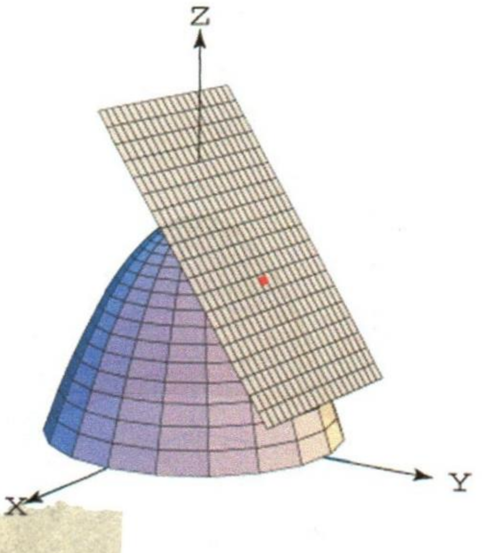
UCAB Universidad Católica ANDRÉS BELLO

GUÍA DE CÁLCULO DIFERENCIAL DE VARIAS VARIABLES.



$$f(x;y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$$

$$f(x;y)=\ln(x+5y)$$

$$f(x;y)=\frac{1}{\sqrt{x-y}}$$

$$f(x;y)=3xy-\frac{1}{y}$$

$$f(x;y)=[\ln(2x+y)]\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$f(x;y)=\ln(16-x^2+4y^2)$$

Trabajo de Ascenso presentado ante la ilustre UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO por la Licenciada Dayana Elizabeth Villegas Perez, para optar por la categoría de Profesor Asistente.

Agradecimientos

- Primeramente a Di-os nuestro Creador, que nos da la fuerza y el ánimo para emprender metas en esta vida.
- A mis padres el Sr. Oscar y la Sra. Nancy por haberme dado la vida y apoyado a lo largo de mi carrera.
- Al Profesor Antonio Borges, quien fue la persona que me ayudó y pulió en esta hermosa materia.
- Al Profesor Roberto Escolar, por haber aprobado este proyecto, por sus consejos valiosos y por toda la ayuda prestada en el transcurso de este trabajo.
- Al Profesor José Rodolfo Bustamante, por la elaboración de algunas gráficas en el Capítulo 7 en la parte de “Dominio y Conjunto de Nivel”.
- A la profesora Elvira Saval, a los estudiantes Jorge Salazar, Dayana Pita, Angel Guacache, David Issa, Alfonso Moya y Rafael Perdomo por su colaboración en la revisión de los capítulos con sus ejercicios y verificación de las respuestas.
- Y a todos aquellos estudiantes que han pasado y seguirán pasando por mis aulas los cuales con sus inquietudes y dudas lo llevan a uno a investigar y mejorar como profesor.

Introdución

*La elaboración de esta **"Guía de Cálculo Diferencial de Varias Variables"** atiende a una finalidad básica principal que podríamos resumir en brindar al estudiante de ingeniería, así como de algunas especialidades de ciencias sociales y económicas la comprensión de manera clara y sencilla de los temas de la primera parte de la materia de Cálculo de Varias Variables que reúne los conceptos de cálculo de una variable pero en multi-variables.*

Esta Guía no sustituye los libros de Cálculo creados por grandes profesores, pues ellos son y seguirán siendo el primer material a consultar en el estudio de esta materia. Sólo que al pasar varios años por las aulas y ver las dificultades en el aprendizaje de esta materia compleja decidí realizar este trabajo para facilitar el estudio de la misma, la cual contiene la teoría preliminar básica resumida de cada tema, ejercicios resueltos que suben de nivel y ejercicios propuestos. Al final del trabajo aparecen las respuestas de todos los problemas planteados.

Pienso que también los profesores podrán encontrar aquí un buen material para orientar tareas y confeccionar exámenes, según el grado de dificultad requerido.

Cada capítulo ha sido revisado por profesores y estudiantes por lo menos tres veces.

Espero que este esfuerzo tenga un buen recibimiento en la Universidad Católica Andrés Bello, así como en otras universidades y porque no, en institutos tecnológicos y centros de enseñanza superior.

Indice General

Capítulo 1: Geometría Analítica

1.- **Distancia entre dos puntos:**

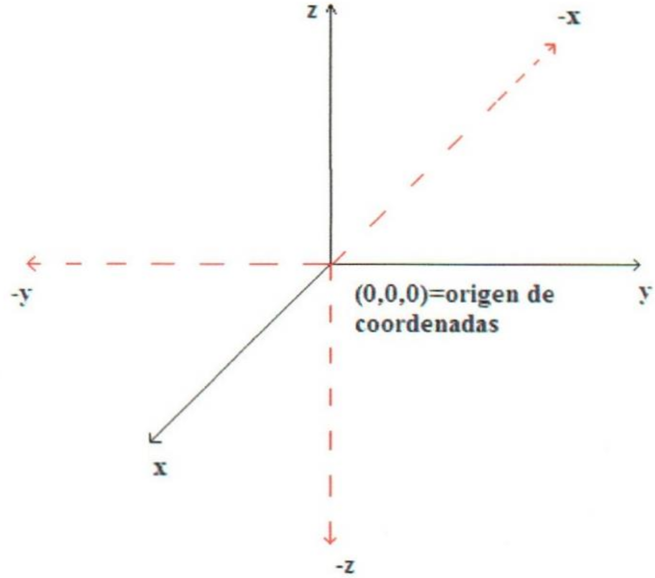
Sean $A, B \in \Re^n \,/\, A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ y $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ entonces:

$$d_{A,B} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

2.- **Punto medio:** Sean $A, B \in \Re^n \,/\, A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ y $B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ *entonces:*

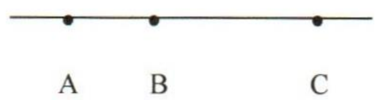
$$p_{m_{\overline{AB}}} = \text{el punto medio del segmento } \overline{AB} = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \cdots, \frac{a_n + b_n}{2} \right)$$

3.- **Sistema coordenado tridimensional:** Es el sistema donde representamos los puntos en el espacio, está conformado por el origen y tres rectas dirigidas a través del origen que sean perpendiculares entre sí, a los cuales se les denomina **ejes coordenados**, y que se les nombra como eje x, eje y, eje z.



$$\Re^3 = \Re \times \Re \times \Re = \{(x, y, z) / x, y, z \in \Re\}$$

4.- Tres puntos $A, B, C \in \Re^3$ son ***colineales*** (que están en la misma línea) ver figura si $d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$

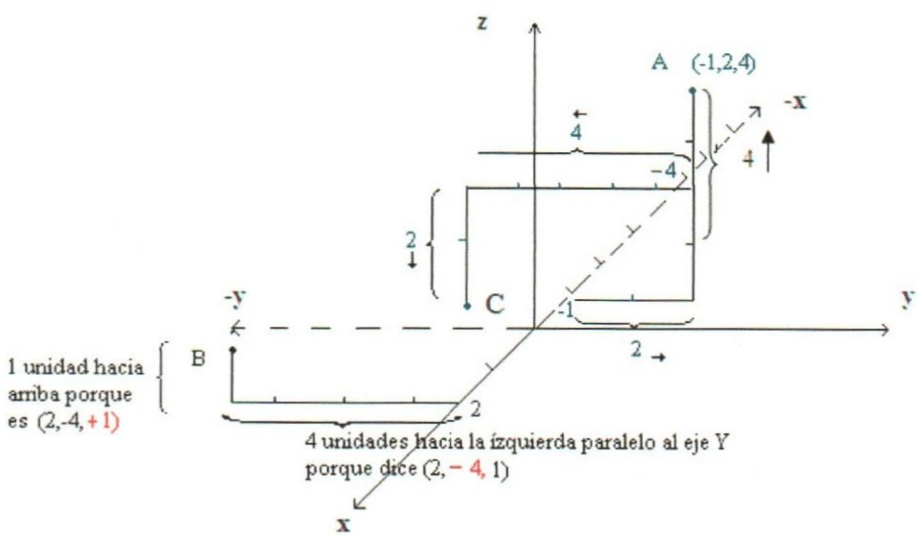


Ejercicios Resueltos:

1.- Dibuje en el sistema coordenado tridimensional los siguientes puntos:

a.- $A(-1,2,4)$ b.- $B(2,-4,1)$ c.- $C(-4,-4,-2)$

Solución:

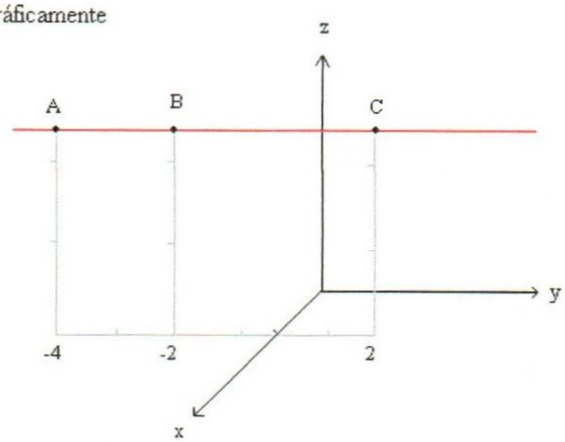


2.- Verifique gráfica y analíticamente que los puntos A, B y C son o no colineales:

a.- $A(1,-4,3)$ b.- $B(1,-2,3)$ c.- $C(1,2,3)$

Solución:

Gráficamente



Gráficamente vemos que A, B, C pasan por una misma línea

Analíticamente: Debemos ver que $d_{AB} + d_{BC} = d_{AC}$

$$d_{AB} = \sqrt{(1-1)^2 + (-4(-2))^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$d_{BC} = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$d_{AC} = \sqrt{(1-1)^2 + (-4-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Nótese Que $d_{AB} + d_{BC} = 2 + 4 = d_{AC} \Rightarrow A, B, C$ son colineales

3.- Pruebe por dos formas que los siguientes puntos no son colineales:

$A(1,2,3) \quad B(0,3,7) \quad y \quad C(3,5,11)$

Solución:

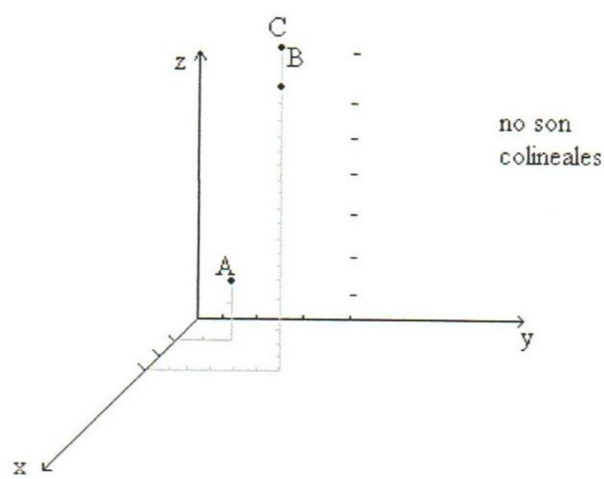
FORMA 1: Analíticamente $d_{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-3)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{18}$

$$d_{BC}=\sqrt{(0-3)^2+(3-5)^2+(7-1)^2}=\sqrt{29}$$

$$d_{AC}=\sqrt{(1-3)^2+(2-5)^2+(3-11)^2}=\sqrt{79}$$

$d_{AB}+d_{BC}=\sqrt{18}+\sqrt{29}\neq d_{AC}=\sqrt{79}\Rightarrow$ A, B y C no son colineales

FORMA 2: Graficamente



Ejercicios propuestos:

1.- Dibuje en el sistema coordenado tridimensional los siguientes puntos:

a.-	$A(-3,4,1)$	*b.-*	$B(1,2,9)$	*c.-*	$C(-1,-1,-3)$
d.-	$D(-2,0,3)$	*e.-*	$E(-1,0,0)$	*f.-*	$F(0,0,-3)$
g.-	$G(0,0,4)$	*h.-*	$H(0,-1,-3)$	*i.-*	$I(5,-1,-3)$

2.- Verifique analíticamente si los siguientes puntos son colineales:

a.-	$A(1,-4,3)$	$B(1,6,3)$	$C(1,9,3)$
b.-	$A(1,0,1)$	$B(2,0,2)$	$C(0,0,-4)$
c.-	$A(2,5,1)$	$B(2,5,-3)$	$C(2,5,-7)$
d.-	$A(-9,1,1)$	$B(-8,1,1)$	$C(2,1,1)$

3.- Demuestre la fórmula de punto medio de un segmento.

Capítulo 2: Vectores en el Espacio

1.- Un vector de n-componentes (o n-dimensional) es un conjunto ordenado de "n" elementos escrito de la forma:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

2.- Decimos que $\vec{x} \in \Re^n$ es un vector de n-componentes, donde cada componente es real. Esto se escribe así: $\vec{x} \in \Re^n \, / \, \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ donde cada $x_i \in \Re, \quad \forall i = 1 \cdots n$

En particular estudiaremos los vectores bidimensionales y tridimensionales:

Un vector bidimensional en $\Re^2$ es un conjunto de la forma $\vec{x} = (x_1, x_2)$ donde $x_1, x_2 \in \Re$.

Un vector tridimensional en $\Re^3$ es un conjunto de la forma $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ donde $x_1, x_2, x_3 \in \Re$.

3.- **<u>Un vector dado dos puntos</u>:**

(En $\Re^2$) Sean $P y Q$ dos puntos en $\Re^2 / P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ entonces el vector $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2)$.

(En $\Re^3$) Sean $P y Q$ dos puntos en $\Re^3 / P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$ entonces el vector $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$.

4.- **<u>Norma de un vector.</u>** Es el tamaño o longitud de un vector y se calcula:

En $\Re^2$: $\quad \left\| \vec{x} \right\| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}$

En $\Re^3$ $\quad \left\| \vec{x} \right\| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2}}$

5.- **Vector Nulo.** En $\Re^2$ es un vector de la forma $\vec{0}=(0,0)$ y en $\Re^3$ es $\vec{0}=(0,0,0)$.

6.- **Propiedades de la norma:** Sean $\vec{x},\vec{y}\in\Re^n$ donde $n=2$ ó 3 y "α" un escalar real entonces se cumple:

a.- $\|\alpha.\vec{x}\|=|\alpha|.\|\vec{x}\|$

b.- $\|\vec{x}\|>0 \quad \forall\vec{x}\neq\vec{0}$

c.- $\|\vec{x}\|=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{0}$

d.- $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$ **(desigualdad triangular)**

7.- **Vector unitario.** Decimos que el vector $\vec{x}$ es unitario si su norma es "1". En caso de que el vector $\vec{x}$ no sea unitario pero lo queramos hacer unitario quedaría:

$$\vec{x}_u=\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

OBS: A partir de aquí a veces aplicaremos las definiciones solo a $\Re^3$, se deja al estudiante aplicarlas en $\Re^2$ que es igual solo que con una coordenada menos.

8.- **Operaciones con Vectores:** Sean los vectores $\vec{x},\vec{y}\in\Re^3 / \vec{x}=(x_1,x_2,x_3);\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ y "α" un escalar real.

a.- ***Suma entre Vectores:***

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$$

b.- ***Multiplicación de un escalar por un vector:***

$$\alpha\vec{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)$$

c.- ***Producto Escalar (o punto) entre vectores:***

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1\cdot y_1+x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3$$

9.- **Propiedades de la suma y el producto escalar de un escalar por un vector:**

Sean los vectores $\vec{x},\vec{y}\in\Re^n$; donde $n=2$ ó 3 y α,β escalares reales.

Entonces se cumple:

a.- $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ **(propiedad conmutativa)**

b.- $\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ **(el vector nulo es el elemento neutro de la suma)**

c.- $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$ **(primera ley distributiva)**

d.- $(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$ **(segunda ley distributiva)**

e.- $0\cdot\vec{x}=\vec{0}$

f.- $(\alpha\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$

g.- $1.\vec{x}=\vec{x}$ **(el escalar "1" es el neutro multiplicativo)**

10.- **Propiedades del producto escalar entre vectores:** Sean los vectores $\vec{x},\vec{y}\in\Re^n$; donde $n=2$ ó 3. Entonces se cumple:

a.- $\vec{x}\cdot\vec{x}=\left\|\vec{x}\right\|^2$

b.- $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$ **Propiedad conmutativa**

c.- $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}$ **Ley distributiva**

d.- $\vec{0}\cdot\vec{x}=0$

11.- **Teorema:** Sean los vectores $\vec{x},\vec{y}\in\Re^n$; donde $n=2$ ó 3, θ es el ángulo formado por los dos vectores no nulos $\vec{x},\vec{y}$, entonces: $\vec{x}\cdot\vec{y}=\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.\cos\theta$.

