siendo más las ventajas que las desventajas que presentan este tipo de estructuras. Desde el punto de vista estructural, son estructuras eficientes gracias a su forma, dado que las cargas que actúan sobre la superficie son soportadas principalmente por la acción de membrana, en donde las tensiones se desarrollan en el plano de la superficie. Teniendo además muy buena relación peso-resistencia, al ser capaces de cubrir grandes áreas, con un menor espesor en comparación a otras estructuras y por lo tanto presentan un ahorro significativo. Esto se debe a que su forma se basa en el comportamiento estructural, a causa de que la geometría de su superficie, las condiciones de borde y los tipos de carga, imponen la manera en que la carga será transmitida. Las conchas son estructuras espacialmente curvadas, de poco espesor en comparación a las otras de sus dos dimensiones. Su uso empezó a decaer debió a los altos costos constructivos, así como también en algunos casos se requería de un gran esfuerzo matemático para su análisis y no se contaban con las herramientas para su solución, lo que es posible hoy en día gracias a los avances de las herramientas computacionales. Pero aun así se requiere del entendimiento del comportamiento estructural de las conchas para poder realizar un análisis ya sea por medio de la teoría general de conchas o por medio de un análisis de elementos finitos.

# | CAPÍTULO I. EL PROBLEMA

## Planteamiento del problema

Con el objetivo de poder cubrir grandes luces o espacios con la menor cantidad de material y apoyos posibles, los ingenieros han buscado diversas soluciones a este problema. Una de ellas es el uso de conchas de concreto reforzado, en donde se logra cubrir grandes espacios con un espesor delgado de concreto y con una cantidad de apoyos reducida, Figura 1, a diferencia de si se empleara una losa de concreto. El comité 318 del Instituto Americano del Concreto (ACI, por sus siglas en inglés), define en los *Requisitos de Reglamento para Cáscaras Delgadas de Concreto* (ACI 318.2S-14) a las conchas delgadas como:

Estructuras espaciales tridimensionales, conformadas por una o más losas curvas o placas delgadas, cuyo espesor es pequeño en comparación con sus otras dimensiones. Las cáscaras delgadas se caracterizan por su

comportamiento tridimensional para soportar cargas, determinado por la geometría de sus formas, por la manera en que están apoyadas y por la naturaleza de la carga aplicada. (p. 3).



*Figura 1.* Concha de concreto reforzado con forma de “concha de naranja” empleada en los accesos de la Ciudad Universitaria de Caracas, cubriendo una longitud aproximada de 23 m sin necesidad de apoyos intermedios. Fotografía de Luis Felipe Toro (Caracas, 1953). Archivo Biblioteca Nacional de Venezuela, Caracas.

Su comportamiento estructural se basa principalmente en la forma, son capaces de expandirse sobre grandes áreas con un espesor de concreto delgado, siendo beneficioso dado que se reduce considerablemente el peso propio de la estructura. Las conchas por su geometría y forma requieren de un material que se adecue fácilmente y que sea resistente, siendo el concreto el material idóneo por las distintas formas que puede adquirir y por su gran resistencia a la compresión, ya que al diseñar conchas delgadas se buscan formas espaciales que trabajen en su gran mayoría a compresión. Por otra parte, uno de los aspectos más relevantes de las conchas de concreto es que, presentan un alto valor estético en cada una de las distintas formas que pueden ser diseñadas.

Seguindo la definición del ACI, las conchas son todas aquellas estructuras compuestas de superficies curvas donde las cargas son absorbidas por fuerzas longitudinales y de flexión. Su efecto portante es similar al de las estructuras plegadas. Las conchas se clasifican según la curvatura de Gauss que presenten, Figura 2, se distinguen los siguientes tipos de concha: (a) superficies con curvatura gaussiana positiva, formadas por dos familias de curvas ambas con la misma dirección (sinclásticas); (b) superficies con curvatura gaussiana cero, presentan solo una familia de curvas; y (c) superficies con curvatura gaussiana negativa, presentan dos familias de curvas cada una en dirección opuestas (anticlásticas). Algunos ejemplos de conchas construidas en concreto reforzado se muestran en la Figura 3. A menudo las conchas son soluciones económicas y adecuadas para diferentes estructuras, como tanques de agua, cubiertas de grandes dimensiones y silos.

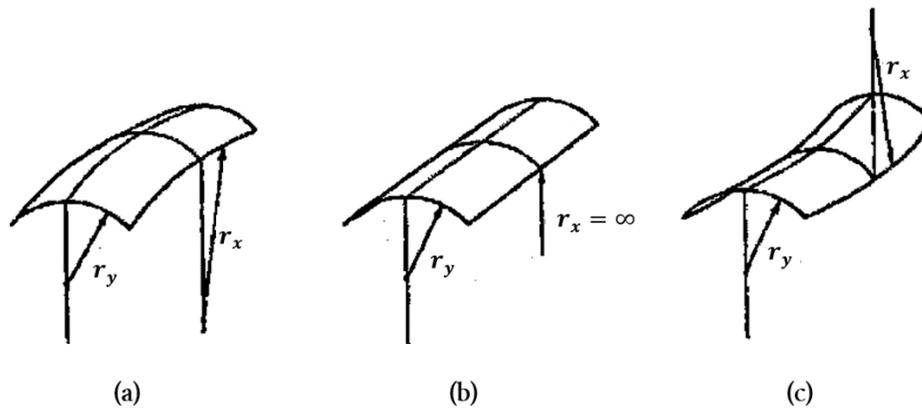
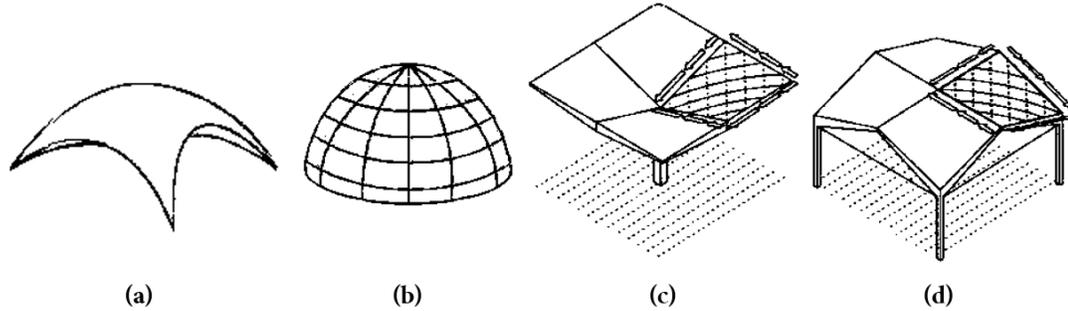


Figura 2. Curvas gaussianas, (a) concha con curvatura gaussiana positiva, (b) concha con curvatura gaussiana cero, (c) concha con curvatura gaussiana negativa. Tomada de “Thin Shell Concrete Structures” por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.



*Figura 3.* Algunos tipos de conchas construidas en concreto reforzado, (a) paraboloides elíptico, (b) cúpula esférica, (c) paraboloides hiperbólico del tipo paraguas invertido, (d) paraboloides hiperbólico soportado en sus esquinas. Tomada de “Structures, 7th edition” por D. Schodek & M. Bechthold, 2013, Pearson Education, Inc.

El análisis de las conchas puede ser realizado de manera analítica, práctica o por medio de un análisis numérico como elementos finitos, este último ha ganado popularidad gracias a los avances computacionales. Pero las conchas por la naturaleza de su forma y su geometría son elementos difíciles de entender y analizar, además de que su comportamiento no es fácil de predecir. Hay que mencionar, además, que por la geometría de su superficie son estructuras que requieren de una mano de obra calificada lo cual aumenta significativamente los costos de construcción. Es debido a estas razones que se empezó a dejar de emplear como cubiertas a finales de la década de 1960 (Verhaegh, 2010), siendo cada vez menos conocido y relevante entre los nuevos ingenieros. El desarrollo de los avances de los métodos de análisis, computacionales y las innovaciones en el campo de la construcción han guiado al resurgimiento de las conchas de concreto, como resultado de esto, nuevos diseños de conchas han ganado notoriedad siendo anteriormente imposibles de diseñar y construir.

# Metodología

## TIPO DE INVESTIGACIÓN

La investigación de este trabajo especial de grado consiste en analizar el comportamiento estructural de las conchas cilíndricas, cúpulas y paraboloides hiperbólicos de borde rectos de concreto reforzado empleadas como cubiertas, definiendo las soluciones analíticas y prácticas que rigen su comportamiento, validando mediante un análisis de elementos finitos las soluciones prácticas para los distintos tipos de conchas y estableciendo criterios de diseño y armado para cada uno de los tipos de conchas de concreto reforzado.

Con tal investigación se busca explicar el comportamiento de las conchas cilíndricas, cúpulas y paraboloides hiperbólicos de borde rectos de concreto reforzado y contribuir con el diseño de futuras conchas de concreto reforzado que sean empleadas como cubiertas.

## DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El análisis estructural de las conchas de conchas cilíndricas, cúpulas y paraboloides hiperbólicos de borde rectos de concreto reforzado empleadas como cubiertas, partirá definiendo las soluciones analíticas y prácticas para cada uno de los tipos de conchas, luego se validaran las soluciones prácticas establecidas para cada uno de los tipos de conchas de concreto reforzado que se consideran en este trabajo especial de grado mediante un análisis de elementos finitos con apoyo del software

SAP2000, y finalmente se establecerán criterios de diseño y armado para cada uno de los tipos de conchas de concreto reforzado.

Con el propósito de alcanzar tal fin la Figura 4 muestra la metodología para organizar la investigación<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Los colores de los bordes de cada bloque representan: rojo, ordenamiento de información para el desarrollo del marco teórico; amarillo, análisis de las conchas cilíndricas, cúpulas esféricas y paraboloides hiperbólicos de bordes rectos; verde, validación de las soluciones analíticas y prácticas planteadas para el diseño de las conchas de concreto reforzado mediante un análisis de elementos finitos con apoyo en el software SAP2000; y azul, establecimiento de criterios de diseño y armado para cada uno de los tipos de conchas analizadas.

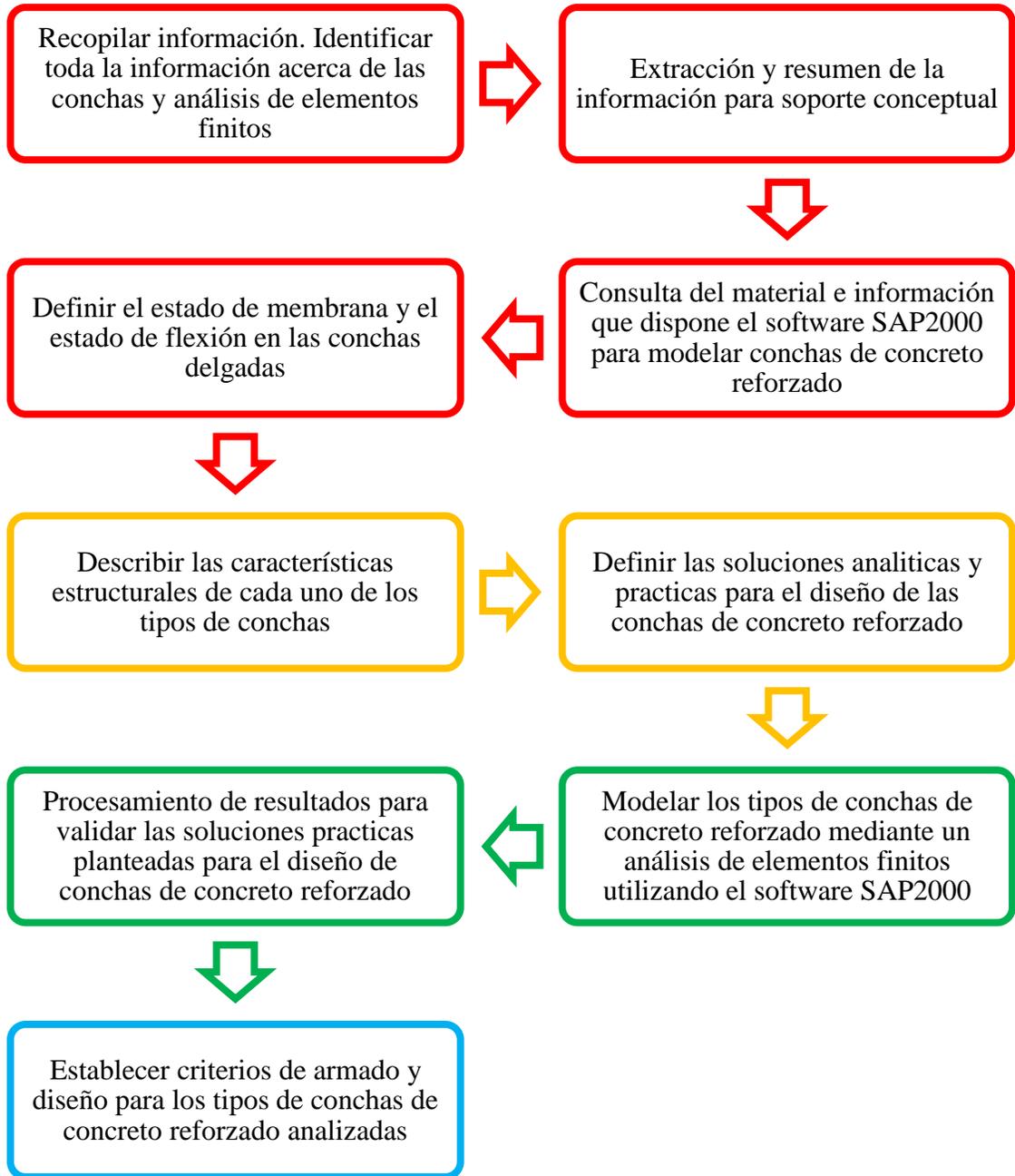


Figura 4. Metodología para la elaboración del Trabajo Especial de Grado presentado en forma de diagrama de proceso.

# Objetivos

## OBJETIVO GENERAL

- Analizar el comportamiento estructural de las conchas cilíndricas, cúpulas y paraboloides hiperbólicos de bordes rectos de concreto reforzado a ser empleadas como cubiertas.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Definir las soluciones analíticas para el diseño de conchas cilíndricas, cúpulas y paraboloides hiperbólicos de bordes rectos de concreto reforzado.
- Definir las soluciones prácticas para el diseño de conchas cilíndricas, cúpulas y paraboloides hiperbólicos de bordes rectos de concreto reforzado.
- Modelar conchas cilíndricas, cúpulas y paraboloides hiperbólicos de bordes rectos de concreto reforzado aplicando un análisis de elementos finitos con apoyo del software SAP2000.
- Establecer criterios de diseño y armado para las conchas cilíndricas, cúpulas y paraboloides hiperbólicos de bordes rectos de concreto reforzado.

# Justificación

Las conchas de concreto reforzado al ser soluciones con beneficios estructurales, económicos y estéticos, requieren del entendimiento de su comportamiento estructural, para así poder ser una opción al momento de diseñar una cubierta para una determinada área. Las conchas al dejar de ser empleadas como cubiertas luego de la década de 1960 perdieron popularidad hasta el punto de que los nuevos ingenieros desconocen por completo de este tipo de estructuras. Debido a los avances computacionales y constructivos, las conchas de concreto reforzados pueden ser consideradas actualmente como una opción, considerando que anteriormente no era tarea sencilla la solución de los cálculos para el análisis de las conchas. Razón por la cual la finalidad del presente trabajo especial de grado es, analizar el comportamiento estructural de las conchas cilíndricas, cúpulas y paraboloides hiperbólicos de bordes rectos de concreto reforzado empleadas como cubiertas, definiendo las soluciones analíticas y prácticas para su diseño, validando estas soluciones mediante un análisis de elementos finitos con apoyo del software SAP2000, y además establecer criterios para su armado y diseño, contribuyendo así con su estudio, análisis y diseño, demostrando también las ventajas que poseen este tipo de estructuras.

## Alcance

El alcance de este trabajo especial de grado es el de presentar las soluciones analíticas para las conchas cilíndricas, cúpulas y paraboloides hiperbólicos de bordes rectos de concreto reforzado, las soluciones prácticas para el análisis de las conchas mencionadas anteriormente, comparar los resultados obtenidos por estos métodos con un análisis de elementos finitos. Los tipos de concha que se analizarán serán las

conchas cilíndricas circulares, las cúpulas esféricas y los paraboloides hiperbólicos de bordes rectos del tipo “*paraguas invertido*”, las cuales presentan una curvatura gaussiana igual a cero, positiva y negativa, respectivamente. El análisis de las conchas de concreto reforzado en este trabajo de grado será estático lineal. Además de analizar las conchas por distintos métodos, se presentará algunos criterios sobre el armado y diseño de en las conchas cilíndricas circulares, las cúpulas esféricas y en los paraboloides hiperbólicos de bordes rectos.

## **Limitaciones**

De las distintas formas que pueden ser construidas las conchas de concreto a ser empleadas como cubiertas, en este trabajo especial de grado solo se analizaran y presentaran algunos criterios de armado y diseño de las conchas cilíndricas circulares, las cúpulas esféricas y los paraboloides hiperbólicos de bordes rectos del tipo “*paraguas invertido*”, las cuales tienen una superficie gaussiana igual a cero, positiva y negativa respectivamente. En cuanto al análisis de elementos finitos, se limitará la densidad de la malla de elementos debido a la capacidad computacional disponible. Las tensiones, fuerzas y momentos que se presentaran de los análisis realizados a las conchas, son los que se encuentran en el plano de la superficie de la concha.

## | CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

## Antecedentes

[1] Baute G., M., Kemenyfy M., S. & Sabal C., E. (1966). *Efectos Secundarios en los Paraboloides Hiperbólicos* (Tesis de pregrado). Universidad Católica Andrés Bello. Caracas, Venezuela.

## Teoría de la elasticidad

Para entender el comportamiento interno de las conchas bajo cargas externas, primero es necesario tener presente algunos conceptos básicos de la teoría de la elasticidad que se emplean para describir el comportamiento interno de cualquier tipo de concha, considerando que el comportamiento de las conchas es elástico lineal. En

términos generales, cuando las fuerzas exteriores que deforman la estructura no exceden un cierto límite (límite elástico), la deformación desaparece al momento en que se retiran tales fuerzas debido a la propiedad que hay en cada material denominada *elasticidad*. Dependiendo del material, este puede ser isótropo o anisótropo, en donde las propiedades elásticas pueden ser las mismas o pueden variar según su dirección. La capacidad de una estructura para resistir cargas se llama *resistencia*. La *rigidez* se refiere a la capacidad de una estructura de resistir cambios en su forma. A menudo es necesario limitar la magnitud de los desplazamientos del miembro para que cumpla con ciertas deformaciones establecidas en normas. La capacidad de la estructura para resistir el pandeo bajo tensiones de compresión se denomina *estabilidad*. *Falla* se refiere a cualquier acción que resulte en una incapacidad por parte de la estructura para funcionar de la manera prevista. La *inestabilidad* ocurre si la carga produce un cambio abrupto en la forma del miembro.

## TENSIONES

El cuerpo mostrado en la Figura 5.a, se encuentra bajo la acción de fuerzas externas las cuales producen en el cuerpo fuerzas internas. Si secciona dicho cuerpo se puede observar que, sobre las superficies seccionadas debe existir el equilibrio de las fuerzas que actúan sobre ella por medio de las fuerzas internas. Estas fuerzas internas, aplican para ambas porciones y se distribuyen con continuidad sobre la superficie cortada. Por lo tanto, las tensiones de un elemento tienen una intensidad igual a la fuerza que actúa sobre una determinada área.

Para determinar la magnitud de estas tensiones en cualquier punto, se secciona el cuerpo por el punto  $Q$  mediante un plano imaginario, dividiéndolo en dos porciones, Figura 5.b.

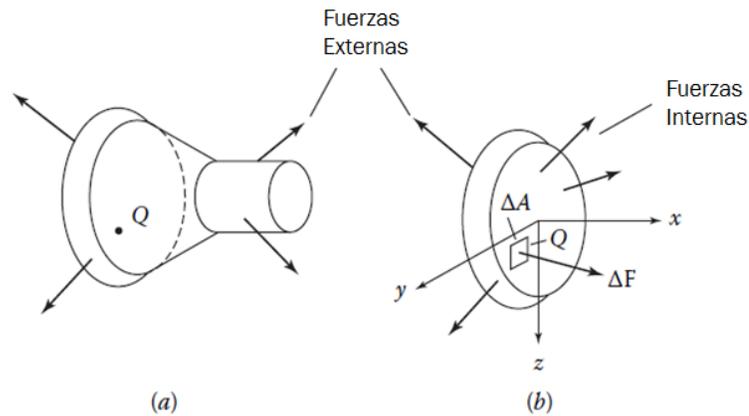


Figura 5. (a) Seccionamiento de un cuerpo; (b) diagrama de cuerpo libre. Tomada de “Stresses in Beams, Plates, and Shells. Third Edition” por A. C. Ugural, 2010, CRC Press.

Un elemento de área  $\Delta A$  el cual se encuentra sobre el punto  $Q$  de la superficie rebanada, actúa sobre él una fuerza  $\Delta F$ , que se descompone en dos, cuyas componentes son,  $\Delta F_x$  normal al plano de la superficie y  $\Delta F_y$ ,  $\Delta F_z$  tangentes al plano. Entonces la tensión normal  $\sigma_x$  y las tensiones cortantes  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  serán definidas como:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \frac{dF_x}{dA} \quad (1)$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} = \frac{dF_y}{dA} \quad (2)$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} = \frac{dF_z}{dA} \quad (3)$$

Estas expresiones proporcionan las componentes de las tensiones en el punto  $Q$  de área  $\Delta A$ .

## COMPONENTES DE LAS TENSIONES

Si se aísla un cubo de dimensiones infinitesimales de un cuerpo, se pueden plantear las tensiones que actúan en cada par de caras paralelas, Figura 6.

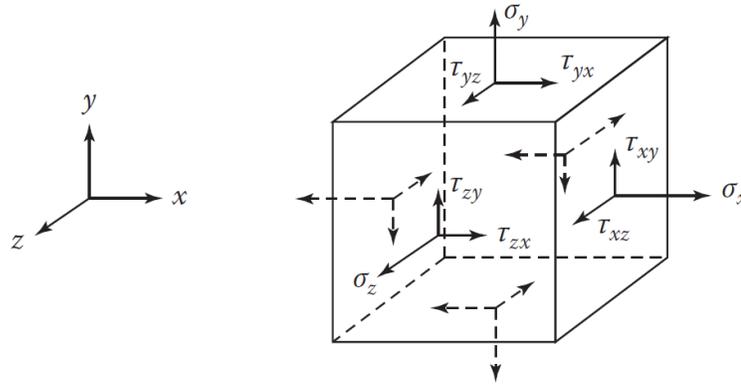


Figura 6. Tensiones sobre un elemento tridimensional, las cuales están actuando en sentido positivo. Tomada de “Stresses in Beams, Plates, and Shells. Third Edition” por A. C. Ugural, 2010, CRC Press.

En cada cara del cubo actúa una componente de tensión normal  $\sigma$  y dos componentes tangenciales de tensión  $\tau$ , siendo en total tres tensiones normales y seis tensiones tangenciales, para un total de 9 componentes escalares de las tensiones que actúan en el cubo. Definiendo así el estado de tensiones en un punto el cual puede ser representado por medio de una matriz:

$$[\tau_{ij}] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

La matriz  $\tau_{ij}$  es una representación del *tensor de tensiones*.

Del equilibrio del elemento, se demuestra que el número de componentes de la tensión tangencial puede ser reducido a tres:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . En conclusión, las componentes de las tensiones que actúan son:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x; \sigma_y; \sigma_z \\ \tau_{xy} = \tau_{yx}, \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{array} \right\} 6 \text{ componentes} \quad (5)$$

## FUERZAS INTERNAS RESULTANTES

Al seccionar un cuerpo las fuerzas internas que se encuentran distribuidas en toda la sección pueden ser representadas por una fuerza estáticamente equivalente y un vector de momento. Las resultantes de fuerzas internas o resultantes de tensiones, consisten de fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos. Cada una de las componentes de las fuerzas internas y momentos refleja un efecto diferente en el cuerpo.

Las resultantes de fuerzas internas y momentos que actúan en la Figura 7, están compuestos por:

- Fuerza axial ( $P$ ), tiende a traccionar o comprimir el miembro.
- Fuerzas de corte ( $V_x$  y  $V_y$ ), tiende a que se deslice una parte del miembro respecto a otra adyacente.
- Torsión ( $T$ ), tiende a torcer el miembro.
- Momentos flectores ( $M_y$  y  $M_z$ ), causan que el miembro se doble.

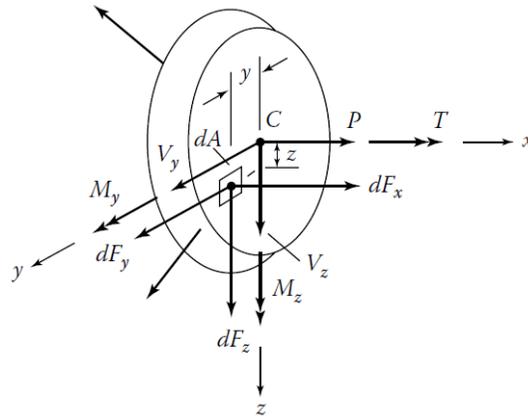


Figura 7. Sección aislada de un cuerpo, en donde se observa las fuerzas internas resultantes. Tomada de “Stresses in Beams, Plates, and Shells. Third Edition” por A. C. Ugural, 2010, CRC Press.

Se puede establecer la relación entre los componentes de la sección y las fuerzas internas resultantes, si se considera el área infinitesimal  $dA$  de la Figura 7, en donde actúan sobre ella las componentes de  $dF$ , expresadas por las ecuaciones 1, 2 y 3 como:

$$dFx = \sigma_x dA \quad (6)$$

$$dFy = \sigma_y dA \quad (7)$$

$$dFz = \sigma_z dA \quad (8)$$

Las componentes de las tensiones en la sección del cuerpo causan las fuerzas internas resultantes sobre esa sección, por lo tanto, la suma de la fuerza incremental en las direcciones  $x, y, z$ , son:

$$P = \int \sigma_x dA \quad (9)$$

$$V_y = \int \tau_{yz} dA \quad (10)$$

$$V_z = \int \tau_{xz} dA \quad (11)$$

La suma de los momentos alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , es igual a:

$$T = \int (\tau_{xz} - \tau_{xy}z) dA \quad (12)$$

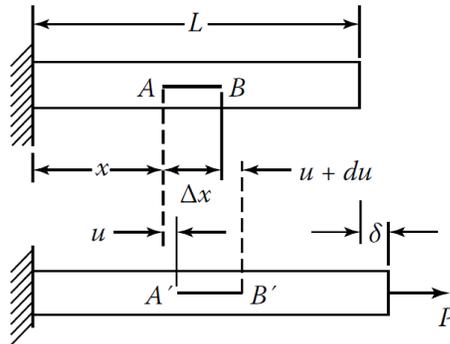
$$M_y = \int \sigma_x z dA \quad (13)$$

$$M_z = - \int \sigma_y y dA \quad (14)$$

## DEFORMACIÓN

Suponiendo que en un cuerpo elástico hay suficientes vínculos que impiden el movimiento como cuerpo rígido, por lo cual no es posible el desplazamiento de las partículas del cuerpo sin una deformación de este. Es necesario entender el tipo de deformación que ocurre en un cuerpo, para así poder determinar la distribución de tensiones que está sucediendo en dicho cuerpo. Los pequeños desplazamientos de cualquiera de los puntos dentro de un cuerpo están definidos por sus componentes de desplazamiento  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , los cuales son paralelos a los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente.

La deformación de un cuerpo puede ser normal o cortante. La deformación normal se puede observar en la Figura 8, en donde una barra prismática de sección transversal constante en toda su longitud es deformada por una fuerza axial,  $P$ .



*Figura 8.* Deformación de una barra prismática por la acción de una fuerza axial,  $P$ . Tomada de “Stresses in Beams, Plates, and Shells. Third Edition” por A. C. Ugural, 2010, CRC Press.

La deformación normal, conocida como deformación unitaria, se define como la unidad de cambio de longitud:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (15)$$

En donde,  $\varepsilon$  representa la deformación longitudinal,  $\delta$  la deformación total y  $L$  la longitud total de la barra antes de la aplicación de la fuerza axial,  $P$ . Un signo positivo significa elongación; un signo negativo, compresión.

La deformación por corte es la tangente del cambio total en el ángulo entre dos líneas perpendiculares en un cuerpo durante la deformación. Considerando que ocurren pequeños desplazamientos en el cuerpo, se puede establecer la tangente del

ángulo igual al ángulo entre las dos líneas perpendiculares. La deformación por corte de una placa rectangular, Figura 9, se define en radianes como:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta \quad (16)$$

En donde,  $\beta$  representa el ángulo entre los dos bordes rotados. La deformación por corte es positiva si el ángulo entre la línea de referencia decrece, como se observa en la Figura 9; de lo contrario, la deformación por corte es negativa.

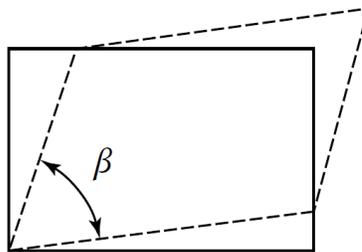


Figura 9. Deformación por corte de una placa rectangular. Tomada de “Stresses in Beams, Plates, and Shells. Third Edition” por A. C. Ugural, 2010, CRC Press.

## COMPONENETES DE LA DEFORMACIÓN

No siempre la deformación se produce de manera uniforme, las deformaciones pueden variar de un punto a otro en un cuerpo. Por lo que, la expresión de deformación debe relacionarse con una línea A-B de longitud  $\Delta x$  que se estira una cantidad  $u$  bajo la acción de la carga axial,  $P$ , Figura 8. Con base a esto, la deformación normal se define como:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (17)$$

Para un elemento de dimensiones  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , perteneciente a un cuerpo elástico que sufre una deformación, Figura 10, siendo  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , las componentes del desplazamiento del punto  $O$ , el desplazamiento del punto  $A$  en la dirección  $x$ , será:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (18)$$

Siendo  $(\partial u / \partial x) dx$  el incremento de la función  $u$  correspondiente al incremento de la variable  $x$ , o lo que es igual a el aumento de la longitud del elemento  $OA$  debido a la deformación. Se utiliza la notación de derivada parcial ya que, el desplazamiento  $u$  es función de  $x$  e  $y$ , cuando se trata de una deformación bidimensional. En el caso de una deformación tridimensional,  $u$  sería función de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

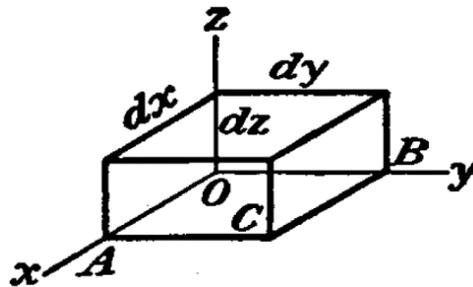


Figura 10. Elemento de dimensiones  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Tomada de “Teoría de la Elasticidad. Segunda Edición” por S. Timoshenko & J.N. Goodier, 1975, Urmo, S.A. de Ediciones.

Tomando en cuenta la variación del ángulo que forma  $OA$  y  $OB$ , Figura 11, se tiene que el desplazamiento del punto  $A$  en la dirección  $y$ , y del punto  $B$  en la dirección  $x$ , siendo  $u$  y  $v$  los desplazamientos del punto  $O$  en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente:

$$\text{Punto } A \rightarrow v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (19)$$

$$\text{Punto } B \rightarrow u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (20)$$

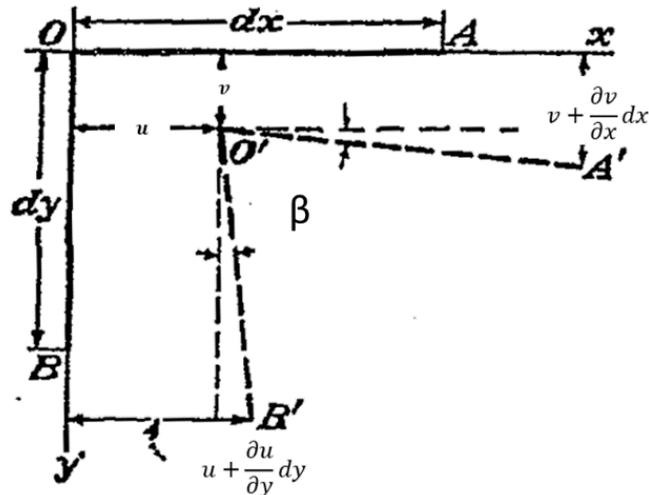


Figura 11. Variación del ángulo de los elementos  $OA$  y  $OB$ . Tomada de “Teoría de la Elasticidad. Segunda Edición” por S. Timoshenko & J.N. Goodier, 1975, Urmo, S.A. de Ediciones.

Cuando ocurre una deformación bidimensional o plana, todos los puntos en el cuerpo permanecen en el mismo plano antes y después de la carga. Un elemento de dimensiones  $dx$ ,  $dy$  y espesor igual a la unidad, puede contener deformaciones lineales y deformaciones por corte, Figura 12.

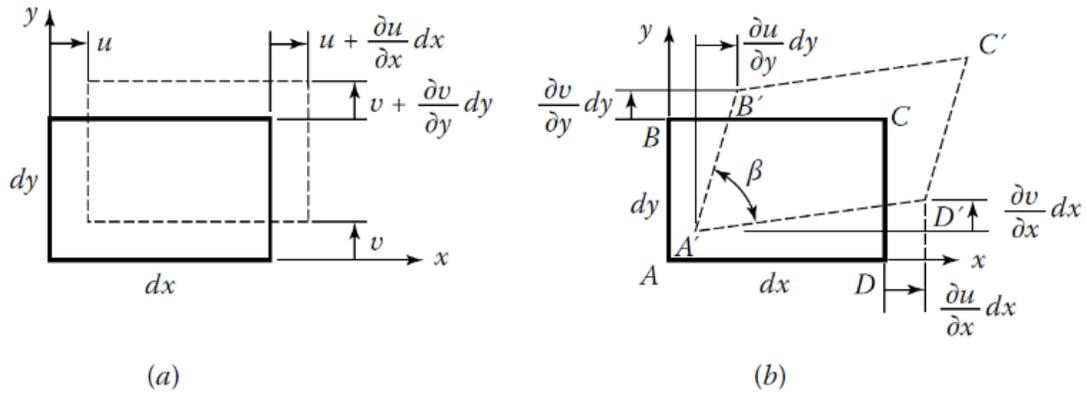


Figura 12. Deformación de un elemento bidimensional: (a) deformación lineal; (b) deformación por corte. Tomada de “Stresses in Beams, Plates, and Shells. Third Edition” por A. C. Ugural, 2010, CRC Press.

De la figura 12 y de las ecuaciones 16 y 17, se tiene que:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (21)$$

Las ecuaciones 21, permiten obtener los componentes de la deformación plana mediante los desplazamientos.

De manera análoga se pueden obtener las componentes de la deformación de un punto perteneciente a un elemento de dimensiones  $dx, dy, dz$ . Las componentes de la deformación tridimensional son  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  y:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} ; \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} ; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (22)$$

En donde  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$  ;  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$  ;  $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$

Las ecuaciones 21 y 22 son las componentes de la deformación o tensor de deformación de un punto perteneciente a un cuerpo cualquiera, el cual es análogo al tensor de tensiones.

## LEY DE HOOKE Y RELACIÓN DE POISSON

La ley de Hooke establece la relación entre las componentes de las tensiones y de la deformación. En el caso de un material isótropo, las tensiones normales no producen distorsión angular (en el caso de las deformaciones por corte sí), es por esto que la magnitud de la deformación longitudinal es igual a:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \rightarrow \sigma_x = \varepsilon_x E \quad (23)$$

En donde,  $E$  representa el módulo de elasticidad longitudinal o *módulo de Young*. Siendo la tensión proporcional a la deformación, hasta el límite de proporcionalidad del material. En el caso de un miembro sometido a una carga cortante, la relación es la siguiente:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (24)$$

En donde,  $\tau$  es la tensión de corte,  $\gamma$  es la deformación por corte y  $G$  es el módulo cortante de elasticidad o *módulo de rigidez del material*.

En el rango elástico, la relación de la deformación lateral y la deformación axial es constante y se conoce como *relación de Poisson*:

$$\nu = -\frac{\text{Deformación lateral}}{\text{Deformación axial}} \quad (25)$$

El signo negativo significa que, la deformación lateral es opuesta a la deformación axial. Por ejemplo, la deformación axial en una barra a tracción es positiva y la deformación lateral es negativa (debido a que el ancho de la barra disminuye). En compresión la situación es opuesta, ya que la barra se acorta, deformación axial negativa, y se hace más ancha, deformación lateral positiva. De ahí que, para materiales ordinarios la relación de Poisson tendrá un valor positivo.

La contracción lateral del elemento en la dirección  $x$  está acompañada de acortamientos transversales:

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (26)$$

Considerando que un elemento sujeto a un estado de tensión biaxial, Figura 9. Por causa de la tensión  $\sigma_x$ , no solo ocurre la deformación directa  $\sigma_x/E$ , sino también ocurre una contracción en  $y$ ,  $-\nu\sigma_x/E$ .

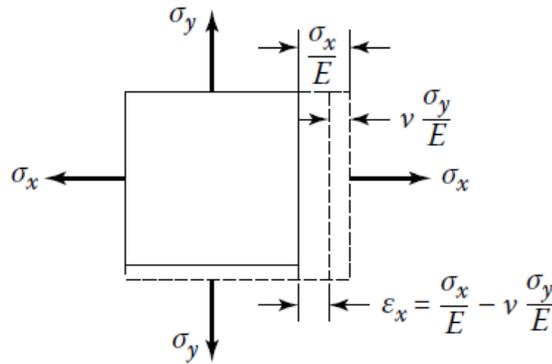


Figura 13. Elemento sometido a un estado de tensión biaxial. Tomada de “Stresses in Beams, Plates, and Shells. Third Edition” por A. C. Ugural, 2010, CRC Press.

Al igual que pasa con la dirección  $x$ , pasa con la dirección  $y$ , en donde, hay una deformación directa y otra deformación causada por la contracción transversal. Actuando las dos tensiones a la vez,  $\sigma_x$  ;  $\sigma_y$ , se tiene que la deformación en  $x$  e  $y$  es:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} \quad (27)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (28)$$

Las ecuaciones planteadas anteriormente se referían solo en el caso bidimensional, de manera análoga se tiene que para el caso tridimensional las ecuaciones de deformación son:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (29)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (30)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (31)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} ; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} ; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (32)$$

## TENSIONES PLANAS

El estado tensional plano considera que las componentes de las tensiones  $\sigma_z ; \tau_{xz} ; \tau_{yz}$  son nulas. Por lo tanto, el estado tensional plano queda definido por:  $\sigma_x ; \sigma_y ; \tau_{xy}$ , estas tres componentes son independientes de  $z$ , por ende, no varían a través del espesor del cuerpo, las cuales son función solamente de  $x$  e  $y$ .

## DEFORMACIONES PLANAS

Cuando la dimensión de un cuerpo en la dirección del eje  $z$  es muy grande, todas las secciones transversales presentan las mismas condiciones, en donde el desplazamiento longitudinal,  $w$ , es cero. De ahí que, la ecuación 22 queda de la siguiente manera:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (33)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

La tensión normal longitudinal,  $\sigma_z$ , puede ser expresada en función de  $x$  e  $y$  por medio de la ley de Hooke:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (36)$$

De esta forma, la deformación plana, al igual que el estado tensional plano, se reduce a la determinación de  $\sigma_x$ ;  $\sigma_y$ ;  $\tau_{xy}$ , funciones solo de  $x$  e  $y$ .

## TENSIONES EN UN PUNTO

Las ecuaciones presentadas anteriormente describen el estado de tensión de un punto perteneciente a un plano paralelo a un eje de coordenadas.

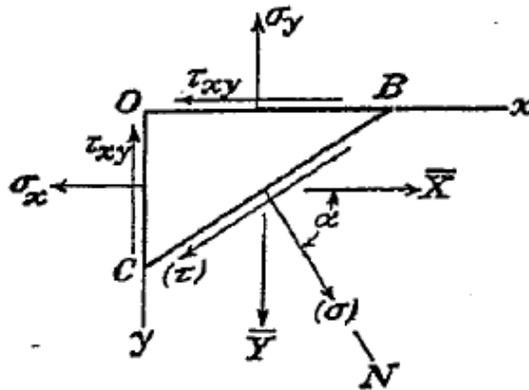


Figura 14. Variación del ángulo de los elementos OA y OB. Tomada de “Teoría de la Elasticidad. Segunda Edición” por S. Timoshenko & J.N. Goodier, 1975, Urmo, S.A. de Ediciones.

Para determinar las tensiones que actúan sobre cualquier plano que este inclinado respecto a los ejes coordenados, como en el caso de la Figura 14, en donde, el plano BC se encuentra inclinado respecto a los ejes  $x$  e  $y$ , y paralelo al eje  $z$ , se tiene que:

$$\bar{X} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \quad (37)$$

$$\bar{Y} = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha \quad (38)$$

Tensiones que actúan en el plano BC:

$$\sigma = \bar{X} \cos \alpha + \bar{Y} \sin \alpha \quad (39)$$

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha \quad (40)$$

$$\tau = \bar{Y} \cos \alpha - \bar{X} \sin \alpha \quad (41)$$

$$\tau = \tau_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha \quad (42)$$

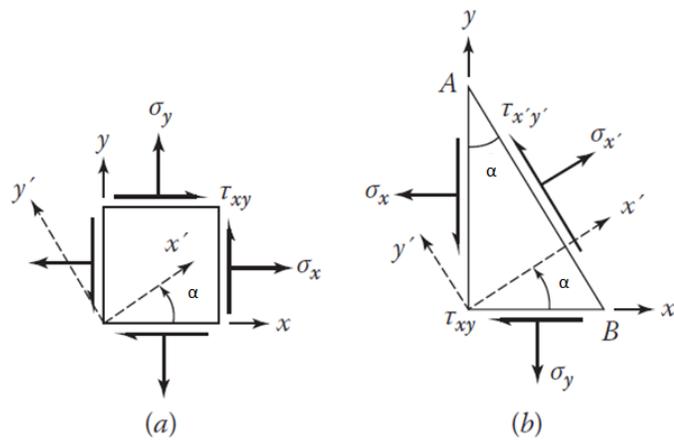


Figura 15. Elementos de un plano de tensiones. Tomada de “Stresses in Beams, Plates, and Shells. Third Edition” por A. C. Ugal, 2010, CRC Press.

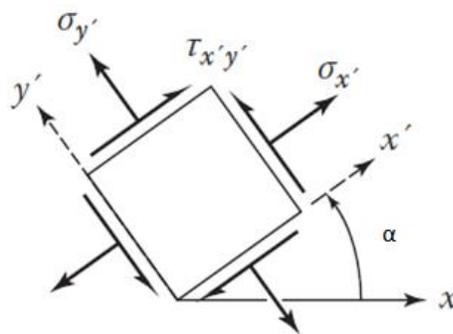


Figura 16. Componentes de las tensiones en un plano inclinado. Tomada de “Stresses in Beams, Plates, and Shells. Third Edition” por A. C. Ugal, 2010, CRC Press.

Para determinar las componentes de las tensiones de punto perteneciente a un plano inclinado como el que se muestra en la Figura 16, se tiene por equilibrio:

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \cos \alpha \sin \alpha \quad (43)$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (44)$$

$$\tau_{xy'} = \tau_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha \quad (45)$$

Las dos direcciones perpendiculares de los planos en donde desaparece la tensión de corte y la tensión normal tiene valores máximos, se obtiene de:

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (46)$$

El ángulo  $\alpha_p$  define la orientación de los planos principales. La mayor tensión obtenida algebraicamente es, la tensión máxima principal,  $\sigma_1$ , y la tensión mínima principal esta designada como,  $\sigma_2$ .

$$\sigma_{max,min} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (47)$$

## ECUACIONES DIFERENCIALES DE EQUILIBRIO

Las tensiones que actúan en un material varían de un punto a otro al estar sometido bajo la acción de cierta carga. Tales variaciones de tensiones, consideradas por la teoría de la elasticidad, son regidas por las ecuaciones de la estática. El cumplimiento de estas condiciones conduce a las *ecuaciones diferenciales de equilibrio*.

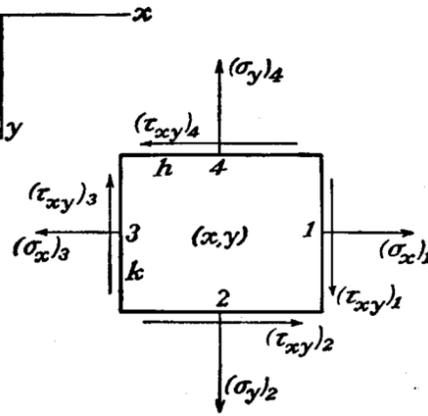


Figura 17. Elemento con distintas tensiones en cada una de sus caras. Tomada de “Teoría de la Elasticidad. Segunda Edición” por S. Timoshenko & J.N. Goodier, 1975, Urmo, S.A. de Ediciones.

Suponiendo un elemento de dimensiones  $h$ ,  $k$  y espesor igual a la unidad, Figura 17, se tiene que el valor de  $\sigma_x$  por ejemplo, no es el mismo en la cara 1 que en la cara 3. Las tensiones  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  están aplicadas en el punto  $(x, y)$ , el cual es el centro del elemento, las demás tensiones como  $(\sigma_y)_2$ , están aplicadas en los centros de las caras 1, 2, 3 y 4. Además, en este caso las fuerzas másicas no pueden ser despreciadas como en los casos anteriores, en donde,  $X$  e  $Y$  representas las componentes de las fuerzas másicas por unidad de volumen. Por lo tanto, la ecuación de equilibrio para las fuerzas que actuando en dirección  $x$  es:

$$(\sigma_x)_1 k - (\sigma_x)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + Xhk = 0 \quad (48)$$

Dividiendo entre  $hk$ :

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} + X = 0 \quad (49)$$

Si ahora hacemos que el volumen del bloque tienda a cero, es decir,  $h \rightarrow 0$  y  $k \rightarrow 0$ , el límite de  $[(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3]/h$  es  $\partial\sigma_x/\partial x$  y de forma semejante  $[(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4]/h$  es  $\partial\tau_{xy}/\partial y$ . Si se procede de forma análoga para la dirección  $y$ , entonces se tiene que las ecuaciones de equilibrio son:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \quad (51)$$

En donde,  $X$  e  $Y$  son las fuerzas másicas, pero para aplicaciones prácticas la única fuerza másica es el peso, la cual actúa en la dirección  $Y$ . Siendo  $\rho$  la densidad del material, quedan las ecuaciones de equilibrio como:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (52)$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \rho g = 0 \quad (53)$$

Las ecuaciones 52 y 53 representan las ecuaciones diferenciales de equilibrio, correspondiente a los problemas elásticos bidimensionales. En consecuencia, la Figura 17, puede representarse de forma general como se muestra en la Figura 18.

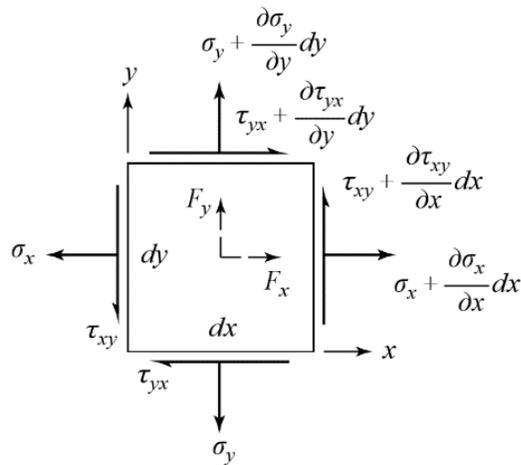


Figura 18. Forma general de un elemento que presenta tensiones y fuerza másica. Tomada de “Stresses in Beams, Plates, and Shells. Third Edition” por A. C. Ugural, 2010, CRC Press.

Si tomamos como ejemplo  $\sigma_x$  para observar su variación de un punto a otro de elemento, se tiene que:

$$\sigma_x + \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right) dx \quad (54)$$

Se requiere de la derivada parcial ya que,  $\sigma_x$  varía con respecto de  $x$  e  $y$ . Las componentes  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  varían de forma análoga.

## Introducción a las conchas de concreto

Las conchas al igual que las estructuras de membrana son estructuras resistentes por su forma, esto se puede demostrar mediante un ejemplo con una hoja de papel, la cual si sostenemos con una mano se curvaría, incapaz de soportar su propio peso, Figura 19.a. Pero si la misma hoja de papel es doblada en un punto con una ligera curvatura hacia arriba, soportara su propio peso y alguna carga adicional, Figura 19.b. Esta nueva capacidad portante de la hoja de papel no se obtiene aumentando la cantidad de material de la hoja, sino dándole una forma adecuada capaz de resistir mayores cargas. Esto se debe al hecho de que parte del material de la hoja esta ahora distante del eje neutro, aumentando así su rigidez a la flexión.

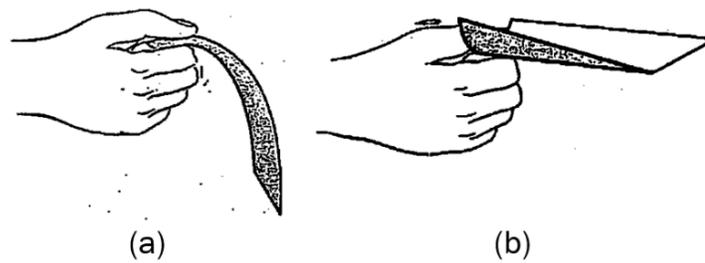
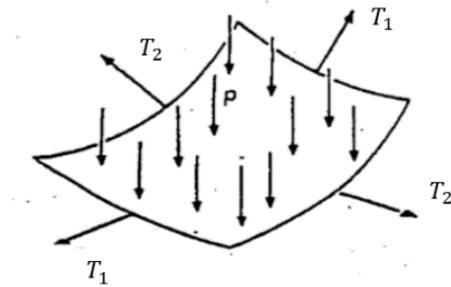


Figura 19. Experimento de una simple hoja de papel en donde se muestra la eficiencia de las estructuras resistentes por su forma, como es el caso de las conchas. Tomada de "Structure in Architecture" por M. Salvadori con la colaboración de R. Heller, 1963, Prentice-Hall.

Se denominan *estructuras resistentes por su forma* a aquellas estructuras cuya resistencia se obtiene al darle una determinada forma al material que la constituye, es por esto que el concreto a diferencia de otros materiales, como la madera, es un material ideal para la construcción de conchas. Las conchas delgadas trabajan de forma similar que las estructuras de membrana (de ahora en adelante solo membrana). Las membranas sostienen cargas mediante un mecanismo similar al de un sistema funicular, el cual soporta las cargas de tracción porque se deforman y las tensiones debido a la tracción se distribuyen de manera uniforme en toda la sección transversal, de manera análoga sucede con las conchas, Figura 20, las cuales resisten las cargas debido a la curvatura y dependiendo de ella, resisten cargas a tracción o a compresión. Las membranas a fines prácticos solo pueden resistir tracción o compresión (antifunicular bidimensional), a diferencia de las conchas no pueden resistir flexión ni corte.



*Figura 20.* Membrana bajo la acción de cargas externas, la cual es resistente a la tracción que genera la carga externa gracias a su curvatura. Tomada de “Structure in Architecture” por M. Salvadori con la colaboración de R. Heller, 1963, Prentice-Hall.

Las conchas a diferencia de las membranas presentan más ventajas, las cuales debido a su forma son estructuras resistentes, suficientemente delgadas para no desarrollar tensiones apreciables de flexión, pero también cuentan con suficiente espesor para resistir tensiones de tracción, compresión y corte. Algunas de las características más notables de las conchas en comparación con otras estructuras como vigas o placas, son:

- a) Comportamiento eficiente para soportar las cargas.
- b) Alto grado de reserva en resistencia e integridad estructural.
- c) Alta relación resistencia-peso.
- d) Espesor muy delgado en comparación a las otras dimensiones (luz, radio de curvatura).
- e) Presentan una alta rigidez.

El comportamiento ideal de las conchas es, soportar las cargas solamente por medio de fuerzas en el plano de la superficie (fuerzas de membrana), y mantenerlas constantes. Una variación brusca ya sea, de la carga o de la rigidez de la concha, resultara en momentos flexionantes. Cuando la concha posee una curvatura gaussiana positiva, como las cúpulas, las cargas son transmitidas a los apoyos por medio de las fuerzas meridionales, las cuales actúan a compresión. En el caso de las conchas con curvatura gaussiana negativa, como los paraboloides hiperbólicos, las cargas son transmitidas por medio de un mecanismo de fuerzas de corte en el plano. El comportamiento de las conchas con curvatura gaussiana cero, conchas cilíndricas, es similar al de una viga de sección transversal curva, esto ocurre solo cuando los bordes longitudinales no están apoyados.

Al momento de considerar el uso de una concha para una cubierta, se busca alcanzar los siguientes aspectos durante el diseño y la construcción: (1) eficiencia estructural, (2) eficiencia constructiva y (3) eficiencia estética, buscando de esta manera que la estructura no solo sea funcional desde el punto de vista estructural, sino también desde el punto de vista estético y, además, al momento de la construcción se debe enfocar en la economía para así reducir gastos en el encofrado y armado. Estos aspectos hacen que las conchas empleadas como cubiertas sean ventajosas en comparación a otras estructuras que pudiesen ser consideradas como cubiertas. Otro rasgo importante que cabe de destacar es que, las conchas al ser estructuras que trabajan puramente a compresión, las convierte en estructuras ideales a ser construidas en concreto, debido a que el concreto tiene una alta resistencia a la compresión y una muy baja resistencia a la tracción. Las conchas de concreto empleadas como cubiertas pueden cubrir grandes áreas utilizando una cantidad reducida de concreto en comparación a si se utilizara una placa de concreto para el mismo fin, siendo beneficioso este aspecto en lugares en donde los recursos son limitados y la mano de obra abunda o es poco costosa.

Pero las conchas por la naturaleza de su forma y su geometría son elementos difíciles de entender y analizar, además de que su comportamiento no es fácil de predecir, es debido a estas razones y a los altos costos de la mano de obra que dejaron de emplearse a finales de la década de 1960. Como consecuencia, al ser estructuras poco usuales con especificaciones estructurales y comportamientos particulares según el tipo de concha, los códigos de construcción en distintos países no cubren las estructuras del tipo concha. Haciendo difícil la estimación de los márgenes de seguridad que se deben tener presente, los lineamientos para su diseño que limite ciertos parámetros, como el acero mínimo de refuerzo, espesores y recubrimientos mínimos, y las tensiones y deformaciones máximas. Siendo este uno de los motivos, además de los mencionados anteriormente, que las conchas dejan de ser una opción para el cliente, el arquitecto, el ingeniero o el constructor. Sin embargo, algunos países como Estados Unidos, Alemania, Reino Unido e India cuentan con sus respectivos códigos de construcción para las conchas de concreto reforzado. En Venezuela, a pesar de estos motivos no ha sido una limitación para la construcción de conchas en el país, Figura 21. Por otra parte, las conchas de concreto reforzado pueden ser muy sensibles a pequeñas variaciones en su geometría, por lo que un pequeño error en el espesor o en la colocación del acero de refuerzo puede tener efectos significativos en las fuerzas internas, requiriéndose una mano de obra calificada y una supervisión constante, aumentando así su costo constructivo a comparación de otros sistemas estructurales en lugares en donde la mano de obra sea costosa.



*Figura 21.* Nave de montaje en la planta ensambladora de Volkswagen en Morón, estado Carabobo, Venezuela. La nave de montaje está cubierta por paraboloides hiperbólicos de bordes rectos del tipo “paraguas invertido” de concreto reforzado, cuarenta de los cuales cubren un área de  $12 \times 12 \text{ m}^2$  ( $144 \text{ m}^2$ ) y diez cubren un área de  $12 \times 16 \text{ m}^2$  ( $196 \text{ m}^2$ ), con un promedio de más de 8,00 m de altura. Arquitecto D. Bornhorst en colaboración con P. Neuberger; los paraboloides hiperbólicos fueron realizados por Cubiertas Ala de Venezuela, S.A. Fotografía de: autor desconocido (Morón, 1963). Archivo del arquitecto Dirk Bornhorst.



*Figura 22.* Instituto de hidrología, Technische Hochschule de Darmstadt, Alemania. Es posible cubrir grandes áreas por medio de conchas cilíndricas, asegurando una iluminación natural intensa. Los apoyos oblicuos aseguran la rigidez transversal de la estructura. Diseñado por Ernst Neufert & Alfred Mehmel, 1956. Fotografía de: autor desconocido, 2015. Obtenida de: <http://www.ramonabuxbaum.de>



*Figura 23.* Cubierta de las tribunas del hipódromo de La Zarzuela, España. La cubierta la constituyen una serie de hiperboloides de una hoja. La construcción de las cubiertas se encuentra en voladizo de 12,57 m hacia la pista. El espesor de la concha es de 6,20 cm en el borde exterior y de 14,50 cm en la zona de los apoyos. Diseñada por Eduardo Torroja. Fotografía de Ana Amado, 2016. Obtenida de: <https://www.plataformaarquitectura.cl/>

## ASPECTOS GENERALES DE LAS CONCHAS DE CONCRETO

### PREÁMBULO A LA TEORÍA CLÁSICA DE CONCHAS

La teoría clásica de conchas presenta un enfoque puramente matemático, haciendo complicado el análisis de una concha independientemente del material con que este hecha. Al momento de diseñar una concha de concreto reforzado no se analiza mediante la teoría clásica de conchas, sino que se emplea un estudio matemático simple junto con un enfoque conceptual, siendo esta la manera ideal para diseñar, Figura 24.



Figura 24. Planteamiento del diseño actual de las conchas de concreto reforzado.

La teoría clásica de conchas fue formulada por A. Love<sup>2</sup> en 1888 y presentada en su investigación de la *teoría de las conchas delgadas elásticas*, utilizando las hipótesis de J. Bernoulli<sup>3</sup>, las cuales fueron usadas también por G. Kirchhoff<sup>4</sup> en la formulación de la *teoría de placas delgadas*. La idea principal de la teoría clásica de conchas es que, las deformaciones de las conchas debido a las cargas son resistidas por los efectos de membrana. Por otra parte, la teoría emplea la Ley de Hooke (asumiendo que el material que se emplea en la concha es elástico), el equilibrio y la compatibilidad para resolver las estructuras estáticamente indeterminadas las cuales representan las condiciones de borde. Las ecuaciones presentadas por Love como una primera aproximación a la teoría de conchas son muy difíciles de resolver de manera analítica, por lo tanto, distintos investigadores han propuesto simplificaciones para conchas con formas específicas, tal es el caso de las ecuaciones propuestas por L. Donnell<sup>5</sup> en 1934, L. Morley<sup>6</sup> en 1959 y H. Lundgren para las conchas cilíndricas.

<sup>2</sup> Augustus Love (1863-1940) matemático y profesor en Oxford.

<sup>3</sup> Jacob Bernoulli (1654-1705) profesor de matemática en Bazel.

<sup>4</sup> Gustav Kirchhof (1824-1887) físico alemán y profesor en Berlin, Breslau y Heidelberg. Es mejor conocido en el campo de la física por el descubrimiento de las leyes de Kirchhoff en la corriente eléctrica.

<sup>5</sup> Lloyd Donnell (1895-1997) profesor de ingeniería mecánica en Illinois.

