UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
VICERRECTORADO ACADÉMICO
DIRECCIÓN GENERAL DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
ÁREA DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
Especialización en Educación: Procesos de Aprendizaje

Trabajo Especial de Grado

PROGRAMA INSTRUCCIONAL BASADO EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y SU EFECTO EN EL APRENDIZAJE DE LAS PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES

Presentado por:
Gemma Utrera
Para optar al título de
Especialista en Educación

Asesor
María Isabel López

Caracas, 8 de abril de 2013

Agradecimiento

A Dios por sobre todas las cosas… sin su fuerza nada es posible.

A Pedro mi compañero de vida…por estar siempre presente.

A mis hijos por mostrar todo su amor cada día.

A mis viejitos fuente de energía inagotable.

A Elizabeth Arapé por su estimulo constante.

A María de los Ángeles Taberna por ser el apoyo incondicional.

A Pedro Muñoz el hermano que me brindó la vida y que me acompaña en todas estas locuras.

A las profesoras Patricia Peña y Lisset Poggioli por el apoyo brindado durante todo el camino.

A Gustavo Peña por dejar la puerta abierta para que yo pudiera entrar...

A Juan Carlos Correa por enseñarme a ver de forma diferente.

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

DIRECCIÓN GENERAL DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
ÁREA DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
PROGRAMA DE ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN
MENCIÓN: PROCESOS DE APRENDIZAJE

PROGRAMA INSTRUCCIONAL BASADO EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y SU EFECTO EN EL APRENDIZAJE DE LAS PROPIEDADES GLOBALES DE LAS FUNCIONES.

Autor: Gemma Utrera
Tutora: María Isabel López.
Fecha: Abril 2013

Resumen

El problema a resolver en esta investigación era mejorar el aprendizaje del estudio de funciones de los estudiantes de educación superior de la Facultad de ingeniería que cursan la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones. Con esta finalidad se planteó como solución diseñar un programa instruccional, basado en la teoría constructivista, en el que se trabajó con representaciones gráficas usando las TIC´s como apoyo.

Se aplicó un programa diseñado ayudar al alumno a pasar de las representaciones gráficas de las propiedades globales de las funciones, a las expresiones algebraicas y finalmente al cálculo analítico, con la ayuda del software matemático interactivo GeoGebra. La intervención, realizada durante seis sesiones, fue un diseño pre test pos test y grupo control, para lo cual se tomó un grupo experimental integrado por 26 estudiantes y el grupo control estuvo conformado por 17 alumnos.

En el análisis de los resultados se encontró que los alumnos del grupo experimental y de control no tenían iguales condiciones iniciales de conocimiento, siendo mayor el rendimiento del grupo control, sin embargo en los datos obtenidos en el post test se evidenció que los estudiantes del grupo experimental obtuvieron un incremento significativo en la comprensión de las propiedades globales, el grupo control no presentó cambios significativos en el post test. Los resultados verificaron que la aplicación de las estrategias diseñadas mejoró el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones, logrando cumplir con el objetivo propuesto por el estudio.

Descriptores: Propiedades globales de las funciones, TIC´s, GeoGebra, gráficas, constructivismo y educación superior.

Índice de Contenido

Capítulo 1. Introducción 1
Descripción del Contexto 1
Escenario de Trabajo 2
Rol del Autor 3

Capítulo 2. Estudio del Problema 5
Enunciado del Problema 5
Descripción del Problema 5
Documentación del Problema 6
Análisis de las Causas 11
Relación del Problema con la Literatura 13

Capítulo 3. Anticipación de los resultados e Instrumentos de Recolección de Datos 45
Objetivo General 45
Objetivos Específicos 45
Resultados Esperados 46
Medición de Resultados 47

Capítulo 4. Estrategia de Solución 49
Discusión y Evaluación de Soluciones 49
Descripción de la Solución Seleccionada 52
Informe de las Acciones Tomadas 70

Capítulo 5. Resultados 74
Resultados 74
Discusión 78
Recomendaciones 86
Difusión 88

Referencias 89

Anexos
A Prueba Pre test y Pos test 93
B Material elaborado para cada una de las sesiones 98
C…Material elaborado en el software matemático interactivo GeoGebra 109

Figuras
1 El tetraedro del aprendizaje 25
2 Resultado del diseño de grupo no equivalente (adaptado de Kerlinger & Howard, 2002) 81
3 Histograma de frecuencia del grupo experimental 83
4 Histograma de frecuencia del grupo control 85

Tablas
1 Porcentaje de alumnos aplazados en las asignaturas correspondientes al

primer semestre de la escuela de ingeniería en telecomunicaciones 7
2 Dificultad de los contenidos de la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones según los estudiantes 10
3 Mitos y realidades del uso de las herramientas tecnológicas..... 41
4 Estadísticos descriptivos del Pre test 75
5 Estadísticos de contraste del Pre test 75
6 Estadísticos descriptivos para el grupo experimental 76
7 Estadísticos de contraste para el grupo control..... 76
8 Estadísticos descriptivos para el grupo control..... 77
9 Estadísticos de contraste para el grupo control..... 77
10 Estadísticos descriptivos del post test..... 78
11 Estadísticos de contraste para el post test. 78
12 Tamaño del efecto..... 83
13 Medidas de posición 20° Percentil para el grupo experimental y control. 84

Capítulo 1. Introducción

Descripción del contexto

El siguiente estudio se desarrolló en una institución universitaria sin fines de lucro, en la que su principal fuente de ingresos proviene del pago de las matrículas y pensiones de los alumnos así como de cualquier convención lícita cuya celebración considere conveniente, El producto de los ingresos, si existiera después de pagar los compromisos adquiridos, son revertidos directa o indirectamente en beneficio de la obra que cumple la institución.

Fue fundada en 1953, su sede principal está ubicada en la zona oeste de Caracas y colinda con tres populosas parroquias, con una población de más de 100000 habitantes cada una según el censo del año 2011; sus principales vías de acceso son el transporte público incluyendo una estación del metro cercana y salida a la autopista Francisco Fajardo, para las personas que se trasladan en vehículo propio. Funciona en un campus aproximadamente de 32 hectáreas distribuidas en tres edificios de aulas, un edificio de laboratorios, un edificio de servicios generales, dos edificios con funciones administrativas, espacios para el deporte, biblioteca, áreas verdes y estacionamientos, en el cual se atienden más de 12.000 estudiantes de pregrado y aproximadamente 5.000 de postgrado, organizados en cinco Facultades, catorce Escuelas y más de cien programas de postgrado en diversas modalidades, distribuidos en seis áreas de conocimiento.

La universidad cuenta con cinco sedes la primera de ellas en el estado Táchira, la cual adquirió su independencia en 1982, otras dos sedes funcionan en la ciudad de Caracas, con ayuda de otras organizaciones ha logrado extenderse

hacia el Estado Miranda y el Estado Falcón, sin embargo la sede de mayor importancia en el interior del país fue fundada en 1995 y está ubicada en el Estado Bolívar actualmente atienda a una población de 700 estudiantes aproximadamente.

En general la institución cuenta con la estructura física diseñada específicamente para la labor educativa y de investigación, así como los servicios públicos elementales necesarios para su buen desempeño

Escenario de trabajo.

En el documento del Proyecto Formativo Institucional (2013) se encuentra lo que considera la universidad su misión, visión y objetivo:

> Contribuir a la formación integral de la juventud universitaria, en su aspecto personal y comunitario, dentro de la concepción cristiana de la vida.
>
> Esforzarse por acelerar el proceso de desarrollo nacional, creando conciencia de su problemática y promoviendo la voluntad de desarrollo.
>
> Trabajar por la integración de Latinoamérica y por salvaguardar y enriquecer su común patrimonio histórico-cultural, promover la mutua comprensión de los pueblos y la implantación de la justicia y la paz fundada en hondo humanismo ecuménico.
>
> Irradiar su acción, especialmente a los sectores más marginados.
>
> Promover el diálogo de las ciencias entre sí y de éstas con la Filosofía y la Teología.
>
> Como institución educativa su visión apunta a ser reconocida como una institución de educación superior privada de servicio público, líder en la formación integral, comprometida con la excelencia, la construcción de una sociedad más justa y humana, así como con el diálogo entre la fe y la cultura.
>
> Desde su objetivo es una institución con una clara identidad compartida y cultivada por la comunidad universitaria, con una cultura coherente con la misión, en la que se valore el logro de los consensos a partir de la pluralidad de opiniones. (p 31-37).

Para alcanzar el cumplimiento de su misión y visión la institución cuenta la directiva de la institución conformada por el Rector, un Vice-rector administrativo, dos Vice-rectores académicos, una Secretaria, un sistema académico formado por las cinco facultades y los estudios de postgrado, un sistema de investigación formado por cuatro unidades relacionadas a las Facultades correspondientes, así como los sistemas de responsabilidad social formado por diversas unidades y direcciones.

En cuanto a los estudiantes de la institución a la cual se hace referencia provienen de distintos estatus socio económico, el mayor porcentaje de ellos vive en la misma ciudad donde se ubica la institución o en ciudades cercanas y cursan estudios de pregrado y postgrado.

En la actualidad la institución está realizando una renovación curricular basada en el enfoque por Competencias. Este modelo promueve no sólo el saber, sino el saber hacer y el ser, lo que implica una educación integral, favorece el trabajo en equipo y el uso adecuado de la tecnología en el ámbito educativo, con la finalidad de formar un profesional con las competencias académico-profesionales requeridas en su desempeño laboral, responsable y con un verdadero compromiso social en este mundo cada vez mas globalizado.

El rol del Autor

La autora del presente estudio es profesora de matemática y física, con una experiencia docente de 22 años entre la educación preescolar, media y universitaria.

Desde el año 2002 se desempeña como profesora de Cálculo I en la Facultad de Ingeniería en la institución donde se realiza el estudio, lo que le permite conocer la importancia del tema a tratar no sólo en la asignatura en que se dicta perteneciente al ciclo básico, sino en asignaturas que los estudiantes deben cursar en su ciclo profesional de acuerdo con el perfil de egreso de su carrera.

Coordina el área de matemática de diversos cursos de iniciación universitaria; esta experiencia de trabajo con los estudiantes de nuevo ingreso le permite tener una visión general de las dificultades que tiene el estudiante al ingresar a la educación universitaria, no sólo a nivel de conocimientos formales que debían ser adquiridos en los niveles educativos anteriores, sino en todo el proceso de adaptación necesario para enfrentar una realidad académica distinta, con un nivel de exigencia diferente**,** que requiere desarrollar otras estrategias y tomar conciencia de la aplicación de las que ya conocen, con la finalidad de obtener buenos resultados en este nivel educativo.

Capítulo 2. Estudio del Problema

Enunciado del Problema

El problema a resolver en este Practicum es: ¿Los estudiantes de ingeniería que cursan la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones mejorarán su aprendizaje en el estudio de funciones si se usan las gráficas para explicar cada uno de los conceptos relacionados**,** usando como apoyo las herramientas tecnológicas?

Descripción del Problema

La asignatura de cálculo I es una de las cinco materias que los alumnos de ingeniería en telecomunicaciones deben cursar en el primer semestre, los contenidos que se imparten son: conjunto de números reales, funciones reales de variables reales, clasificación de las funciones, operaciones con funciones, composición de funciones, cambios estructurales de las funciones, límites, continuidad de las funciones, derivadas, aplicaciones de las derivadas, regla de L´Hopital, gráfica de funciones, problemas de máximos y mínimos, y problemas de razón de cambio.

Como se puede observar la mayoría (76,5%) de los contenidos corresponde de forma directa o indirecta al estudio de funciones, pero estos conocimientos representan para los estudiantes un alto grado de dificultad, lo que repercute directamente en su rendimiento.

Los docentes**,** en las reuniones de cátedra que se realizan al inicio de cada período académico**,** expresan que algunas de las causas de este bajo rendimiento

son: a) la falta de conocimientos básicos en el área de álgebra, que deben ser adquiridos por los estudiantes en la educación media, b) la extensión del programa de la asignatura**,** impide que se le dedique el tiempo adecuado a cada contenido**,** y por último c) por la naturaleza integradora de la materia**,** es necesario que los estudiantes comprendan cada uno de los conceptos que se trabajan, para que al final de la asignatura puedan globalizarlos y aplicarlos de forma correcta en situaciones específicas como son la graficación de funciones, problemas de máximos y mínimos y razón de cambio.

La comprensión del concepto de función es de gran importancia no sólo para las asignaturas de cálculo sino en otras materias como física en la que tienen que estudiar, por ejemplo: la relación entre tiempo, la velocidad y el desplazamiento de los cuerpos o señales en las que las funciones logarítmicas tienen un papel protagónico.

El bajo rendimiento en esta asignatura ha estado presente desde el inicio de la carrera por lo que se han tratado de aplicar algunos correctivos, como el cambio de pensum en el año 2010, sin embargo es un problema aún por resolver.

Documentación del Problema

La asignatura de cálculo I en la escuela de telecomunicaciones de la facultad de ingeniería es una de las cátedras donde se presenta el mayor número de aplazados en el primer semestre, como se puede observar en la Tabla 1

Tabla1

Porcentaje de alumnos aplazados en las asignaturas correspondientes al primer semestre de la escuela de ingeniería en telecomunicaciones.

Período lectivo del 200821 al 2010222					
	Cálculo I	Física I	Humanidades	Lenguaje	Geometría. Descriptiva.
200821	56,8	58,9	8,2	9,5	42,8
200822	52,3	56,4	10,9	18,5	52,3
200921	66,3	79,4	10,8	11,5	67
200922	71,2	68,6	7,7	14,3	52,1
201021	70,7	63,2	12,1	18,3	64,3
201022	69,4	60,1	38,4	13,8	52,1
Período lectivo del 201121 al 201222					
	Cálculo I	Física I	Humanidades	Lenguaje	Trigonometría y geometría
201121	62	72,4	18,1	19,5	60,8
201122	69,5	70,7	16,7	30,6	51,6
201221	65,9	71,8	16,8	24,8	24,8
201222	71,9	70,1	6,7	20	59,4

Los datos mostrados en la Tabla 1 están divididos en dos etapas que corresponden al cambio de la forma de ingreso a la universidad año 2008 y luego al cambio de pensum en el año 2010.No se incluyen los datos anteriores al 2008 por tener una forma de ingreso distinto, por lo tanto la población puede tener características diferentes.

Como se puede observar en los resultados obtenidos, la asignatura de Cálculo I es la primera o segunda asignatura con mayor porcentaje de alumnos aplazados, esta situación originó el cambio de pensum del año 2010, referido anteriormente, que en el caso del primer semestre consistió en las siguientes modificaciones:

1. Se cambió el nombre de la asignatura Cálculo I y pasó a denominarse Cálculo I para telecomunicaciones.
2. Se eliminó la asignatura Geometría Descriptiva y se sustituyó por la materia Trigonometría y Geometría Analítica.

Es decir, el primer semestre quedó conformado por cinco asignaturas que son: cálculo I para telecomunicaciones, trigonometría y geometría analítica, física I, lenguaje y humanidades I.

El cambio de pensum permitió**,** en la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones, incluir un repaso de los contenidos básicos que son necesarios para un mejor rendimiento, así como reorganizar dichos contenidos en dos aspectos concretos: a) el contenido referido al cálculo de integrales se dictan en su totalidad en cálculo II y b) el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas se inicia en la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones.

En la Tabla 1 se puede observar que el cambio de pensum no generó los efectos esperados en el porcentaje de alumnos aprobados. Este panorama de bajo rendimiento estudiantil muestra un problema que es necesario atender y hasta este momento no se han tomado los correctivos adecuados para solventar la situación.

Las causas del bajo rendimiento estudiantil están relacionadas con el ¿qué? y ¿cómo? los alumnos aprenden, (Cano, 2001) tomando en cuenta no solamente los aspectos formales de la educación como los objetivos, medios, recursos, planificación y programación de aula, sino también los aspectos afectivos como el ambiente escolar y adicionalmente los que se consiguen en la calle.

Pese a esta realidad multifactorial, en la necesidad de limitar el problema y estudiar una solución aplicable a la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones, es importante saber que esta cátedra se dicta en siete horas teóricas de 50 min y dos horas adicionales de práctica a la semana, durante 16 semanas. Como se puede observar la relación entre las horas de clases y el contenido expresado en la descripción del problema, deja muy poco espacio para dedicarlo a atender aspectos más allá de ¿qué? aprenden los alumnos si se sigue una educación tradicional basada en el contenido, con el docente como protagonista del aprendizaje y dictada de una forma magistral.

Con la necesidad de hacer un aporte para tratar de mejorar el rendimiento de los estudiantes de cálculo I para telecomunicaciones, atendiendo el ¿qué? y el ¿cómo?, entendiendo la complejidad de la asignatura y la cantidad de factores que influyen en su rendimiento, se les se aplicó una encuesta informal, con base en el temario de la materia, a los alumnos del primer semestre de la escuela de ingeniería de telecomunicaciones en el período marzo – julio 2012, para conocer tanto su opinión sobre cuáles contenidos específicos son los que representan mayor y menor dificultad, como la justificación de sus respuestas. El instrumento fue estructurado en dos partes: la primera parte presentaba el contenido de la asignatura de cálculo I con dos columnas donde los alumnos señalaban con la letra F el contenidos que consideraban fácil y con la letra D los contenidos de consideraban difíciles, la segunda parte mostraba dos preguntas: a) Escribe dos contenidos que te parezcan los más difíciles de entender y explica ¿por qué? y b)

Escribe dos contenidos que te parezcan los más fáciles de entender y explica ¿por qué? . Los resultados se muestran en la Tabla 2:

Tabla 2

Dificultad de los contenidos de la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones según los estudiantes.

Contenido	% de alumnos que considera el contenido de dificultad
Conjunto de números reales	3,7
Funciones reales de variables reales	9,3
Funciones notables	26,4
Funciones a trozos	27,7
Operación con funciones	31,5
Composición de funciones	48,1
Ecuaciones paramétricas	57,1
Cambios estructurales de las funciones	62,9
Límites	53,7
Continuidad de las funciones	40,7
Derivadas	25,9
Aplicaciones de las derivadas	63,4
Regla de L´Hopital	13,2
Estudio de funciones	66,7
Problemas de máximos y mínimos	77,8
Problemas de razón de cambio	79,6

Como se puede ver en la Tabla 2 el tema de estudio de funciones es considerado por el 63% de los 54 alumnos que cursaron la asignatura como uno de los temas más complejos, adicionalmente desde el punto de vista docente es uno de los temas más importantes de la asignatura por converger en él todos los conceptos trabajados previamente durante el semestre y es el punto de partida de los temas siguientes. Por otra parte es importante destacar que el tema tiene una dedicación de 10 horas académicas, que corresponde a menos del 10% de las horas del curso. Por esta razón si se plantea una solución en este tema a través de un diseño instruccional idóneo apoyado con el uso de la tecnología, podría mejorar el rendimiento de los estudiantes en el aprendizaje de las funciones.

Análisis de las Causas

Con la finalidad de delimitar las posibles causas por las cuales el estudio de funciones es considerado como uno de los contenidos más complejos de la asignatura se consultaron dos fuentes principales: a los alumnos a través de la encuesta aplicada y a los docentes en un sondeo de opinión realizado de manera informal referente a la dificultad que presentan los alumnos en este contenido.