OBSERVACIÓN: Este teorema 11 nos sirve para encontrar el ángulo entre dos vectores. ¿Cómo? Despejando cos θ de la fórmula nos queda

$$\cos\theta=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|} \qquad \Rightarrow\theta=\arccos\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}\right)$$

12.- **Corolario 1** ***(desigualdad Cauchy-Schawrz):*** Sean $\vec{x},\vec{y}\in\Re^n$, todo producto escalar satisface la desigualdad $|\vec{x}\cdot\vec{y}|\leq\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$.

OBSERVACIÓN: Denotaremos la Desigualdad de Cauchy-Schwarz con el acróstico C-Sh.

13.- **Corolario 2** ***(Perpendicularidad de Vectores):*** $\vec{x}$ es perpendicular *a* $\vec{y}\Leftrightarrow\vec{x}\cdot\vec{y}=0$.

14.- **Base Canónica:** En $\Re^2$ la base canónica es el conjunto formado por los vectores $\{\hat{i},\hat{j}\}$ donde $\hat{i}=(1,0)$; $\hat{j}=(0,1)$. Ambos son unitarios y perpendiculares entre si. Además cualquier vector en $\Re^2$ puede escribirse como una combinación lineal de los vectores $\hat{i},\hat{j}$, es decir $\forall\vec{x}\in\Re^2:\vec{x}=(x_1,x_2)=x_1\hat{i}+x_2\hat{j}$.

En $\Re^3$ la base canónica es el conjunto formado por los vectores $\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$ donde $\hat{i}=(1,0,0)$; $\hat{j}=(0,1,0)$ y $\hat{k}=(0,0,1)$. Estos tres vectores son unitarios y perpendiculares entre si. Además cualquier vector en $\Re^3$ puede escribirse como una combinación lineal de los vectores $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$, es decir $\forall \vec{x} \in \Re^3 : \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1\hat{i} + x_2\hat{j} + x_3\hat{k}$.

15.- **Vectores Paralelos.** $\vec{x}$ es paralelo a $\vec{y}$ $\Leftrightarrow$ $\exists \alpha \in \Re / \vec{x} = \alpha\vec{y}$.

16.- **Igualdad de Vectores.** $\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y} \in \Re^n$ y $x_i = y_i$ $\forall i = 1 \cdots n$

17.- **Combinación Lineal.** Decimos que el vector $\vec{x} \in \Re^n$ es combinación lineal de los vectores $\vec{y_1}, \vec{y_2}, ..., \vec{y_m}$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m /$ $\vec{x} = \alpha_1 \overrightarrow{y_1} + \alpha_2 \overrightarrow{y_2} + \cdots + \alpha_m . \overrightarrow{y_m}$.

18.- **Producto Cruz*:*** Sean $\vec{x}, \vec{y} \in \Re^3 /$ $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$; $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, entonces el producto cruz de $\vec{x}, \vec{y}$ es el vector:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} x_2.y_3\hat{i} + x_3.y_1\hat{j} + x_1.y_2\hat{k} \\ - y_2.x_3\hat{i} - x_1.y_3\hat{j} - x_2.y_1\hat{k}. \\ \hline (x_2.y_3 - y_2.x_3, x_3.y_1 - x_1.y_3, x_1.y_2 - x_2.y_1) \end{array}$$

19.- **Teorema:** El vector $\vec{x} \times \vec{y}$ es perpendicular tanto $\vec{x}$ como $\vec{y}$.

20.- **Teorema*:*** Si es θ el ángulo entre $\vec{x}, \vec{y}$ donde $\theta \in [0, \pi]$ entonces $\left\|\vec{x} \times \vec{y}\right\| = \left\|\vec{x}\right\|\left\|\vec{y}\right\|.sen\theta$

Corolario: $\vec{x} // \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$

21.- La ley asociativa para la multiplicación no siempre se cumple; es decir, en general: $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \neq \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$

22.- **Teorema:** Si $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ son vectores en $\Re^3$ y α es un escalar, entonces algunas propiedades del producto cruz son:

a) $\vec{x}\times\vec{y} = -\vec{y}\times\vec{x}$

b) $(\overrightarrow{\alpha x})\times\vec{y} = \alpha(\vec{x}\times\vec{y}) = \vec{x}\times(\overrightarrow{\alpha y})$

c) $\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\times\vec{y}+\vec{x}\times\vec{z}$

d) $(\vec{x}\times\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}\times\vec{z}+\vec{y}\times\vec{z}$

e) $\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = (\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z} = \left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right]$ **(Triple producto escalar o Producto mixto)**

f) $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z}) = (\vec{x}\cdot\vec{z})\vec{y}-(\vec{x}\cdot\vec{y})\vec{z}$ **(Triple producto vectorial)**

g) $\vec{x}\times\vec{x} = \vec{0}$

23.- **Otra Notación Del Producto Mixto y cómo calcularlo de manera rápida:**

$$\left[\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right] = \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Aplicaciones del Producto Cruz…

24.- "El área de un paralelogramo cuyos lados adyacentes son $\vec{x}$ e $\vec{y}$ es $\left\|\vec{x}\times\vec{y}\right\|$".

25.- "El área de un triángulo cuyos lados adyacentes son $\vec{x}$ e $\vec{y}$ es $\frac{1}{2}\left\|\vec{x}\times\vec{y}\right\|$".

26.- "El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ es la magnitud de su triple producto escalar, V $= \left|\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})\right|$".

27.- Tres vectores son coplanares si están en el mismo plano. En otras palabras su producto mixto es $\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})=\mathbf{0}$. (Su volumen es cero).

Proyecciones…

28.- La proyección vectorial del vector $\vec{x}$ sobre $\vec{y}$ es: $\left(\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{y}\|^2}\right)\vec{y}$.

29.- La proyección escalar del $\vec{x}$ sobre $\vec{y}$ es: $\dfrac{|\vec{x}\cdot\vec{y}|}{\|\vec{y}\|}$.

Ejercicios Resueltos

1.- Sean $P(-1,2,3)$ $Q(-2,3-4)$ $\vec{x}=-\hat{k}+\hat{3}i+2\hat{j}$ $\vec{y}=(0,6,7)$ hallar:

a) $\|\overrightarrow{PQ}\|-4$

b) $3\vec{x}+4\vec{y}-\overrightarrow{PQ}$

c) Hallar el unitario del vector $\overrightarrow{QP}$.

Solución:

a) Por la Def. 3 tenemos que

$$\overrightarrow{PQ} = (-2-(-1),3-2,-4-3) = (-1,1,-7)$$

Por la Def. 4, $\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-1)^2+(1)+(-7)^2} = \sqrt{51}$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{PQ}\|-4=\sqrt{51}-4\approx 3{,}1414$$

b) El vector $\vec{x}=-\hat{k}+3\hat{i}+2\hat{j}=(3,2,-1)\Rightarrow$ Aplicando la operación 8b tenemos que: $3\vec{x}=3.(3,2,-1)=(3.3,3.2,3.(-1))=(9,6,-3)$.

Luego $4\vec{y} = 4(0,6,7) = (0,24,28)$

$$3\vec{x} + 4\vec{y} - \overrightarrow{PQ} = (9,6\text{-}3) + (0,24,28) - (\text{-}1,1,\text{-}7)$$

$$= (9+0-(-1),6+24-1,-3+28-(-7))$$

$$= (10,29,32)$$

c) El vector $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$ además se puede probar que $\left\|\overrightarrow{QP}\right\| = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{51}$

entonces $\overrightarrow{QP}_u = \dfrac{\overrightarrow{QP}}{\left\|\overrightarrow{QP}\right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{51}} \cdot (1,-1,7)$.

2.- Encuentre el valor de "α" para que el vector $\vec{A} = \left(\alpha, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ sea unitario.

Solución:

Si $\vec{A}$ es unitario entonces $\left\|\vec{A}\right\| = 1 \quad \Rightarrow \left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{\alpha^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1$

$\Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \dfrac{1}{2}} = 1 \Rightarrow$ elevo al cuadrado a ambos lados $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

3.- Pruebe que $\vec{x} \cdot \vec{y} = \dfrac{\left\|\vec{x} + \vec{y}\right\|^2 - \left\|\vec{x} - \vec{y}\right\|^2}{4}$

Solución:

Desarrollemos el lado derecho:

(*)

$$\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\|^2 \underset{10a}{=} (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) \underset{\substack{Propiedad\\ distributiva}}{=} \vec{x}\cdot\vec{x}+\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{y}\cdot\vec{x}+\vec{y}\cdot\vec{y} \underset{\substack{\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}}}{=} \left\|\vec{x}\right\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left\|\vec{y}\right\|^2$$

Aplicando la misma idea hacemos:

$$\left\|\vec{x}-\vec{y}\right\|^2 = (\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x}-\vec{x}\cdot\vec{y}-\vec{y}\cdot\vec{x}+\vec{y}\cdot\vec{y} = \left\|\vec{x}\right\|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left\|\vec{y}\right\|^2$$

$$\frac{\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\|^2-\left\|\vec{x}-\vec{y}\right\|^2}{4} = \frac{\left\|\vec{x}\right\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left\|\vec{y}\right\|^2-\left(\left\|\vec{x}\right\|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left\|\vec{y}\right\|^2\right)}{4}$$

$$= \frac{\left\|\vec{x}\right\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left\|\vec{y}\right\|^2-\left\|\vec{x}\right\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}-\left\|\vec{y}\right\|^2}{4} = \frac{4\vec{x}\cdot\vec{y}}{4} = \vec{x}\cdot\vec{y}$$

4.- Demuestre la desigualdad triangular:

Solución:

Dado los vectores $\vec{x},\vec{y}\in\Re^n$ queremos probar que: $\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\| \le \left\|\vec{x}\right\|+\left\|\vec{y}\right\|$

Para ello desarrollemos $\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\|^2$ (ya se hizo en el ejercicio anterior, ver (*))

$$\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\|^2 = \left\|\vec{x}\right\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left\|\vec{y}\right\|^2$$

$$\left\|\overline{x}\right\|^2+2\overline{x}\cdot\overline{y}+\left\|\overline{y}\right\|^2 \le \left\|\overline{x}\right\|^2+2\left|\overline{x}\cdot\overline{y}\right|+\left\|y\right\|^2 \le \left\|\overline{x}\right\|^2+2\left\|\overline{x}\right\|\cdot\left\|\overline{y}\right\|+\left\|y\right\|^2 = \left(\left\|\overline{x}\right\|+\left\|\overline{y}\right\|\right)^2$$

Propiedades Usadas

$a \le |a|$

Desigualdad Cauchy-Schwarz

Al final producto notable

Por transitividad hemos llegado a que $\|\overline{x}+\overline{y}\|^2 \leq (\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|)^2$, sacando la raíz cuadrada nos queda:

$$\sqrt{\|\overline{x}+\overline{y}\|^2} \leq \sqrt{(\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|)^2}$$

$$|\ \|\overline{x}+\overline{y}\|\ | \leq |\ (\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|)\ |$$

(como las normas son positivas, podemos quitar las barras de valor absoluto)

$$\|\overline{x}+\overline{y}\| \leq (\|\overline{x}\|+\|\overline{y}\|) \quad \text{L.q.q.d}$$

OBSERVACIÓN: L.q.q.d quiere decir "lo que queríamos demostrar".

5.- Encuentre el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (2,2,-1)$ y $\vec{b}$ (5,-3,2).

Solución:

Recordemos que por el teorema 11 en la observación llegamos a $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$

Calculemos: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (2,2,-1)\cdot(5,-3,2) =$ 2.5+2.(-3)+(-1).(2) = 10-6-2 = 2

$$\|\vec{a}\| = 2^2+2^2+(-1)^2 = \sqrt{9} = 3$$

$$\|\vec{b}\| = 5^2+(-3)^2+(2)^2 = \sqrt{38}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3\sqrt{38}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \approx 83{,}79°$$

6.- Sabiendo que $\|\vec{x}\| = 3$; $\|\vec{y}\| = 4$ y $\|\vec{x}+\vec{y}\| = 3$ encuentre $\|\vec{x}-\vec{y}\|$.

Solución:

Podemos encontrar $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2$ y luego sacar la raíz cuadrada de este número para así hallar $\|\vec{x}-\vec{y}\|$

Por el ejercicio 3 vimos que $\left\|\vec{x}-\vec{y}\right\|^2=\left\|\vec{x}\right\|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left\|\vec{y}\right\|^2$ (*)

Nos falta saber cuanto vale "$2\vec{x}\cdot\vec{y}$" para ello utilicemos la hipótesis de que $\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\|=3$. Sabemos que $\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\|^2=\left\|\vec{x}\right\|^2+2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left\|\vec{y}\right\|^2$

Luego de aquí podemos despejar "$2\vec{x}\cdot\vec{y}$" y nos queda:

$$\left\|\vec{x}+\vec{y}\right\|^2-\left\|\vec{x}\right\|^2-\left\|\vec{y}\right\|^2=2\vec{x}\cdot\vec{y}\Rightarrow 2\vec{x}\cdot\vec{y}=-16$$

Luego sustituyendo en (*) nos queda que:

$$\left\|\vec{x}-\vec{y}\right\|^2=\left\|\vec{x}\right\|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+\left\|\vec{y}\right\|^2=3^2-(-16)+4^2=41\Rightarrow\left\|\vec{x}-\vec{y}\right\|^2=41$$

$$\Rightarrow\left\|\vec{x}-\vec{y}\right\|=\sqrt{41}$$

7.- En cada caso diga si el vector dado es o no combinación lineal (C.L.) del conjunto presentado.

a.- $\vec{A}=(5,3,1)$ $\{(1,0,3);(0,-2,4);(0,0,9)\}$

b.- $\vec{A}=(1,-3,5)$ $\{(2,2,6);(-4,-9,-12)\}$

Solución:

a.- Aplicando la definición 17 tenemos que si $\vec{A}$ es C.L. de los vectores $\{(1,0,3);(0,-2,4);(0,0,9)\}$ quiere decir que existen escalares $\alpha,\beta,\gamma\,/$

$$\vec{A}=\alpha(1,0,3)+\beta(0,-2,4)+\gamma(0,0,9)$$

$$\Rightarrow(5,3,1)=\alpha(1,0,3)+\beta(0,-2,4)+\gamma(0,0,9)$$

$$\Rightarrow(5,3,1)=(\alpha,0,3\alpha)+(0,-2\beta,4\beta)+\alpha_3(0,0,9\gamma)$$

$\Rightarrow(5,3,1)=(\alpha,-2\beta,3\alpha+4\beta+9\gamma)$ **Por igualdad de Vectores se tiene:**

$$\begin{cases} (i) & \alpha = 5 \\ (ii) & -2\beta = 3 \\ (iii) & 3\alpha + 4\beta + 9\gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow de \quad la \quad (ii) \quad \beta = -\tfrac{3}{2} \Rightarrow$$ sustituimos

$\alpha = 5 \quad y \quad \beta = -\tfrac{3}{2}$ en la no usada $(iii) \Rightarrow$

$$3.5 + 4.\left(\frac{-3}{2}\right) + 9\gamma = 1 \Rightarrow \gamma = -\frac{8}{9}$$

Como el sistema tiene solución $\Rightarrow$ el vector $\vec{A}$ es C.L. de $\{(1,0,3);(0,-2,4);(0,0,9)\}$.

b.- Nuevamente aplicando la definición 17 tenemos que si $\vec{A}$ es C.L. de los vectores $\{(2,2,6);(-4,-9,-12)\}$ quiere decir que existen escalares $\alpha, \beta / \vec{A} = \alpha(2,2,6) + \beta(-4,-9,-12)$.

$$\Rightarrow (1,-3,5) = \alpha(2,2,6) + \beta(-4,-9,-12)$$

$$\Rightarrow (1,-3,5) = (2\alpha - 4\beta, 2\alpha - 9\beta, 6\alpha - 12\beta)$$

Por igualdad de Vectores se tiene:

$$\begin{cases} (i) & 2\alpha - 4\beta = 1 \\ (ii) & 2\alpha - 9\beta = -3 \\ (iii) & 6\alpha - 12\beta = 5 \end{cases}$$ Este es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas, para resolverlo, tomaremos dos ecuaciones cualesquiera y hallaremos α, β

Tomemos la *(i)* y *(ii)* $\begin{cases} (i) & 2\alpha - 4\beta = 1 \\ (ii) & 2\alpha - 9\beta = -3 \end{cases}$ multiplicamos la *(ii)* por *"-1"* y la

$$\begin{cases}(i) & +2\alpha-4\beta=1\\(ii) & -2\alpha+9\beta=3\end{cases}$$

sumamos a la segunda: $\overline{\qquad 5\beta=4 \qquad}$ $\Rightarrow \beta=\dfrac{4}{5}$ sustituimos en *(i)* y

nos queda: $2\alpha-4\left(\dfrac{4}{5}\right)=1 \Rightarrow \alpha=\dfrac{21}{10}$. Cuidado todavía NO podemos afirmar que el sistema tiene solución y que por lo tanto son C.L. Pues primero debemos verificar que los resultados dados satisfagan la ecuación "no usada". Para ellos sustituimos $\alpha=\dfrac{21}{10}$ *y* $\beta=\dfrac{4}{5}$ en la ecuación *(iii)*.

$$6\left(\frac{21}{10}\right)-12\left(\frac{4}{5}\right)\underset{?}{=}5$$

$6\left(\dfrac{21}{10}\right)-12\left(\dfrac{4}{5}\right)=3\neq 5 \Rightarrow$ no se satisface la *(iii)* ecuación por lo tanto el Sistema NO tiene solución lo que quiere decir que $\vec{A}$ **NO** es C.L. de. $\{(2,2,6);(-4,-9,-12)\}$.