<sup>6</sup> Leslie Morley (1924-2011) científico de la Royal Aircraft Establishment y profesor en la universidad de Brunel, Londres.

Tabla 1  
*Relaciones empleadas en la teoría clásica de conchas*

<b>Relación</b>	
<b>Ley de Hooke</b>	Deformación con tensión
<b>Equilibrio</b>	Tensiones resultantes con carga externa
<b>Compatibilidad</b>	Deformación con $\left(\frac{\text{Deformación}}{\text{Desplazamiento}}\right)$

El análisis de las conchas es realizado comúnmente por dos distintas teorías. La primera de ella es, la *teoría de membrana*, la cual aplica por lo general a una gran parte de la concha, en donde no se toma en consideración los momentos o las fuerzas de corte. La segunda teoría es, la *teoría de flexión* o *teoría general de las conchas*, en donde si influye el efecto de flexión que no es considerado en la teoría de membrana, permitiendo así, analizar las discontinuidades en la distribución de tensiones que se dan en ciertas regiones de la concha. Sin embargo, la información que se obtiene de la teoría de membrana es de mayor significado práctico que el que se obtiene de la teoría de flexión. Por lo tanto, el objetivo final no es la aplicación de la teoría de membrana en toda la concha, sino analizar también las tensiones y deformaciones originadas por las fuerzas en el borde de la concha o cargas concentradas, las cuales no serían analizadas si se aplicara solo la teoría de membrana.

El análisis de una concha consiste primero en establecer el equilibrio de un elemento diferencial el cual es extraído de la concha, Figura 26, y segundo, lograr la compatibilidad de deformación para que cada uno de los elementos permanezca continuo al otro después de la deformación. En general, el cálculo de las conchas se basa en la teoría lineal de la elasticidad.

## TEORÍA GENERAL DE LAS CONCHAS

### Definiciones

Para el estudio de las conchas se debe establecer primero un sistema de notación que defina completamente la geometría de la concha. Una concha es una placa delgada de espesor  $h$ , el cual puede ser el mismo en todos los puntos de la superficie, o puede variar de un punto a otro, siendo este espesor relativamente pequeño en comparación a las demás dimensiones de la concha y a los radios de curvatura. La superficie que bisecta al espesor de la concha se denomina *superficie media*. Si se conoce la forma de la superficie media y el espesor de la concha en cada uno de sus puntos, entonces la concha queda geoméricamente definida. Mecánicamente, la superficie media y el espesor representan a la concha de la misma manera en que una barra es representada por su eje y su sección transversal. Las conchas a diferencia de las vigas no pueden ser descritas por una línea, deben ser descritas por un plano o una superficie curva.

Antes de definir las tensiones que actúan en una concha, se debe establecer un sistema de coordenadas, separando de la concha un elemento infinitamente pequeño determinado por dos pares de planos próximos normales a la superficie media que contengan las curvas principales, Figura 27. Asumiendo como el origen del sistema coordenado el punto  $O$  de la superficie media, siendo los ejes  $x$  e  $y$  tangentes a las líneas de curvatura principal y el eje  $z$  normal a la superficie. Los radios principales de curvatura contenidos en los planos  $xz$  e  $yz$  se designan por  $r_x$  y  $r_y$  respectivamente.

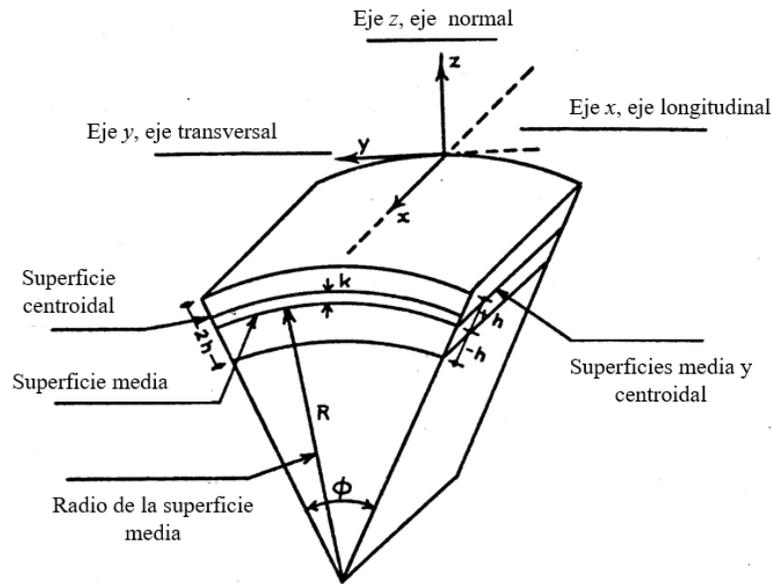


Figura 25. Componentes característicos de un elemento infinitesimal extraído de una concha. Tomada de “Diseño de Cascarones Cilíndricos” por J. Gibson, 1962, Compañía Editorial Continental, S.A.

Las tensiones que actúan sobre las caras planas del elemento tienen resultantes en las direcciones de los ejes de coordenadas. Para un análisis de conchas se deben resolver las resultantes de tensiones en componentes. Para las direcciones de los ejes  $x, y, z$ , las componentes de fuerzas, Figura 26, tienen la siguiente definición:

- En la sección transversal al eje  $x$ , la fuerza en dirección en  $x$ , se denomina fuerza normal  $N_x$ . Se considera positiva si esta traccionando al elemento y es negativa si lo está comprimiendo. La fuerza normal  $N_y$  se define de la misma manera.
- En la sección transversal al eje  $x$ , la fuerza por unidad de longitud de la sección en dirección al eje  $y$  se denomina, fuerza de corte  $N_{xy}$ . Se considera

positiva si apunta en la dirección positiva del eje  $y$ , y negativa si apunta en dirección contraria al eje  $y$ . La fuerza cortante  $N_{yx}$  se define de forma similar.

- La fuerza normal a la superficie media se denomina fuerza transversal  $Q_x$ .

Las fuerzas nombradas anteriormente son el resultado de cierto tipo de tensiones, las cuales se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2  
*Tensiones originadas por fuerzas*

Fuerza		Tensión
$N_x, N_y$	Normal	$\sigma_x, \sigma_y$
$N_{xy}, N_{yx}$	Corte	$\tau_{xy} = \tau_{yx}$
$Q_x, Q_y$	Transversal	$\tau_{xz}, \tau_{yz}$

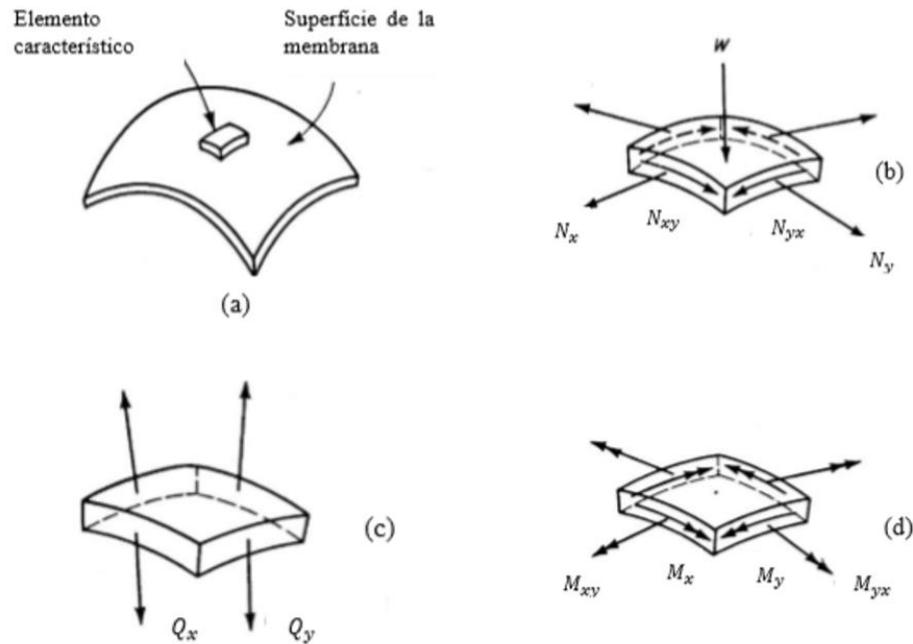


Figura 26. Fuerzas que actúan en un elemento infinitamente pequeño extraído de una concha, (a) superficie de la membrana, (b) carga y resultantes de tensiones de membrana, (c) fuerzas cortantes normales, (d) momentos flectores y momentos de torsión. Tomada de "Proyecto de Estructuras de Hormigón" por G. Winter & A. H. Nilson, 1977, Editorial Reverte, S.A.

## Notaciones

Es posible expresar estas resultantes de tensiones como integrales de tensiones que actúan sobre una sección del elemento, cuyas secciones abarcan todo el espesor de la concha, de manera que cualquiera de las resultantes de tensiones viene expresada en unidad de fuerzas por unidad de longitud a lo largo del borde del elemento. Para explicar esto se utilizará el elemento infinitesimal presentado en la Figura 27.

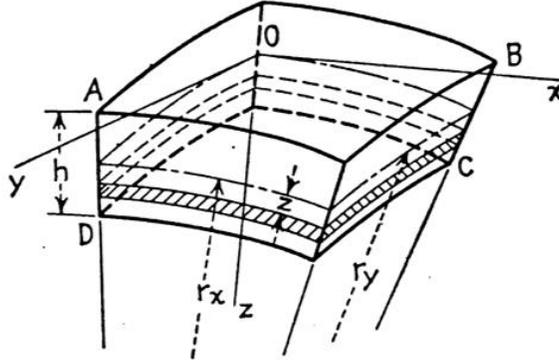


Figura 27. Elemento infinitamente pequeño extraído de una concha. Tomada de “Teoría de Placas y Laminas” por S. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, 1970, Urmo, S.A. de Ediciones.

En la sección transversal al eje  $x$ , la fuerza normal total en esta sección es por definición  $N_x ds_y$ , la cual es el resultado de la tensión  $\sigma_x$  actuando sobre esta área. Al ser el ancho  $ds_y$  de magnitud diferencial, se puede ignorar una posible variación en esta dirección, pero se debe tener en consideración toda la variación de la tensión a través del ancho de la concha. Para determinar el total de la fuerza normal que actúa en la sección, primero se establece un elemento de dimensiones diferenciales en todas las direcciones sobre la sección, este elemento se encuentra sombreado en la Figura 27. Debido a la curvatura de la concha, el ancho del elemento no es simplemente  $ds_y$ , sino que,  $ds_y \frac{(r_y - z)}{r_y}$ , por lo tanto la fuerza es:

$$\sigma_x ds_y \frac{r_y - z}{r_y} dz \quad (55)$$

La fuerza normal total del elemento  $ds_y \cdot t$  se determina cuando la ecuación 55 se integra entre los límites  $-h/2$  y  $+h/2$ :

$$N_x ds_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x ds_y \frac{r_y - z}{r_y} dz \quad (56)$$

Eliminando el factor  $ds_y$  de ambos lados, se tiene la ecuación que relaciona la fuerza normal y la tensión normal.

De la misma manera con la tensión cortante  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$ , se integran y se obtienen las fuerzas  $N_{xy}$  y  $Q_x$ :

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \frac{r_y - z}{r_y} dz \quad (57)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \frac{r_y - z}{r_y} dz \quad (58)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \frac{r_y - z}{r_y} dz \quad (59)$$

Aplicando el mismo razonamiento para la sección transversal al eje y se pueden establecer 3 ecuaciones más para las otras 3 tensiones. Se tiene entonces que:

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \frac{r_x - z}{r_x} dz \quad (60)$$

$$N_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} \frac{r_x - z}{r_x} dz \quad (61)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} \frac{r_x - z}{r_x} dz \quad (62)$$

Se observa que, a pesar de que  $\tau_{xz} = \tau_{yz}$ , las fuerzas de corte no son iguales. Aunque existen algunos casos en donde las fuerzas de corte se pueden considerar iguales, como es el caso en donde  $r_x = r_y$  (cúpula esférica), si  $\tau_{xy}$  no depende de  $z$  y en las conchas delgadas, en donde  $h$  y  $z$  son parámetros pequeños en comparación con los radios  $r_x, r_y$ , la diferencia entre las dos fuerzas no será muy grande y podrá despreciarse.

Cuando las tensiones no están distribuidas uniformemente en todo el espesor de la concha, algunas de estas tensiones tienden a generar momentos respecto al centro de la sección. Estos momentos influyen en el equilibrio del elemento y deben tenerse en consideración. En la sección transversal al eje  $x$ , las tensiones  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  generan momentos. El momento generado por la tensión  $\sigma_x$  se refiere a la línea tangente de la superficie media del elemento de ancho igual a  $ds_y$ , el cual es designado como  $M_x ds_y$ . En el caso de la tensión cortante  $\tau_{xy}$ , la tensión puede no estar distribuida de manera uniforme, estando su resultante en cualquier parte de la sección y generar un momento respecto a un eje normal a la sección, el cual pasa por el centro de la línea del elemento  $ds_y$ . Teniendo finalmente los momentos  $M_x$  y  $M_{xy}$ :

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \frac{r_y - z}{r_y} z dz \quad (63)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \frac{r_y - z}{r_y} z dz \quad (64)$$

Siendo  $M_x$  y  $M_{xy}$  el momento flector y el momento de torsión respectivamente.

Aplicando las mismas ideas para la sección transversal al eje  $y$ , se obtienen otros momentos flectores  $M_y$  y de torsión  $M_{yx}$ :

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \frac{r_x - z}{r_x} z dz \quad (65)$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} \frac{r_x - z}{r_x} z dz \quad (66)$$

Al igual que con las fuerzas de corte en donde se tiene que,  $\tau_{xz} = \tau_{yz}$  pero  $N_{xy} \neq N_{yx}$ , los momentos de corte son distintos también, aunque la diferencia por lo general no es muy grande y puede ser despreciada, pero en otros casos puede ser la clave para la solución exacta de un problema.

En el caso de que las tensiones sean independientes de  $z$ , los momentos no serán iguales a cero, como en el caso en que las tensiones están uniformemente distribuidas en todo el espesor de la concha. Los factores  $\frac{(r_x - z)}{r_x}$  y  $\frac{(r_y - z)}{r_y}$  son necesarios debido a la curvatura de la concha y representan el hecho de que los lados

del elemento extraído de la concha, no son rectangulares, sino trapezoidales y por lo tanto los centroides no estarán situados exactamente en la superficie media del elemento, esto puede apreciarse en la Figura 25.

Finalmente se tiene que las fuerzas y los momentos que actúan sobre el elemento extraído de la concha son:

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad (67)$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad (68)$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad (69)$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (70)$$

$$N_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (71)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (72)$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad (73)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z \left(1 - \frac{z}{r_y}\right) dz \quad (74)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (75)$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yx} z \left(1 - \frac{z}{r_x}\right) dz \quad (76)$$

Estas fuerzas y momentos, que en total son diez:  $N_x, N_{xy}, Q_x, N_y, N_{yx}, Q_y, M_x, M_{xy}, M_y, M_{yx}$ , son los que actúan en los lados del elemento extraído de la concha. Las fuerzas internas se denominan *resultantes de tensiones*, y los momentos de flexión y torsión se denominan *pares de tensiones*, los cuales actúan por unidad de longitud en la superficie media y son las integrales de las tensiones sobre el espesor de la concha.

### Hipótesis de diseño

Los factores  $\frac{z}{r_y}$  y  $\frac{z}{r_x}$  serán despreciados debido a que son cantidades muy pequeñas y al ser restado por la unidad la diferencia no será muy grande. De donde resulta que,  $N_{xy} = N_{yx}$  y  $M_{xy} = -M_{yx}$ .

Por otro lado, la tensión  $\sigma_z$  (tensión transversal normal a la superficie media) se desprecia debido a que es muy pequeña en comparación a las tensiones normales en  $x$  e  $y$ , teniendo un efecto muy pequeño en las deformaciones  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$ . Lo mismo ocurre con el momento de torsión alrededor del eje  $z$ .

Para el análisis de las conchas se considera la teoría de las pequeñas flechas, en donde las flechas bajo cargas son lo suficiente pequeñas para no generar cambios en la geometría de la concha y no alterar el equilibrio estático. El equilibrio estático se aplica a la geometría original. También se considera el comportamiento elástico lineal en donde, existe una relación directa entre las tensiones y las deformaciones.

Otras hipótesis incluyen que:

- Las secciones planas permanecen planas después de la deformación (hipótesis de Navier Bernoulli).
- La deformación debido al corte se desprecia.

Resumen de las hipótesis:

- La tensión transversal normal y el momento de torsión alrededor del eje  $z$  se desprecian.

- La teoría de las pequeñas flechas considera que, el equilibrio estático se aplica a la geometría original.
- Comportamiento elástico lineal, relación directa entre las tensiones y las deformaciones.
- Las secciones planas permanecen planas antes y después de la deformación (hipótesis de Navier Bernoulli).
- La deformación debido a las fuerzas de corte ( $Q_x$  y  $Q_y$ ) se desprecian.

## ECUACIONES QUE GOBIERNAN LA TEORÍA GENERAL DE LAS CONCHAS

### Equilibrio

Sobre una concha actúa una carga  $w$  (carga gravitacional), en donde si tomamos un elemento infinitamente pequeño de la concha pueden observarse el sistema de fuerzas internas que actúan para mantener al elemento en equilibrio, siendo esta la *resultante de tensiones*, Figura 28.a, y los *pares de tensiones*, Figura 28.b. Para un problema tridimensional como lo es el caso del elemento infinitamente pequeño extraído de la concha se conocen seis ecuaciones de equilibrio, ecuaciones 77 y 78.

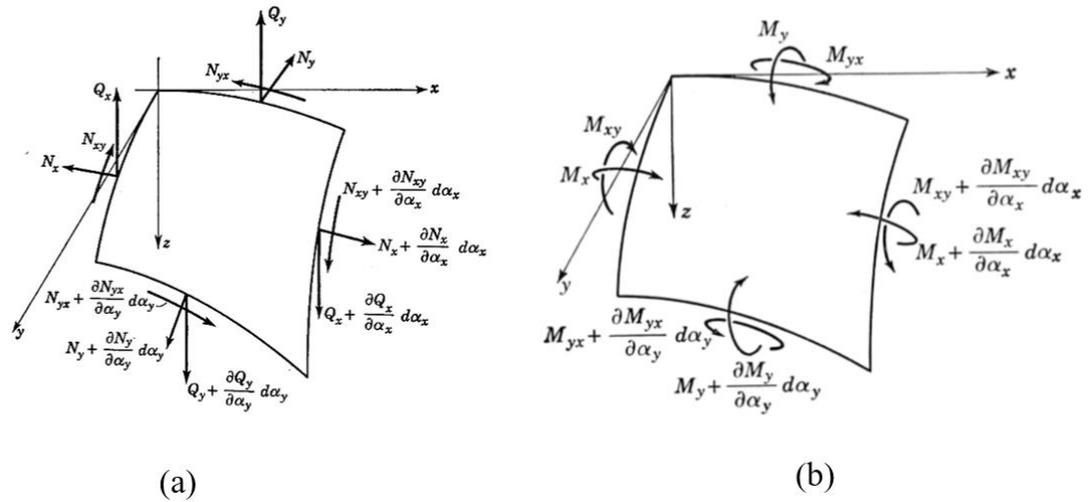


Figura 28. (a) Resultante de tensiones y (b) pares de tensiones que actúan sobre un elemento infinitamente pequeño de la concha. Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum Z = 0$$

$$\sum M_x = 0$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

(77)

(78)

Por lo comentado anteriormente, en donde se toma como hipótesis que la tensión transversal normal y el momento de torsión alrededor del eje z son despreciados,  $\sum M_z \neq 0$ , reduciendo a cinco las ecuaciones de equilibrio y a ocho el

número de incógnitas en las ecuaciones 67 a la 76, debido a que  $N_{xy} = N_{yx}$  y  $M_{xy} = -M_{yx}$ .

De las Figuras 28.a y 28.b, se pueden obtener el equilibrio del elemento<sup>7</sup>. A continuación, se presenta el equilibrio de forma general del elemento de la Figura 28:

$$\sum X = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N_x a_y) - N_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N_{yx} a_x) - Q_x \frac{a_x a_y}{r_x} + p_x a_x a_y = 0 \quad (79)$$

$$\sum Y = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_y} (N_y a_x) - N_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (N_{xy} a_y) - Q_y \frac{a_x a_y}{r_y} + p_y a_x a_y = 0 \quad (80)$$

$$\sum Z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} (Q_x a_y) + \frac{\partial}{\partial \alpha_y} (Q_y a_x) + N_x \frac{a_x a_y}{r_x} + N_y \frac{a_x a_y}{r_y} + p_z a_x a_y = 0 \quad (81)$$

$$\sum M_x = 0 \quad (82)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_y} (M_y a_x) + M_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - M_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial}{\partial \alpha_x} (M_{xy} a_y) + Q_y a_x a_y = 0 \quad (83)$$

<sup>7</sup> El desarrollo del equilibrio del elemento diferencial de la concha se deduce en la referencia [1]

$$\sum M_y = 0 \quad (84)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \alpha_x}(M_x a_y) + M_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + M_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\partial}{\partial \alpha_y}(M_{yx} a_x) + Q_x a_x a_y = 0 \quad (85)$$

## Relaciones de deformación-desplazamiento

Las componentes de desplazamiento en las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , son  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , respectivamente. Si determinamos el cambio de longitud en la dirección  $x$  del elemento que se muestra en la Figura 29, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_x} d\alpha_x + v \Delta_y - w \frac{a_x}{r_x} d\alpha_x \quad (86)$$

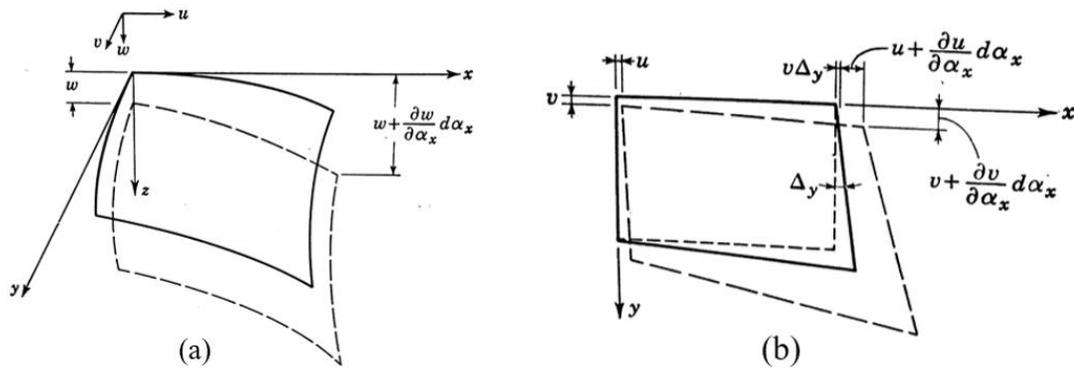


Figura 29. (a) Elemento infinitamente pequeño después de la deformación y (b) vista del plano  $xy$  del elemento diferencial después de la deformación. Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

Si el cambio de longitud ocurre sobre los arcos longitudinales que parten del origen en la Figura 29, se obtiene la deformación sobre la superficie media de la concha:

$$\epsilon_{x0} = \frac{1}{a_x} \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \quad (87)$$

$$\epsilon_{y0} = \frac{1}{a_y} \frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_y a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \quad (88)$$

$$\gamma_{xy0} = \frac{1}{a_x} \frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{2w}{r_{xy}} \quad (89)$$

Los primeros dos términos en  $\gamma_{xy0}$  representan el mismo cambio de ángulo obtenido en una placa, el tercer y cuarto termino representan el cambio de ángulo causado por el incremento en la longitud de los lados positivos (lados que no pasan por el origen de la Figura 27), el quinto termino representa el efecto de torsión de la superficie.

El cambio de curvatura que experimenta el elemento diferencial está representado por las siguientes expresiones:

$$\chi_x = \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \quad (90)$$

$$\chi_y = \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_y a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \quad (91)$$

$$2\chi_{xy} = \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_y a_x} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \quad (92)$$

El cambio de curvatura se expresa como el cambio en la rotación  $\partial\phi$  por longitud de arco ( $ada$ ), más la componente en la dirección  $x$  producida por la rotación  $\phi_y$  en la dirección  $y$ , y en la dirección  $y$  producida por la rotación  $\phi_x$  en la dirección  $x$ .

### Relaciones de tensión-deformación

Si del elemento diferencial una vez aplicada la carga sobre la concha se analiza la deformación en dirección  $x$ , Figura 29, se tiene que:

$$\epsilon_x = \frac{L_2 - L_1}{L_1} \quad (93)$$

$$L_1 = ds \left( 1 - \frac{z}{r_x} \right) \quad (94)$$

$$L_2 = ds(1 + \epsilon_{x0}) \left( 1 - \frac{z}{r'_x} \right) \quad (95)$$

De donde se obtiene:

$$\epsilon_x = \epsilon_{x0} - z \left( \frac{1}{r'_x} - \frac{1}{r_x} \right) \quad (96)$$

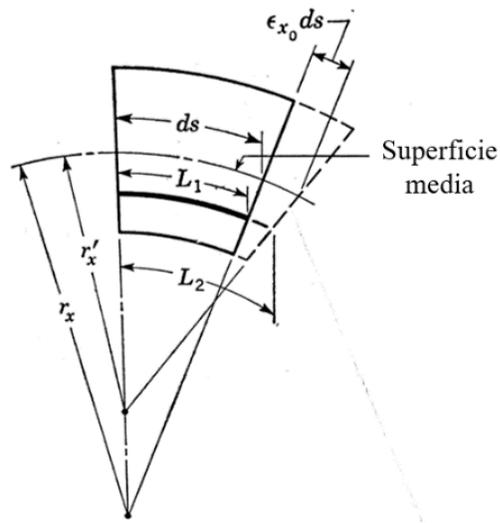


Figura 30. Plano yz, deformación del elemento diferencial. Tomada de “Thin Shell Concrete Structures” por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

Estableciendo  $\chi$  como el cambio de curvatura y  $\gamma_{xy}$  como la deformación cortante:

$$\epsilon_x = \epsilon_{x0} - z\chi_x \quad (97)$$

$$\epsilon_y = \epsilon_{y0} - z\chi_y \quad (98)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy} \quad (99)$$

Siendo las ecuaciones 97, 98 y 99 las expresiones de la deformación a una distancia  $z$  de la superficie media.

La mayoría de los análisis de conchas están basados en las propiedades del material, como lo son:

- 1) Linealmente elástico
- 2) Isotrópico
- 3) Homogéneo

El comportamiento elástico se determina mediante cálculos basados en un análisis de la estructura de concreto no fisurada, en la que se supone que el material es linealmente elástico, homogéneo e isótropo. El coeficiente de Poisson del concreto se puede considerar constante.

Teniendo en cuenta las propiedades del material que conforma la concha, la deformación puede ser expresada en términos de tensiones, asumiendo  $\sigma_z = 0$ , se tiene:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] \quad (100)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] \quad (101)$$

En donde,  $E$  representa el módulo de elasticidad y  $\nu$  el coeficiente de Poisson del material.

Expresando  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  en términos de  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$ :

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (102)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (103)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (104)$$

En donde  $G$  representa el módulo de rigidez.

Sustituyendo las expresiones de las ecuaciones 100 y 101 en las de las ecuaciones 105, 106 y 107, se tienen las ecuaciones generales de tensión-deformación.

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} [\epsilon_{x0} + \nu\epsilon_{y0} - z(\chi_x + \nu\chi_y)] \quad (105)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} [\epsilon_{y0} + \nu\epsilon_{x0} - z(\chi_y + \nu\chi_x)] \quad (106)$$

$$\tau_{xy} = G(\gamma_{xy0} - 2z\chi_{xy}) \quad (107)$$

Estas tensiones pueden ser sustituidas en las expresiones de las ecuaciones 67 a la 76 e integrando en  $h$  para obtener las resultantes de tensiones y los pares de tensiones que actúan en el elemento diferencial de la concha.

$$N_x = K(\epsilon_{x0} + \nu\epsilon_{y0}) \quad (108)$$

$$N_y = K(\epsilon_{y0} + \nu\epsilon_{x0}) \quad (109)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = Gh\gamma_{xy0} \quad (110)$$

$$M_x = -D(\chi_x + \nu\chi_y) \quad (111)$$

$$M_y = -D(\chi_y + \nu\chi_x) \quad (112)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = \frac{Gh^3}{6}\chi_{xy} = D(1 - \nu)\chi_{xy} \quad (113)$$

$$K = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \quad (114)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (115)$$

En donde  $K$  representa la rigidez extensional,  $G$  el módulo de rigidez y  $D$  la rigidez a la flexión.

### Ecuaciones fuerza-desplazamiento

Sustituyendo las ecuaciones 90 a la 95 en las expresiones de las ecuaciones 108 a la 113 se tiene:

$$N_x = K \left[ \frac{1}{a_x} \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{\nu}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} + \nu \left( \frac{1}{a_y} \frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} \right) \right] \quad (116)$$

$$N_y = K \left[ \frac{1}{a_y} \frac{\partial v}{\partial \alpha_y} + \frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{w}{r_y} + v \left( \frac{1}{a_x} \frac{\partial u}{\partial \alpha_x} + \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{w}{r_x} \right) \right] \quad (117)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = Gh \left( \frac{1}{a_x} \frac{\partial v}{\partial \alpha_x} + \frac{1}{a_y} \frac{\partial u}{\partial \alpha_y} - \frac{u}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{v}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} - \frac{2w}{r_{xy}} \right) \quad (118)$$

$$M_x = -D \left[ \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + v \left( \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \right) \right] \quad (119)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_y} + \frac{\phi_x}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + v \left( \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_x} + \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} \right) \right] \quad (120)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{a_y} \frac{\partial \phi_x}{\partial \alpha_y} + \frac{1}{a_x} \frac{\partial \phi_y}{\partial \alpha_x} - \frac{\phi_x}{a_x a_y} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} - \frac{\phi_y}{a_x a_y} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} \right) \quad (121)$$

Finalmente, tomando las ecuaciones de equilibrio 79 a la 85 y las expresiones de las ecuaciones 116 a la 121, juntas se tienen, 11 ecuaciones y 11 incógnitas. Por lo tanto, una completa solución es posible.

En resumen, la teoría general de conchas se puede establecer en cinco pasos:

- 1) Determinación del equilibrio de fuerzas del elemento diferencial extraído de la concha (cinco ecuaciones con ocho incógnitas).
- 2) Establecer las relaciones de deformación-desplazamiento (seis ecuaciones con tres incógnitas).

- 3) Suponiendo las propiedades del material se establecen las relaciones de tensión-deformación (tres ecuaciones con seis incógnitas), posteriormente se obtienen las expresiones de fuerzas-deformación (seis ecuaciones con tres incógnitas).
- 4) Se transforman las relaciones de fuerza-deformación en ecuaciones de fuerza-desplazamiento (seis ecuaciones con tres incógnitas).
- 5) Se combinan las ecuaciones de fuerza-desplazamiento con las ecuaciones de equilibrio, punto 1, para así obtener una completa formulación (11 ecuaciones con 11 incógnitas).

## ANÁLISIS GENERAL DE LAS CONCHAS

El continuo progreso de los métodos numéricos computacionales que permiten realizar los cálculos de manera más rápida y exacta, el eficiente desarrollo estructural y constructivo, además las distintas formas que presentan las conchas que las hacen atractivas, hacen que el uso de las conchas empleadas como cubiertas sea cada vez más factible. Por otro lado, el uso de los programas de computadoras requiere de un conocimiento básico de la teoría y el comportamiento estructural de las conchas, lo cual es necesario para la interpretación de los resultados obtenidos, el detallado del acero de refuerzo y el diseño de los elementos de borde. El análisis de las conchas a menudo abarca dos distintas, pero comúnmente aplicadas teorías. La primera de ellas es la *teoría de membrana* y la segunda, la *teoría de flexión* o *teoría general de conchas*.

## Estado de membrana

Las resultantes de tensiones y los pares de tensiones pueden ser divididos en dos grupos, fuerzas que actúan en el plano del elemento y fuerzas que actúan perpendicular al plano del elemento infinitamente pequeño extraído de una concha. El primer grupo denominado como *fuerzas de membrana* ( $N_x, N_y, N_{xy} = N_{yx}$ ) y el segundo grupo como, *fuerzas de flexión* ( $Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy} = -M_{yx}$ ).

El estado de tensiones de membrana ocurre por lo general en conchas delgadas (conchas con una relación espesor-radio mínimo menor o igual a 1/20) y es debido a esto que se puede despreciar la flexión. Por lo tanto, la teoría de este estado de tensiones de membrana se denomina *teoría de membrana*, en donde las ecuaciones de equilibrio para un elemento diferencial de la concha se reducen a tres con tres incógnitas, fuerzas de membrana.

3 ecuaciones de equilibrio:

$$\frac{\partial(N'_x a_y)}{\partial \alpha_x} - N'_y \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + N'_{xy} \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + \frac{\partial(N'_{yx} a_x)}{\partial \alpha_y} + p_x a_x a_y = 0 \quad (122)$$

$$\frac{\partial(N'_y a_x)}{\partial \alpha_y} - N'_x \frac{\partial a_x}{\partial \alpha_y} + N'_{yx} \frac{\partial a_y}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial(N'_{xy} a_y)}{\partial \alpha_x} + p_y a_x a_y = 0 \quad (123)$$

$$\frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_{xy}}{r_{xy}} + \frac{N'_{yx}}{r_{xy}} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0 \quad (124)$$

$$3 \text{ incógnitas } \begin{cases} N'_x \\ N'_y \\ N'_{xy} = N'_{yx} \end{cases} \quad (125)$$

Se emplea “ ‘ ” en las fuerzas para indicar que las resultantes de tensiones de membrana son solo aproximaciones de aquellas que pueden ser obtenidas mediante las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones fuerza-desplazamiento.

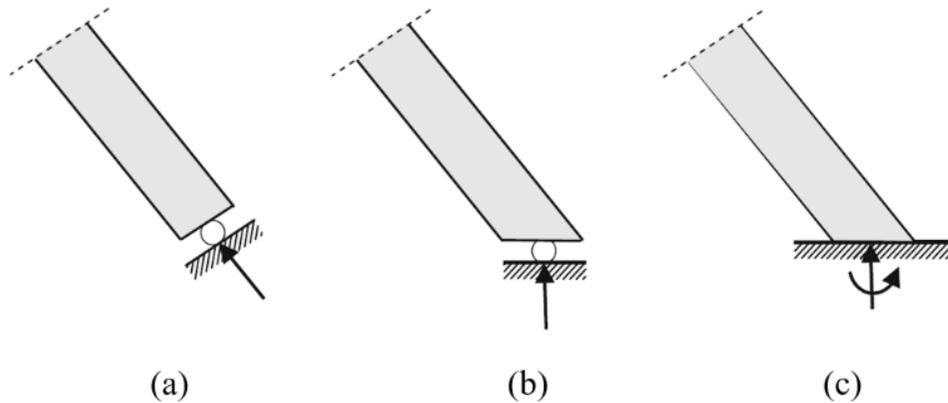
La teoría de membrana puede ser aplicada a todas las conchas sin importar el material con que estén hechas, ya que las propiedades del material no influyen en las ecuaciones de equilibrio, permitiendo así obtener una solución sencilla y directa. Se asume que, todas las cargas son tomadas por las fuerzas de membrana, sin flexión ni torsión, transmitiendo las cargas a los apoyos primariamente por fuerzas longitudinales.

Existen algunas condiciones en las cuales el estado de membrana de una concha puede ser perturbado, ocasionando que la teoría de membrana no satisfaga todos los equilibrios o desplazamientos requeridos en estas condiciones. Algunas de las condiciones son:

- a) Condiciones de borde y deformaciones en los apoyos que son incompatibles con los requerimientos de la teoría de membrana, Figura 31.b.
- b) Aplicación de una carga puntual, Figura 33.a.

- c) Cambios en la geometría y/o cambios repentinos en la curvatura de la concha, Figura 33.b.

Las condiciones de apoyo de la concha que se muestra en la Figura 31.a, alcanzan el estado de membrana, en donde todas las ecuaciones de equilibrio se satisfacen. Por otro lado, las fuerzas de membrana solas no pueden satisfacer el equilibrio en el borde de la concha de la Figura 31.b, así como tampoco, las condiciones de un apoyo fijo son compatibles con los requerimientos del estado de membrana.



*Figura 31.* (a) compatible con el estado de membrana; (b) incompatible con el estado de membrana; (c) efectos localizados de borde. Tomada de “Structural Shell Analysis” por J. Blaauwendraad & J. H. Hoefakker, Springer Science + Business Media Dordrecht.

Además del tipo de apoyo que presenta la concha, los desplazamientos requeridos por la teoría de membrana en los bordes de la concha deben ser cumplidos, para que así exista el estado de membrana. En el caso del apoyo que se muestra en la Figura 31.c, las condiciones no permiten que los desplazamientos originados por la carga distribuida aplicada o por el cambio de temperatura sean de forma libre, perturbando así el estado de membrana, Figura 32.

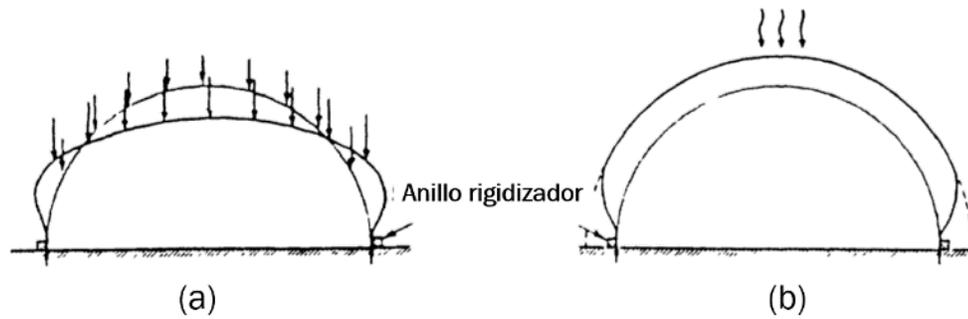


Figura 32. (a) carga distribuida aplicada sobre la concha, (b) cambio de temperatura sobre la concha. Tomada de “Design and Analysis of Shell Structures” por M. Farshad, Springer Science + Business Media Dordrecht.

La carga aplicada sobre la concha y su geometría pueden afectar el estado de membrana. Por ejemplo, los pliegues o cualquier discontinuidad que exista en la geometría de la concha, así como también las cargas puntuales, perturban el estado de membrana, Figura 33.

En resumen, las conchas transmiten la carga aplicada por las fuerzas externas en su mayor parte por mecanismos de membrana. En algunas regiones de la concha el estado de flexión se desarrolla para satisfacer el equilibrio específico o las deformaciones requeridas. El rango de influencia del estado de flexión es local y confinado a la proximidad de la carga y/o discontinuidades geométricas. Aparte de estas situaciones. Para el resto de la concha, la mayor parte de ella está libre de flexión y puede ser analizada y diseñada mediante la teoría de membrana.

La teoría de membrana puede ser utilizada indudablemente en el diseño y análisis inicial. También puede ser utilizada como una herramienta para comprender el comportamiento estructural de la concha sin tener que emplear elaboradas formulas o métodos computacionales. Los cálculos basados en la teoría de membrana pueden servir como una guía para saber el orden de magnitud que se espera en los resultados

obtenidos mediante programas de computadora y así poder ser interpretados y revisados.

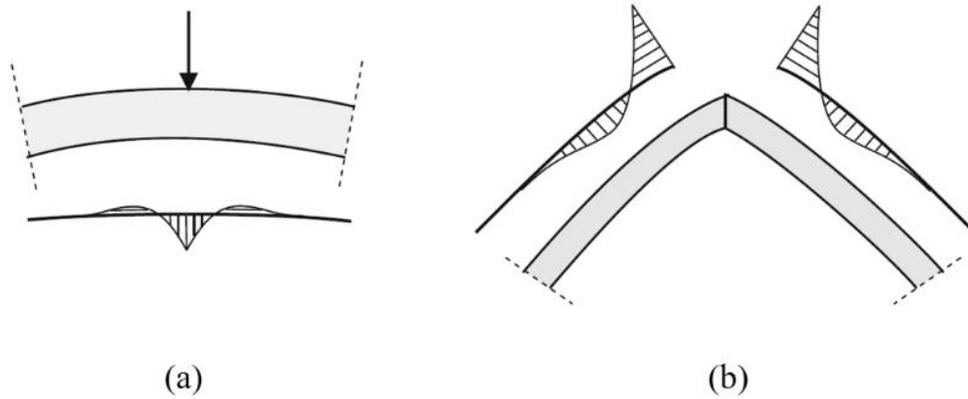


Figura 33. (a) Carga puntual, (b) cambio en la geometría. Tomada de “Structural Shell Analysis” por J. Blaauwendraad & J. H. Hoefakker, Springer Science + Business Media Dordrecht.

## Estado de flexión

El estado de flexión se conforma por:

- 3 fuerzas con distribución uniforme de tensiones (estado de membrana).  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy} = N_{yx}$ .
- 2 momentos flectores.  $M_x$ ,  $M_y$ .
- 2 fuerzas cortantes.  $Q_x$ ,  $Q_y$ .
- 1 momento de torsión.  $M_{xy} = -M_{yx}$ .

Las perturbaciones en los bordes de la concha producen flexión. Además de la simple estática, se emplean condiciones de deformación para la resolución de problemas en estado de flexión. El planteamiento y resolución de las ecuaciones diferenciales de la teoría general de las conchas y en particular en su adaptación a las condiciones de borde, dan lugar casi siempre a grandes dificultades matemáticas. Empleando el cálculo diferencial, las tres ecuaciones obtenidas de la teoría general de conchas, las cuales son ecuaciones diferenciales parciales obtenidas de manera simultánea en  $u$ ,  $v$  y  $w$ , por sucesiva diferenciación y eliminación, se reducen las tres ecuaciones diferenciales parciales a una ecuación diferencial parcial de octavo orden, que solo contiene una incógnita de desplazamiento, ya sea  $u$ ,  $v$  o  $w$ .

### Método general de análisis

Los métodos más conocidos para el análisis general de una concha de concreto, independientemente del tipo de la concha, son: (1) método de la fuerza o de compatibilidad; (2) método de desplazamiento o de rigidez.

Para el caso de los análisis realizados por computadora mediante el método de elementos finitos, este se basa en método de rigidez. Si se realizan los cálculos del análisis de manera manual, el método de compatibilidad ofrece más ventajas en comparación al método de rigidez, además el método de compatibilidad es utilizado para entender el comportamiento básico de las conchas. Para poder analizar las conchas por medio de software de computadoras, es necesario entender el comportamiento básico y así poder interpretar los resultados, el detallado del acero de refuerzo y para el diseño de los elementos de borde de la concha de manera correcta.

La solución analítica de una concha dada, sin importar el tipo de concha que se esté analizando, el método de compatibilidad, acorde a la Figura 34, se resume en los siguientes pasos:

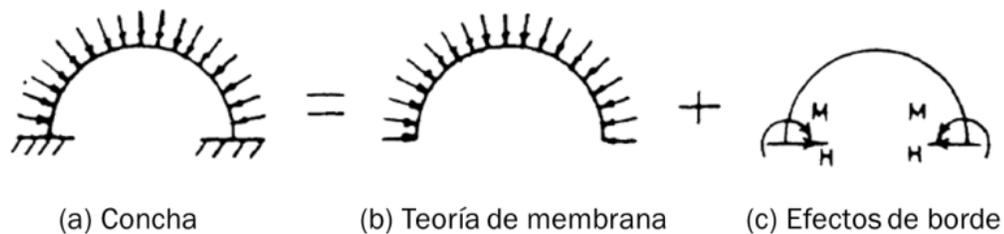
1) **Uso de la teoría de membrana:** Realizar un análisis de membrana de la concha sometida a una carga externa distribuida, reduciendo las ecuaciones de equilibrio de la teoría general de conchas a la teoría de membrana, a tres ecuaciones de tres incógnitas, Figura 34.b, ya que se considera que la carga es resistida completamente por las resultantes de tensiones de membrana. En este paso la concha es estáticamente determinada.

2) **Determinación de los errores en los bordes de la concha:** Las fuerzas y los desplazamientos obtenidos a través del análisis de membrana necesariamente no tienen que estar en equilibrio o ser compatibles con las condiciones en los bordes de la concha. Por lo tanto, se determinan de esta manera los errores en los bordes debido a la resultante de tensiones de membrana.

3) **Correcciones:** Las fuerzas y los desplazamientos correctivos deberán ser aplicados en los bordes de la concha para eliminar las incompatibilidades causadas por la resultante de tensiones de membrana. La concha es analizada con ayuda de la teoría de flexión, siendo la solución de la ecuación homogénea, la ecuación diferencial en la cual todos los términos que involucran cargas son apartados (la carga distribuida es removida). Las correcciones corresponden a los efectos unitarios de borde derivados de la solución de la ecuación homogénea, comúnmente referida como la teoría de flexión. Se hace correcciones que deben tomar lugar en los efectos de borde, Figura 34.c.

4) **Compatibilidad:** Se calcula la magnitud de los efectos de bordes necesarios para eliminar los errores de la teoría de membrana.

5) **Resultante de fuerzas:** La suma de las fuerzas de membrana y las condiciones de compatibilidad dan como resultado la resultante de fuerzas.



*Figura 34.* (a) estado inicial de la concha bajo la acción de una carga externa distribuida; (b) teoría de membrana, en donde solo se toma en consideración la fuerza externa distribuida sin la flexión y/o torsión; (c) efectos de bordes en la concha analizados por medio de la teoría de flexión. Tomada de “Design and Analysis of Shell Structures” por M. Farshad, Springer Science + Business Media Dordrecht.

### Simplificaciones en la teoría general de las conchas

Para cualquier tipo de concha que se analice, el problema de las tensiones y los desplazamientos se puede resolver mediante con las ecuaciones 79 a la 85 y de las ecuaciones 116 a la 121. Pero lo cierto es que en la práctica la realidad es otra, ya que pocos tipos de conchas han sido analizadas a fondo, de hecho, muchas de las conchas de concreto reforzado han sido construidas sin realizar un análisis que ligeramente se acerque al que se presenta aquí. Quedando claro así que el análisis de una concha mediante la teoría general es extremadamente complicado de manera analítica, incluso para los tipos de conchas más simples, como es el caso de una concha cilíndrica circular. Es debido a esto que se busca que el diseño de la concha este

basado en ciertas simplificaciones que hagan factible su análisis. Estas simplificaciones se agrupan en dos categorías:

1) *Simplificaciones en la formulación matemática*, con estas simplificaciones se busca demostrar que algunos términos tienen poca importancia, por ejemplo, el caso de las ecuaciones 67 a la 76 se tiene que el término  $z/r$  puede ser despreciado debido a que es muy poca la diferencia al ser restado con la unidad, también está el caso de  $\sigma_z = 0$ , y así como esos casos se tienen otros, buscando mediante estas simplificaciones obtener una solución matemática razonable. La mayor simplificación en la formulación matemática para el análisis de las conchas es la teoría de membrana.

2) *Simplificaciones de las formulaciones físicas*, en el caso de las conchas de concreto reforzado son de gran utilidad ya que, se basan en acciones estructurales ficticias. Se tiene como ejemplo, la simplificación arco-viga para el caso de las conchas cilíndricas empleadas como cubiertas.

En el caso del diseño de conchas de concreto utilizadas como cubiertas, estas simplificaciones son aceptables ya que la precisión durante la construcción no es lo suficientemente alta, de modo que no se justifica un análisis tan preciso. Por consiguiente, la manera ideal de diseñar es la que se presenta en la Figura 24, en donde se busca entender la acción estructural real, la cual se puede obtener solo manteniendo las características físicas esenciales y las correspondientes formulaciones matemáticas.

## CLASIFICACIÓN DE LAS CONCHAS

Existen tres tipos de clasificación para las conchas, la primera de ellas y la más general es según su *curvatura gaussiana*, la cual es la más utilizada en la ingeniería; la segunda de ellas es si las conchas son superficies desarrollables o no desarrollables; y la tercera clasificación, empleada con más frecuencia entre arquitectos es, según el *desarrollo geométrico* que presente la superficie de la concha.

Utilizando la definición de una curva gaussiana, la cual matemáticamente define a la curvatura gaussiana de la superficie como el producto de las dos principales curvaturas:

$$K = \frac{1}{r_x} \frac{1}{r_y} \quad (126)$$



Figura 35. Orden de clasificación de las conchas.

Dependiendo del valor de  $K$  obtenido, la curvatura gaussiana puede ser positiva, negativa o cero, Figura 36. En el caso de una concha con superficie gaussiana positiva en donde,  $K > 0$ , usualmente llamada concha sinclástica (del griego *syn*: con, y *klastos*: corte), está formada por dos familias de curvas ambas con la misma dirección; tienden a dirigir el agua más rápidamente a los bordes de la concha y por lo general están confinados en una zona angosta en los bordes, esto hace que puede aplicarse la teoría de membrana en toda la concha a excepción de una pequeña porción cerca de los bordes de la concha.

Las conchas que presentan una *curvatura gaussiana cero* están formadas solamente por una familia de curvas, como lo es el caso de las conchas cilíndricas. En estas conchas el agua tiende a los bordes no tan rápido como en el caso de las conchas con curvatura gaussiana positiva, pero se extiende más que en las conchas de curvatura gaussiana positiva.

Por último, las conchas de curvatura gaussiana negativa, también llamadas como conchas anticlásticas, están formadas por dos familias de curvas cada una con direcciones opuestas, como es el caso de los paraboloides hiperbólicos. A diferencia de los otros dos tipos de conchas, en las conchas de curvatura gaussiana negativa el tiempo en que tarda el agua en llegar a los bordes es notablemente menor. La curvatura gaussiana que posee la concha permite dar una idea de la cantidad de refuerzo que se requiere en los bordes.

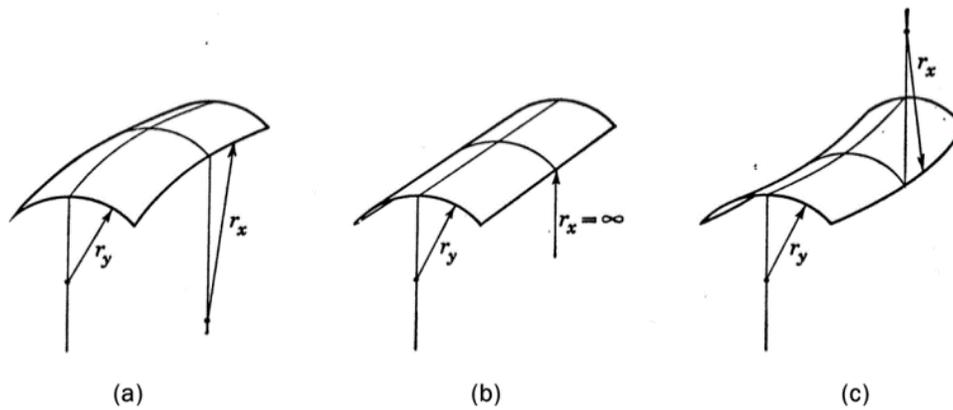


Figura 36. Tipos de curvas gaussianas que se presentan en las conchas, (a) concha con curvatura gaussiana positiva, (b) concha con curvatura gaussiana cero, (c) concha con curvatura gaussiana negativa. Tomada de “Thin Shell Concrete Structures” por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

La otra clasificación que se utiliza en las conchas es, según el desarrollo geométrico que presente y están formadas por las siguientes clases:

- Superficies de revolución.
- Superficies de traslación.
- Superficies regladas.
- Superficies compuestas.

A su vez, estas clases entran en alguno de los dos siguientes grupos, superficies desarrollables o superficies no desarrollables. Las superficies desarrollables son aquellas que, al aplanarlas no se introducen cortes, caso contrario a lo que ocurre en las superficies no desarrollables, las cuales al aplanarlas se introducen cortes en una serie de secciones, en donde su rigidez y su resistencia mecánica proceden, en gran parte, de la resistencia a las deformaciones que tienden a aplanarlas, es decir, a reducir sus curvaturas. En cambio, las conchas desarrollables son menos rígidas y menos resistentes que las conchas no desarrollables.

**Superficies de revolución:** Son aquellas que se definen por la rotación de una curva plana alrededor de un eje vertical, algunos ejemplos son las cúpulas y los conos, Figura 37.

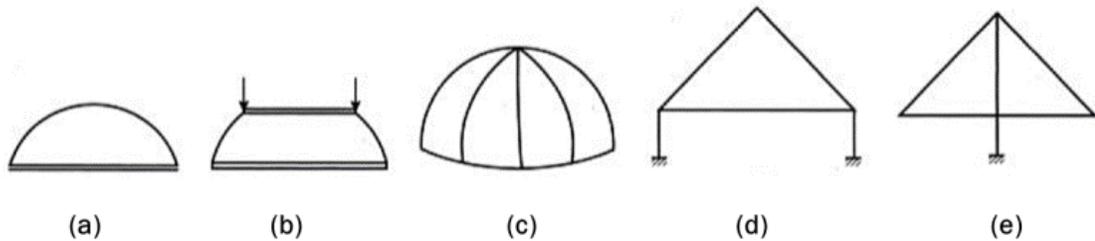


Figura 37. Conchas con superficie de revolución, (a) cúpula circular simple, (b) cúpula circular con tragaluz, (c) cúpula con nervaduras, (d) cúpula cónica, (e) cubierta en forma de paraguas cónico. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Privete Limited.

**Superficies de traslación:** La superficie de una concha de traslación se obtiene moviendo una curva plana  $K_1$ , denominada generatriz, la cual se mueve sobre otra curva plana  $K_2$ , denominada directriz. La dirección y las magnitudes de las curvaturas  $\frac{1}{R_1}$  y  $\frac{1}{R_2}$  de las curvas  $K_1$  y  $K_2$  es importante ya que, al estar en la misma dirección se designan como conchas sinclásticas (de curvatura gaussiana positiva), cuando están en direcciones opuesta son conchas anticlásticas (de curvatura gaussiana negativa), las conchas cilíndricas circulares y los paraboloides hiperbólicos son algunos ejemplos de conchas con superficie de traslación, Figura 38.

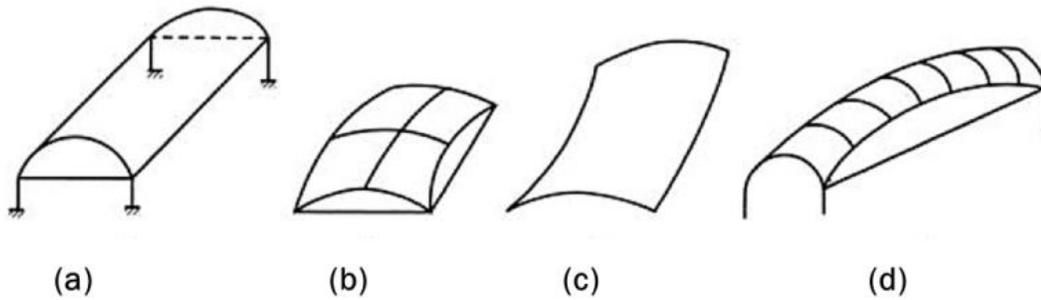


Figura 38. Conchas con superficie de traslación, (a) concha cilíndrica circular, (b) concha con forma de paraboloides elíptico, (c) concha con forma de paraboloides hiperbólico, (d) concha con forma de toroide. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Privete Limited.

**Superficies regladas:** Son superficies generadas totalmente por líneas rectas, por lo tanto, se generan por el desplazamiento de los extremos de un segmento de recta sobre dos curvas separadas, Figura 39. Las superficies pueden ser simple o doblemente regladas, en el caso de las superficies simplemente regladas se puede trazar en cada punto de la superficie una línea recta, Figura 39.a. Se denominan superficies doblemente regladas cuando, en cada punto de la superficie se pueden trazar dos líneas rectas, Figura 39.b.

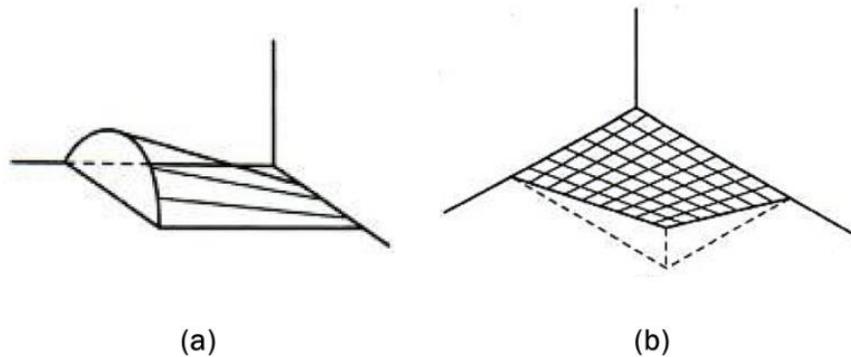
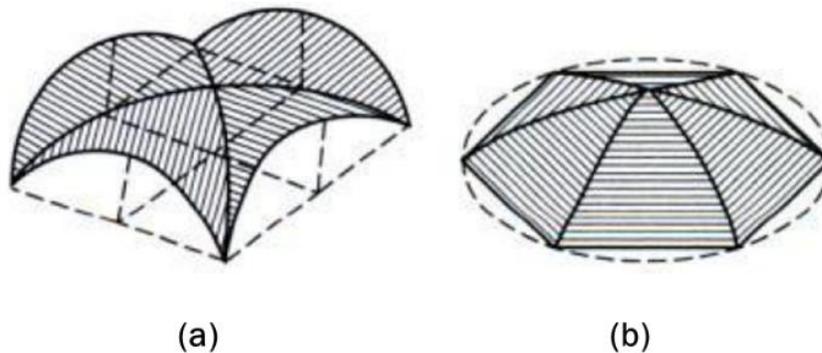


Figura 39. Conchas con superficie reglada, (a) concha con superficie de conoide, superficie simplemente reglada; (b) concha con superficie de paraboloides hiperbólico, superficie doblemente reglada. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Privete Limited.

**Superficies compuestas:** Las superficies definidas geoméricamente en los puntos anteriores, pueden combinarse para generar superficies compuestas las cuales son posible diseñar y construir hoy en día debido a los avances computacionales y en los métodos constructivos, Figura 40. Un ejemplo de las superficies compuestas es, si se cortan perpendicularmente dos conchas cilíndricas, se puede cubrir un área cuadrada o rectangular, Figura 40.a.



*Figura 40.* Conchas con superficies compuestas, (a) concha con superficie compuesta por dos superficies cilíndricas cortas entre si perpendicularmente (b) domo poligonal compuesto por conchas cilíndricas. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Privete Limited.

Con base a los dos tipos de clasificación de las conchas, se pueden agrupar los distintos tipos de concha según su curvatura gaussiana como la curvatura que presente, simple o doble, de la siguiente manera:

- 1) Curvatura simple, o conchas con curvatura gaussiana cero. En algunos casos son desarrollables.
  - a. Conchas de revolución: Cilindros circulares, conos.
  - b. Conchas de traslación y superficies regladas: Cilindros circulares o no circulares, conos.

- 2) Conchas con curvatura doble y curvatura gaussiana positiva (conchas sinclásticas). No son desarrollables.
  - a. Conchas de revolución: Domos esféricos, elipsoides de revolución, paraboloides de revolución.
  - b. Conchas de traslación y superficies regladas: Paraboloides elípticos, paraboloides de revolución.
  
- 3) Conchas con curvatura doble y curvatura gaussiana negativa (conchas anticlásticas). No son desarrollables.
  - a. Conchas de revolución: Hiperboloide de revolución de una hoja.
  - b. Conchas de revolución y superficies regladas: Paraboloides hiperbólicos, conoides, hiperboloides de revolución de una hoja.
  