Algunas de las razones que escribieron los alumnos fueron textualmente:

> Estudio de funciones porque tienes que aplicar muchos conceptos y muchísimas veces no te das cuenta de las cosas y te confundes porque no lo ves a simple vista.
>
> Estudio de funciones, ya que tenemos que aplicar el contenido da casi toda la materia y como no entendemos por completo los temas anteriores es complicado.
>
> Los contenidos que me resultan difíciles es estudio de funciones, ya que confundo muchos términos e integrar funciones.
>
> Estudio de funciones MUCHA COMPLEJIDAD por la cantidad de detalles.

> Estudio de funciones: Porque es difícil al momento de evaluar la concavidad y crecimiento sin equivocarse.
>
> Estudio de funciones: Específicamente límites laterales ver si hay o no asíntotas horizontales.
>
> Estudio de funciones porque contiene toda la materia del semestre y son muchas cosas que hay que saber muy bien.

Las razones que reportan los docentes son básicamente:

La falta de conocimientos básicos de los estudiantes, coincide con los resultados de De Gouveia (2012), en un trabajo realizado en el período escolar octubre-noviembre 2012 en la facultad de ingeniería, en base a la información dada por 425 alumnos el 50% de ellos reporta no haber visto o cursado en forma parcial alguna asignatura durante la educación media.

El poco tiempo que se le puede dedicar a cada uno de los contenidos de la asignatura. En este sentido es un comentario común referido a otros temas que los alumnos también consideran difíciles

Por estas razones es importante diseñar estrategias que ayuden a los profesores a mejorar la manera en que enseñan el tema del estudio de funciones para que se articule con la forma de aprender de los estudiantes, en tres direcciones: a) identificar los conocimientos previos necesarios para que aprendan los nuevos temas, activándolos en el momento apropiado y con los instrumentos pertinentes al contexto, los alumnos y los contenidos a trabajar, b) presentar la explicación de los conceptos globales de las funciones, como son: dominio, simetría, asíntotas, monotonía, puntos extremos, concavidad y puntos de inflexión, de forma que sea significativa y funcional para el alumno, con los recursos didácticos adecuados para cada tipo de contenido, usando diferentes formas de representación tal manera que permita a los alumnos acceder a ellos

desde distintos puntos de partida y por último c) mejorar la relación entre el tiempo y el contenido. El objetivo final sería implementar y evaluar estrategias para que puedan ser luego extensivas a otros temas dentro de la misma asignatura, logrando con esto que los estudiantes mejoren el rendimiento en general y no sólo en un tema específico.

Relación del Problema con la Literatura

Para hacer frente al problema de rendimiento en la asignatura de Cálculo I para telecomunicaciones es necesario ver más allá de una operación matemática mal resuelta o una expresión mal simplificada, se debe entender la enseñanza como una actividad social en la que están inmersos los alumnos y los docentes, donde se modifican las conductas por influencia de ambas culturas, contextos, experiencias y valores, una vez internalizado esto se debe reconocer que culturalmente se ha producido una "algebrización del cálculo diferencial escolar" Gascón (1998, citado en Contreras 2003). Este fenómeno ha traído como consecuencia la priorización de algunas formas de representación semióticas u ostensible y no-ostensibles (Bosch, 2003), sobre otras que, tal vez, son más fáciles de "captar" por los alumnos y los llevarían a comprender y no sólo memorizar procesos algebraicos apropiados para cada concepto.

Coll y Monereo (2011) indican que los procesos de construcción de las representaciones visuales, en este caso gráficas, es de vital importancia porque permiten aclarar, profundizar y reorganizar los pensamientos, respondiendo las dudas e incomprensiones, de manera que los componentes metacognitivos adquiere mayor protagonismo. En este sentido la investigación pretende demostrar

la importancia de trabajar las representaciones gráficas de las funciones y su vinculación con los conceptos: dominio, simetría, asíntotas, monotonía, puntos extremos de la función, concavidad y puntos de inflexión, antes que la representación algebraica y el concepto formal, optimizando el trabajo en clase con el apoyo de herramientas tecnológicas, utilizando como punto de partida los conceptos previos y la intuición de los alumnos.

Psicología Cognitiva y Constructivismo

En matemática se habilitan diferentes lenguajes, como por ejemplo el algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal (Garbín, 2005), cada uno utiliza registros semióticos de tipo lingüísticos como la escritura algebraica o de otro tipo como la gráfica cartesiana, esquemas, etc. La actividad matemática tiene como característica primordial el cambio y la coordinación de los registros de representación, este cambio de una representación a otra la lleva a cabo el estudiante con la finalidad de modificar el esquema conceptual asociado al concepto matemático y este proceso tiene un fundamento constructivista.

Schunk (2012), considera que a diferencia de otras teorías "no hay consistencia acerca del significado del constructivismo (…) en términos estrictos el constructivismo no es una teoría sino una epistemología o explicación filosófica acerca de la naturaleza del aprendizaje" (p. 230). Es decir, el constructivismo no se puede probar a través de hipótesis, esta teoría se basa en la construcción del aprendizaje de cada una de las personas. En cuanto al origen del constructivismo Woolfolk (2010), indica que "las perspectivas constructivistas están fundamentadas en las investigaciones de Piaget, Vygotsky, los psicólogos de la

Gestalt, Bartlett, Bruner y Rogoff, así como en la filosofía de John Dewey y el trabajo de Jean Lave" (p. 310).

Según Castillo (2008), los principios rectores del constructivismo son los siguientes a) el conocimiento no es pasivamente recibido e incorporado a la mente del alumno, sino activamente construido, b) solo el sujeto que conoce construye su aprender, c) la cognición tiene función adaptativa y para ello sirve la organización del mundo desde la experiencia, d) la realidad existe en tanto existe una construcción mental interna interpretativa del que aprende , e) aprender es construir y reconstruir esquemas, modelos mentales y f) aprender es un proceso individual y colectivo de diseño y construcción/reconstrucción de esquemas mentales previos como resultado de procesos de reflexión e interpretación.

Pero ¿cómo construye el conocimiento el estudiante? la respuesta no es simple y depende de cada uno de los principios en los que se basan las corrientes que dieron origen al constructivismo. Según Piaget (citado en Rosas & Sebastián, 2001), depende del principio de la equilibración, el individuo al enfrentar una nueva tarea se crea en él un desequilibrio, por lo tanto debe partir de un esquema conocido que trata de adaptar a la nueva situación a fin de restablecer el equilibrio, si continua el estado de desequilibrio el organismo busca nuevas estrategias para resolver la situación y encontrar nuevamente el equilibrio creando entonces un nuevo esquema. Para Vigotski, la respuesta está vinculada con el concepto de internalización que implica una transformación de significado externo en interno por parte de una estructura semiótica que a su vez es transformada en el proceso. A partir de este concepto de internalizacion se explica la existencia de la

zona de desarrollo próximo (ZDP) que “ es la fase en la que el niño puede dominar una tarea si recibe la ayuda y el apoyo adecuado” (Woolfolk, 2010, p 18), es decir, si se diferencian dos tipos desarrollo en el niño: el real , referido a la resolución de las actividades de forma individual y el potencial que concierne a la resolución de las actividades con ayuda, entoces la ZDP es la diferencia entre el la ejecución con ayuda o sin ella, como lo menciona Tejada, y otros, (2011). Más adelante Jerome Bruner (citado en Tejada, y otros, 2011), introdujo el concepto de andamiaje que consiste prestar la ayuda pertinente al estudiante, no muy fácil para que pierda el interés ni tan difícil que lo haga renunciar. En conclusión, el principio de internalización de Vigotski consiste en transformar el mundo interno del estudiante a partir del mundo externo, tomando en cuenta su desarrollo real y potencial, con el andamiaje adecuado. En Maturana (citado en Rosas & Sebastián, 2001), el principio que responde a la pregunta puede ser el de autopoiesis (criterio de clasificación de los seres vivos basado en su organización), sin embargo no es suficiente porque su producto es un organismo,por lo tanto se debe recurrir a los acoplamientos estructurales del tercer orden que tienen como producto los dominios consensuales; en otras palabras a partir de una perturbacion externa observada, el observador toma la realidad como argumento explicativo para lograr cambios en la estructura interna del organismo al utilizar como forma de comunicación el lenguaje.

Al tomar en cuenta estas tres corrientes de pensamiento se puede concluir, como respuesta a la pregunta anterior, que primero es una construcción basada en la representación que se hace del mundo externo, los conocimientos son más

precisos de acuerdo al grado en que se refleja realmente el exterior (Procesamiento de la información). Segundo hay un proceso interno en el que se debe transformar, organizar y reorganizar los conocimientos previos, la exploración y el descubrimiento son más importantes que la enseñanza, y tercero los conocimientos se construyen con base en las interacciones sociales y la experiencia, los conocimientos reflejan la realidad influida por la cultura, el lenguaje, las creencias, la enseñanza directa y el moldeamiento como lo plantea Vygotsky (Woolfolk, 2010). En este mismo orden de ideas, según la psicología, los adolescentes y los adultos, adquieren conceptos nuevos por un proceso de asimilación conceptual, que consiste en relacionar los criterios correspondientes a los conceptos con ideas pertinentes establecidas en sus estructuras cognoscitivas e incorporarlos a sus respectivos esquemas cognitivos (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1995).

Con la finalidad de apoyar al alumno en esta reorganización e integración de la información es necesario presentar la información estructurada y organizada con base a las posibles conexiones que puede hacerse entre los conocimientos nuevos y los que ya pertenecen a la estructura cognitiva del alumno. En este sentido es importante el trabajo de Ausubel (1995), ya que concibe que todo nuevo aprendizaje debe ser significativo para la persona que aprende y esta significación debe estar directamente relacionada con la existencia de relaciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno (Carretero, 1993). Como lo indica Mayer (2006), para que se logre este aprendizaje significativo, es necesario llevar a cabo tres pasos importantes; el primero de ellos es seleccionar

adecuadamente el material que se va a trabajar, tomando en cuenta que este material se transforma en elementos de la memoria de trabajo del estudiante; el segundo es organizar el material de forma coherente para que el estudiante logre adecuarlo coherentemente en su estructura mental y por último, integrarlo a los conocimientos ya existentes para que el alumno obtenga un conocimiento más enriquecido.

Este proceso de adquirir un concepto, incorporarlo a un tipo de aprendizaje determinado para reorganizarlo e integrarlo a la red cognitiva existente en el estudiante, debe plantearse como un conjunto de acciones dirigidas a favorecer el proceso constructivo del estudiante, en el que se reconozca adicionalmente la influencia del contexto y las disposiciones internas del alumno. Estas disposiciones se pueden traducir en conocimientos previos, que pueden estar equivocados y sea necesario corregirlos o profundizarlos, en todo caso se crean conflictos cognitivos o contradicciones que el docente de alguna forma debe, no solamente, resolver sino incluso promoverlos con la finalidad de realizar un cambio conceptual en el alumno.

El cambio conceptual no se logra de forma inmediata, el estudiante pasa por una serie de fases intermedias en las que irán cambiando poco a poco sus esquemas iniciales, este proceso es importante para el docente porque conocerá las representaciones intermedias observando los avances y dificultades que tienen los alumnos al adquirir nuevos conocimientos y no solo el reflejo que se tiene en el producto final.

Constructivismo y la matemática

El conocimiento matemático es construido a través de procesos de abstracción en los que se activan las estructuras cognitivas que tiene el estudiante, este debe ser un proceso continuo para lograr las transformaciones necesarias en las estructuras existentes Kilpatrick, Gómez y Rico (1995, citado en Castillo 2008). El proceso de abstracción también tiene características propias en el aprendizaje de la matemática como son: a) el uso del mismo esquema mental en situaciones semejantes, el uso de los objetos abstraídos pueden ser posteriormente herramientas útiles para realizar nuevas abstracciones y b) el uso de símbolos que conceptualizan los diferentes objetos sin importar el contexto en que se encuentren.

El constructivismo, como postura epistemológica, ha tenido influencia en el área de la matemática educativa básicamente en dos aspectos: en la abstracción reflexiva a través de la cual se construye el pensamiento y en la planificación de actividades con propósitos definidos que inducen a la transformación de las estructuras existentes.

Desde el punto de vista constructivista el alumno que aprende matemática no sólo debe interactuar con los objetos matemáticos sino también con el ambiente que lo rodea para poder construir su propio conocimiento, siendo necesario entonces que estos objetos matemáticos estén inmersos en problemas reales y no en ejercicios.

Por estas razones el docente que desee aplicar una propuesta constructivista debe estar consciente que su rol no puede ser el de un simple

transmisor de conocimientos sino que debe “convertirse en un organizador, coordinador, asesor y director del proceso de adquisición del conocimiento, el cual le pertenece primordialmente al alumno” (Castillo, 2008).

Constructivismo, matemática y las tecnologías de información y comunicación

Las tecnologías de información y comunicación (TIC) según Sánchez (2000, citado en Castillo 2008), se pueden incorporar al proceso educativo como herramientas de apoyo con diferentes visiones que pueden ser: fomentando el desarrollo de destrezas cognitivas superiores en los alumnos, como medio de construcción que faciliten la integración entre los conocimientos previos y los actuales, como amplificadores de la mente que logre expandir las potencialidades del proceso cognitivo, como medios transparentes a la tecnología y visible al conocimiento o como herramientas metodológicas activas que permitan la interacción de los estudiantes y la necesaria negociación entre los conocimientos.

Como lo indica Peñalosa (2010), la incorporación de la tecnología en el proceso de aprendizaje es una decisión del docente, por lo tanto es necesario tener en cuenta que debe integrarse de tal forma que cumpla con alguna de las siguientes funciones educativas: a) didáctica a través de un software mediante el cual se diseñen actividades basadas en los conceptos enseñados y que promuevan el aprendizaje colaborativo, b) de especialización con un software diseñado para enseñar un contenido específico o c) cognitiva que permita la manipulación directa de objetos matemáticos.

Al seleccionar un recurso tecnológico determinado es necesario tomar en cuenta el papel educativo que va a desempeñar, por ese motivo debe ser una herramienta relacionada con el área específica que se desea trabajar, que ayude a crear situaciones que no pueden abordarse con los medios tradicionales, que promueva el aprendizaje colaborativo y permita prácticas donde el docente interactúe con los estudiantes.

El uso de la tecnología en el proceso educativo puede crear en el docente cierto sentimiento de pérdida de protagonismo sobre la actividad educativa, pero el protagonista principal del proceso educativo debe ser el alumno como lo indica Brousseau (1998, citado en Castillo 2008), "los conocimientos pueden aparecer en situaciones originales, pero los saberes culturales están asociados necesariamente a prácticas sociales que les sirven de referencia" (p.192). De esta forma conociendo el alcance pedagógico de las TIC en la enseñanza de la matemática y unido a la concepción del constructivismo en la que el alumno es el responsable de su propio aprendizaje, se puede concluir que la labor docente debe ir en consonancia con los cambios, donde el rol del docente y sus funciones se ven modificados por la evolución social que existe.

Una de las características principales del presente trabajo de investigación es la priorización del lenguaje gráfico en la presentación de los conceptos, para luego lograr la conversión desde la graficación hasta el lenguaje algebraico y finalmente el analítico. Este proceso requiere de procesos cognitivos complejos en el que juega un papel importante no solo la adquisición de los conceptos y los

conocimientos previos, sino también la forma como se almacena la información en la memoria.

Según Poggioli (2009a), la memoria es la capacidad que tienen los seres humanos para registrar (codificar), retener (almacenar) y evocar (recuperar) la información. Cada uno de estos procesos es diferente y tienen funciones distintas, sin embargo deben darse los tres procesos para que el individuo sea capaz de recordar. Si el proceso de evocación de un aprendizaje no se obtiene se debe a dos razones, la primera puede ser que el individuo no ha sido expuesto a esa información por lo cual es imposible recordarla, la segunda razón es la que la información no haya sido codificada inicialmente como una información significativa y por lo tanto no se puede evocar.

Según el modelo de Atkinson y Shiffrin (citado en Poggioli 2009), la memoria está conformada por varios tipos de almacén, que son: la memoria sensorial (MS), la memoria de corto plazo (MCP) y la memoria de largo plazo (MLP):

Memoria sensorial (tiempo de duración entre uno y cuatro segundos) es el almacenamiento inicial que llega a través de los sentidos, se llaman registros sensoriales, puede ser imágenes visuales, memoria icónica o memoria auditiva.

Memoria del Corto Plazo (tiempo de duración de quince a veinticinco segundos) es un tipo de memoria que almacena cantidades limitadas de información, puede variar entre cinco y nueve unidades, y por períodos breves.

Entre sus funciones se encuentra la comparación de la información, la combinación de la misma y el ensayo o práctica

Memoria a largo plazo (MLP): es el último almacén del sistema de memoria no tiene restricción de tiempo ni de cantidad de almacenamiento. En ella están almacenados los conceptos y las asociaciones o relaciones entre ellos, para algunos teóricos (Anderson, 1980, citado en Poggioli, 2009), la información se almacena en la MLP en forma de proposiciones, estas forman redes y las redes se organizanen forma jerárquica (Collins y Quillian, 1969 citados en Poggioli, 2009a). En todo caso la información almacenada se encuentra organizada y asociada a los conceptos relacionados en forma jerárquica, por lo tanto si se activa un concepto, los relacionados también se activarán.

Según Tulving (1983 citado en Poggioli, 2009a), la MLP tiene dos componentes: la memoria episódica y la memoria semántica. La memoria episódica almacena los eventos de la vida de las personas, experiencias y las relaciones que se forman, los registros son de tipo temporal y espacial. La memoria semántica se refiere a los conocimientos generales que los individuos tienen acerca del mundo. La relación entre estos dos componentes son los que permiten explicar la gran variedad de relaciones que hace el ser humano de su entorno al relacionar las imágenes de objetos y lugares, las destrezas de interacción social, las destrezas motoras, etc.

Ahora es necesario relacionar la estructura de la memoria con el proceso de aprendizaje, según algunos autores (Gagné y Glaser, 1987 citado en Poggioli, 2009b), señalan que la MLP está organizada en redes semánticas, pero es

necesario clasificarlas en varias formas de conocimiento si se desea analizarlas en función del aprendizaje y la ejecución humana. Estos autores sugieren otros tipos de contenidos, diferente a los conocimiento almacenados por la memoria episódica y la memoria semántica, en la MLP como son: las imágenes, la distinción entre el conocimiento declarativo (saber qué) y el conocimiento procedimental (saber cómo), los esquemas y las habilidades cognoscitivas.

Para los fines que persigue este trabajo las imágenes constituyen un componente importante como contenido de la MLP. Las investigaciones demuestran que al añadir imágenes a las proposiciones verbales almacenadas ayudan de manera significativa a la evocación de este material. Otros resultados indican que las imágenes pueden ser de gran ayuda para evocar información cuando los individuos tienen baja habilidad verbal. Es decir el uso de las imágenes relacionadas a los objetos de estudio incrementa la capacidad de evocación del material almacenado.

Es necesario conocer no sólo la forma cómo las imágenes ayudan a evocar la información almacenada en la memoria, también es importante saber la forma como se presenta y organiza la información para que el proceso de aprendizaje sea efectivo. Para esto es necesario explorar los programas instruccionales adecuados y las estrategias que ayuden al aprendizaje de actividades complejas, como las involucradas en el uso de estrategias cognoscitivas para la adquisición de conocimiento, el recuerdo de información y la resolución de problemas.