OBSERVACIÓN: Si cuando se sustituye los valores de α,β en la ecuación no usada se satisface, la conclusión sería que el sistema **SI** tiene solución (es decir es compatible) y por lo tanto SI sería el vector combinación lineal del conjunto dado.

8.- Pruebe la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

Solución:

Por el teorema 11 tenemos: $\vec{x}\cdot\vec{y}=\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.\cos\theta$

Aplicamos valor absoluto a ambos miembros

$$\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right| = \left|\left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|.\cos\theta\right| \underset{\substack{propiedad\\ del\\ valor\\ absoluto}}{=} \left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\|.\left|\cos\theta\right| \underset{\substack{|\cos\theta|\le 1\\ \forall\theta}}{\le} \left\|\vec{x}\right\|.\left\|\vec{y}\right\|$$

Por transitividad

$$\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right| \le \left\|\vec{x}\right\|\cdot\left\|\vec{y}\right\| = \left|\vec{x}\right|\cdot\left|\vec{y}\right| \qquad \textbf{L.q.q.d.}$$

9.- Sea $\vec{v} = \sqrt{6}k + 7j + 3i$. Encuentre el valor de $\vec{w}$ tal que sea paralelo a $\vec{v}$ y de longitud "2".

Solución:

Como $\vec{w} // \vec{v} \Rightarrow \exists\alpha \in \Re / \vec{w} = \alpha\vec{v}$ **(definición 15)**

$\Rightarrow \vec{w} = (3\alpha, 7\alpha, \sqrt{6}\alpha)$

Como la longitud es "2"

$$\Rightarrow \left\|\vec{w}\right\| = 2 \Rightarrow \left\|(3\alpha, 7\alpha, \sqrt{6}\alpha)\right\| = 2 \Rightarrow \sqrt{(3\alpha)^2 + (7\alpha)^2 + (\sqrt{6}\alpha)^2} = 2$$

Elevando al cuadrado ambos lados nos queda $9\alpha^2 + 49\alpha^2 + 6\alpha^2 = 4$

$$\Rightarrow 64\alpha^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{4}{64} \Rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ existen dos vectores $\vec{w}_1 = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ y $\vec{w}_2 = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$.

10.- Hallar la proyección vectorial y escalar del vector $\vec{x} = (1,1,2)$ sobre $\vec{y} = (-2,3,1)$.

Solución:

Sea el vector $\vec{u}$ la proyección vectorial de $\vec{x}$ sobre $\vec{y}$ / $\vec{u} = \left(\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\left\|\vec{y}\right\|^2}\right)\vec{y}$

$\vec{x}\cdot\vec{y} = (1,1,2)\cdot(-2,3,1) = -2 + 3 + 2 = 3$

$$\left\|\vec{y}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \Rightarrow \left\|\vec{y}\right\|^2 = 14$$

La proyección vectorial será $\vec{u} = \frac{3}{14}(-2,3,1) = \left(\frac{-3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14}\right)$

Y la proyección escalar es: $\left\|\vec{u}\right\| = \frac{\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right|}{\left\|\vec{y}\right\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}$

OBSERVACIÓN: *Nótese que para la proyección escalar si tenemos el vector proyección basta con calcular su módulo pero quisimos usar la fórmula para practicar su uso.*

Ejercicios Propuestos:

1.- Sean los puntos $P(-1,2,4)$; $Q(4,5,0)$ y los vectores $\vec{A}=(3,0,-4)$; $\vec{B}=(0,-1,-3)$; $\vec{C}=3\hat{j}-\hat{k}+2\hat{i}$; $\vec{D}=5\hat{k}-\hat{i}$; $\vec{E}=-\hat{k}+2\hat{i}$. Calcular:

a) $\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{B}-5$

b) El ángulo entre $\overrightarrow{QP},\vec{A}$

c) $\left\|\vec{A}+\overrightarrow{2B}-\overrightarrow{PQ}\right\|$

d) $\left[\vec{D},\vec{E},\vec{C}\right]$

e) El área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son $\vec{C}$ y $\vec{E}$.

f) El unitario de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{D}$.

g) El valor de "α" para que el vector $(\alpha+2,3,\alpha)$ sea perpendicular a $\vec{E}$

h) $\vec{C}(\vec{D}\cdot\vec{E})$

2.- Encuentre el valor de "β" tal que los vectores $\overline{x}=(8,6)$ y $\overline{z}=(3,\beta)$ sean ortogonales:

3.- Se sabe que $\|\vec{x}\|=13;\|\vec{y}\|=5$ y $\|\vec{x}+\vec{y}\|=2$ encuentre $\|\vec{x}-\vec{y}\|$.

4.- Se sabe que $\|\vec{x}\|=2;\|\vec{y}\|=3$ y $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{x},\vec{y}$.

Calcular: a) $\|\vec{x}+\vec{y}\|$ b) $\|\vec{x}-\vec{y}\|$

5.- Sean los vectores $\vec{x}=(1,3,2);\vec{y}=(-2,4,1)$ y $\vec{z}=(0,1,4)$. Hallar un vector $\vec{w}/2\vec{x}-\vec{y}+3\vec{z}=4\vec{z}$.

6.- Determine si el vector $\vec{A}$ es o no combinación lineal de los vectores dados en cada caso:

a) $\vec{A}=(-2,5)$ $\{(3,1);(4,5)\}$

b) $\vec{A}=(5,3,1)$ $\{(1,0,3);(0,-2,4);(0,0,9)\}$

c) $\vec{A}=(9,5)$ $\{(2,4);(1,2)\}$

d) $\vec{A}=(-2,5)$ $\{(3,2);(5,6);(-3,1)\}$

e) $\vec{A}=3\hat{j}-\hat{k}$ $\{(1,0,1);\hat{k}\}$

7.- Sean $\vec{x},\vec{y}$ vectores ortogonales en $\Re^3 / \|\vec{x}\|=3$ y $\|\vec{y}\|=7$. Hallar $\|\vec{x}+\vec{y}\|$ y $\|\vec{x}-\vec{y}\|$.

8.- Los vectores $\vec{x},\vec{y}\in\Re^3$ forman un ángulo de $\pi/3$. Suponiendo que la $\|\vec{x}\|=3; \|\vec{y}\|=4$.

Calcular: a) $\vec{x}\cdot\vec{y}$ b) $\|\vec{x}+\vec{y}\|$. c) $\|\vec{x}-\vec{y}\|^3$

9.- Sean $\vec{x},\vec{y}\in\Re^3$ perpendiculares cuyas magnitudes respectivas son “4” y “2”. Hallar la magnitud del vector $(\vec{x}+\overrightarrow{2y})\times(3\vec{x}-\vec{y})$.

10.- Sean $\vec{x}=(2,-3,1)$; $\vec{y}=(1,2,-1)$ Hallar:

a) $\vec{x}\cdot\vec{y}$ b) $(2\vec{x}+\vec{y})\cdot\vec{y}$ c) $\|(2\vec{x}-\vec{y})\times(2\vec{x}+\vec{y})\|$

11.- Si $\vec{x},\vec{y}\in\Re^3 / \|\vec{x}\|=3$ y $\|\vec{y}\|=5$; encuentre “α” para que los vectores $(\vec{x}+\alpha\vec{y})$ y $(\vec{x}-\alpha\vec{y})$ sean ortogonales.

12.- Sean $\vec{u},\vec{v} \in \Re^3$ $/ \vec{u} \perp \vec{v}$ pruebe que $\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2$.

13.- Si $\vec{x} // \vec{y}$ entonces $\left\|\vec{x} \times \vec{y}\right\| = 0$.

14.- Sean $\vec{u},\vec{v} \in \Re^3 / \left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\|$. Pruebe que $\left(\vec{u}+\vec{v}\right) \perp \left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

15.- Sean $\vec{u},\vec{v} \in \Re^3$ vectores no nulos $/ \left\|\vec{u}-\vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\|$. Demuestre que el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\pi/3$. ¿Cuál es el ángulo entre $\vec{u}$; $\vec{u}-\vec{v}$?.

16.- Sean $\vec{u},\vec{v} \in \Re^3$ vectores no nulos. Hallar dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en función de $\vec{u} y \vec{v} /$ $\vec{u} = \vec{A} + \vec{B}$; $\vec{A} // \vec{v}$ y $\vec{B} \perp \vec{v}$.

17.- Sea $\vec{w} = \vec{v} - \dfrac{\vec{u} \cdot \left(\vec{u}.\vec{v}\right)}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$. Demuestre que $\vec{w} \perp \vec{u}$.

18.- Si $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ y $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$ son colineales entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales.

19.- Sean $\vec{u},\vec{v} \in \Re^3 /$ el ángulo entre ellos es $\pi/4$. Pruebe que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|$.

20.- Demuestre las siguientes propiedades:

a.- $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 + \left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 = 2\left\|\vec{a}\right\|^2 + 2\left\|\vec{b}\right\|^2$

b.- $(\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}+\vec{b}) = 2.(\vec{a} \times \vec{b})$

c.- $\left\|\vec{a}\right\| = \left\|\vec{b}\right\| \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}) \perp (\vec{a}-\vec{b})$

d.- $\left\|\vec{a} x \vec{b}\right\|^2 + \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 = \left\|\vec{a}\right\|^2 . \left\|\vec{b}\right\|^2$

21.- Dado los vectores $\vec{a}=(1,-2,3)$ y $\vec{b}=(3,1,2)$ encontrar un tercer vector $\vec{c}$ que sea combinación lineal de ellos, de magnitud 4 y además perpendicular al vector $\vec{b}$.

22.- Sea el vector $\vec{C}=(\vec{A}\times\vec{B})+\vec{B}$; el vector $\vec{B}$ es unitario y $\left\|\vec{A}\times\vec{B}\right\|=\sqrt{3}$. Hallar el ángulo entre el vector $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

23.- Hallar un vector $\vec{v}$ de módulo 10 paralelo al vector $3\vec{A}-4\vec{B}$ sabiendo que $\vec{A}=-\frac{2}{3}\hat{k}+2\sqrt{2}\hat{i}$; $\vec{B}=\left(\sqrt{2},-\frac{1}{2},0\right)$.

24.- Dados los vectores $\vec{x}=(-3,1,1)$ y $\vec{b}=(1,4,0)$. Hallar los vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}\in\Re^3$ / $\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$; $\vec{c}$ es paralelo a $\vec{x}$ y $\vec{d}$ es perpendicular al vector $\vec{x}$.

25.- Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ ortogonales en $\Re^3$; $\left\|\vec{A}\right\|=3;\left\|\vec{B}\right\|=\frac{3}{2}$, calcular:

a.- $\left\|(2\vec{A}+\vec{B})\times(\vec{A}-4\vec{B})\right\|$

b.- $\left(2\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}-4\vec{B}\right)$

c.- El ángulo entre los vectores $\vec{A};\left(\vec{A}-\vec{B}\right)$.

26.- Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores unitarios y perpendiculares pruebe que:

a.- $\left\|\vec{A}-\vec{B}\right\|=\sqrt{2}$.

b.- $\vec{A}\times\vec{B}$ es unitario.

27.- Se sabe que $\left\|\vec{x}\times\vec{y}\right\|=\frac{9}{11}$. Hallar $\left\|(2\vec{x}-\vec{y})\times(3\vec{x}+4\vec{y})\right\|$.

28.- El ángulo entre los vectores "$\vec{x};\vec{y}$" es: $\pi/3$. Se sabe que $\|\vec{x}\|=3$ y $\|\vec{y}\|=4$. Hallar:

a.- $\|(\vec{x}+2\vec{y})\times(3\vec{x}-\vec{y})\|$ b.- $\|\vec{x}-\vec{y}\|^6$.

29.- Sean $\vec{u},\vec{v}\in\Re^3$. Suponga que $\vec{u}$ es ortogonal a $\vec{v}$; $\|\vec{u}+\vec{v}\|=5$; $\|\vec{u}\|=4$. Hallar:

a.- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^5$

b.- El ángulo entre los vectores $(\vec{u}-\vec{v})$ y $(\vec{u}+\vec{v})$.

30.- Determinar la primera componente del vector $\vec{a}=(x,3,-1)$ sabiendo que forma un ángulo de $\pi/4$ con el vector $\vec{b}=(1,3,1)$.

31.- Encuentre en cada caso las proyecciones escalar y vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$:

a.- $\vec{a}=(3,-4)$; $\vec{b}=(5,0)$.

b.- $\vec{a}=(-2,3,-6)$; $\vec{b}=(5,-1,4)$

c.- $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$; $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

32.- Hallar el vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ donde $\vec{b}=(1,2,1)$, sabiendo que el vector $\vec{a}$ es perpendicular a $(\vec{b}-3\vec{a})$ y $\|\vec{a}\|=2$.

Capítulo 3: Rectas , Planos y Esferas...

1.- **Ecuaciones de la Recta**: Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto por donde pasa la recta ***L*** de la y $\overrightarrow{V_D} = (a,b,c)$ un vector paralelo a ***L*** llamado *"vector director"* entonces tenemos:

a.- $(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a,b,c)$ Esta es la ***"Ecuación Vectorial de la Recta"*** lo abreviaremos como E. V. R.

Aplicando las operaciones de vectores en la parte (a) nos queda:

$(x,y,z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$

b.- Por igualdad de vectores $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ Esta ecuación es la:

"Ecuación Paramétrica de la Recta". La abreviaremos E.P.R.

c.- Despejemos *"t"* de cada ecuación en (b) nos queda:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = t \\ \dfrac{y - y_0}{b} = t \\ \dfrac{z - z_0}{c} = t \end{cases}$$

Igualando nos queda: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$. Esta ecuación es la:

"Ecuación Simétrica de la Recta". Que denotaremos con el acróstico E.S.R.

Conclusión.

Para hallar la ecuación de una recta en $\Re^3$, necesito un punto por donde pase la recta y un vector paralelo a la misma.

2.- **<u>Posición relativa de las rectas</u>***:* Sean L_1, L_2 dos rectas en $\Re^3$ cuyos vectores directores respectivamente son $\overrightarrow{V_{D1}}$ y $\overrightarrow{V_{D2}}$. Las rectas pueden ser: PARALELAS o NO PARALELAS.

a.- Rectas Paralelas: $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{V_{D1}} // \overrightarrow{V_{D2}} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_{D1}} \times \overrightarrow{V_{D2}} = \vec{0}$

b.- No Paralelas $\begin{cases} Se \quad cor\tan \quad en \quad un \quad punto \\ ó \\ No \quad se \quad cor\tan \quad se \quad cruzan, \ son \quad Oblicuass \end{cases}$

OBS1: Dentro de las NO paralelas pueden estar las perpendiculares, $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{V_{D1}} \perp \overrightarrow{V_{D2}} \Leftrightarrow \overrightarrow{V_{D1}} \cdot \overrightarrow{V_{D2}} = 0$.

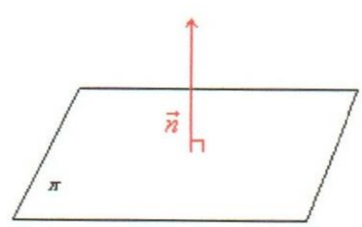
OBS2: Para probar que dos rectas son "oblicuas" debemos ver que no son paralelas y que no se cortan.