- 4) Conchas compuestas, parcialmente sinclásticas y parcialmente anticlásticas; conchas compuestas de conchas de formas más simples. Figura 40.a.

Se debe agregar que, además de las clasificaciones presentadas anteriormente, en cuanto al espesor de la concha se debe tener en consideración para el análisis, clasificando a las conchas de concreto delgadas cuando la relación espesor-radio,  $h/R_{min}$  de curvatura es aproximadamente de 1/200 (Farshad, 1992).

En donde,  $h$  es el espesor de la concha y  $R_{min}$  es el menor de los radios principales de la concha.

## ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS

El empleo de diferentes técnicas de cálculo para el desarrollo de la respuesta del modelo matemático de una estructura, se denomina *solución analítica*. La cual representa el comportamiento del modelo matemático de la estructura bajo cualquier circunstancia. Este método de análisis se enfoca en obtener la solución más exacta, la cual generalmente es muy complicada de resolver y requiere de una gran cantidad de tiempo para el caso de modelos con superficies complejos. Este inconveniente puede resolverse mediante el empleo de un método de análisis numérico como lo son los elementos finitos. La idea general de este método es, simplificar la estructura en un modelo el cual represente el comportamiento estructural, con las condiciones de borde establecidas y con las propiedades del material que conforman la estructura, para luego, discretizar la estructura en un número finito de elementos simples, y así obtener más fácilmente una solución. Al discretizar el modelo en pequeños elementos, el resultado se obtiene por medio del desarrollo de miles de cálculos repetitivos. El método utiliza los desplazamientos como variable para obtener las deformaciones y las tensiones en los elementos. Los resultados obtenidos por este método numérico no son exactos, pero presenta una solución aproximada que satisface el equilibrio dentro de un rango de tolerancia establecido.

El incremento de las capacidades computacionales en las últimas décadas ha hecho más accesible emplear un análisis de elementos finitos en el diseño estructural. Cálculos complejos que anteriormente no podían ser realizados, ahora pueden ser fácilmente desarrollados. En el caso del diseño de conchas, ya sea de concreto reforzado o de algún otro material, el uso de elementos finitos tiene una gran ventaja al poder modelar y analizar estructuras con superficies geométricas complejas de manera más sencilla en comparación si se emplea una solución analítica. Pero, también se debe tener presente que algún error al momento en que se está modelando la superficie o en la asignación de algunos de los parámetros, puede llevar a

resultados muy diferentes a los esperados. Es debido a esto que, el diseñador debe entender el comportamiento estructural de las conchas, para así estar al tanto de cuáles son los resultados que debe esperar.

Al realizar un análisis de elementos finitos deben seguirse los siguientes pasos:

**1. Fase de pre-procesamiento:**

a. *Diseño.* Se ingresan las propiedades geométricas de la estructura, las propiedades de los materiales que la componen, las condiciones de borde, cargas que actúan sobre las estructuras, son definidas en esta fase.

b. *Discretización.* La geometría de la superficie se discretiza en pequeños elementos con forma simple, triangular o rectangular, y así crear una malla de elementos finitos de una densidad apropiada. El término finito indica que estos elementos no son infinitamente pequeños, pero son relativamente pequeños en relación a todo el modelo. Es evidente que la composición de la malla de elementos finitos y su densidad tienen un efecto en la solución final.

**2. Fase de solución.** Un conjunto de ecuaciones algebraica que describen la relación fuerza-desplazamiento de la estructura se resuelven para obtener los resultados nodales, tales como desplazamientos y rotaciones.

**3. Fase de post procesamiento.** Aquí las deformaciones y tensiones son calculadas de los desplazamientos nodales. De los resultados obtenidos en el análisis

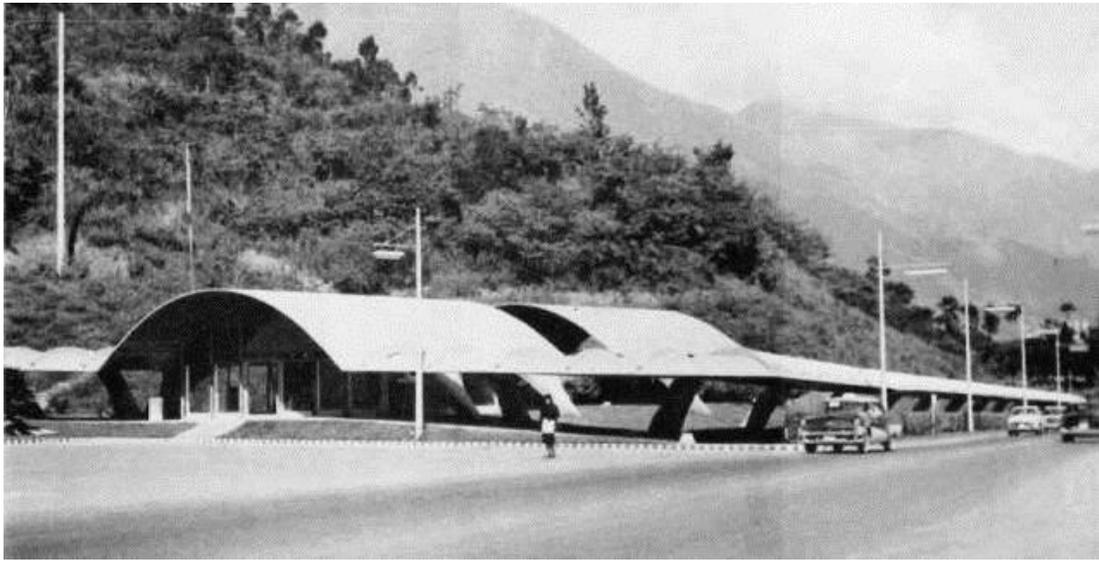
se puede evaluar la precisión y así aplicar las medidas necesarias de corrección. Los resultados obtenidos del análisis pueden leerse de manera gráfica, dependiendo del programa que se emplee, lo cual ayuda al diseñador a encontrar fácilmente las tensiones críticas, o los niveles de tensiones, fuerzas, desplazamientos y otros parámetros en la estructura.

## CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

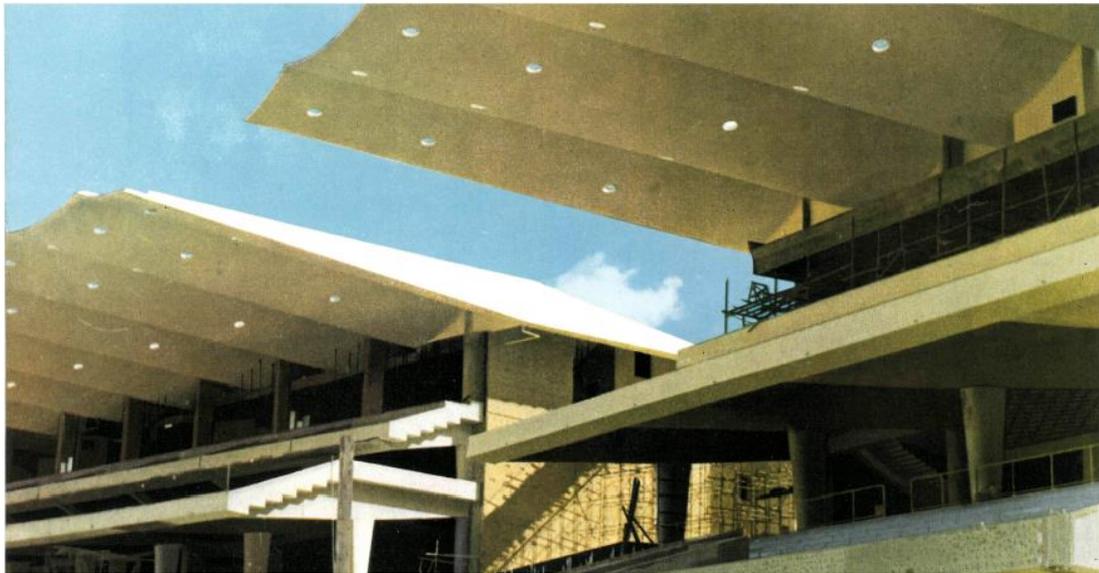
## Conchas cilíndricas

Las superficies que presentan una curvatura gaussiana cero, o simple curvatura, son aquellas que, están formadas por una sola familia de curvas, además son superficies desarrollables. En el caso de las conchas de concreto reforzado, las conchas con superficie desarrollable presentan una menor resistencia estructural en comparación a las que presentan una superficie no desarrollable. Algunos ejemplos son: superficies cilíndricas y conos.

En el caso de las conchas de concreto reforzado empleadas como cubiertas, el tipo más común de conchas de curvatura gaussiana cero son las conchas cilíndricas. Por lo cual se analizarán y discutirán solo este tipo de conchas, específicamente las conchas cilíndricas circulares.



*Figura 41.* Concha cilíndrica empleada como cubierta de la caseta de bombas y transformadores, proyectado por Carlos Raúl Villanueva, Ciudad Universitaria de Caracas. Caracas, Venezuela. Autor desconocido. Fotografía de: Autor desconocido. Obtenida de: <https://fundaayc.wordpress.com>



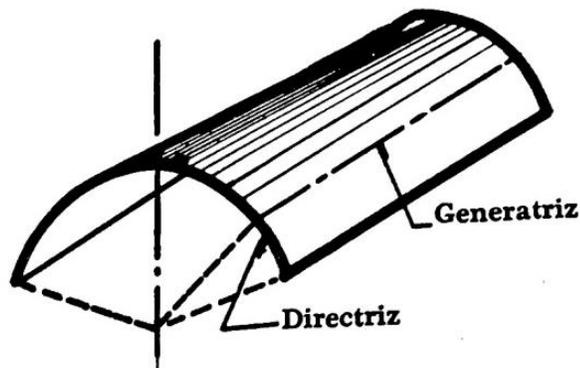
*Figura 42.* Conchas cilíndricas múltiples pretensadas, empleadas como cubierta de las tribunas del Hipódromo La Rinconada. Caracas, Venezuela. Diseñadas por Arthur Froehlich. Fotografía de: Autor desconocido. Informes de la construcción, Vol. 12, n° 107, enero 1959.

## CONCHAS CILÍNDRICAS EMPLEADAS COMO CUBIERTAS

Las conchas cilíndricas de concreto reforzado pueden ser empleadas eficiente y estéticamente como cubiertas de diversas edificaciones, pueden cubrir grandes áreas rectangulares como en el caso de terminales aéreos, de autobuses y de trenes, estadios deportivos, etc., siendo muy común el uso de conchas cilíndricas largas para fábricas, almacenes y en el caso de las conchas cilíndricas cortas para hangares de aviones. Las formas cilíndricas son de fácil construcción tanto el encofrado como el armado.

### Geometría de la superficie

Una de las conchas más empleadas como cubiertas son las que poseen forma cilíndrica, superficies desarrollables de curvatura simple (curvatura gaussiana cero) que en la mayoría de los casos poseen una directriz que es un arco de circunferencia. La superficie de la concha está limitada por las líneas rectas paralelas al eje del cilindro y por dos líneas curvas situadas en planos perpendiculares al eje, Figura 43.



*Figura 43.* Superficie geométrica de una concha cilíndrica compuesta por dos directrices y las generatrices paralelas al eje del cilindro. Tomada de “Análisis, Cálculo y Diseño de las Bóvedas de Cáscara” por A. Olvera López, 1968, Compañía Editorial Continental, S.A.

## Elementos de una concha cilíndrica

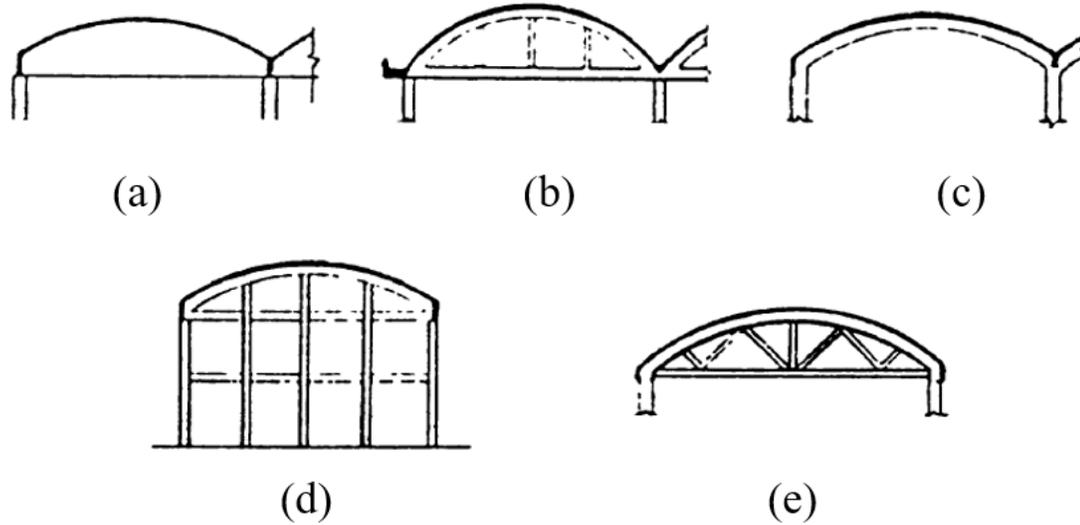
En su forma general, las conchas cilíndricas están constituidas, principalmente, por tres miembros fundamentales: (1) Viga o tensor de borde; (2) concha, propiamente dicha; y (3) tímpanos rigidizadores.

1) **Vigas de borde:** El ensanchamiento de la concha en sus bordes longitudinales se designa como, viga de borde. Los bordes longitudinales de las conchas pueden estar libres o unidos monolíticamente con las vigas de borde. Las vigas longitudinales de borde rigidizan los bordes de la concha y actúan junto a la concha para transmitir la carga a los tímpanos (marcos transversales). Si las vigas de borde se encuentran continuamente soportadas, la concha cilíndrica pasa a ser una bóveda de cañón corrido, en donde la acción estructural se desarrolla exclusivamente en el sentido transversal y equivale al trabajo de un arco de gran anchura. Las bóvedas de cañón corrido no serán analizadas.

2) **Concha:** Existen diversas formas en las cuales puede ser construida la concha cilíndrica, algunas de las formas más usuales son: (a) bóvedas de cañón, las cuales transmiten las cargas a los muros; (b) conchas de varios vanos para lograr cubrir grandes luces; (c) dientes de sierra, permiten iluminar grandes superficies cubiertas.

3) **Tímpanos (pórticos extremos o diafragmas):** Son los apoyos transversales, los cuales pueden ser extremos o intermedios y cuyas formas son en arco, armadura, muro macizo o alguna otra forma que se adapte a la concha cilíndrica, con el fin de aumentar su resistencia. Los tímpanos soportan completamente a la concha y las vigas de borde, por lo general están conformados por

la nervadura, las cuales se construyen monolíticamente con la concha, las columnas y las fundaciones. Son rígidos en su propio plano, y flexibles en dirección normal a él.



*Figura 44.* Distintos tipos de miembros finales, (a) diafragma sólido, (b) arco con tirantes verticales, (c) arco simple, (e) cercha. Tomada de “Design and Analysis of Shell Structures” por M. Farshad, Springer Science + Business Media Dordrecht.

La terminación de la concha en sus extremos longitudinales puede ser, dependiendo el caso, de cualquiera de las siguientes maneras:

- a) Refuerzo ligero, Figura 45.a.
- b) Viga de borde, Figura 45.b.
- c) Quiebro horizontal, Figura 45.c.
- d) Levantamiento recto o arqueado, Figura 45.d.
- e) Canalón, Figura 45.e
- f) Levantamiento arqueado y viga vertical, Figura 45.f.

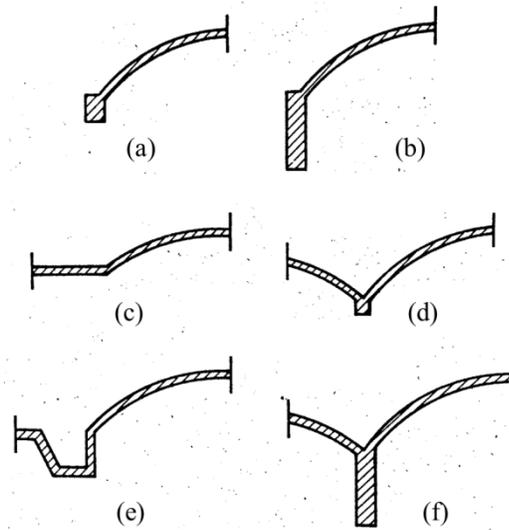


Figura 45. Diferentes tipos de terminación de los bordes longitudinales de la concha cilíndrica. Tomada de “Hormigón Armado. Tratado Práctico” por A. Guerrin, R.C. Lavaur & Ph. Lecroq; 1978, Editores Técnicos Asociados, S.A.

## Clasificación de las conchas cilíndricas

Las conchas cilíndricas pueden clasificarse de distintas maneras:

1. Por la naturaleza de la superficie:

- a) Cubiertas abovedadas, Figura 46.a
- b) Cubiertas plegadas, Figura 46.b

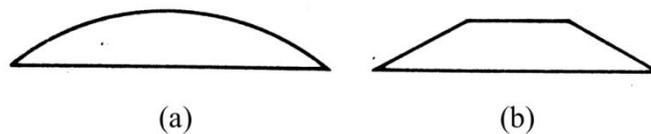


Figura 46. Naturaleza de la superficie de la concha cilíndrica. Tomada de “Hormigón Armado. Tratado Práctico” por A. Guerrin, R.C. Lavaur & Ph. Lecroq; 1978, Editores Técnicos Asociados, S.A.

2. Por la disposición de los bordes longitudinales de la concha cilíndrica, Figura 45.
3. Por la disposición de las cubiertas contiguas:
  - a) Cubiertas simples, utilizadas como unidades independientes apoyadas en los extremos y libres a lo largo de los bordes longitudinales, Figura 47.a
  - b) Cubiertas múltiples, Figura 47.c
  - c) Cubiertas continuas, unidas a lo largo de los bordes longitudinales y pueden apoyarse en uno o más soportes intermedios, Figura 47.b
  - d) Cubiertas nervadas, Figura 47.d

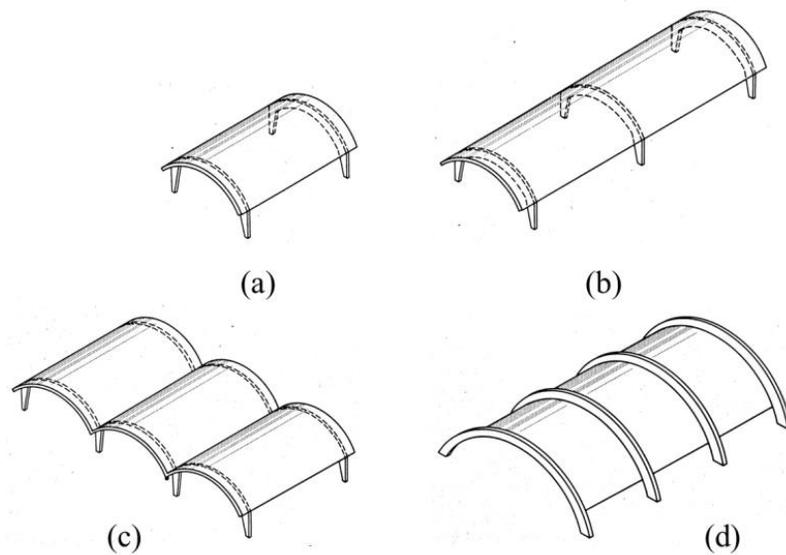


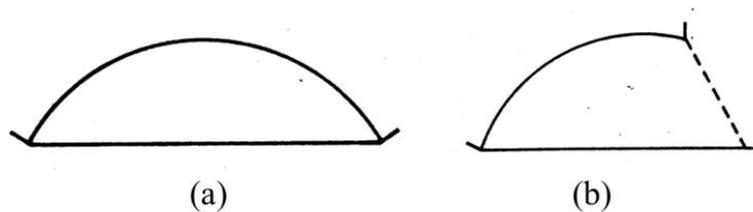
Figura 47. Disposición de las cubiertas contiguas. Tomada de “Hormigón Armado. Tomada de “Proyecto de Estructuras de Hormigón” por G. Winter & A. H. Nilson, 1977, Editorial Reverte, S.A.

4. Por el trazado geométrico de la superficie:
  - a) Cubierta circular
  - b) Cubierta parabólica
  - c) Cubierta en catenaria

- d) Cubierta en cicloide
- e) Cubierta elíptica

5. Por el aspecto de conjunto:

- a) Cubierta simétrica, Figura 48.a
- b) Cubierta disimétrica, Figura 48.b



*Figura 48.* Aspecto de conjunto de las conchas cilíndricas. Tomada de “Hormigón Armado. Tratado Práctico” por A. Guerrin, R.C. Lavaur & Ph. Lecroq; 1978, Editores Técnicos Asociados, S.A.

En este último caso, son mucho más comunes el uso de cubiertas simétricas que el de cubiertas disimétricas. Como ejemplo de cubierta disimétrica está el Portón de Recoletos, España (demolido). Es debido a esto que solo se analizarán cubiertas simétricas.

Las conchas cilíndricas se clasifican también según su longitud en largas, intermedias o cortas, dependiendo de la relación radio-longitud de la concha cilíndrica. Esta clasificación rige el comportamiento estructural de la concha, con el objetivo de determinar la conducta estructural a seguir en el análisis estructural. La clasificación de las conchas cilíndricas según su relación radio-longitud es (Gibson, 1962):

- a) Conchas cilíndricas largas:  $\frac{r}{L} < 0,4$

b) Conchas cilíndricas cortas:  $\frac{r}{L} > 2,0$

c) Conchas cilíndricas intermedias:  $0,4 < \frac{r}{L} < 2,0$

El propósito principal de la clasificación según la relación radio-longitud de la concha cilíndrica es la de permitir al diseñador determinar cuál método de diseño práctico aplicar.

### Vigas de borde

Con el fin de reducir las fuerzas que actúan en el borde longitudinal de la concha cilíndrica, principalmente las fuerzas longitudinales, se emplean elementos de borde que las atenúan, tal es el caso de las vigas de borde. Existen dos tipos de vigas de borde: verticales y horizontales. Las vigas de borde vertical se emplean en conchas cilíndricas largas, en donde la principal acción estructural es la flexión longitudinal; las vigas de borde horizontal, o poco peraltadas, son empleadas en conchas cilíndricas cortas en donde la principal acción estructural es mediante la acción de arco en su dirección transversal.

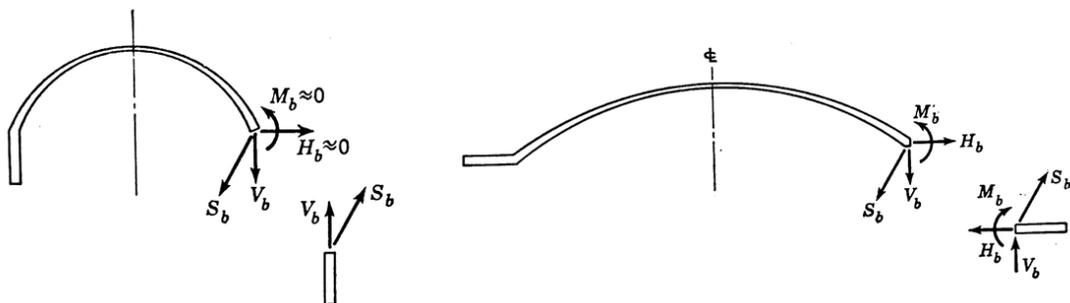


Figura 49. Vigas de borde, (a) concha larga, (b) concha corta. Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.



*Figura 50.* Conchas cilíndricas, empleadas como cubiertas de las áreas sociales del hotel Humboldt. Caracas, Venezuela. Fotografía de: Autor desconocido. Obtenida de: <https://i.pinimg.com/originals/85/76/12/8576121ac9fd6f48fce856b9671c3a3a.jpg>



*Figura 51.* Terminal de carga Union Pacific, 30 cubiertas cilíndricas de concreto con vigas de bodred, 10 cm (4") de espesor. Los Ángeles, E.E.U.U. Fotografía de: Autor desconocido. Archivo de la Universidad del Sur de California. Obtenida de: <https://www.gettyimages.ae/detail/news-photo/largest-concrete-barrel-shell-job-in-california-is-the-30-news-photo/594893298?adppopup=true>

## MÉTODOS DE DISEÑO

Dependiendo de la geometría de la concha cilíndrica, pueden ser empleados diferentes métodos para su análisis. En el caso de la solución analítica, puede ser empleada en todas las conchas cilíndricas independientemente de sus dimensiones. En el caso de las soluciones prácticas, estas dependen de la relación radio-longitud y de las condiciones de borde de la concha.

Entre los métodos de diseño de las conchas cilíndricas más conocidos se tienen los siguientes:

- a. Solución analítica.
- b. Análisis de elementos finitos.
- c. Método de la viga.
- d. Teoría de la membrana.
- e. Método arco-viga.
- f. Método de análisis del manual No. 31 de la ASCE.

En las conchas cilíndricas largas, por lo general las líneas de cargas generan fuerzas internas de una magnitud considerable a lo largo de toda la superficie de la concha. Estas fuerzas al ser tan grandes en comparación a las obtenidas por medio de la teoría de membrana hacen que estas últimas se desprecien al ser insignificantes. Es debido a esto que, la teoría de membrana no se asemeja al sistema real, de hecho, al disminuir la relación radio-longitud la concha tiene un comportamiento similar al de una viga de sección transversal curva. Al momento de diseñar una concha cilíndrica, se busca una aproximación muy cercana respecto a su funcionamiento estructural. En el caso de las conchas cilíndricas largas, el método arco-viga da resultados

prácticamente seguros en cuanto a las fuerzas obtenidas, según pruebas realizadas (Olvera, 1978). Esto se debe a que en las conchas cilíndricas largas las fuerzas internas generadas se aproximan en gran forma a las que se generan en una viga de sección transversal curva, comportándose la concha de manera muy semejante a una viga, pudiéndose emplear las mismas fórmulas de flexión y corte que se utilizan en las vigas para el análisis de las conchas cilíndricas largas.

Por otra parte, en las conchas cilíndricas cortas las líneas de carga producen fuerzas internas en la concha las cuales, por lo general, están restringidas a una región cerca de los bordes longitudinales de la concha. A medida que la relación radio-longitud aumenta, la mayor parte de la concha se comporta como se establece en la teoría de membrana. Una concha cilíndrica corta, puede ser considerada como un caso particular de arco.

Pero si se tiene una concha cilíndrica de grandes dimensiones que se le aplica una carga de considerable magnitud, mediante las soluciones prácticas no se obtienen valores que se aproximen a los obtenidos por medio la solución analítica.

Por último, el método de elementos finitos, independientemente del tipo de concha cilíndrica, de las dimensiones o de la magnitud de la carga aplicada, se obtienen valores mucho más precisos en comparación a las soluciones prácticas.

## SOLUCIÓN ANALÍTICA DE UNA CONCHA CILÍNDRICA

Las soluciones analíticas de una concha cilíndricas pueden ser varias, en este trabajo especial de grado solo se enfocará en las soluciones analíticas de las conchas cilíndricas cargadas simétricamente respecto a su eje.

### Representación de las cargas sobre la superficie de la concha cilíndrica

Al depender de ecuaciones diferenciales, es necesario representar la carga por medio de series de Fourier en la dirección longitudinal. Al expresar las cargas uniformemente distribuidas como suma de cargas parciales, la integración y la diferenciación se facilita. La Figura 52 muestra la representación de la carga.

$$P = \frac{4}{\pi} p' \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Para propósitos prácticos tomando solo  $n = 1$  se obtendrán resultados aceptables (Billington, 1965).

$$p = \left(\frac{4}{\pi} p'\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

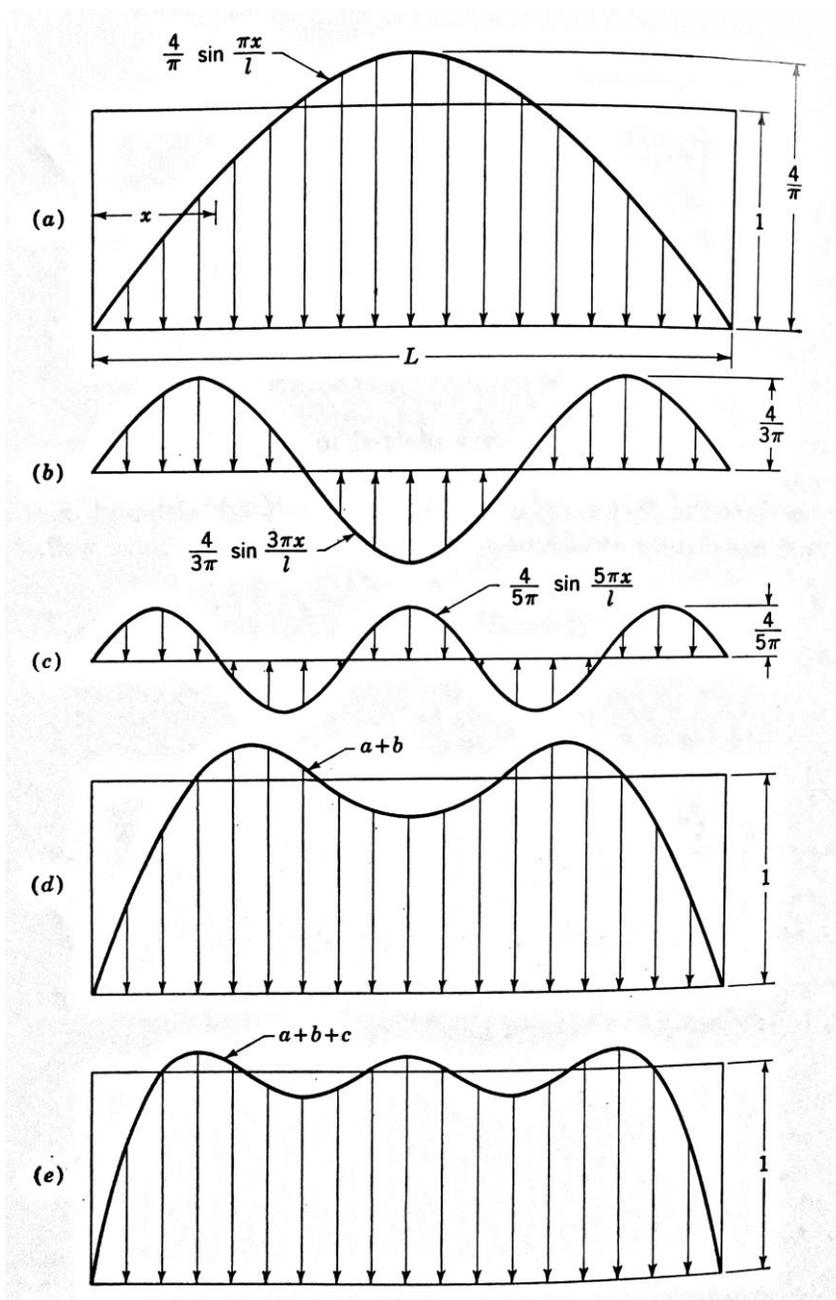


Figura 52. Representación de las cargas por medio de series de Fourier. Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

Para la determinación de las tensiones, fuerzas y momentos que actúan en la concha cilíndrica sin vigas de borde, se establecen ecuaciones diferenciales, las cuales toman en cuenta todas las resultantes de tensiones y los componentes de carga en la

superficie. Separando un elemento diferencial de una concha cilíndrica, Figura 53, se observan las resultantes y pares de tensiones. El origen del sistema de coordenadas en el caso de una concha cilíndrica es en la mitad de la concha, como se muestra en la Figura 53.a.

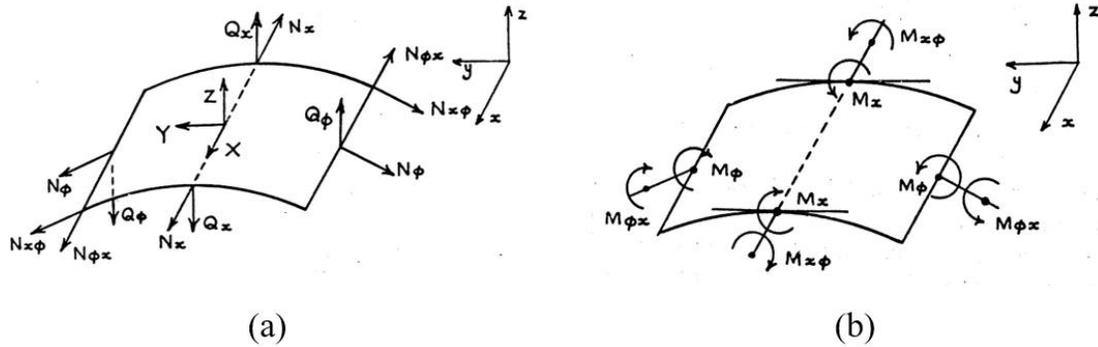


Figura 53. Elemento diferencial de una concha cilíndrica en donde se muestran, (a) fuerzas positivas y (b) momentos positivos. Tomada de “Diseño de Cascarones Cilíndricos” por J. Gibson; 1962, Compañía Editorial Continental, S.A.

### Ecuaciones de equilibrio de tensiones

Considerando las resultantes y pares de tensiones que se presentan en la Figura 53, se establece las fuerzas que afectan el equilibrio de tensiones del elemento en las direcciones de los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{R\partial\phi} + X = 0 \quad (127)$$

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + \frac{\partial N_\phi}{R\partial\phi} + Y = 0 \quad (128)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial X} + \frac{\partial Q_\phi}{R \partial \phi} + \frac{N_\phi}{R} - Z = 0 \quad (129)$$

De igual manera se establece el equilibrio de momentos en la concha cilíndrica.

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\phi x}}{R \partial \phi} - Q_x = 0 \quad (130)$$

$$\frac{\partial M_\phi}{R \partial \phi} + \frac{\partial M_{x\phi}}{\partial x} - Q_\phi = 0 \quad (131)$$

$$N_{x\phi} - N_{\phi x} = 0 \quad (132)$$

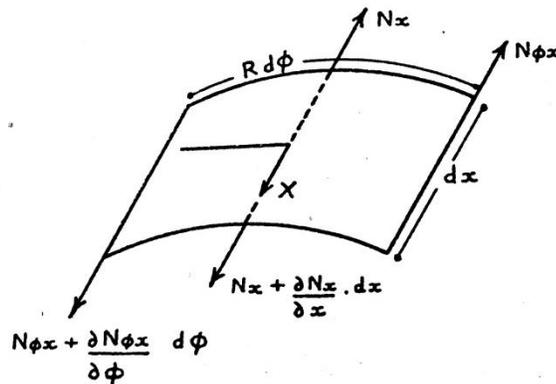


Figura 54. Diagrama de tensiones del elemento diferencial de la concha cilíndrica. Tomada de "Diseño de Cascarones Cilíndricos" por J. Gibson; 1962, Compañía Editorial Continental, S.A.

Por lo tanto, se tienen seis ecuaciones con diez incógnitas, y para su resolución se establecen las ecuaciones de tensión-deformación y de deformación-desplazamiento.

## Ecuaciones de deformación-desplazamiento

Un punto ubicado en la superficie media de la concha cilíndrica sufre un desplazamiento, entonces un punto distante a él a una distancia  $z$ , sufrirá desplazamiento  $y$ , además, cambios infinitesimales debido a la rotación de la superficie media. Si se considera otro punto distante a este, a una distancia  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , se puede establecer que la relación deformación-desplazamiento es la siguiente:

$$S_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (133)$$

$$2S_{x\phi} = \frac{\partial u}{\partial \phi} / (R + z) + \frac{R + z}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \left( \frac{z}{R + z} + \frac{z}{R} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \quad (134)$$

$$S_\phi = \frac{\partial v}{R \partial \phi} - \frac{z}{R(R + z)} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{w}{R + z} \quad (135)$$

Donde,  $S_x$  y  $S_\theta$  son deformaciones puras en las direcciones de  $x$  y  $y = R\theta$  respectivamente, y  $S_{x\theta}$  es la deformación por cortante acerca del eje  $z$ .

## Ecuaciones de tensión-deformación

Las relaciones de tensión-deformación pueden ser expresadas de la siguiente manera considerando el módulo de Poisson igual a cero:

$$\bar{x}\bar{x} = ES_x \quad (136)$$

$$\bar{x}\bar{\phi} = ES_{x\phi} \quad (137)$$

$$\bar{\phi}\bar{\phi} = ES_{\phi} \quad (138)$$

En donde,  $E$  es el módulo de elasticidad o módulo de Young,  $\bar{x}\bar{x}$  y  $\bar{\phi}\bar{\phi}$  son las tensiones normales en la concha cilíndrica por unidad de área, y  $\bar{x}\bar{\phi}$  es la tensión cortante.

### Ecuaciones de desplazamiento, fuerza y momento

De las relaciones de deformación-desplazamiento y tensión-deformación, y con el apoyo de las ecuaciones de equilibrio, se pueden deducir las fuerzas que actúan en el elemento diferencial de la concha cilíndrica,  $N_x$ ,  $N_{\phi}$ ,  $N_{x\phi}$ ; así como también los momentos  $M_x$ ,  $M_{\phi}$ ,  $M_{x\phi}$ .

$$N_x = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (139)$$

$$N_{\phi} = EA \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{w}{R} \right\} \quad (140)$$

$$N_{x\phi} = N_{\phi x} = \frac{EA}{2} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \quad (141)$$

$$M_x = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (142)$$

$$M_{\phi} = \frac{EI}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \quad (143)$$

$$M_{x\phi} = M_{\phi x} = \frac{EI}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \phi} \quad (144)$$

$$Q_x = EI \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \phi^2} \right\} \quad (145)$$

$$Q_\phi = EI \left\{ \frac{1}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \phi^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \phi} \right\} \quad (146)$$

$$N_\phi = -EIR \left\{ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^4 w}{R^4 \partial \phi^4} \right\} + ZR \quad (147)$$

$$\frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} = \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial x} = EIR \left\{ \frac{\partial^5 w}{R \partial \phi \partial x^4} + \frac{2 \partial^5 w}{R^3 \partial \phi^3 \partial x^2} + \frac{\partial^5 w}{R^5 \partial \phi^5} \right\} - \frac{\partial Z}{\partial \phi} - Y \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} = -EI \left\{ \frac{\partial^6 w}{R \partial \phi^2 \partial x^4} + \frac{2}{R^3} \frac{\partial^6 w}{\partial \phi^4 \partial x^2} + \frac{\partial^6 w}{R^5 \partial \phi^6} \right\} + \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial Y}{\partial \phi} \right\} \\ - \frac{\partial X}{\partial x} \end{aligned} \quad (149)$$

En donde,  $A$  es el área de la sección transversal de la concha cilíndrica de ancho unitario, es decir  $A=2h$ ;  $I$  es el momento de inercia de una franja de la concha de ancho unitario y de espesor  $2h$ , Figura 55, siendo el momento de inercia  $I = \frac{3}{2h^3}$ .

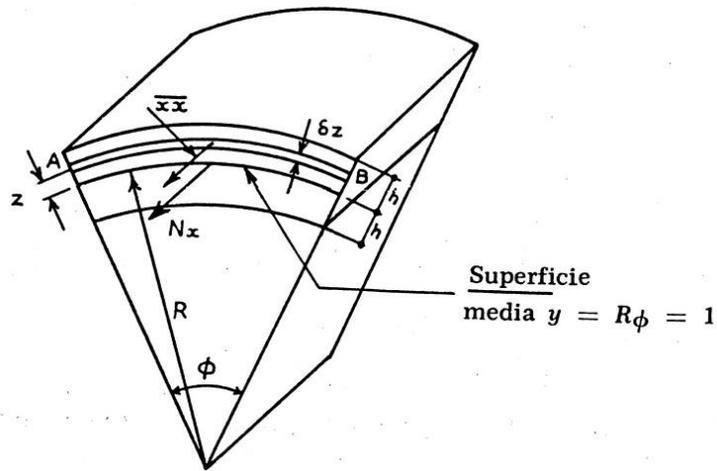


Figura 55. Tensiones longitudinales  $\bar{x}\bar{x}$  actuando en el elemento diferencial de una concha cilíndrica. Tomada de "Diseño de Cascarones Cilíndricos" por J. Gibson; 1962, Compañía Editorial Continental, S.A.

Se tienen once ecuaciones con once incógnitas, siendo estas  $N_x, N_\phi, N_{x\phi} = N_{\phi x}, Q_x, Q_\phi, M_x, M_\phi, M_{x\phi} = M_{\phi x}, u, v$  y  $w$ . Por eliminación diferencial sucesiva, se podrá deducir una ecuación de compatibilidad en términos de una variable. Solucionando esta ecuación es posible obtener las fuerzas y los momentos de la concha cilíndrica. Para la deducción de la ecuación de compatibilidad se debe elegir una variable, en el caso de las ecuaciones 139 a la 149, la variable  $w$  es la más adecuada, esta variable fue la que empleo H. Lundgren. Además de  $w$ , pueden ser seleccionadas otras variables como  $M_\phi$  empleada por Finsterwalder y Dischinger, o  $N_\phi$  empleada por Jenkins.

La ecuación diferencial parcial en  $w$  es:

$$\begin{aligned}
 R^8 \left\{ \frac{\partial^2}{R^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\}^4 w + \frac{AR^6}{I} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
 = \frac{R^6}{EI} \left\{ R^2 \left( \frac{\partial^2}{R^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 Z + R \frac{\partial^2}{R^2 \partial \phi^2} \left( \frac{\partial Y}{R \partial \phi} - \frac{\partial X}{\partial x} \right) \right. \\
 \left. + 2R \frac{\partial^3 Y}{R \partial \phi \partial x^2} \right\} \quad (150)
 \end{aligned}$$

La ecuación 150 es la ecuación fundamental, conformada por dos partes, la función complementaria, y la integral particular, y cuya solución<sup>8</sup> de  $w$  determinará la solución de las demás variables de las ecuaciones 139 a la 149. A continuación, se presenta un resumen para la solución analítica de una concha cilíndrica.

Para el diseño de una concha cilíndrica por medio de la solución analítica, una vez elegidas las dimensiones de la concha se calculan las constantes  $D$  y  $\gamma$ . Determinadas las constantes  $D$  y  $\gamma$ , se emplean en la solución de la ecuación exponencial, determinadas también  $m_1$ ,  $n_1$ ,  $m_2$  y  $n_2$  y finalmente las potencias de las raíces,  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Posteriormente, se escogen las cuatro ecuaciones necesarias para las condiciones de borde, ya sea en el caso de una concha cilíndrica sin vigas de borde, con vigas de borde, una concha interna con vigas de borde, etc. Y dependiendo de cuales sean las condiciones de borde se seleccionan de las tablas 3 y 4 las componentes de las tensiones que estarán igualadas a cero para satisfacer las condiciones de borde, para así formar las funciones complementarias. A estas funciones complementarias se les agrega los coeficientes debidos a las integrales particulares, dando así cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, denominadas constantes arbitrarias (a, b, c y d). Obteniendo la solución de las constantes arbitrarias

---

<sup>8</sup> La solución de la ecuación fundamental se presenta en la referencia [12]

queda resuelto el problema y se pueden calcular cualquiera de las otras fuerzas y momentos.

Para diseñar una concha cilíndrica el ingeniero no requiere deducir las ecuaciones presentadas anteriormente, pero debe familiarizarse a ellas y los principios sobre los que están basadas.

*Constantes*

$$\frac{D}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[8]{3}^4 \sqrt{\frac{R}{2h}} \sqrt{\frac{R\pi}{L}} \quad (151)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \frac{R\pi}{L} \sqrt{\frac{2h}{R}} \quad (152)$$

*Solución de la ecuación exponencial*

$$m_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2 + 1} + (1+\gamma)}{2}} \quad (153)$$

$$n_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1+\gamma)^2 + 1} - (1+\gamma)}{2}} \quad (154)$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2 + 1} - (1-\gamma)}{2}} \quad (155)$$

$$n_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{(1-\gamma)^2 + 1} + (1-\gamma)}{2}} \quad (156)$$

*Potencias de las raíces de la ecuación exponencial*

$$P = \frac{D}{\sqrt[4]{2}}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = Pm_1 & \alpha'_1 = Pm_2 \\ \beta_1 = Pn_1 & \beta'_1 = Pn \\ \alpha_2 = P^2(1 + \gamma) & \alpha'_2 = P^2(\gamma - 1) \\ \beta_2 = P^2 & \alpha'_2 = P^2 \end{array}$$

*Coefficientes de la concha para casos simétricos*

*Coefficientes debido a la función complementaria*

Tabla 3

*Coefficientes de conchas cilíndricas para funciones complementarias (par)*

$F = \bar{R}[(aB_1 - bB_2) \cos \beta_1 \phi \cosh \alpha_1 \phi$					
$- (aB_2 + bB_1) \sin \beta_1 \phi \sinh \alpha_1 \phi$					
$+ (cB_3 - dB_4) \cos \beta'_1 \phi \cosh \alpha'_1 \phi$					
$- (cB_4 + dB_3) \sin \beta'_1 \phi \sinh \alpha'_1 \phi]$					
$F$	$\bar{R}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$M_\phi$	$\frac{2EI}{R^2} \cos kx$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\alpha'_2$	$\beta'_2$
$M_x$	$-2EI k^2 \cos kx$	1	0	1	0

$Q_x$	$-\frac{2EI k^3}{\gamma} \sin kx$	1	1	-1	1
$N_\phi$	$-\frac{2EIR * 2k^4}{\gamma^2} \cos kx$	0	1	0	-1
$N_x$	$\frac{2EIR * 2k^4}{\gamma^3} \cos kx$	-1	(1 + $\gamma$ )	1	(1 - $\gamma$ )
$Q'_x$	$-\frac{2EI k^3}{\gamma} \sin kx$	$\gamma + 2$	2	$\gamma - 2$	2
$u$	$\frac{2IR * 2k^3}{A\gamma^3} \sin kx$	-1	(1 + $\gamma$ )	1	(1 - $\gamma$ )
$w$	$2 \cos kx$	1	0	1	0

Nota. Obtenido de "Diseño de Cascarones Cilíndricos" por J. Gibson, 1962, Compañía Editorial Continental, S.A.

Tabla 4  
Coeficientes de conchas cilíndricas para funciones complementarias (non)

$$F = \bar{R}[(aB_1 - bB_2) \cos \beta_1 \phi \sinh \alpha_1 \phi - (aB_2 + bB_1) \sin \beta_1 \phi \cosh \alpha_1 \phi + (cB_3 - dB_4) \cos \beta'_1 \phi \sinh \alpha'_1 \phi - (cB_4 + dB_3) \sin \beta'_1 \phi \cosh \alpha'_1 \phi]$$

$F$	$\bar{R}$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$Q_\phi$	$\frac{2EI k^3}{(\sqrt{\gamma})^3} \cos kx$	$m_1 - n_1$	$m_1 + n_1$	$-(m_2 + n_2)$	$m_2 - n_2$
$Q'_\phi$	$\frac{2EI k^3}{(\sqrt{\gamma})^3} \cos kx$	$m_1(1 - \gamma) - n_1$	$m_1 + n_1(1 - \gamma)$	$-\{m_2(1 + \gamma) + n_2\}$	$m_2 - n_2(1 + \gamma)$
$N_{x\phi}$	$\frac{2EIR * 2k^4}{(\sqrt{\gamma})^5} \sin kx$	$-n_1$	$m_1$	$n_2$	$-m_2$

$v$	$-\frac{2IR * 2k^3}{A(\sqrt{\gamma})^7} \cos kx$	$m_1 + n_1(1 - \gamma)$	$n_1$	$-m_2$	$-n_2$
			$-m_1(1 - \gamma)$	$+n_2(1 + \gamma)$	$-m_2(1 + \gamma)$
$\theta^*$	$+1 \cos kx$	$-\frac{2\alpha_1}{R} + \frac{(\bar{R}.B_1)_v}{R}$	$-\frac{2\beta_1}{R}$	$-\frac{2\alpha'_1}{R}$	$-\frac{2\beta'_1}{R}$
			$+\frac{(\bar{R}.B_2)_v}{R}$	$+\frac{(\bar{R}.B_3)_v}{R}$	$+\frac{(\bar{R}.B_4)_v}{R}$
$M_{x\phi}$	$-\frac{2EI k}{R} \sin kx$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\alpha'_1$	$\beta'_1$

\*En el caso de los coeficientes  $B_1$ , etc., para  $\theta$  se obtienen de  $v$ , por ejemplo  $(\bar{R}.B_1)_v/R = -(2I.2k^3/A(\sqrt{\gamma})^7) * [m_1 + n_1(1 - \gamma)]$  sumado a  $-2\alpha_1/R$ , etc. Nota. Obtenido de "Diseño de Cascarones Cilíndricos" por J. Gibson, 1962, Compañía Editorial Continental, S.A.

*Coefficientes debido a la integral particular*

$$M_\phi = -\frac{EI}{R^2} C.p \cos \phi . \cos kx \quad (157)$$

$$M_x = -EI k^2 . Cp \cos \phi . \cos kx \quad (158)$$

$$M_{x\phi} = M_{\phi x} = \frac{EI k}{R} . Cp \sin \phi \sin kx \quad (159)$$

$$Q_x = EI(k^3 + k^2/R) . Cp \cos \phi . \sin kx \quad (160)$$

$$Q'_x = EI \left\{ k^3 + \frac{2k^2}{R} \right\} . Cp \cos \phi . \sin kx \quad (161)$$

$$Q_\phi = EI \left\{ \frac{1}{R^3} + \frac{k^2}{R} \right\} . Cp \sin \phi . \cos kx \quad (162)$$

$$N_{\phi} = -R\{H_1 - 1\}p \cos \phi \cdot \cos kx \quad (163)$$

$$N_{x\phi} = N_{\phi x} = -\frac{H_1}{k} \cdot p \sin \phi \cdot \sin kx \quad (164)$$

$$N_x = -\frac{H_1}{k^2 R} \cdot p \cos \phi \cdot \cos kx \quad (165)$$

$$u = -\frac{H_1}{EAk^3 \cdot R} \cdot p \cos \phi \cdot \sin kx \quad (166)$$

$$v = \frac{H_1 H_2}{k} \cdot p \sin \phi \cdot \cos kx \quad (167)$$

$$w = Cp \cos \phi \cos kx \quad (168)$$

$$\theta = \frac{1}{R} \left\{ C + \frac{H_1 H_2}{k} \right\} p \sin \phi \cdot \cos kx \quad (169)$$

$$Q'_{\phi} = EI \left\{ \frac{1}{R^3} + \frac{2k^2}{R} \right\} Cp \sin \phi \cdot \cos kx \quad (170)$$

$$\text{Donde } \begin{cases} p = \frac{4}{\pi} q, \text{ siendo } q \text{ la carga por } m^2 \\ C = -\frac{R^4}{EI} \left[ \frac{(kR)^4 + 4(kR)^2 + 2}{\{1 + (kR)^2\}^4 + \frac{A}{T}(kR)^4 R^2} \right] \\ H_1 = \left[ EI \left\{ k^4 + \frac{2k^2}{R^2} + \frac{1}{R^4} \right\} C + 2 \right] \\ H_2 = \frac{1}{EAk} \left\{ 2 + \frac{1}{(kR)^2} \right\} \end{cases}$$

## Condiciones de borde

Dependiendo si la concha cilíndrica presenta o no vigas de borde o si se está analizando un conjunto de múltiples conchas cilíndricas. Las condiciones de borde son las siguientes:

### *Aisladas sin vigas*

#### a) Bordes sin apoyo

Al estar la concha cilíndrica sin apoyo en los bordes, todas las fuerzas y momentos en el borde deberán ser nulos, por lo tanto:

$$M_{\phi} = 0; N_{\phi} = 0; Q'_{\phi} = 0; N_{\phi x} = 0$$

#### b) Borde soportado por muro rígido (concha cilíndrica de cañón)

El muro restringe los desplazamientos verticales y horizontales del borde de la concha, pero permite la rotación del mismo, por lo tanto:

$$w = 0; u = 0; M_{\phi} = 0; N_{\phi x} = 0$$

### *Aisladas con vigas*

$$\theta = 0; R_H = 0; u_S = u_B; w_{1S} = w_{1B}$$

### *Internas con vigas (Múltiples)*

Para el caso de un conjunto de múltiples conchas cilíndricas, solamente se analiza una concha cilíndrica interna de la misma forma que para una concha cilíndrica aislada con vigas de borde, con la excepción de que el ancho de la viga de borde se dividirá a la mitad.

$$\theta = 0; R_H = 0; u_S = u_B; w_{1S} = w_{1B}$$

## SOLUCIONES PRÁCTICAS PARA EL DISEÑO DE CONCHAS CILÍNDRICAS

Las soluciones analíticas a pesar de que representan el comportamiento de la concha cilíndrica de manera acertada y precisa eran muy complejas de resolver en el siglo pasado debido a que no se contaba con las herramientas computacionales existentes en la actualidad. Es por esto que, se buscaron otras soluciones que pudieran representar el comportamiento aproximado de las conchas y su solución fuese sencilla.

### Conchas cilíndricas largas

Las conchas cilíndricas largas pueden ser diseñadas mediante tres métodos prácticos dependiendo de sus condiciones de borde.

## Método arco-viga

Este método fue desarrollado por H. Lundgren<sup>9</sup>, y consiste en analizar la concha cilíndrica de manera separada, en donde primero se considera que la concha actúa como una viga de sección transversal curva, empleando las ecuaciones usuales para obtener las tensiones. Luego se analiza la concha como un arco para obtener la fuerza y momento transversal, pero este análisis requiere de un cálculo más extenso. Es por esto que H. Lundgren tabulo los coeficientes para determinar las fuerzas de membrana y el momento transversal  $M_\phi$  de forma directa, requiriendo solo las dimensiones de la concha cilíndrica y las cargas que actúan sobre ella para la determinación de las fuerzas y el momento  $M_\phi$ .

$$N_x = \frac{L^2}{r} [p_u \text{Col. (1)} + p_d \text{Col. (5)}] \quad (171)$$

$$N_\phi = r [p_u \text{Col. (2)} + p_d \text{Col. (6)}] \quad (172)$$

$$N_{x\phi} = -L [p_u \text{Col. (3)} + p_d \text{Col. (7)}] \quad (173)$$

$$M_\phi = r^2 [p_u \text{Col. (4)} + p_d \text{Col. (8)}] \quad (174)$$

En el Anexo A se encuentran las tablas para el diseño por medio de este método.

---

<sup>9</sup> H. Lundgren: "Cylindrical Shells", vol. 1, Danish Technical Press, Copenhagen, 1951.

## **Método de análisis presentado por la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (ASCE) en el manual No. 31**

La Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (ASCE, por sus siglas en inglés) presento en el manual No. 31 una serie de tablas con las cuales pueden ser calculados fácilmente las tensiones en una concha cilíndrica larga aislada o interna, con o sin vigas de borde. Con este método solo pueden ser calculados la fuerza  $N_x$ , la fuerza cortante  $N_{xy} = N_{yx}$ , la fuerza transversal  $N_\phi$  y el momento transversal  $M_\phi$ .

El método se divide en cuatro partes: Sistema primario, errores, correcciones y compatibilidad.

### **Sin vigas de borde**

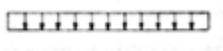
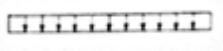
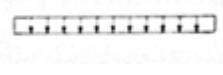
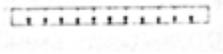
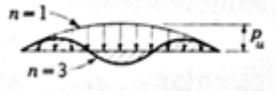
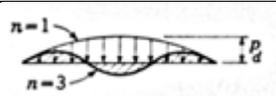
1. *Sistema primario.* Se obtiene al reducir las ecuaciones de la teoría general a la teoría de membrana, por lo tanto, la concha cilíndrica resiste las cargas solamente por medio de la teoría de membrana. Las tensiones de membrana se pueden calcular mediante las tablas 1A, 1B y 1C del manual No. 31 presentado por la ASCE o mediante las ecuaciones que se presentan en la Tabla 5.

2. *Errores.* Correspondiente a las incompatibilidades generadas por la teoría de membrana en los bordes longitudinales de la concha cilíndrica. Las fuerzas requeridas por la teoría de membrana en los bordes libres.

$$N'_{\phi k} = -\frac{4}{\pi} pr \cos(\phi_k - \phi) \sin kx \quad (175)$$

$$N'_{\phi kx} = -\frac{4}{\pi} pr \frac{2}{rk} \sin(\phi_k - \phi) \cos kx \quad (176)$$

Tabla 5.  
Resultante de tensiones de membrana para diferentes cargas

Resultante de fuerzas de membrana	Carga	Constantes de la concha	Distribución transversal	Distribución longitudinal
$N'_{\phi}$ $N'_{\phi x}$ $N'_x$	$p_u$ $p_u$ $p_u$	$r$ $r/(L/r)$ $r/(r/L)^2$	 $\cos^2(\phi_k - \phi)$ $\cos(\phi_k - \phi) \sin(\phi_k - \phi)$ $\cos^2(\phi_k - \phi) - \sin^2(\phi_k - \phi)$	 $1$ $(3/2)(1 - 2x/L)$ $(3x/2L)(1 - x/L)$
$N'_{\phi}$ $N'_{\phi x}$ $N'_x$	$p_d$ $p_d$ $p_d$	$r$ $r/(L/r)$ $r/(r/L)^2$	 $\cos(\phi_k - \phi)$ $\sin(\phi_k - \phi)$ $\cos(\phi_k - \phi)$	 $1$ $1 - 2x/L$ $(x/L)(1 - x/L)$
$N'_{\phi}$ $N'_{\phi x}$ $N'_x$	$p_u$ $p_u$ $p_u$	$r$ $r/(L/r)$ $r/(r/L)^2$	 $\cos^2(\phi_k - \phi)$ $\cos(\phi_k - \phi) \sin(\phi_k - \phi)$ $\cos^2(\phi_k - \phi) - \sin^2(\phi_k - \phi)$	 $(1/n) \sin(n\pi x/L)$ $(3/n^2\pi) \cos(n\pi x/L)$ $(3/n^3\pi^2) \sin(n\pi x/L)$
$N'_{\phi}$ $N'_{\phi x}$	$p_d$ $p_d$	$r$ $r/(L/r)$	 $\cos(\phi_k - \phi)$ $\sin(\phi_k - \phi)$	 $(1/n) \sin(n\pi x/L)$ $(2/n^2\pi) \cos(n\pi x/L)$

$N'_x$	$p_d$	$r/(r/L)^2$	$\cos(\phi_k - \phi)$	$(2/n^3\pi^2) \sin(n\pi x/L)$
--------	-------	-------------	-----------------------	-------------------------------

Tomada de Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

3. *Correcciones*: Fuerzas correctivas, denominadas líneas de carga (debido a que las fuerzas longitudinales de membrana se distribuyen de forma lineal a través del espesor de la concha), son aplicadas a lo largo de los bordes libres.

$$V_L = -N'_{\phi k} \sin \phi_k \quad (177)$$

$$H_L = -N'_{\phi k} \cos \phi_k \quad (178)$$

4. *Compatibilidad*: Se logra ajustando las líneas de carga iguales a las resultantes de tensiones obtenidas de la teoría de membrana a lo largo del borde.

$$V_L = -N'_{\phi k} \sin \phi_k$$

$$H_L = -N'_{\phi k} \cos \phi_k$$

$$S_L = -N'_{\phi x k}$$

Las tablas para la solución por este método fueron presentadas en el Manual No. 31 "*Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs*" por la ASCE, Nueva York, 1952. Se incluyen en el Anexo B.