Según Díaz, Hernández (2002), uno de los esquemas que ha demostrado mayor efectividad para el análisis del aprendizaje, y posteriormente ha

evidenciado su potencialidad para orientar la creación y orientación de los programas de intervención, es el propuesto por Brown (1982) derivado de las ideas de Jenkins (1979) llamado tetraedro del aprendizaje (Figura 1), en el que señala que el aprendizaje es el resultado de la integración entre cuatro grupos de variables: las estrategias, las características del aprendiz, la naturaleza y características de los materiales de aprendizaje y las demandas y criterios de las tareas.

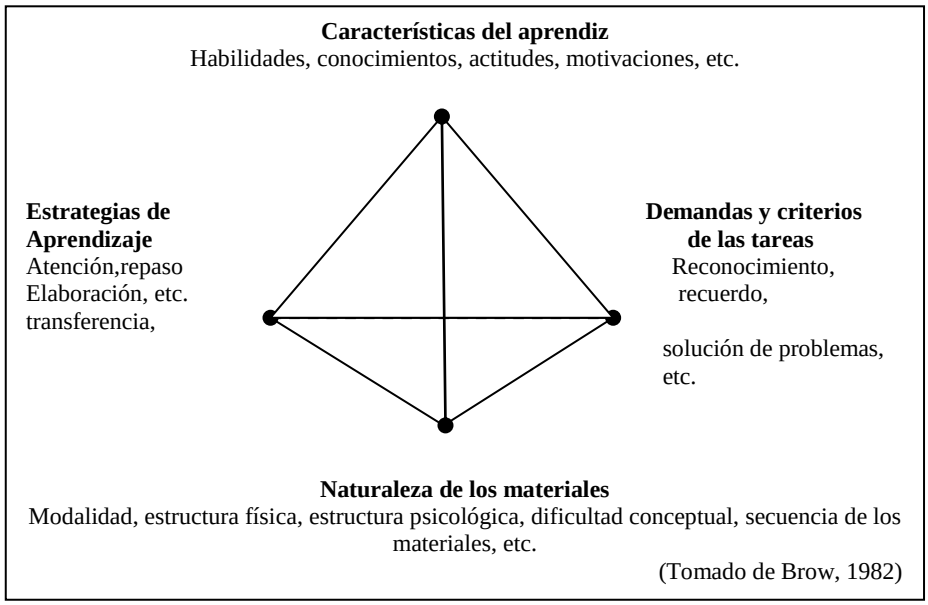


Figura 1. *El tetraedro del aprendizaje*.

Entre las estrategias de aprendizaje se encuentra las estrategias de elaboración imaginaria inducida y las estrategias de elaboración imaginaria impuestas. Las imágenes inducidas tienden a incrementar el aprendizaje con mayor efectividad que las imágenes impuestas, sin embargo ambas generan actividades mentales que permiten realizar construcciones simbólicas sobre la información que se desea aprender con la finalidad de hacerla significativa. Otra de las estrategias son las representaciones gráficas, estas representaciones

constituyen el esquema organizacional relacionado con la información y ayudan al estudiante a comprender, resumir, organizar y sintetizar ideas complejas, las modalidades de esta estrategia son los mapas mentales, mapas de conceptos y esquemas.

El tipo de representación que se desea trabajar en el programa de intervención no pertenece a ninguna de las modalidades, pero cumple con los aspectos generales mencionados en el concepto.

Por último se encuentra la estrategia de las preguntas exploratorias (Pimienta, 2008). Se realizan con la finalidad de evocar los conocimientos previos, las implicaciones y los intereses propios del estudiante, implican un razonamiento crítico y creativo, y promueven el descubrimiento de los propios pensamientos o inquietudes.

Procesos y estrategias de aprendizaje

La dificultad en matemática de los estudiantes que inician sus estudios superiores no es un problema nuevo en la educación y lo que lo hace más complejo es la diversidad de factores que lo originan; por esta razón la forma de enseñar este conocimiento ha sido objeto de estudio por diversos investigadores dando como resultado diferentes tendencias, entre las que se encuentran según D'Amore & Godino(2007), la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) de Chevallard (1992 y 1999), el enfoque ontosemiótico de conocimiento y la instrucción matemática EOS de Godino y Batanero (1994) , registros de

representación semiótica de Duval (1998),y la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990, 1994), entre otros.

Pero ¿qué brindan todas estas teorías, enfoque**s** o registros a la enseñanza de la matemática? la respuesta no puede ser concreta pero si una aproximación como lo indica Artigue (2004):

> La evolución de los enfoques teóricos y la articulación que favorece entre los diferentes niveles de análisis en didáctica, la evolución de la mirada sobre los docentes y, por último, la evolución de la mirada sobre las herramientas de trabajo matemático (p.5)

Es decir los contenidos deben ser pertinentes, conectados a los conocimientos previos de los alumnos, los docentes tienen que desempeñar roles diferentes a los tradicionales y estar dispuestos a incorporar al proceso educativo distintos tipos de recursos.

Indica Azcarate, (2003) que desde la época de los noventa se plantea el aprendizaje de la matemática en términos de procesos cognitivos, por lo que se aprecia una clara evolución en la investigación de los errores y dificultades que enfrentan los estudiantes en el aprendizaje de esta área.

La autora hace referencia a la complejidad de los procesos cognitivos que están involucrados en el pensamiento matemático avanzado en contraposición a los necesarios en la matemática elemental, en esta última los objetos se describen (los conceptos se construyen sobre la experiencia) mientras que en la primera los objetos se definen (es un conocimiento formal) y las propiedades de los objetos se derivan de esa definición formal. Uno de los modelos estudiados por la autora es el presentado por Tall (1988) que hace distinción entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos necesarios para elaborarlos, él

diferencia las definiciones formales (aceptadas por la comunidad científica) y las definiciones personales que utilizan las personas como interpretación, construcción y reconstrucción de las definiciones individuales. Igualmente considera que el esquema conceptual asociado por algunas personas a un concepto matemático no siempre es una expresión verbal e involucra representaciones visuales, experiencias y hasta sensaciones vividas en relación con el mismo.

Según este modelo, adquirir un concepto matemático se traduce en crear un esquema mental del mismo y en la práctica los estudiantes elaboran sus respuestas a las diferentes tareas basados en estos esquemas y no en los conceptos formales, aunque el conocimiento de memoria de un concepto no es garantía de la comprensión de su significado.

El aporte de esta publicación al trabajo de investigación es la importancia que tiene el proceso que lleva a cabo el estudiante para aprender un concepto o una proposición, partiendo de un esquema conceptual para después entender la definición formal. Este proceso es contrario al que normalmente se promueve en el aula donde se enseña la definición formal de un concepto se le pide al alumno que la memorice y luego que lo aplique en diferentes contextos.

La construcción del conocimiento por parte de los alumnos se ha convertido en una fuente de investigación por mostrar, en apariencia, soluciones concretas a las dificultades de aprendizaje de la matemática. En el XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática celebrado en Córdova en septiembre del año 2005 se presentó el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). En este se plantea que el aprendizaje de la matemática genera numerosas

dificultades y éstas son de naturalezas distintas, la única constante es que su procedencia se concreta en un microsistema formado por los estudiantes, los profesores, el currículo y el contexto. Estas dificultades según Socas (1997) pueden estar asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas ya que la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos puede ser fuente de confusión de muchos alumnos, por esta razón, sobre todo en la enseñanza de la matemática en la educación superior, es necesario potenciar la capacidad de abstracción del alumno, este proceso puede ser caracterizado por diferentes etapas que son: a) semiótica: los alumnos aprenden nuevos signos que adquieren significado con los signos antiguos ya conocidos, b) estructural: el sistema antiguo organiza la estructura del sistema nuevo y c) autónoma: los signos actúan con significados propios, independientemente del sistema anterior.

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas, 2005), creado por un conjunto de profesores organizados en el Grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna, se caracteriza por ser una investigación vía elaboración de Modelos de Competencias (modelo de competencia formal y modelos de competencia cognitivo). Este grupo de docentes se ha propuesto como meta analizar y clasificar los errores en tres direcciones: la primera son los errores generados por las dificultades de aprendizaje matemático es el aspecto deductivo formal, que está siempre acompañado por el pensamiento lógico, es decir, la capacidad de seguir argumentos lógicos, siendo esta una destreza necesaria para alcanzar determinados niveles de competencias matemática, la segunda los errores asociados a los procesos propios de los estudiantes en su desarrollo cognitivo y

por último las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática

ELOS, no solo permite determinar las dificultades y errores que tienen los alumnos, también posibilita las nuevas formas de enfocar el estudio de los errores que cometen los alumnos analizando los mismos en los estadios de desarrollo del signo: semiótico, estructural y autónomo, tomando en consideración el binomio conceptual/procedimental del objeto en su triple perspectiva: operacional, estructural y procedimental.

Las representaciones gráficas de las funciones como estrategia de aprendizaje

Es labor del docente planificar las estrategias y recursos necesarios para lograr resultados exitosos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, en este sentido Lupo (2010), realizó una investigación en la que el objetivo principal era diseñar una propuesta usando la representación gráfica de una función para obtener el dominio de funciones compuestas.

La propuesta fue desarrollada con estudiantes de ingeniería en las cátedras de cálculo I y II , la investigación se llevó a cabo en cinco etapas: en la primera identificó los diferentes contenidos relacionados con el tema de funciones en los programas de las materias seleccionadas, en la segunda etapa trabajó con ocho docentes que participarían en la propuesta y le fue aplicado un cuestionario de 16 preguntas, en base a los resultados obtenidos diagnosticó las necesidades de los docentes seleccionados y diseñó la actividad de intervención utilizando la representación gráfica de las funciones internas para obtener el dominio de una

función compuesta. Esta actividad fue desarrollada con los docentes con la finalidad que estos fueran agentes multiplicadores de la metodología.

El principal aporte de esta investigación es la semejanza del contexto en el cual se desarrolla la investigación, luego la descripción en cuanto a la necesidad del aprendizaje de las funciones y la dificultad que tienen los alumnos de pasar de las representaciones algebraicas a las gráficas y viceversa. Estas inconsistencias, en muchas oportunidades, se deben a que los profesores orientan sus actividades solamente a la representación algebraica, aunque sea la interpretación de las características de las funciones a través de sus gráficas una forma de facilitar la enseñanza de los objetivos (Lupo 2010).

Aunque el trabajo anterior está orientado hacia los docentes, hoy en día el proceso educativo tiene como principal protagonista al alumno, por eso es importante estudiar los errores que los alumnos cometen y sus causas para tratar de solventarlos, ese es el objetivo de la investigación de Dolores (2004) quien publicó un trabajo sobre el análisis de las funciones a través de sus gráficas con alumnos de educación media. El objetivo del trabajo era investigar las concepciones alternativas que poseen los estudiantes cuando se les plantean tareas de análisis de funciones. La investigación tuvo un carácter exploratorio, la recolección de los datos se realizó a través de un cuestionario que indagaba sobre la ubicación y las características de las gráficas, la muestra estaba conformada por 40 estudiantes de edades comprendidas entre 17 y 18 años, quienes cursaban matemática IV y conocían los contenidos que se estaban evaluando.

Las concepciones alternativas detectadas indicaron que los alumnos consideran que una función tiene imágenes positivas si tiene abscisas positivas, que las funciones tienen puntos estacionarios en los puntos de corte con el eje x y que las funciones son crecientes si tienen imágenes positivas.

Este estudio muestra la importancia de usar diferentes formas de representación semiótica, para que los estudiantes puedan entender los conceptos formales de los términos relacionados con el estudio de las funciones, así como brindarle la oportunidad de cambiar un representación a otra sin que eso les lleve a inconsistencias conceptuales.

Bagni (1998), realizó una investigación experimental que tuvo como propósito evidenciar que la visualización de una función a través de su gráfica cartesiana puede, no solo llevar a los alumnos a inconsistencias conceptuales sino incluso obstaculizar, en algunos casos, la comprensión del concepto de función.

El estudio se realizó con dos muestras : una de 75 estudiantes con edades comprendidas entre 16 y 17 años que cursan la tercera clase, y otra de 66 alumnos de 18-19 años que cursan la quinta clase, sus currículos matemáticos eran tradicionales y ya conocían el concepto de función y las gráficas cartesianas. A esos dos grupos le aplicaron tres tipos de cuestionarios con los siguientes contenidos: a) concepto de función basado en la gráfica de cuatro ejemplos, b) cálculo del dominio de una función y c) operaciones analíticas, particularmente la integración.

En el trabajo antes citado el autor indica que se debe tomar consideraciones adicionales como entrevistas y observaciones sistemáticas, por lo que los resultados que muestran no intentan proponer resultados definitivos sino mostrar una problemática que se puede presentar. Las conclusiones a las que llegó fueron básicamente dos: la primera es que la identificación total de una función a través de su representación gráfica cartesiana puede llevar a los alumnos a un falso concepto cuando se hace referencia a funciones cuyas gráficas no pueden trazarse fácilmente, y la segunda indica que la importancia del conocimiento está en el objeto matemático, no en sus diversas representaciones semióticas , por lo tanto se debe hacer distinción entre un objeto y sus representaciones para la compresión de la matemática.

El aporte de este estudio indica que si bien existen diversos registros semióticos para el concepto de función y que la gráfica cartesiana es una de las más usadas por su alcance didáctico, es necesario tomar las medidas necesarias para que esta práctica no se convierta es un obstáculo en el momento de estudiar el concepto formal.

Trigueros María y Covadonga Escandón (2008) realizaron un estudio cuyo objetivo era responder las siguientes preguntas: a) ¿Cuáles conceptos, de entre los que se utilizan en la graficación de funciones resultan ser clave para que los estudiantes puedan establecer las relaciones que se requieren para resolver exitosamente este tipo de problemas?, b)¿Existe alguna estructura que tenga un papel dominante en la solución de los problemas? y c)¿Qué tipo de situaciones problemáticas pueden revelar las distintas concepciones de los alumnos?.

La metodología se basó en la aplicación de un cuestionario de diez preguntas abiertas que requerían justificación, relacionadas con la graficación de funciones utilizando los conceptos del cálculo diferencial, se aplicó a 40 estudiantes de una universidad privada que habían aprobado el curso de cálculo diferencial.

Los resultados analizados pusieron en evidencia que los conceptos claves para establecer las relaciones necesarias que se requieren para resolver con éxito los problemas de graficación, utilizando las herramientas del cálculo diferencial son: los conceptos relacionados con la segunda derivada de la función, en particular los puntos de inflexión, la relación de la continuidad con la primera derivada y la comprensión de la subdivisión del dominio de la función en intervalos determinados por la interrelación de las propiedades de la primera y segunda derivada.

La información que se obtuvo de esta investigación muestra la necesidad de trabajar con los alumnos la construcción de las relaciones entre los conceptos. El estudio de los conceptos por separado no garantiza que ellos sean capaces de relacionarlos por ellos mismos, por lo tanto es necesario que el docente promueva situaciones que ayuden a relacionarlos de forma explícita.

Sabrina Garbín realizó en el año 2005 una investigación sobre ¿cómo piensan el concepto de infinito los alumnos entre 16 y 20 años? Desde el estudio de diferentes tipos de representaciones del concepto.

Como ya se ha mencionado en el área de la matemática coexisten diferentes lenguajes matemáticos el algebraico, analítico, geométrico, gráfico y

verbal, los docentes generalmente se movilizan entre estas representaciones semióticas en su práctica diaria y por esta razón la coordinación de estos registros es importante para no crear inconsistencias.

El trabajo también maneja los términos de pensamiento matemático elemental (PME) y pensamiento matemático avanzado (PMA) que sitúan al alumno en diferentes etapas relacionadas con su desarrollo cognitivo. Al comparar estos dos niveles de pensamiento la autora señala: “se enseña una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo” y “se enseña con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal” (p 3).

Esta investigación, de tipo cualitativa, fue realizada con dos grupos de alumnos: un grupo estudiantes españoles de la ciudad de Barcelona, que cursaban secundaria, con edades de 16 y 17 años sin conocimientos previos de cálculo y otro grupo de estudiantes venezolanos universitarios de la Universidad Simón Bolívar con edades comprendidas entre 17 y 20 años con conocimientos previos de cálculo. A las muestras le aplicaron una encuesta estructurada en cinco preguntas inspiradas en la primera paradoja de la división de Zenón y diferenciados por el contexto matemático.

Los resultados obtenidos mostraron que el paso entre el PME y PMA implica una transición que requiere una reconstrucción cognitiva en la que la que el esquema conceptual no necesariamente se mantiene de forma coherente, por la contradicción entre diferentes representaciones y /o entre los conceptos formales y los “perceptuales”: Una forma de solventar estas incongruencias es distinguir el

objeto de su representación y establecer la conexiones pertinentes entre las diferentes representaciones semióticas. Otro aporte importante de este estudio a la investigación es descubrir el gran impacto que tiene los diferentes lenguajes, el contexto y las representaciones sobre las percepciones y sobre los razonamientos de los alumnos.

Uso de la Tecnologías de la información y comunicación (TIC) como apoyo en el aula de clases

Aragón, Castro, Gómez y González (2009), publicaron un estudio basado en el concepto de objeto de aprendizaje como recurso didáctico para la enseñanza de la matemática. Es una investigación de tipo cualitativa con un alcance exploratorio-descriptivo.

El objeto de innovación fue aplicado a seis grupos de estudiantes (176 en total) de nivel de licenciatura de diferentes cursos y áreas disciplinares pertenecientes a seis instituciones educativas diferentes. Todos los participantes tenían como elementos comunes que cursaban en ese momento alguna asignatura de matemática que incluyera el tema de las desigualdades.

El objeto de aprendizaje está definido como una pequeña unidad de contenido incluyendo el diseño, el análisis de las herramientas disponibles, la definición de criterios, la reflexión, su producción, aplicación y evaluación. Es una unidad innovadora que puede ser integrado a otros diseños curriculares.

Una primera etapa de esta intervención fue realizada una actividad diagnóstica sobre la solución de problemas matemáticos basados en desigualdades, utilizando métodos gráficos convencionales. En seguida, se

presentó a los estudiantes el objeto de aprendizaje Graphmatical (software libre) y se les pidió a los alumnos resolver un problema, en el que tenían que aplicar diversas representaciones semióticas.

La investigación demostró que la utilización de objetos de aprendizaje promueve la construcción, comprensión y aplicación de conocimientos mediante el trabajo de colaboración realizado por los estudiantes. El aporte de los resultados obtenidos por esta investigación van en dos direcciones: una, la actitud de los estudiantes frente a la actividad y otra, la comprensión del contenido. Los ítems mas valorados por los alumnos se referían a la innovación de la didáctica con respecto a la enseñanza tradicional (83%), la calidad de los recursos tecnológicos utilizados (85%) y la dirección de las actividades por parte del docente (84%). Es decir es importante innovar y darle al alumno el apoyo necesario para que sea capaz de desarrollar su autonomía y construir su propio aprendizaje. En cuanto al conocimiento adquirido el 77% de los alumnos lograron acabar con éxito la actividad.

González (2011), desarrolló su trabajo doctoral sobre Evaluación del impacto de las políticas educativas TIC en las prácticas de los centros escolares.

En el trabajo están combinadas las técnicas de análisis de datos tanto cualitativas como cuantitativas, la primera basada en una encuesta dirigidas al equipo directivo de los centros educativos contestada de manera individual o de manera colectiva por el equipo directivo y el coordinador, y el estudio cualitativo realizado a través de la técnica de la entrevista narrativa que permitió conocer más en profundidad ¿qué buenas prácticas desarrolla el profesorado para integrar los recursos tecnológicas en el aula y el centro educativo?.