3.- **<u>Ecuación de un Plano</u>***:* Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto dado del plano π y $P(x,y,z)$ un punto arbitrario, además sea $\vec{n} = (a,b,c)$ un vector perpendicular al plano π llamado *"Vector Normal"* del plano. Puede observarse en la figura que se cumple que:

$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$

$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Rightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a,b,c) = 0$



Esta última ecuación es la *"Ecuación Vectorial del Plano"* (E. V. P.)

Si efectuamos el producto escalar en (a) nos queda:

$$\text{(b)}\quad a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

nos queda La *Ecuación Escalar del Plano* (E.E.P.)

Si aplicamos distributiva y simplificamos en (b):

$$ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0=0$$

$$ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0$$

Llamemos $d=ax_0+by_0+cz_0$

(c) $ax+by+cz=d$ *"Ecuación Lineal del Plano"* (E.L.P)

Conclusión:

Para hallar la ecuación de un plano se necesita un punto por donde pase el plano y un vector perpendicular al mismo.

4.- **Recta Intersección**: La intersección de dos planos da una RECTA. ¿Cómo se halla dicha RECTA?

La recta intersección está en ambos planos π_1 y π_2, quiere decir que está recta es perpendicular al mismo tiempo a los vectores normales de dichos planos significa $\overrightarrow{V_{D_{RI}}}$ = vector director de la recta intersección = $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$ donde $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ son los vectores normales respectivos de los planos $\pi_1 y \pi_2$. Luego se halla un punto común de los dos planos y se construye la recta deseada.

5.- Dos planos son paralelos, si los vectores normales son paralelos.

6.- El ángulo entre dos planos no paralelos, es el *ángulo agudo* entre sus vectores normales, es decir, si $\overrightarrow{n_1}$ es el vector normal del plano π_1, $\overrightarrow{n_2}$ es el vector normal del plano π_2 y θ es el ángulo comprendido entre los vectores $\overrightarrow{n_1}$ *y* $\overrightarrow{n_2}$ entonces

$$\theta = \arccos\left(\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left\|\overrightarrow{n_1}\right\|\left\|\overrightarrow{n_2}\right\|}\right).$$

7.- El ángulo entre dos rectas $L_1 y L_2$ es el ángulo entre sus vectores directores. Es decir si $\overrightarrow{V_{D1}}$ es el vector director de la recta L_1, $\overrightarrow{V_{D2}}$ es el vector director de la recta L_2 y θ es el ángulo comprendido entre los vectores $\overrightarrow{V_{D1}}$ *y* $\overrightarrow{V_{D2}}$ entonces

$$\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{V_{D1}}\cdot\overrightarrow{V_{D2}}}{\left\|\overrightarrow{V_{D1}}\right\|\left\|\overrightarrow{V_{D2}}\right\|}\right).$$

8.- La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $\pi : ax+by+cz=d$ es:

$$d_{P_0,\pi} = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0-d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

9.- La distancia entre dos planos paralelos: $\pi_1 : ax+by+cz=d_1$ y $\pi_2 : ax+by+cz=d_2$ es:

$$d_{\pi_1,\pi_2} = \frac{\left|d_1-d_2\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

10.- Distancia de un punto P a una recta L es:

$$d_{P,L} = \frac{\left\|\overrightarrow{V_D}\times\overrightarrow{QP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V_D}\right\|}$$

OBS: $\overrightarrow{V_D}$ = vector director de la recta L y Q es un punto cualquiera de la recta L.

11.- La distancia de dos rectas oblicuas $L_1 y L_2$ es: "si pensamos que las rectas están en planos paralelos $\pi_1 y \pi_2$ es la distancia entre dichos planos paralelos".

12.- **Familia de Planos**: an los planos π_1 y π_2/ $\pi_1 : a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ y $\pi_2 : a_2x+b_2y+c_2z=d_2$. Si aplicamos ***haz de planos*** $\pi_1 + \alpha\pi_2 = 0$ nos queda:

$$a_1x+b_1y+c_1y+d_1+\alpha(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

Haciendo distributiva nos queda:

$$a_1x+b_1y+c_1y+d_1+\alpha a_2x+\alpha b_2y+\alpha c_2z+\alpha d_2=0$$

Asociando los términos comunes:

$(a_1+\alpha a_2)x+(b_1+\alpha b_2)y+(c_1+\alpha c_2)y=-d_1-\alpha d_2$ Nos queda la familia de planos que pasan por la intersección de los planos π_1 y π_2.

Además, su recta común, se llama EJE o ARISTA DEL HAZ.

13.- **Esfera***:* La ecuación cartesiana de una esfera es $Ax^2+Ay^2+Az^2+Bx+Cy+Dz+E=0$. Al completar cuadrados en esta última ecuación, nos queda la ecuación canónica de la esfera, la cual es $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ donde "R" es el radio y (x_0,y_0,z_0) es el centro de dicha esfera.

14.- **El volumen de una esfera de radio "R" es***:* $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Ejercicios Resueltos:

1.- Encuentre La ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de la recta que pasa por el punto $A(5,1,3)$ y es paralela al vector $\overrightarrow{M} = -2\hat{k} + \hat{i} + 4\hat{j}$ y luego halle otros dos puntos de dicha recta.

Solución:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t\overrightarrow{V_D}$$

$$(x, y, z) = (5,1,3) + t(1,4,-2)$$

$$(x, y, z) = (5+t, 1+4t, 3-2t) \qquad \text{E. V. R.}$$

E. P. R.

Por igualdad de vectores en E.V.R.

$$\begin{cases} x = 5+t \\ y = 1+4t \\ z = 3-2t \end{cases}$$

Despejando "t" de cada ecuación nos queda

$$x-5=t \qquad \frac{y-1}{4}=t \qquad \frac{z-3}{-2}=t$$

Igualando: $$x-5 = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-2} \qquad \text{E S. R.}$$

Para hallar puntos de la recta, lo ideal es escoger la *"Ecuación Paramétrica"* de la misma dándole cualquier valor a *"t"*. Por ejemplo si hacemos:

$$t = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{array}$$

este es el punto A, no nos sirve.

$$t=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=5+1 \\ y=1+4 \\ z=3-2 \end{array} \Rightarrow B(6,5,1)$$

$$t=2 \Rightarrow \begin{array}{l} x=5+2 \\ y=1+4.2 \\ z=3-2.2 \end{array} \Rightarrow C(7,9,-1)$$

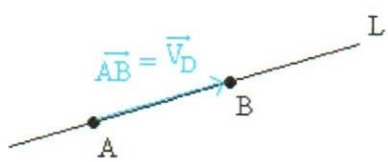
2.- Conteste las siguientes preguntas:

a.- Encuentre la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $A(2,4,-3)$ y $B(3,-1,1)$.

b.- ¿En qué puntos esta recta intersecta al plano xy?

Solución:

a.- Podemos dibujar la situación, para hallar la recta necesitamos un vector paralelo a la misma para ello podemos construir el vector $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{BA}$.



Usaremos $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{V_D}=(3-2,-1-4,1-(-3))=(1,-5,4)$

Tomemos cualquiera de los puntos, en nuestro caso tomaremos "A"

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=4-5t \\ z=-3+4t \end{cases} \quad E.P.R.$$

b.- Para intersectar superficies con rectas lo ideal es tener la recta en forma ***paramétrica.***

$$L\vdots\begin{cases} x = 2+t \\ y = 4-5t \\ z = -3+4t \end{cases} \cap \text{ Plano } xy \ (z = 0)$$

Donde aparece "z" coloco "0"

$0 = - 3 + 4t$ despejo $t \;/\; t = \frac{3}{4}$

Sustituyo en la Recta L, para hallar el punto de intersección

$$\begin{aligned} x &= 2+\frac{3}{4} = \frac{11}{4} \\ y &= 4-5\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ z &= -3+4\cdot\frac{3}{4} = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad P_I\left(\frac{11}{4},\frac{1}{4},0\right)$$

Esto último no hacía falta, es una comprobación

3.- Verifique la posición relativa de las rectas L_1 y L_2, donde:

$$L_1\vdots\begin{cases} x+3 = 5t \\ y-2 = -t \\ z+2 = t \end{cases} \qquad L_2\vdots 5-2x = y = \frac{5+2z}{3}$$

Solución:

Veamos si son paralelas

$$L_1\vdots\begin{cases} x = -3+5t \\ y = 2-1.t \\ z = -2+1.t \end{cases}$$

Nótese que $\overrightarrow{V_{D_{L1}}}$ son los números que acompañan a la "t" con sus respectivos signos.

$$\overrightarrow{V_{D_{L1}}} = (5,-1,1)$$

La Recta L_2 está casi simétrica, hay que arreglarla para que sea de la forma

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$-2x+5 = y = 2\,\frac{z+5}{3}$$

Debemos convertirlos en un **"1"** invisible

$$-2\left(x-\frac{5}{2}\right)=y=\frac{2\left(z+\frac{5}{2}\right)}{3}$$

$$\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=y=\frac{z+\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$\overrightarrow{V_{D_{L2}}}=\left(\frac{-1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$$

OBS: no confundir creyendo que es "0" la ***"y"*** está dividida entre un "1" invisible.

A nosotros nos interesa la dirección de $\overrightarrow{V_{D_{L2}}}$, y no el tamaño, así que multipliquemos por *"2"*: $\overrightarrow{V_{D_{L2}}}$ = (-1, 2, 3) . Para ver si $L_1 // L_2$ basta ver que $\overrightarrow{V_{D_{L1}}} // \overrightarrow{V_{D_{L2}}}$, es decir, probar que $\overrightarrow{V_{D_{L1}}} \times \overrightarrow{V_{D_{L2}}} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{V_{D_{L1}}} \times \overrightarrow{V_{D_{L2}}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} -3\hat{i}-\hat{j}+10\hat{k} \\ -2\hat{i}-15\hat{j}-\hat{k} \\ \hline (-5,-16,9) \neq (0,0,0) \end{array} \quad \Rightarrow L_1 \quad \textit{no es paralela a} \quad L_2$$

Veamos si son perpendiculares: $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{V_{D_{L1}}} \cdot \overrightarrow{V_{D_{L2}}} = 0$

$(5, -1, 1) \cdot (-1, 2, 3) = -5 - 2 + 3 = -4 \neq 0 \Rightarrow L_1 \not\perp L_2$

Falta ver si se cortan o son oblicuas. Para ello interceptamos L_1 y L_2, para intersectar rectas lo ideal es pasarlas a **paramétricas**

$$L_1 : \begin{cases} x = -3+5t \\ y = 2-t \\ z = -2+t \end{cases}$$ ya está en forma paramétrica

Pasemos L_2 a E.P.R.: $\dfrac{\left(x-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = s \qquad y = s \qquad \dfrac{z+\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} = s$

No lo llamamos "t" porque $L_1 \neq L_2$

$$L_2 : \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{s}{2} \\ y = s \\ z = \frac{-5}{2} + \frac{3}{2}s \end{cases}$$

Igualamos L_1 con L_2:

$$\begin{cases} -3+5t = \frac{5}{2} - \frac{s}{2} \\ 2-t = s \\ -2+t = \frac{-5}{2} + \frac{3}{2}s \end{cases} \qquad \begin{cases} -6+10t = 5-s \\ 2-t = s \\ -4+2t = -5+3s \end{cases} \qquad \begin{matrix} a) \\ b) \\ c) \end{matrix} \begin{cases} 10t+s = 11 \\ t+s = 2 \\ 2t-3s = -1 \end{cases}$$

Sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas

Para resolver un sistema como éste elijo dos de las tres ecuaciones:

$$(-2) \qquad \begin{array}{r} (-2)a) \\ b) \end{array}\begin{cases} t+s=2 \\ 2t-3s=1 \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{array}{r} -2t-2s=-4 \\ 2t-3s=1 \\ \hline -5s=-5 \end{array}$$

$s=1$

de la (b) t = 2 – s = 2 – 1 = t

Sustituyo s = 1 y t = 1 en la que no utilicé (a) 10 + s = 1

10.1+1 = 11

? 11 = 11

Como satisface la ecuación no usada entonces el Sistema tiene una única solución, es decir, las ***rectas se cortan***. Si la última ecuación no se hubiese satisfecho con los valores de *"s"* y *"t"* hallados con las dos ecuaciones utilizadas, entonces el Sistema sería incongruente, es decir no tendría solución por ende no habría punto de corte y entonces las rectas serían oblicuas.

Conclusión: L_1 y L_2 son no paralelas que se cortan. Como información extra buscaremos el punto de corte entre L_1 y L_2. Para ello sustituimos s = 1 en L_2 o t = 1 en L_1. $P_C(2,1,-1)$

4.- Pruebe que L_1 y L_2 son OBLICUAS donde:

$$L_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+3t \\ z = 4-t \end{cases} \qquad L_2 : \frac{x}{2} = y-3 = \frac{z+3}{4}$$

Solución:

Para probar que dos Rectas son oblicuas, basta ver que no sean paralelas y no se corten.

$$\overrightarrow{V_{D1}} = (1,3,-1) \quad y \quad \overrightarrow{V_{D2}} = (2,1,4)$$

$$\overrightarrow{V_{D1}} \times \overrightarrow{V_{D2}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k} + \hat{i} - 4\hat{j} - 6\hat{k} = (13,-6,-5) \neq (0,0,0)$$

$$\Rightarrow L_1 \quad \text{no es paralela a } L_2$$

Ahora falta ver que **no** se cortan, para ello interceptamos las rectas y comprobamos que el sistema no tiene solución.

Pasemos L_2 a forma paramétrica: $\frac{x}{2} = s \qquad y - 3 = s \qquad \frac{z+3}{4} = s$

$$L_2 : \begin{cases} x = 2s \\ y = 3 + s \\ z = -3 + 4s \end{cases} \qquad \cap \qquad L_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} (a) & 2s = 1 + t & \\ (b) & 3 + s = -2 + 3t & \Rightarrow \\ (c) & -3 + 4s = 4 - t & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (a) & 2s - t = 1 \\ (b) & s - 3t = -5 \\ (c) & 4s + t = 7 \end{array}$$

Sumemos (a) y (c)

$$\begin{array}{c} 2s - t = 1 \\ 4s + t = 7 \\ \text{-------} \\ 6s = 8 \end{array} \qquad \Rightarrow s = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad \text{sustituyendo en (a)}$$

hallamos "t" $\Rightarrow 2s - t = 1 \Rightarrow 2.\left(\frac{4}{3}\right) - t = 1 \Rightarrow \frac{8}{3} - t = 1 \Rightarrow \frac{8}{3} - 1 = t \Rightarrow t = \frac{5}{3}$.

Ahora sustituimos $t = \frac{5}{3}$ y $s = \frac{4}{3}$ en la ecuación no usada (b) $\quad s - 3t = -5$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} - 3.\left(\frac{5}{3}\right) \underset{?}{=} -5$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} - 3.\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3} - 5 = -\frac{11}{3} \neq -5$$

Esto quiere decir que L_1 y L_2 no se cortan.

Entonces como $L_1 \not\parallel L_2$ y no se cortan, hemos probado que L_1 y L_2 son oblicuas.

5.- Hallar la intersección de las Rectas dadas con las superficies respectivas:

a.- $\dfrac{x-1}{3} = y = z-1 \qquad z = x + y^2$

b.- $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \qquad x+y+z=1$

Solución:

a.- Para intersectar Rectas en $\Re^3$ con superficies es necesario pasar la recta a su forma paramétrica.

$$\frac{x-1}{3} = y = z-1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$$

Ahora podemos intersectar:

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases} \quad \cap \quad z = x + y^2 \quad \text{(Igualamos “z”)}$$

$1+t = 1+3t+t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2+2t=0 \quad \Rightarrow \quad t(t+2)=0 \quad \Rightarrow$

$t=0$ o $t=-2$

Como hay dos valores para “t”, hay dos puntos de intersección

Para $t=0$, sustituyo en la recta en forma paramétrica y tenemos $\Rightarrow (1,0,1)$

Para $t=-2$, nos queda el punto $(-5,-2,-1)$

b.- $x+y+z=1 \quad \cap \quad \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \Rightarrow$ sustituimos los valores de

$x = 1+t \quad y = 2t \quad z = 3t$ en el plano y nos queda:

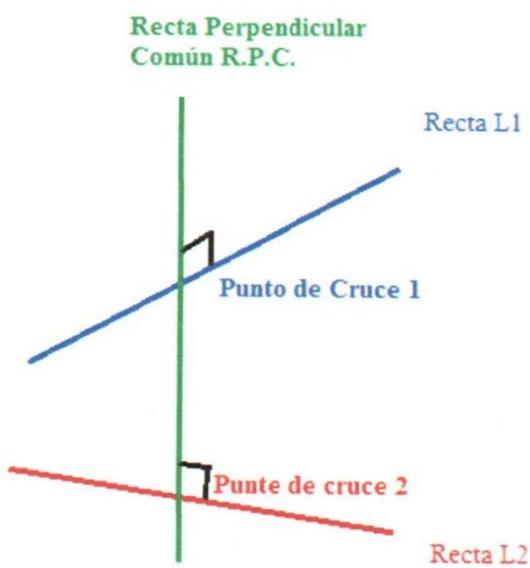
$1+t+2t+3t=1 \Rightarrow 6t=0 \Rightarrow t=0$ para hallar el punto de intersección, sustituyo $t=0$ en la recta y nos queda $(1,0,0)$.