## Con vigas de borde

1. *Sistema primario.* Se obtiene al reducir las ecuaciones de la teoría general a la teoría de membrana, por lo tanto, la concha cilíndrica resiste las cargas solamente por medio de la teoría de membrana, sin vigas de borde. Las fuerzas de membrana se pueden calcular mediante las tablas 1A, 1B y 1C del Manual No. 31 presentado por la ASCE o mediante las ecuaciones que se presentan en la Tabla 5.

2. *Errores.* Los errores del sistema primario son: (1) la diferencia en la flecha vertical del borde de la concha y el borde superior de la viga,  $D_{10}^S + D_{10}^B$ , y (2) la diferencia de las fuerzas longitudinales en el borde la concha y en el borde superior de la viga de borde,  $f_{20}^S + f_{20}^B$ .

### Concha

$$\Delta_V = D_{10}^S = \frac{L^4}{r^3 h E} \left\{ pr \left[ \left( \frac{2r}{\pi L} \right)^2 + \frac{2}{\pi^4} + \left( \frac{r}{L} \right)^4 0,5 \right] + \text{Col. (1)} V_L - \text{Col. (4)} H_L + \text{Col. (7)} S_L \right\} \sin kx \quad (179)$$

$V_L, H_L$  y  $S_L$  se obtienen de la Tabla 2B del del Manual No. 31 presentado por la ASCE.

$$f_{20}^S = \frac{N_x, \text{ obtenido de la teoría de membrana}}{\text{Espesor de la concha}} \quad (180)$$

En  $X = 0$

### Viga

$$D_{10}^B = -\frac{4}{\pi} w_{B+L} \frac{L^4}{E b d^3} \frac{0,12319}{n^4} \sin kx \quad (181)$$

$$f_{20}^B = \frac{4}{\pi} w_{B+L} \frac{L^2}{bd^2} \frac{0,60793}{n^2} \sin kx \quad (182)$$

En  $X = 0$

3. *Correcciones.* Una fuerza vertical  $V_b = X_1$  y una fuerza de corte  $S_b = X_2$ , las cuales actúan entre el borde longitudinal de la concha y el borde superior de la viga de borde, reduciendo la flecha vertical y la tensión longitudinal en la concha.

### Concha

$$\Delta_V = X_1 D_{11}^S + X_2 D_{12}^S = \frac{L^4}{r^3 h E} (\text{Col. (1)} V_b + \text{Col. (7)} S_b) \quad (183)$$

Col. (1) y Col. (7) – Tabla 2B

$$f^S = X_1 f_{21}^S + X_2 f_{22}^S = \left(\frac{L}{r}\right)^2 \frac{1}{h} (\text{Col. (1)} V_b + \text{Col. (9)} S_b) \sin kx \quad (184)$$

Col. (1) y Col. (7) en el borde de la concha – Tabla 2<sup>a</sup>

### Viga

$$\Delta_V = X_1 D_{11}^B + X_2 D_{12}^B = \frac{L^4}{bd^3 E} \left[ 0,123 V_b - \frac{d}{L} (0,1935) S_b \right] \sin kx \quad (185)$$

$$f_t^B = X_1 f_{21}^B + X_2 f_{22}^B = \frac{L}{bd} \left( -0,608 \frac{L}{d} V_b + 1,273 S_b \right) \sin kx \quad (186)$$

#### 4. Compatibilidad

$$X_1(D_{11}^S + D_{11}^B) + X_2(D_{12}^S + D_{12}^B) + D_{10}^S + D_{10}^B = 0 \quad (187)$$

$$X_1(f_{21}^S + f_{21}^B) + X_2(f_{22}^S + f_{22}^B) + f_{20}^S + f_{20}^B = 0 \quad (188)$$

La ecuación 187 representa el desplazamiento vertical y la ecuación 188 representa la fuerza longitudinal.

#### Teoría elemental de la viga

En el caso de las conchas cilíndricas aisladas o internas largas con vigas de borde, la fuerza longitudinal puede ser fácilmente calculada considerando a la concha junto con sus vigas de borde, actuando como una viga simplemente apoyada en los tímpanos. Solo se puede determinar para  $X=0$ .

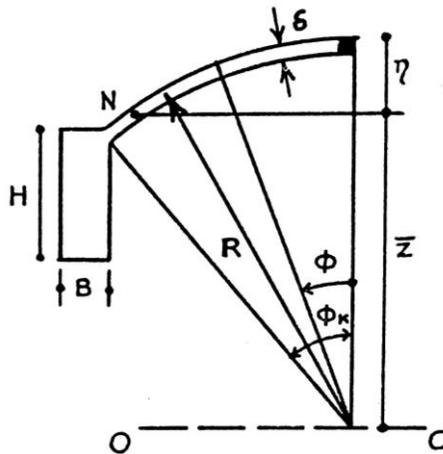


Figura 56. Sección transversal de la concha cilíndrica. Tomada de "Diseño de Cascarones Cilíndricos" por J. Gibson; 1962, Compañía Editorial Continental, S.A.

De la Figura 56 se deduce:

$$\bar{z} = \frac{[\delta R^2 \sin \phi_k + \{R \cos \phi_k - H/2\}H.B]}{(R\delta.\phi + H.B)} \quad (189)$$

$$\eta = R - \bar{z} \quad (190)$$

El momento de inercia de la concha respecto al eje OO, está dado por:

$$I_O^S = 2\delta R^3 \left( \frac{\phi_k}{2} + \sin \frac{2\phi_k}{4} \right) \quad (191)$$

El momento de inercia de la sección transversal de las vigas de borde con respecto al eje OO, es igual:

$$I_O^B = 2 \quad (192)$$

El momento de inercia de toda sección transversal con respecto al eje OO, es:

$$I_O = I_O^S + I_O^B \quad (193)$$

Y el momento total de inercia con respecto al eje neutro NN, será igual a:

$$I_\eta = I_O - (2R\delta.\phi_k + 2H.B)\bar{z}^2 \quad (194)$$

El momento flexionante máximo M en el centro de la concha cilíndrica, está dado por:

$$M = \frac{wL^2}{8} \quad (195)$$

De donde:

$$w = (2R\phi_k \cdot q) + r$$

Del momento de flexión pueden determinarse las fuerzas longitudinales de la concha cilíndrica. En la corona:

$$[N_x]_{sup} = -\frac{M}{I_\eta} \cdot \eta \cdot \delta \quad (196)$$

Y para el resto de la concha desde la corona hasta el borde, la fuerza longitudinal es igual:

$$[N_x]_{inf} = +\frac{M}{I_\eta} (\bar{z} - R \cos \phi_k) \cdot \delta \quad (197)$$

Signo positivo indica tracción. Si  $\bar{z} < R \cos \phi_k$  entonces se encontrara a compresión.

La tensión en el parte superior de la viga de borde es igual a:

$$\text{Esfuerzo superior de la viga} = [f]_{sup} = \frac{[N_x]_{inf}}{\delta} \quad (198)$$

$$[f]_{inf} = \frac{M}{I_\eta} \{ \bar{z} - (R \cos \phi_k - H) \} \quad (199)$$

El método de la teoría de la viga solo suministra información sobre las fuerzas y tensiones longitudinales de la concha cilíndrica y de la viga de borde, pero estos, junto a  $M_\phi$ , son las fuerzas y tensiones críticas. Para el caso de una concha cilíndrica interna, se realiza el análisis de la misma manera, a excepción de que el ancho de la viga de borde será dividido entre dos.

### Conchas cilíndricas cortas

Las conchas cilíndricas cortas pueden ser analizadas por medio de dos métodos prácticos, el primero de ellos es el *método de la teoría de membrana*, y el segundo el método de análisis del manual No. 31 presentado por la ASCE.

#### **Método de la teoría de membrana**

Para ubicar un elemento infinitamente pequeño perteneciente a una concha cilíndrica con las dimensiones que se muestran en la Figura 57, se puede localizar por sus coordenadas, según el ángulo  $\phi$  y la distancia  $x$ .

##### *Directriz Circular*

Para el análisis de una concha cilíndrica mediante el método de la teoría de membrana, se empleará una concha cilíndrica de sección transversal circular, sobre la cual se supondrá que actuara una carga distribuida en la superficie de la concha,

cuyas componentes en la dirección longitudinal  $x$ , en la dirección tangente a la curva  $y$  y en la dirección radial  $z$ , serán designadas como  $X, Y, Z$ , respectivamente.

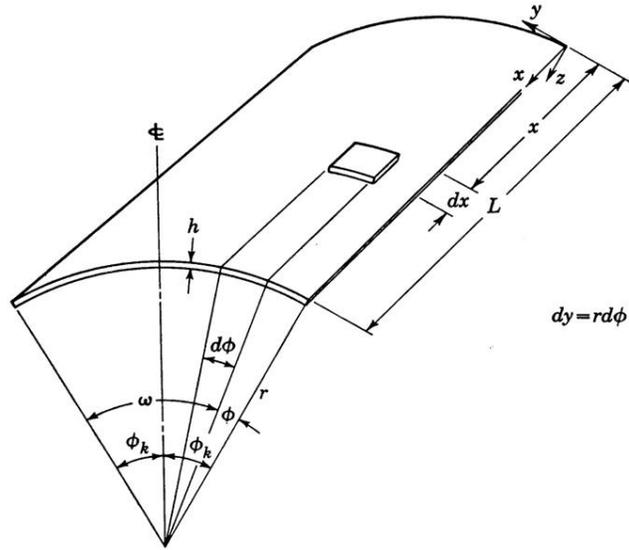


Figura 57. Dimensiones de una concha cilíndrica. Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

De las ecuaciones 122, 123 y 124, en donde se presenta la teoría de membrana, se hacen las siguientes definiciones a ser empleadas en conchas cilíndricas de sección transversal circular:

$$\begin{array}{llll}
 \alpha_x = x & a_x = 1 & r_x = \infty & N'_y = N'_\phi \\
 \alpha_y = \phi & a_y = r & r_y = r & N'_{xy} = N'_{x\phi} \\
 & & r_{xy} = \infty & 
 \end{array}$$

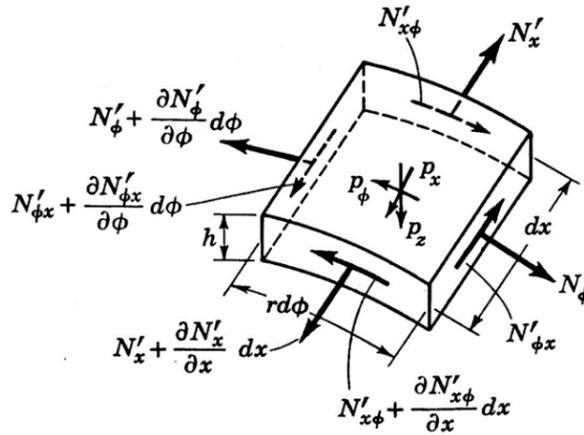


Figura 58. Dimensiones del elemento infinitamente pequeño perteneciente a una concha cilíndrica de sección transversal circular y las fuerzas que actúan sobre el elemento. Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

Al ser  $r$  una constante, las ecuaciones de la teoría de membrana se reducen a:

$$r \frac{\partial N'_x}{\partial x} + \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} + p_x r = 0 \quad (200)$$

$$\frac{\partial N'_\phi}{\partial \phi} + r \frac{\partial N'_{x\phi}}{\partial x} + p_\phi r = 0 \quad (201)$$

$$\frac{\partial N'_\phi}{r} + p_z = 0 \quad (202)$$

Las expresiones generales de la resultante de tensiones se obtienen derivando las ecuaciones 200, 201 y 202.

$$\frac{\partial N'_x}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} - p_x \quad (203)$$

$$\frac{\partial N'_{x\phi}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial N'_\phi}{\partial \phi} - p_\phi \quad (204)$$

$$N'_\phi = -p_z r \quad (205)$$

Se puede obtener un sistema de ecuaciones con las ecuaciones 203, 204 y 205, para obtener los valores de las tensiones en cualquier punto de la concha cilíndrica. Las ecuaciones 203, 204 y 205, se pueden obtener también si se realiza el equilibrio del elemento diferencial, Figura 58, de la concha cilíndrica. Las ecuaciones 203 y 204 se resuelven por simple integración en la dirección  $x$ .

$$N'_{x\phi} = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial N'_\phi}{\partial \phi} dx - \int p_\phi dx + C_1(\phi) \quad (206)$$

$$N'_x = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial N'_{\phi x}}{\partial \phi} dx - \int p_x dx + C_2(\phi) \quad (207)$$

$$N'_\phi = -p_z r \quad (208)$$

Las ecuaciones 206, 207 y 208, son las ecuaciones generales para la determinación de las tensiones que actúan en una concha cilíndrica. Para determinar las tensiones que se presentan en una concha cilíndrica cuando se encuentra sujeta a la acción de una carga uniformemente distribuida en su superficie, designando a esta carga como  $p_d$ . Las componentes de la carga  $p_d$  en las direcciones de los tres ejes coordenados son:

$$p_z = p \cos(\phi_k - \phi) \quad (209)$$

$$p_\phi = p \sin(\phi_k - \phi) \quad (210)$$

$$p_x = 0 \quad (211)$$

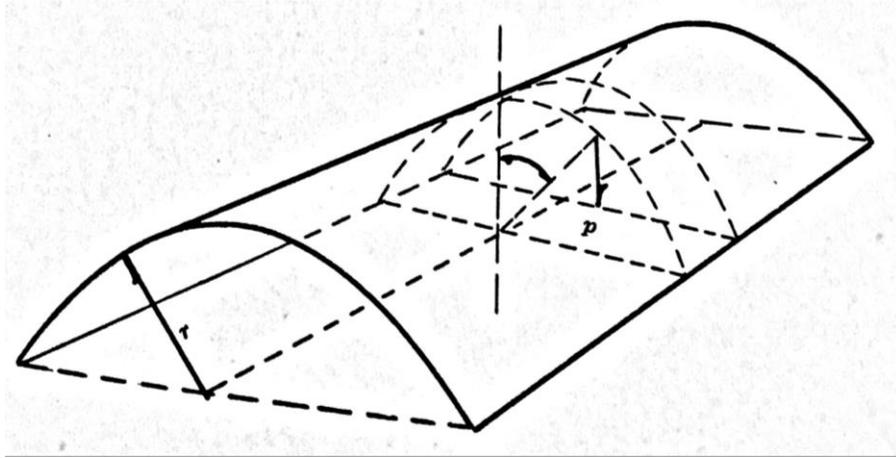


Figura 59. Componentes en las direcciones y y z de la carga uniformemente distribuida sobre la superficie de la concha cilíndrica. Tomada de “Análisis, Cálculo y Diseño de las Bóvedas de Cáscara” por A. Olvera López, 1978, C.E.C.S.A.

Sustituyendo la ecuación 209, en la ecuación 208 obtenida por la teoría de membrana, y luego sustituyéndola en la ecuación 206, se tiene que:

$$N'_\phi = -pr \cos(\phi_k - \phi) \quad (212)$$

$$N'_{x\phi} = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial[-pr \cos(\phi_k - \phi)]}{\partial \phi} dx - \int p \sin(\phi_k - \phi) dx + C_1(\phi) \quad (213)$$

Diferenciando e integrando la ecuación 213:

$$N'_{x\phi} = -2px \sin(\phi_k - \phi) + C_1(\phi) \quad (214)$$

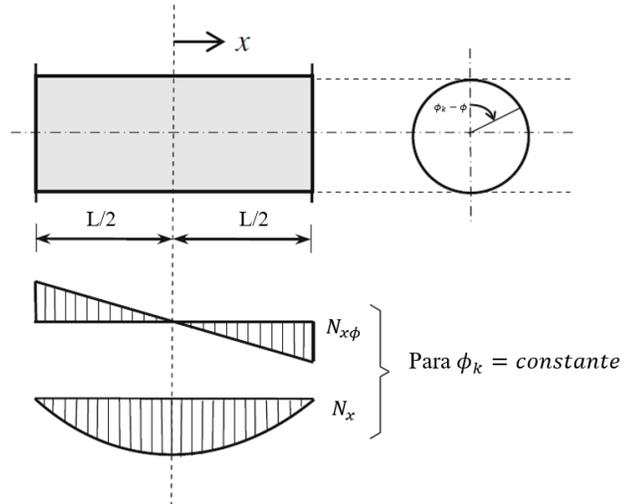


Figura 60. Concha cilíndrica circular soportada en sus dos extremos por diafragmas, distribución de  $N_{x\phi}$  y  $N_x$ . Tomada de “Structural Shell Analysis. Understanding and Application” por J. Blaauwendraad & J. H. Hoefakker, 2014, Springer Science+Business Media Dordrecht.

La función  $C_1(\phi)$  debe determinarse a partir de las condiciones de borde. De la Figura 60 se observa que, debido a la simetría de la carga, el cortante es nulo en el centro de la concha cilíndrica, al estar los extremos de la concha igualmente apoyados. Tomando como origen el centro de la concha cilíndrica, se tiene:

$$N'_{x\phi} = 0 \text{ en } x = 0$$

$$C_1(\phi) = 0$$

Sustituyendo  $C_1(\phi)$  en  $N'_{x\phi}$  y luego  $N'_{x\phi}$  en  $N'_x$  se tiene que:

$$N'_{x\phi} = -2px \sin(\phi_k - \phi) \quad (215)$$

$$N'_x = -\frac{1}{r} \int \frac{\partial[-2px \sin(\phi_k - \phi)]}{\partial \phi} dx + C_2(\phi) \quad (216)$$

Diferenciando e integrando la ecuación 205:

$$N'_x = \frac{px^2 \cos(\phi_k - \phi)}{r} + C_2(\phi) \quad (217)$$

Al igual que la función  $C_1(\phi)$ , la función  $C_2(\phi)$  debe determinarse a partir de las condiciones de borde. De la Figura 60 se observa que, debido a la simetría de la carga, la fuerza longitudinal  $N'_x$  es nula en los extremos de la concha cilíndrica, al estar los extremos de la concha igualmente apoyados. Por lo tanto:

$$N'_x = 0 \text{ en } x = \frac{L}{2}$$

$$C_2(\phi) = -\frac{pL^2 \cos(\phi_k - \phi)}{4r}$$

Sustituyendo  $C_2(\phi)$  en  $N'_x$  se tiene que:

$$N'_x = -\frac{p \cos(\phi_k - \phi)}{4r} (L^2 - 4x^2) \quad (218)$$

Las ecuaciones 212, 215 y 218, representan las fuerzas normales y de corte de la concha cilíndrica circular. En la Figura 61, se representa la distribución de las fuerzas.

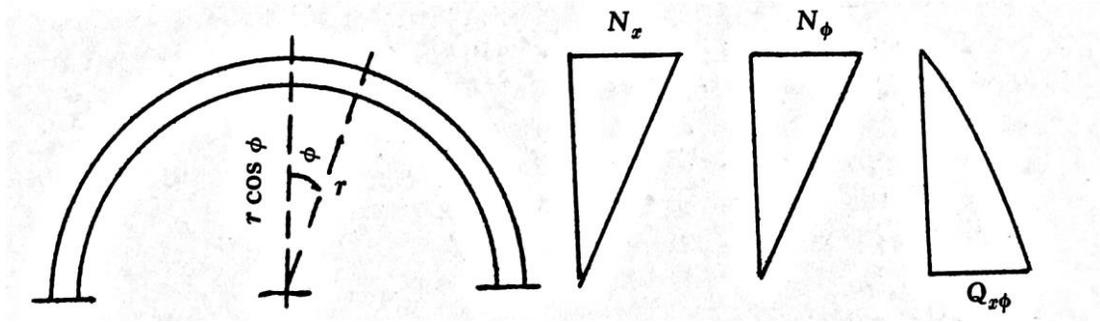


Figura 61. Distribución de las fuerzas en una concha cilíndrica circular. Tomada de “Análisis, Cálculo y Diseño de las Bóvedas de Cáscara” por A. Olvera López, C.E.C.S.A.

De la Figura 61 se aprecia que  $N_x$  y  $N_\phi$  ( $N_\phi$  debe ser cero para poder construir conchas cilíndricas libres de apoyos longitudinales a diferencia de las bóvedas de cañón) se anulan a lo largo de los bordes longitudinales de la concha cilíndrica. Caso contrario de lo que sucede con  $N_{x\phi}$ , la cual no se anula en los bordes longitudinales. Por lo que, se debe reforzar las vigas de bordes las cuales sean capaces de equilibrar las fuerzas de corte.

#### Directriz elíptica

En el caso de una concha cilíndrica de directriz elíptica empleada como cubierta, de la Figura 62, se obtiene que el radio de la elipse es:

$$r = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \quad (219)$$

Suponiendo que la única carga que actúa en la concha cilíndrica elíptica es uniforme por unidad de superficie, se tiene entonces al igual que en el caso de las conchas cilíndricas circulares las ecuaciones 209, 210 y 211.

Empleando las mismas condiciones de apoyo,  $x = 0$  en el centro de la concha cilíndrica y partiendo de las ecuaciones de la teoría de membrana, se obtienen las ecuaciones generales para el caso de conchas cilíndricas de directriz elíptica:

$$N_x = -\frac{p}{8}(L^2 - 4x^2) \frac{3a^2b^2 - (a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^2}{a^2b^2(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{1/2}} \cos \phi \quad (220)$$

$$N_\phi = -pa^2b^2 \frac{\cos \phi}{(a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \quad (221)$$

$$N_{x\phi} = -px \frac{2a^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \phi}{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi} \sin \phi \quad (222)$$

Para lograr que la construcción de una concha cilíndrica libre de apoyos longitudinales, caso contrario de las bóvedas de cañón, la fuerza  $N_\phi$  debe ser nula en los bordes longitudinales. Esto ocurre cuando la componente normal de la carga,  $p_z$ , es igual a cero. En este caso  $p_z$  es cero cuando  $\phi = \pm\pi/2$ . De manera que la directriz de la concha cilíndrica debe terminar con una tangente vertical, tal es el caso de una directriz elíptica o cicloide.

La Figura 62, muestra la distribución de la resultante de tensiones en la concha, en donde, longitudinalmente la concha esta traccionada en su parte inferior y comprimida en su parte superior. Al igual que en las conchas cilíndricas circulares, las fuerzas  $N_x$  y  $N_\phi$  se anulan en el borde, y  $N_{x\phi}$  tiene un valor de  $\pm 2pax$ , el cual es el mismo valor para una concha cilíndrica circular de radio  $a$ . Al ser  $N_\phi$  igual a cero en los bordes, es una ventaja debido a que, no hay la necesidad de emplear elementos

de borde en el caso de una concha cilíndrica aislada, ni en el caso de las conchas extremas en conchas múltiples.

La fuerza en la viga o elemento de borde es:

$$N = p \left( \frac{L^2}{4} - x^2 \right) \quad (223)$$

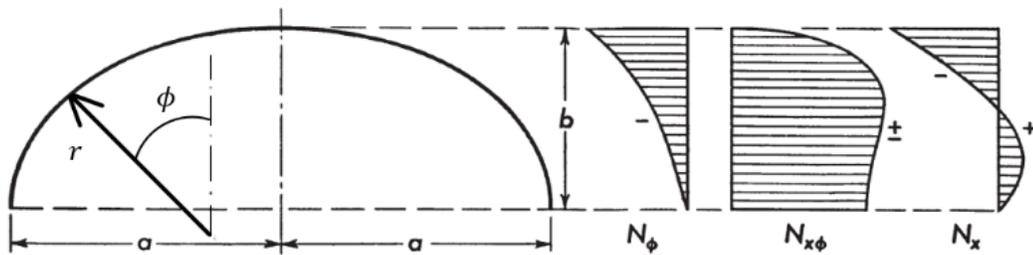


Figura 62. Resultante de tensiones sobre la directriz de una concha cilíndrica elíptica. Tomada de "Stresses in Shells" por W. Flügge, 1960, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH.

La fuerza normal  $N_x$  en dirección longitudinal se encuentra mayormente a compresión en toda la sección transversal de la concha cilíndrica, pero si la relación  $b/a$  empieza a reducirse, empezaran a originarse zonas con tensiones de tracción cerca de los bordes, así como se observa en la Figura 62. En consecuencia, el método de la teoría de membrana es ideal para concha cilíndricas cortas.

Las ventajas de una concha cilíndrica de directriz elíptica que tiene sobre una de directriz circular son:

- 1) Mejor forma en la sección transversal.
- 2) El trabajo de colado al momento de la construcción es más simple.

- 3) Eliminación de una viga de borde muy grande ya que, en la concha cilíndrica elíptica ésta puede convertirse en una prolongación de la misma, eliminando las perturbaciones que su peso produce.

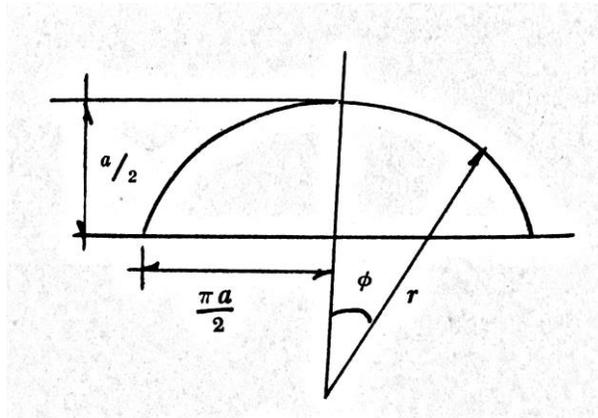
*Directriz cicloidal*

Un cicloide se puede describir por las siguientes ecuaciones:

$$y = a(2\phi + \sin 2\phi) \quad (224)$$

$$z = a(1 + \cos 2\phi) \quad (225)$$

En el caso de una concha cilíndrica cicloidal empleada como cubierta, el radio de curvatura de la concha cilíndrica cicloidal es,  $r = a \cos \phi$ , Figura 63.



*Figura 63.* Elementos que describen una directriz cicloidal. Tomada de “Análisis, Cálculo y Diseño de las Bóvedas de Cáscara” por A. Olvera López, C.E.C.S.A.

La resultante de tensiones para una carga uniforme por unidad de superficie, ecuaciones 209, 210 y 211:

$$N_x = -\frac{3p}{8a}(L^2 - 4x^2) \quad (226)$$

$$N_\phi = -pa \cos^2 \phi \quad (227)$$

$$N_{x\phi} = -3px \sin \phi \quad (228)$$

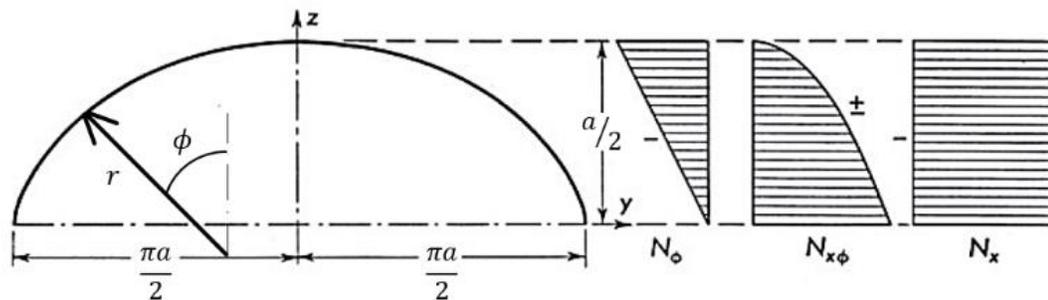


Figura 64. Distribución de fuerzas sobre la directriz de una concha cilíndrica cicloidal. Tomada de "Stresses in Shells" por W. Flügge, 1960, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH.

De la distribución de la resultante de tensiones sobre la directriz cicloidal, Figura 64, se observa que, la fuerzas  $N_x$  es independiente de  $\phi$ , siendo constante a lo largo de toda la altura de la sección transversal. Esto puede ser ideal en algunos casos ya que el material de la concha se estará utilizando eficientemente. Pero, en muchos casos es deseable tener una fuerza de tracción  $N_x$  a lo largo del borde para evitar grandes diferencias entre la deformación longitudinal en la concha y la del elemento de borde.

### *Directriz catenaria*

Para una concha cilíndrica con directriz catenaria, el radio de curvatura es:

$$r = \frac{a}{\cos^2 \phi} \quad (229)$$

En donde,  $a$  es el radio de curvatura en el vértice. La resultante de tensiones considerando solo el peso propio de la concha cilíndrica, es:

$$N_x = 0 \quad (230)$$

$$N_\phi = -\frac{pa}{\cos \phi} \quad (231)$$

$$N_{x\phi} = 0 \quad (232)$$

Para la concha cilíndrica con directriz catenaria, la única fuerza producida por el peso propio es  $N_\phi$ . En el caso de  $N_x$  y  $N_{x\phi}$ , es de esperarse que estas dos fuerzas sean nulas ya que, la catenaria es la curva funicular de una carga uniformemente repartida según su arco.

### *Directriz parabólica*

Expresando el radio de curvatura  $r$  en función de  $a$  (radio de curvatura del vértice) y considerando solo el peso propio de la concha cilíndrica, se obtiene la resultante de tensiones:

$$N_x = \frac{p}{8a} (L^2 - 4x^2) \cos^4 \phi \quad (233)$$

$$N_\phi = -\frac{pa}{\cos^2 \phi} \quad (234)$$

$$N_{x\phi} = p \sin \phi \quad (235)$$

En teoría, una membrana perfecta debe asegurar que se cumpla en sus bordes de manera simultánea que,  $N_\phi$  y  $N_{x\phi}$  sean iguales a cero. Estas condiciones solo se cumplen en el caso de la concha cilíndrica de directriz catenaria, caso contrario de lo que ocurre con el semicírculo, la semielipse y la cicloidal, las cuales solo satisfacen  $N_\phi = 0.$ , requiriendo la colocación de los elementos de bordes que equilibren las fuerzas tangenciales en estos puntos.

El método de la teoría de membrana idealiza al material con el que está compuesta la concha como un material que no resiste a la flexión, lo cual no es completamente cierto debido a que el material es susceptible a equilibrar tensiones normales (compresión y tracción) y tensiones tangenciales, pero no a resistir tensiones de flexión, siendo contradictorio debido a que, si tienen compresión, tracción y corte, necesariamente también tiene flexión. Por lo tanto, el método de la teoría de membrana presenta un modelo físicamente falso, siendo de poco interés para los ingenieros. Pero pese a esto, el método de la teoría de membrana se considera como un método que sirve de introducción a un método más refinado, en donde se toma en consideración la flexión. No obstante, el método de la flexión es un método muy complejo y poco práctico al momento de diseñar conchas cilíndricas.

## COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE DISEÑO DE CONCHAS CILÍNDRICAS

A continuación, se presentan tres ejemplos en donde se calculan las resultantes de tensiones de las conchas cilíndricas mediante una solución analítica, métodos prácticos y análisis de elementos finitos.

### Ejemplo #1 - Concha cilíndrica aislada larga sin vigas de borde<sup>10</sup>

#### Dimensiones

Longitud de la concha,  $L = 36,60$  m

Radio de la concha,  $R = 9,15$  m

Angulo mitad de la concha,  $\phi = 40^\circ$

Espesor de la concha,  $2h = 7,50$  cm

Ancho de la concha,  $2R \sin \phi = 11,75$  m

#### Propiedades del concreto

Peso específico del concreto =  $2.400 \text{ Kg/m}^3$

$F'c = 250 \text{ Kg/cm}^2$

Módulo de elasticidad =  $238.751,96 \text{ Kg/cm}^2$

#### Cargas

Peso propio de la concha =  $180 \text{ Kg/m}^2$

Impermeabilizado + carga de nieve =  $64 \text{ Kg/m}^2$

Carga Total,  $q = 244 \text{ Kg/m}^2$

---

<sup>10</sup> Este ejemplo ha sido calculado previamente por solución analítica en la referencia [12].

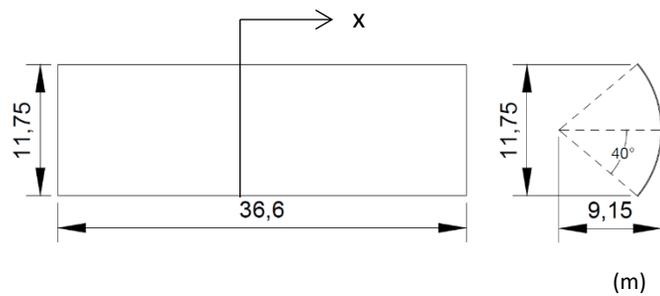


Figura 65. Dimensiones de la concha cilíndrica circular – Ejemplo #1.

Para el diseño de la concha cilíndrica se analizó de manera analítica aplicando las condiciones de borde para el caso de una concha aislada y sin vigas de borde. El cálculo de la solución analítica se programó en una hoja Excel que se presenta en el Anexo C. Los métodos prácticos empleados en este caso son el método arco-viga y el método presentado en el manual No. 31 por la ASCE (Tablas ASCE de ahora en adelante). Finalmente, para el análisis por medio de elementos finitos (FEA, por sus siglas en inglés) se empleó el programa SAP2000 (CSI, 2018), la concha cilíndrica se modeló utilizando elementos cuadriláteros tipo concha de cuatro nodos, de dimensiones 5 cm x 5 cm, con la teoría de placa delgada de Kirchhoff, en donde se desprecian los efectos de corte fuera del plano del elemento concha. La Figura 66 muestra el modelo de la concha cilíndrica circular por medio de elementos finitos y las Figuras 67 a la 69 las fuerzas obtenidas por medio del análisis de elementos finitos.

## Resultados de los métodos de diseño

Tabla 6

*Resultados de las fuerzas obtenidas por la solución analítica*

	$M_\phi$	$Q'_\phi$	$N_\phi$	$N_{x\phi}$	$M_x$	$N_x$	$Q_x$	$M_{x\phi}$
$\phi$	cos kx	cos kx	cos kx	sin kx	cos kx	cos kx	sin kx	sin kx
	kgm/m	kgm/m	kgm/m	kgm/m	kgm/m	kgm/m	kgm/m	kgm/m
0°	-1.587,45	0	-4.820,66	0	21,50	-61.769,82	134,51	0
10°	-1.352,03	317,08	-4.291,77	-8.219,34	36,03	-56.045,27	113,05	206,65
20°	-769,88	471,54	-2.825,12	-14.469,23	75,38	-30.191,31	59,70	354,48
30°	-181,07	351,45	-940,57	-14.497,55	129,15	39.751,04	4,54	417,26
40°	0	0	0	0	186,97	188.023,88	-15,98	423,14

Tabla 7

Comparación de resultados obtenidos de la concha cilíndrica aislada larga sin vigas de borde

Método de diseño	Ángulo $\phi$ (medido desde la corona)					
	40°	30°	20°	10°	0°	
$X = 0, \text{ kgf/m}$						
$N_x$	Solución Analítica	188.023,88	39.751,04	-30.191,31	-56.045,27	-61.769,82
	FEA	165.026,22	40.709,95	-25.790,24	-54.231,49	-62.010,05
	Tablas ASCE	201.745,69	39.339,61	-31.799,72	-54.121,36	-57.859,33
	Arco-Viga	178.653,90	63.174,71	-21.922,40	-73.999,46	-91.555,58
$X = 0, \text{ kgf/m}$						
$N_\phi$	Solución Analítica	0,00	-940,57	-2.825,12	-4.291,77	-4.820,66
	FEA	450,19	-260,82	-1.959,72	-3.574,10	-4.265,14
	Tablas ASCE	0,35	-915,68	-2.831,44	-4.304,17	-4.829,20
	Arco-Viga	844,26	156,34	-1.682,84	-3.342,94	-3.991,06
$X = L/2, \text{ kgf/m}$						
$N_{x\phi}$	Solución Analítica	0,00	-14.497,55	-14.469,23	-8.219,34	0,00
	FEA	-47,31	-7.032,44	-14.029,56	-18.223,27	-504,77
	Tablas ASCE	930,59	-14.290,05	-14.018,65	-7.790,17	0,00
$X = 0, \text{ kgf/m}$						
$M_\phi$	Solución Analítica	0,00	-181,07	-769,88	-1.352,03	-1.587,45
	FEA	0,00	-186,14	-755,96	-1.338,41	-1.592,10
	Tablas ASCE	0,00	-144,99	-704,10	-1.264,50	-1.487,93
	Arco-Viga	-467,14	164,38	166,46	-78,55	-233,31

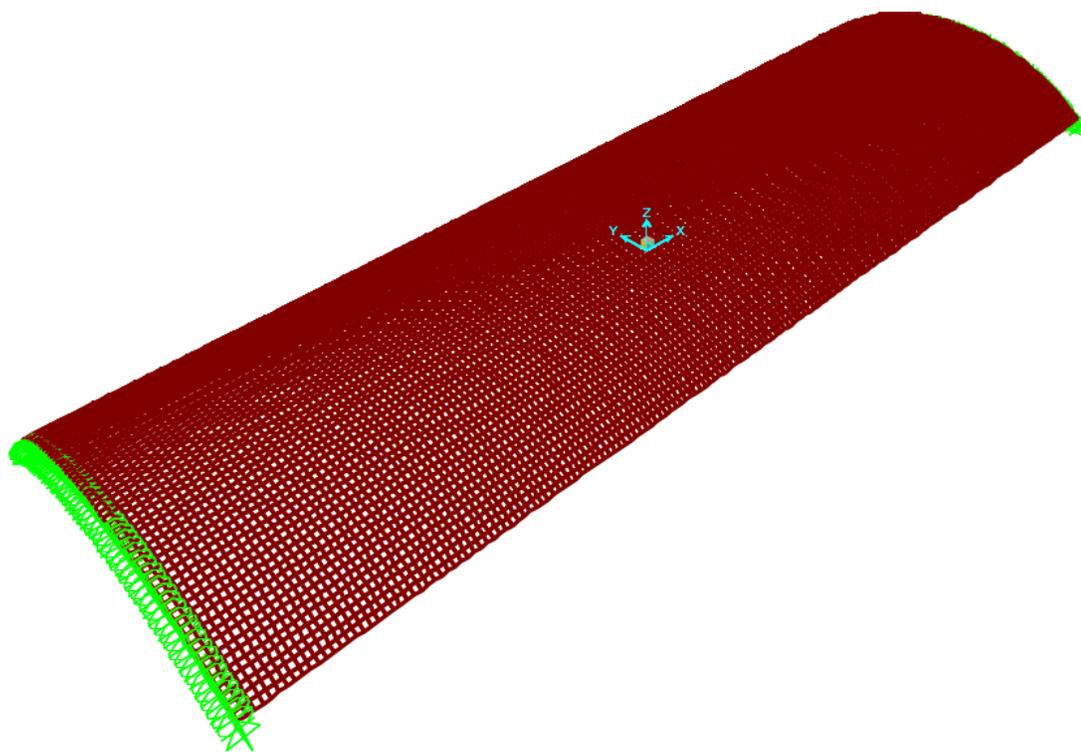


Figura 66. Modelo de la concha cilíndrica circular larga sin vigas de borde mediante elementos finitos.

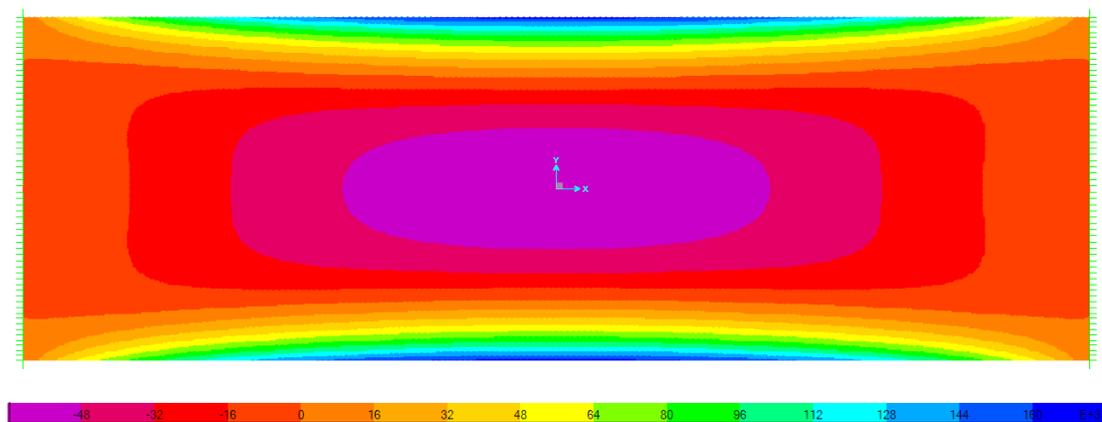


Figura 67. Fuerza longitudinal  $N_x$  (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos.

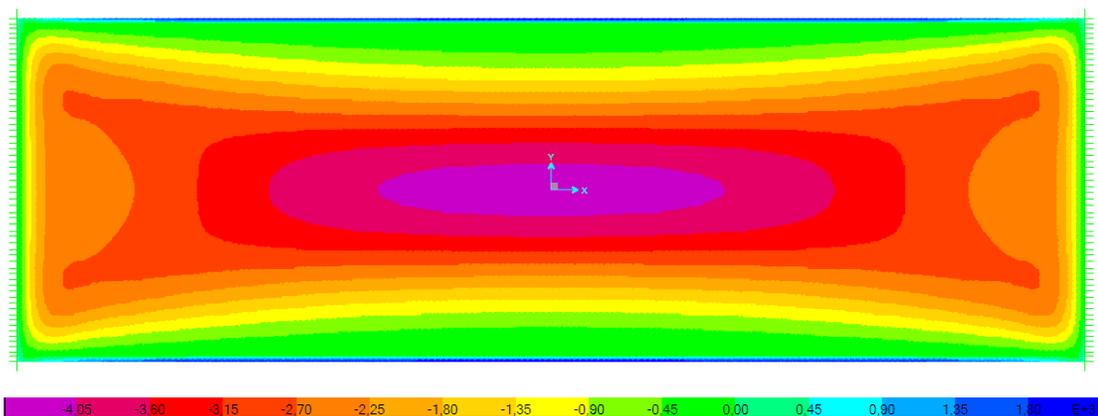


Figura 68. Fuerza transversal  $N_{\phi}$  (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos.

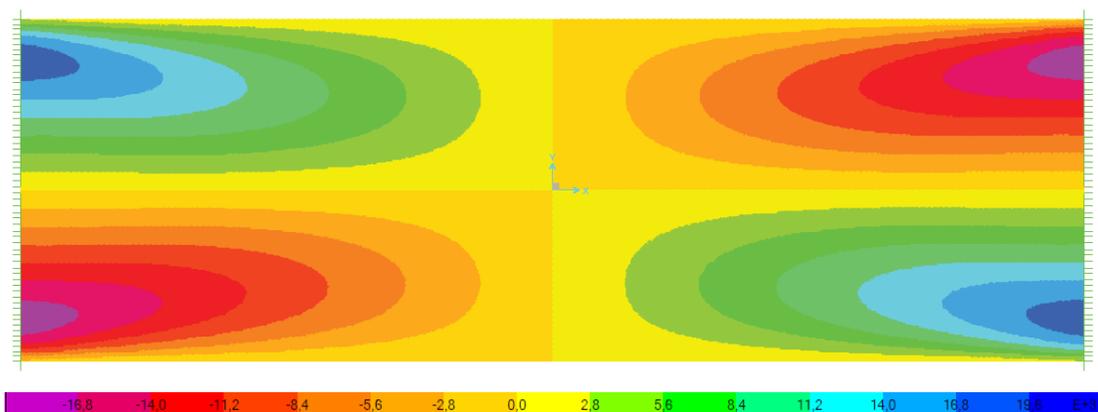


Figura 69. Fuerza cortante  $N_{x\phi}$  (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos.

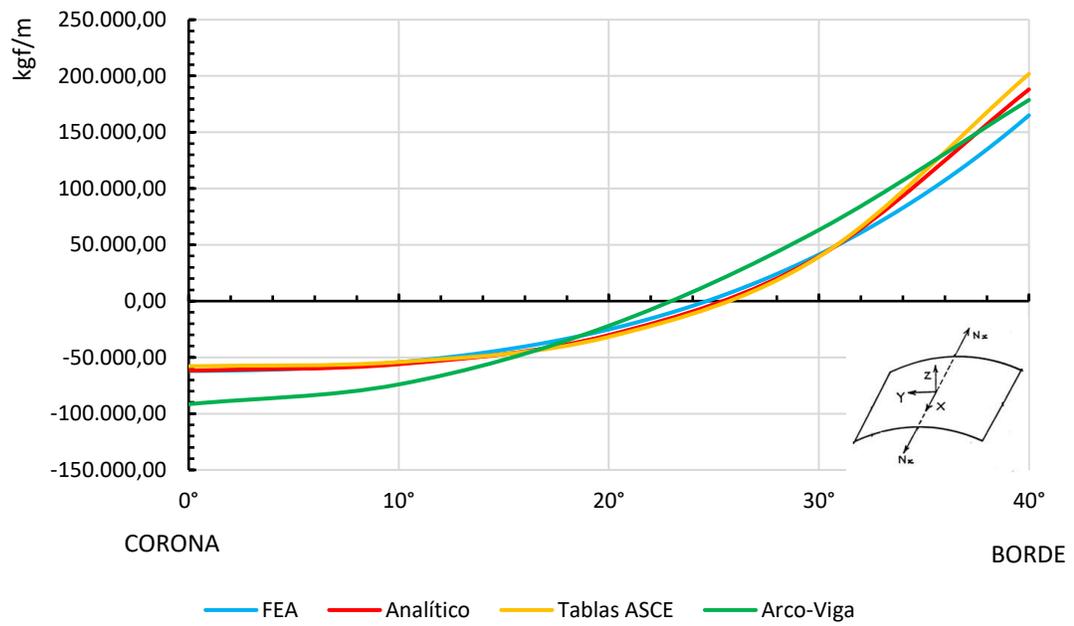


Figura 70. Comparación de las fuerzas longitudinales  $N_x$  obtenidas por distintos métodos.

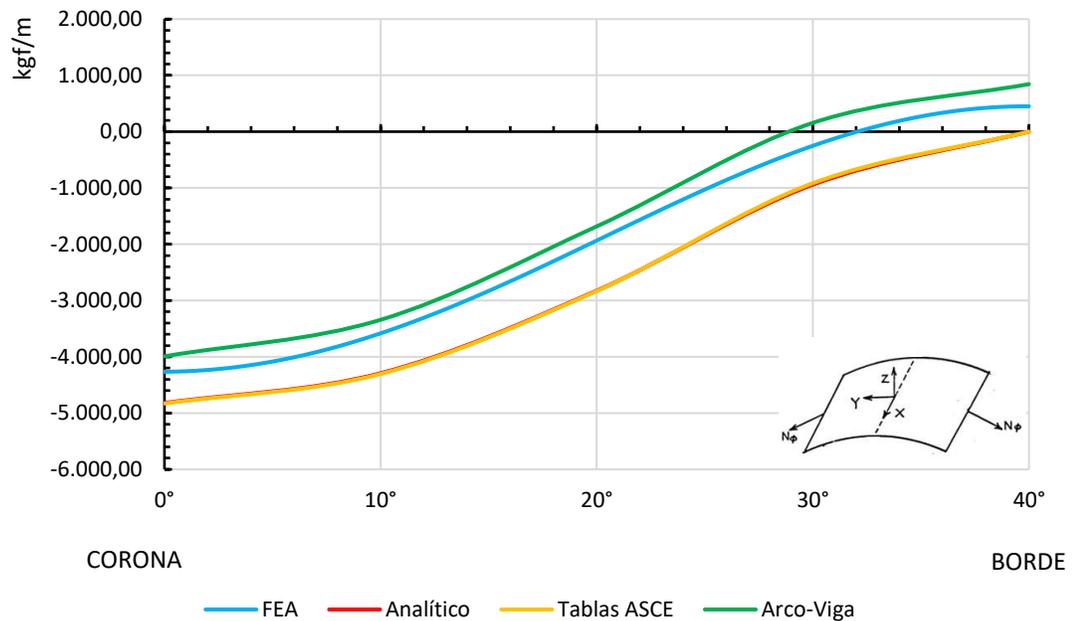


Figura 71. Comparación de las fuerzas transversales  $N_\phi$  obtenidas por distintos métodos.

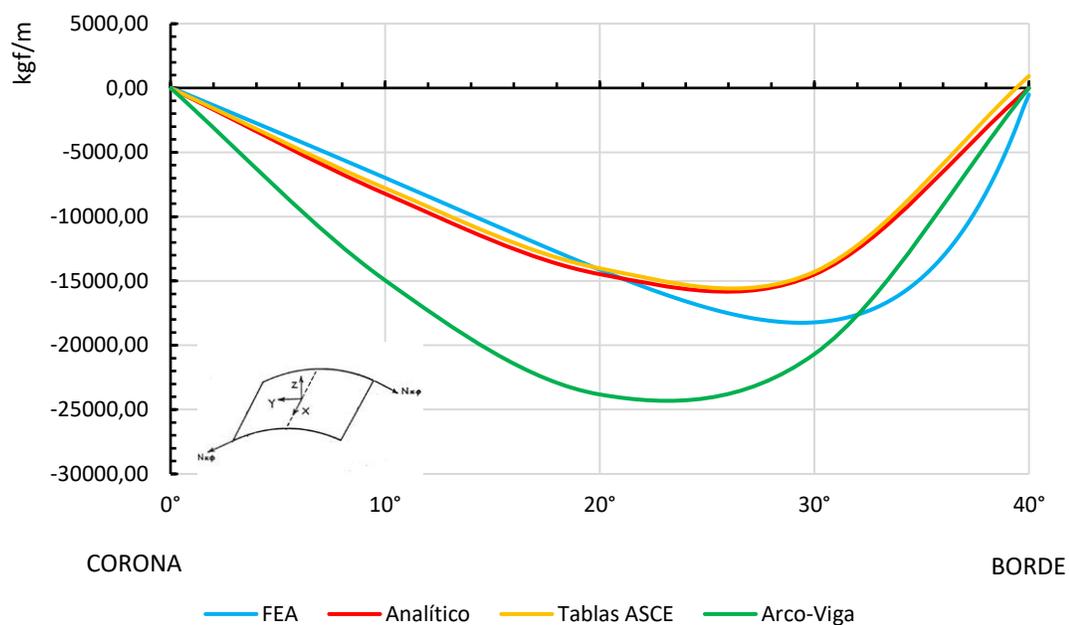


Figura 72. Comparación de las fuerzas cortantes  $N_{x\phi}$  obtenidas por distintos métodos.

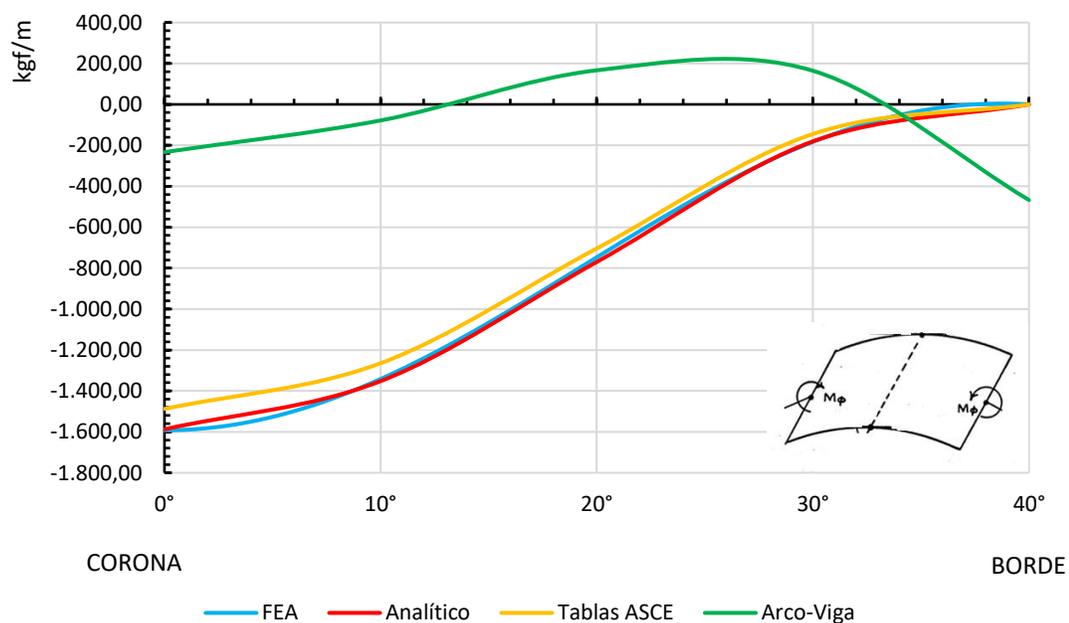


Figura 73. Comparación de los momentos transversales  $M_\phi$  obtenidos por distintos métodos.

De la Tabla 6 se concluye que las fuerzas dominantes son  $N_x$ ,  $N_\phi$  y  $N_{x\phi}$ , y el momento flexionante que domina es  $M_\phi$ . Los resultados del análisis se presentan y comparan en la Tabla 7 y en las Figuras 70 a la 73. El método arco-viga presenta resultados cercanos a los obtenidos por la solución analítica y por el análisis de elementos finitos, en cuanto a las fuerzas longitudinales  $N_x$ , cortantes  $N_{x\phi}$  y transversales. Pero en el caso del momento transversal  $M_\phi$ , el método arco-viga no representa el comportamiento real de la concha cilíndrica, es debido a esto que se recomienda emplear este método solo para establecer las dimensiones de la concha y tener una primera aproximación de las fuerzas y momentos que se esperan en la concha. El método presentado por la ASCE es bastante confiable ya que al ser un método práctico, los resultados obtenidos son cercanos a los obtenidos por la solución analítica. El análisis de elementos finitos presenta algunas desviaciones, principalmente a lo largo de la dirección transversal,  $\phi$ . En algunos puntos los resultados del análisis de elementos finitos concuerdan muy bien con los obtenidos por la solución analítica, pero en otros muestra una desviación significativa. Estas desviaciones son esperadas debido a que en la solución analítica se hacen algunas suposiciones para su solución, como asumir el primer término de la serie de Fourier en el caso de la carga; así como también influye la densidad del mallado de los elementos finitos. En la Figura 67 se observa como la fuerza longitudinal que se encuentra a tracción se concentra en los bordes longitudinales de la concha, es por ello que se requiere del uso de las vigas de borde para la reducción principalmente de la fuerza longitudinal.

## Concha cilíndrica aislada larga con vigas de borde<sup>11</sup>

### Concha cilíndrica

#### Dimensiones

Longitud de la concha,  $L = 36,60$  m

Radio de la concha,  $R = 9,15$  m

Angulo mitad de la concha,  $\phi = 40^\circ$

Espesor de la concha,  $2h = 7,50$  cm

Ancho de la concha,  $2R \sin \phi = 11,75$  m

#### Propiedades del concreto

Peso específico del concreto =  $2.400 \text{ Kg/m}^3$

$F'c = 250 \text{ Kg/cm}^2$

Módulo de elasticidad =  $238.751,96 \text{ Kg/cm}^2$

#### Cargas

Peso propio de la concha =  $180 \text{ Kg/m}^2$

Impermeabilizado + carga de nieve =  $64 \text{ Kg/m}^2$

Carga Total,  $q = 244 \text{ Kg/m}^2$

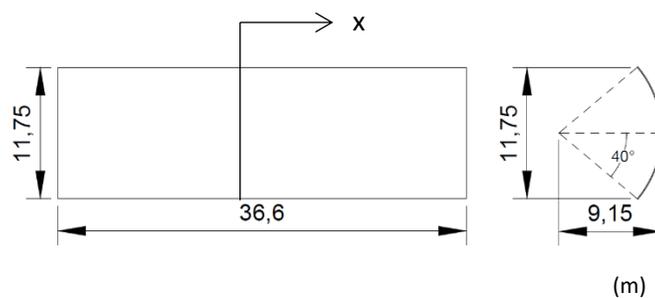


Figura 74. Dimensiones de la concha cilíndrica circular - Ejemplo #2.

<sup>11</sup> Este ejemplo ha sido calculado previamente por solución analítica en la referencia [12].

## Viga de borde

### Dimensiones

Ancho: 0,25 m

Alto: 1,52 m

### Propiedades del concreto

Peso específico del concreto =  $2.306 \text{ Kg/m}^3$

$F'c = 250 \text{ Kg/cm}^2$

Módulo de elasticidad =  $238.751,96 \text{ Kg/cm}^2$

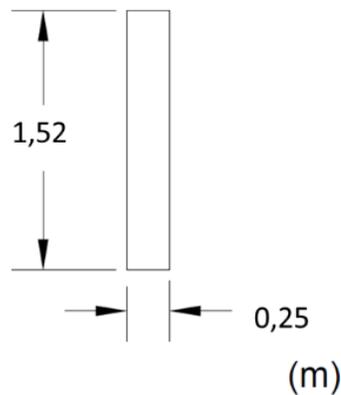


Figura 75. Dimensiones de la viga de borde - Ejemplo #2.

Para el diseño de la concha cilíndrica se analizó de manera analítica aplicando las condiciones de borde para el caso de una concha aislada y con vigas de borde. El cálculo de la solución analítica se programó en una hoja Excel que se presenta en el Anexo D. Los métodos prácticos empleados en este caso son el método de la viga y el método de la ASCE. Para el análisis por medio de elementos finitos se empleó el programa SAP2000 (CSI, 2018), la concha cilíndrica se modeló utilizando elementos cuadriláteros tipo concha de cuatro nodos, de dimensiones 30 cm x 30 cm, con la teoría de placa delgada de Kirchhoff, en donde se desprecian los efectos de corte fuera del plano del elemento concha. Las vigas de borde fueron modeladas como

elementos tipo *frame*. La Figura 76 muestra el modelo de la concha cilíndrica circular por medio de elementos finitos y las Figura 77 a la 79 las fuerzas obtenidas por medio del análisis de elementos finitos.