La primera selección de muestra fueron instituciones educativas que trabajaban con las TIC y luego filtraron sólo aquellas que tenían referencia de buena práctica de las TIC. Entendiendo por buena práctica aquella aplicación de la tecnología extensible a la comunidad que provoca un aumento de las expectativas de mejora docente a través de la aplicación pedagógica de las TIC, generando innovación educativa con las TIC.

El aporte de la investigación es principalmente el rol que tiene el docente en la buena práctica de las TIC, basadas en las siguientes premisas: la integración el uso de la tecnología a su práctica diaria, la apertura a la innovación por lo tanto la motivación a los alumnos, la comunicación con los pares y una constante actualización de los conocimientos.

Maita (2005), realizó una investigación sobre el aprendizaje de funciones reales con el uso de un software educativo, elaborado particularmente para esta investigación, con estudiantes de Educación mención Matemática de la Universidad de los Andes Táchira.

En la investigación de tipo cuantitativo, trabajaron con una muestra de 74 estudiantes pertenecientes al primer año de Educación, divididos en dos grupos uno de control y otro experimental, a los que se aplicaron pre test y post test**.** El grupo experimental trabajó durante tres semanas consecutivas con el software FunReal 1.0 para un total de seis sesiones, planificadas en cuatro momentos: exploración libre del software, exposición del docente (sin resolver las actividades), desarrollo de las actividades por parte de los alumnos y discusión de los resultados. Como conclusión el uso del software dinamizó el trabajo en el aula, brindándoles autonomía a los estudiantes en el proceso de aprendizaje,

estimulando su creatividad y su participación. El rendimiento del grupo experimental fue significativamente mejor que el del grupo control lo que manifiesta la efectividad de incorporar nuevas tecnologías de la información a los procesos de aprendizaje, sin que éstas sean un sustituto del docente, sino que cumpla una función de apoyo a la labor educativa.

Mcanally-Salas, Navarro, María y Juan Rodríguez, (2006), realizaron una investigación cuyo objetivo es contribuir a la incorporación de las TIC en apoyo de las estrategias de enseñanza para hacer más eficiente los procesos de atención a los estudiantes. La problemática que deseaban resolver era la creciente demanda estudiantil en la educación superior y la necesidad de incrementar la capacidad de atención de las instituciones universitarias, una de las soluciones que presentaron es el uso de las TIC en las diferentes asignaturas. La aplicación de la tecnología consistió en la organización de los contenidos de los cursos en un modelo almenado, que consiste en diferenciar los contenidos tácitos (inherentes al aula) de los explícitos (que pueden darse fuera mediante la tecnología), con la finalidad estimar las horas /aula que se liberan si los conocimientos explícitos pueden darse fuera mediante la tecnología y se usara el aula solo para los conocimientos tácitos.

El trabajo fue desarrollado en tres universidades públicas haciendo el estimado de horas que los profesores dedican a la exposición de los contenidos de su asignatura en el aula, con la finalidad de recolectar la información usaron la técnica de la entrevista (presenciales y electrónica), así mismo las asignaturas se organizaron en tres grupos: ciencias naturales y exactas, ciencias sociales y políticas y tecnología e ingeniería; y las herramientas tecnológicas fueron:

entrenamiento basado en computadoras, entrenamiento basado en web, tele entrenamiento por video y teleconferencias.

Trabajaron con la información suministrada de 161 cursos, a los que se les aplicó la propuesta de Belanger y Jordan (2000), (citados en Mcanally-Salas, Navarro, & Rodríguez, 2006), que consiste en calcular las horas que se comprimían en base a las horas dictadas y el factor de conversión calculado para cada una de las herramientas tecnológicas definidas, a saber: entrenamiento basado en computadora 35%, entrenamiento basado en web 35%, teleconferencias 25%, tele-entrenamiento por video 20% y videocintas 20%

Los resultados obtenidos fueron la reducción en un 40% y 60% de tiempo/aula, gracias a un cambio en las estrategias de enseñanza. Lo que se puede traducir en la atención a 60% más de estudiantes por tener una mayor disponibilidad de aulas, sin que esto se traduzca en la recarga a los docentes de un 60% más de trabajo ya que el uso de la tecnología también implica un proceso de tutoría y diseño de experiencias de aprendizaje.

El aporte de esta investigación es la aplicación de las TIC en el aula como una herramienta para los docentes y alumnos para optimizar la relación tiempo/aula. No por razones de demanda y necesidad de atención a mayor número de estudiantes, sino por la relación del tiempo dedicado al estudio de funciones (8 horas de 50min cada una) en el programa de cálculo I y complejidad del tema, por el número de conceptos relacionados y el nivel de abstracción necesario para lograr su comprensión. Por esto es necesario optimizar el tiempo en el aula usando las TIC como una estrategia de apoyo.

Sin embargo no se puede pensar que el uso de la tecnología es la solución a todos los problemas educativos, como lo plantea Cabero (2007), se han creado en torno a las herramientas tecnológicas una gran cantidad de mitos, entre los más influyentes se encuentran los señalados en la Tabla 3

Tabla 3

Mitos y realidades del uso de las herramientas tecnológicas

Mito	Realidad
El valor "per se" de la tecnología como factor de cambio y transformación del proceso educativo.	Las TIC son efectivas en la medida que se relacionen con todas las variables curriculares involucradas.
El mito de los más: más impacto, más efectivo, más fácil de retener, las investigaciones no han llegado a confirmar estos aspectos.	El proceso de aprendizaje del estudiante es el resultado de su interacción cognitiva y social con la información en un momento y contexto dado. No importa la forma como llega la información sino qué se hace y cómo se procesa la misma.
El uso de la tecnología como panacea que resolverá todos los problemas educativos.	Las tecnologías son instrumentos curriculares por lo tanto su efecto pedagógico es directamente proporcional a las interacciones que se establezcan con el resto de los componentes del currículo.

El uso de la tecnología como herramienta de aprendizaje no debe significar un paralelismo entre la información y el conocimiento, ni por tener mayor acceso a la información quiere decir que el estudiante esté más informado o logre un aprendizaje más efectivo. Por esto es necesario la integración activa del estudiante dentro de las estrategias utilizadas, así como la disponibilidad del docente para cambiar su rol protagónico a un gestor del aprendizaje brindándole al alumno un contexto en el que se tome en cuenta su propio ritmo y se estimule el aprendizaje colaborativo, con la finalidad de garantizar el funcionamiento del proceso educativo.

La presente investigación no pretende trabajar tecnología como su principal aporte sino como herramienta de apoyo al proceso de aprendizaje, en este sentido Peñalosa (2010), realizó un trabajo sobre los entornos mixtos aplicados en la educación superior llamado Modelo estratégico de comunicación educativa para entornos mixtos de aprendizaje: estudio piloto. El principal objetivo de este estudio es comprobar el impacto en el aprendizaje de una configuración específica que combina niveles especiales de las dimensiones del modelo que ellos aplican.

El modelo define cuatro dimensiones principales que son:

El ambiente de entrega: entendida esta dimensión como la proporción entre las sesiones presenciales y las virtuales, esta proporción viene determinada por las características del contenido a trabajar.

La estructura de contenidos y materiales: para el diseño de estos entornos mixtos, se debe tomar en cuenta el objetivo del contenido, y los niveles de complejidad cognitiva de los mismos, así como la el tipo de estructura cerrada/abierta que se le quiere dar a las diferentes actividades.

El diseño de experiencias educativas: partiendo del análisis del curso se puede tomar la decisión de fomentar el conocimiento individual o colaborativo, tomando en cuenta el tipo de actividad que se requiere para el aprendizaje, la complejidad que debe soportar el mismo.

Las estrategias de aprendizaje y autorregulación: el ambiente de aprendizaje en línea requiere de herramientas basadas en aprendizaje estratégico que ayuden a los alumnos a desarrollar estrategias de ensayo, de elaboración y organización con diferentes niveles de complejidad, sin dejar de tomar en cuenta la pericia que tienen los estudiantes en las actividades de aprendizaje.

Transversalmente a estas cuatro dimensiones contempla otras dos que son la comunicación y los procesos cognitivos de construcción de conocimientos.

En primera instancia se estableció las características y condiciones de los 36 estudiantes de la carrera de ciencias de la Comunicación que participaron en el estudio y del contenido, con la finalidad de evaluar la aplicación de las diferentes dimensiones, por ejemplo el ambiente de entrega fue predominantemente presencial, así como el material fue estructurado por los investigadores. Es un estudio no experimental con un grupo natural al que se aplicó un pre test y un post test y los resultados fueron estudiados a través de la prueba t student , obteniendo

como resultado un valor de -0.21, con una significatividad de .000, lo cual demuestra la efectividad de esta instancia del modelo mixto referido.

Entre las conclusiones obtenidas en dicho estudio se puede mencionar que es posible construir un modelo mixto en el que se integre las diferentes dimensiones centradas en el estudiante, que aporte en las soluciones de problemas, en la investigación, en el aprendizaje social en entornos de flexibilidad y aplicación tecnológica. Igualmente permite concluir la importancia de presentar, por parte del docente, de forma flexible los niveles pertinentes de cada dimensión en función del análisis de sus cursos. En cuanto a los ejes transversales, la comunicación asume una función motivadora que conduce la construcción de conocimiento, siendo la cognición el motor de esa construcción, en función de la participación en las diferentes actividades planteadas en el proceso de aprendizaje diseñado.

Capítulo 3. Anticipación de Resultados e Instrumentos de Recolección de Datos

Objetivo General y Objetivos Específicos

Objetivo General

Evaluar el diseño de un programa, basado en el constructivismo, que permita mejorar el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas, con el apoyo de un software matemático interactivo, a estudiantes del primer semestre de ingeniería que cursan la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones.

Objetivos Específicos

1. Determinar el nivel de conocimientos previos de los alumnos que cursan la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones sobre las propiedades globales de las funciones a través de la aplicación de un pre test para el grupo experimental y el de control.

2. Diseñar un programa educativo cuyo contenido sea las propiedades globales de la funciones, con aplicaciones diseñadas en el software matemático interactivo GeoGebra como material de apoyo.

3. Aplicar el programa educativo sobre las propiedades globales de las funciones a los estudiantes de cálculo I para telecomunicaciones

4. Medir a través de un post test en el grupo control y en el experimental, el nivel de conocimiento sobre las propiedades globales de las funciones después de trabajar el programa educativo en el grupo experimental.

5. Determinar las diferencias entre los promedios del pre test y el post test del grupo que participó en el grupo control y el experimental.

Resultados Esperados.

Los resultados esperados para este Practicum son:

Hipótesis de investigación

1. Los estudiantes del grupo control y del grupo experimental muestren iguales condiciones en los conocimientos de las características globales de las funciones expresado en las medias de las puntuaciones obtenidas en el pre test.

2. La aplicación del programa educativo en los estudiantes de cálculo I para telecomunicaciones, influye en el rendimiento de los mismos evidenciando un mejor rendimiento estadísticamente significativo en el post test en relación con el pre test en el grupo experimental, en comparación con el grupo control.

3. El grupo experimental logre un mejor rendimiento, mostrando una diferencia estadísticamente significativa expresada en la media del post test, comparada con los estudiantes del grupo control.

Hipótesis nula

1. Los estudiantes del grupo control y del grupo experimental no muestran iguales condiciones en los conocimientos de las características globales de las funciones expresado en las medias de las puntuaciones obtenidas en el pre test.

2. La aplicación del programa educativo en los estudiantes de cálculo I para telecomunicaciones, no influye en el rendimiento de los mismos evidenciando igual rendimiento en la post prueba en relación con el pre test en el grupo experimental, en comparación con el grupo control.

3. El grupo experimental logre una media igual en el rendimiento del post test comparada con los estudiantes del grupo control.

Variable Independiente

La variable independiente en este estudio está representada por el programa educativo diseñado en base a la teoría constructivista. En propósito principal del programa es enseñar las propiedades globales de las funciones, utilizando los diferentes lenguajes de representación matemática iniciando con las representaciones gráficas para luego formalizar los conceptos de forma algebraica.

Variable Dependiente

El aspecto que se desea influenciar con el programa educativo es el nivel de aprendizaje de las propiedades globales de las funciones reflejado en los resultados del pre test y post test, medida en el número de respuestas correctas obtenidas.

Medición de resultados

Para la obtención de los datos se elaboró una prueba escrita (ver Anexo A), esta prueba fue presentada por los alumnos del grupo experimental y control antes y después de la intervención didáctica diseñada.

Los contenidos evaluados eran las características globales de las funciones: crecimiento, decrecimiento, asíntotas, concavidad, puntos máximos, puntos mínimos y puntos de inflexión. Cada una de las características evaluadas fue expresada en las diferentes formas de representación matemática, es decir para la monotonía el alumno debía identificar en una gráfica dada, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la curva, luego escribir en notación matemática dichos intervalos así como los puntos máximos y mínimos, posteriormente crear una gráfica que cumpliera con unas determinadas características de monotonía y por último calcular analíticamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función dada; de igual forma se evaluó la concavidad y los puntos de inflexión, para la evaluación de las asíntotas los alumnos debieron identificar las diferentes asíntotas mostradas en una gráfica, escribir las ecuaciones de las rectas y por último calcular analíticamente las diferentes asíntotas a determinadas funciones.

La prueba consistió en quince (15) preguntas, la calificación máxima fue de 30 puntos, para la ponderación de cada una de las preguntas se tomó en cuenta el número de resultados parciales necesarios para responder las preguntas de forma correcta. Fue aplicada en sesiones de dos horas académicas (hora académica de 50 min).

Para validar el contenido de la prueba fue analizada por dos expertos en la materia y aprobada por la profesora asesora.

Capítulo 4. Estrategia de Solución

Este capítulo contiene las estrategias desarrolladas en la investigación con la finalidad de resolver el problema planteado está dividido en tres secciones: a) el planteamiento del problema y los trabajos de investigación que han realizado diversos profesionales que aportan soluciones a situaciones similares y muestran aspectos importantes a tomar en cuenta en la estrategia de solución diseñada, b) la descripción detallada del diseño instruccional argumentado según la teoría seleccionada y c)los detalles de la implementación de dicho diseño.

Discusión y Evaluación de Soluciones

El problema a resolver en este Practicum fue: ¿Los estudiantes de ingeniería que cursan la asignatura de cálculo I de la escuela de telecomunicaciones mejorarán su aprendizaje en el estudio de funciones si se usan las gráficas para explicar en cada uno de los conceptos relacionados usando como apoyo las herramientas tecnológicas?

La forma de concebir la actividad educativa, desde la teoría constructivista, debe tener como protagonista al estudiante como ser individual con diversas formas y tiempo de aprendizaje, es por esto que los diferentes tipos de representación: analítico, geométrico, gráfico y verbal, utilizados en matemática pueden ayudar a que cada estudiante pueda acceder a la información desde la aproximación que más se adapte a su realidad. En este sentido se toma como referencia para este estudio de algunos autores que muestran coincidencia

con relación a determinados aspectos contemplados en el diseño de las estrategias de solución de la presente investigación.

Sabrina Garbín (2005), realizó una investigación sobre el concepto de infinito, en el marco de la matemática, utilizando diferentes tipos de representaciones. El estudio mostró que el paso de un tipo de representación matemática a otra puede crear incongruencias y la forma de solventarlas es distinguir explícitamente el objeto de su representación, así como establecer las relaciones pertinentes entre las diferentes representaciones semióticas, también reconoce el impacto que tiene los diferentes lenguajes y el contexto sobre las percepciones y los razonamientos de los alumnos. Otra investigación que aporta información relevante es la de Trigueros María y Covadonga Escandón (2008) estos autores realizaron un estudio sobre los conceptos relacionados a la graficación en tres direcciones: primero identificar los conceptos claves en la resolución de problemas de graficación de funciones, segundo la estructura que tiene un papel dominante en la solución de los problemas y por último identificar las dificultades de los estudiantes partiendo de sus propias concepciones. Los resultados obtenidos señalan la importancia de relacionar de forma explícita las relaciones entre los diferentes conceptos. Estas dos investigaciones se realizaron con grupos de estudiantes de edades semejantes y muestra la importancia del uso de los diferentes tipos de representaciones matemáticas y las relaciones que se establezcan entre ellas con la finalidad de mantener la coherencia en el aprendizaje del concepto.

El estudio tipo experimental realizado por Bagni (2004), consistió en aplicar tres encuestas a dos grupos de estudiantes de dos niveles diferentes, en la primera solo se presentaban gráficas, en la segunda encuesta se requeria del cálculo del dominio de una función y en la última se pedia resolver integrales realizando las operaciones analíticas, de los resultados reflejados en esta investigación se obtiene la importancia de relacionar todos los tipos de referencia semiótica porque la representación gráfica únicamente puede conducir a adquirir un falso concepto. Igualmente la investigación realizada por Dolores (2004), muestra un aporte semejante en el que la representación gráfica debe ser reforzada por otra forma de representación.

En cuanto al uso de la tecnología Maita (2005), realizó una investigación sobre el aprendizaje de funciones reales con el uso de un software educativo, elaborado particularmente para dicho estudio, demostrando que el rendimiento de los alumnos del grupo experimental fue significativamente mejor que los resultados obtenidos en el grupo control, lo que manifiesta el impacto positivo que tiene el uso de la tecnología en los procesos de aprendizaje.

La investigación de Pecharromán (2009), está basada en el marco teórico de Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2005), fue aplicada en estudiantes del 2do ciclo de ESO, que lograron mejorar su rendimiento en el estudio de las propiedades globales de las funciones, basándose únicamente en el uso de gráficas. Este estudio difiere en las características de la muestra y en la problemática planteada por la presente investigación, sin embargo fue tomada como referencia por el diseño de las sesiones de clase.

En resumen las investigaciones anteriores muestran que las representaciones gráficas para la explicación de las propiedades de las funciones ayuda a los estudiantes a mejorar la adquisición de los diferentes conceptos, sin embargo es necesario vincularlas a las demás formas de representación semiótica para evitar inconsistencias, por otro lado el uso de la tecnología, como apoyo a la labor educativa del docente, proporciona un componente adicional que potencia el aprendizaje. En base a estos resultados se elaboró el siguiente diseño de instrucción con la finalidad de solventar la situación planteada en el problema.

Descripción de las Soluciones Seleccionadas

La siguiente intervención está basada en la teoría constructivista, que es el producto de varias tendencias, por este motivo no es posible hablar de una estructura rígida que se pueda aplicar en el ámbito educativo; sin embargo se pueden encontrar, como lo indica Silva y Ávila (1998) algunos elementos conceptuales y epistemológicos que llevan a caracterizar algunos supuestos teóricos como la concepción del conocimiento, del aprendizaje, de la memoria, del docente, del estudiante y de la instrucción. Estos supuestos teóricos aplicados a la práctica se traducen en acciones concretas que permite integrar las diferentes tendencias en un diseño instruccional coherente.

Por otro lado en el marco del cambio curricular que se lleva a cabo en la institución donde se desarrolla el estudio es necesario establecer las competencias pertinentes a la intervención, en este caso serían según el documento Proyecto formativo institucional (2012):

> Aprender a aprender con calidad: utiliza estrategias de forma autónoma para incorporar e incrementar conocimientos, habilidades y destrezas en el contexto de los avances científicos y culturales requeridos para un ejercicio profesional globalmente competitivo.
>
> Aprender a trabajar con el otro: interactúa con otros en situaciones diversas y complejas para alcanzar objetivos comunes, en un entorno donde el equilibrio de los roles procura resultados beneficiosos para todos (p 35).