6.- Hallar los puntos de cruce de las rectas :

$$L_1:\begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=12+t \end{cases} \quad y \quad L_2:\begin{cases} x=1+2k \\ y=2-4k \\ z=-11k \end{cases}$$

Solución:

Los puntos de cruce son los puntos de corte de la recta perpendicular común L_1 y L_2 con las rectas L_1 y L_2. (Ver figura a continuación).



Busquemos el vector director de la recta perpendicular común el cual llamaremos $\vec{A}$. Donde $\vec{A}=\overrightarrow{V_{D1}}\times\overrightarrow{V_{D2}}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -11 \end{vmatrix}=-18\hat{i}+24\hat{j}-12\hat{k}$. (Este vector lo podemos simplificar porque necesitamos solo la dirección y no su tamaño). $\vec{A}=\frac{1}{6}(-18,24,-12)=(-3,4,-2)$.

La recta perpendicular común pasa por el punto de cruce 1 el cual llamaremos: $P_{C1}(x_0,y_0,z_0)$. Por lo tanto la ecuación paramétrica de la recta perpendicular común es:

$$(*)\,R.P.C.\vdots\begin{cases}x=x_0-3s\\ y=y_0+4s\\ z=z_0-2s\end{cases}$$

Ahora nótese en la gráfica que la recta L_1 pasa por dicho punto $P_{C1}(x_0,y_0,z_0)$. Quiere decir, que éste punto satisface la ecuación de la recta L_1.

$\begin{cases}x_0=2t\\ y_0=2t\\ z_0=12+t\end{cases}\Rightarrow$ sustituimos en la Ecuación paramétrica de la R.P.C. (*) y nos queda:

$R.P.C.\vdots\begin{cases}x=2t-3s\\ y=2t+4s\\ z=12+t-2s\end{cases}$ e intersectamos con la recta $L_2\vdots\begin{cases}x=1+2k\\ y=2-4k\\ z=-11k\end{cases}$ para hallar los puntos de cruce. Igualamos y nos queda:

$$\begin{cases}1+2k=2t-3s\\ 2-4k=2t+4s\\ -11k=12+t-2s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(i)\quad 2t-3s-2k=1\\ (ii)\quad 2t+4s+4k=2\\ (iii)\quad t-2s+11k=-12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(i)\quad 2t-3s-2k=1\\ (ii)\quad t+2s+2k=1\\ (iii)\quad t-2s+11k=-12\end{cases}$$

Para resolver este sistema apliquemos Kramer:

$$\Delta S=\begin{vmatrix}2 & -3 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 11\end{vmatrix}=87 \qquad \Delta t=\begin{vmatrix}1 & -3 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ -12 & -2 & 11\end{vmatrix}=87$$

$$\Delta k=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & -12\end{vmatrix}=-87 \quad \Rightarrow t=\frac{\Delta t}{\Delta S}=\frac{87}{87}=1 \quad y \quad k=\frac{\Delta k}{\Delta S}=\frac{-87}{87}=-1$$

Para saber cuáles son los puntos de cruce, basta con sustituir:

$t=1 \quad en \quad L_1 \quad y \quad k=-1 \quad en \quad L_2$ y nos queda:

$t=1 \quad en \quad L_1 \Rightarrow P_{C1}(2,2,13)$ y $k=-1 \quad en \quad L_2 \Rightarrow P_{C2}(-1,6,11)$

7.- Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(1,3,2)$; $Q(3,-1,6)$ y $R(5,2,0)$.

Solución:

Para hallar la ecuación de un plano necesitamos dos datos, un vector perpendicular al plano y un punto por donde pase el mismo. Para hallar el vector perpendicular, basta con crear dos vectores con los puntos dados por ejemplo $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ y hacer su producto cruz.

$$\overrightarrow{PQ}=(3-1,-1-3,6-2)=(2,-4,4)$$

$$\overrightarrow{QR}=(5-3,2-(-1),0-6)=(2,3,-6)$$

$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -4 & 4\\ 2 & 3 & -6\end{vmatrix}=(12,20,14)$ puesto que sólo necesitamos sólo la posición y no el tamaño tomaremos como vector normal a $\vec{n}=\frac{1}{2}(12,20,14)=(6,10,7)$.

Ahora elegimos cualquiera de los tres puntos dados, en particular tomemos $P(1,3,2)$ y nos queda:

La ecuación vectorial del planos es: $(x-1,y-3,z-2)\cdot(6,10,7)=0$, si hacemos distributiva nos queda la ecuación escalar del plano: $6(x-1)+10(y-3)+7(z-2)=0$, y si ahora desarrollamos y simplificamos nos queda la ecuación lineal del plano:

$6x-6+10y-30+7z-14=0 \Rightarrow 6x+10y+7z=50$.

8.- Determine la ecuación simétrica de la recta intersección de los planos $\begin{cases}\pi_1 : x+y-z=2 \\ \pi_2 : 3x-4y+5z=6\end{cases}$ y luego calcule el ángulo entre los planos:

Solución:

Si revisamos el punto (6) de la teoría, veremos que el vector director de la recta intersección es el producto cruz de los vectores normales de los planos dados es decir $\overrightarrow{V_D}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 5\end{vmatrix}=(1,-8,-7)$. Ahora debemos buscar un punto de la recta intersección, para ello resolveremos el sistema:

(*) $\begin{cases}x+y-z=2 \\ 3x-4y+5z=6\end{cases}$.

Este sistema es de 2 ecuaciones por 3 incógnitas, para resolverlo, fijamos una de las tres variables con un valor cualquiera y luego resolvemos el sistema que nos quede.

Por ejemplo fijamos $z=0 \Rightarrow \begin{cases} (i) & x+y=2 \\ (ii) & 3x-4y=6 \end{cases}$ multiplicando la primera por

"-3" nos queda:

$$\begin{cases} (i) & -3x-3y=-6 \\ (ii) & 3x-4y=6 \end{cases}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$-7y=0 \Rightarrow y=0$$

Sustituimos $y=0 \quad en \quad (i) \quad x+y=2 \Rightarrow x+0=2 \Rightarrow x=2$

Esto quiere decir, que un punto de la recta intersección es $P_{RI}(0,2,0)$.

OBS: Nótese que si los planos se intersectan, quiere decir que el sistema (*) tiene infinitas soluciones porque en una recta hay infinitos puntos, por ello no se extrañe que a sus compañeros les den resultados distintos.

También tome en cuenta que si asigna un valor cualquiera a una variable puede pasar que el sistema resultante NO tenga solución, esto no significa que los planos no se intersectan sino que la recta intersección NO pasa por ningún punto donde la variable que usted eligió de ese número, por lo tanto cambie de valor hasta que el sistema de 2x2 resultante, sea compatible.

Falta hallar el ángulo entre los dos planos, para ello busquemos el ángulo **agudo** entre sus vectores normales, es decir sea θ el ángulo comprendido entre los vectores $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$ entonces $\theta = \arccos\left(\dfrac{\left|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}\right|}{\left\|\vec{n_1}\right\|\left\|\vec{n_2}\right\|}\right)$

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = (1,1,-1) \cdot (3,-4,5) = 3-4-5 = -6$$

$$\left\|\vec{n_1}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\left\|\vec{n_2}\right\| = \sqrt{3^2+(-4)^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\left|\frac{-6}{\sqrt{3}\left(5\sqrt{2}\right)}\right|\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{5}\right) \approx 60{,}6661^\circ$$

9.- Hallar la distancia del punto $P(3,-8,1)$ a la recta $\begin{cases} x = 3+3t \\ y = -7-t \\ z = -2+5t \end{cases}$.

Solución:

Por la fórmula (10) de la parte teórica tenemos $d_{P,L} = \dfrac{\left\|\overrightarrow{V_D} \times \overrightarrow{QP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V_D}\right\|}$. Sea Q un punto cualquiera de la recta L, para ello démosle el valor de $t=0$ a la ecuación paramétrica de L y tenemos que $Q=(3,-7,-2)$. Luego $\vec{QP} = (3-3,-8-(-7),1-(-2)) = (0,-1,3)$

$\overrightarrow{V_{DL}} = (3,-1,5)$

$$\overrightarrow{V_{DL}} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (2,-9,-3)$$

$$\left\|\overrightarrow{V_{DL}}\right\| = \sqrt{3^2+(-1)^2+5^2} = \sqrt{35}$$

$$\left\|\overrightarrow{V_{DL}} \times \overrightarrow{QP}\right\| = \sqrt{2^2+(-9)^2+(-3)^2} = \sqrt{94}$$

$$d_{P,L} = \frac{\left\|\overrightarrow{V_D} \times \overrightarrow{QP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V_D}\right\|} = \frac{\sqrt{94}}{\sqrt{35}} \approx 1{,}6388$$

10.- Hallar la ecuación del plano paralelo a $2x+2y-z=6$ tal que el punto $P(2,5,-10)$ equidiste de ambos.

Solución:

Sea el plano buscado (*) $\pi_2 \vdots 2x+2y-z=\alpha$ entonces debe ocurrir que $dP,\pi_1 = dP,\pi_2$. Hallemos ambas distancias:

$$dP,\pi_1 = \frac{|2.2+2.5-(-10)-6|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{18}{3} = 6$$

$$dP,\pi_2 = \frac{|2.2+2.5-(-10)-\alpha|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|24-\alpha|}{3}$$ igualando ambas distancias nos

queda

$$\frac{|24-\alpha|}{3} = 6 \Rightarrow |24-\alpha| = 18 \Rightarrow \begin{cases} 24-\alpha=18 \\ o \\ 24-\alpha=-18 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 6 \quad o \quad \alpha = 42$$

$\alpha=6$ ya lo tenemos, lo que indica que $\alpha=42$ si sustituimos en (*) nos queda que el plano buscado, es $\pi_2 \vdots 2x+2y-z=42$.

11.- Hallar la distancia entre las rectas oblicuas L_1 y L_2 donde:

$$L_1 \vdots \begin{cases} x=1+t \\ y=-2+3t \\ z=4-t \end{cases} \qquad y \qquad L_2 \vdots \frac{x}{2} = y-3 = \frac{z+3}{4}$$

Solución: Según la parte (11) de nuestra teoría, dice que la distancia de dos rectas oblicuas $L_1 y L_2$ es: "si pensamos que las rectas están en planos paralelos $\pi_1 y \pi_2$ es la distancia entre dichos planos paralelos". Construyamos dichos planos:

El vector normal $\vec{n}$, común para ambos planos debe ser perpendicular a los vectores directores de la recta es decir: $\vec{n} = \overrightarrow{V_{D1}} \times \overrightarrow{V_{D2}}$.

$$\vec{n}=\overrightarrow{V_{D1}}\times\overrightarrow{V_{D2}}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & k\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=(13,-6,-5).$$

Para construir el plano π_1 que contiene a la recta L_1, necesito un punto de dicha, recta por ejemplo $t=0 \quad en \quad la \quad E.P.R. \Rightarrow P(1,-2,4)$.

$(x-1,y+2,z-4)\cdot(13,-6,-5)=0 \Rightarrow$ La ecuación lineal del plano π_1 es: $\pi_1 \vdots 13x-6y-5z=5$.

Para construir el plano π_2 que contiene a la recta L_2, necesito un punto de dicha recta, por ejemplo $Q(0,3,-3)$.

$(x-0,y-3,z+3)\cdot(13,-6,-5)=0 \Rightarrow$ La ecuación lineal del plano π_2 es: $\pi_2 \vdots 13x-6y-5z=-3$.

$$\Rightarrow DL_1L_2=d_{\pi_1,\pi_2}=\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|5-(-3)|}{\sqrt{13^2+(-6)^2+(-5)^2}}=\frac{8}{\sqrt{230}}$$

12.- Encuentre la ecuación de la esfera con centro C y radio R en cada caso:

a.- $C(2,1,-1) \quad R=4$ b.- $C(-6,1,2) \quad R=2\sqrt{3}$

Solución:

a.- $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=4^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=16$

b.- $[x-(-6)]^2+[y-(-1)]^2+(z-2)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$

$$\Rightarrow (x+6)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4.3 \Rightarrow (x+6)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=12$$

13.- Encuentre el centro, radio y volumen en la esfera $x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z+6=0$

Solución:

$$x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z+6=0$$

$$(x^2+4x \qquad) + (y^2-6y+ \qquad) + (z^2+2z \qquad) = -6$$

Completamos cuadrado

$$(x^2+4x \quad +2^2) + (y^2-6y+3^2) + (z^2+2z+1^2) = -6+2^2+3^2+1^2$$

Lo dividimos entre 2

$$\frac{4}{2}=2 \qquad \frac{6}{2}=3 \qquad \frac{2}{2}=1$$

Factorizamos

$(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=8$. Ecuación canónica de la esfera

$$C=(-2,3-1)$$

$$R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$V_E=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{8}\right)^3=\frac{4}{3}\pi\left(2^{3/2}\right)^3$$

$$=\frac{4}{3}\pi.2^{9/2}=\frac{4}{3}\pi\sqrt{2^8}\,2=\frac{4}{3}\pi.2^4\sqrt{2}= \Rightarrow V_E=\frac{64\pi\sqrt{2}}{3}$$

14.- Encuentre la ecuación cartesiana de la esfera si se sabe que su diámetro es el segmento $\overline{AB}$ donde $A(2,1,4)$ $B(4,3,10)$.

Solución:

El centro de la esfera = P medio $_{\overline{AB}}=\left(\frac{2+4}{2},\frac{1+3}{2},\frac{4+10}{2}\right)=(3,2,7)$

Radio = $d_{C,A}=\sqrt{(3-2)^2+(2-1)^2+(7-4)^2}=\sqrt{11}$

$\Rightarrow E.C.E:\quad (x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=11$ ***(canónica)***

$$\Rightarrow \qquad x^2-6x+9+y^2-4y+4+z^2-14y+49=11$$

$$\Rightarrow \qquad x^2+y^2+z^2-6x-4y-14z+51=0 \; \textbf{\textit{(cartesiana)}}$$

15.- Hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $\begin{cases} \pi_1 : 3x-2y+5z=1 \\ \pi_2 : 2x+7y-6z+11=0 \end{cases}$ y pasa por el punto $P(2,-3,5)$.

Solución:

El plano buscado (aplicando Haz de Planos) es: $\pi_1+\alpha\pi_2=0$. Pero para aplicar dicho concepto ambos planos deben estar igualados a "0". Para ello arreglemos el plano $\pi_1 : 3x-2y+5z-1=0$.

Ahora si

$\pi_1+\alpha\pi_2=0 \Rightarrow 3x-2y+5z-1+\alpha(2x+7y-6z+11)=0$

$\Rightarrow 3x-2y+5z-1+(2\alpha)x+(7\alpha)y-(6\alpha)z+11\alpha=0$ (*)

Asociando las variables comunes tenemos:

$(3+2\alpha)x+(-2+7\alpha)y+(5-6\alpha)z=1-11\alpha$ esta es la familia de planos que pasan por la intersección de los planos $\pi_1 y \pi_2$. Pero no los queremos todos, en particular deseamos aquel que pasa por el punto $P(2,-3,5)$ lo que hacemos es sustituir $x=2 \quad y=-3 \quad z=5$ en (*) y nos queda:

$(3+2\alpha)2+(-2+7\alpha)(-3)+(5-6\alpha)5=1-11\alpha$

$36\alpha-36=0 \Rightarrow \alpha=1$ sustituimos en (*) y el plano buscado es: $5x+5y-z=-10$

Ejercicios Propuestos:

1.- Hallar la posición relativa de las siguientes rectas en cada caso:

a.- $L_1 : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ y $L_2 : \dfrac{x-3}{2} = y-3 = \dfrac{z+3}{4}$

b.- $L_1 : x-2 = \dfrac{y-4}{2} = z-2$ y $L_2 : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y}{-1}; z=1$

c.- $L_1 : \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y}{-1}; z=1$ y $L_2 : \begin{cases} x-t=0 \\ y-2t=0 \\ z=1+t \end{cases}$

d.- Pruebe que las siguientes rectas son oblicuas:

$$L_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+3t \\ z = 4-t \end{cases} \quad \text{y} \quad L_2 : \frac{x}{2} = y-3 = \frac{z+3}{4}$$

Sug: Vea que no son paralelas y no se intersectan.