## Resultados de los métodos de diseño

Tabla 8

*Comparación de resultados obtenidos de la concha cilíndrica aislada larga con vigas de borde*

Método de diseño		Ángulo $\phi$ (medido desde la corona)				
		40°	30°	20°	10°	0°
$X = 0, \text{ kgf/m}$						
$N_x$	Solución Analítica	-4.538,38	-22.186,46	-29.222,35	-30.299,50	-30.028,05
	FEA	-13,80	-11.255,63	-21.490,20	-28.353,48	-30.437,98
	Tablas ASCE	1.225,39	-17.560,18	-27.080,97	-30.976,81	-31.912,81
	Viga	22.784,91	-3.348,45	-22.603,83	-34.396,18	-38.367,18
$X = 0, \text{ kgf/m}$						
$N_\phi$	Solución Analítica	-84,01	-1.589,77	-2.770,29	-3.492,20	-3.731,72
	FEA	-69,01	-928,49	-1.788,37	-2.439,91	-2.676,86
	Tablas ASCE	-338,37	-1.075,02	-2.157,86	-2.798,05	-3.376,81
$X = L/2, \text{ kgf/m}$						
$N_{x\phi}$	Solución Analítica	-13.842,77	-11.870,98	-8.249,62	-4.131,67	0,00
	FEA	-9.947,43	-12.218,20	-8.135,14	-3.737,24	214,49
	Tablas ASCE	-9.370,91	-11.920,48	-9.953,71	-5.533,72	0,00
$X = 0, \text{ kgf/m}$						
$M_\phi$	Solución Analítica	389,11	320,26	13,98	-272,74	-385,23
	FEA	668,21	236,91	-364,68	-831,88	-980,61
	Tablas ASCE	0,00	-124,95	-642,65	-1.054,43	-727,42

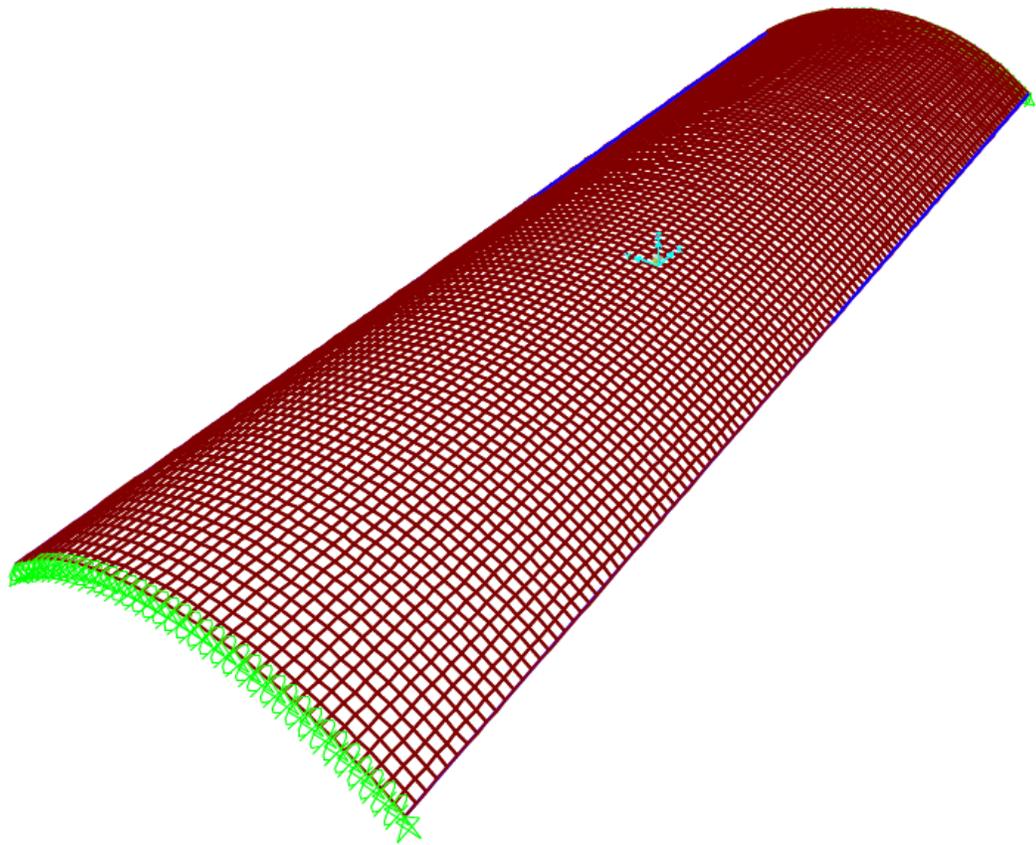


Figura 76. Modelo de la concha cilíndrica circular larga con vigas de borde mediante elementos finitos, en donde se muestran las vigas de borde (color azul) modeladas como elementos tipo *frame*.

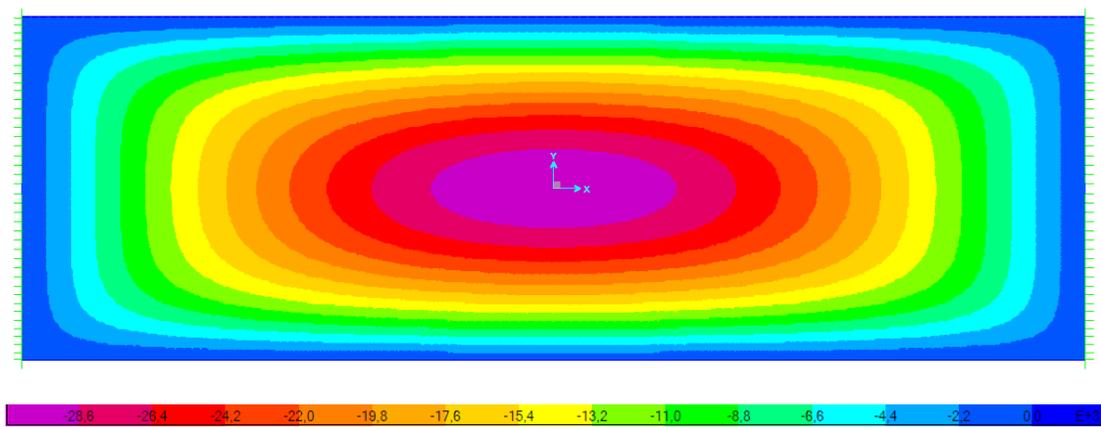


Figura 77. Fuerza longitudinal  $N_x$  (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos.

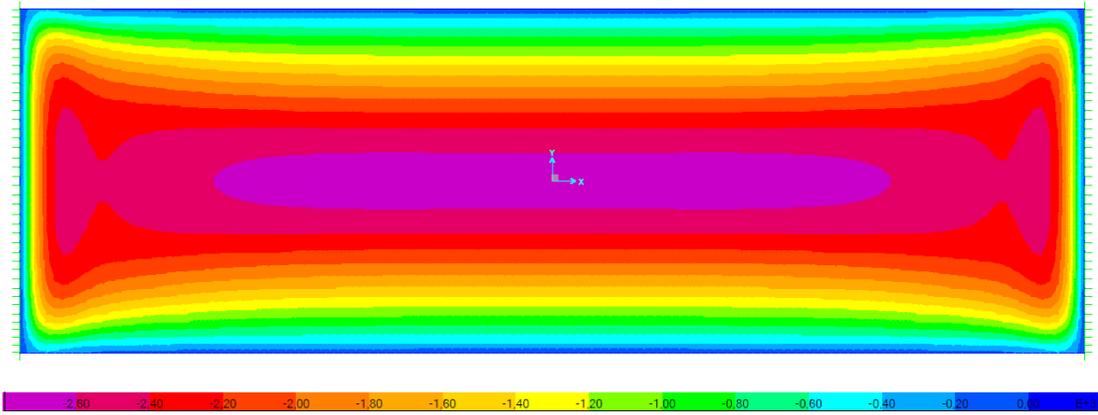


Figura 78. Fuerza transversal  $N_\phi$  (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos.

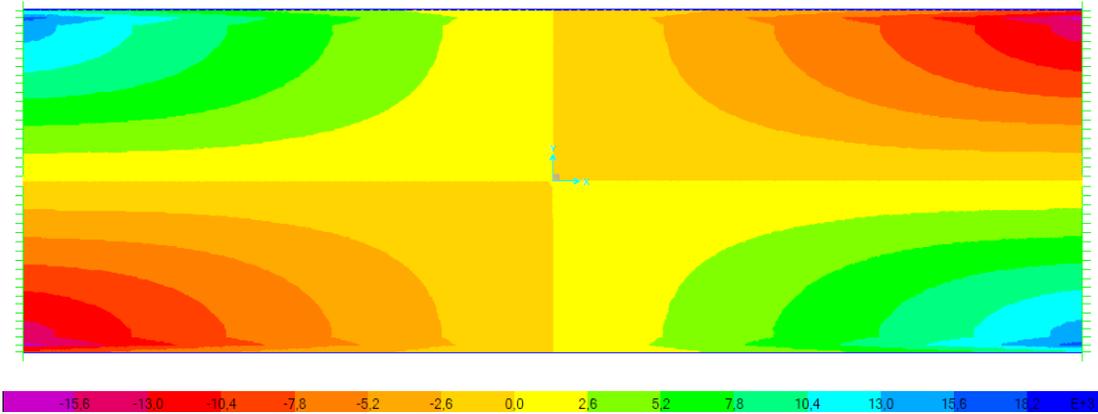


Figura 79. Fuerza cortante  $N_{x\phi}$  (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos.

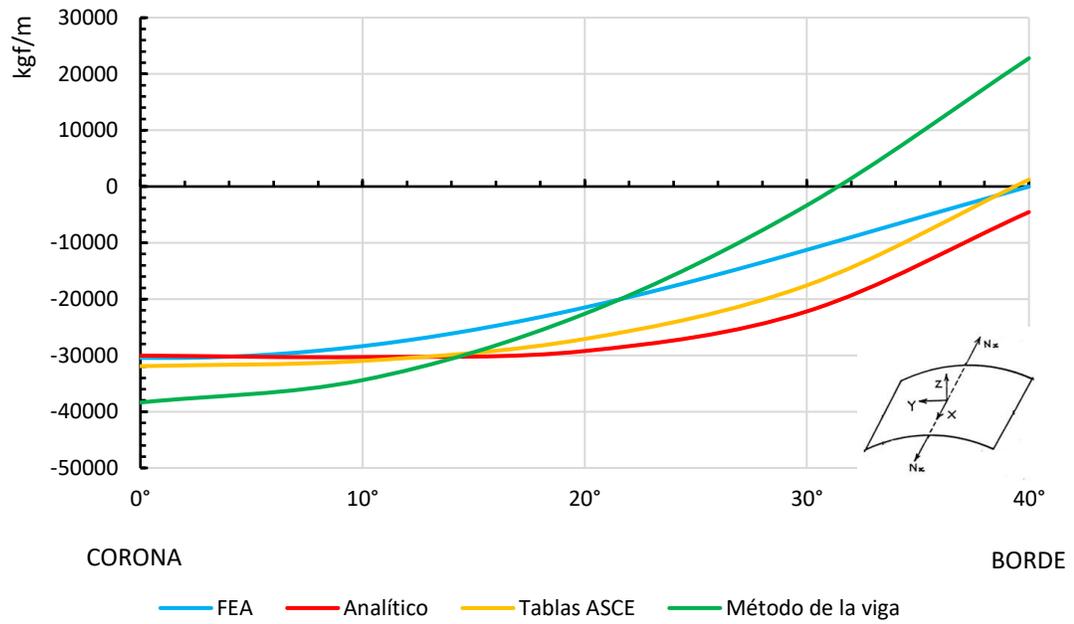


Figura 80. Comparación de las fuerzas longitudinales  $N_x$  obtenidas por distintos métodos.

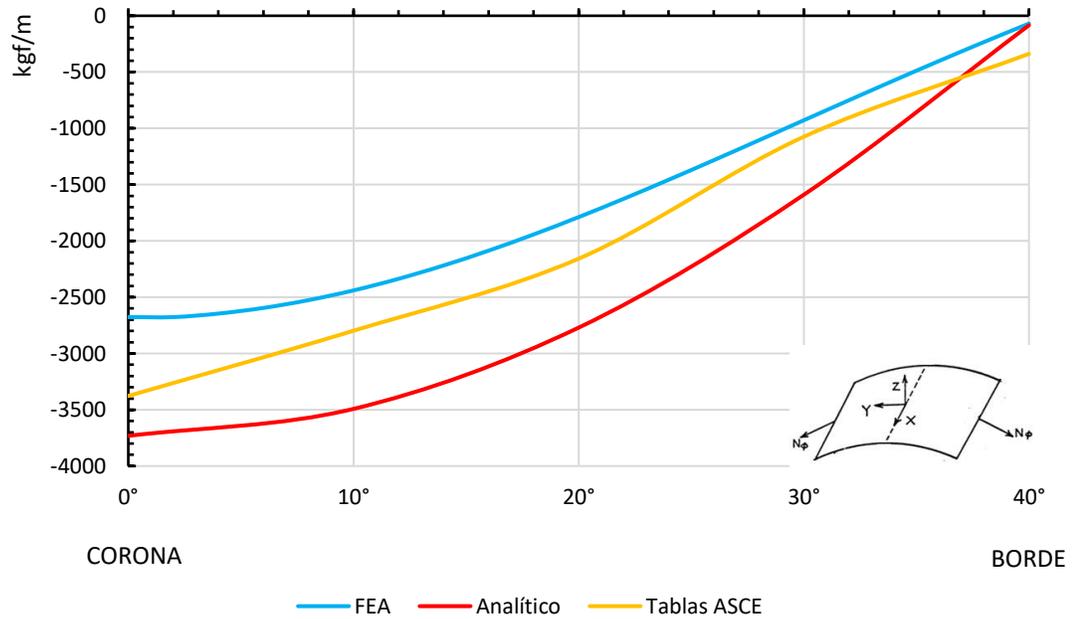


Figura 81. Comparación de las fuerzas transversales  $N_\phi$  obtenidas por distintos métodos.

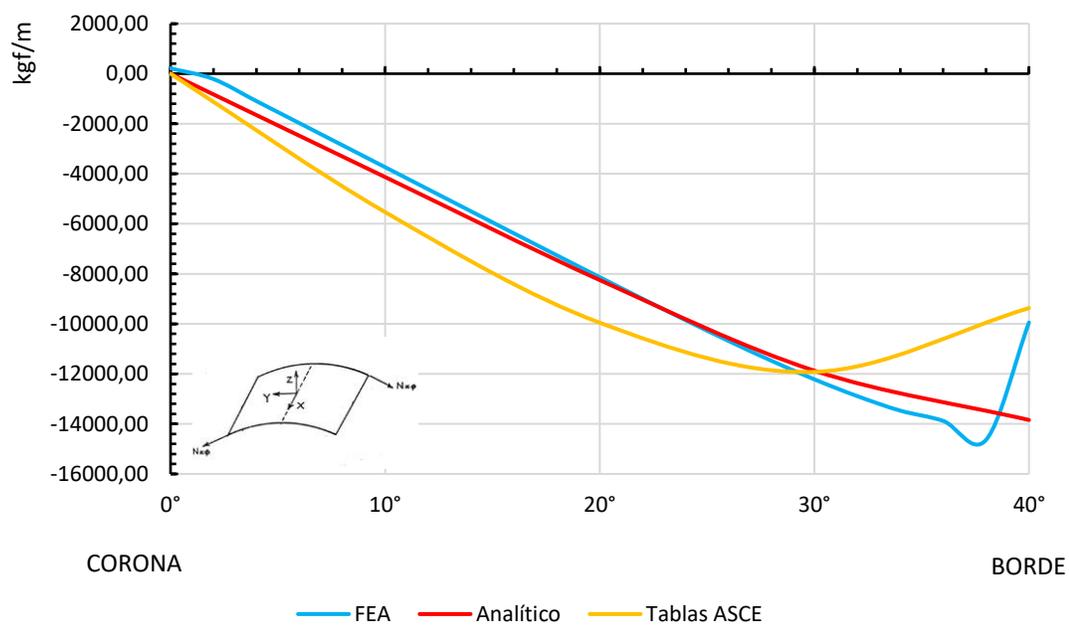


Figura 82. Comparación de las fuerzas cortantes  $N_{x\phi}$  obtenidas por distintos métodos.

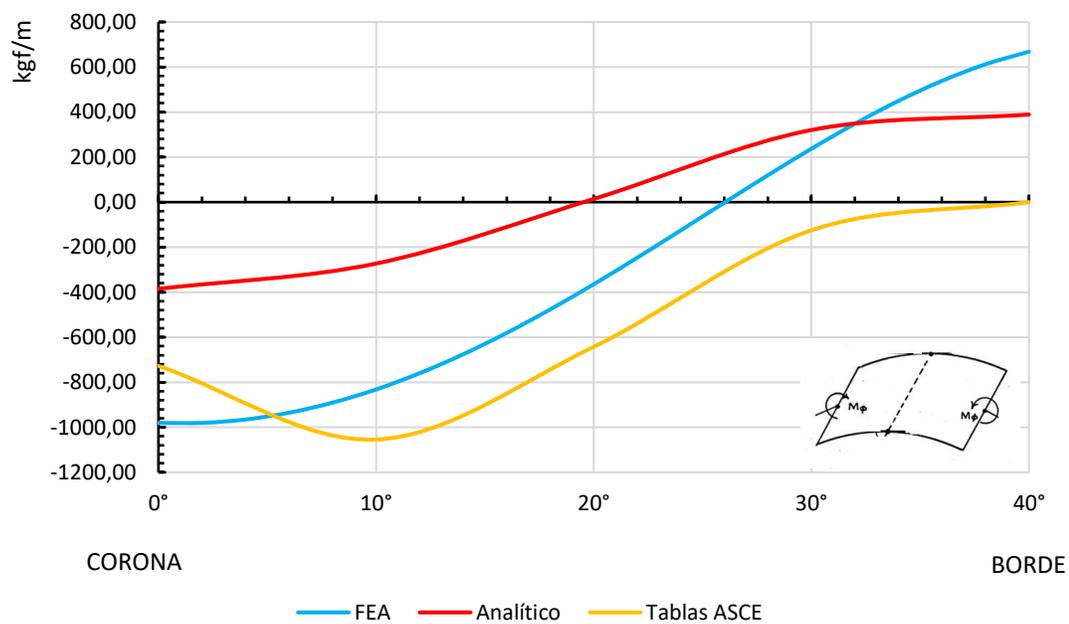


Figura 83. Comparación de los momentos transversales  $M_\phi$  obtenidos por distintos métodos.

A diferencia de la concha cilíndrica aislada sin viga de borde, los resultados para una concha con vigas de borde en el caso de las soluciones prácticas presentan desviaciones significativas que no las hacen apropiadas para el diseño de la concha. En la corona de la concha, la fuerza longitudinal calculada por la solución analítica es de  $-30.028,05$  kgf/m, y la obtenida por medio del método de la viga es de  $-38.367,18$  kgf/m, sobreestimando la fuerza longitudinal en la corona, y en el borde de la concha por medio de la solución analítica, la fuerza longitudinal es  $-4.538,38$  kgf/m y la obtenido por el método de la viga es de  $22.784,91$  kgf/m, subestimando la fuerza longitudinal de la concha. En el caso del análisis de elementos finitos, las desviaciones de las fuerzas en comparación a la solución analítica se deben a las suposiciones comentadas anteriormente y a las condiciones de borde entre la concha y la viga de borde al momento de modelarlas.

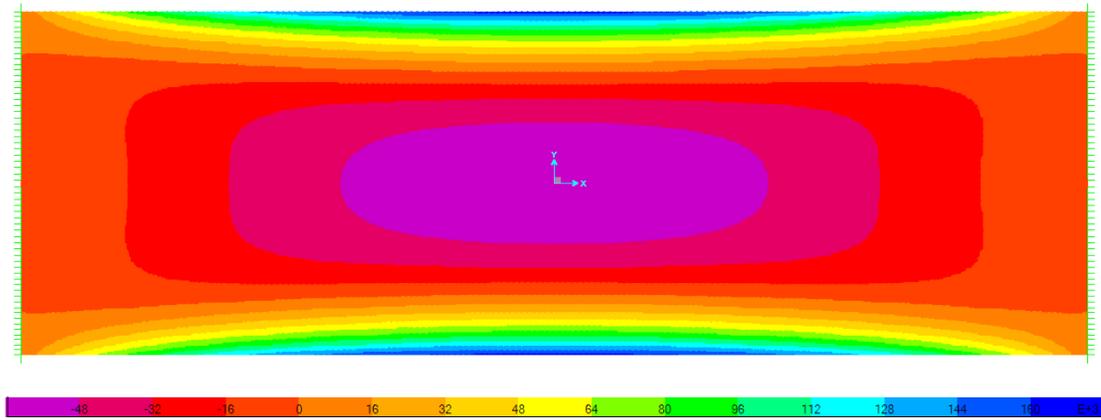
## Comparación de conchas con y sin vigas de borde

De los ejemplos anteriores, se comparan los resultados obtenidos por medio de la solución analítica y se presentan en la Tabla 9 y en las Figuras 85 a la 88.

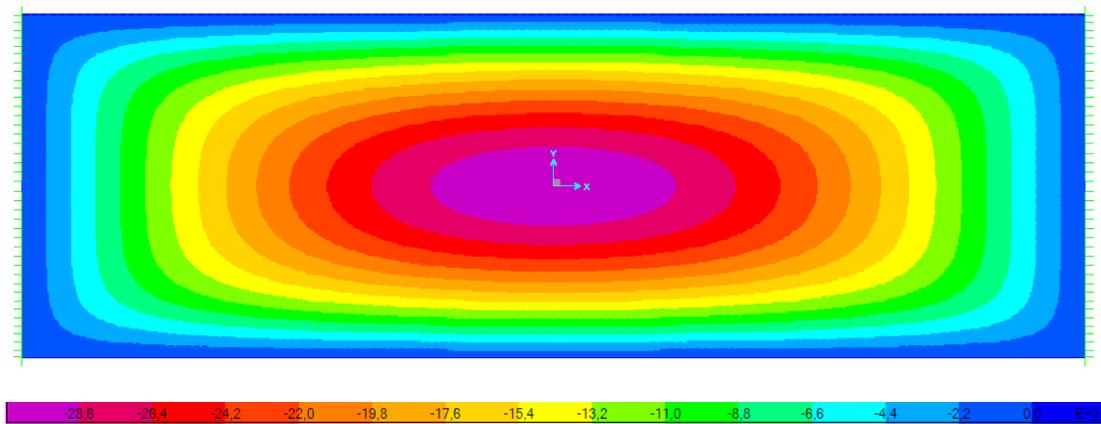
Tabla 9

*Comparación de las fuerzas obtenidas por medio de la solución analítica de una concha cilíndrica asilada larga sin y con vigas de borde*

Condición de Borde		Ángulo $\phi$ (medido desde la corona)				
		40°	30°	20°	10°	0°
$X = 0, \text{ kgf/m}$						
$N_x$	Sin Viga de Borde	188.023,88	39.751,04	-30.191,31	-56.045,27	-61.769,82
	Con Viga de Borde	-4.538,38	-22.186,46	-29.222,35	-30.299,50	-30.028,05
$X = 0, \text{ kgf/m}$						
$N_\phi$	Sin Viga de Borde	0,00	-940,57	-2.825,12	-4.291,77	-4.820,66
	Con Viga de Borde	-84,01	-1.589,77	-2.770,29	-3.492,20	-3.731,72
$X = L/2, \text{ kgf/m}$						
$N_{x\phi}$	Sin Viga de Borde	0,00	-14.497,55	-14.469,23	-8.219,34	0,00
	Con Viga de Borde	-13.842,77	-11.870,98	-8.249,62	-4.131,67	0,00
$X = 0, \text{ kgf/m}$						
$M_\phi$	Sin Viga de Borde	0,00	-181,07	-769,88	-1.352,03	-1.587,45
	Con Viga de Borde	389,11	320,26	13,98	-272,74	-385,23



(a)



(b)

Figura 84. Comparación de las fuerzas longitudinales  $N_x$  (kgf/m) de una concha cilíndrica circular (a) sin viga de borde y (b) con vigas de borde; obtenidas del análisis de elementos finitos.

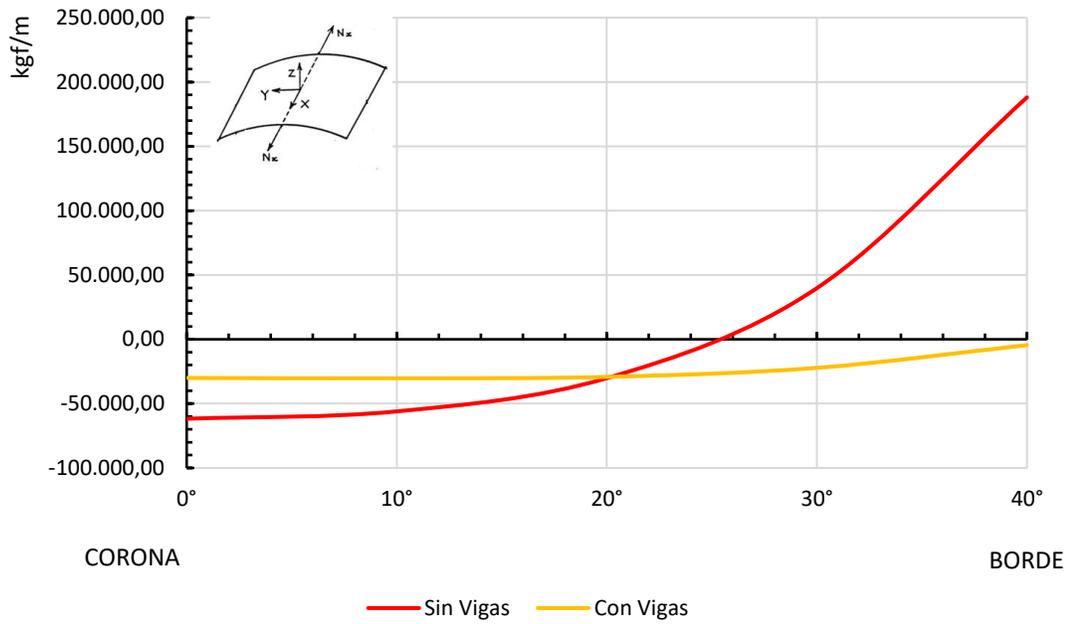


Figura 85. Comparación de las fuerzas longitudinales  $N_x$  obtenidas de una concha cilíndrica aislada larga sin y con vigas de borde.

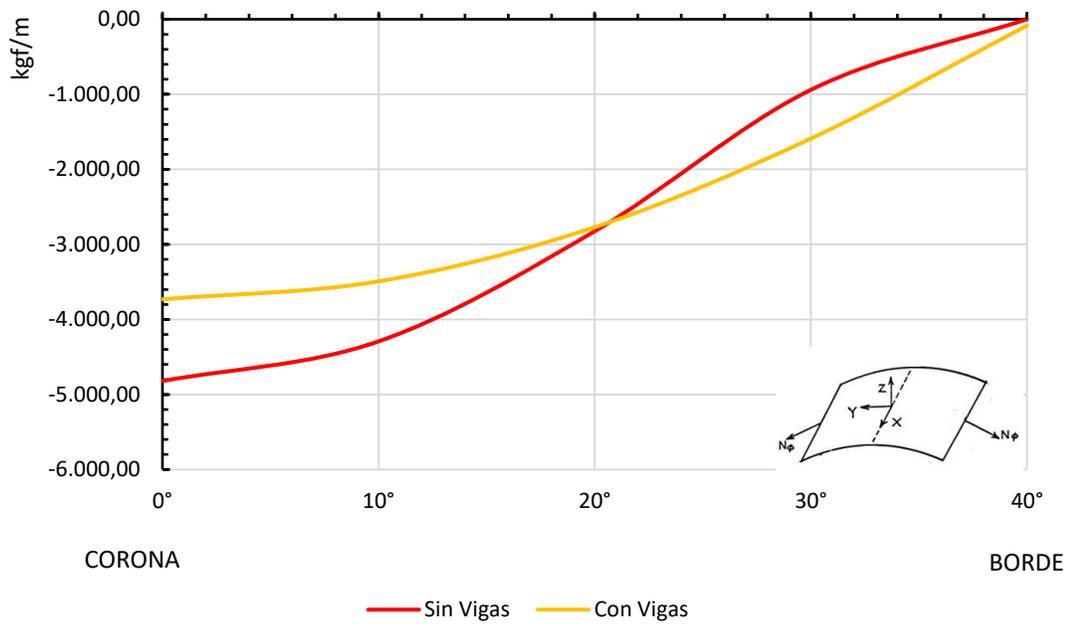


Figura 86. Comparación de las fuerzas transversales  $N_\phi$  obtenidas de una concha cilíndrica aislada larga sin y con vigas de borde.

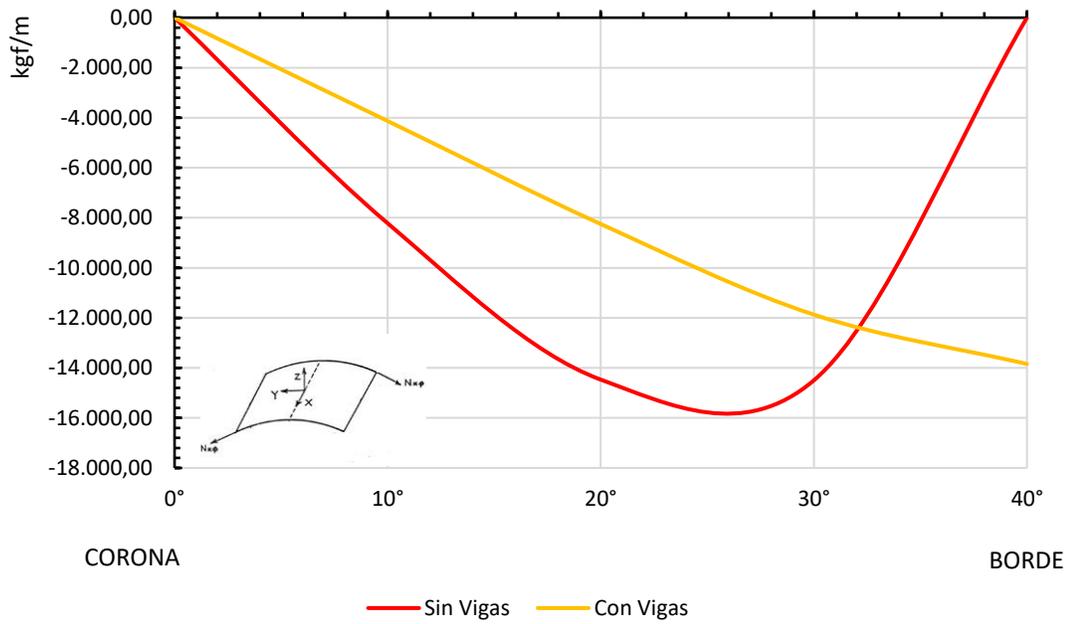


Figura 87. Comparación de las fuerzas cortantes  $N_{x\phi}$  obtenidas de una concha cilíndrica aislada larga sin y con vigas de borde.

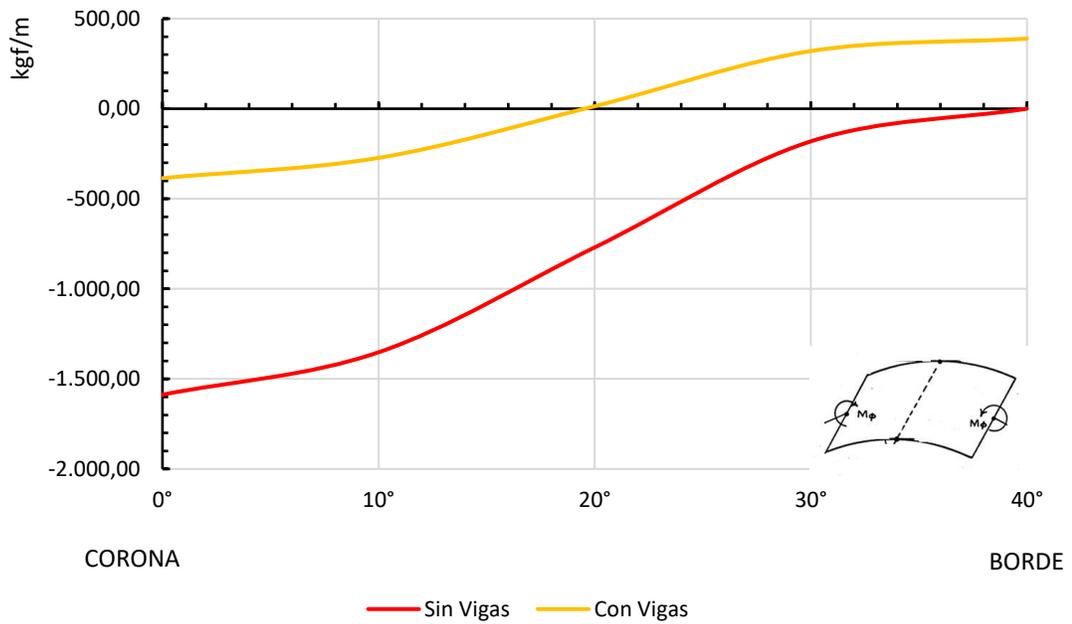


Figura 88. Comparación de los momentos transversales  $M_\phi$  obtenidos de una concha cilíndrica aislada larga sin y con vigas de borde.

El principal propósito de las vigas de borde es el de reducir las fuerzas longitudinales en el borde de la concha. De la Figura 84 se observa del análisis de elementos finitos, como la fuerza longitudinal se redujo considerablemente al colocar las vigas de borde; se observa como en la concha sin vigas de borde la fuerza longitudinal se concentra en los bordes de la concha trabajando a tracción, en cambio al colocar las vigas de borde, la fuerza longitudinal no se concentra ya en los bordes. En la Figura 85 se observa la fuerza longitudinal de la concha cilíndrica desde la corona hasta el borde, la concha cilíndrica se encuentra en compresión desde la corona hasta los  $25^\circ$  (ángulo de apertura medio medido desde la corona de la concha), a medida que se aproxima al borde de la concha cilíndrica, la fuerza longitudinal empieza a traccionar a la concha hasta un máximo en el borde, siendo igual a 188.023,88 kgf/m. Al emplear el uso de las vigas de borde en la concha cilíndrica, se observa cómo se redujo drásticamente la fuerza longitudinal que se encontraba a tracción, pasando de 188.023,88 kgf/m (tracción) a -4.538,38 kgf/m (compresión). La viga de borde presenta rigidez torsional, lo cual contribuye a que el momento torsional se reduzca como se observa en la Figura 88.

### Concha cilíndrica aislada corta sin vigas de borde<sup>12</sup>

#### Dimensiones

Longitud de la concha,  $\mathbf{L} = 3,05$  m

Radio de la concha,  $\mathbf{R} = 9,15$  m

Angulo mitad de la concha,  $\mathbf{\phi} = 40^\circ$

Espesor de la concha,  $\mathbf{2h} = 7,50$  cm

Ancho de la concha,  $\mathbf{2R \sin \phi} = 11,75$  m

---

<sup>12</sup> Este ejemplo ha sido calculado previamente por solución analítica en la referencia [12].

### **Propiedades del concreto**

Peso específico del concreto =  $2.400 \text{ Kg/m}^3$

$F'_c = 250 \text{ Kg/cm}^2$

Módulo de elasticidad =  $238.751,96 \text{ Kg/cm}^2$

### **Cargas**

Peso propio de la concha =  $180 \text{ Kg/m}^2$

Impermeabilizado + carga de nieve =  $64 \text{ Kg/m}^2$

Carga Total,  $q = 244 \text{ Kg/m}^2$

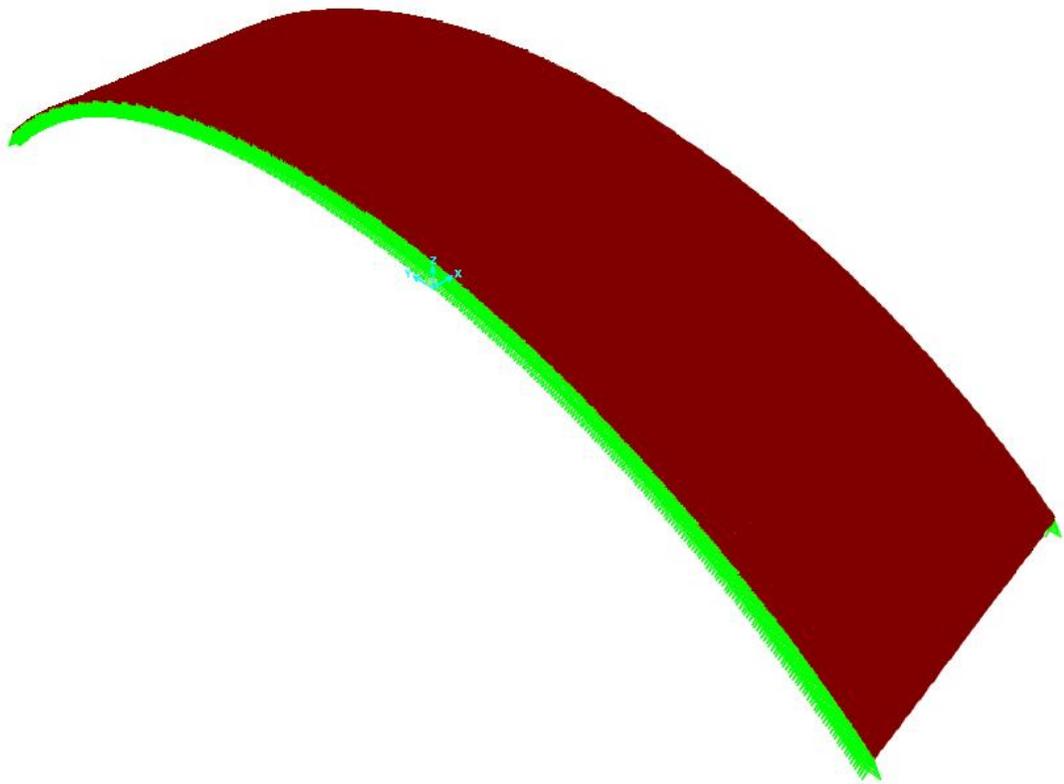
Para el diseño de la concha cilíndrica se analizó de manera analítica aplicando las condiciones de borde para el caso de una concha aislada corta y sin vigas de borde. Los métodos prácticos empleados en este caso son el método de la teoría de membrana. En el caso del análisis de elementos finitos se empleó el programa SAP2000 (CSI, 2018), la concha cilíndrica se modeló utilizando elementos cuadriláteros tipo concha de cuatro nodos, de dimensiones 5 cm x 5 cm, con la teoría de placa delgada de Kirchhoff, en donde se desprecian los efectos de corte fuera del plano del elemento concha. La Figura 89 muestra el modelo de la concha cilíndrica circular por medio de elementos finitos y las Figuras 90 a la 92 las fuerzas obtenidas por medio del análisis de elementos finitos.

## Resultados de los métodos de diseño

Tabla 10

Comparación de resultados obtenidos de la concha cilíndrica aislada corta sin vigas de borde

Método de diseño	Ángulo $\phi$ (medido desde la corona)					
	40°	30°	20°	10°	0°	
$X = 0$ , kgf/m						
$N_x$	Solución Analítica	8.634,13	-1.589,07	-14,24	64,91	-98,15
	FEA	8.540,03	-1.572,65	-14,66	65,43	-95,86
	Teoría de Membrana	-47,51	-53,71	-58,28	-61,07	-62,02
$X = 0$ , kgf/m						
$N_\phi$	Solución Analítica	0,00	-2.599,17	-2.807,08	-2.627,13	-2.676,06
	FEA	60,82	-2.471,87	-2.632,03	-2.442,18	-2.488,12
	Teoría de Membrana	-1.710,27	-1.933,49	-2.097,96	-2.198,68	-2.232,60
$X = L/2$ , kgf/m						
$N_{x\phi}$	Solución Analítica	0,00	-1.086,96	117,02	-65,51	0,00
	FEA	-3.453,80	-571,21	-38,30	-105,55	20,08
	Teoría de Membrana	-478,36	-372,10	-254,53	-129,23	0,00
$X = 0$ , kgf/m						
$M_\phi$	Solución Analítica	0,00	-12,54	-11,19	0,84	1,85
	FEA	0,00	-9,03	-10,84	1,78	3,42



*Figura 89.* Modelo de la concha cilíndrica circular corta mediante elementos finitos.

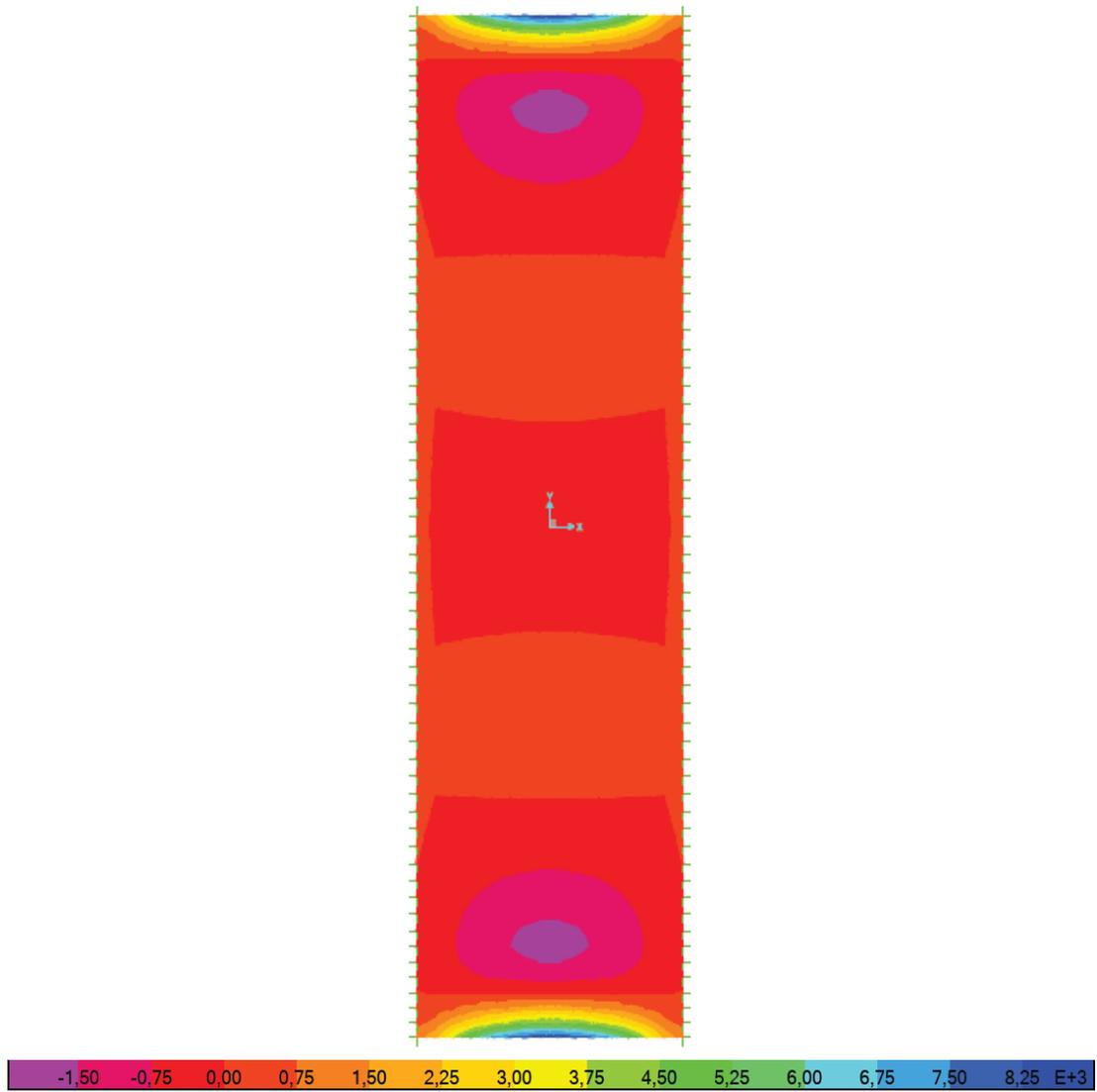


Figura 90. Fuerza longitudinal  $N_x$  (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos.

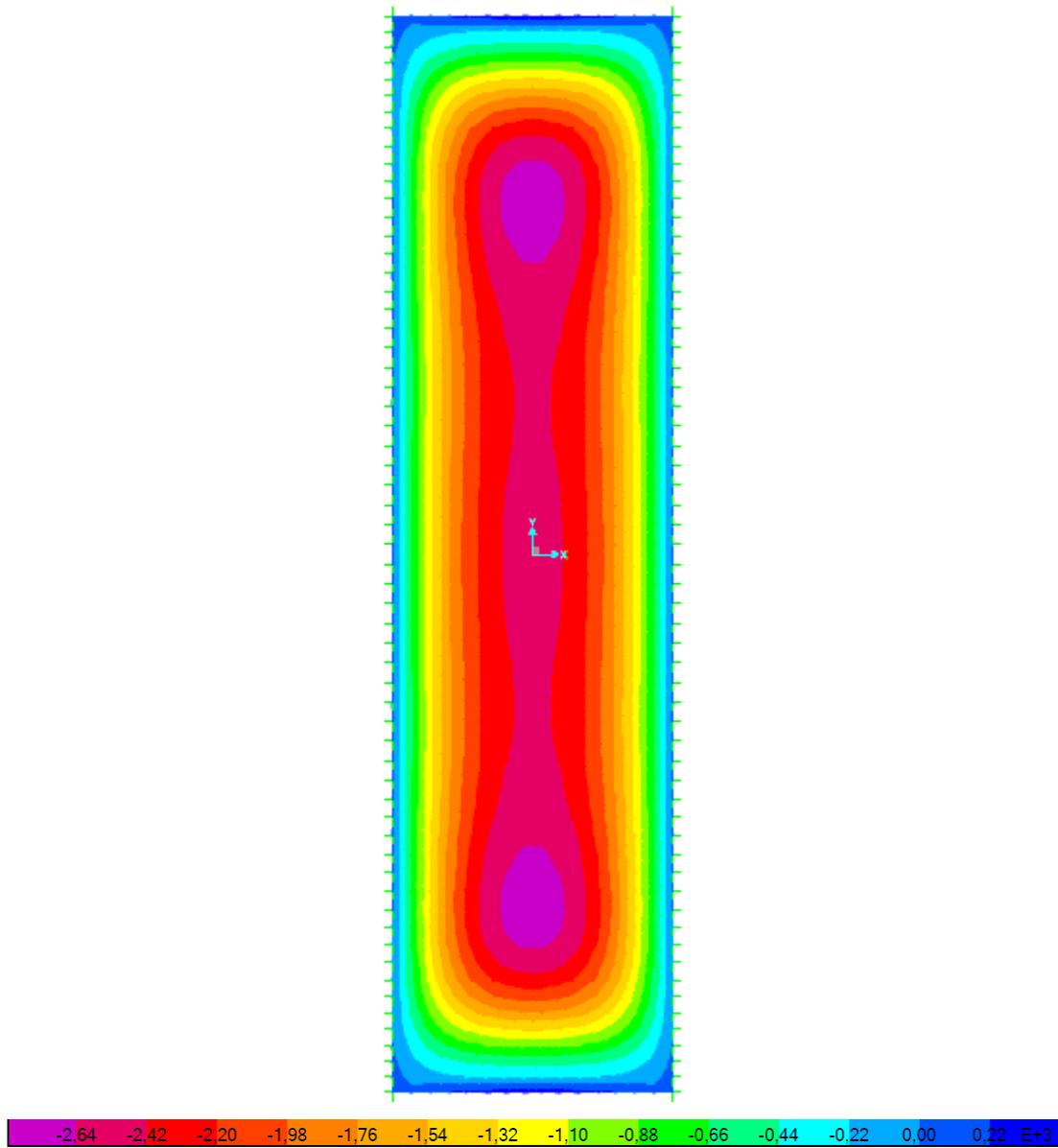


Figura 91. Fuerza transversal  $N_\phi$  (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos.

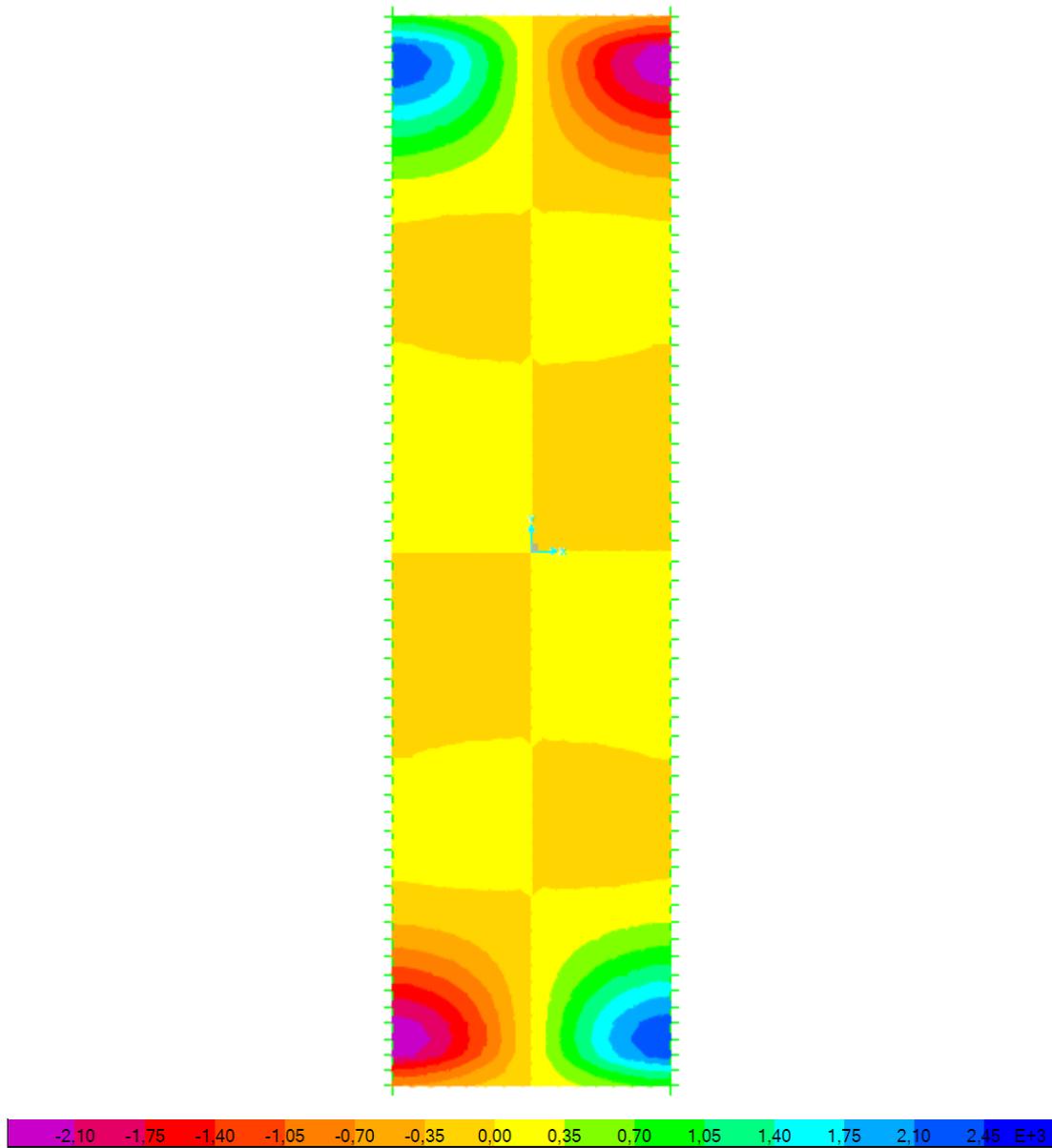


Figura 92. Fuerza cortante  $N_{x\phi}$  (kgf/m) obtenida del análisis de elementos finitos.

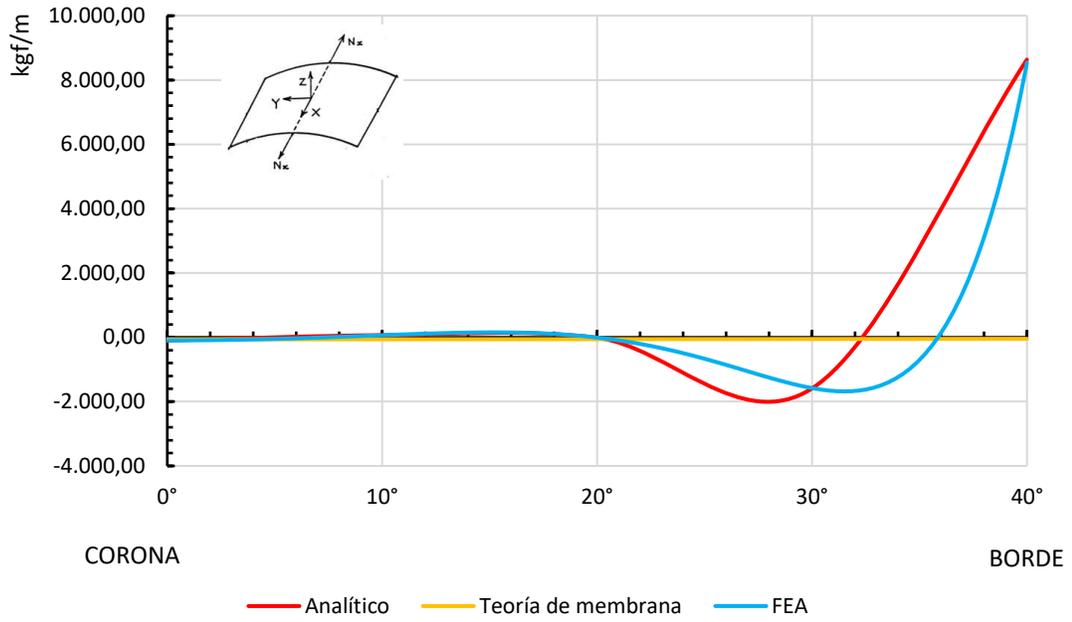


Figura 93. Comparación de las fuerzas longitudinales  $N_x$  obtenidas por distintos métodos.

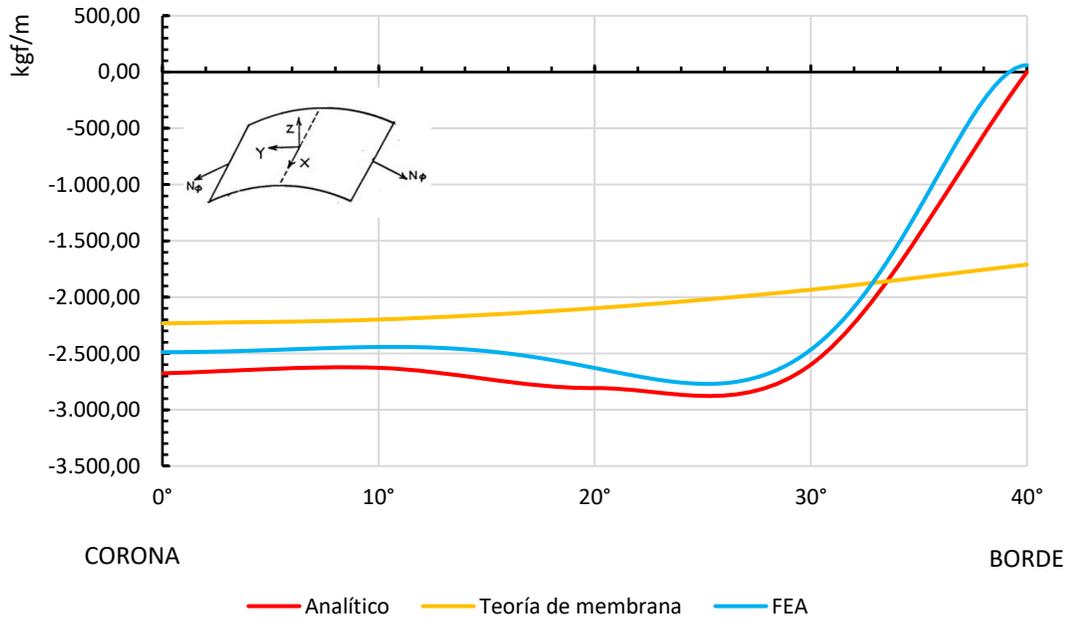


Figura 94. Comparación de las fuerzas transversales  $N_\phi$  obtenidas por distintos métodos.

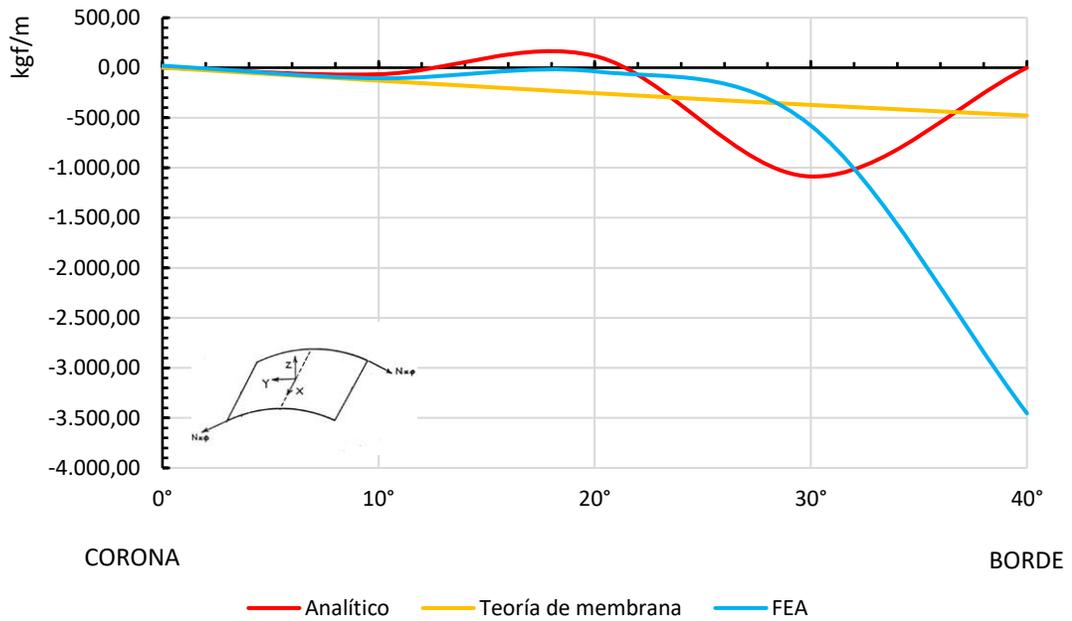


Figura 95. Comparación de las fuerzas cortantes  $N_{x\phi}$  obtenidas por distintos métodos.

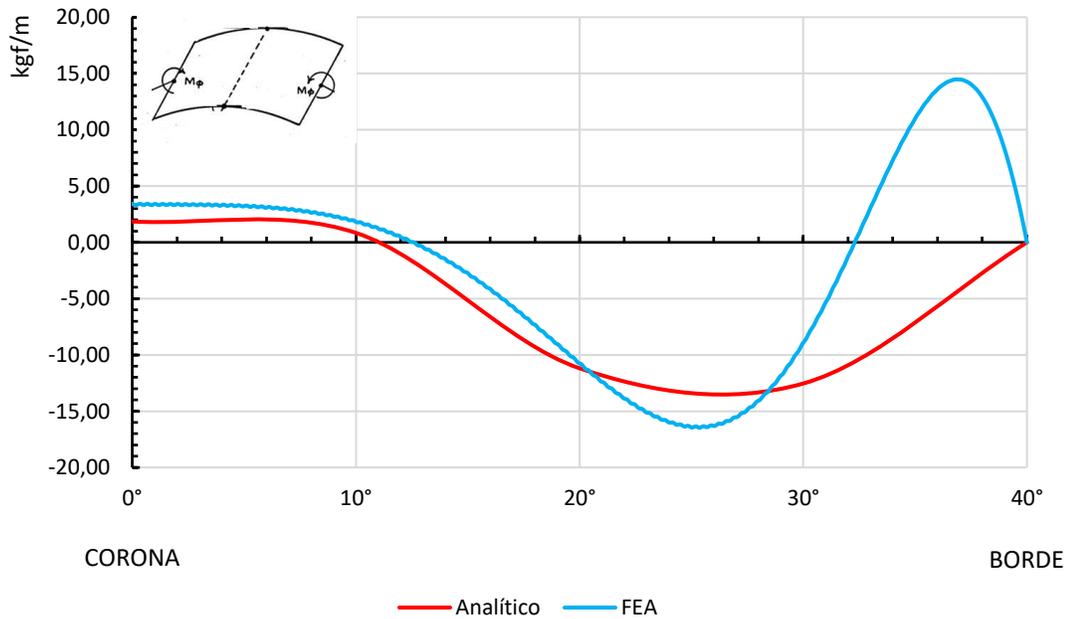


Figura 96. Comparación de los momentos transversales  $M_\phi$  obtenidos por distintos métodos.

En el caso de la solución práctica para las conchas cilíndricas cortas en donde se emplea la teoría de membrana como solución práctica, los resultados demuestran que este método no es confiable para el diseño de las conchas cilíndricas, debido a que los resultados no se asemejan a los obtenidos por la solución analítica o por medio del análisis de elementos finitos. Puede emplearse la solución analítica como una primera aproximación y así definir las dimensiones de la concha cilíndrica.