La intervención educativa planificada se desarrolló en siete sesiones de clases, seis de las cuales tendrían una duración de dos horas y una sesión de una hora, para un total de 13 horas académicas (una hora académica tiene 50 min de duración); la primera y última sesión fueron dedicadas a la aplicación del pre y post test.

Las sesiones, en general, estaban estructuradas en seis partes que contemplaban los siguientes aspectos:

Actividades didácticas: esta primera fase perseguía varios objetivos, uno de ellos era informar en el mayor grado posible a los alumnos la actividad que se desarrollaría durante la clase, el otro era indagar a través de preguntas guiadas, el estado inicial de los alumnos (Coll, y otros, 2011) en cuanto al conjunto de conocimientos, instrumentos , estrategias y habilidades pertinentes al concepto o conceptos a trabajar, que han ido adquiriendo a lo largo de su desarrollo personal y escolar.

Exposición didáctica: en cada uno de las sesiones se le entregó a los estudiantes Hojas de trabajo (ver Anexo B) en que se les indicaba por escrito los

objetivos y las actividades a desarrollar, la primera actividad estaba planificada para que el alumno la desarrollara en forma individual, con la orientación del docente, para de promover estrategias de planificación de la acción, la responsabilidad, la autonomía y el autocontrol en el alumno. La segunda parte era una actividad estructurada para ser realizada por los alumnos organizados en pequeños grupos, lo que permitió al docente desplazarse y prestar la ayuda adecuada al grado de realización de la tarea. (Coll, y otros, 2011). En este apartado se presentó la herramienta tecnológica diseñada por el docente, por lo tanto adecuada a las características del contenido. Esta herramienta consistió en dos animaciones desarrolladas en el software libre GeoGebra en la primera de ellas se muestra la gráfica de una función y la de su primera derivada, y la segunda la gráfica de la función y la segunda derivada, en las gráficas se distinguen sus características, signo de la función, puntos de corte con los ejes de coordenadas, la monotonía o la concavidad según sea el caso, asi como los puntos máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Modelado: en esta etapa de la sesión se integraron las diferentes forma de representación trabajadas durante las etapas anteriores, como lo menciona Zabala (1989) (citado en Coll, y otros, 2011) con un enfoque globalizador del contenido, logrando el mayor número posible de relaciones, que es lo que constituye finalmente la estructura del conocimiento.

Práctica guiada: partiendo de la afirmación de Flores (1994 citado en Silva & Ávila, 1998) “el verdadero aprendizaje humano es una construcción de cada alumno, que logra modificar su estructura mental” (p 48) en esta etapa de la

sesión el estudiante es el encargado de resolver ejercicios organizados en pequeños grupos, promoviendo de esta forma un ambiente de discusión, en el marco del respeto por la opinión, las debilidades y fortalezas del otro. En esta etapa la función del docente fue actuar como mediador, consciente de las diferencias individuales, respetando el ritmo y la forma de abordar el aprendizaje por parte de cada uno de los estudiantes.

Retroalimentación: el objetivo de esta etapa de la clase era analizar o interpretar los resultados obtenidos en la etapa anterior, fue una actividad desarrollada utilizando en pizarrón con la participación de todos. En esta fase fue necesario valorar el error como forma de reflexión y aprendizaje.

Evaluación: en cada una de las sesiones la evaluación fue interpretada como una actividad integradora, realizada en forma individual o colectiva que permitió al docente la observación contínua del proceso de aprendizaje de forma tal que permitió aplicar las correcciones necesarias durante el proceso y no al final de la unidad.

A continuación se presentan cada una de las sesiones diseñadas:

Sesión 1: Aplicación del pre test.

(Duración 2 horas de 50 min cada una)

Sesión 2: Estudio de las propiedades globales de las funciones: Monotonía (crecimiento y decrecimiento de las funciones*)*

(Duración 2 horas académicas de 50 min cada una)

Objetivos didácticos

Al finalizar la sesión de clases los alumnos deberán:

1. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función expresada en forma algebraica, usando la primera derivada.

2. Calcular los puntos máximos y mínimos de una función expresados en forma algebraica, usando la primera derivada.

3. Graficar una función expresada en forma algebraica usando los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los puntos máximos y mínimos calculados a través de la primera derivada.

Contenidos conceptuales

1. Puntos máximos y mínimos de una función.

2. Estudio de la monotonía de una función.

3. Gráfica de funciones.

Contenidos procedimentales

1. Identifica los puntos máximos y mínimos en la gráfica de una función.

2. Identifica en la gráfica de las funciones los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

3. Escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las gráficas de las funciones.

4. Escribe las coordenadas de los puntos máximos y mínimos de las gráficas de las funciones.

5. Construye las gráficas de funciones dadas ciertas condiciones como son intervalos de crecimiento y decrecimiento, coordenadas de puntos máximos y mínimos.

6. Calcula a partir de la función expresada en forma algebraica los intervalos donde la misma es creciente o decreciente, aplicando la primera derivada.

7. Calcula a partir de la función expresada en forma algebraica los puntos máximos y mínimos, usando la primera derivada.

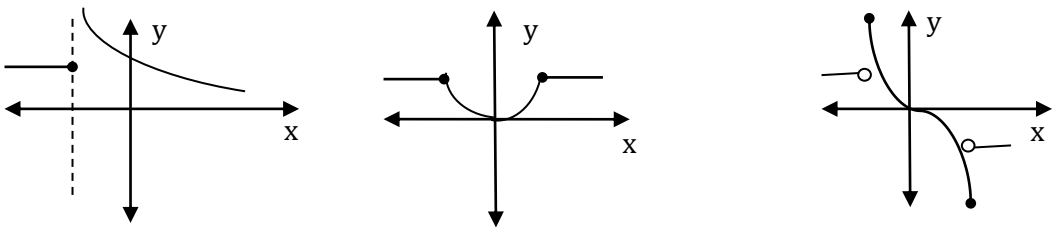
8. Grafica la función expresada algebraicamente.

Contenidos Actitudinales

Participa activamente en el aula y en el equipo de trabajo, aportando sus ideas y opiniones sobre las diferentes actividades relacionadas con la monotonía de una función y su gráfica.

Actividades didácticas

Inicio: el docente mediante preguntas y ejemplos escritos en la pizarra trató de que los estudiantes activaran los conocimientos previos de los alumnos, en relación al dominio, simetría y signo de las funciones. Para ello se usan gráficas como:



En la que los alumnos tenían que intervenir para indicar el dominio, simetría y signo de la función. Por último se plantea el objetivo de la sesión y se distribuye el material necesario.

Exposición didáctica

Con la ayuda del material de apoyo los estudiantes de forma individual indican los puntos máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento, primero identificándolo en la gráfica y luego escribiéndolo. Una vez terminada la actividad se discuten los resultados obtenidos en el pizarrón, aclarando las dudas y las dificultades a las que se enfrentaron en la resolución de la actividad.

Se presenta la aplicación diseñada en software matemático interactivo GeoGebra resaltando, en la gráfica de la función, los conceptos de: intervalos de crecimiento y decrecimiento, puntos máximos y mínimos, y en la gráfica de la primera derivada de la función, el signo de la misma y los valores de la variable independiente (x) cuando la variable dependiente (y) se hace cero. Se les deja en la pantalla la aplicación como guía para que respondan la tercera parte del material entregado (ver Anexo C).

Modelado

Una vez establecidas por los alumnos las relaciones gráficas de la primera derivada con los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los puntos máximos y mínimos, el docente calcula analíticamente el crecimiento, decrecimiento de una función expresada algebraicamente y luego la grafica usando los datos obtenidos de la primera derivada, con la participación de los alumnos.

Práctica guiada

Los alumnos organizados en parejas calculan los intervalos de crecimiento, decrecimiento, puntos máximos y mínimos y luego basándose en esas condiciones obtenidas grafican la función.

Retroalimentación

Los alumnos comentan sus resultados, lo escriben en el pizarrón, verifican los resultados y aclaran las posibles dudas.

Evaluación

Cada uno de los alumnos escribe en una hoja, en un máximo de tres líneas, los conocimientos más importantes de la clase. Evaluación formativa.

Sesión 3. Estudio de las propiedades globales de las funciones: Concavidad

Objetivos didácticos:

Al finalizar la sesión el alumno estará en capacidad de:

1. Calcular los intervalos de concavidad de una función expresada en forma algebraica, usando los signos de la segunda derivada.
2. Calcular los puntos de inflexión de una función expresada en forma algebraica, usando los signos de la segunda derivada.
3. Graficar una función expresada en forma algebraica usando los intervalos de concavidad, así como los puntos de inflexión calculados a través de la segunda derivada de la función.

Contenidos conceptuales

1. Concavidad de una función.
2. Puntos de inflexión.
3. Gráfica de funciones basándose en la concavidad.

Contenidos Procedimentales

1. Identifica en la gráfica de una función el intervalo donde es cóncava hacia arriba Identificar por los intervalos de concavidad los puntos de inflexión.
2. Identifica en la gráfica de una función el intervalo donde es cóncava hacia abajo.
3. Identifica los puntos de inflexión en la gráfica de una función.
4. Escribe los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las gráficas de las funciones.
5. Escribe las coordenadas de los puntos de inflexión.
6. Construye la gráfica de una función dada las condiciones de concavidad.
7. Calcula los intervalos de concavidad de una función expresada en forma algebraica usando la segunda derivada.
8. Calcula los puntos de inflexión de una función expresada en forma algebraica, usando los signos de la segunda derivada

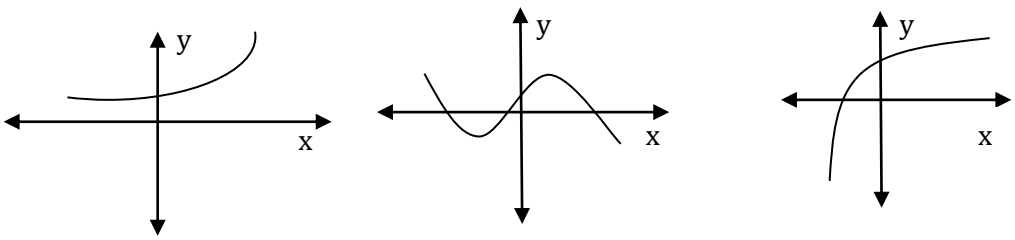
9. Grafica la función basada en los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión en el plano cartesiano

Contenidos actitudinales

El alumno se comunica, interactúa y colabora activamente en el equipo de trabajo con la finalidad de resolver las actividades planteadas en la Hoja de Trabajo Nº2.

Actividades didácticas

Inicio: el docente inicia la clase comentando las respuestas dadas por los alumnos en la clase anterior. Define los términos que se van a trabajar en clase: cóncavo, convexo, cóncavo hacia arriba, cóncavo hacia abajo y puntos de inflexión, con la ayuda de los alumnos y basándose en gráficas como las siguientes:



Se plantea el objetivo de la clase, las instrucciones y distribuye el material diseñado para la sesión.

Exposición didáctica

Con la ayuda del material de apoyo los estudiantes de forma individual indican los intervalos de concavidad de las gráficas de las funciones mostradas y los puntos de inflexión. Una vez terminada la actividad se discuten los resultados

obtenidos en el pizarrón, aclarando las dudas y discutiendo las dificultades a las que se enfrentaron durante la resolución de los ejercicios de la actividad.

Se presenta la aplicación diseñada en el software GeoGebra resaltando, en la gráfica de la función, los conceptos de concavidad y puntos de inflexión, así como la gráfica de la segunda derivada de la función el signo de la misma en los diferentes intervalos y los valores de la variable independiente (x) cuando el valor de la segunda derivada se hace cero. Se les deja en la pantalla la aplicación como guía (ver Anexo C).

Modelado

Una vez establecidas por parte de los alumnos las relaciones de la segunda derivada con los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión, el docente calcula analíticamente esta propiedad en una función expresada algebraicamente y luego la graficará, con la ayuda y participación de los alumnos.

Práctica guiada

Los alumnos organizados en parejas calculan analíticamente los intervalos de concavidad y puntos de inflexión, de una función expresada algebraicamente, y luego basándose en esas condiciones obtenidas la grafican.

Retroalimentación

Los alumnos de forma espontánea comentan sus resultados de forma escrita y anotando las respuestas en el pizarrón aclarando las posibles dudas y manifestando dificultades y verificando los resultados.

Evaluación

Cada uno de los alumnos escribe en una hoja en un máximo de tres líneas los conocimientos más importantes de la clase. Evaluación formativa.

Sesión 4. Estudio de las propiedades globales de las funciones: Asíntotas

(Duración 50 min)

Objetivos didácticos:

Al finalizar la sesión el alumno estará en capacidad de:

1. Calcular las asíntotas horizontales de las funciones expresadas en forma algebraica, a través del concepto de limite y escribirla en notación matemática como la ecuación de la forma Y=k
2. Calcular las asíntotas verticales de las funciones expresadas en forma algebraica, a través del concepto de límite y escribirla en notación matemática como la ecuación de la forma X=k
3. Calcular las asíntotas oblicuas de las funciones expresadas en forma algebraica, a través del concepto de límite y escribirla en notación matemática como la ecuación de la forma Y=mx+b

Contenidos conceptuales

1. Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de una función.

Contenidos Procedimentales

1. Identifica en la gráfica la tendencia funcional en abscisa finita e infinita.

2. Expresar de forma escrita la tendencia lateral de una gráfica para valores positivos y negativos de x.

3. Graficar una función dadas una condiciones de tendencia determinada.

4. Calcula el límite de una función cuando x tiende a infinito positivo y cuando x tiende a infinito negativo.

5. Calcula el límite cuando x tiende a los valores que son raíces del denominador de una función.

6. Calcula la pendiente de la recta oblicua, asíntotas de la función a través del límite

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{x} \quad \text{y/o} \quad m = \lim_{x \to -\infty} \frac{F(x)}{x}$$

7. Calcula el valor del parámetro b de la ecuación de la asíntota oblicua de la función a través del límite

$$b = \lim_{x \to -\infty} [F(x) - mx] \quad \text{y/o} \quad b = \lim_{x \to \infty} [F(x) - mx]$$

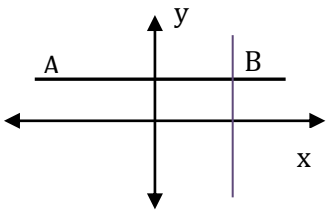
8. Escribe la ecuación de la asíntota oblicua expresada por la ecuación Y=mx+b

Contenidos actitudinales

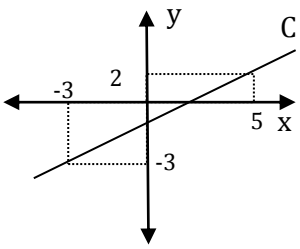
Participar de forma activa con los compañeros de equipo en la resolución de las actividades señaladas en la Hoja de Trabajo Nº3, proponiendo soluciones o negociando las formas de soluciones propuestas por los demás.

Actividades didácticas

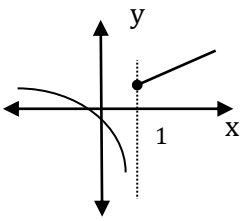
Inicio: el docente inicia la clase comentando las respuestas dadas por los alumnos en la clase anterior. Luego activa los conocimientos previos de los alumnos referidos a las ecuaciones de las rectas horizontales, verticales y oblicuas, el concepto y los métodos de resolución de límites de una función, cuando la variable independiente tiende a infinito o el límite tiende a infinito, a través de preguntas basadas en gráficas como las siguientes:



Gráfica 1



Gráfica 2

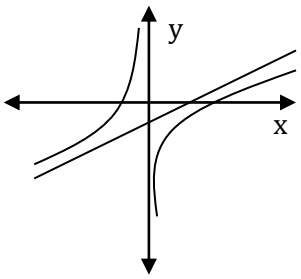


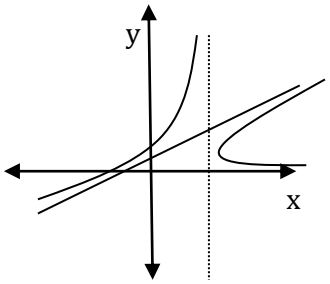
Gráfica 3

¿Cuál es la ecuación de las rectas A, B y C?

¿Cuáles son los límites laterales de la función representada en la gráfica 3 cuando x tiende a 1?

Luego se plantean gráficas como las siguientes:





Se plantea el objetivo de la clase, las instrucciones pertinentes a la clase y se distribuye el material necesario.

Práctica guiada

Los alumnos organizados en parejas y con la ayuda de la Hoja de trabajo Nº 3 responden cada una de las preguntas planteadas con relación a la tendencia de las gráficas de las funciones así como el cálculo de los diferentes tipos de asíntotas.

Retroalimentación

El docente pasa por cada uno de los equipos guiando el trabajo de los alumnos con preguntas que los ayuden a reflexionar sobre la forma adecuada de resolver los ejercicios y apoyando el trabajo en equipo estimulando la discusión productiva de todos los integrantes.

Evaluación

Al finalizar se retiraran las tres hojas de trabajo entregadas con la finalidad de observar el progreso que han tenido los alumnos. Evaluación formativa.

Sesión 5. Estudio de las propiedades globales de las funciones

(Duración 2 horas de 50 min cada una)

Objetivos didácticos:

Al finalizar la sesión el alumno estará en capacidad de:

1. Graficar funciones expresadas en forma algebraica calculando los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la concavidad, las diferentes asíntotas, y los puntos críticos, usando para ello la primera y la segunda derivada, y los límites correspondientes.

2. Graficar funciones expresadas en base a sus características globales, interpretando cada una de dichas expresadas en términos de intervalos, tendencia de las funciones y coordenadas de puntos.

Contenidos conceptuales

1. Gráfica de funciones.

Contenidos Procedimentales

1. Calcula la primera derivada de la función.
2. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
3. Determina las coordenadas de los puntos máximos y mínimos
4. Calcula la segunda derivada de la función.
5. Determina los intervalos de concavidad de la función.
6. Determina las coordenadas de los puntos de inflexión.
7. Calcula las asíntotas horizontales de la función.
8. Calcula las asíntotas verticales de la función
9. Calcula las asíntotas oblicuas de la función.

Contenidos actitudinales

Se comunica, interactúa y colabora activamente en el equipo de trabajo con la finalidad de resolver las actividades planteadas en la Hoja de Trabajo Nº4.

Actividades didácticas

Inicio: el docente inicia la clase comentando las respuestas dadas por los alumnos en la Hojas de trabajo Nº 1, 2,3, de esta forma activa los conocimientos adquiridos en las demás sesiones de clase. En esta fase de la clase se dan ejemplos concretos de aplicaciones prácticas del estudio de funciones en el área de transporte y emisión de señales. Luego se plantea funciones en forma algebraica como:

$f(x)=x^2-3$, $g(x)=\frac{2}{3-x}$ y $h(x)=\ln(3x-1)$ y se les pide a los alumnos que realicen las gráficas de esas funciones en forma individual, con el objetivo de mostrar la importancia de graficar usando la propiedades estudiadas en las sesiones anteriores y plantea el objetivo de la sesión.