2.- Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2,1,0)$; $B(0,2,-1)$ y $C(1,-1,3)$.

3.- Hallar la distancia del punto $(0,1,-1)$ a la recta $L_1 : \dfrac{x-2}{2} = y-1; z=0$.

4.- Hallar la ecuación del plano en cada caso:

a.- Que pase por los puntos $A(-1,2,3)$; $B(9,6,7)$ y $C(1,0,0)$.

b.- Que pase por el punto $A(1,-4,6)$ y es paralelo a la recta $L_2 : 5x = \dfrac{5y-15}{-3} = \dfrac{5z-20}{2}$.

c.- Que pase por el punto $C(1,5,9)$ y es paralelo al plano de ecuación $x + y + 3z = 9$.

d.- Pasa por el punto $A(-1,-2,6)$ y es perpendicular al plano $3x - 5y + 8z = 8$.

e.- Pasa por el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2.

$$L_1 : \frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{y} \quad L_2 : \frac{x-3}{2} = y - 3 = \frac{z+3}{4}$$

Además dicho plano es perpendicular al vector $\hat{i} + \hat{j}$.

5.- Encuentre dos puntos de los siguientes planos. **(Aquí se procede asignando a dos variables el valor que se quiera y se despeja la tercera variable).**

a.- $3x - 5y - 8z = 8$ b.- $2x + 6y - 9z = 9$

c.- $3x + 8y - z = 0$ d.- $3x - z = 9$

6.- Encuentre el (o los) punto(s) en que las rectas dadas intersecan a las superficies dadas:

a.- $L_1 : \begin{cases} 2x - 2 = 4t \\ 4y - 4 = 16t \\ z - 6 - 3t = 0 \end{cases}$ y el plano $3x - 7y + 8z = 12$

b.- $L_1: \dfrac{3x-3}{9} = y = z-1$ y la superficie $z = x + y^2$.

c.- $L_1: x-3 = y-1 = \dfrac{z}{4}$ y la esfera $(x-10)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 72$

7.- Determine la recta intersección de cada uno los siguientes pares de planos:

a.- $x + y + z = 1 \qquad x + z = 0$

b.- $2x + y - z = 5 \qquad 6y - z = 8$

c.- $2x - z = 4 \qquad x + 2y - 7z = 8$

8.- Calcule el ángulo en cada uno de los pares de planos del **ejercicio 7**.

9.- Calcule la distancia entre los siguientes pares de planos paralelos:

a.- $3x - 6y + 7z = 2 \qquad 6x - 12y + 14z = 3$

b.- $3x - 4y + 5z = 9 \qquad 3x - 4y + 5z = 4$

10.- Hallar el volumen de las siguientes esferas:

a.- $(x-1)^2 + y^2 + (z-8)^2 = 81$

b.- $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 12x - 4y - 20z + 62 = 0$

c.- $x^2 + y^2 + z^2 + x - y - 20z + 6 = 0$

Problemas de desarrollo:

11.- Hallar la ecuación del plano paralelo a $\pi_1: 2x + 2y - z = 6$ tal que el punto $P(2,5,-10)$ equidiste de ambos.

12.- Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano $3x - y + z = 2$, además dicha recta pasa por el centro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y - 20z = 62$.

13.- Sean las rectas $L_1 : \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x = z \end{cases}$ y $L_2 : \dfrac{x-3}{2} = z + 5; y = 4$.

13.1.- Pruebe que las rectas $L_1 y L_2$ son oblicuas y halle la distancia entre ellas.

13.2.- Pruebe que la recta L_1 es una recta tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 14z + 16 = 0$. **Sugerencia: "demuestre que la distancia del centro de la esfera a la recta que decimos que es tangente es igual al radio".**

14.- Hallar la ecuación de la esfera cuyo centro está en la recta $L_1 : \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Dicha esfera pasa por la intersección de la recta $L_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \\ z = 2 + k \end{cases}$ con la superficie $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 4z - 51 = 0$. Además se sabe que el volumen de la esfera buscada es "36π".

15.- Hallar el ángulo entre las rectas L y M. Donde L es la intersección de los planos $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 4z = 6 \end{cases}$ y $M : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = z + 1$.

16.- Hallar la ecuación del plano que contiene al punto $(2,3,-1)$ y a la recta $L: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-2}{2}$.

17.- Hallar la ecuación del plano que contiene la recta $L_2: \begin{cases} 3x+6y=11 \\ 5y-z=1 \end{cases}$ y además dicho plano pasa por el punto $A(1,2,3)$.

18.- El vértice de un triángulo equilátero está en $P(10,2-2)$. Su lado opuesto está sobre la recta intersección de los planos $\begin{cases} 7x-11y+z=10 \\ x+3y-z=6 \end{cases}$. Hallar los vértices y el área del triángulo.

19.- Hallar vectorialmente el <u>volumen del paralelepípedo</u> cuyos lados adyacentes son los vectores $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$, sabiendo que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ y $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$. Donde A,B,C y D satisfacen las siguientes condiciones:

19.1) A es el origen de coordenadas.

19.2) B es el punto de intersección entre las rectas $L_1: x-2=y-2=z-2$ y la recta $L_2 \begin{cases} x-2y+2=0 \\ z+y-4=0 \end{cases}$.

19.3.- C y D están en la recta $L_3: \dfrac{x-3}{2} = z+5;\ y=4$; y equidistan del punto $Q=(5,4,-4)$ una distancia de $\sqrt{5}$ unidades.

20.- Hallar el área del rectángulo, cuya diagonal es el segmento formado por los puntos de cruces de las rectas $L_1: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-2}{2}$ y $L_2: \dfrac{x-3}{2} = z+5;\ y = 4$. Sabiendo que uno de sus lados mide 5 unidades.

21.- Hallar la ecuación del plano que dista 5 unidades del punto A =(4,4,3) y además que contenga la recta $L: \begin{cases} z = x+3 \\ y = -3 \end{cases}$.

22.- Hallar la ecuación de la recta L que pasa por el punto de intersección de la recta $L\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \\ z = 2+k \end{cases}$ con la superficie $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 4z - 51 = 0$.

Además se sabe que la recta buscada es paralela a la recta intersección de los planos: $\begin{cases} \pi_1 \colon x+y+z=0 \\ \pi_2 \colon 2x - y - 4z = 6 \end{cases}$

23.- Sean los planos $\pi_1 \colon x - 2y + z = 0$ y $\pi_2 \colon ax + 2y + bz = 1$.

23.1.- Para $a=-2; b=2$ obtenga las ecuación simétrica de la recta intersección de $\pi_1 y \pi_2$.

23.2.- Obtenga los valores de a y b para que los planos $\pi_1 y \pi_2$ sean paralelos.

23.3.- Obtenga los valores de a y b para que π_2 contenga el punto $Q(1,1,2)$ y sea perpendicular al plano π_1.

24.- Sean las rectas $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z - 12$; $L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{-11}$;

$L_3: \begin{cases} x + y = 3 \\ z - y = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi: z = x + y$. Responda las siguientes preguntas:

a.- Dibuje el triángulo cuyo primer vértice es el punto de corte de la recta L_3 con el plano π. Y los otros dos vértices son los puntos de cruce de las rectas $L_1 y L_2$.

b.- Hallar el área de dicho triángulo **vectorialmente**.

Capítulo 4: Superficies Cuádricas

1.- Una superficie cuádrica es la gráfica de una ecuación de segundo grado con tres variables x, y, z. La forma general es $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$.

2.- A fin de dibujar una "superficie cuádrica" resulta útil determinar las curvas de intersección de la superficie con los planos paralelos a los planos coordenados. Esas curvas se llaman **trazas** (o secciones transversales) de la superficie.

Tipos de Cuádricas…

3.- **ELIPSOIDE**: Supongamos que el centro es $C(0,0,0)$ entonces la ecuación canónica del "elipsoide" será: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, veamos los cortes con los planos:

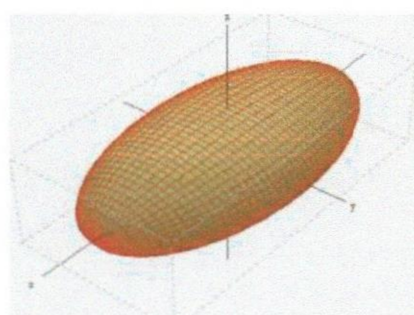
Plano xy $(z=0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Plano yz $(x=0) \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Plano xz $(y=0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Se llama Elipsoide porque todas sus trazas son "elipses".

Su gráfica será:



-Si el centro es $C(x_0, y_0, z_0)$ entonces la ecuación canónica del "elipsoide" será:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

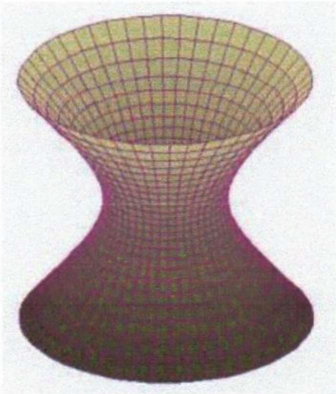
4.- **HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA**: Supongamos que el centro es $C(0{,}0{,}0)$ y el eje de rotación es el eje z entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de una hoja" será: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, veamos los cortes con los planos:

Plano xy $(z=0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ es una elipse (donde se encuentra la sección central)

Plano yz $(x=0) \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ es una hipérbola con eje real en el eje y y eje imaginario el eje z.

Plano xz $(y=0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ es una hipérbola con eje real en el eje x y eje imaginario el eje z.

Su gráfica será:



-Si el centro es $C(0,0,0)$ y el eje de rotación es el eje y entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de una hoja" será: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

-Si el centro es $C(0,0,0)$ y el eje de rotación es el eje x entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de una hoja" será: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

-Si el centro es $C(x_0,y_0,z_0)$ y el eje de rotación es paraleo al eje z entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de una hoja" será: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$.

-Si el centro es $C(x_0,y_0,z_0)$ y el eje de rotación es paraleo al eje y entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de una hoja" será: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$.

-Si el centro es $C(x_0,y_0,z_0)$ y el eje de rotación es paraleo al eje x entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de una hoja" será: $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$.

OBSERVACIÓN: Nótese que la variable del eje de rotación es negativa y las otras son positivas.

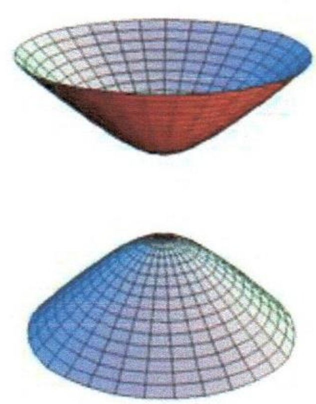
5.- **HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS**: Supongamos que el centro es $C(0,0,0)$ y el eje de rotación es el eje z entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de dos hojas" será: $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, veamos los cortes con los planos:

Plano xy $(z=0) \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ esto es una contradicción quiere decir que en el plano xy no hay gráfica.

Plano yz $(x=0) \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ es una hipérbola con eje imaginario en el eje y y eje real el eje z.

Plano xz $(y=0) \Rightarrow -\frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ es una hipérbola con eje imaginario en el eje x y eje real el eje z.

Su gráfica será:



-Si el centro es $C(0,0,0)$ y el eje de rotación es el eje y entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de dos hojas" será: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

-Si el centro es $C(0,0,0)$ y el eje de rotación es el eje x entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de dos hojas" será: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

-Si el centro es $C(x_0, y_0, z_0)$ y el eje de rotación es paraleo al eje z entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de una hoja" será: $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$.

-Si el centro es $C(x_0, y_0, z_0)$ y el eje de rotación es paraleo al eje y entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de dos hojas" será: $-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$.

-Si el centro es $C(x_0, y_0, z_0)$ y el eje de rotación es paraleo al eje x entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de dos hojas" será: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$.

OBSERVACIÓN: Nótese que la variable del eje de rotación es positiva y las otras son negativas.

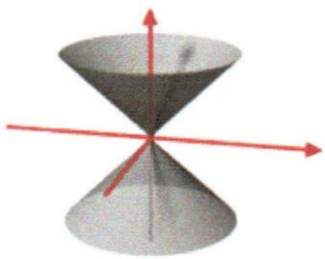
6.- **CONO**: Supongamos que el vértice es $V(0,0,0)$ y el eje de rotación es el eje z entonces la ecuación canónica del "cono" será: $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, veamos los cortes con los planos:

Plano xy $(z=0) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \Rightarrow (x,y)=(0,0)$ esto quiere decir que en el plano xy solo encontraremos el vértice del cono $V(0,0,0)$.

Plano yz $(x=0) \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow$ $z = \pm\frac{c}{b}|y|$ es una par de rectas.

Plano xz $(y=0) \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow$ $z = \pm\frac{c}{a}|x|$ es una par de rectas.

Su gráfica será:



-Si el centro es $C(0,0,0)$ y el eje de rotación es el eje y entonces la ecuación canónica del "cono" será: $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

-Si el centro es $C(0,0,0)$ y el eje de rotación es el eje x entonces la ecuación canónica del "cono" será: $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

-Si el centro es $C(x_0,y_0,z_0)$ y el eje de rotación es paraleo al eje z entonces la ecuación canónica del "cono" será: $\frac{(z-z_0)^2}{c^2} = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$.

-Si el centro es $C(x_0,y_0,z_0)$ y el eje de rotación es paraleo al eje y entonces la ecuación canónica del "cono" será: $\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2}$.

-Si el centro es $C(x_0, y_0, z_0)$ y el eje de rotación es paraleo al eje x entonces la ecuación canónica del "cono" será: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} = \dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}$.

7.- **PARABOLOIDE**: Supongamos que el vértice es y el eje de rotación es el eje z entonces la ecuación canónica del "paraboloide" será: $\dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, veamos los cortes con los planos:

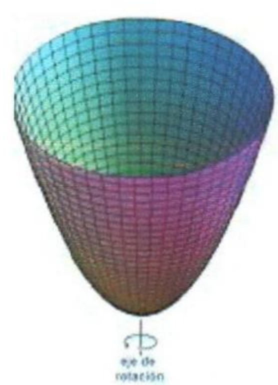
OBS: Si $c > 0$ entonces el paraboloide será cóncavo hacia arriba. Pero si $c < 0$ entonces el paraboloide será cóncavo hacia abajo.

Plano xy $\quad (z = 0) \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow (x, y) = (0,0)$ esto quiere decir que en el plano xy solo encontraremos el vértice del paraboloide $V(0,0,0)$.

Plano yz $\quad (x = 0) \Rightarrow \dfrac{z}{c} = \dfrac{y^2}{b^2} \Rightarrow \quad z = \dfrac{c}{b^2} y^2$ es una parábola.

Plano xz $\quad (y = 0) \Rightarrow \dfrac{z}{c} = \dfrac{x^2}{a^2} \Rightarrow \quad z = \dfrac{c}{a^2} x^2$ es una parábola.

Su gráfica será:



-Si el vértice es $V(0,0,0)$ y el eje de rotación es el eje y entonces la ecuación canónica del "paraboloide" será: $\frac{y}{b}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

Si $b>0$ entonces el paraboloide abrirá hacia la derecha. Pero si $b<0$ entonces el paraboloide abrirá hacia la izquierda.

-Si el centro es $V(0,0,0)$ y el eje de rotación es el eje x entonces la ecuación canónica del "paraboloide" será: $\frac{x}{a}=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$.

Si $a>0$ entonces el paraboloide abrirá hacia el eje $+x$. Pero si $a<0$ entonces el paraboloide abrirá hacia el eje $-x$.

-Si el vértice es $V(x_0,y_0,z_0)$ y el eje de rotación es paralelo al eje z entonces la ecuación canónica de la "parábola" será: $\frac{(z-z_0)}{c}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$.

Si $c>0$ entonces el paraboloide será cóncavo hacia arriba. Pero si $c<0$ entonces el paraboloide será cóncavo hacia abajo.

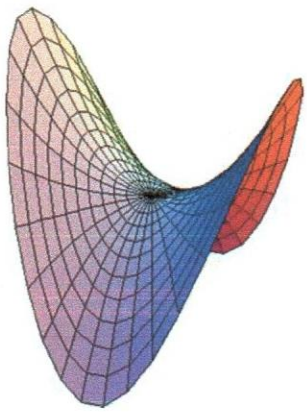
-Si el centro es $V(x_0,y_0,z_0)$ y el eje de rotación es paraelo al eje y entonces la ecuación canónica del "paraboloide" será: $\frac{(y-y_0)}{b}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$.