Al igual que en el caso de las conchas cilíndricas largas, la fuerza longitudinal  $N_x$  al acercarse a los bordes de la concha, empieza a trabajar a tracción, requiriendo el uso de las vigas de borde para así reducir estas fuerzas.

### Comparación de una concha cilíndrica aislada larga sin vigas de borde con una concha cilíndrica aislada corta sin vigas de borde

Tabla 11

*Comparación de las fuerzas obtenidas por medio de una solución analítica de una concha cilíndrica larga con una concha cilíndrica corta*

Tipo de Concha		Ángulo $\phi$ (medido desde la corona)					
		40°	30°	20°	10°	0°	
$X = 0$ , kgf/m							
$N_x$	Larga	188.023,88	39.751,04	-30.191,31	-56.045,27	-61.769,82	
	Corta	8.634,13	-1.589,07	-14,24	64,91	-98,15	
$X = 0$ , kgf/m							
$N_\phi$	Larga	0,00	-940,57	-2.825,12	-4.291,77	-4.820,66	
	Corta	0,00	-2.599,17	-2.807,08	-2.627,13	-2.676,06	
$X = L/2$ , kgf/m							
$N_{x\phi}$	Larga	0,00	-14.497,55	-	14.469,23	-8.219,34	0,00
	Corta	0,00	-1.086,96	117,02	-65,51	0,00	
$X = 0$ , kgf/m							
$M_\phi$	Larga	0,00	-181,07	-769,88	-1.352,03	-1.587,45	
	Corta	0,00	-9,03	-10,84	1,78	3,42	

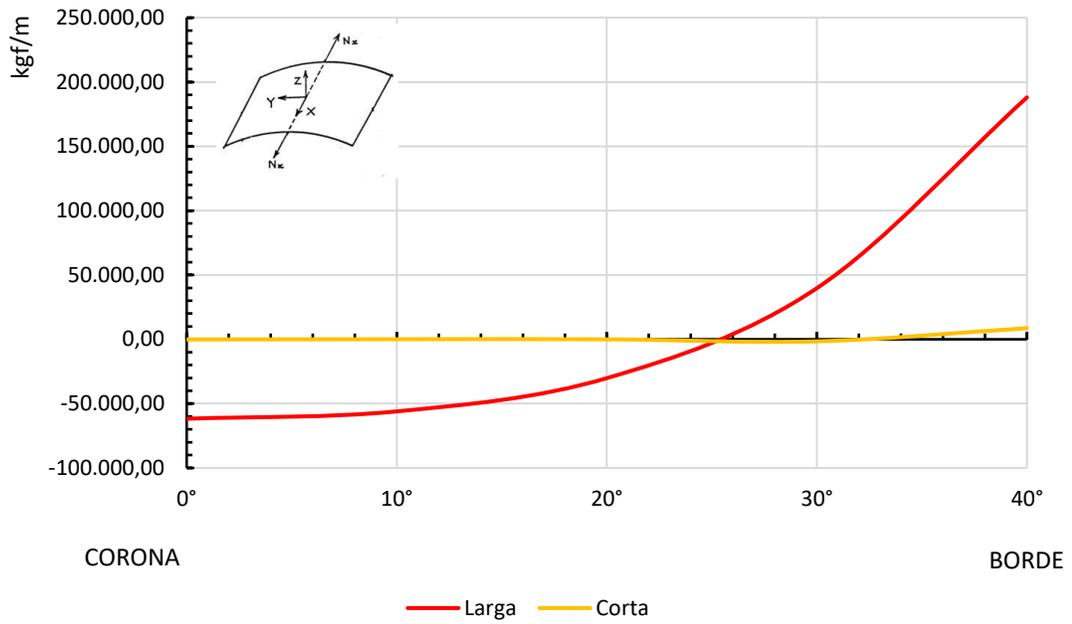


Figura 97. Comparación de las fuerzas longitudinales  $N_x$  obtenidas de una concha cilíndrica corta y una concha cilíndrica larga.

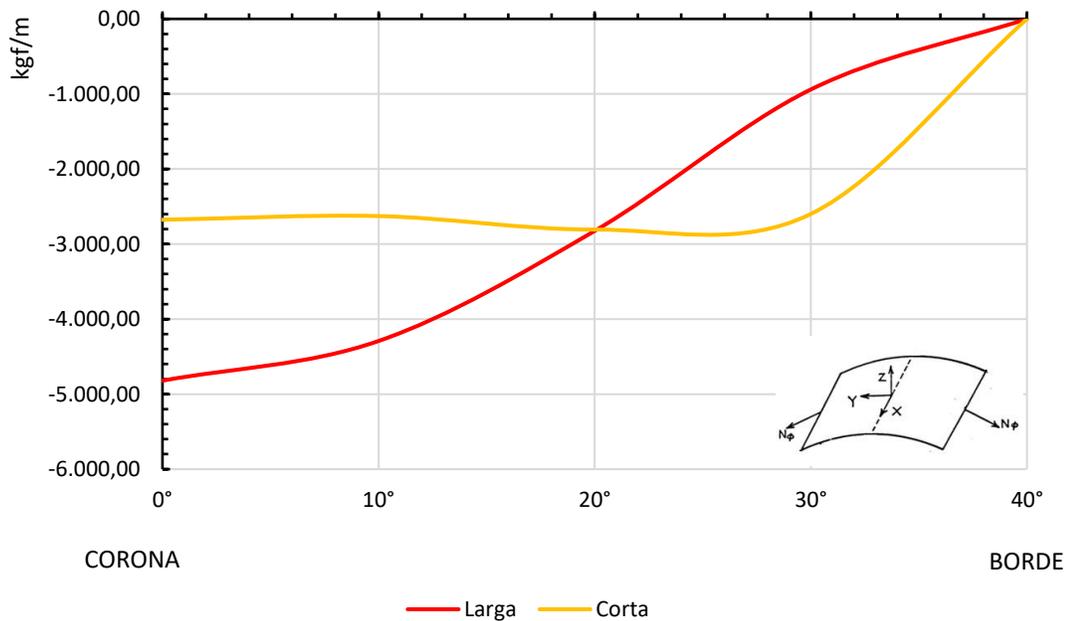


Figura 98. Comparación de las fuerzas transversales  $N_\phi$  obtenidas de una concha cilíndrica corta y una concha cilíndrica larga.

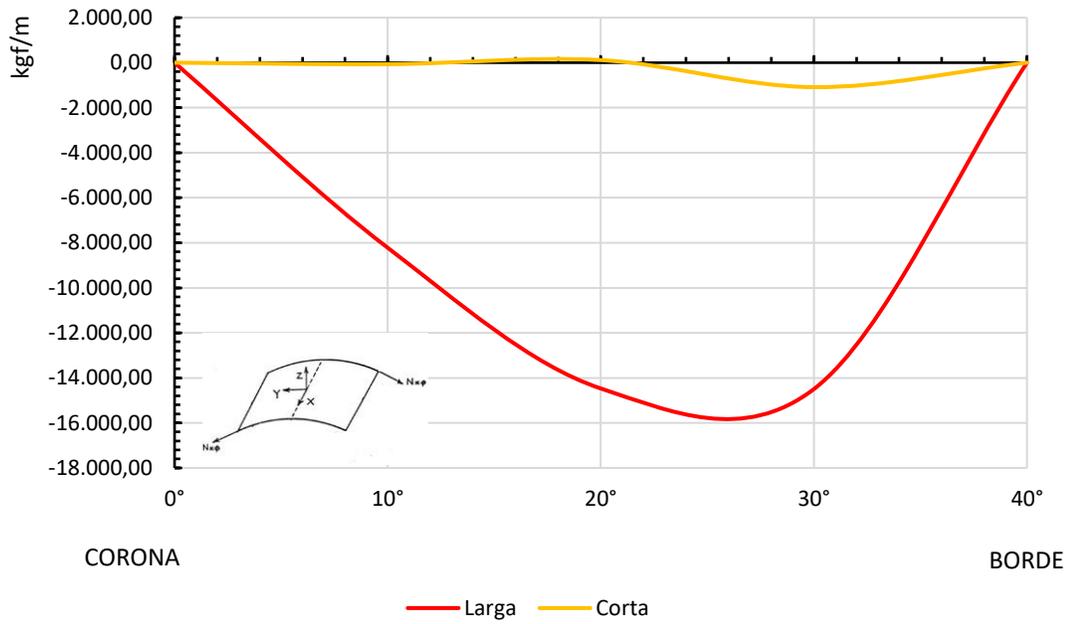


Figura 99. Comparación de las fuerzas cortantes  $N_{x\phi}$  obtenidas de una concha cilíndrica corta y una concha cilíndrica larga.

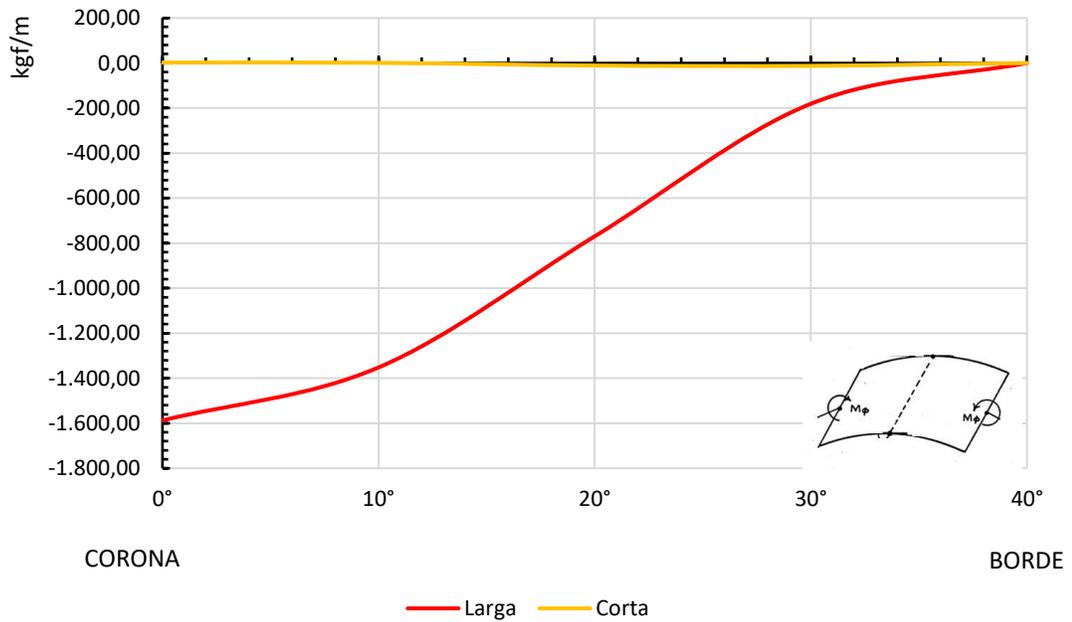


Figura 100. Comparación de los momentos transversales  $M_\phi$  obtenidos de una concha cilíndrica corta y una concha cilíndrica larga.

De los resultados obtenidos en los ejemplos anteriores se compararon los resultados obtenidos mediante la solución analítica en conchas sin vigas de borde, los resultados se presentan en la Tabla 11 y en las Figuras 97 a la 100. Se observa como la relación  $r/L$  afecta considerablemente en el desarrollo de las fuerzas en la concha cilíndrica, decreciendo rápidamente con el decrecimiento de la longitud. En el caso de la fuerza longitudinal en la corona de la concha, para la concha larga este es de -61.769,82 kgf/m y en la concha corta es de tan solo -98,15 kgf/m. Por supuesto, dependiendo de las exigencias del área que se desea cubrir, las dimensiones de la concha se establecerán a partir de esas condiciones.

### Comparación de distintas dimensiones

Con el fin de observar cómo afecta las dimensiones de una concha cilíndrica en cuanto al desarrollo de fuerzas, se compararon cinco conchas cilíndricas circulares aisladas largas sin vigas de borde, Tabla 11.

Tabla 12

*Dimensiones de las conchas cilíndricas largas sin vigas de borde*

<b>CONCHA</b>	<b>L (m)</b>	<b>R (m)</b>	<b>t (cm)</b>
#1	22,50	4,50	7,50
#2	22,50	8,50	10
#3	38	15	15
#4	50	15	7,50
#5	22,50	8,50	20

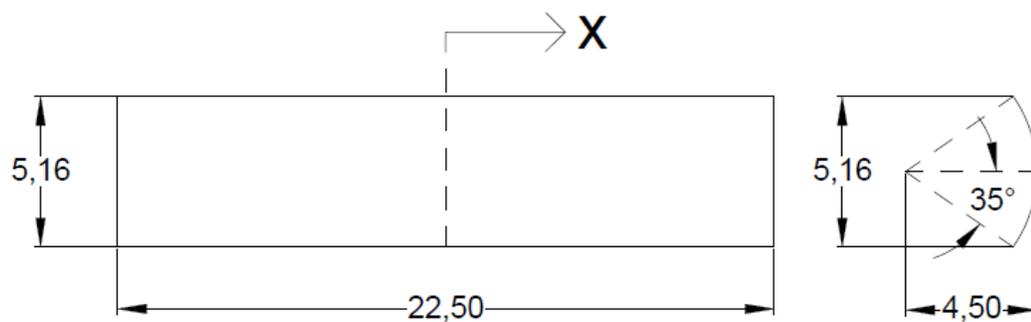


Figura 101. Dimensiones de la concha cilíndrica #1.

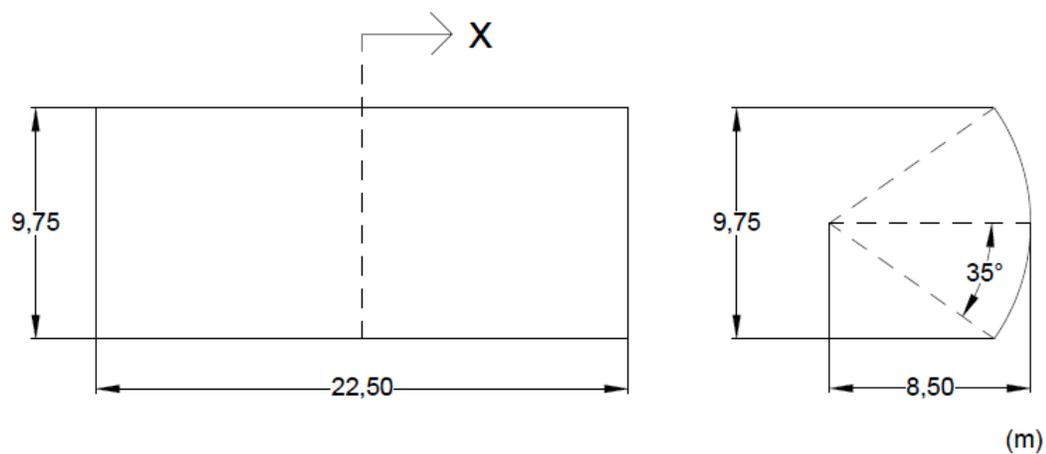


Figura 102. Dimensiones de la concha cilíndrica #2 y #5.

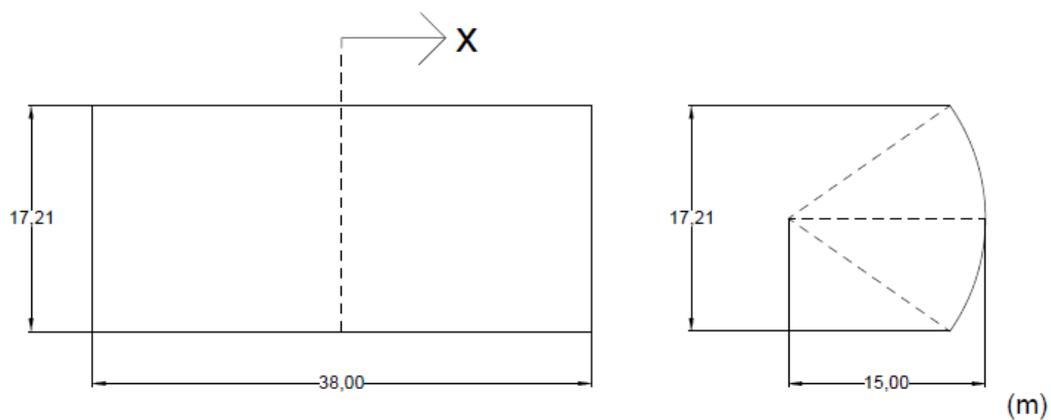


Figura 103. Dimensiones de la concha cilíndrica #3.

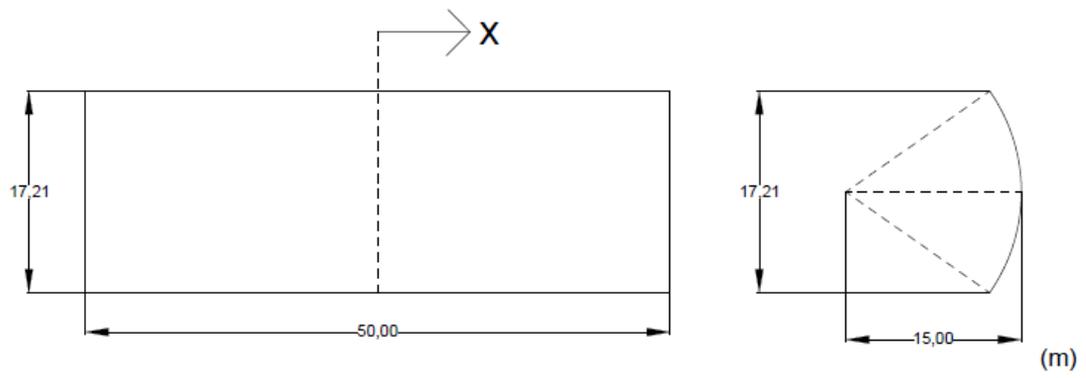


Figura 104. Dimensiones de la concha cilíndrica #4.

## Resultados por medio de solución analítica

Tabla 13

Comparación de las fuerzas obtenidas por medio de una solución analítica en conchas cilíndricas sin vigas de borde de distintas dimensiones

Concha Cilíndrica		Ángulo $\phi$ (medido desde la corona)				
		35°	25°	15°	5°	0°
X = 0, kgf/m						
$N_x$	#1	152.163,36	38.608,66	-34.033,49	-69.369,61	-73.738,48
	#2	95.587,29	14.434,80	-20.765,60	-32.079,37	-33.180,38
	#3	167.683,56	18.053,87	-35.981,92	-47.760,29	-48.472,64
	#4	318.931,52	20.103,61	-67.764,46	-74.082,98	-72.987,96
	#5	84.232,20	18.400,73	-18.625,02	-34.934,88	-36.865,85
X = 0, kgf/m						
$N_\phi$	#1	0,00	-543,81	-1.631,35	-2.387,95	-2.492,38
	#2	0,00	-1.132,80	-3.120,95	-4.379,32	-4.546,27
	#3	0,00	-2.100,23	-5.545,07	-7.601,56	-7.867,03
	#4	0,00	-2.232,14	-5.609,31	-7.467,37	-7.697,19
	#5	0,00	-1.045,01	-3.054,75	-4.416,25	-4.602,21
X = L/2, kgf/m						
$N_{x\phi}$	#1	0,00	-10.066,05	-9.961,88	-3.963,35	0,00
	#2	0,00	-10.374,39	-9.139,60	-3.398,97	0,00
	#3	0,00	-10.045,78	-9.605,35	-3.751,70	0,00
	#4	0,00	-17.803,55	-14.679,18	-5.221,23	0,00
	#5	0,00	-23.957,90	-18.133,15	-6.035,39	0,00
X = 0, kgf/m						
$M_\phi$	#1	0,00	-60,41	-213,59	-335,32	-352,93
	#2	0,00	-125,34	-566,08	-918,67	-969,40
	#3	0,00	-367,78	-1.682,20	-2.717,46	-2.865,26
	#4	0,00	-518,38	-1.935,36	-3.003,41	-3.153,68
	#5	0,00	-122,20	-570,39	-937,33	-990,63

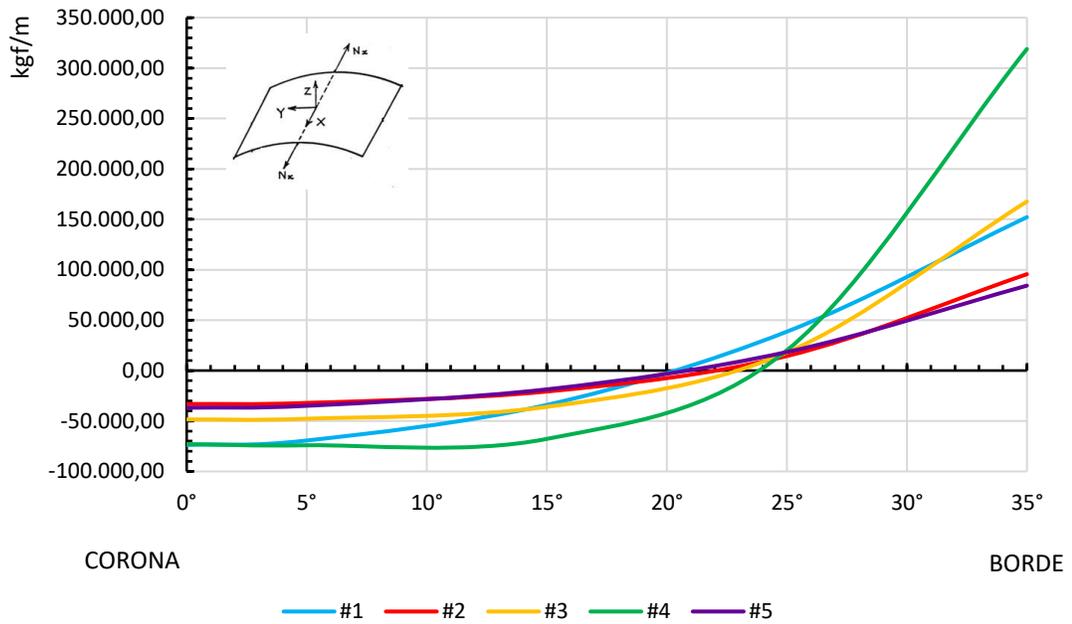


Figura 105. Comparación de las fuerzas longitudinales  $N_x$  obtenidas en conchas cilíndricas circulares de distintas dimensiones.

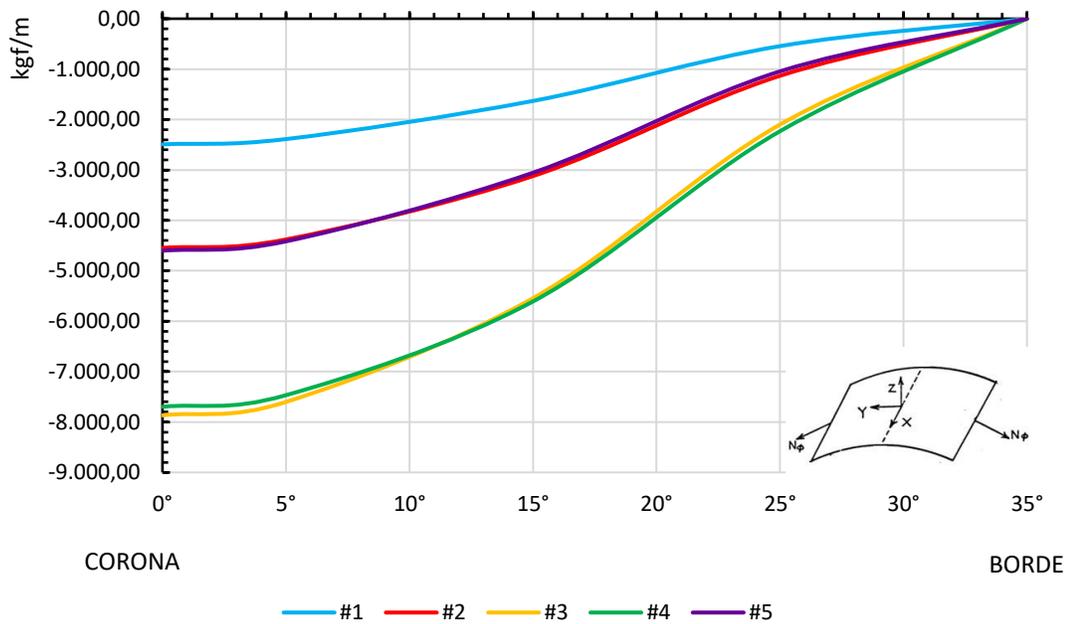
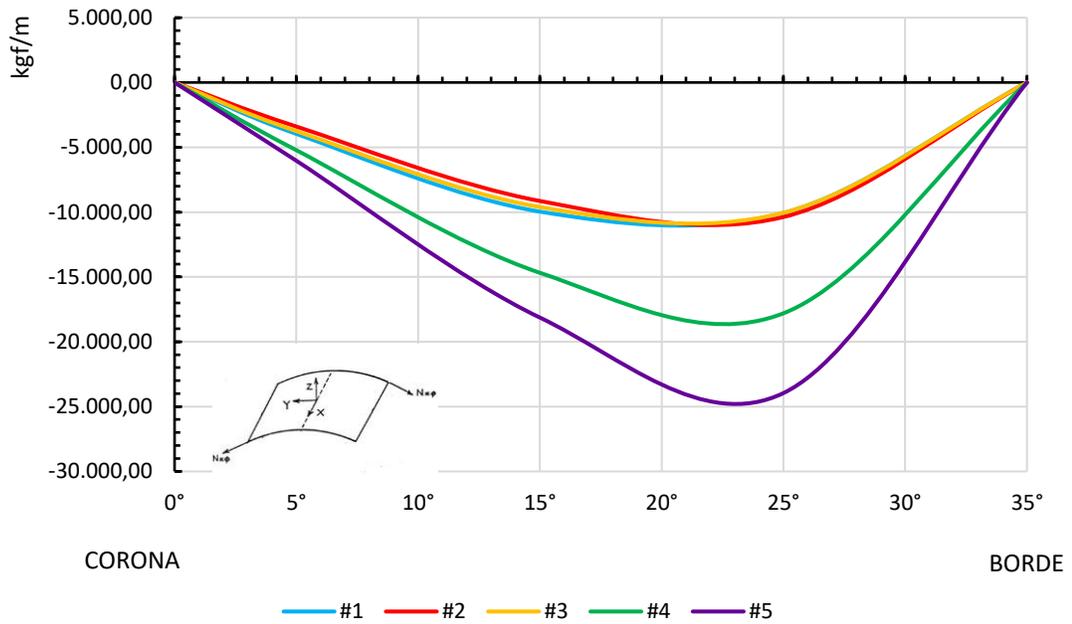
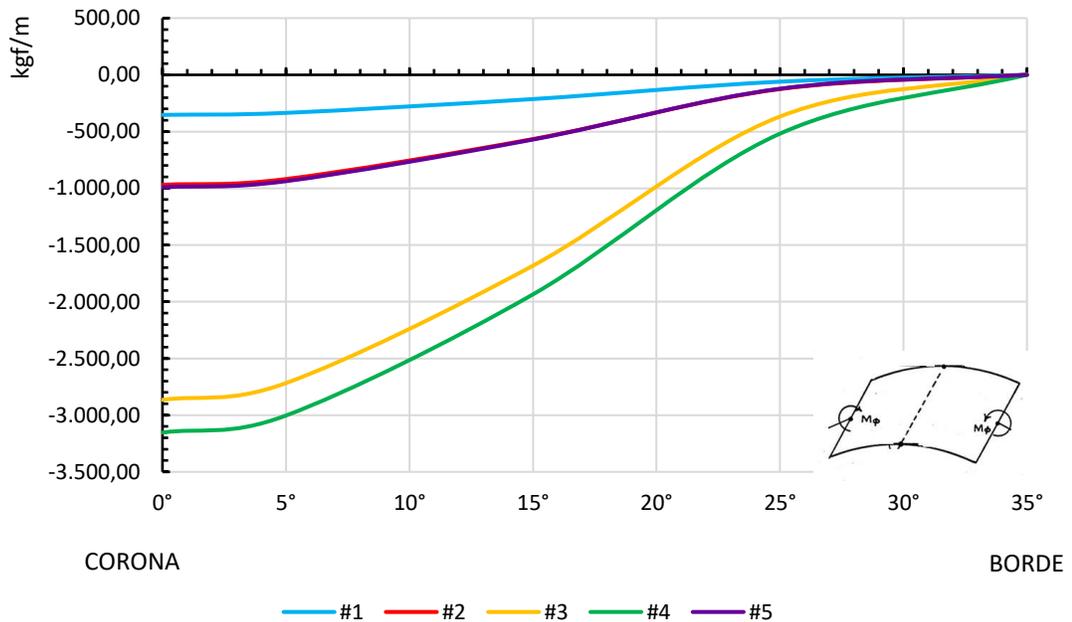


Figura 106. Comparación de las fuerzas transversales  $N_\phi$  obtenidas en conchas cilíndricas circulares de distintas dimensiones.



**Figura 107.** Comparación de las fuerzas cortantes  $N_{x\phi}$  obtenidas en conchas cilíndricas circulares de distintas dimensiones.



**Figura 108.** Comparación de los momentos transversales  $M_{\phi}$  obtenidos en conchas cilíndricas circulares de distintas dimensiones.

Comparando como varían las fuerzas y el momento transversal en las conchas de distintas dimensiones, variando principalmente el espesor y el claro de la concha. De los resultados obtenidos se observa que, al igual que en la comparación de las conchas cortas con las conchas largas, la principal dimensión que más influye en el desarrollo de las fuerzas y el momento transversal es la longitud, la variación del espesor no influye de manera significativa, ya que la concha #5 tiene las mismas dimensiones que la concha #2, pero con el doble de espesor y aun así las fuerzas y el momento en las conchas son similares.

## CRITERIOS DE DISEÑO Y DE ARMADO

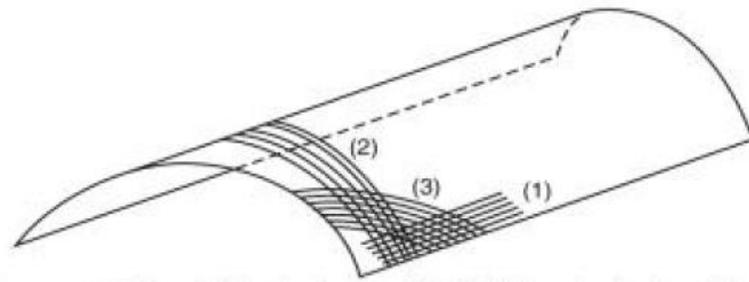
### Arreglo general del acero de refuerzo

La mayor parte de una concha cilíndrica por lo general se encuentra trabajando a compresión, pero es importante que la concha este correctamente armada para diversas fuerzas que se puedan generar en ella. Es común en la práctica colocar barras de refuerzo longitudinal, transversal y diagonalmente. En el caso del acero mínimo longitudinal y transversal, se pueden emplear mallas de acero.

1. Refuerzo longitudinal para la fuerza  $N_x$ , es colocado en todo lo largo de la dirección longitudinal de la concha, en especial en las áreas de la concha que se encuentra a tracción, cercano a los bordes longitudinales.
2. Refuerzo transversal para la fuerza  $N_\phi$  y el momento  $M_\phi$  en la dirección transversal. El refuerzo es colocado en el lado en donde  $M_\phi$  genera tracción.
3. El refuerzo para las tensiones de corte se coloca de manera diagonal desde el lado que se encuentra a tracción hasta el lado que se encuentra en compresión de forma diagonal.

4. Para el empalme entre la concha y la viga de borde, el acero de refuerzo debe extenderse desde la concha hasta la viga de borde.

En las Figuras 109 y 110, se muestra la ubicación del refuerzo, así como su una vista en planta y transversal de la concha.



*Figura 109.* Refuerzos principales en la concha: (1) acero longitudinal, (2) acero transversal y (3) acero de corte. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Privete Limited.

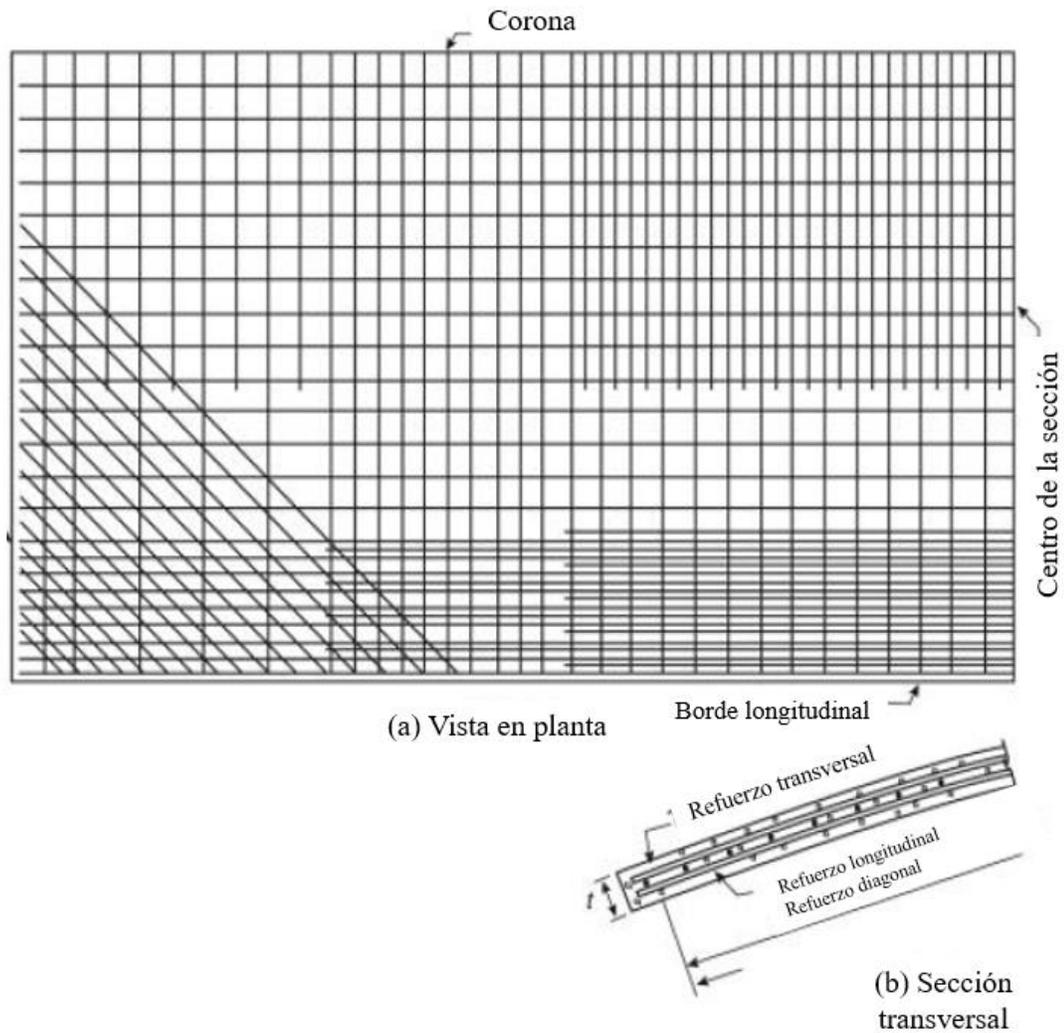


Figura 110. Arreglos de los tres tipos de acero de refuerzo en un cuarto de la concha cilíndrica. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Private Limited.

### Acero mínimo recomendado para conchas cilíndricas

La mínima cantidad de acero específicamente para conchas cilíndricas es la siguiente:

1. En las zonas a tracción, se colocará un área mínima de acero de 0,35% en cada una de las dos direcciones longitudinales y transversales para controlar las fisuras.

2. En las zonas a compresión, el Instituto Americano del Concreto (ACI, por sus siglas en inglés) recomienda un mínimo de acero del 0,15 al 0,18 % de acero.

3. El espaciamiento del refuerzo no debe ser más de cinco veces el espesor de la concha cilíndrica o 450 mm, el menor de los dos.

En el caso de que se coloque acero mínimo de refuerzo, se pueden colocar mallas de acero de refuerzo, tales como 150 x 150 mm 8/8 hasta 150 x 150 mm 12/12 mm, en las caras superiores e inferiores de la concha. Acero adicional puede colocarse entre las mallas de acero de refuerzo.

El acero de refuerzo debe tener un diámetro mínimo de 5 mm y un diámetro máximo de 10 mm, el cual no debe exceder en áreas de la concha con espesor de 40 a 50 mm y 12 mm de diámetro en áreas donde el espesor este comprendido entre los 55 y 60 mm. Generalmente los espesores de las conchas se encuentran a partir de 75 mm.

Algunas especificaciones que se encuentran en el código indio de Criterios para el *Diseño de Estructuras de Conchas de Concreto Reforzado y Placas Plegables* (IS-2210-1988) sobre el refuerzo de las conchas cilíndricas son:

a) El área de una parte sin refuerzo en cualquier parte de la concha no deberá exceder 15 veces el cuadrado del espesor de la concha. El espaciamiento entre el acero no deberá ser más de cinco veces el espesor.

b) Incluso que se ignore  $M_x$  en el análisis de la concha cilíndrica, el refuerzo nominal deberá ser capaz de resistirlo en el borde transversal de la concha.

c) El recubrimiento mínimo deberá ser de 13 mm.

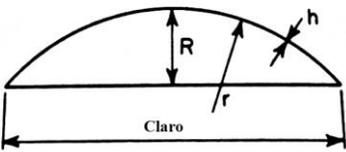
Se pueden considerar dos tipos de refuerzo, el refuerzo diseñado siguiendo la dirección de las tensiones principales de la concha cilíndrica (uso de barras), o empleando refuerzo de malla.

Empleando acero de refuerzo normal (barras) siguiendo las líneas de las tensiones principales, aunque de esta manera se obtendrá la solución más económica en cuanto a la cantidad de acero, se requería a su vez que el acero sea colocado según las direcciones exactas, a diferentes espaciamientos, teniendo como consecuencia la necesidad de una mano de obra más calificada y de una supervisión más estricta.

En caso de que se emplee malla de refuerzo, lo convierte en una solución menos económica en comparación al refuerzo convencional (barras), pero la colocación de la malla de refuerzo es mucho más sencilla, requiriendo un mínimo trabajo. Algunos autores, como Gibson, recomiendan emplear el refuerzo de malla en las direcciones longitudinales y transversales, y el acero de refuerzo convencional (barras) cuando sea necesario el refuerzo debido a la tensión cortante.

Para la viga de borde, el refuerzo sigue la forma convencional, excepto que se requiere de una proporción de acero más alta por la presencia altas tensiones de tracción que presentan.

Tabla 14  
Dimensiones típicas en conchas cilíndricas circulares

Sección	Longitud (ft)	Claro (ft)	R (ft)	r (ft)	H (in)	Refuerzo*
	80	30	8	25	3	3,5
	100	30	10	30	3	4,0
	120	35	12	30	3	4,5
	140	40	14	35	3	5,0
	160	45	16	35	3,5	6,5

\*psf de área proyectada. Tomada de Portland Cement Association.

## Cúpulas

Las superficies de revolución son superficies con curvatura gaussiana positiva, se definen por la rotación de una curva plana alrededor de un eje vertical. El plano o curva meridiana puede tener distintas formas, dando lugar a una gran diversidad de formas de cúpulas, siendo una de las más comunes la cúpula esférica. En el caso de las superficies de revolución en donde se hace girar una curva vertical alrededor de un plano, las secciones verticales se denominan *meridianos*, el plano que lo contienen se denomina *plano meridiano*, y las secciones horizontales *paralelos*, el plano que los contiene se denomina *plano paralelo*. En el caso de que se haga girar una recta alrededor de un eje vertical, se obtiene un cono. Al ser superficies que poseen una doble curvatura gaussiana positiva, tienen mayor resistencia, rigidez y son más estables a diferencia de las conchas con curvatura gaussiana cero.

Las conchas de revolución, en especial las cúpulas, son empleadas como cubiertas de gimnasios, planetarios o como cubiertas de tanques contenedores de líquidos.

## CLASIFICACIÓN

Las cúpulas se pueden clasificar de distintas maneras:

Según su forma en planta:

- Planta circular (cúpula de revolución).
- Planta elíptica (cúpula elíptica).
- Planta poligonal (cúpula poligonal).

Según la forma del meridiano:

- Circular
- Elíptica
- Parabólica
- En ojiva
- Cónica

Según la disposición en la corona:

- Cúpula cerrada
- Cúpula abierta (en anillo)

Según la concepción de sus bordes:

- Cúpula sin anillo de borde
- Cúpula con anillo de borde

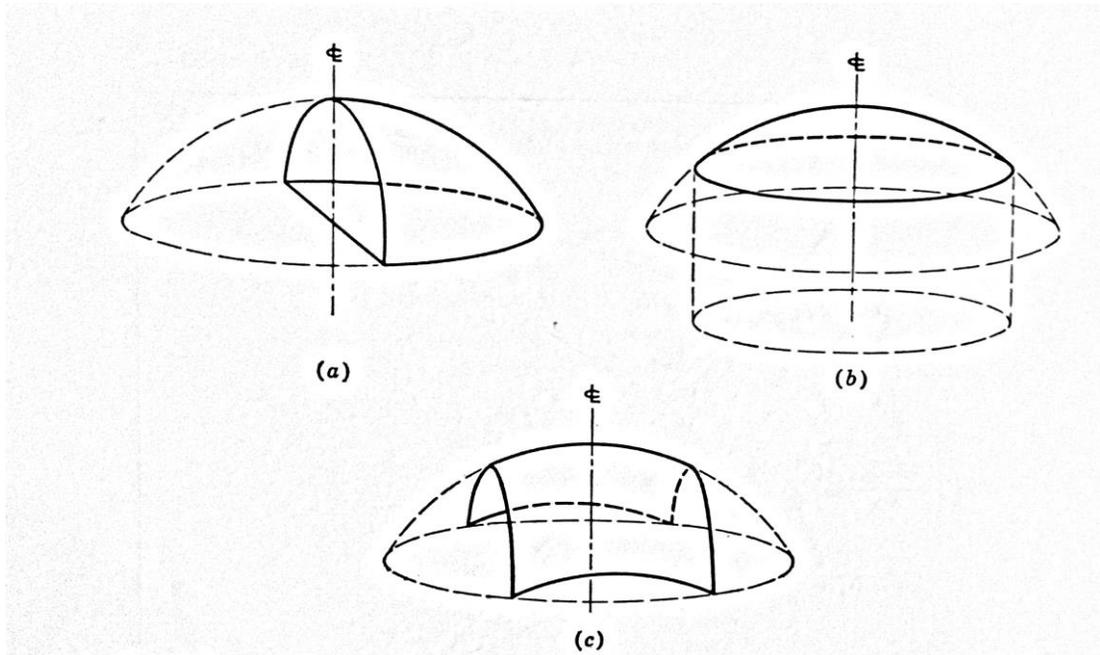
Según las disposiciones constructivas:

- Cúpula de espesor constante
- Cúpula de espesor variable
- Cúpula con nervios meridianos

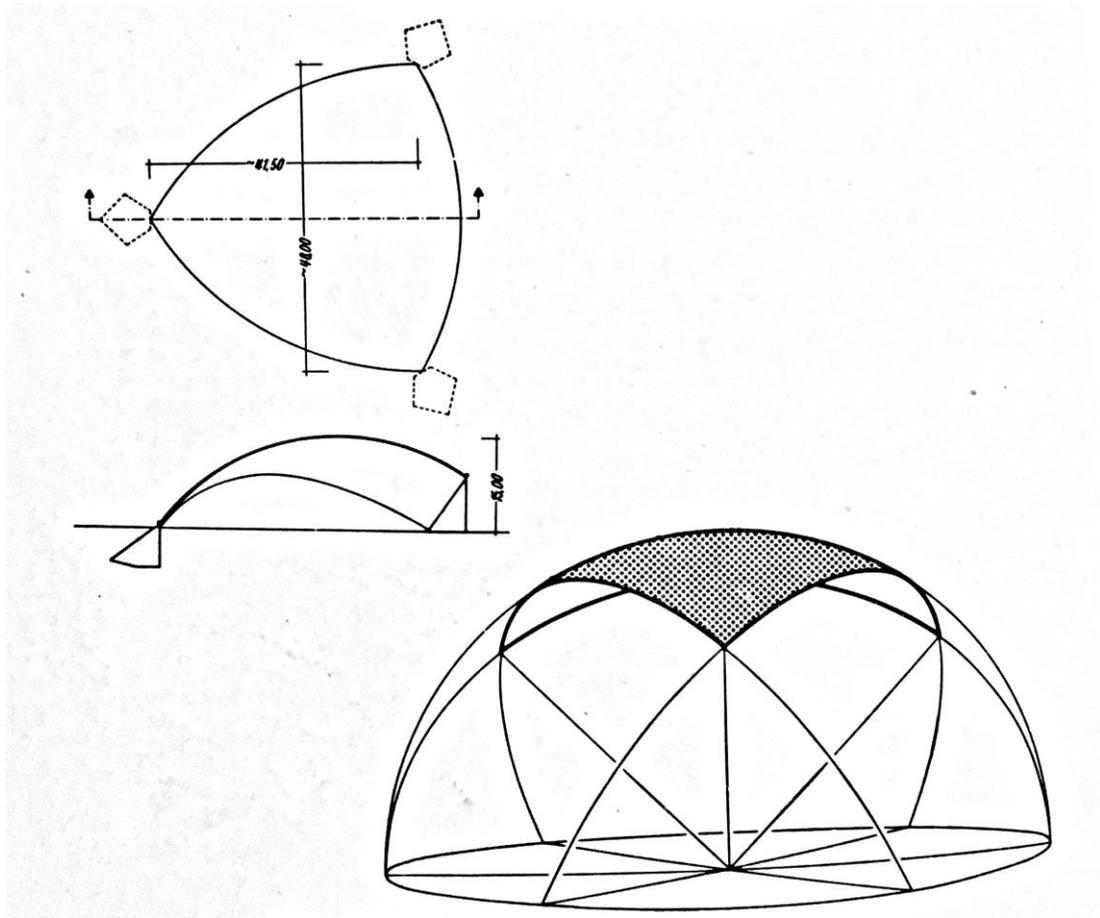
Según la altura de la bóveda:

- Cúpula rebajada
- Cúpula de medio punto
- Cúpula peraltada

Además de las distintas clasificaciones mencionadas anteriormente para las cúpulas, también se pueden formar superficies de segmentos de cúpulas creando bordes a lo largo de los meridianos como se muestra en la Figura 111. Tal es el caso del Auditorio Kresge, Instituto Tecnológico de Massachusetts, diseñado por el arquitecto Eero Saarinen, construido entre 1953 y 1955. En este trabajo especial de grado solo se analizarán las cúpulas segmentadas a lo largo de sus planos paralelos, como las utilizadas en las cubiertas de los tanques de almacenamiento de líquidos.



*Figura 111.* Diferentes tipos de conchas que pueden obtenerse del rebanamiento de una concha de revolución. Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.



*Figura 112.* El auditorio Kresge esta formado por una concha esférica apoyada en tres puntos con luces de 41 y 48 m. El espesor es de 8,50 cm, los apoyos están diseñados como articulaciones. La concha está diseñada para un carga de  $400 \text{ kgf/m}^2$  y una presión de viento de  $150 \text{ kgf/m}^2$ . Tomada de “Análisis, Cálculo y Diseño de las Bóvedas de Cáscara” por A. Olvera López, C.E.C.S.A.



*Figura 113.* Auditorio Kresge, Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT, por sus siglas en inglés), diseñado por el arquitecto Eero Saarinen, construido entre 1953 y 1955. Fotografía de: Autor desconocido.

## DEFINICIONES

Para el análisis de una concha de revolución se emplea un elemento diferencial cortado de la superficie por dos planos meridianos adyacentes y por dos planos paralelos adyacentes, los cuales son normales al eje de rotación. En la Figura 114 se muestra el elemento diferencial y se define el sistema de coordenadas utilizado.

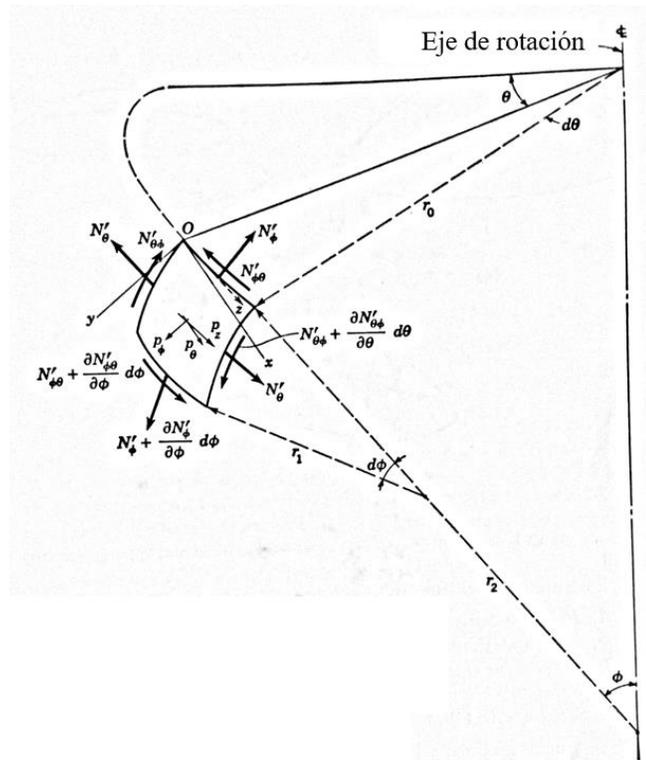


Figura 114. Elementos diferencial de una concha de revolución. Tomada de “Thin Shell Concrete Structures” por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

De la figura 114, se define el elemento diferencial en coordenadas polares.

$$\begin{array}{llllll}
 \alpha_x = \theta & a_x = r_0 & r_x = r_2 & r_0 = r_2 \sin \phi & N'_{xy} = N'_{\theta\phi} \\
 \alpha_y = \phi & a_y = r_1 & r_y = r_1 & N'_x = N'_\theta & N'_y = N'_\phi
 \end{array}$$

## CÚPULAS ESFÉRICAS

### Tipos de fuerzas en una concha

En una concha esférica se desarrollan dos tipos de fuerzas, las fuerzas que se encuentran en el plano meridional se denominan *fuerzas meridionales*  $N'_\phi$ , las cuales se originan bajo una carga distribuida sobre la superficie de la concha. Perpendicular a las fuerzas meridionales, se originan en el plano paralelo las *fuerzas paralelas* o *fuerzas de aro*  $N'_\theta$ , Figura 115, y es debido a estas que no se origina flexión en la concha. Las fuerzas de aro restringen el movimiento fuera del plano de las líneas meridionales en la concha. En una concha, las restricciones dadas por las fuerzas de aro causan que no se genere flexión tanto en la dirección meridional como en la dirección de aro, gracias a esto una cúpula puede soportar variaciones de carga por el desarrollo solo de las tensiones en los planos de la concha.

Las cúpulas son las únicas estructuras que pueden actuar de manera funicular para distintos tipos de cargas, incluso si la forma de la concha no es funicular, debido a las tensiones que se generan en cada uno de los planos.

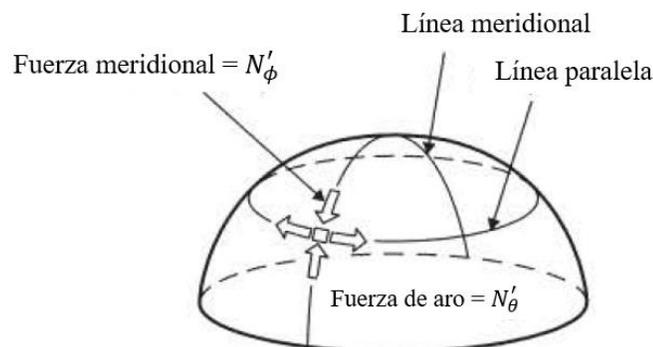


Figura 115. Tipos de fuerzas desarrolladas en una cúpula esférica. Tomada de “Structures, 7th edition” por D. Schodek & M. Bechthold, 2013, Pearson Education, Inc.

Se pueden colocar hoyos en una cúpula de concreto, Figura 116, pero debe ser evitado en lo más posible, debido a que interrumpen la continuidad de las tensiones y, por lo tanto, en su eficiencia. Si se colocan hoyos, la concha debe estar especialmente reforzada en las cercanías de los bordes de los hoyos.



*Figura 116.* Edificio Angloven, Bello Monte, Caracas, Venezuela. Con una cubierta del tipo cúpula esférica con hoyos que permiten el paso de la luz. Fotografía de: Autor desconocido.

### **Teoría de membrana**

De las ecuaciones 122, 123 y 124, se tiene que, para una cúpula simétrica bajo una carga simétrica, las ecuaciones de la teoría de membrana se reducen a:

$$\frac{d(N'_\phi r_0)}{d\phi} - N'_\theta \frac{dr_0}{d\phi} + p_\phi r_0 r_1 = 0 \quad (236)$$

$$\frac{N'_{\theta}}{r_2} + \frac{N'_{\phi}}{r_1} + p_z = 0 \quad (237)$$

En el caso de una cúpula asimétrica, se tiene que:

$$N'_{\phi} = -\frac{R}{2\pi r_0 \sin \phi} \quad (238)$$

$$N'_{\theta} = \frac{R}{2\pi r_1 \sin^2 \phi} - p_z \frac{r_0}{\sin \phi} \quad (239)$$

Las ecuaciones 238 y 239 se pueden emplear para distintos tipos de carga.

*Carga uniforme sobre la superficie de la cúpula esférica.*

En el caso de una cúpula esférica de espesor uniforme y carga permanente:

$$N'_{\phi} = -aq \frac{1}{1 + \cos \phi} \quad (240)$$

$$N'_{\theta} = aq \left( \frac{1}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right) \quad (241)$$

La Figura 117 muestra la distribución de las dos fuerzas de membrana sobre el hemisferio de la cúpula esférica de espesor constante.

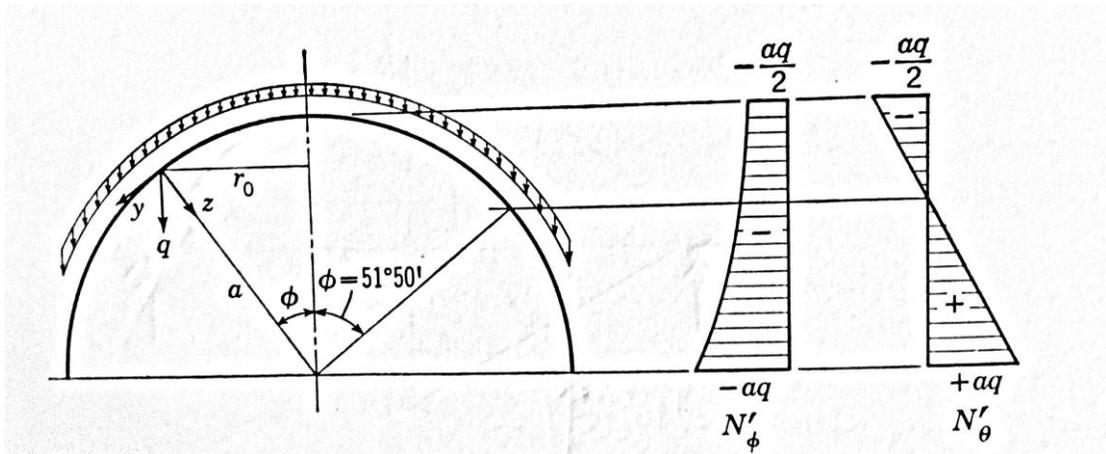


Figura 117. Distribución de fuerzas de membrana. Tomada de “Thin Shell Concrete Structures” por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

De las ecuaciones 240 y 241 y de la Figura 117, se observa que las fuerzas meridionales en la concha esférica bajo una carga distribuida uniformemente se encuentran siempre en compresión. En cambio, las fuerzas paralelas pueden encontrarse en tracción o en compresión, dependiendo de la apertura del ángulo central de la concha,  $\phi$ . Los valores de la fuerza meridional se incrementan desde la corona de la concha hasta el borde. En el caso de las fuerzas meridionales, los valores decrecen desde un máximo a compresión en la corona de la concha a cero en  $\cos \phi = 1/(1 + \cos \phi)$ , o en  $51^\circ 52'$ . Por debajo de  $51^\circ 52'$  las fuerzas paralelas empiezan a estar a tracción incrementándose hasta su máximo en el borde de la concha. En la Figura 118 se observa la distribución de las fuerzas meridionales y paralelas de una cúpula esférica.

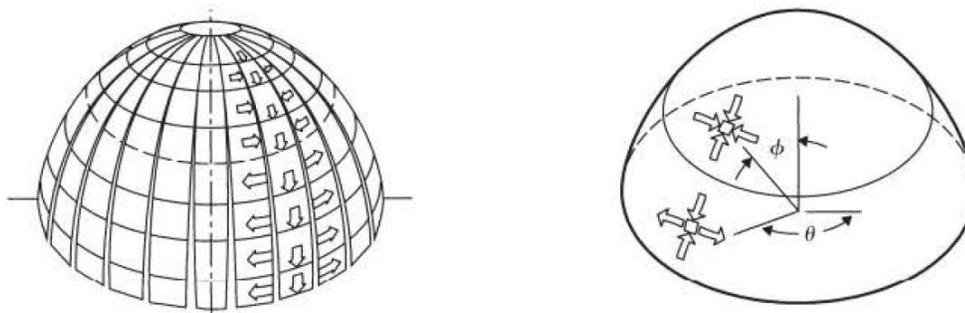


Figura 118. Las fuerzas paralelas se encuentran en compresión en la zona superior de la concha hasta  $51^{\circ}52'$  en donde empiezan estar a tracción; las fuerzas meridionales se encuentran siempre en compresión. Tomada de “Structures, 7th edition” por D. Schodek & M. Bechthold, 2013, Pearson Education, Inc.

Carga uniforme sobre la proyección horizontal de la superficie de la cúpula esférica.

$$N'_{\phi} = -\frac{ap}{2} \quad (242)$$

$$N'_{\theta} = -\frac{ap}{2} \cos 2\phi \quad (243)$$

En la Figura 119 se presenta la distribución de los valores de las fuerzas de membrana en el hemisferio de la cúpula esférica de espesor constante. Los valores de la fuerza meridional se encuentran en compresión en toda la cúpula. En cambio, los valores de la fuerza paralela se encuentran en compresión en la corona de la concha hasta llegar a cero cuando  $\cos 2\phi = 0$ , o en  $\phi = 45^{\circ}$ , luego las fuerzas paralelas se encuentran a tracción hasta llegar a su máximo en el borde de la concha.