El docente selecciona una de las funciones de la Hoja de trabajo Nº4 para que los estudiantes organizados en equipos de tres integrantes máximo calculen: la primera derivada de la función, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos máximos y mínimos, la segunda derivada, los intervalos de concavidad, los puntos de inflexión, la asíntota horizontal, la asíntota vertical y asíntotas oblicuas.

Modelado

Una vez terminada la actividad anterior los alumnos, de forma espontánea, pasan al pizarrón a escribir las características ya calculadas, verificando las respuestas obtenidas y aclarando las posibles dudas. El docente con la ayuda de los estudiantes grafica la función indicando el orden más adecuado de las propiedades de las funciones y la nomenclatura comúnmente usada para ello.

Práctica guiada

El docente asigna de la Hoja de trabajo Nº4 una función expresada en base a las propiedades globales de las funciones para que los alumnos la grafiquen.

Evaluación

El docente pasa por cada uno de los grupos, guiará a los estudiantes en la gráfica de la función y estimulará la participación de todos los integrantes del equipo, escuchando igualmente los tópicos donde tienen mayor dificultad y sugerirá como forma de solución para solventar las dificultades el repaso de las hojas de trabajo de las sesiones anteriores.

Sesión 6. Aplicación del post test.

Duración 2 horas académicas.

Se les pide a los alumnos que manifiesten en forma verbal su percepción de la actividad, en cuanto a su organización y la pertinencia de los materiales utilizados.

Informe de las Acciones Tomadas.

El trabajo de investigación se desarrolló con un grupo de 26 alumnos que cursan la asignatura de cálculo I de telecomunicaciones, con un promedio de 17 años de edad, el 93 % provenían de colegios privados y están residenciados en la misma ciudad donde se encuentra ubicada la institución, es la primera vez que cursan la asignatura. Los materiales utilizados durante las cinco sesiones fueron fotocopias, video beam, pizarrón acrílico y marcadores de colores.

La autora del estudio es la docente encargada de la asignatura durante el período escolar, por lo tanto fue la encargada de desarrollar las diversas actividades programadas.

Sesión 1: antes de aplicar el pretest, se les explicó a los alumnos las razones del estudio, la justificación de hacer la investigación con el tema de estudio de funciones, así como la relevancia que tiene el tema dentro de la asignatura. El tiempo requerido por los alumnos para responder la prueba fue de 30 min en promedio.

Sesión 2: se cumplió en el tiempo planificado y se lograron cubrir los objetivos previstos, la mayoría de las dificultades que se presentaron con los alumnos fueron: escribir los intervalos donde la gráfica era creciente o decreciente, porque confundían la variable dependiente (x) y la independiente (y), en la gráfica que ellos debían crear no lograban interpretar los intervalos dados como condiciones y pocos llegaron a la conclusión que la pregunta puede tener diferentes respuestas. La animación presentada con el video beam resultó de gran

ayuda para entender la relación entre la primera derivada , los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los puntos máximos y mínimos de la función. Por último cuando se llegó el momento de calcular los intervalos de crecimiento, decrecimiento, puntos máximos y mínimos a los alumnos les resultó sumamente fácil deducir el procedimiento a seguir.

Entre los comentarios realizados por los alumnos durante la etapa de evaluación de la actividad se pueden destacar los siguientes:

> El apoyo tecnológico fue una herramienta importante, así mismo las preguntas realizadas posteriormente complementaron la vista en la presentación que significó entender más rápido los ejercicios.
>
> Cuando la pendiente de la recta tangente es positiva la función crece y de forma viceversa. La derivada de la función en los puntos máximos y mínimos cambia de signo. Para esbozar una función, se aplica primero la derivada, para hallar los valores de x, se prueban signos y por último se hallan los valores de corte con el eje de las ordenadas.
>
> Es más fácil aprender el estudio de las funciones comenzando por el análisis de las gráficas; así se tiene una noción básica de la estructura de la misma, ya que el resto son cuentas numéricas. PD ha sido la mejor clase que he tenido.
>
> Comprensión de cómo obtener la monotonía intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función de manera más sencilla que la que aparece en algunos libros.
>
> Con estas clases de corregido y superado fallas, la dinámica ha sido muy exitosa en todos los aspectos gracias a la serie de colores que llamaron la atención. Espero que proyecten esta actividad siempre para el entendimiento de todos.

Sesión 3: La sesión se inició con las dudas que se presentaron de la clase anterior, quedaron ejercicios para ser realizados por ellos de forma independiente. En el trabajo individual los alumnos no lograban identificar el punto de inflexión de las gráficas, les fue más fácil graficar la función dada por los intervalos de concavidad y cometieron menos errores al escribirlos en forma de intervalos. Para

la evaluación de esta actividad se tenía previsto que los alumnos expresaran de forma escrita sus propias conclusiones de la clase, sin embargo después de las fase de reflexión fue necesario aclarar algunas dudas generales como: la evaluación de las signos de la segunda derivada, la importancia de evaluar el dominio de la función, la diferencia entre los valores de las variables independientes (x) que daban origen a los puntos de inflexión de los valores de la variable independiente (x) que no pertenecían al dominio de la función. Por este motivo la evaluación se realizó en forma verbal en el aula de clase con el grupo completo de alumnos

En la sesión 4, el tiempo planificado no fue suficiente, los alumnos lograban diferenciar entre las tendencias de la función y las asíntotas cuando se presentaban de forma gráfica, sin embargo el paso a la expresión algebraica representó para ellos una mayor dificultad. Al estudiar las asíntotas verticales y horizontales fue necesario hacer preguntas basadas en las gráficas como ¿a qué tiende la variable independiente (y) para los valores de la variable independiente (x) próximos a la asíntota vertical?, ¿qué valor tiene el límite cuando la variable independiente (x) tiende a infinito o menos infinito? ¿Qué concluyen?, estas preguntas ayudaron a los grupos a llegar a las conclusiones adecuadas. Para los alumnos fue fácil relacionar la ecuación de la recta con las asíntotas oblicuas, aunque el cálculo analítico de las mismas no fue tan obvio, para solventar la situación se incluyeron algunas funciones para que los alumnos calcularan cada una de las asíntotas por separado, para aclarar las dudas y afianzar el conocimiento con la práctica. El ejercicio planteado en la hoja N°4 se dejó asignado para la próxima clase.

La sesión 5 se inició con preguntas relacionadas con el ejercicio de las asíntotas y los resultados obtenidos en ella, también se entregaron las hojas de trabajo N° 1 y 2 con las correcciones correspondientes. En esta sesión se integraron todas las sesiones anteriores, en cuanto a los conceptos, los alumnos hacían referencia a las presentaciones hechas en GeoGebra cuando necesitaban recordar o el docente les estimulaba a hacer pequeñas gráficas de apoyo para recordar un concepto específico, como las asíntotas por ejemplo. Los alumnos lograron expresar los diferentes conceptos de forma gráfica, verbal y algebraica, para luego hacer los cálculos analíticos correspondientes. En general se lograron los objetivos planteados en el tiempo planificado.

Sesión 6: se aplicó el post test, agradeciendo la colaboración de todos, los alumnos terminaron la prueba en una hora (60 min) el doble del tiempo requerido en el pre test.

Capítulo 5. Resultados.

Es este capítulo se presentan los resultados obtenidos después de haber aplicado la intervención diseñada, mostrando la discusión de los mismos, tomando en cuenta los estudios usados como referencia y la literatura correspondiente. Todo esto con la finalidad de realizar recomendaciones pertinentes para su difusión.

Resultados.

La presente investigación nació de la necesidad de mejorar el rendimiento de los estudiantes de cálculo I para telecomunicaciones en el estudio de funciones, usando como herramienta las representaciones gráficas para explicar las características globales de las funciones, teniendo la teoría constructivista como marco de referencia.

Por lo antes expuesto se diseñó y aplicó un proceso didáctico, basado en el constructivismo, que permitió mejorar el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas, con el apoyo de un software matemático interactivo libre, a estudiantes del primer semestre de ingeniería que cursan la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en el pre test y post test aplicado al grupo experimental y al grupo control.

Resultados previstos para comprobar la primera hipótesis planteada, que consistió en verificar si ambos grupos eran semejantes en sus condiciones iniciales comparando al valor de sus medias.

Tabla 4.

Estadísticos descriptivos del Pre test.

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica.
Grupo Experimental	26	0	12	3,31	2,950
Grupo Control	17	4	18	8,06	3,750

La media para el grupo control en el pretest es mayor ($\overline{X}$ = 8,06) que la media calculada para el grupo experimental ($\overline{X}$ = 3,31) como se muestra en la Tabla 4.

Con la finalidad de comparar estadísticamente si las medias entre los grupos son equivalentes, o si existen diferencias significativas, se aplicó la prueba de Mann-Whitney U para muestras independientes como se puede observar en la Tabla 5, un $p < .01$, lo que muestra que las dos medias tienen una diferencia significativa y se debe rechazar la hipótesis de la igualdad de condiciones.

Tabla5.

Estadísticos de contraste del Pre test.

	Pre test
Mann-Whitney U	54,000
Wilcoxon W	405,000
Z	-4,172
Asymp. Sig. (2-tailed)	,000

La segunda hipótesis planteada se refirió al rendimiento de los alumnos en el pre test con referencia al post test una vez realizada la intervención en el grupo control y experimental.

Tabla 6.

Estadísticos descriptivos para el grupo experimental.

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica.	Varianza
Pre-exp	26	0	12	3,31	2,950	8,702
Post-exp	26	4	28	13,00	6,505	42,320
N válido (según lista)	26					

Como se observa en la Tabla 6, la media del post test es mayor ($\overline{X}$ = 13,00) que la obtenida en el pre test ($\overline{X}$ = 3,31), en el grupo experimental.

Se aplicó la prueba de Wilcoxon para variables dependientes para valorar la equivalencia o no de las medias de las dos distribuciones y los resultados mostraron (Z=-4,462, p<.01) que se debe rechazar la hipótesis nula como se muestra en la Tabla 7, que indica la diferencia significativa entre las dos medias.

Tabla 7.

Estadísticos de contraste para el grupo control.

	Pre_test - Post_test
Z	-4,462[a]
Sig. asintót. (bilateral)	,000

La siguiente tabla muestra los estadísticos descriptivos de los resultados del grupo control en el pre test y post test.

Tabla 8.

Estadísticos descriptivos para el grupo control

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.	Varianza
Pre-ctrl	17	4	18	8,06	3,750	14,059
Post-ctrl	12	4	20	10,50	5,885	34,636

Como lo muestra la Tabla 8, la media del post test en el grupo control es mayor ($\overline{X}$ = 10,50) que el valor obtenido en la media para el pre test en el mismo grupo ($\overline{X}$ = 8,06). Al aplicar la prueba de Wilcoxon para variables dependientes, Tabla 9 (Z=-1,183 y p=0,237) se encontró que las muestras no tienen diferencias significativas en sus medias.

Tabla 9.

Estadísticos de contraste para el grupo control.

	Post_ctrl Pre_ctrl
Z	-1,183[a]
Sig. asintót. (bilateral)	,237

La tercera hipótesis se refiere al rendimiento de los alumnos del grupo experimental y control mostrado en el post test, para esto se calcularon los estadísticos descriptivos correspondientes como la muestra la Tabla 10

Tabla 10.

Estadísticos descriptivos del post test.

	N	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típica	Varianza
Grupo Experimental	25	5	28	13,56	6,138	37,673
Grupo Control	12	5	20	11,08	5,518	30,447

La media del grupo experimental tiene un valor en la media mayor ($\overline{X}$ = 13,56) que el calculado para el grupo control ($\overline{X}$ = 11,08). Sin embargo al aplicar la prueba U de Mann_Whitney la diferencia no es significativa (Z=-1,196, p=0,243) como se puede observar en la Tabla 11, por lo que se debe aceptar la hipótesis nula.

Tabla 11.

Estadísticos de contraste para el post test.

	Post_test
U de Mann-Whitney	118,000
W de Wilcoxon	196,000
Z	-1,196
Sig. asintót. (bilateral)	,232
Sig. exacta [2*(Sig. unilateral)]	,243[a]

Discusión.

El presente estudio es de tipo cuantitativo cuasi experimental, de tipo "diseño de grupo control no equivalente" (Kerlinger & Howard, 2002, p 484). Las diferencia entre los grupos, control y experimental, fueron las siguientes:

1. El grupo control inició con 17 alumnos el pre test y terminó con 12 alumnos el post test, el grupo experimental tenía 26 alumnos, que se conservaron a lo largo de la intervención. Al iniciar el semestre los grupos tenían 34 y 35 alumnos para el grupo control y experimental respectivamente, pero 14 alumnos del grupo control retiraron la materia al igual que 9 estudiantes del grupo experimental.

2. Las condiciones iniciales eran diferentes en cuanto a los conocimientos previos de los alumnos. El profesor encargado del grupo control tiene un orden diferente al dictar los contenidos de la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones y ya había trabajado en clase las asíntotas horizontales y verticales con los alumnos, este hecho influyó en los resultados obtenidos en el momento de comprobar la primera hipótesis en el que los alumnos del grupo control obtuvo una media mayor ($\overline{X}$=8,06) con respecto a la media obtenida por el grupo experimental ($\overline{X}$=3,31) siendo ésta una diferencia significativa.

Con respecto al análisis de la segunda hipótesis los resultados obtenidos reflejan que existe una diferencia estadísticamente significativa en el grupo experimental después de realizar la intervención**,** pasando de una media de $\overline{X}$=3,31 a una media de $\overline{X}$=13,00, a diferencia del grupo control en el que la media de los estudiantes pasó de $\overline{X}$= 8 a $\overline{X}$= 10,50. Por lo que se acepta la hipótesis de investigación.

En este sentido los estudios realizados por Sabrina Garbín (2005), Trigueros María y Covadonga Escandón (2008), Bagni (2004) y Dolores (2004) aportaron información importante para diseñar las estrategias aplicadas en la

presente investigación y obtener los cambios esperados, ya que relacionan las diferentes formas de representación semiótica de la matemática, partiendo de la representación gráfica, pasando por la traducción al lenguaje algebraico y por último el cálculo analítico, sin dejar de tomar en cuenta las características individuales de los alumnos, respetando los diferentes tiempos, así como las diversas formas de aproximación al conocimiento. Como lo indica Woolfolk (2010) se logró estudiantes más autónomos y autorregulados, al permitirles aproximarse a los conceptos desde diferentes formas, eligiendo ellos cual era el más apropiado para su aprendizaje, dándole la oportunidad de seleccionar los integrantes de sus equipos para realizar los trabajos en grupo, proporcionando límites claros en los ejercicios, pero dejando espacio para la creatividad y la exposición de sus ideas.

Otro estudio importante fue el realizado por Maita (2005) en el que demuestra que el uso de la tecnología como recurso pedagógico se traduce en una mejora significativa en el rendimiento de los estudiantes, en el caso de este estudio, al igual que en esta investigación, dicho recuso fue utilizado como apoyo a la labor del docente, lo que en el trabajo de Peñalosa (2010) se llamó entornos mixtos en el que se tomó en cuenta el objetivo del contenido, y los niveles de complejidad cognitiva de los mismos, así como el tipo de estructura cerrada/abierta que se le dio a las diferentes actividades.

Si bien es cierto el logro obtenido en la segunda hipótesis es evidente la diferencia entre las medias iniciales al comparar el grupo control y el grupo experimental y las consecuencias que esto podría tener en el análisis de los

resultados, sin embargo, en las valoraciones realizadas por Cook y Campbell (1979) referidas a los grupos cuasi experimentales no equivalentes, se encuentra que los resultados de la presente investigación son interpretables desde el punto de vista estadístico, ya que las variables que pueden invalidar el estudio, ver Figura 2, no interfieren en dichos resultados por las siguientes razones:

1. La interacción selección-maduración: los estudiantes del grupo control y experimental presentan las mismas características en cuanto a edad, situación de nuevo ingreso y contexto social, por lo que esta variable no puede influir en los resultados obtenidos.

2. La instrumentación, referida a la escala de medición de la variable independiente**:** esta variable no tiene influencia ya que no hay ninguna transformación en las puntuaciones que pueda eliminar el efecto del cruce de los grupos.

3. La regresión estadística de las muestras: esta variable se descarta porque es poco probable "que una puntuación baja tenga suficiente regresión para superar una puntuación inicialmente alta" (Kerlinger & Howard, 2002, p 490).

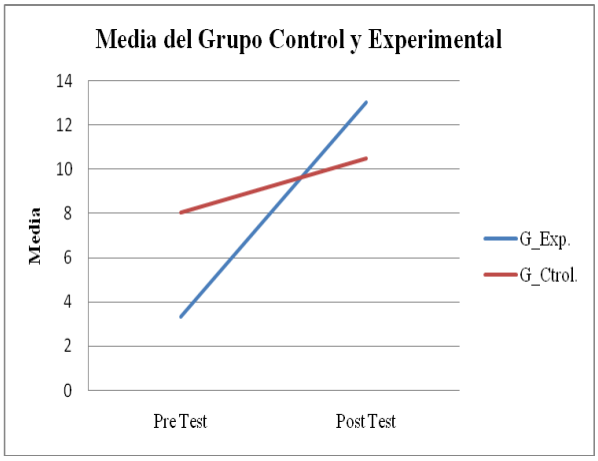


Figura 2. *Resultado del diseño de grupo control no equivalente (adaptado de Kerlinger & Howard, 2002).*

El análisis de los resultados que corresponden a la tercera hipótesis indican que si bien el valor de la media final del grupo experimental es mayor ($\overline{X}$=13,00) que la media obtenida por el grupo control ($\overline{X}$= 10,50), estas diferencias no son significativas por lo que no se cumple la hipótesis planteada. A pesar de esta realidad se pueden obtener dos conclusiones importantes de los resultados obtenidos que son:

1. Esta diferencia no significativa motivó el estudio de la magnitud del efecto, porque como lo dice Cohen (1990, 1992a citado en Ledesma, Macbeth, & Cortada de Kohan, 2008) "no es suficiente identificar la ocurrencia de cierto efecto, se requiere adicionalmente determinar su magnitud o tamaño" (p. 426) . El cálculo de este valor para pruebas no paramétricas se realiza a través de la fórmula $\delta = S/n_1n_2$, en la que $S=2T-[n_1(n_1+n_2+1)]$, n_1 y n_2 son los tamaños de las muestras como lo indica Peña Torbay (2009). En el caso de este estudio la magnitud del efecto arroja un valor de $\delta = 0,39$, como se puede observar en la Tabla 12, este valor según Morales Vallejos (2012) "tiene significación práctica (importante)" (p.14), más aún cuando se trata de investigaciones educativas en las que se implementan intervenciones didácticas que repercuten positivamente en el rendimiento escolar, adicionalmente la relación del costo-beneficio de su aplicación es pequeña, por lo tanto es una actividad factible de ser implementada nuevamente.