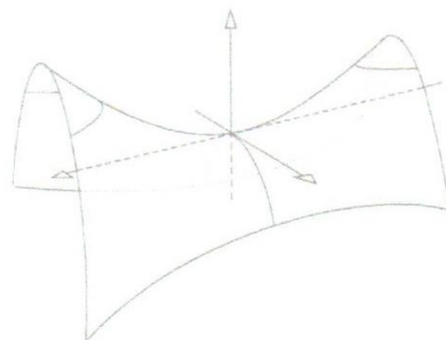
Si $b>0$ entonces el paraboloide abrirá hacia la derecha. Pero si $b<0$ entonces el paraboloide abrirá hacia la izquierda.

-Si el centro es $V(x_0,y_0,z_0)$ y el eje de rotación es paralelo al eje x entonces la ecuación canónica del "paraboloide" será: $\frac{(x-x_0)}{a}=\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$.

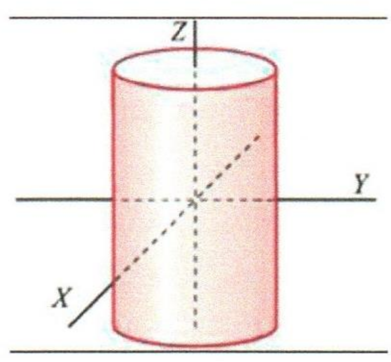
Si $a > 0$ entonces el paraboloide abrirá hacia el eje $+x$. Pero si $a < 0$ entonces el paraboloide abrirá hacia el eje $-x$.

8.- **PARABOLOIDE HIPÉRBOLICO (o La Silla de Montar)**: Su ecuación será $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$





9.- **CILINDROS CUADRÁTICOS:** Cuando *"x, y ó z"* faltan en la ecuación de la superficie entonces es un cilindro. Por ejemplo "un cilindro elíptico" $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Su gráfica será:



10.- **CILINDROS EN GENERAL**: Es una curva que está contenida en el plano horizontal y se llama directriz.

Los datos para hallar la ecuación cartesiana de un cilindro son: "un vector paralelo a las generatrices y la ecuación de la directriz".

Su pongamos que la directriz es $F(x,y)=0$.

Sea $P(x_o,y_o,0)$ un punto de la directriz y $\vec{A}=(a,b,c)$ un vector paralelo a las generatrices.

Entonces el vector director de la recta generatriz será $\overrightarrow{V_{D_{RG}}}=\vec{A}=(a,b,c)$, la generatriz pasará por el punto $P(x_o,y_o,0)$ entonces la ecuación simétrica de la recta generatriz será: $\dfrac{x-x_o}{a}=\dfrac{y-y_o}{b}=\dfrac{z}{c} \quad (i)$.

El punto $P(x_o,y_o,0)$ satisface la ecuación de la directriz es decir $F(x_o,y_o)=0 \qquad (ii)$.

La intersección de *(i)* y *(ii)* nos dará la ecuación cartesiana del cilindro.

$$\begin{cases} (i) & \dfrac{x-x_o}{a}=\dfrac{y-y_o}{b}=\dfrac{z}{c} \\ (ii) & F(x_o,y_o)=0 \end{cases}$$

¿Cómo debemos intersectar? De *(i)* hacemos una doble igualdad tal que:

$\dfrac{x-x_o}{a}=\dfrac{z}{c}$ y $\dfrac{y-y_o}{b}=\dfrac{z}{c} \Rightarrow$ despejamos x_o y y_o y nos queda:

$(iii)\quad x_o = \dfrac{cx - az}{c}$

$(iv)\quad y_o = \dfrac{cy - bz}{c}$

sustituimos *(iii) y (iv)* en *(ii)* y nos da la ecuación cartesiana del cilindro.

OBS: Dejamos la búsqueda del cilindro cuando la directriz es $F(x,z)=0$ y $F(y,z)=0$ para el estudiante.

Ejercicios Resueltos:

1.- Clasifique y dibuje la superficie cuádrica $x^2+2z^2-6x-y+10=0$:

Solución*:*

Completaremos cuadrado.

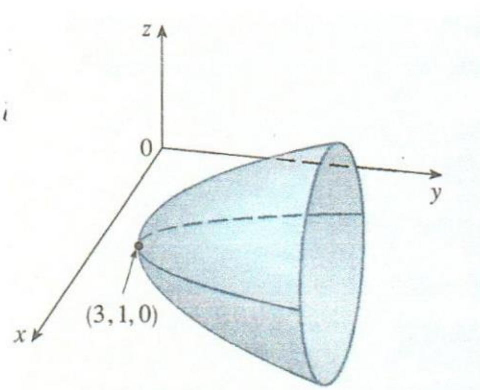
$(x^2-6x \qquad)+2z^2 = y-10$

$(x^2-6x+3^2)+2z^2 = y-10+3^2$

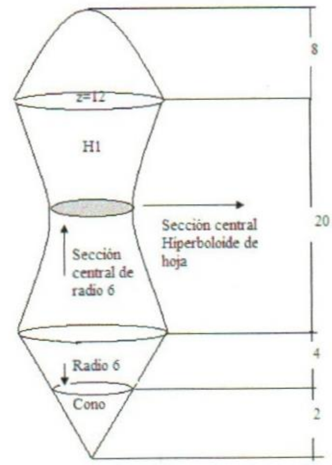
$(x-3)^2+2z^2 = y-1$

$(x-3)^2+\dfrac{z^2}{1/2} = y-1$ Es un paraboloide con vértice $V(3,1,0)$ que gira en un eje paralelo al eje y.

$a^2=1 \Rightarrow a=1 \quad c^2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow c=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y como $b=1>0 \Rightarrow$ abre hacia la derecha. A continuación su gráfica:



2.- Para la siguiente figura:



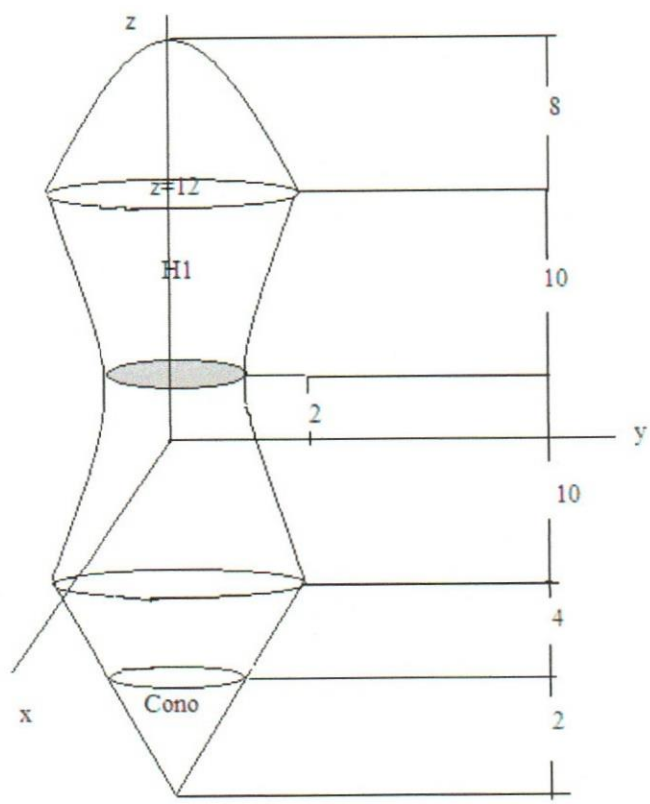
a.- Defina las ecuaciones de las superficies cuádricas, eligiendo de manera adecuada los ejes coordenados e indicando sus dominios respectivo.

b.- Calcular el área de las figuras definidas por las trazas de cada una de las superficies dadas con el plano xy.

Solución:

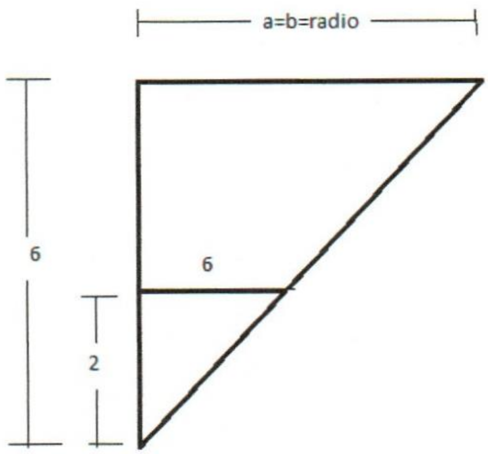
a.- Primero montaremos la gráfica en los ejes coordenados y nos queda:

Es importante notar que desde el origen de coordenadas hasta la traza deben haber "12" unidades.



Comenzamos con el "cono", si el vértice es $V(x_0, y_0, z_0)$ y el eje de rotación es el eje z entonces la ecuación canónica del "cono" será: $\frac{(z-z_0)^2}{c^2} = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$.

El vértice es $V(0,0,-14)$, $c = altura = 6$, $a = b = radio\ de\ la\ tapa$. Debemos buscarlo por semejanza de triángulos:



$$\frac{a}{6} = \frac{6}{2} \Rightarrow a = \frac{36}{2} \Rightarrow a = 18$$

La ecuación del cono será:

$$\frac{(z+14)^2}{6^2} = \frac{x^2}{18^2} + \frac{y^2}{18^2}$$

$$\Rightarrow (z+14)^2 = 6^2\left(\frac{x^2+y^2}{18^2}\right)$$

Finalmente la ecuación del cono es: $(z+14)^2 = \frac{x^2+y^2}{9} \quad z \in [-14,-8]$

Paraboloide: Si el vértice es $V(x_0, y_0, z_0)$ y el eje de rotación es el eje z entonces la ecuación canónica de la "parábola" será: $\frac{(z-z_0)}{c} = \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}$.

Su vértice será $V(0,0,20)$, $c = altura = 8$, $a = b = 18 = radio\ de\ la\ tapa$. Como es cóncavo hacia abajo la ecuación del paraboloide será:

$$\frac{(z-20)}{-8}=\frac{x^2+y^2}{18^2}\Rightarrow z-20=\frac{-8}{18^2}(x^2+y^2)\Rightarrow$$

$$z-20=\frac{-2}{81}(x^2+y^2) \qquad z\in[12,20]$$

Hiperbolide de una hoja: Si el centro es $C(x_0,y_0,z_0)$ y el eje de rotación es el eje z entonces la ecuación canónica del "hiperboloide de una hoja" será: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$.

El centro es $C(0,0,2)$. Como es de revolución $a=b=6$ = el radio de la sección central.

Pero cuidado $c\neq$altura del hiperbolide de una hoja. "c" debemos buscarlo por la traza.

La ecuación canónica hasta el momento será: $\frac{x^2+y^2}{6^2}-\frac{(z-2)^2}{c^2}=1 \qquad (*)$

Para $z=12\Rightarrow x^2+y^2=18^2$ sustituimos en (*) y nos queda:

$$\frac{18^2}{6^2}-\frac{(12-2)^2}{c^2}=1\Rightarrow 9-\frac{10^2}{c^2}=1\Rightarrow 8=\frac{100}{c^2}\Rightarrow c^2=\frac{100}{8}=\frac{25}{2}$$

Finalmente sustituimos este último valor en (*)

$$\frac{x^2+y^2}{36}-\frac{(z-2)^2}{25/2}=1 \qquad z\in[-8,12]$$

b.- La única superficie con traza $z=0$ es el hiperboloide, es decir sustituimos $z=0$ en su ecuación canónica y nos queda:

$$\frac{x^2+y^2}{36}-\frac{(0-2)^2}{25/2}=1\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{36}-\frac{8}{25}=1\Rightarrow x^2+y^2=36\left(1+\frac{8}{25}\right)$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1188}{25} \Rightarrow \text{ el área es } \pi . r^2 = \frac{1188}{25}\pi$$

3.- Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia el punto $(1,2,-1)$ es el doble de su distancia al plano $x = 4$. Identifique la superficie y todos sus datos.

Solución:

Sean (x, y, z) los puntos del espacio:

(i) $\quad d_{(x,y,z)a(1,2,-1)} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}$

(ii) $\quad d_{(x,y,z) \quad plano \quad x=4} = \dfrac{|x + 0y + 0z - 4|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = |x-4|$

Se debe cumplir que *(i) =2(ii)*, entonces:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} = 2|x-4| \Rightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}\right)^2 = 4|x-4|^2$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4(x-4)^2$$

Desarrollemos solo las "x"

$$x^2 - 2x + 1 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4(x^2 - 8x + 16)$$

$$x^2 - 2x + 1 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4x^2 - 32x + 64$$

$$x^2 - 2x + 1 - 4x^2 + 32x - 64 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 0$$

$$-3x^2 + 30x - 63 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 0 \Rightarrow \quad -3(x^2 - 10x) + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 63$$

$$-3(x^2 - 10x + 25) + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 63 - 3 \cdot 25$$

$-3(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = -12$ ahora dividimos entre "-12"

$$\frac{-3}{-12}(x-5)^2 + \frac{(y-2)^2}{-12} + \frac{(z+1)^2}{-12} = 1 \Rightarrow \frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} - \frac{(z+1)^2}{12} = 1$$

Es un hiperboloide de dos hojas, con centro en $C(-5,2,-1)$; $a=2$ $b=c=2\sqrt{3}$ es de revolución.

3.- Calcular el cilindro cuyas generatrices son paralelas al vector $\vec{V}=(2,4,-1)$ y su directriz es $x^2=4y$.

Solución:

Sea el punto $P(x_o,y_o,0)\in$ directriz $\Rightarrow x_o^{\ 2}=4y_o$ (i)

Por otro lado la ecuación simétrica de la recta generatriz será:

$$\frac{x-x_o}{2}=\frac{y-y_o}{4}=\frac{z}{-1} \qquad (ii)$$

La intersección de *(i)* y *(ii)* nos dará la ecuación cartesiana del cilindro.

$$\begin{cases} (ii) & \dfrac{x-x_o}{2}=\dfrac{y-y_o}{4}=\dfrac{z}{-1} \\ (i) & x_o^{\ 2}=4y_o \end{cases}$$

De *(ii)* hacemos una doble igualdad tal que:

$\dfrac{x-x_o}{2}=\dfrac{z}{-1}$ y $\dfrac{y-y_o}{4}=\dfrac{z}{-1}\Rightarrow$ despejamos x_o y y_o y nos queda:

$$-x+x_o=2z\Rightarrow(iii) \qquad x_o=2z+x$$

$$-y+y_o=4z\Rightarrow(iv) \qquad y_o=4z+y$$

Sustituyendo *(iii)* y *(iv)* en *(i)* nos queda:

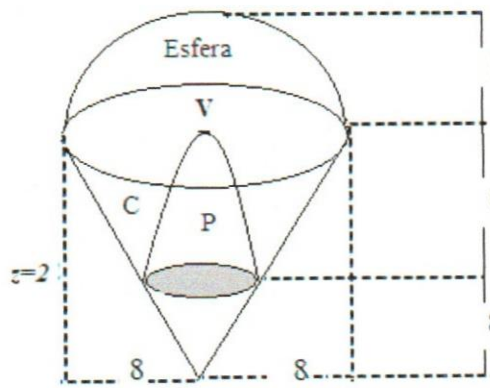
$$(2z+x)^2=4(4z+y)\Rightarrow \qquad 4z^2+4zx+x^2=16z+4y$$

Finalmente la ecuación cartesiana del cilindro será:

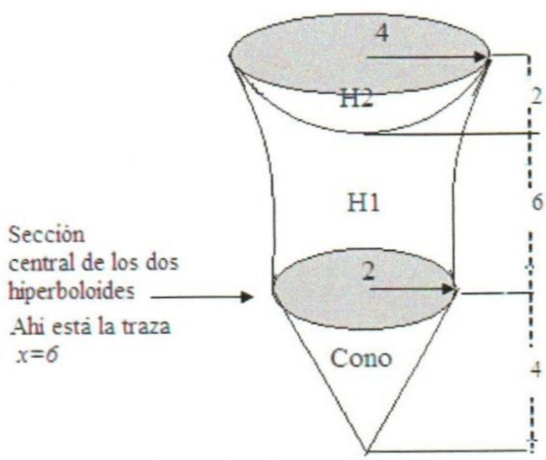
$$4z^2+x^2+4zx-16z-4y=0$$

Ejercicios Propuestos:

1.- Para la figura al lado presentada, hallar las ecuaciones de las superficies cuádricas de revolución y su respectivo dominio. Donde "C" es el cono, "P" el paraboloide y el "V" señalado es el centro de la esfera y a su vez vértice del parabolice "P".