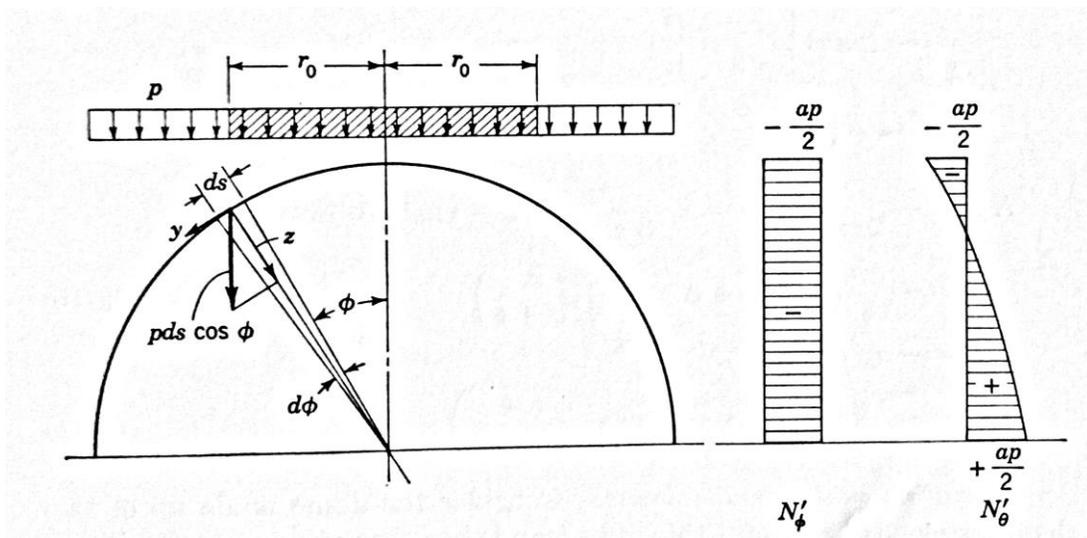


Figura 119. Distribución de fuerzas de membrana debido a una carga uniforme sobre la proyección horizontal de la superficie de la cúpula esférica. Tomada de “Thin Shell Concrete Structures” por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

*Cargas concentradas alrededor de un tragaluz en una cúpula esférica.*

$$N'_\phi = \frac{aw(\cos \phi_0 - \cos \phi)}{\sin^2 \phi} + \frac{P \sin \phi_0}{\sin^2 \phi} \quad (244)$$

$$N'_\theta = aw \cos \theta - N'_\phi \quad (245)$$

Algunas cúpulas pueden ser diseñadas con una abertura circular en la corona, la cual puede ser utilizada como tragaluz o como sistema de ventilación. Tal es el caso del Palacio de los Deportes, Roma, Italia, diseñado por Pier Luigi Nervi, Figura 120; con una capacidad de 16.000 espectadores y una cúpula de 100 m de diámetro, se construyó con elementos prefabricados, denominado sistema Nervi, finalizando la obra en tan solo tres meses.



Figura 120. Palacio de los deportes, Roma, Italia. Fotografía de: Autor desconocido

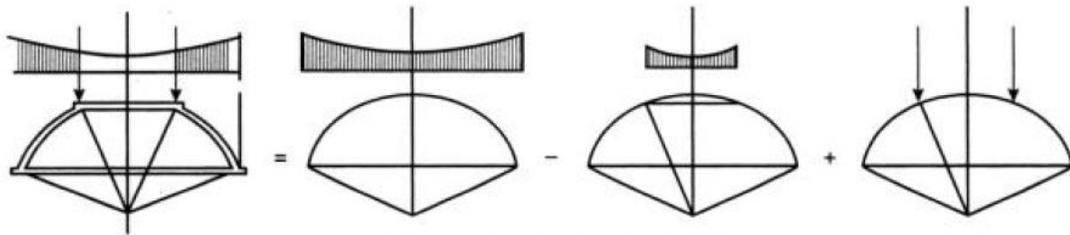


Figura 121. Análisis de una cúpula esférica con tragaluz. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Privete Limited.

*Carga concentrada en el eje de la cúpula esférica.*

En el caso de una carga concentrada en la corona de la concha, las fuerzas de membrana son:

$$N'_{\phi} = -\frac{P_c}{2\pi a \sin^2 \phi} \quad (246)$$

$$N'_{\theta} = \frac{P_c}{2\pi a \sin^2 \phi} \quad (247)$$

De las ecuaciones 246 y 247, puede notarse que a medida que se acerca a la corona de la concha,  $\sin^2 \phi$  se vuelve cada vez más pequeño, en consecuencia  $N'_\phi$  y  $N'_\theta$  se vuelven cada vez más grandes; como  $\phi \rightarrow 0$ , las fuerzas de membrana tienden a infinito. Esta condición no puede ocurrir, por lo que se genera una flexión considerable cerca del área.

## SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LAS CÚPULAS

El análisis de las cúpulas se dividirá en cuatro partes:

- 1) *Sistema primario* basado en la teoría de membrana.
- 2) *Errores* en los bordes de debido a las resultantes de las fuerzas obtenidas por la teoría de membrana.
- 3) *Correcciones* debido a los efectos unitarios en los bordes de la concha.
- 4) *Compatibilidad* la cual se logra calculando el tamaño de los efectos de bordes necesarios para eliminar los errores.

## Cúpulas esféricas

### Sistema Primario

Las resultantes de tensiones son calculadas con base en la teoría de membrana. Dependiendo del tipo de carga que esté actuando sobre la superficie de la cúpula esférica, se emplean, según el caso, las ecuaciones presentadas anteriormente.

## Errores

El movimiento horizontal  $\Delta_H$  y la rotación  $\Delta_\phi$  en una cúpula es:

$$\Delta_H = \frac{r_2 \sin \phi}{Eh} (N'_\theta - \nu N'_\phi) \quad (248)$$

$$\Delta_\theta = -\frac{\cot \phi}{r_1 Eh} [N'_\phi (r_1 + \nu r_2) - N'_\theta (r_2 + \nu r_1)] - \frac{d}{r_1 d\phi} \left( \frac{\Delta_H}{\sin \phi} \right) \quad (249)$$

Derivando los desplazamientos en el borde de una cúpula esférica de espesor constante, donde  $r_1 = r_2 = a$ ,  $\nu = 0$  en el borde.

$$\Delta_H = D_{10} = \frac{a^2 q}{Eh} \left( \frac{1 + \nu}{1 + \cos \phi} - \cos \phi \right) \sin \phi \quad (250)$$

$$\Delta_\theta = D_{20} = -\frac{aq}{Eh} (2 + \nu) \sin \phi \quad (251)$$

## Correcciones

Los desplazamientos debido a la flexión en conchas de revolución cargadas simétricamente respecto a su eje de rotación son los siguientes:

$$\Delta_\alpha = \frac{4\lambda^3 M_\alpha}{Eah} \quad (252)$$

$$\Delta_H = \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Eh} M_\alpha \quad (253)$$

$$\Delta_{\alpha} = \frac{2\lambda^3 \sin \alpha}{Eh} H \quad (254)$$

$$\Delta_H = \frac{2a\lambda \sin^2 \alpha}{Eh} H \quad (255)$$

### Compatibilidad

Las fuerzas correctivas que se requieren se calculan mediante las dos ecuaciones de compatibilidad en el borde de la cúpula:

$$\sum \Delta_H = 0 = X_1 D_{11} + X_2 D_{12} + D_{10} \quad (256)$$

$$\sum \Delta_{\alpha} = 0 = X_1 D_{21} + X_2 D_{22} + D_{20} \quad (257)$$

Tabla 15

*Fuerzas y desplazamiento en una cúpula esférica cargada por fuerzas de borde uniformes alrededor de un círculo paralelo*



$$N_{\phi} \quad -\sqrt{2} \cot(\alpha - \psi) \sin \alpha e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{4}\right) H \quad -\frac{2\lambda}{a} \cot(\alpha - \psi) e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi) M_{\alpha}$$

$$N_{\theta} \quad -2\lambda \sin \alpha e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{2}\right) H \quad -\frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{a} e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi - \frac{\pi}{4}\right) M_{\alpha}$$

$$M_{\phi} \quad \frac{a}{\lambda} \sin \alpha e^{-\lambda\psi} \sin(\lambda\psi) H \quad \sqrt{2} e^{-\lambda\psi} \sin\left(\lambda\psi + \frac{\pi}{4}\right) M_{\alpha}$$

---

$\Delta_H \frac{2a\lambda \sin^2 \alpha}{Eh} H$	$\frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Eh} M_\alpha$
$\Delta_\alpha \frac{2\lambda^2 \sin \alpha}{Eh} H$	$\frac{4\lambda^3 M_\alpha}{Eah}$

---

Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

### Condiciones de apoyo: anillos de borde

Por lo general no es posible o no se desea colocar soportes tangenciales, tales como tirantes, que sirven de apoyo en el borde de la concha. El caso más común de apoyos en una cúpula es por medio de apoyos verticales. En la Figura 122 se observa el problema estructural, en donde un apoyo vertical no podrá satisfacer la reacción de la fuerza de membrana  $N'_\phi$ , por lo que la ausencia de una restricción lateral generará en la concha un desplazamiento horizontal. Es debido a esto que se emplean los anillos de borde con el fin de, contener las componentes horizontales de las fuerzas meridionales. Dado que las fuerzas meridionales de una cúpula siempre se encuentran en compresión, sus componentes horizontales actuarán en dirección externa a la base de la concha, teniendo como consecuencia que el anillo de borde se encuentre en todo momento trabajando a tracción, Figura 125.a. Algunos de las restricciones laterales que se pueden emplear en los bordes de las cúpulas son: anillo de borde, muro cilíndrico (como en el caso de un tanque), o una combinación de anillo de borde y muro cilíndrico. En este trabajo especial de grado solo nos referiremos únicamente a los anillos de borde. La Figura 123 muestra algunas condiciones de apoyo para las cúpulas.

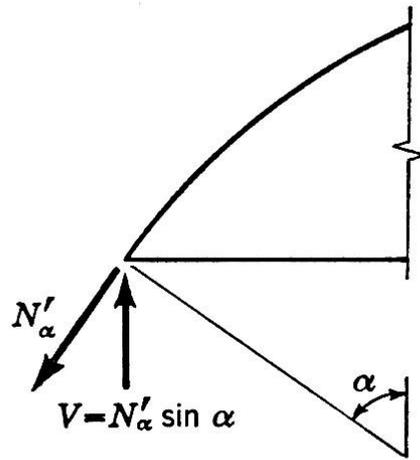
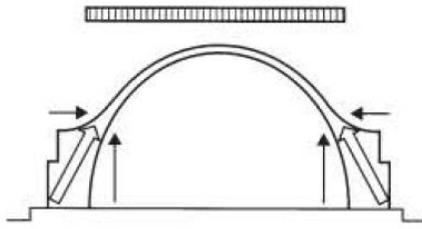
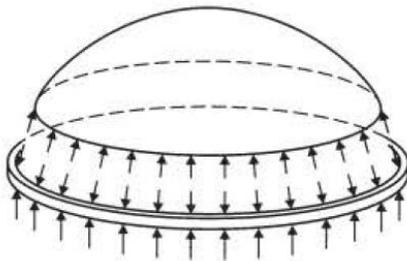


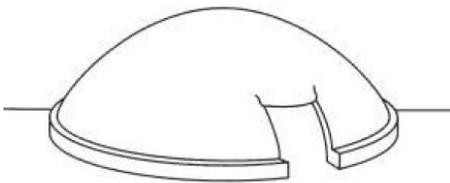
Figura 122. Problema estructural al colocar solo apoyos verticales en una cúpula esférica. Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.



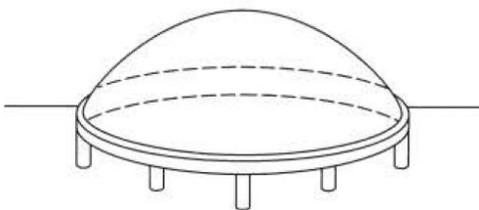
**Tirantes.** Las componentes verticales y horizontales de las fuerzas meridionales pueden estar apoyadas por nervios o tirantes. Los tirantes deben ser capaces de contener grandes desplazamientos en dirección exterior a la base de la concha.



**Anillos de borde.** Un anillo continuo trabajando a tracción puede ser utilizado para contener los empujes horizontales. Solo las fuerzas en dirección vertical se ejercen sobre el suelo.



Si se emplea un anillo de borde, se debe asegurar su continuidad en toda la base de la concha; de lo contrario, dejan de tener utilidad y se generaran tensiones considerables en la concha.



Las conchas en donde se emplean anillos de borde pueden ser elevadas sobre columnas ya que, debajo del anillo solo se necesitan transmitir las fuerzas verticales al suelo. Las conchas sin anillos de borde necesitan un sistema de nervios o tirantes.

Figura 123. Distintos apoyos en una cúpula esférica. Tomada de "Structures, 7th edition" por D. Schodek & M. Bechthold, 2013, Pearson Education, Inc.

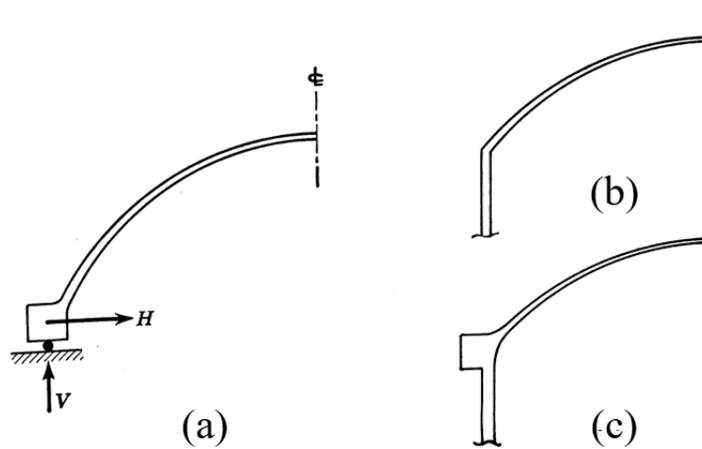


Figura 124. Tipos de apoyo en una cúpula esférica, (a) anillo de borde, (b) muro cilíndrico, (c) combinación de anillo de borde con muro cilíndrico. Tomada de “Thin Shell Concrete Structures” por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

## Análisis Cúpula – Anillo

En el análisis cúpula-anillo (Girkmann, 1959), el anillo se asume monolítico con la cúpula y libre de deslizar y rotar en un apoyo inamovible. Con estas suposiciones se analizará el sistema cúpula-anillo de la misma manera en que se analizaron las cúpulas sin anillo de borde.

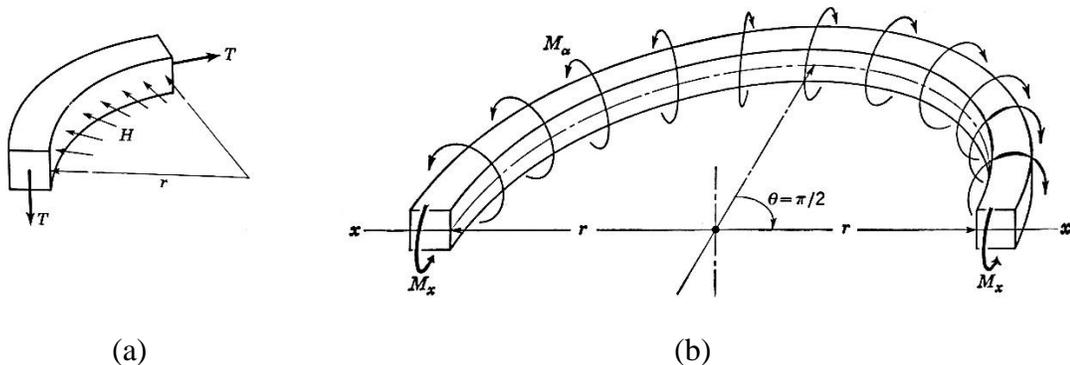


Figura 125. Fuerza y momento que actúan en el anillo de borde. Tomada de “Thin Shell Concrete Structures” por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

**Sistema primario.** Las resultantes de tensiones en la cúpula se calculan mediante la teoría de membrana, en donde la componente horizontal de la fuerza meridional  $N'_\theta$  de la cúpula se mantiene en equilibrio por la tracción del anillo de borde  $T = N'_\theta a \sin \alpha \cos \alpha$ .

**Errores.** Para el análisis cúpula-anillo de borde, existirán cuatro errores: traslación horizontal y rotación en el borde de la cúpula,  $\Delta_H^C$  y  $\Delta_\alpha^C$  respectivamente, y en el anillo de borde,  $\Delta_H^A$  y  $\Delta_\alpha^A$ . Las expresiones en el caso de la cúpula son las presentadas anteriormente para el caso de carga simétrica respecto al eje de rotación. En el caso del anillo de borde se tiene:

$$\Delta_H^A = D_{10}^A = \left( \cos \alpha + \frac{12y_0 e}{d^2} \right) \frac{r^2 N'_\theta}{Ebd} \quad (258)$$

$$\Delta_\alpha^A = D_{20}^A = -\frac{12r^2 e N'_\theta}{Ebd^3} \quad (259)$$

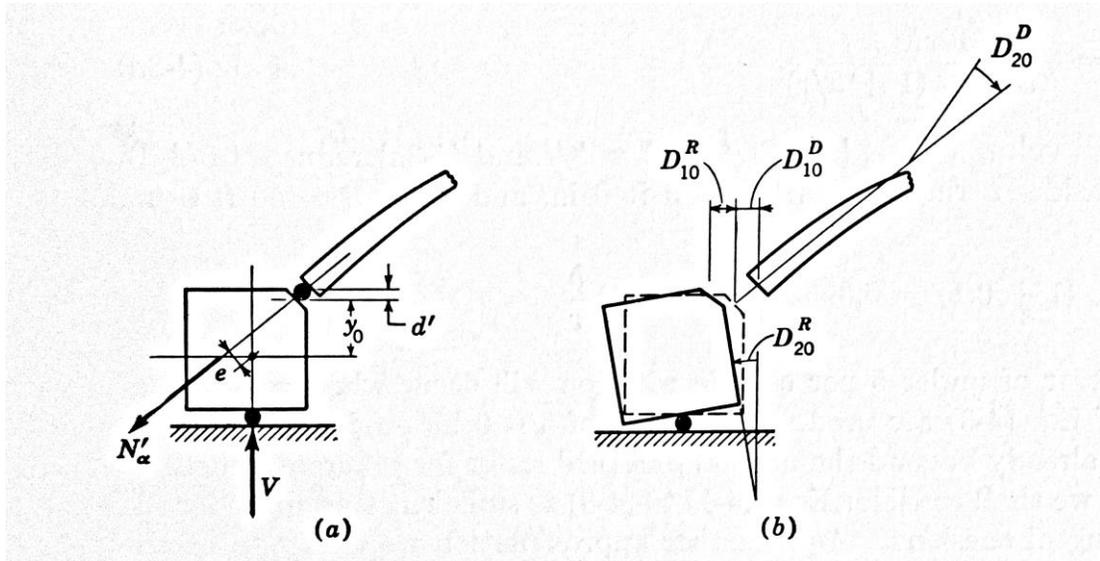


Figura 126. Desplazamientos que se generan entre la cúpula y el anillo. Tomada de “Thin Shell Concrete Structures” por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

**Correcciones.** Las dos fuerzas correctivas que se requieren, denominadas X1 para la traslación horizontal y X2 para la rotación. Los desplazamientos para un anillo de sección transversal rectangular son:

$$D_{11}^R = \left(1 + \frac{12y_0^2}{d^2}\right) \frac{r^2}{Ebd} \quad (260)$$

$$D_{12}^A = -\frac{12r^2y_0}{Ebd^3} \quad (261)$$

$$D_{22}^A = \frac{12r^2}{Ebd^3} \quad (262)$$

**Compatibilidad.**

$$D_{11} = D_{11}^C + D_{11}^A \quad (263)$$

$$D_{12} = D_{12}^C + D_{12}^A$$

$$D_{22} = D_{22}^C + D_{22}^A$$

### Cúpula esférica sin anillo de borde<sup>13</sup>

Se analizó una cúpula esférica, concha de rotación, bajo una carga uniforme sobre su superficie, con y sin anillo de borde. Las dimensiones de la cúpula esférica se presentan a continuación:

#### Concha

$$r_1 = r_2 = a = 28,8 \text{ m}$$

$$h = 0,10 \text{ m} - \text{Constante en todo el espesor de la concha}$$

$$\alpha = 28^\circ$$

$$r_o = a \sin \alpha = 13,52 \text{ m}$$

$$\nu = \frac{1}{6} = 0,1667 \text{ Coeficiente de Poisson}$$

$$q = \text{carga muerta} + \text{carga viva} = 440 \text{ kgf/m}^2$$

$$\lambda = \sqrt[4]{3(1 - \nu^2) \left(\frac{a}{h}\right)^2} = 22$$

Para el diseño de la cúpula esférica sin anillo de borde se analizó mediante la teoría de membrana, método de la flexión (solución analítica) y con un análisis de elementos finitos. Para el análisis por medio de elementos finitos se empleó el programa SAP2000 (CSI, 2018), la cúpula esférica se modeló utilizando elementos cuadriláteros tipo concha de cuatro nodos, de dimensiones 30 cm x 30 cm (debido a la geometría de la cúpula no presentan dimensiones constantes a diferencia del caso de las conchas cilíndricas), con la teoría de placa delgada de Kirchhoff, en donde se

---

<sup>13</sup> Este ejemplo ha sido calculado previamente por solución analítica en la referencia [1].

desprecian los efectos de corte fuera del plano del elemento concha. En la Figura 127 se presenta el modelo de la cúpula esférica por medio de elementos finitos.

Tabla 16

*Comparación de resultados obtenidos por distintos métodos de una cúpula esférica sin anillo de borde*

Método de diseño	Ángulo $\phi$ (medido desde la corona)							
	0° (Borde)	1°	2°	5°	10°	20°	28° (corona)	
kgf/m								
$N_\phi$	Solución Analítica	-6.422,23	-6.492,73	-6.554,48	-6.613,94	-6.503,33	-6.366,88	-6.336,00
	FEA	-6.523,72	-6.707,64	-6.719,70	-6.656,87	-6.503,13	-6.371,09	-6.349,60
	Teoría de Membrana	-6.729,87	-6.701,19	-6.673,71	-6.598,27	-6.494,94	-6.366,98	-6.336,00
kgf/m								
$N_\theta$	Solución Analítica	-1.121,65	-1.486,82	-2.352,45	-4.709,64	-5.663,13	-6.179,84	-6.336,09
	FEA	-1.302,19	-2.809,80	-3.447,33	-5.194,73	-5.606,08	-6.148,90	-6.347,09
	Teoría de Membrana	-4.458,84	-4.589,64	-4.715,81	-5.066,37	-5.556,85	-6.181,70	-6.336,00
Kgf-m/m								
$M_\phi$	Solución Analítica	-114,72	-47,09	-6,33	19,08	0,43	0,04	0,00
	FEA	-0,06	27,71	31,91	16,41	-0,54	1,08	1,92
	Teoría de Membrana	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

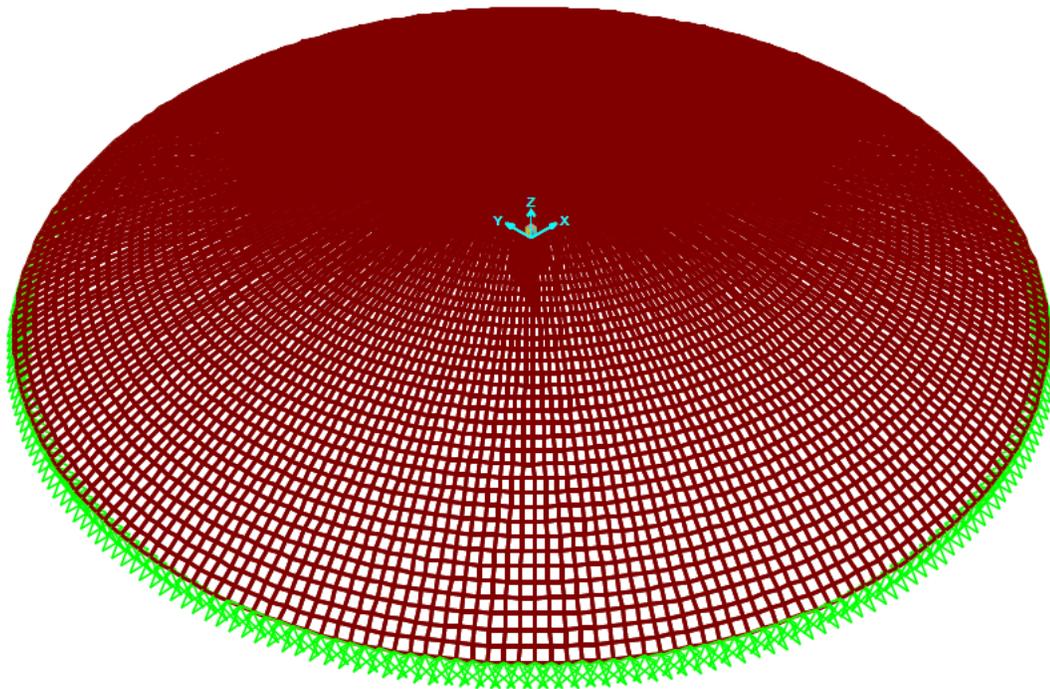


Figura 127. Modelo de la cúpula esférica sin anillo de borde mediante elementos finitos.

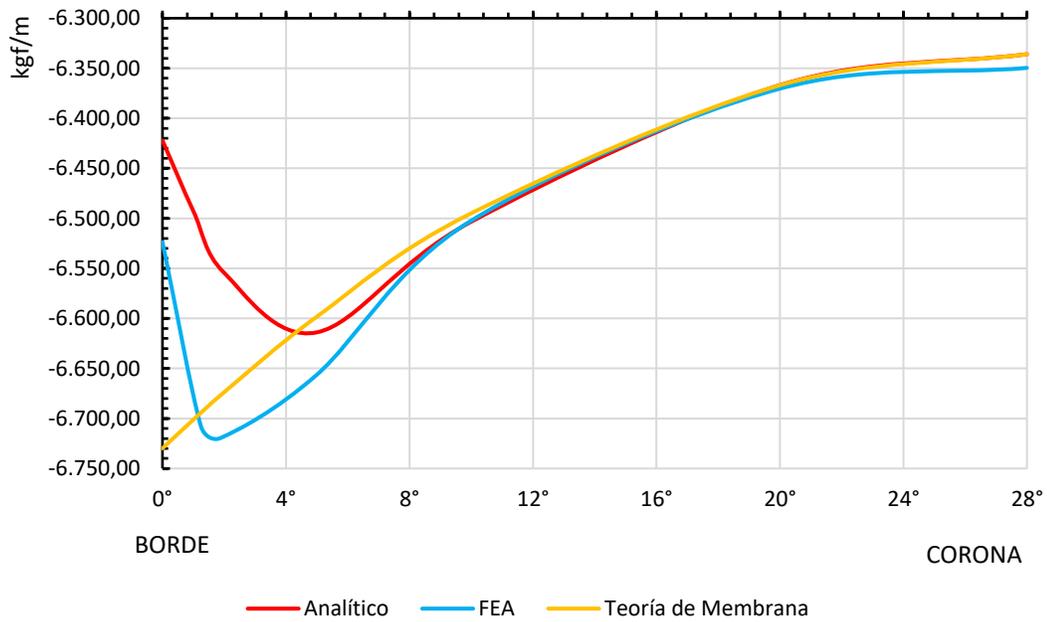


Figura 128. Comparación de las fuerzas meridianales  $N_\phi$  obtenidas de una cúpula esférica sin anillo de borde.

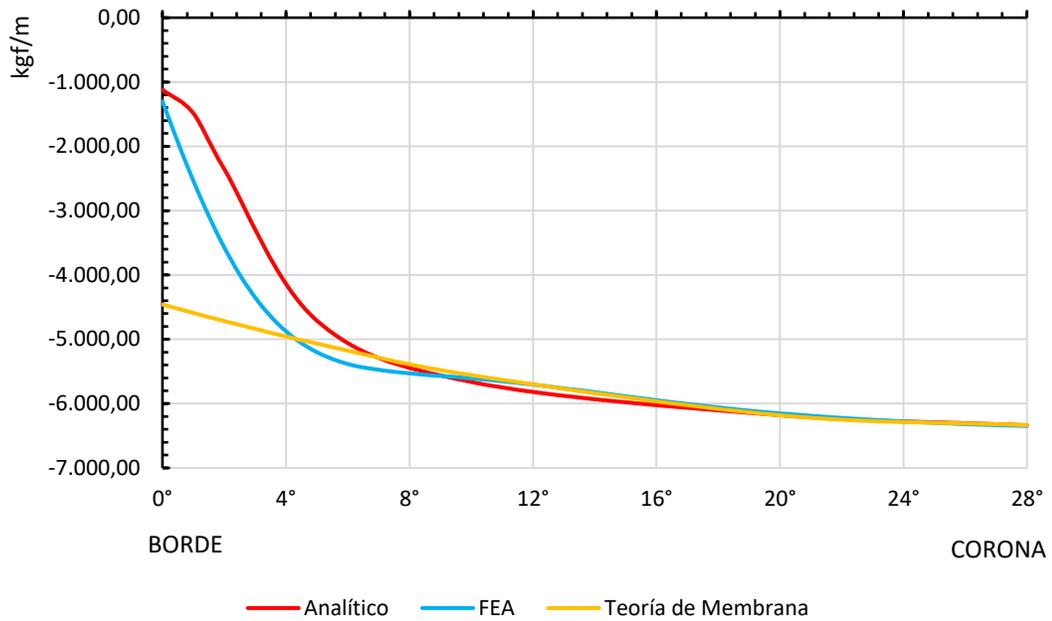


Figura 129. Comparación de las fuerzas paralelas  $N_\theta$  obtenidas de una cúpula esférica sin anillo de borde.

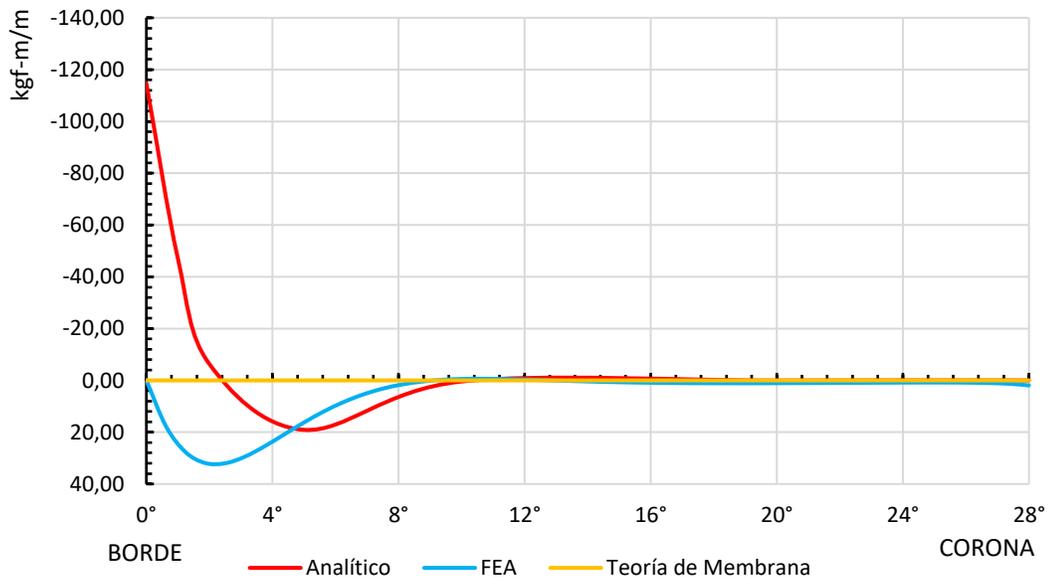


Figura 130. Comparación del momento flexionante  $M_\theta$  obtenidos de una cúpula esférica sin anillo de borde.

El análisis de la cúpula esférica por medio de la teoría de membrana representa el comportamiento de la cúpula esférica de forma adecuada hasta que empieza a acercarse a los bordes de la cúpula, en donde se empieza a ver una desviación de los valores obtenidos con el método de la flexión. En cuanto al análisis por elementos finitos, las fuerzas meridionales y paralelas obtenidas son aproximadas, en el borde de la cúpula se obtuvo una fuerza meridional de -6.422,23 kgf/m por medio de la solución analítica y de -6.523,72 kgf/m por análisis de elementos finitos. En el caso del momento flexionante se observa una desviación de resultado obtenido por el análisis de elementos finitos, debido a que en la solución analítica el espesor de la cúpula es constante a diferencia del análisis de elementos finitos en donde se modeló la cúpula con un incremento del espesor cercano a los bordes. Al ser el ángulo de medio menor de  $51,52^\circ$ , toda la concha se encuentra a compresión.

## Cúpula esférica con anillo de borde<sup>14</sup>

### Dimensiones de la cúpula esférica

Las dimensiones de la cúpula esférica son las mismas que las del caso anterior.

### Dimensiones del anillo de borde

$$b = 0,20 \text{ m}$$

$$d = 0,45 \text{ m}$$

---

<sup>14</sup> Este ejemplo ha sido calculado previamente por solución analítica en la referencia [1].

$$y_o = 0,15 \text{ m}$$

$$e = 0,10 \text{ m}$$

Para el diseño de la cúpula esférica con anillo de borde se analizó mediante el método de la flexión y por medio de elementos finitos. Para el análisis de elementos finitos se empleó el programa SAP2000 (CSI, 2018), la cúpula esférica se modeló utilizando elementos cuadriláteros tipo concha de cuatro nodos, de dimensiones 30 cm x 30 cm (debido a la geometría de la cúpula no presentan dimensiones constantes a diferencia del caso de las conchas cilíndricas), con la teoría de placa delgada de Kirchhoff, en donde se desprecian los efectos de corte fuera del plano del elemento concha; el espesor de los elementos cercanos al borde de la cúpula esférica se aumentó en comparación al de los cercanos a la corona. El anillo de borde se modelado como un elemento tipo *frame*. Los resultados se presentan en la Tabla 17 y en las Figuras 132 a la 134.

Tabla 17

Comparación de resultados obtenidos por distintos métodos de una cúpula esférica con anillo de borde

Método de diseño	Ángulo $\varphi$ (medido desde la corona)							
	0° (Borde)	1°	2°	5°	10°	20°	28° (corona)	
kgf/m								
$N_\phi$	Solución Analítica	-5.570,75	-5.979,02	-6.307,58	-6.697,28	-6.521,16	-6.367,00	-6.336,00
	FEA	-6.729,87	-6.701,19	-6.673,71	-6.598,27	-6.494,94	-6.366,98	-6.336,00
	Teoría de Membrana	-3.014,09	-6.527,87	-7.654,55	-7.920,98	-6.676,83	-6.353,16	-6.408,71
kgf/m								
$N_\theta$	Solución Analítica	10.903,68	8.139,73	4.209,14	-4.242,03	-5.961,91	-6.175,78	-6.336,08
	FEA	51.931,23	30.771,93	13.309,28	-5.752,51	-8.088,14	-6.009,01	-6.395,87
	Teoría de Membrana	-4.458,84	-4.589,64	-4.715,81	-5.066,37	-5.556,85	-6.181,70	-6.336,00
kgf-m/m								
$M_\phi$	Solución Analítica	-350,58	-105,16	29,40	78,71	-0,80	0,18	-0,01
	FEA	-72,54	547,96	714,83	460,63	-14,03	2,93	3,21
	Teoría de Membrana	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

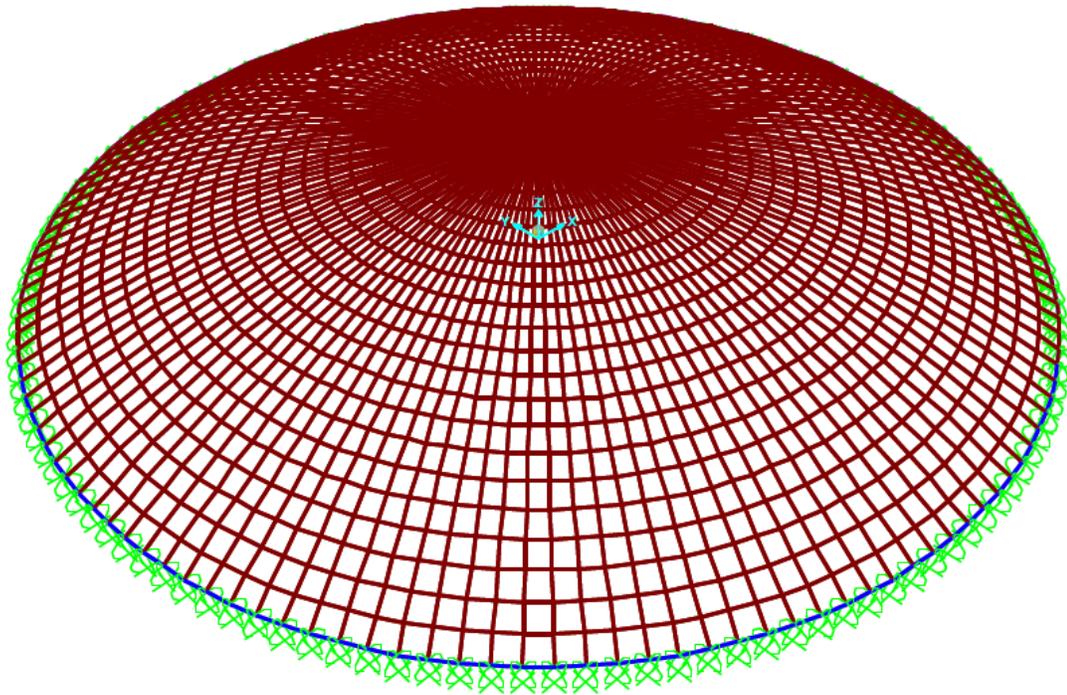


Figura 131. Modelo de la cúpula esférica con anillo de borde mediante elementos finitos, en donde se muestra el anillo de borde (color azul) modelado como elemento tipo *frame*.

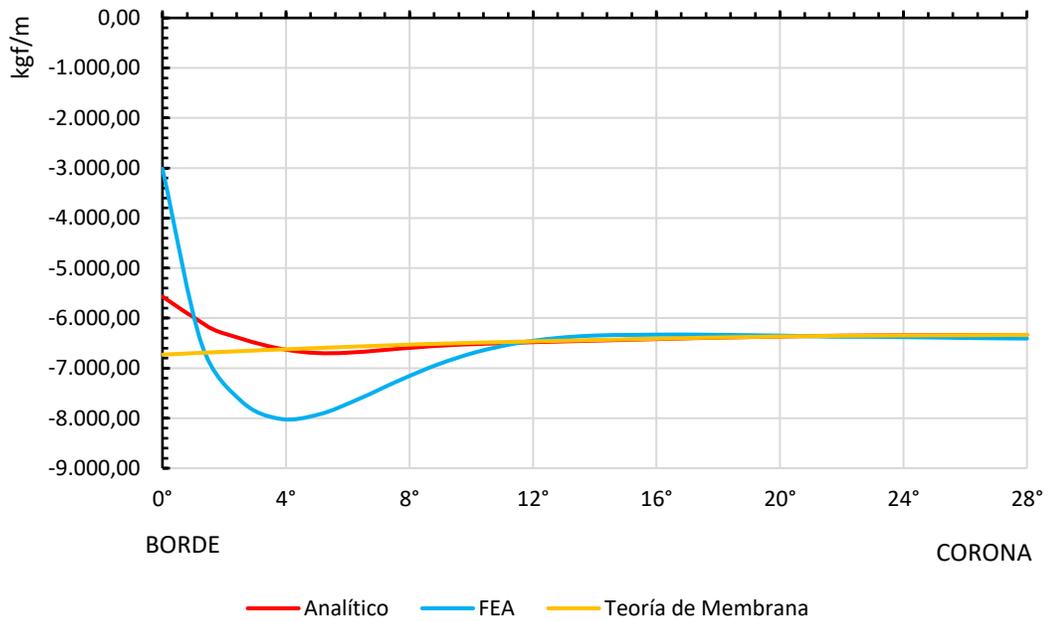


Figura 132. Comparación de las fuerzas meridianas  $N_\phi$  obtenidas de una cúpula esférica sin anillo de borde.

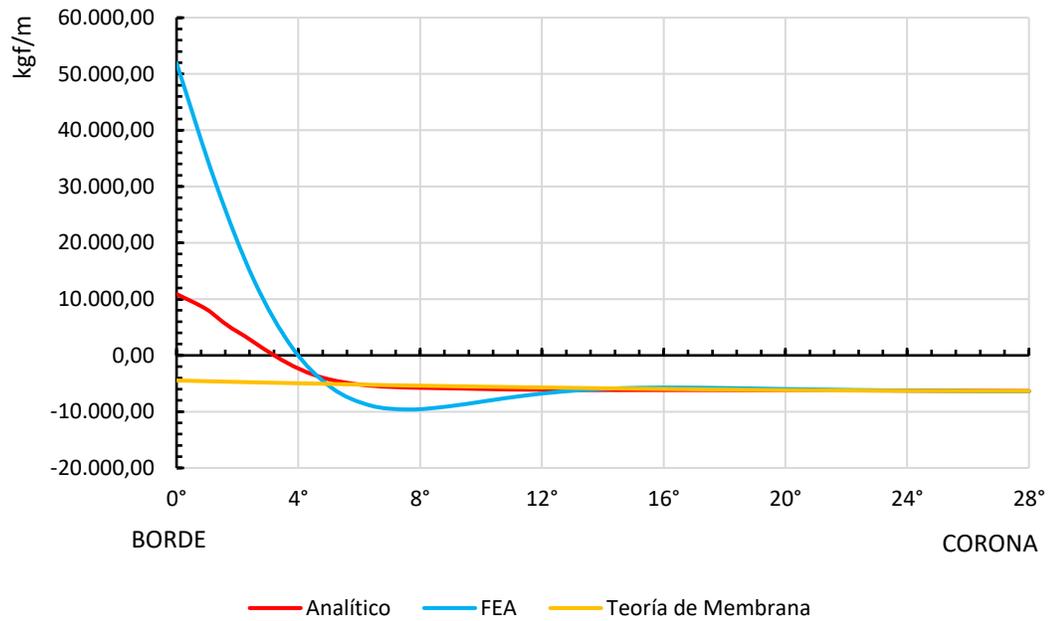


Figura 133. Comparación de las fuerzas paralelas  $N_\theta$  obtenidas de una cúpula esférica sin anillo de borde.

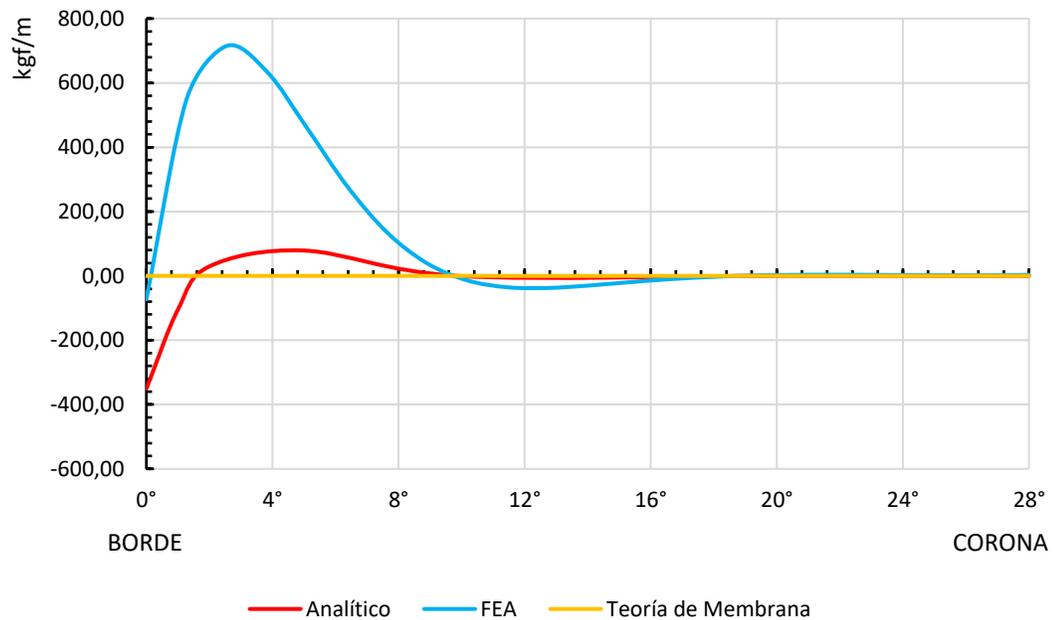


Figura 134. Comparación del momento flexionante  $M_\theta$  obtenidos de una cúpula esférica sin anillo de borde.

Para el caso de una cúpula esférica con anillo de borde, los valores de las fuerzas paralelas empiezan a trabajar a tracción luego de los 24° de apertura del ángulo medio. A pesar de que estas fuerzas no son deseables, se requiere de uso del anillo de borde debido a los empujes laterales por causa de las fuerzas meridionales de la concha.

## CÚPULA ELÍPTICA

Las cúpulas esféricas presentan el problema de que su altura varía en función al ángulo medio de apertura y si este aumenta o disminuye, el radio de la circunferencia de la base de la cúpula aumentará o disminuirá también. Por lo tanto, si se aumenta la altura de la cúpula aumentará el radio de la base de la cúpula esférica, lo cual en algunos casos no es deseable, como en el diseño de tanques de almacenamiento, en donde no se puede variar el radio de la base. Este inconveniente no sucede en el caso de las cúpulas elípticas, las cuales pueden variar su altura sin afectar el radio de la base. Hay que mencionar también, que la geometría de la cúpula elíptica favorece a que los empujes horizontales que se generan por las fuerzas meridionales sean mucho menores o casi nulos en comparación a los de una cúpula esférica, evitando así el uso de un anillo de borde.

Las cúpulas elípticas se generan rotando una elipse alrededor de su eje menor. De la cúpula elíptica que se muestra en la Figura 135, el arco elíptico queda definido por la ecuación 264.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (264)$$

## Teoría de membrana<sup>15</sup>

Las fuerzas meridionales y paralelas quedan definidas por las ecuaciones 265 y 266.

### Peso propio

$$N'_{\phi} = \frac{qa^2}{b} \frac{CQ}{1 - (y^2/b^2)} \quad (265)$$

$$N'_{\theta} = \frac{a^2q}{b} \left[ \frac{y}{b} - \frac{Cb^2}{(b^2 - y^2)Q} \right] \quad (266)$$

### Carga variable

$$N'_{\phi} = \frac{qa^2}{2b} Q$$

### En la corona de la cúpula elíptica

$$N'_{\theta} = N'_{\phi} = \frac{a^2q}{2b}$$

$$N'_{\theta} = \frac{a^2q}{2b} \left[ \frac{C \left( \frac{y}{b} \right)^2 - 1}{Q} \right]$$

---

<sup>15</sup> Para las cúpulas elípticas la compresión será positiva y la tracción negativa, a diferencia de las conchas cilíndricas en donde la compresión es negativa y la tracción positiva.

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1 - k^2}{2k} \log(1 + k) - \frac{g}{2} \sqrt{1 - k^2(1 - g^2)} - \frac{1 - k^2}{2k} \log \left[ gk + \sqrt{1 - k^2(1 - g^2)} \right] \quad (267)$$

$$k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (268)$$

$$Q = \sqrt{1 - k^2(1 - g^2)} \quad (269)$$

$$g = \frac{y}{b}$$

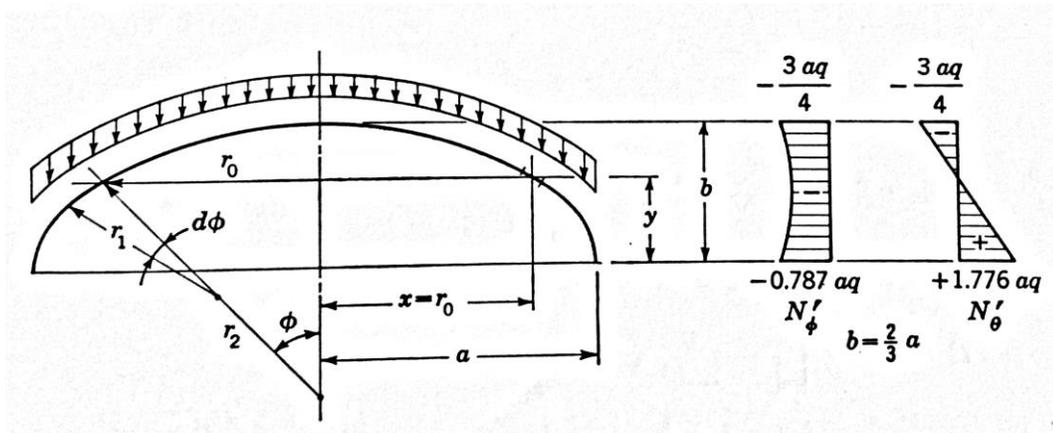


Figura 135. Distribución de fuerzas meridionales y paralelas en una cúpula elíptica. Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

A continuación, se presenta el análisis de una cúpula elíptica variando su altura, y así observar cómo afecta el cambio de la altura en el desarrollo de las fuerzas meridionales y paralelas de la cúpula. Solo se analizará la cúpula por medio de la teoría de membrana. La altura de la cúpula variara de 9,15 m a 20 m.

## Cúpula elíptica sin anillo de borde<sup>16</sup>

Dimensiones de la cúpula elíptica

a = 30,5 m

b = 9,14 m

h = 0,12 m – Constante en toda la cúpula.

Carga permanente = 305 kgf/m<sup>2</sup>

Carga variable = 146 kgf/m<sup>2</sup>

Tabla 18

Resultado de las fuerzas paralelas kgf/m<sup>2</sup> cada relación y/b de cada cúpula.

y/b	b				
	9,15 m	12 m	15 m	18 m	20 m
0,00	-85.515,22	-65.205,36	-52.164,29	-43.470,24	-39.123,21
0,10	-75.472,68	-57.547,92	-46.038,34	-38.365,28	-34.528,75
0,20	-60.611,86	-46.216,54	-36.973,23	-30.811,03	-27.729,93
0,30	-45.266,80	-34.515,94	-27.612,75	-23.010,63	-20.709,56
0,40	-31.568,02	-24.070,62	-19.256,49	-16.047,08	-14.442,37
0,50	-19.344,11	-14.749,89	-11.799,91	-9.833,26	-8.849,93
0,60	-9.212,09	-7.024,22	-5.619,37	-4.682,81	-4.214,53
0,70	-92,81	-70,76	-56,61	-47,18	-42,46
0,80	8.223,29	6.270,26	5.016,21	4.180,17	3.762,16
0,90	15.926,47	12.143,94	9.715,15	8.095,96	7.286,36
1,00	22.925,83	17.480,95	13.984,76	11.653,97	10.488,57

<sup>16</sup> Este ejemplo ha sido calculado previamente por solución analítica en la referencia [18].

Tabla 19

*Resultados de las fuerzas meridionales en  $\text{kgf}/\text{m}^2$ , para cada relación  $y/b$  de cada cúpula.*

<b>y/b</b>	<b>b</b>				
	<b>9,15 m</b>	<b>12 m</b>	<b>15 m</b>	<b>18 m</b>	<b>20 m</b>
<b>0,00</b>	10.121,12	7.717,35	6.173,88	5.144,90	4.630,41
<b>0,10</b>	10.389,20	7.921,77	6.337,41	5.281,18	4.753,06
<b>0,20</b>	11.556,42	8.811,77	7.049,42	5.874,51	5.287,06
<b>0,30</b>	13.306,83	10.146,46	8.117,17	6.764,31	6.087,88
<b>0,40</b>	15.415,02	11.753,95	9.403,16	7.835,97	7.052,37
<b>0,50</b>	17.941,50	13.680,40	10.944,32	9.120,26	8.208,24
<b>0,60</b>	20.281,78	15.464,85	12.371,88	10.309,90	9.278,91
<b>0,70</b>	22.920,63	17.476,98	13.981,58	11.651,32	10.486,19
<b>0,80</b>	25.568,09	19.495,67	15.596,54	12.997,11	11.697,40
<b>0,90</b>	28.217,58	21.515,91	17.212,73	14.343,94	12.909,54
<b>1,00</b>	31.008,33	23.643,85	18.915,08	15.762,57	14.186,31

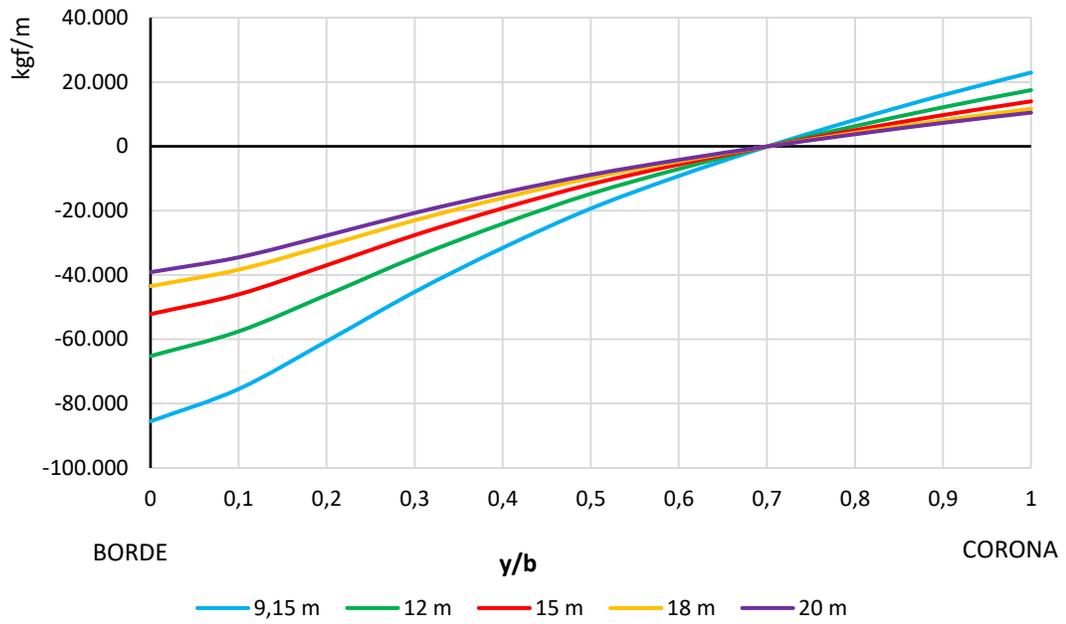


Figura 136. Comparación de las fuerzas paralelas  $N_\theta$  obtenidas de una cúpula elíptica.

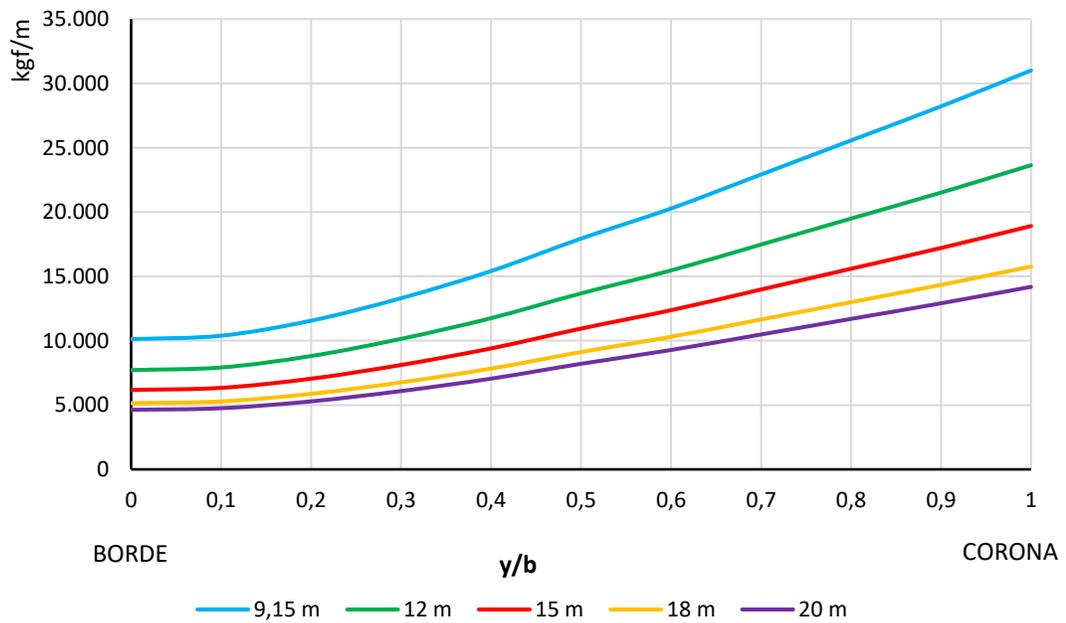


Figura 137. Comparación de las fuerzas meridionales  $N_\phi$  obtenidas de una cúpula elíptica.

La cúpula elíptica para las dimensiones dadas trabaja en su gran mayoría a compresión, se generan fuerzas paralelas a tracción a partir de la relación  $y/b$  igual a 0 hasta 0,7, partir de allí en la concha empieza a trabajar a compresión. Se requiere de acero de refuerzo en la zona en donde la cúpula se encuentra trabajando a tracción debido a las fuerzas paralelas. En cuanto a las fuerzas meridionales, se encuentran en compresión en toda la cúpula. Las menores fuerzas se generan en cúpulas elípticas de mayor altura debido a que su comportamiento se asemeja a un comportamiento funicular. A medida que se reduce la altura de la concha las fuerzas tanto meridionales como paralelas aumentan. En el caso de la cúpula elíptica de altura igual a 9,15 m, la fuerza paralela en el borde es igual a  $-85.515,22 \text{ kgf/m}^2$  y para la cúpula de altura 20 m la fuerza es de  $-39.123,21 \text{ kgf/m}^2$ , reduciéndose un 54 % la fuerza paralela.

## CRITERIOS DE DISEÑO Y ARMADO

### Detallado del acero de refuerzo de una cúpula esférica

En el refuerzo de una cúpula esférica por lo general, el acero de refuerzo meridional se coloca en la parte inferior de la superficie y el acero de refuerzo que va en la dirección circunferencial en la parte superior, ambos con el mismo recubrimiento, Figura 138. En la mayoría de los casos la cúpula se encuentra trabajando a compresión y, en teoría, no será necesario acero de refuerzo, pero se exige la colocación de un acero mínimo. En los casos de las cúpulas que se emplean como cubiertas de tanques, el acero mínimo de refuerzo es de 0,30 %. Al momento de colocar el acero de refuerzo en la dirección meridional, empezará a amontonarse a medida que se vaya acercando a la corona, por lo tanto, se deberán alternar las barras a la mitad de la superficie, en donde unas se cortaran y otras no. Se cortarán las barras en pares a partir de la mitad de la longitud de la superficie de la concha y luego a una

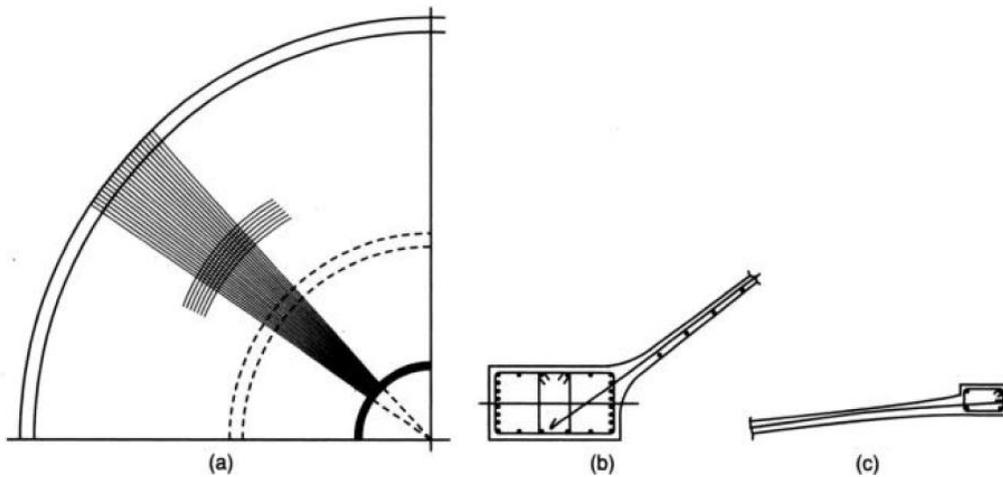
distancia de  $\frac{1}{4}$  desde la corona se repetirá este procedimiento. Será difícil continuar todo el acero hasta la corona a pesar de las reducciones, por lo que se recomienda colocar una malla de refuerzo en la corona de la cúpula. La cúpula deberá tener el suficiente espesor para permitir el espacio y el recubrimiento necesario para dos capas de refuerzo, siendo el espesor mínimo recomendado por la Portland Cement Association de 9 cm ( $3^{1/2}$  pulgadas).