Tabla 12

Tamaño del efecto.

n_1	n_2	T	S	δ
12	26	173	-122	-0,39102564

2. Otro aspecto a destacar fue la mejora en el rendimiento de los alumnos que mostraban los puntajes más bajos en el pre test, como se puede ver en puede observar en la Figura 3:

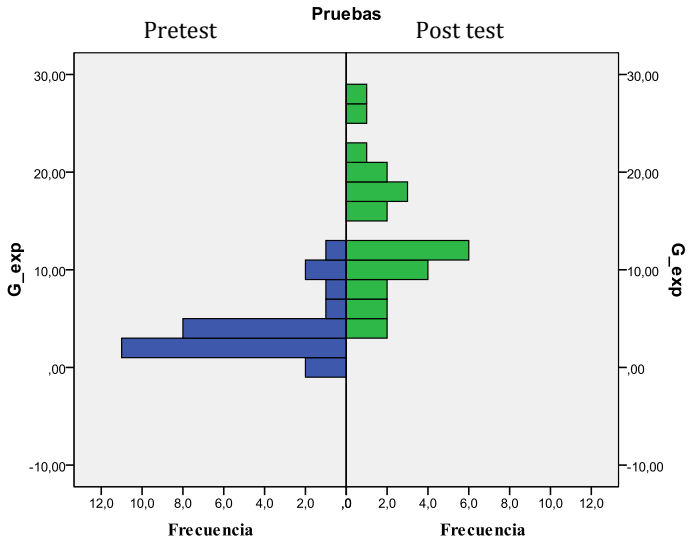


Figura 3. *Histograma de frecuencia del grupo experimental.*

Esta diferencia se evidencia igualmente en los valores del 20° percentil para ambas distribuciones, como lo muestra la Tabla 13 los alumnos que tenían 1 punto en el pre test pasaron a tener 8 puntos en el post test, lo que equivale a 5,3 puntos en la escala de 20, aún cuando los estudiantes no alcanzaron una calificación aprobatoria para un alumno obtener 5,3 puntos en lugar de 1, sí representa diferencia en su motivación en el estudio.

Tabla 13.

Medidas de posición 20° Percentil para el grupo experimental y control.

	Grupo Experimental	Grupo Control
Pretest.	1	5
Post test.	8	6

Si el propósito, a mediano plazo, de todo estudiante de cálculo I para telecomunicaciones es aprender los contenidos y aprobar la materia, entones como lo indica Woolfolk (2010), si esas metas se ven con cierto grado de dificultad, pero alcanzables el alumno tiene mayor motivación hacia el estudio. El caso opuesto ocurre cuando el alumno tiene una evaluación de 3,33 puntos en la escala de 20 y después de la intervención tradicional pasa a 4 puntos, como sucedió en el grupo control. Estos alumnos pueden percibir la meta como inalcanzable y por lo tanto pueden en el peor de los casos desistir, como le sucedió a la muestra del grupo control que se vio disminuida en 29,4% durante el estudio realizado.

Adicionalmente el método tradicional aplicado al grupo control parece beneficiar solo a los estudiantes que tienen mejores puntuaciones, como se puede observar en la Figura 4 y no causó mayor efecto en los alumnos de bajo rendimiento.

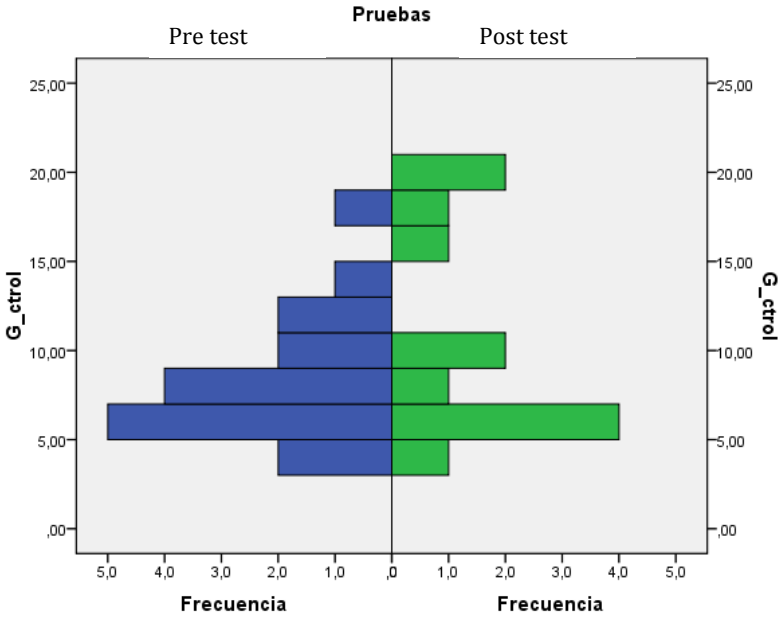


Figura 4. *Histograma de frecuencia del grupo control*.

En conclusión a través de la implementación del diseño de instrucción basado en el constructivismo**,** en el que se mostraron las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas y con el apoyo de un software matemático, los estudiantes lograron mejorar el rendimiento en los alumnos que cursaban la asignatura de cálculo I para telecomunicaciones de forma significativa, si bien es cierto que, en el pretest, el grupo control obtuvo una media mayor que el experimental, los resultados obtenidos después de la intervención didáctica le fueron favorables.

Adicionalmente la magnitud del efecto determinó que el estudio cumple con el objetivo planteado, al lograr una diferencia apreciable en el rendimiento de los alumnos del grupo experimental en comparación con el grupo control.

En cuanto a los logros del presente estudio en el marco de las competencias seleccionadas para trabajar en la intervención: aprender a aprender con calidad y aprender a trabajar con el otro, se puede observar en qué medida se

lograron si se evalúan los criterios de desempeño correspondientes. Estos criterios se pudieron evidenciar cuando los alumnos del grupo experimental aplicaron adecuadamente la terminología relacionada con el estudio de las funciones, adoptaron sus estrategias de aprendizaje de manera autónoma aplicando la forma de adquirir los diferentes conceptos usando el lenguaje matemático mas adecuado para ellos mismos, gestionaron el tiempo para desarrollar las actividades planificadas, valoraron las ideas y opiniones de otras personas sin dejar de defender las propias en un ambiente de respeto y tolerancia, por último fueron capaces de evaluar su desempeño al concluir las diferentes actividades.

Recomendaciones:

Dados los resultados obtenidos en este estudio se recomienda en forma general: 1) fomentar en los docentes la necesidad de realizar cambios en su rol tradicional, para que reconozcan al estudiante como el protagonista del aprendizaje, que se tomen el tiempo necesario para indagar las condiciones iniciales del grupo, no sólo en cuanto a sus conocimientos previos sino también su disposición hacia la materia, procurando que los contenidos sean significativos y adecuados para el nivel de desarrollo de los alumnos, 2) promover el desarrollo del autocontrol y la autorregulación en los alumnos, que sean capaces de trabajar en grupos de aprendizaje en un ambiente de respeto por la opinión del otro, desarrollando de forma continua las destrezas relacionadas con el aprender a aprender, 3) promover el uso de la tecnología como recurso de apoyo en la labor educativa, adaptada a las condiciones de cada contenido, a las características propias de la asignatura, a los estudiantes y de los recursos disponibles en la

institución, 4) reivindicar entre los docentes y los alumnos las actividades de evaluación, para que sea parte del aprendizaje, usando diferentes técnicas e instrumentos y por último 5) estimular a los docentes para que planifiquen diferentes estrategias que motiven a los estudiantes al estudio, reforzando sus esfuerzos, acercando el conocimiento a ellos al plantearlo de formas diferentes e innovadoras, sin que esto signifique bajar la calidad o el nivel de exigencia requerido.

En caso particular con la enseñanza de cálculo I se recomienda: 1) motivar a los docentes para que hagan uso de las diferentes formas de lenguaje matemático como son el algebraico, analítico, geométrico, gráfico y verbal, movilizándose entre estas representaciones semióticas en su labor diaria. Apoyando a los alumnos en la transformación de una forma de expresión a la siguiente para evitar incongruencia en los contenidos, 2) promover entre los profesores el análisis de los errores cometidos por los alumnos en la resolución de las diferentes actividades con la finalidad de determinar los conceptos relacionados con los mismos y tomar las correcciones necesarias, 3) investigar las aplicaciones de los contenidos estudiados en clase, en otras asignaturas, en situaciones referentes a su desarrollo profesional o en situaciones cotidianas con la finalidad de lograr un aprendizaje significativo, por último 4) es necesario realizar un trabajo con el equipo de docentes de la asignatura para unificar el diseño de la asignatura, respetando las características individuales de los alumnos y de los profesores.

Difusión:

El problema del bajo rendimiento estudiantil en la asignatura de cálculo I es un tema común de discusión entre los docentes que dictan esta materia, por este motivo la autora mostrará los resultados obtenidos en este estudio en las reuniones de cátedra con la finalidad de estimular a los demás docentes a desarrollar ideas diferentes de instrucción en los distintos temas de la materia logrando así un compendio más amplio de alternativas de enseñanza que repercutan en la mejora del rendimiento de los alumnos.

Los materiales elaborados así como la animación desarrollada se pondrán a disposición de los demás docentes para su uso, evaluación y mejora de los mismos, así como desarrollar nuevas animaciones que puedan apoyar otros contenidos, en el que pueda hacerse uso de las gráficas u otro lenguaje matemático, para mejorar el aprendizaje de los alumnos.

Aplicar el diseño instruccional en grupos de condiciones diferentes, por ejemplo con alumnos que ya han visto la asignatura, grupos más numerosos o incluso a los alumnos de otras carrera, todo esto con el fin de evaluar y mejorar el material.

Referencias.

Aragón, E., Castro, C., Gómez, B., & González, R. (2009, Octubre). Objetos de aprendizaje como recursos didacticos para la enseñanza de matemáticas.*Apertura,*11(9),100-111.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática:¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos*? Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal*, 3(16),5-28

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1995). *Psicología educativa un punto de vista cognoscitivo (pp. 47-133).* México: Trillas.

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* 10(2), 135-149.

Bagni, G. (2004). *Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria.* Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa, 7(1), 5-24.

Bosch, M. (2003). *Un punto de vista antropológico: La evolución de los "instrumentos de reperesentación" en la actividad matemática.* En Simposio de la sociedad española de investigación matemática. Huelva, España: Universidad Ramon Llull.

Cabero, J. (2007). *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación* (Primera ed.). Madrid: McGraw-Hill.

Cano, J. (2001). *Rendimiento escolar y sus contextos.* Revista Complutense de Educación, 12(1), 15-80.

Carretero, M. (1993). *Costructivismo y educación (pp.63-80).* Buenos Aires: AIQUE Didáctica.

Castañeda, A. (2006). *Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hopital y María G. Agnesi.* Revista Latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9, 253-266

Castillo, S. (2008, Julio 171- 194). Propuesta pedagogica basada en el constructivismo para el uso optimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(2), 171-194.

Coe, R., & Merino, C. (2003). Magnitud del efecto:una guía para investigadores y usuarios. *Revista de psicología , 21* (1), 147-177.

Coll, C., & Moreneo, C. (2011). *Psicología de la educación virtual* .Madrid: Morata.

Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I., y otros. (2011). *El constructivismo en el aula.* Barcelona: GRAÓ.

Contreras, A. (2003). *La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad.Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión.* En Cuarto Simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática. Universidad de Jaén, España .

D'Amore, B., & Godino, J. (2007). *El enfoque ontoseiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática.* Revista latinoamericana de investigación en matematica educativa, 10 (2), 191-218.

De Gouveia, L. (2012). *Informe de avance de los resultados obtenidos en la encuesta denominada: Levantamiento de información sobre las asignaturas no cursadas en el bachillerato.* Caracas, Venezuela: Universidad Católica Andres Bello, Unidad Multimedia de la Facultad de Ingeniería.

Díaz- Barriga, F., & Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo una interpretación constructivista Mexico D.F.*,México: McGraw-Hill.

Dolores, C. (2004). *Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato.* Revista latinoamericana de investigacion en matemática educativa, 7 (3), 195-218

Garbín, S. (2005, julio). *¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito ? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos.* Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 8 (2), 169-194.

Godino, J., Font, V., Contreras, A., & Wilhemi, M. (2006). *Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.* Revista Latinoamericana de investigación matemática, 9(1), 117-150.

González, A. (2011). *Evaluación del impacto de las politicas TIC en las prácticas de los Centros Escolares.*Tesis doctoral no publicada, Universidad de Sevila. España.

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación.* México D.F.: Mc Graw Hill.

Kerlinger, F., & Howard, L. (2002). *Investigación del Comportamiento método de investigación en Ciencias Sociales.* México DF: McGraw-Hill.

Ledesma, R., Macbeth, G., & Cortada de Kohan, N. (2008). Tamaño del efecto: revisión teórica y aplicaciones con el sistema estadístico ViSta. *Revista Latinoaméricana de Psicología , 40* (3), 425-439.

Lupo, L. (2010). *Uso de la representación gráfica de una función para obtener el dominio de funciones compuestas.* Caracas, Venezuela: Universidad Católica Andrés Bello, Departamento de matemática.

Maita, M. (2005). *El aprendizaje de funciones reales con el uso de un Software Educativo: una experiencia didactica con estudiantes de Educación de la ULA-Tachira.* Acción pedagógica, 14(1), 38-49.

Mayer, R. (2006). *Psicología de la Educación. Enseñar para un Aprendizaje Significativo* Madrid: Pearson. Prentice Hall.

Mcanally-Salas, L., Navarro, M., & Rodríguez, J. (2006, Enero-Marzo). *La integración de la tecnología educativa como alternativa para ampliar la cobertura en la educación superior*. Revista Mexicana de Investigación Educativa, 11(28), 11-30.

Morales Vallejos, P. *Tamaño del efecto (effect size): análisis complementarios al contraste de medias.* Universidad Pontificia Comillas, Madrid. Recuperado el 3 de Marzo de 2013, de http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/Tama%F1oDelEfecto.pdf

Pecharromán, C. (2009). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas.*Tesis doctoral: Universidad de Valladolid, España.

Peña Torbay, G. (2009). Estadística inferencial una introducción para las ciencias del comportamiento. Caracas: Publicaciones UCAB.

Peñalosa, E. (2010, Diciembre). Modelo estratégico de comunicación educativa para entornos mixtos de aprendizaje: estudio piloto.Pixel-Bit Revista de medios y educación, 37, 43-55.

Pimienta, J. (2008). Constructivismo estrategias para aprender a aprender .México: PEARSON Educación.

Poggioli, L. (2009a). Estrategia de adquisición de conocimiento. Caracas: Fundación Empresas Polar.

Poggioli, L. (2009b). Estrategias de aprendizaje: una perspectiva teórica (2a . ed). Caracas, Venezuela: Fundación Empresas Polar.

Rosas, R., & Sebastián, C. (2001). *Piaget, Vigotski y Maturana Constructivismo a tres voces.* Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Schunk, D. (2012). *Teorías del aprendizaje. Una perspectiva educativa.* México D.F.: Pearson.

Silva, E., & Avila, F. (1998). *Constructivismo. Aplicaciones en Educación.* Maracaibo: Ediciones Astro Data S.A.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria.* En Horsori, La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). España: Universitat de Barcelona.

Socas, M. (2005*). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el esfoque Lógico Semiótico*. En XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educacción Matemática, *(pp 19-52)*. Tenerife.

Tall, D. (1988). *Concept Image and Concept Definition.* (U. o. Warwick.Utrecht, Ed.) Retrieved Julio 29, 2012, de http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988e-concept-image-icme.pdf

Tejada, M., Ríos, P., Silva, A., Figueroa, R., Jiménez, T., Palacios, H., y otros. (2011). *Teorías vigentes sobre el desarrollo humano.* Caracas: FEDUPEL.

Trigueros, M., & Escandón, C. (2008). *Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación.* Revista Mexicana de investigación Educativa *13(26),59-85*

Universidad Católica Andrés Bello. (2013). *Proyecto formativo institucional.* Caracas: UCAB.

Woolfolk, A. (2010). *Psicología educativa.* México, D.F, México: Person

ANEXO A.

PRUEBA PRE TEST Y POST TEST.

***PRUEBA SOBRE EL ESTUDIO DE FUNCIONES*.**

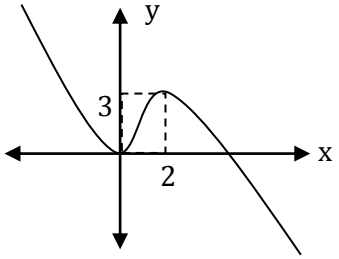
Estimados estudiantes

Esta prueba es parte de una investigación que lleva a cabo la profesora Gemma Utrera, tiene como finalidad mejorar la enseñanza y por lo tanto el aprendizaje del tema de Estudio de Funciones en la asignatura de Cálculo I para telecomunicaciones.

La presentación de la prueba es totalmente individual, los resultados no tienen ninguna repercusión en la calificación de la materia y los resultados son estrictamente confidenciales.

Muchas Gracias por su colaboración.

1.-Identificar en la gráfica los intervalos donde la función es creciente y decreciente (con colores diferentes)



2.-Escribir los intervalos donde la función es creciente y decreciente

Creciente _____, decreciente _____

3.- Los puntos (2,3) y (0,0) representan:

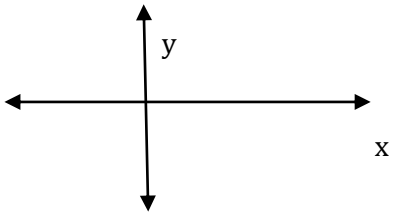
( ) Puntos máximo y mínimo respectivamente.

( ) Puntos mínimo y máximo respectivamente.

( ) Punto de Inflexión y punto mínimo respectivamente

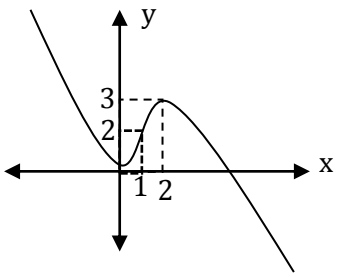
( ) Punto mínimo y punto de Inflexión respectivamente.

4.- Graficar una función creciente en el intervalo x Є (3,4) y decreciente fuera de ese intervalo



5.- Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = \frac{x-1}{x}$

6.- Identificar en la gráfica los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo (con diferentes colores)



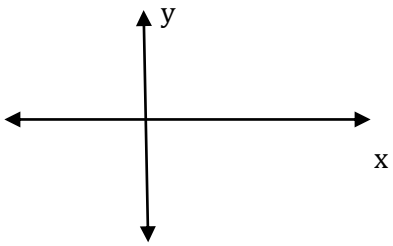
7.- Escribir los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo

Cóncava hacia arriba _____,

Cóncava hacia abajo _____.

8.- Señale en la gráfica el (los) punto(s) donde cambia la concavidad.

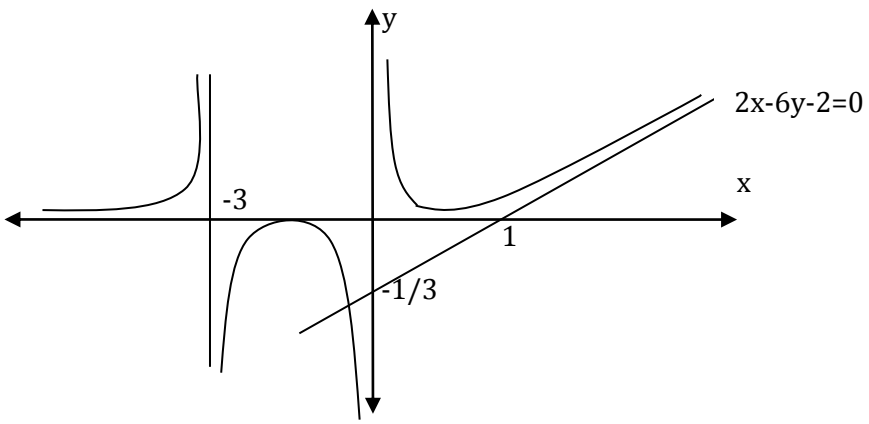
9.- Graficar una función cóncava hacia abajo en el intervalo x ∈ (-4,7) y cóncava hacia arriba en los intervalos x ∈ (-∞,-4) y x ∈ (7, ∞)



10.- Calcular los intervalos de concavidad de la función

$$y = \frac{x-1}{x}$$

11.- Escribir la ecuación de las asíntotas a la función F(x) expresadas en la siguiente gráfica:



12.- Calcular la asíntota vertical de la función:

$$y = \frac{1}{x}$$

13.- Calcular la asíntota horizontal de la función:

$$y = \frac{1}{x}$$

14.- Calcular la asíntota oblicua de la función

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}$$

15.- Construir la gráfica de una función que tiene las siguientes características:

f (-1/2) = f (1) = f '(1) = 0

f "(x) >0, si x >2
f "(x) < 0, si x<0; 0<x<2

$\lim_{x \to 2^+} f(x) \to \infty$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) \to -\infty$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) \to -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) \to -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) \to \infty$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

ANEXO B

MATERIAL ELABORADO PARA CADA UNA DE LAS SESIONES.

Hoja de trabajo N°1: Estudio de las propiedades globales de las funciones Monotonía

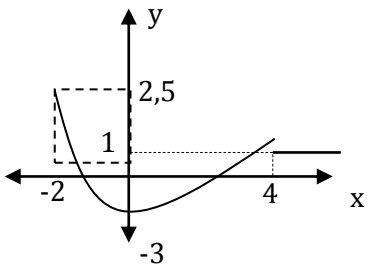
Objetivo: graficar una función expresada en forma algebraica usando como datos los intervalos de crecimiento, decrecimiento y puntos máximos y mínimos calculados con la ayuda de la primera derivada de la función.

Conceptos necesarios para resolver los ejercicios:

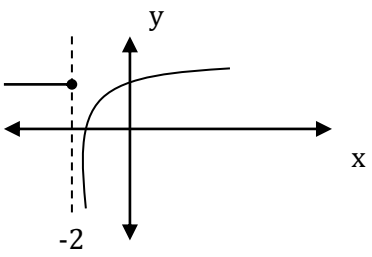
1. Derivadas de una función.
2. Criterio para determinar el signo de las funciones.

1.-Indicar sobre la gráfica con un lápiz de color azul los tramos donde la función es creciente, con un lápiz de color rojo los tramos donde la función es decreciente y con un trazo más grueso donde es constante

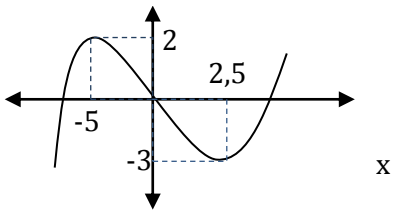
a)



b)



c)



2.-Escribir en notación matemática los intervalos donde las funciones anteriores son crecientes decrecientes y constantes.

a) Creciente _____, Decreciente _____Constante_____

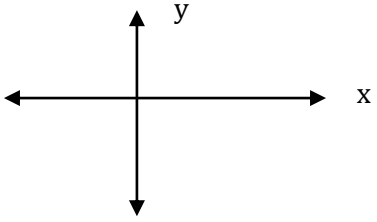
b) Creciente _____, Decreciente _____
Constante_____

c) Creciente _____, Decreciente _____ Constante_____

3.- Construir las gráficas con las siguientes condiciones:

a) Creciente en el intervalo x ∈ (-∞,7)

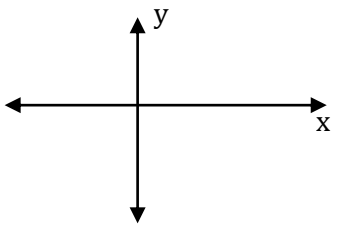
Decreciente en el intervalo de x ∈ (7, ∞)



¿Qué sucede en el punto donde x=7? ¿Es un punto máximo o mínimo?

b) Creciente de x Є (3,5)

Decreciente de x Є (2,3)



¿Qué sucede en el punto donde x=3? ¿Es un punto máximo o mínimo?

4) En base a la aplicación mostrada en clase responder las siguientes preguntas:

a) ¿La recta tangente a la función F(x) es creciente (pendiente positiva) o decreciente (pendiente negativa) en los intervalos donde la gráfica es creciente?

b) ¿La recta tangente a la función F(x) es creciente (pendiente positiva) o decreciente (pendiente negativa) en los intervalos donde la gráfica es decreciente?

¿Qué puedes concluir sobre la relación que existe entre el signo de la pendiente de la recta tangente y la curva en sus intervalos de crecimiento y decrecimiento?

c) ¿Qué signo tiene la gráfica de la primera derivada F’(x) cuando recorre los intervalos donde la gráfica de la función F(x) es creciente?

d) ¿Qué signo tiene la gráfica de la derivada F’(x) cuando recorre los intervalos donde de la gráfica de la función F(x) es decreciente?

¿Qué relación existe entre el signo de la primera derivada F’(x) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función F(x)?

e) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente cuando pasa por el punto máximo de la función?

f) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente cuando pasa por el punto mínimo de la función?

¿Qué valor tiene la primera derivada de la función en los puntos máximos y mínimos de la misma?

g) ¿Qué signo tiene la derivada F'(x) a la derecha del punto máximo de la función? Y ¿a la izquierda?

h) ¿Qué signo tiene la derivada F'(x) a la derecha del punto mínimo y a la izquierda?

¿Qué se puede concluir de la relación que tiene el signo de la primera derivada con los puntos máximo y mínimo de la función?

5) Calcular los intervalos de crecimiento, los puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2x^3 - 9x - 1$ Esbozar la gráfica correspondiente.

b) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 2$ Esbozar la gráfica correspondiente.

c) $f(x) = 4^{senx}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

Hoja de trabajo N°2: Estudio de las propiedades globales de las funciones Concavidad

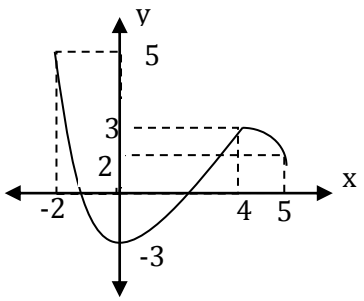
Objetivo: graficar una función expresada en forma algebraica usando como datos los intervalos de concavidad y punto de inflexión calculados con la ayuda de la segunda derivada de la función.

Conceptos necesarios para resolver los ejercicios:

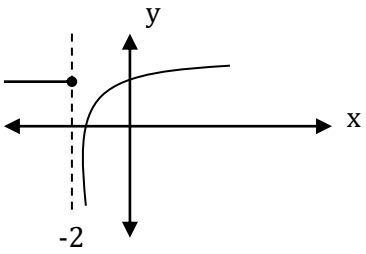
1. Derivadas de una función.
2. Criterio para determinar el signo de las funciones.

1. Indicar sobre la gráfica con un lápiz de color azul los tramos donde la función es cóncava hacia arriba y con un lápiz de color rojo los tramos donde la función cóncava hacia abajo:

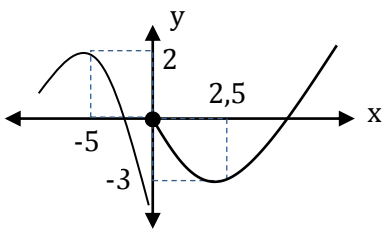
a)



b)



c)



2. Escribir en notación matemática (x ∈ (a, b)) los intervalos donde las funciones anteriores son cóncavas hacia arriba y cóncava hacia abajo.

a) Cóncava hacia arriba_____, Cóncava hacia abajo_____

b) Cóncava hacia arriba_____, Cóncava hacia abajo_____

c) Cóncava hacia arriba_____, Cóncava hacia abajo_____

3. Escribe las coordenadas del punto en el que se observa un cambio de concavidad, en caso de existir:

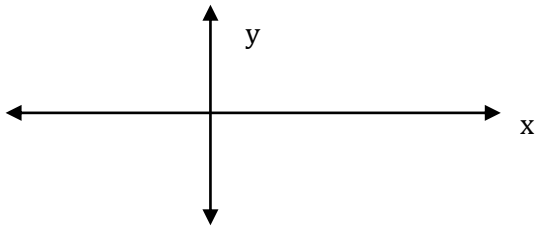
_____ Gráfica (a)

_____ Gráfica (b)

_____ Gráfica(c)

4) Construir la gráfica que cumpla con la siguiente condición:

Cóncava hacia arriba x ∈ (-3,1) y cóncava hacia abajo fuera de ese intervalo



Si existen puntos donde se evidencie un cambio de concavidad, escribir su abscisa

4. En base a la aplicación mostrada en clase responder las siguientes preguntas:

a) ¿Qué signo tiene la gráfica de la segunda derivada F''(x) cuando la recta tangente recorre los intervalos donde la gráfica de la función F(x) es cóncava hacia abajo?

b) ¿Qué signo tiene la gráfica de la segunda derivada F''(x) cuando la recta tangente recorre los intervalos donde la gráfica de la función F(x) es cóncava hacia arriba?

Como conclusión ¿qué relación tiene el signo de la segunda derivada F''(x) con los intervalos de concavidad de la función F(x)?

c) ¿Qué valor tiene la segunda derivada F''(x) en los puntos donde cambia la concavidad de la función? (punto de inflexión)

d) ¿Qué signo tiene la segunda derivada F''(x) a la derecha del punto de inflexión de función F(x)? Y ¿a la izquierda?

En conclusión ¿qué relación tiene el signo de la segunda derivada F''(x) con los puntos de inflexión de la función F(x)?

5. Calcular los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = 3x^3 - 4x - 1$ Esbozar la gráfica correspondiente

   b) $f(x) = \frac{1}{8}x^3$

   c) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

Hoja de trabajo N° 3: Estudio de las propiedades globales de las funciones Asíntotas

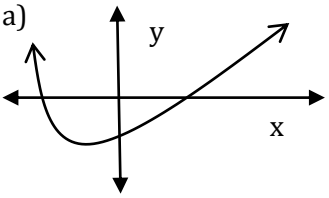
Objetivo: calcular las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de una función expresada en forma algebraica usando los límites de funciones correspondientes

Conceptos necesarios para resolver los ejercicios:

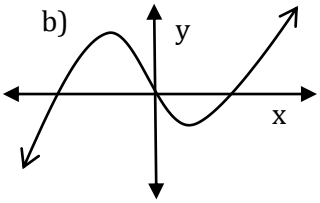
1. Ecuación de la recta.
2. Cálculo de límites de funciones.

1) Señala sobre la gráfica la tendencia de la variable X y de la Y en los extremos de la gráfica (donde se observan las flechas)

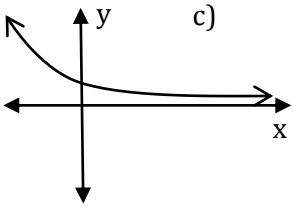
a)



b)

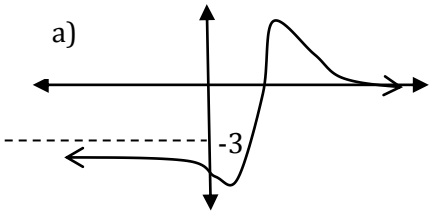


c)



2) Responder las preguntas que corresponden a las siguientes gráficas

a)

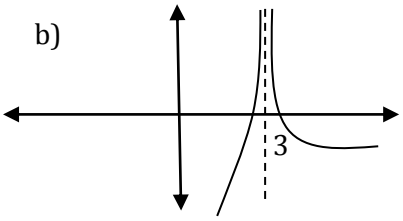


Cuando $\lim_{x \to \infty} F(x) \to$

Cuando $\lim_{x \to -\infty} F(x) \to$

¿Qué tipo de asíntota está representada en la gráfica?

b)



Cuando $\lim_{x \to 3^{+}} F(x) \to$

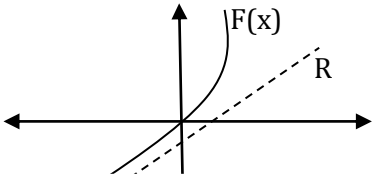
Cuando $\lim_{x \to 3^{-}} F(x) \to$

¿Qué tipo de asíntota está representada en la gráfica?

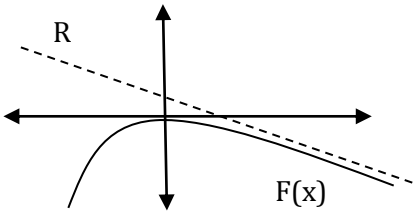
3) Existe otro tipo de asíntota, las asíntotas oblicuas, son rectas de la forma **y=mx+b**

En la que m se calcula a través del límite: $m = \lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{x}$ y/o

$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{F(x)}{x}$ se deben calcular ambos límites porque representan los siguientes casos:



Función F(x) asintótica a la recta R cuando x tiende a menos infinito



Función F(x) asintótica a la recta R cuando x tiende a más infinito

Si se obtiene un valor para la pendiente diferente a cero se debe calcular el valor de **b**, a través del límite

$$b = \lim_{x \to -\infty} [F(x) - mx]_{y/o} \, b = \lim_{x \to \infty} [F(x) - mx]$$

Una vez calculado los dos valores se expresa la ecuación de la recta oblicua usando la expresión reducida de la ecuación de la recta

Y=mx+b

Calcular las asíntotas de la función:

$$y = \frac{\left(x^5 + 4\right)}{x^4}$$

Hoja de trabajo N°4: Estudio de las propiedades globales de las funciones

Objetivos:

1. Graficar funciones expresadas en forma algebraica calculando los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la concavidad, las diferentes asíntotas, y los puntos críticos, usando para ello la primera derivada, la segunda y los límites correspondientes.

2. Graficar funciones expresadas en base a sus características globales, interpretando cada una de las características globales de las funciones expresadas en términos de intervalos, tendencia de las funciones y coordenadas de puntos.

Contenidos necesarios para resolver los ejercicios:

1. Derivadas de una función.
2. Criterio para determinar el signo de las funciones.
3. Ecuación de la recta.
4. Cálculo de límites de funciones

1. Graficar las siguientes funciones:

a) $y = xe^x$

a) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

b) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

c) $y = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$

2. Graficar las funciones que cumplen con las siguientes condiciones:

a) Construir la gráfica de una función que cumple con:
F (0) = 5, F (4) = 1

F´(x) > 0 si $x \in (-\infty, 0)\ (3,4)$

F´(x) < 0 si $x \in (0, 3)\ (4, +\infty)$

F´´(x) > 0 si $x \in (-\infty, 0)$

F´´< 0 en (0, 3) (3, $+\infty$)

$\lim_{x\to\infty} F(X) = 2$ $\lim_{x\to 3} F(x) = -\infty$

b) F(0) = -2, F(1)= F(2) = F(6) = 0 F(4) = 3
F´(x) = 0 $\forall$ x en [1,2] F´ (4)= 0

F´(x) > 0 en (2,4)

F´(x) < 0 en (-∞, 0) (0,1) (4, +∞)

F´´(x) > 0 en (0,1) (2,3) (5, +∞)

F´´< 0 en (-∞, 0) (3,5)

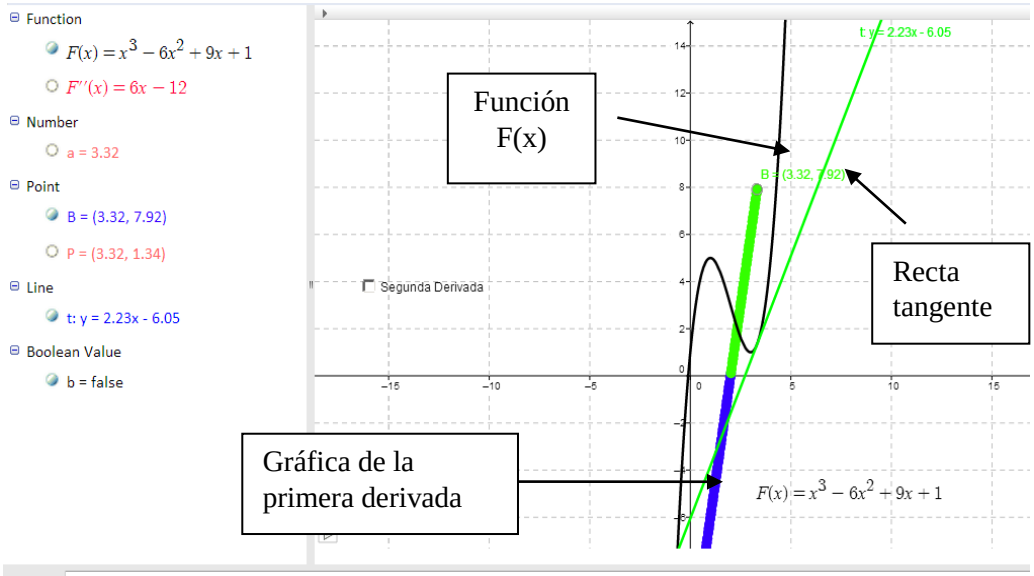
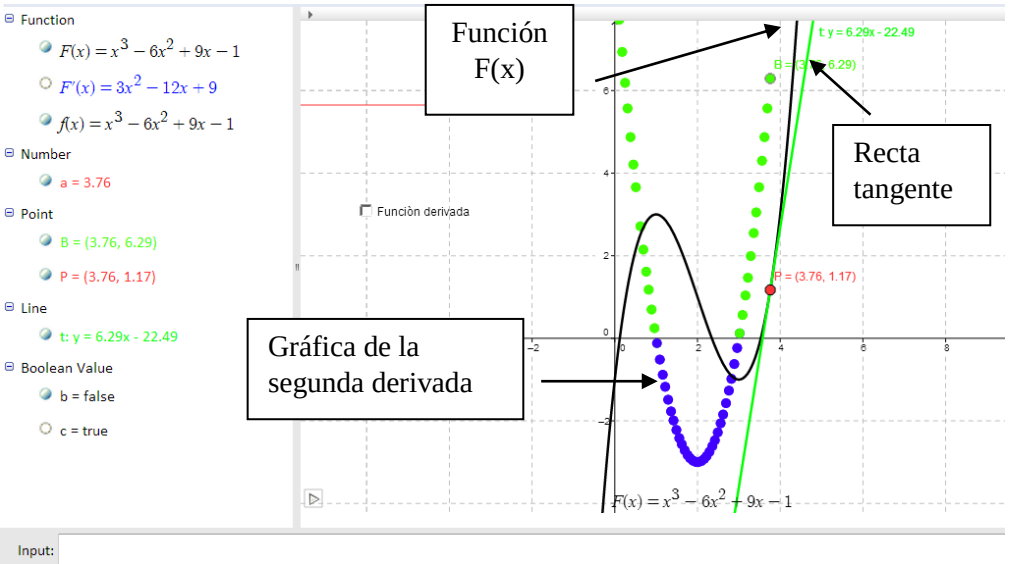
$Lim_{x\to\infty} F(X) = -4$ $Lim_{x\to o^+} F(x) = \infty$ $Lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$

3. Cuando dos resistores con resistencias R1 y R2 se conectan en paralelo, su resistencia combinada esta dada por la fórmula $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Si R_1=8 y R_2 =x graficar la función e interpretar los resultados

ANEXO C

MATERIAL ELABORADO EN EL SOFTWARE MATEMÁTICO INTERACTIVO GEOGEBRA.

Estudio de la monotonía de las funciones.



Estudio de la concavidad de las funciones.