En el caso del anillo de borde, al encontrarse a tracción es necesario la colocación del acero de refuerzo. Generalmente, como la flexión estará presente en la unión debido al miembro de borde, se aumenta la cantidad de acero en la unión y en consecuencia el espesor de la cúpula en el borde. La Figura 138 y 139 muestra el arreglo del acero de refuerzo de una cúpula esférica.

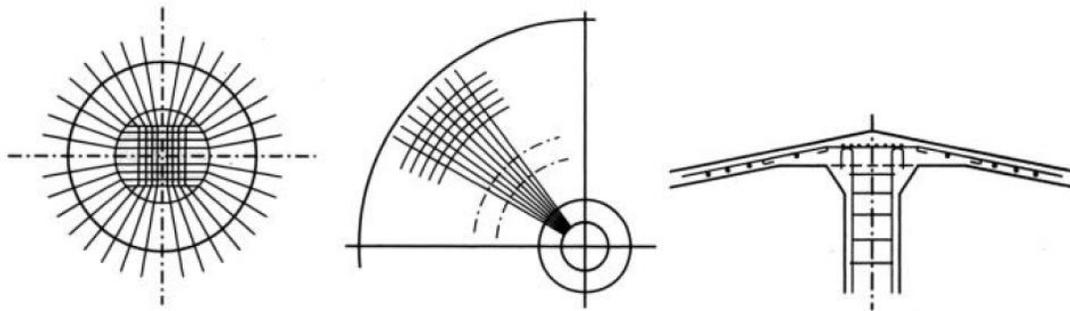
### Diseño de una cúpula esférica

Al diseñar una cúpula esférica sometida solamente bajo carga permanente se tiene que, las cúpulas semicirculares con un ángulo medio central (medido desde la corona y no desde el borde) de  $90^\circ$  no tendrán incompatibilidades con las reacciones de los apoyos, y no se requerirá de un anillo de borde. Ahora bien, para ángulos superiores a  $51,52^\circ$ , la cúpula empezará a experimentar tensiones de tracción en la dirección circunferencial. Por otra parte, las cúpulas esféricas segmentadas con un ángulo medio central menor de  $51,52^\circ$  se encontrarán completamente a compresión, tanto en la dirección meridional como en la dirección circunferencial, pero se requerirá de un anillo de borde para así equilibrar la componente horizontal de la fuerza meridional. De igual manera sucede si la cúpula presenta una abertura en la corona, deberá colocarse un anillo de borde superior para equilibrar la componente horizontal de la fuerza meridional. Desde el punto de vista constructivo, se requiere que la cúpula sea de fácil construcción dependiendo del ángulo medio central, debido

a que la construcción se dificulta con ángulos mayores de  $40^\circ$ , algunos autores, como P.C. Varghese, recomiendan cúpulas con ángulo menores de  $40^\circ$ , con una relación altura-luz comprendida entre  $1/5$  y  $1/8$ . El espesor de las cúpulas puede estar entre los 75 mm y 100 mm. En el caso de cúpula con luces mayores de 60 m se requerirá de un anillo de borde pretensado.



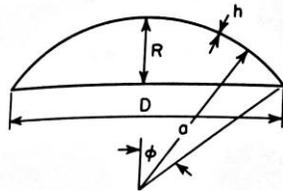
*Figura 138.* Detallado del acero de una cúpula esférica con anillo de borde superior e inferior, (a) vista en planta, (b) anillo de borde inferior, (c) anillo de borde superior. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Privete Limited.



*Figura 139.* Detallado del acero, en donde se aprecia la malla de refuerzo en la corona de la cúpula. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Privete Limited.

Tabla 20  
Dimensiones típicas de una cúpula esférica

Sección	D (ft)	h (in)	$\phi$ (deg)	R (ft)	a (ft)
	100	3	30	13,4	100
			45	20,7	70,7
	125	3	30	16,8	125
			45	25,9	88,4
	150	3,5	30	20,1	150
			(4)	45	31,0
	175	4	30	23,5	175
			(3,5)	45	36,2
	200	4,5	30	26,8	200
			(4)	45	41,4



\*psf de área proyectada. Tomada de Portland Cement Association.

## Paraboloide hiperbólico

Una de las formas empleadas casi exclusivamente como cubiertas que pueden tener las conchas de concreto, son las conchas de traslación. Esta clasificación de conchas contiene probablemente la mayor variedad superficies de conchas. Las conchas de traslación se generan deslizando una curva plana fija en el espacio sobre otra curva plana, por lo general perpendicular a la primera. Dependiendo de las curvas seleccionadas, la superficie de la concha puede tener una curvatura gaussiana positiva, negativa o cero. Las conchas de traslación pueden clasificarse como propias o impropias, las conchas propias son aquellas que están formadas por una superficie doblemente curvada, las cuales a su vez se dividen en sinclásticas (curvatura gaussiana positiva), o anticlásticas (curvatura gaussiana negativa); las conchas impropias son aquellas que están formadas por superficies simplemente curvadas, como en el caso de las conchas cilíndricas.



*Figura 140.* Cubierta con forma de paraboloido elíptico, Mercado avícola, Smithfield, Londres. Archivo de Universal Images Group, 2012. Getty Images.



*Figura 141.* Pabellón de rayos cósmicos, paraboloido hiperbólico, Félix Candela. Fotografía de: Autor desconocido. Obtenida de: <https://www.plataformaarquitectura.cl>

## TIPOS DE PARABOLOIDES HIPERBÓLICOS

En este trabajo especial de grado se analizarán solo las conchas con superficie de paraboloides hiperbólicos de bordes rectos del tipo “*paraguas invertido*”, dichas conchas pertenecen a la clasificación de conchas de traslación propias. Las conchas propias al estar conformadas por una superficie doblemente curvada actúan como membrana, lo cual tiene como consecuencia que no se produzcan momentos de flexión, sino que se originen tensiones de tracción o compresión en un plano paralelo al plano tangencial a la superficie. Al mismo tiempo, presentan una rigidez considerable, ya que una deformación en un sentido se ve contrarrestada de inmediato por otra en el plano perpendicular, resistiendo muy bien las cargas concentradas.

Existen dos tipos de paraboloides hiperbólicos, los de bordes curvos y los de bordes rectos. Los de bordes curvos, la superficie se obtiene deslizando una parábola sobre otra parábola, Figura 142.a. El segundo tipo de paraboloides hiperbólicos se genera desplazando los extremos de un segmento de recta sobre dos curvas separadas, denominándose superficies regladas, Figura 142.b; cuando las curvas son dos rectas alabeadas, la superficie reglada es un paraboloides hiperbólico.

El paraboloides hiperbólico de bordes rectos reúne una serie de características, que lo hacen ventajoso desde el punto de vista estructural, constructivo y estético, en comparación con otras superficies geométricas.

- 1) Al tener una doble curvatura, consecuentemente presenta la rigidez necesaria en una concha.
- 2) Matemáticamente calculables, permitiendo aplicar métodos simplificados de análisis con resultados satisfactorios.

- 3) Es una superficie reglada, lo cual facilita el encofrado, reduciendo considerablemente los costos de construcción.
- 4) Se pueden combinar de distintas maneras, originando nuevas formas.

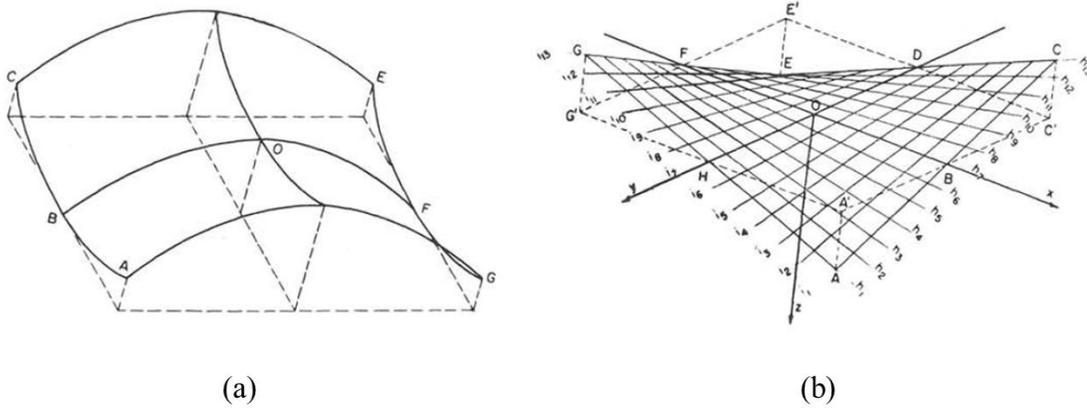


Figura 142. Tipos de paraboloides hiperbolicos, (a) de bordes curvos, (b) de bordes rectos. Tomada de “Informes de la construcción, Vol. 13, n° 130 - Cálculo elemental de láminas en paraboloides hiperbolicos” por A. L. Parme, 1961, Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

## TEORÍA GENERAL DE MEMBRANA

Para una concha de traslación, las ecuaciones generales de equilibrio de la teoría de membrana se reducen a:

$$\frac{\partial N'_x}{\partial \alpha_x} r_y + \frac{\partial N'_{yx}}{\partial \alpha_y} r_x + p_x r_x r_y = 0$$

$$\frac{\partial N'_y}{\partial \alpha_y} r_x + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial \alpha_x} r_y + p_y r_x r_y = 0$$

$$\frac{N'_x}{r_x} + \frac{N'_y}{r_y} + p_z = 0$$

Donde,  $a_x = r_x$ ;  $a_y = r_y$ ;  $r_{xy} = \infty$

$$\frac{\partial r_y}{\partial \alpha_x} = \frac{\partial r_x}{\partial \alpha_y} = 0$$

Estas ecuaciones no son fáciles de resolver y se ha encontrado conveniente proyectar las resultantes de las tensiones en el plano horizontal (Flügge, 1960). De la Figura 143, se tiene que la relación entre la proyección de los lados  $dx$  y  $dy$  y los lados curvos  $dp$  y  $dq$  está dada por:

$$dx = dp \cos \phi$$

$$dy = dq \cos \theta$$

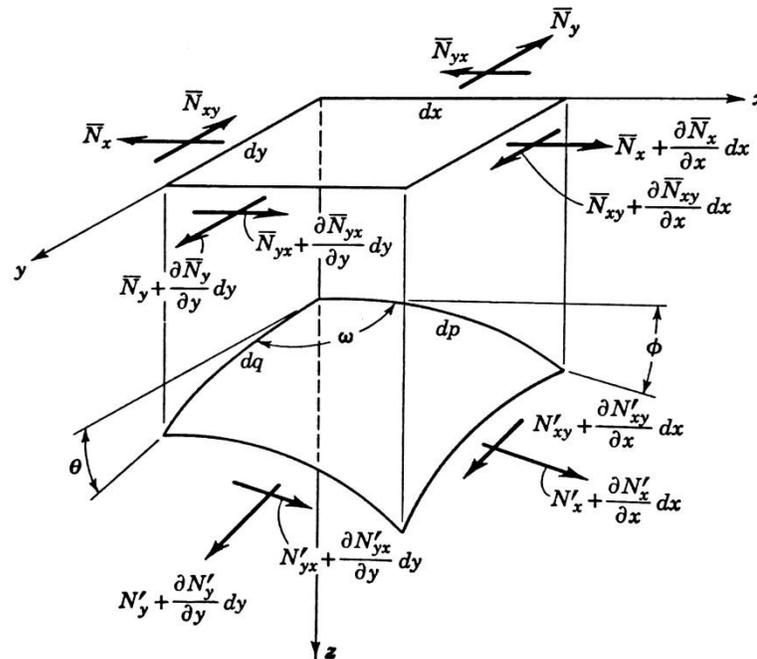


Figura 143. Elemento diferencial de una concha de doble curvatura y su proyección en el plano horizontal  $xy$ . Tomada de "Thin Shell Concrete Structures" por D. Billington, 1965, McGraw-Hill, Inc.

Finalmente se tiene que las relaciones de las fuerzas actuantes en el elemento diferencial son:

$$\overline{N}_x = N'_x \left( \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \right)$$

$$\overline{N}_y = N'_y \left( \frac{\cos \theta}{\cos \phi} \right)$$

$$\overline{N}_{xy} = N'_{xy}$$

## PARABOLOIDE HIPERBÓLICO DE BORDES RECTOS

### Superficie de un paraboloides hiperbólico de bordes rectos

Para definir la superficie de un paraboloides hiperbólico de bordes rectos, se considera como se forma físicamente una superficie reglada, Figura 144. Si se hace bajar el punto contrario al origen una profundidad  $h$ , ubicado a una distancia  $a$  y  $b$ , entonces, la superficie queda definida por la ecuación:

$$z = \left( \frac{h}{a} x \right) \left( \frac{1}{b} y \right) = \left( \frac{h}{ab} \right) xy = kxy$$

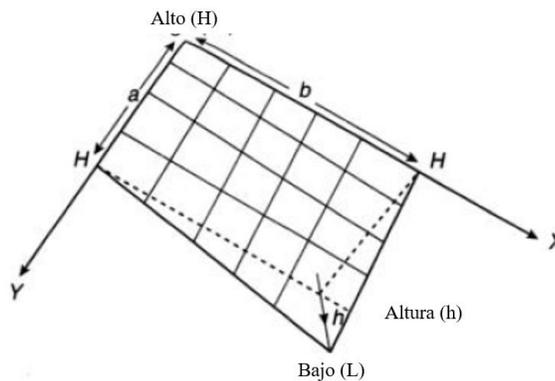


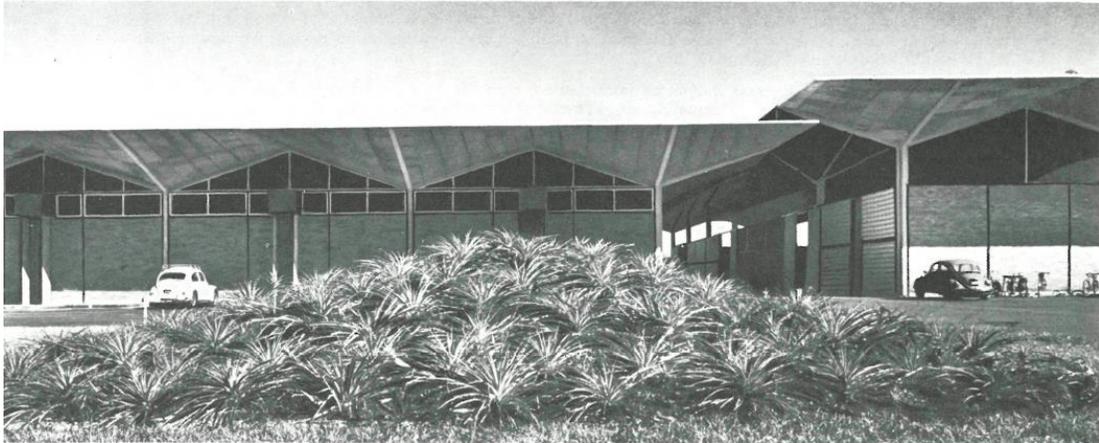
Figura 144. Superficie de un paraboloides hiperbólico de bordes rectos. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Privete Limited.

## Tipos de cubiertas formadas por paraboloides hiperbólicos de bordes rectos

Pueden desarrollarse una gran variedad de formas a ser empleadas como cubiertas, ya sea utilizando la superficie total alabeada o combinando partes de ella de diversas formas. Se pueden formar diferentes tipos de cubiertas con paraboloides hiperbólicos de borde rectos. Todas las cubiertas que se muestran en la figura 148, están formadas por cuatro paraboloides hiperbólicos y cada uno se une al otro en sus bordes.



*Figura 145.* Paraboloide hiperbólico en Denver. Fotografía de: Autor desconocido.



*Figura 146.* Paraboloide hiperbólico del tipo paraguas invertido. Fotografía de: Autor desconocido.

### Comportamiento estructural

El paraboloides hiperbólico al estar conformado por dos curvas perpendiculares entre sí, una convexa y otra cóncava, presenta un comportamiento de arco en la dirección de la curvatura convexa, curva a compresión, y un comportamiento funicular en la dirección cóncava, curva a tracción, Figura 147. Dependiendo de cuál comportamiento exista, se puede encontrar a tracción o compresión. Por lo tanto, en una dirección estará a compresión y en la otra a tracción; cada una actuando en una dirección a  $45^\circ$  respecto a los bordes rectos. Debido a que las curvas se cortan una con otra perpendicularmente, la carga es compartida a la mitad. Siendo las fuerzas de membrana más o menos iguales en toda la superficie de la concha.

En los bordes del paraboloides llegan las tracciones en una dirección, así como también las compresiones que actúan perpendicularmente, Figura 149. Si se descomponen las fuerzas de tracción y compresión que llegan a un punto cualquiera del borde de la concha, se tienen dos componentes, una en dirección tangencial al

borde y la otra en dirección perpendicular a este, se observa en la Figura 149.b que las componentes perpendiculares al borde se anulan, mientras que las componentes tangenciales se suman.

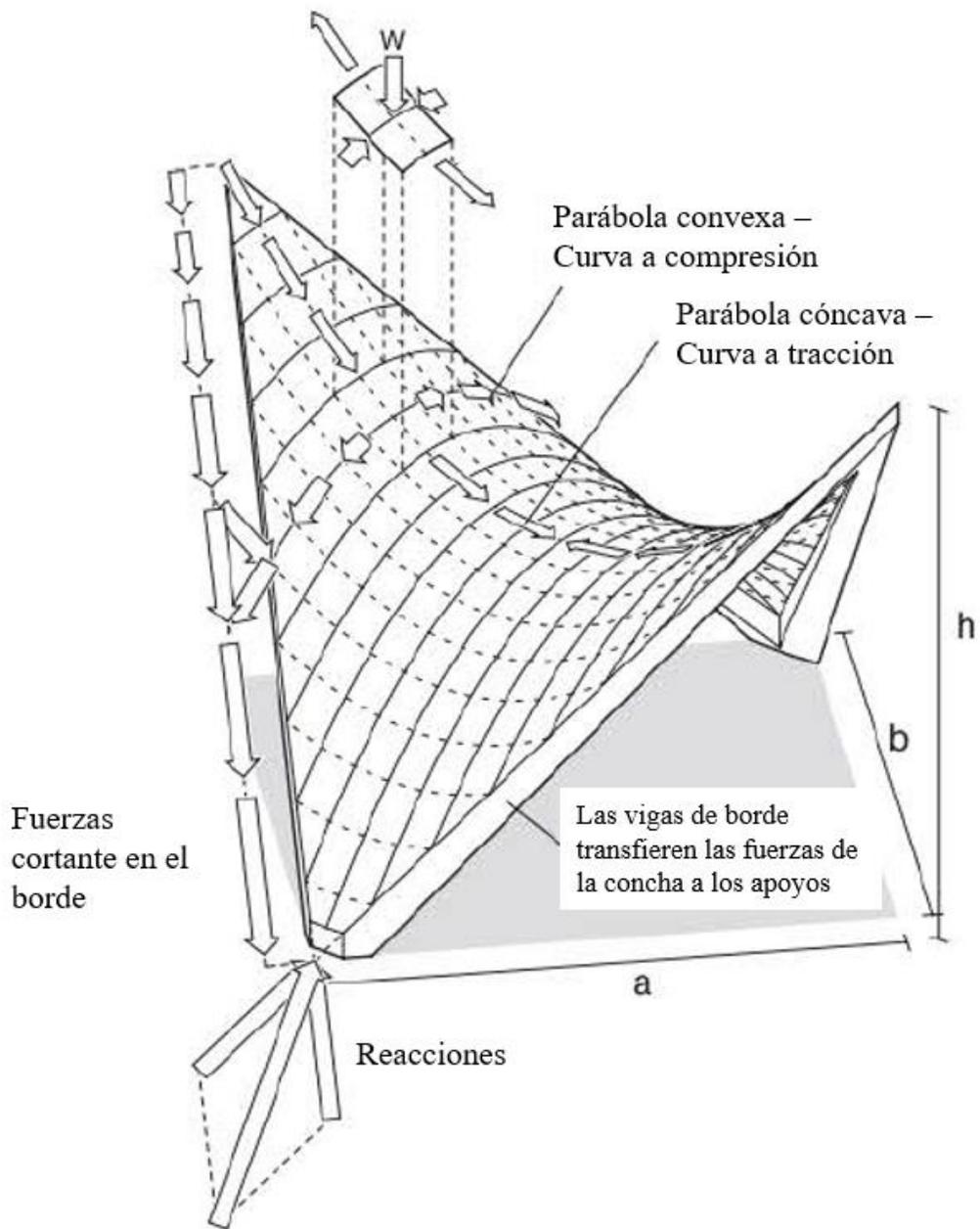


Figura 147. Comportamiento estructural de un paraboloides hiperbólico. Tomada de “Structures, 7th edition” por D. Schodek & M. Bechthold, 2013, Pearson Education, Inc.

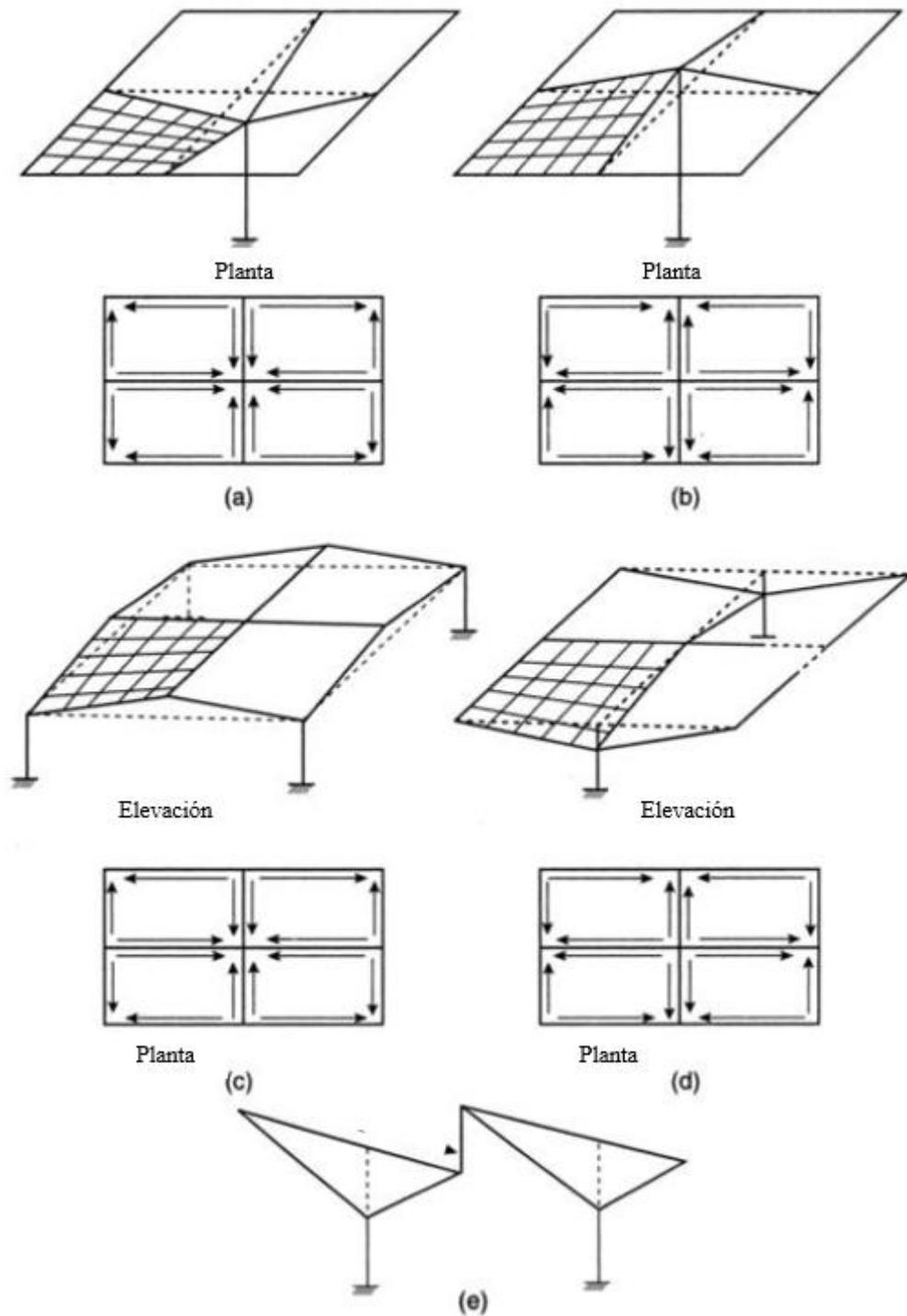


Figura 148. Diversas combinaciones con paraboloides hiperbólicos de bordes rectos. Tomada de "Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates" por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Privete Limited.

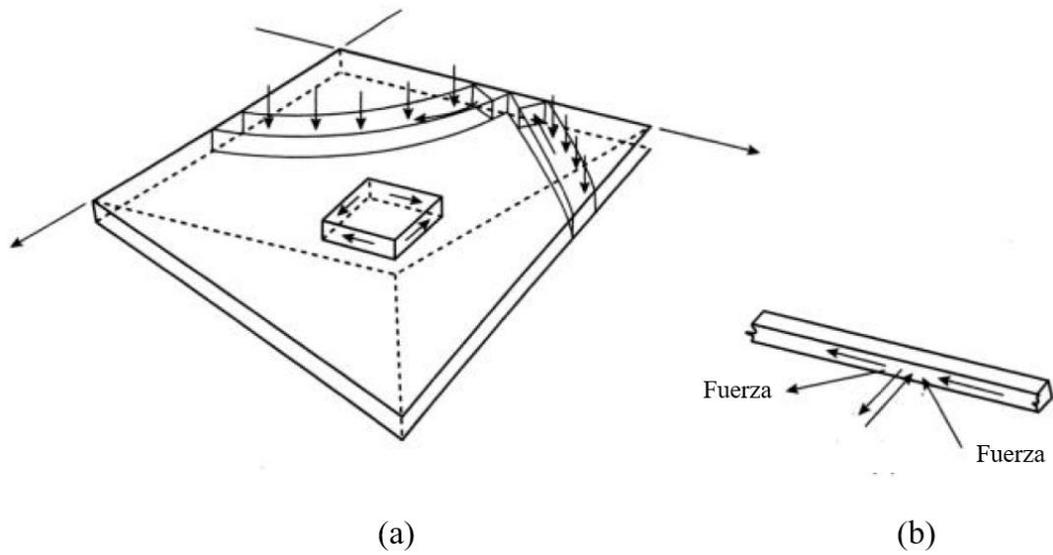


Figura 149. Fuerzas que actúan en un paraboloido hiperbólico de bordes rectos; (a) fuerzas en la concha, y (b) fuerzas sobre un miembro de borde. Tomada de “Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates” por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Private Limited.

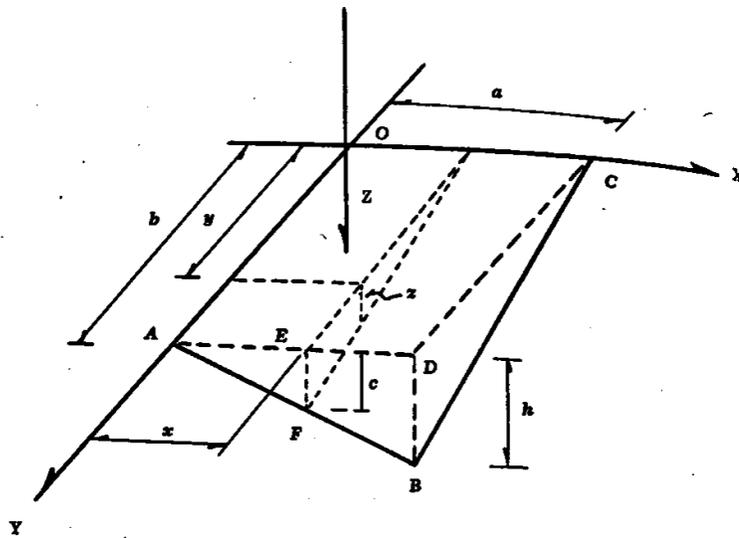


Figura 150. Sección de un paraboloido hiperbólico de bordes rectos. Tomada de “Análisis, Cálculo y Diseño de las Bóvedas de Cáscara” por A. Olvera, año, C.E.C.S.A.

De la Figura 150 se deducen las siguientes ecuaciones para los siguientes casos de carga:

### 1. Carga uniforme en el plano horizontal

$$N_{xy} = \frac{q_o}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + c^2} \quad (270)$$

$$\bar{N}_x = -\frac{q_o y}{2} \log \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}{\sqrt{y^2 + c^2}} \right) \quad (271)$$

$$\bar{N}_y = -\frac{q_o x}{2} \log \left( \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2 + c^2}}{\sqrt{x^2 + c^2}} \right) \quad (272)$$

$$c = \frac{a * b}{h} \quad (273)$$

### 2. Peso propio

$$N_{xy} = \frac{qc}{2} \quad (274)$$

$$N_x = N_y = 0 \quad (275)$$

En donde

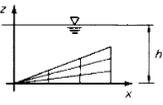
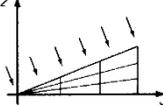
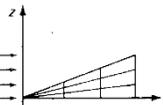
$$\text{Compresión} = C = -\frac{qc}{2} \quad (276)$$

$$\text{Tracción} = T = \frac{qc}{2} \quad (277)$$

### 3. Otros casos de carga

En la Tabla 21 se presentan otros casos de carga que pueden actuar sobre el paraboloides hiperbólico:

Tabla 21  
Teoría de membrana para diferentes tipos de carga

Sistema	Carga	$\bar{N}_x$	$\bar{N}_y$	$N_{xy}$
	$P_n = \gamma \left( h - \frac{xy}{c} \right)$	$\frac{\gamma}{2c^2} \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} (5y^2 + c^2) - 4chxy \right]$	$\frac{\gamma}{2c^2} \left[ \frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} (5x^2 + c^2) - 4chxy \right]$	$\frac{\gamma}{2c} \left( h - \frac{xy}{c} \right) (x^2 + y^2 + c^2)$
	$P_n = p$	$-p \frac{2xy}{c}$	$-p \frac{2xy}{c}$	$p \frac{x^2 + y^2 + c^2}{2c}$
	$P_n = P_w \frac{x^2}{x^2 + y^2 + c^2}$	$-P_w \frac{y}{c} \left[ x + \frac{y^2}{y^2 + c^2} \tan^{-1} \left( \frac{x}{\sqrt{y^2 + c^2}} \right) \right]$	$-P_w \frac{x}{y} \left[ y - \sqrt{x^2 + c^2} \tan^{-1} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + c^2}} \right) \right]$	$P_w \frac{y^2}{2c}$

Nota. Tomada de "Handbook of concrete engineering" editado por M. Fintel, 1985, Van Nostrand Reinhold Company.

## ANÁLISIS DE UN PARABOLOIDE HIPERBÓLICO RECTANGULAR DE BORDES RECTOS

Para comparar la solución de un paraboloides hiperbólico por medio de la teoría de membrana y mediante un análisis de elementos finitos, se analizó una cubierta del tipo paraguas invertido, el cual está compuesto de cuatro paraboloides hiperbólicos de bordes rectos. En la figura 151 se muestra una cubierta de este tipo, la cual cubre un área rectangular de 24 x 24 m.

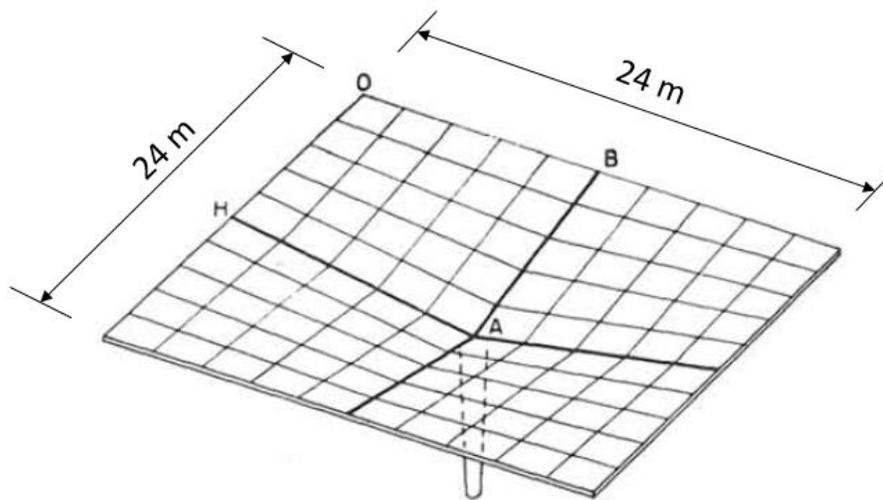


Figura 151. Cubierta tipo paraguas invertido, compuesto por cuatro paraboloides hiperbólicos. Tomada de “Informes de la construcción, Vol. 13, n° 130 - Cálculo elemental de láminas en paraboloides hiperbólicos” por A. L. Parme, 1961, Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Si la relación altura-luz de los paraboloides hiperbólicos que conforman la concha es igual o menor a  $1/5$  del lado más largo de la concha, comenzará a ocurrir un efecto secundario denominado “*efecto de rebajamiento*”. La concha está compuesta por cuatro paraboloides hiperbólicos de bordes rectos de 12 m x 12 m; espesor igual a 7,50 cm. El peso específico del concreto se consideró igual a  $2.400 \text{ kgf/m}^3$ , solo actúa el peso propio sobre la concha. Para esta misma concha se analizaron distintas relaciones altura-luz, siendo estas 0,05; 0,10; 0,20; 0,30 y 0,50, y así observar cómo se desarrollan las tensiones de tracción y compresión en cada caso.

En la Tabla 22 y en las Figuras 137 y 138, se presentan y comparan las tensiones máximas de tracción y compresión que actúan sobre un paraboloides hiperbólico de los cuatro que conforman la concha, obtenidas por medio de la teoría de membrana y por un análisis de elementos finitos.

Para el diseño del paraboloides hiperbólico de bordes rectos se analizó mediante la teoría de membrana y con un análisis de elementos finitos. Para el análisis por medio de elementos finitos se empleó el programa SAP2000 (CSI, 2018), el paraboloides hiperbólico se modeló utilizando elementos cuadriláteros tipo concha de cuatro nodos, de dimensiones 30 cm x 30 cm, con la teoría de placa delgada de Kirchhoff, en donde se desprecian los efectos de corte fuera del plano del elemento concha. En la Figura 152 se muestra el modelo de la concha por medio de elementos finitos.

Tabla 22

*Comparación de las tensiones obtenidas por medio de la teoría de membrana y por un análisis de elementos finitos en un paraboloides hiperbólico de bordes rectos*

	Relación altura-luz				
Método de diseño	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50
<i>Tracción <math>kgf/cm^2</math></i>					
Teoría de membrana	28,80	14,40	7,20	4,80	2,88
FEA	14,08	10,79	6,33	4,56	3,39
<i>Compresión <math>kgf/cm^2</math></i>					
Teoría de membrana	-28,80	-14,40	-7,20	-4,80	-2,88
FEA	-16,53	-10,08	-6,74	-5,95	-4,69

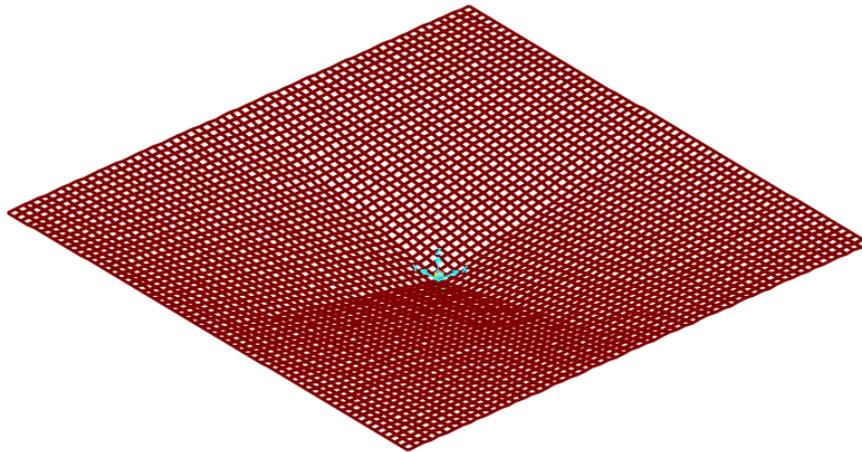


Figura 152. Modelo por medio de elementos finitos de la cubierta del tipo “paraguas invertido” conformada por cuatro paraboloides hiperbólicos sin elementos de borde.

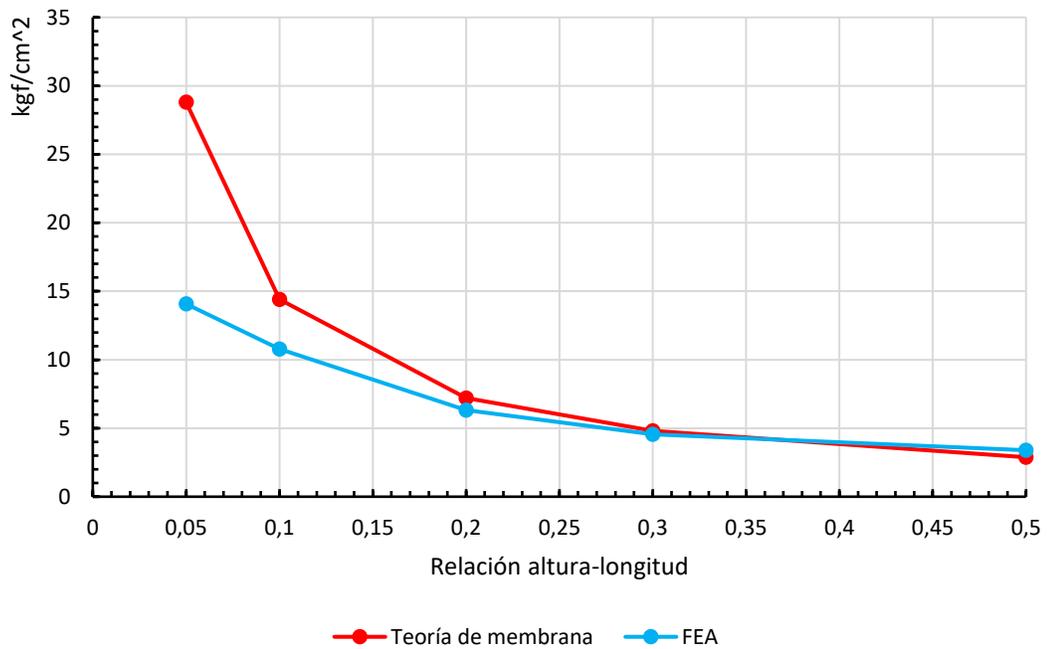


Figura 153. Comparación de las tensiones máximas de tracción obtenidas por medio de la teoría de membrana y por un análisis de elementos finitos.

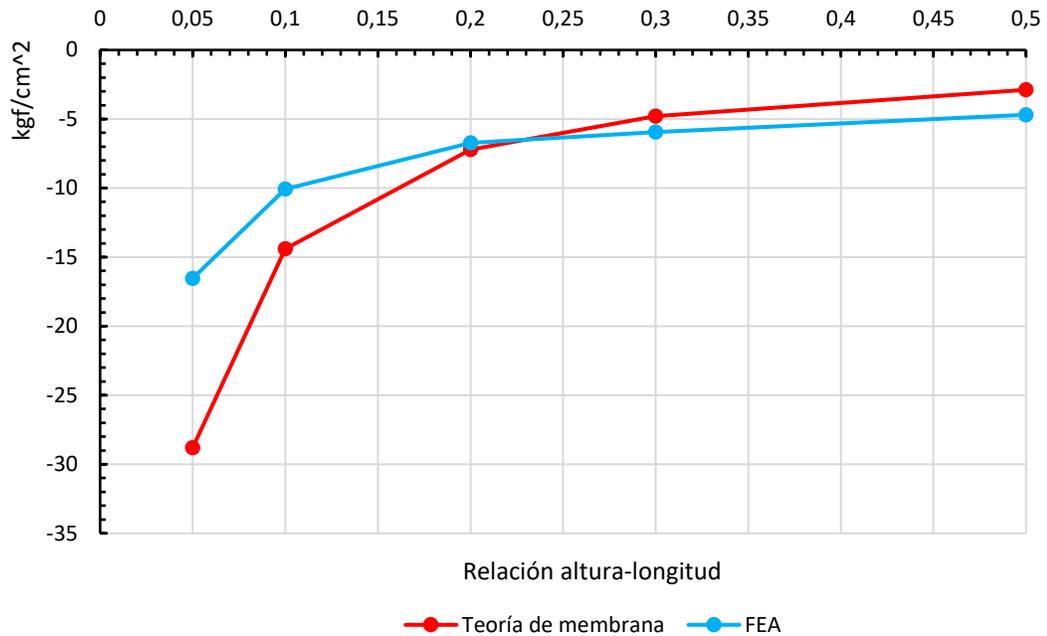


Figura 154. Comparación de las tensiones máximas de compresión obtenidas por medio de la teoría de membrana y por un análisis de elementos finitos.

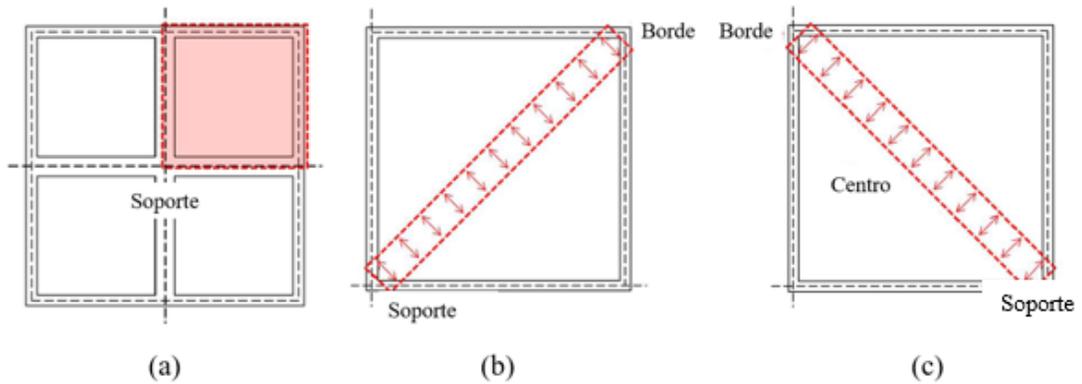


Figura 155. Ubicación y dirección de las tensiones presentadas, (a) plano horizontal de la concha; (b) dirección de las tensiones en la concha bajo la acción de arco cóncavo, curva a tracción; y (c) dirección de las tensiones en la concha bajo la acción de arco convexo, curva a compresión.

Las tensiones de tracción y compresión se obtuvieron a lo largo de las direcciones que se muestran en la Figura 155, debido a que las tensiones a lo largo de la dirección cóncava se encuentran a tracción y las que se encuentran en la dirección

de la curva convexa están en compresión. En las Figuras 153 y 154 en donde se graficaron los valores de las tensiones máximas respecto a la relación altura-luz, se observa que las magnitudes de las tensiones obtenidas por medio de la teoría de membrana son muy similares a las obtenidas por medio del análisis de elementos finitos cuando la relación altura-luz es alta, para  $h/a$  o  $h/b$  mayor a  $1/5$  (0,20), los resultados obtenidos por la teoría de membrana son bastante aceptables. En cambio, cuando la relación altura-luz empieza a ser menor de  $1/5$ , las tensiones obtenidas por la teoría de membrana son mucho mayores. En la teoría de membrana, la magnitud de las tensiones principales de tracción y compresión son idénticas y están dados por las ecuaciones 278 y 279, de las cuales se puede observar que, las magnitudes de las tensiones son inversamente proporcional a la relación altura-luz.

## CRITERIOS DE DISEÑO Y ARMADO

### DETALLADO DEL ACERO DE UN PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

El armado de un paraboloides hiperbólico de bordes rectos es sencillo en comparación a los otros dos tipos de conchas estudiadas. Se debe colocar el acero de refuerzo en las dos direcciones del paraboloides, Figura 156.a. Puede emplearse acero de refuerzo convencional (barras) o malla de refuerzo. En el caso de las vigas de borde y las columnas, el detallado debe prestársele mucha atención, en vista de que existen casos en los que una concha no trabaja adecuadamente por un mal armado del acero de refuerzo en las vigas de borde o columnas de apoyo. En el caso de las conchas de pequeñas dimensiones, en vez de colocar vigas de bordes se puede aumentar el espesor de la concha en sus bordes, Figura 156.b.

En cuanto a la disposición del acero, puede ser colocado según las generatrices, paralela a los bordes u orientada según la dirección de las parábolas principales. Comparando ambos casos tenemos que, si se coloca el acero paralelo a los bordes de la concha, la colocación del acero será mucho más sencilla, aunque requerirá más acero. En cambio, si se coloca el acero en dirección de las parábolas principales se requerirá de menos acero, pero de una mano de obra más calificada, puesto que su ejecución se dificulta en superficies que presentan un alabeo pronunciado.

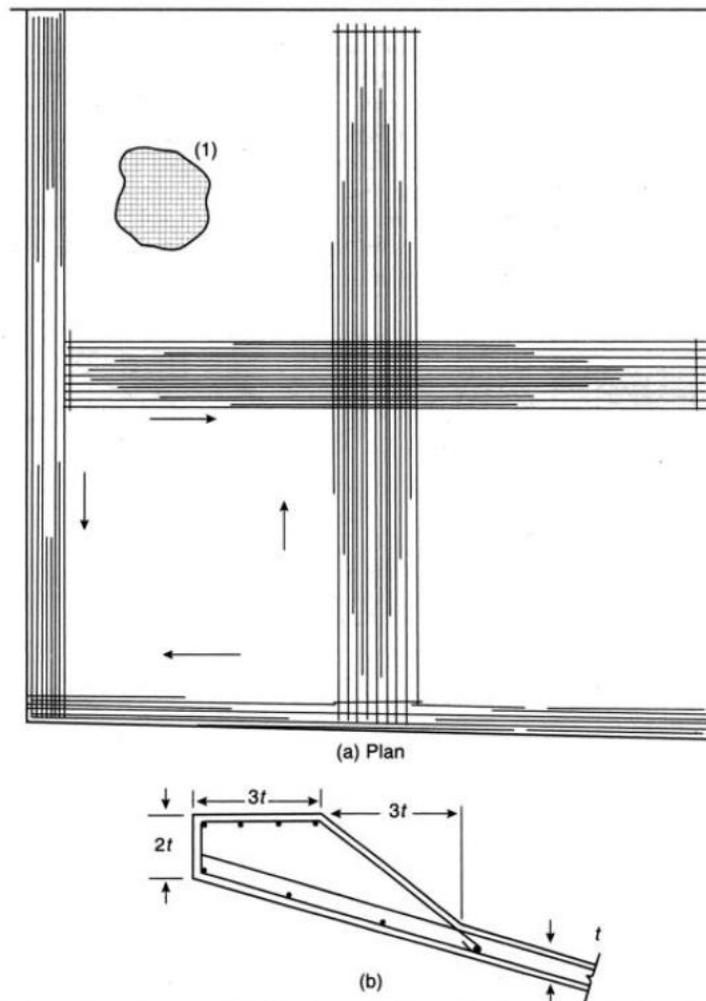


Figura 156. Detallado del acero de refuerzo de un paraguas invertido, (a) vista en planta, (b) dimensiones recomendadas para el aumento de la concha en los bordes. Tomada de "Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates" por P. C. Varghese, 2010, PHI Learning Private Limited.

## EFFECTOS SECUNDARIOS EN PARABOLOIDES HIPERBOLICOS<sup>17</sup>

Al momento de diseñar un paraboloides hiperbólico de bordes rectos mediante la teoría de membrana, se debe prestar atención a ciertas condiciones las cuales si no son tomadas en cuenta generaran un error apreciable de las tensiones obtenidas. Estas condiciones, denominadas efectos secundarios, producen que el comportamiento de la concha no sea por acción de membrana. Los efectos secundarios que se presentan en un paraboloides hiperbólico de bordes rectos del tipo “*paraguas invertido*” son: (a) efecto de carga asimétrica, (b) efecto de rebajamiento y (c) efecto de peso propio y excentricidad en los bordes.

### Efecto de carga asimétrica

Si se carga de manera asimétrica un paraboloides hiperbólico, Figura 157, tendrá como consecuencia sobre la concha la formación de un momento de flexión en la columna y un momento de flexión y torsión en las vigas adyacentes a la columna. El momento de flexión en la columna es generado por el levantamiento de los paraboloides que no se encuentran cargados, generando además un desequilibrio de las fuerzas internas.

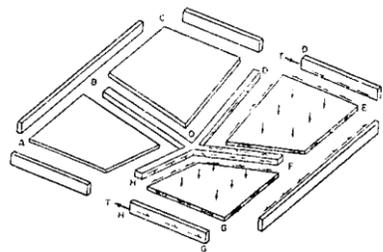


Figura 157. Paraboloides hiperbólico cargado asimétricamente. Tomada de “Informes de la construcción, Vol. 13, N° 130 - Cálculo elemental de láminas en paraboloides hiperbólico” por A. L. Parme, 1961, Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

<sup>17</sup> Para un análisis más detallado de los efectos secundarios en los paraboloides hiperbólicos de bordes rectos consultar la referencia [19] y [20]

## **Efecto de rebajamiento**

La teoría de membrana solo toma en consideración las fuerzas normales y tangenciales, debido al mecanismo que presentan los paraboloides hiperbólicos para resistir las cargas por medio de dos conjuntos de arcos parabólicos perpendiculares entre sí, el cual no toma en cuenta la presencia de momentos de flexión. Se puede considerar que los paraboloides hiperbólicos se comportan como una membrana hasta una relación altura-luz igual a:

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{5} \quad \text{o} \quad \frac{h}{b} = \frac{1}{5}$$

Siendo  $h$  la altura, y  $a$  y  $b$  los lados del paraboloides (se escogerá el mayor lado). En el caso de un rebajamiento normal, mayor o igual a  $1/5$ , la concha actúa como membrana, limitando su análisis a las tensiones de corte. Sin embargo, a medida que la relación altura-luz disminuye, la curvatura de la concha empieza a hacerse menor y aparecen momentos de flexión debido a la gran influencia que la deformación axial comienza a ejercer en la concha.

## **Efecto de peso propio y excentricidad en los bordes**

En el caso de que se coloquen vigas de borde, se debe tener en consideración el tamaño y peso de ellas, ya que al ser muy grandes y por lo tanto pesadas sufrirán flechas en toda su longitud. Además, hay que tener en consideración la ubicación del centro de gravedad de las vigas de borde con respecto al centro de gravedad de la concha. En este último caso se pueden presentar tres escenarios:

a. **Coinciden los centros de gravedad.** Para este caso no existirá ninguna excentricidad y el momento será nulo.

b. **Centro de gravedad de la concha por encima del centro de gravedad de la viga de borde.** Se originará un momento flector en el borde de la concha debido a la excentricidad, siendo perjudicial para la concha ya que favorece a la flecha causada por el peso propio. Hay que tener en cuenta este efecto al momento de analizar la concha.

c. **Centro de gravedad de la concha por debajo del centro de gravedad de la viga de borde.** Esta situación es beneficiosa considerando que el momento que se origina contrarrestar a la flecha causada por el peso propio de la concha.

# CONCLUSIONES

Para entender el comportamiento estructural de las conchas delgadas se presentó al comienzo de este trabajo especial de grado la teoría general de las conchas. Dependiendo de la forma geométrica que presente la superficie de la concha se plantean hipótesis para facilitar los cálculos. Las cargas que actúan sobre las conchas son tomadas solamente por fuerzas en el plano de la superficie, acción de membrana, sin embargo, en algunos casos, como en las conchas cilíndricas y las cúpulas esféricas, los efectos de flexión son considerados para el equilibrio de fuerzas en los bordes de la concha.

Debido a los avances computacionales el análisis de las conchas se ha facilitado. Las soluciones analíticas, a pesar de ser tediosas en el pasado, pueden ser ahora programadas, evitando así tener que asumir ciertas hipótesis que facilitan el cálculo pero que dejan de representar de manera correcta a la concha. Además de las soluciones analíticas, existen también las soluciones numéricas, como los elementos finitos, en donde las conchas pueden ser modeladas, analizadas y sus resultados son presentados de manera gráfica, siendo una gran ventaja al poder visualizar cuales son los niveles de magnitud que presentan las fuerzas y que zonas de la concha.

En las conchas cilíndricas ha sido presentada su solución considerando los efectos de flexión, y se observó cómo afectan los efectos de flexión en el borde de la concha, lo cual no lo representa la teoría de membrana. La teoría de membrana al igual que otros métodos prácticos de diseño presentó desviaciones considerables con los resultados obtenidos por medio de la solución analítica o por medio del análisis de elementos finitos. Estos métodos prácticos representan el comportamiento de la

concha de forma adecuada en la zona cercana a la corona en donde la concha en donde los efectos de flexión no son tan considerables como en los bordes. En algunos casos, como el método del Manual No. 31 presentado por la ASCE los resultados obtenidos son satisfactorios para el diseño de las conchas cilíndricas. Los demás métodos prácticos, se pueden emplear como un primer análisis para establecer las dimensiones de las conchas y obtener una aproximación de los resultados a esperar. En el caso de las cúpulas y los paraboloides hiperbólicos de bordes rectos, se pueden diseñar por medio de la teoría de membrana, representando el comportamiento de la concha. Sin embargo, se recomienda emplear solamente las soluciones analíticas o el análisis de elementos finitos para el diseño de las conchas, en este último es necesario conocer el comportamiento estructural de las conchas de concreto reforzado para poder realizar un análisis de elementos finitos, de lo contrario la interpretación de los resultados puede llegar a ser errónea.

El uso de los elementos de borde, como vigas y anillos, es necesario en algunos tipos de conchas. En el caso de las cúpulas se requiere de la colocación de un anillo de borde debido a los empujes horizontales que generan las fuerzas meridionales. En las conchas cilíndricas, las vigas de borde reducen las fuerzas longitudinales a tracción y por ende la cantidad de acero que se requiere en los bordes longitudinales.

Uno de los aspectos que más afecta en el desarrollo de las tensiones en la concha, son las dimensiones y la manera en que se aplican las cargas sobre ellas. Es necesario tener presente como puede ir variando el comportamiento de la concha si una dimensión se disminuye o aumenta, o si estas pueden generar efectos secundarios en la concha, como en el caso de los paraboloides hiperbólicos. Por lo tanto, el método de diseño que se vaya a emplear está sujeto a las dimensiones que presente la concha, así como en el caso de las conchas cilíndricas o en los paraboloides hiperbólicos, estos últimos deben prestársele principal atención debido a los efectos secundarios.

## RECOMENDACIONES

Existe un gran número superficies geométricas y temas que quedaron fuera del alcance de este trabajo de grado, debido que sería muy complejo realizar un solo trabajo para todas las superficies existentes, pero se sugiere que se consideren en trabajos posteriores, uno a uno, cada uno de los siguientes aspectos:

- **Distintas geometrías de la superficie de las conchas.** Además de los tres tipos de conchas presentadas en este trabajo especial de grado, conchas cilíndricas circulares, cúpulas esféricas y paraboloides hiperbólicos de bordes rectos del tipo “*paraguas invertido*”, existen un gran número de superficies a considerar, como los paraboloides hiperbólicos de bordes elípticos; conchas cilíndricas de directriz elíptica, catenaria, parabólica; superficies combinadas; hiperboloides de una hoja.

- **Pretensado de los elementos de borde:** Los elementos de borde reducen las fuerzas longitudinales, en el caso de las conchas cilíndricas; o evitan el empuje lateral de los apoyos, en el caso de las cúpulas. Pero al pretensar estos elementos se logran reducciones considerables de las dimensiones. Puede realizarse un estudio comparando el comportamiento de una concha con elementos de borde sin pretensar y pretensados.

- **Carga de viento sobre las conchas.** Las cargas de viento son una de las cargas más comunes al momento de diseñar las conchas de concreto empleadas como cubiertas. Como afecta la carga de viento sobre las conchas es un tema que

pueden desconocer muchos ingenieros. Se puede realizar un estudio sobre el efecto que causan las cargas de viento sobre las conchas empleadas como cubiertas.

- **Análisis de estabilidad de las conchas.** Las conchas al ser estructuras delgadas están expuestas a fuerzas de compresión en el plano de su superficie existe una alta probabilidad de que fallen por pandeo.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BILLINGTON, D. (1982). *Thin Shell Concrete Structures. 2nd Ed.* McGraw-Hill, Inc., New York.
- [2] FARSHAD, M. (1992). *Design and Analysis of Shell Structures.* Springer Science + Business Media Dordrecht, Berlin.
- [3] VARGHESE, P. C. (2010). *Design of Reinforced Concrete Shells and Folded Plates.* PHI Learning Private Limited, New Delhi.
- [4] TIMOSHENKO, S. & WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1970). *Teoría de Placas y Láminas.* Ediciones Urmo, Bilbao.
- [5] TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J. N. (1975). *Teoría de la Elasticidad, 2da. Edición.* Ediciones Urmo, Bilbao.
- [6] FLÜGGE, W. (1960). *Stresses in Shells.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, Berlin.
- [7] SCHNOBRICH, W. C. (1984). *Handbook of Concrete Engineering - Chapter 14.* Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York.
- [8] UGURAL, A. (2011). *Stresses in beams, plates, and shells.* CRC Press by Taylor & Francis Group, Boca Raton.
- [9] RADWANSKA, M.; STANKIEWICZ, A.; WOSATKO, A. & PAMIN, J. (2017). *Plate and Shell Structures.* John Wiley & Sons Ltd., West Sussex.
- [10] SALVADORI, M. & HELLER, R. (1986). *Structure in Architecture.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [11] WINTER, G. & NILSON, A. H. (1977). *Proyecto de Estructuras de Hormigón.* Editorial Reverté, S.A., Barcelona.

- [12] FRANZ, G. (1971). *Tratado del Hormigón Armado, Tomo II, Estructuras*. Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona.
- [13] GIBSON, J. (1962). *Diseño de Cascarones Cilíndricos*. Compañía Editorial Continental, S.A., México D.F.
- [14] OLVERA, A. (Año). *Análisis, Cálculo y Diseño de las Bóvedas de Cáscara*. C.E.C.S.A., México D.F.
- [15] SCHODEK, D. & BECHTHOLD, M. (2013). *Structures, 7th edition*. Pearson Education, Inc., Upper Saddle River.
- [16] JOEDICKE, J. (Año). *Estructuras en Voladizos y Cubiertas*. Editorial Hermes, S.A., México D.F.
- [17] BORNHORST, D. & NEUBERGER, P. (1966). *Informes de la Construcción, Vol. 18. N° 177, Nave de Montaje Volkswagen*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Barcelona.
- [18] BLAAUWENDRAAD, J. & HOEFAKKER, J. H. (2014). *Structural Shell Analysis*. Springer Science + Business Media Dordrecht, Berlin.
- [19] PORTLAND CEMENT ASSOCIATION. *Design of Circular Domes*, Concrete Information.
- [20] BAUTE G., M., KEMENYFY M., S. & SABAL C., E. (1966). *Efectos secundarios en los paraboloides hiperbólicos* (Tesis de pregrado). Universidad Católica Andrés Bello. Caracas, Venezuela.
- [21] PARME, A. (1961) *Cálculo elemental de láminas en paraboloides hiperbólico*. Informes de la construcción, Vol. 13, N° 130, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, España.