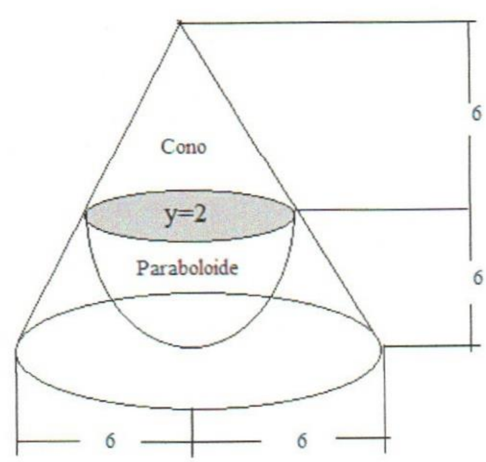
2.- Para la figura mostrada determine las ecuación de cada superficie cuádrica indicando su respectivo dominio. Donde "H2" es un hiperboloide de dos hojas, "H1" es un hiperboloide de una hoja.



3.- Para la figura a continuación, se sabe que **T** es la traza en ***y*=2** de la superficie_cónica de revolución C y del parabolice P. Se pide:

a) Hallar las ecuaciones y los dominios de C y P.

b) ¿Qué otra traza común **T'** tienen P y C?



4.- Dada las siguientes ecuaciones cartesianas de cuádricas. Para cada caso Identifíquela y esboce su gráfica:

a) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

b) $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

c) $4x^2 + 4y^2 - 25z^2 + 100 = 0$

d) $5y^2 + 3z^2 - 2x + 10y - 12z + 21 = 0$

e) $9x^2 + 4z^2 - 36y = 0$

f) $x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 10x + 16y - 8z + 1 = 0$

g) $9x^2 + 9z^2 + 4y - 18x + 72z + 137 = 0$

h) $4x^2 - y^2 + z^2 + 8x + 8z + 24 = 0$

5.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al punto fijo $(2,-1,3)$ es el doble de su distancia al eje x.

6.- Encuentre la ecuación de la cuádrica que consiste en todos los puntos que equidistan del punto $(-1,0,0)$ y del plano $x = 1$. Identifíquela y esboce su gráfica.

7.- Hallar la ecuación cartesiana del cilindro cuyas generatrices son paralelas al vector $\vec{V} = (2,4-1)$ y su directriz es: $z^2 = 4x$.

8.- Sean los vectores $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} - k; \vec{B} = 3\hat{k}; \vec{C} = -2\hat{i} + \hat{j}$. Hallar la ecuación del cilindro cuyas generatrices son paralelas al vector $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ y su directriz está dada por la intersección $\begin{cases} \dfrac{z^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} + x^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.

9.- Sean los planos $\begin{cases} \pi_1 : x + z = 1 \\ \pi_2 : -8x - 6y + 2z = 1 \end{cases}$. Hallar la ecuación cartesiana del cilindro cuyas generatrices son paralelas a la recta intersección de los planos π_1 y π_2. Donde su directriz es $y = 2z^2$.

10.- Hallar la ecuación del cilindro oblicuo cuya directriz está dada por la intersección de $\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} + z^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y se sabe que el punto $P(-1,3,3)$ está sobre el eje del cilindro.

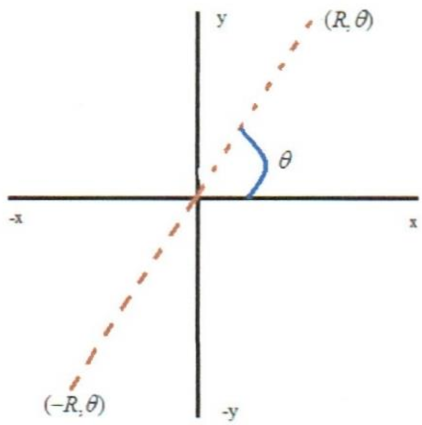
Capítulo 5: Sistemas de Coordenadas Polares...

1.- Un sistema de coordenadas polares viene definido por un punto fijo O, llamado POLO y una semirrecta con el origen en O, que se llama SEMIEJE POLAR, y que, habitualmente coincide con la parte positiva del ejex.

2.- Cada punto del plano se representa por un par $P(R,\theta)$.

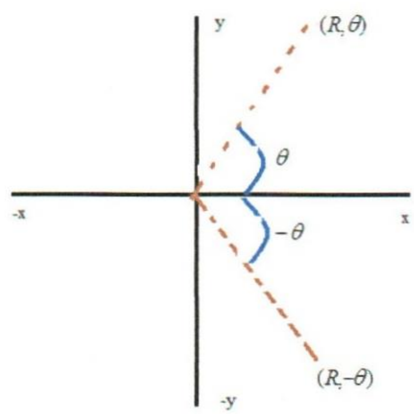
Donde θ es el ángulo orientado. Si es positivo es medido en contra de las agujas y si es negativo a favor.

R es un número tal que $|R|$ es la distancia del punto P al polo O. Si es positivo, se toma P sobre la semirrecta Q y si es negativo sobre la opuesta.



El punto $(-R,\theta)$ se obtiene mediante la simetría del origen con respecto al punto (R,θ).

El punto $(R,-\theta)$ se obtiene mediante la simetría del ejex con el punto (R,θ).



3.- **Representaciones principales de un punto**: Por ejemplo los puntos (R,θ) y $(-R,\theta+\pi)$ son el mismo punto.

En general: Todo punto distinto del polo tiene dos representaciones **principales**, a saber:

(i) (R,θ) $R\neq 0$ $\theta\in[0,2\pi]$

(ii) $(-R,\theta+\pi)$ $0\leq\theta+\pi\leq 2\pi$.

4.- **Relación entre las coordenadas polares y cartesianas**:

a) Cambio de Polares a Cartesianas: $x=R\cos\theta$ $y=R\cos\theta$.

b) Cambio de Cartesianas a Polares: $R=\sqrt{x^2+y^2}$ y

$\bar{\theta}=arctg\left|\frac{y}{x}\right|$ donde para hallar θ seguimos las siguientes fórmulas:

(i) $Si\ \theta\in IC\Rightarrow\theta=\bar{\theta}$

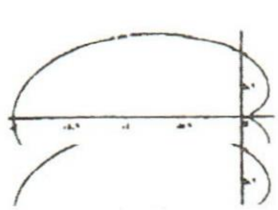
(ii) $Si\ \theta\in IIC\Rightarrow\theta=\pi-\bar{\theta}$

(iii) $Si\ \theta\in IIIC\Rightarrow\theta=\pi+\bar{\theta}$

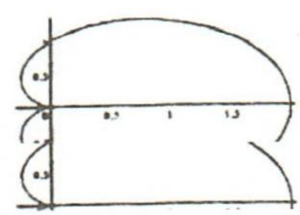
(iv) $Si\ \theta\in IVC\Rightarrow\theta=2\pi-\bar{\theta}$

5.- Curvas polares más importantes:

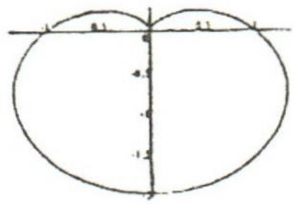
CARDIOIDES:



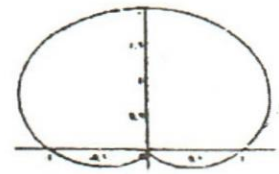
r = a – a cos θ
forma estándar



r= a + a cos θ
giro de π

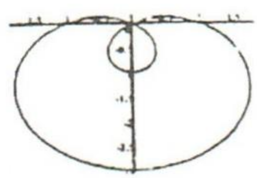


$r = a - a \text{ sen } \theta$
giro de $\pi/2$

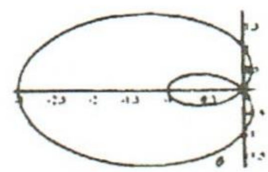


$r = a + a \text{ sen } \theta$
giro de $3\pi/2$

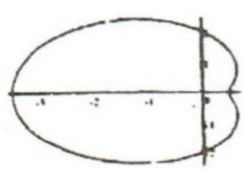
CARACOLES



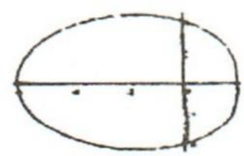
$r = b - a \text{ sen } \theta$
$b/a < 1$
lazo interior girado
$\pi/2$



$r = b - a \cos \theta$
$b/a < 1$
forma estándar
con lazo interior.



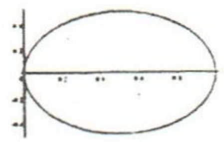
$r = b - a \cos \theta$
$1 < b/a < 2$
forma estándar
con hoyuelo.



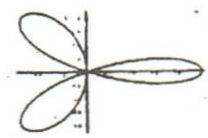
$r = b - a \cos \theta$
$b/a \geq 2$
forma estándar
convexa

ROSAS

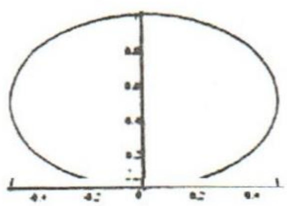
Si n es impar, la rosa tiene "n" pétalos.
Si n es par, tiene "2n" pétalos.



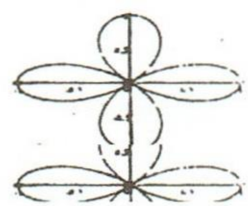
r= a cos θ
forma estándar con
un pétalo circular



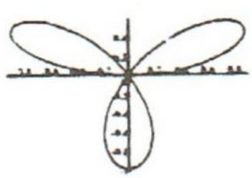
r = a cos (3 θ)
forma estándar con
tres pétalos



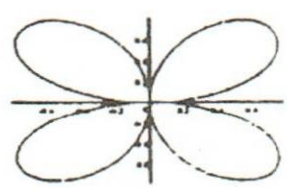
r=a sen θ
Un pétalo circular
girado π/2



r = a cos (2 θ)
forma estándar con
cuatro pétalos

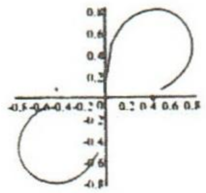


r = a sen (3 θ)
tres pétalos girados
π/6

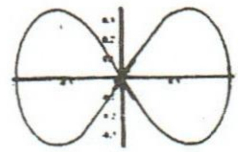


r = a sen (2 θ)
cuatro pétalos
girados π/4

LEMNISCATAS (DOS LAZOS)



$r^2 = a^2$ sen $(2\,\theta)$
giro $\pi/4$



$r^2 = a^2 \cos(2\,\theta)$
forma estándar

APLICACIONES…

6.- **Area limitada por curvas polares:**

TEOREMA: Sea la curva $R = f(\theta)$, f contínua, $f(\theta) \geq 0$ con $\theta \in [\alpha, \beta]$. El área de la región $f(\theta)$ con las semirrectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)d\theta$$

7.- **Pendiente de la curva:** $R = f(\theta)$ es:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(R,\theta)} = \frac{f'(\theta)sen\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)sen\theta}$$

8.- **Longitud de una curva polar:**

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{R^2 + \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Ejercicios Resueltos:

1.- De la otra representación principal de los siguientes puntos:

a.- $\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$

b.- $\left(5,\frac{5\pi}{4}\right)$

Solución:

a.- Supongamos que $\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ es la principal entonces $R=3$ y $\theta=\frac{\pi}{4}$ por la parte **3** de la teoría **(ii)** tenemos que $(-R,\theta+\pi)=\left(-3,\frac{\pi}{4}+\pi\right)=\left(-3,\frac{5\pi}{4}\right)$ nótese que $\frac{5\pi}{4}=225°\in[0,2\pi]$.

b.- Si suponemos que $\left(5,\frac{5\pi}{4}\right)$ es la principal donde $R=5$ y $\theta=\frac{5\pi}{4}$ entonces la otra representación sería $(-R,\theta+\pi)=\left(-5,\frac{5\pi}{4}+\pi\right)=\left(-5,\frac{9\pi}{4}\right)$ pero nótese que $\frac{9\pi}{4}\notin[0,2\pi]$, esto quiere decir que el punto $\left(5,\frac{5\pi}{4}\right)$ nos es la representación (i) sino la (ii).

Quiere decir que $-R=5$ y $\theta+\pi=\frac{5\pi}{4}\Rightarrow R=-5$ y $\theta=\frac{5\pi}{4}-\pi=\frac{\pi}{4}$ entonces la otra representación será $\left(-5,\frac{\pi}{4}\right)$.

2.- Encuentre las coordenadas cartesianas en cada caso:

a.- $\left(4,\dfrac{\pi}{6}\right)$

b.- $\left(-3,\dfrac{5\pi}{4}\right)$

Solución:

a.- Sea $R=4$ y $\theta=\dfrac{\pi}{6}$, por la parte teórica 3 tenemos que $x=R\cos\theta$ y $y=Rsen\theta$ entonces:

$$x=4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$$y=4sen\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\frac{1}{2}=2$$

$$\Rightarrow\left(4,\frac{\pi}{6}\right)=(2\sqrt{3},2).$$

b.- Sea $R=-3$ y $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$

$$x=-3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-3\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y=-3sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-3\left(-sen\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\left(-3,\frac{5\pi}{4}\right)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

3.- Halle la representación principal en polares de los siguientes puntos en cartesianas:

a.- $(-3, \sqrt{3})$

b.- $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

Solución:

a.- $x = -3 \quad y \quad y = \sqrt{3} \underset{4(b)}{\Rightarrow} R = \sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\bar{\theta} = arctg\left(\frac{+\sqrt{3}}{-3}\right) = \frac{\pi}{6}$ como la *"y"* es positiva que corresponde al seno y la *"x"* es negativa que corresponde al coseno quiere decir que: $\theta \in \text{IIC} \underset{4b(ii)}{\Rightarrow}$

$\theta = \pi - \bar{\theta} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ el punto buscado en polares es $\left(2\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

b.- $x = \frac{5\sqrt{3}}{2} \quad y \quad y = \frac{-5}{2} \underset{4(b)}{\Rightarrow} R = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{2}\right)^2} = 5$

$\bar{\theta} = arctg\left(\frac{\frac{-5}{2}}{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\right) = arctg\left|\frac{-1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{\pi}{6}$ como la *"y"* es negativa que corresponde al seno y la *"x"* es positiva que corresponde al coseno quiere decir que:

$\underset{4b(iv)}{\theta \in \quad \text{IVC}} \Rightarrow \quad \theta = 2\pi - \overline{\theta} = 2\pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$. El punto buscado en polares es $\left(5, \dfrac{11\pi}{6}\right)$.

4.- Graficar las siguientes curvas polares:

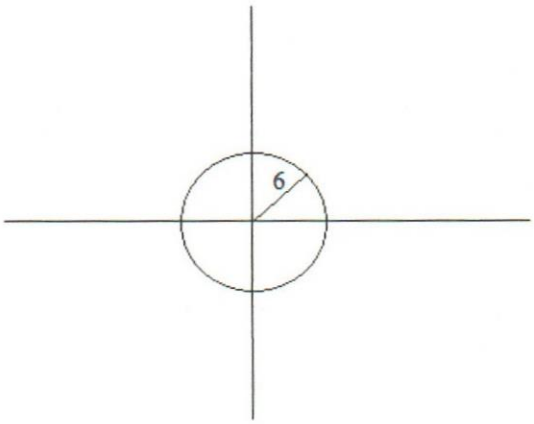
a.- R=6

b.- $\theta = \dfrac{\pi}{6} \quad R \geq 0$

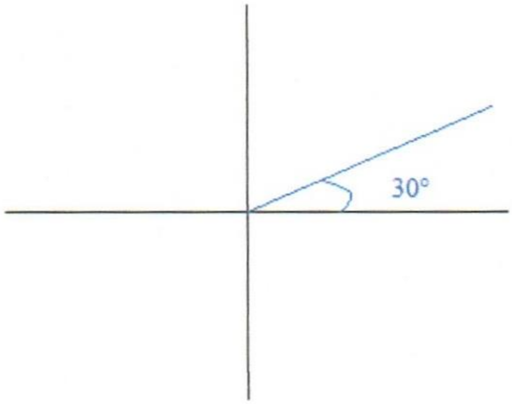
c.- $\theta = \dfrac{\pi}{6} \quad R \in \Re$

Solución:

a. R=6 es el conjunto de los puntos $(6,\theta)$ esto representa una circunferencia de radio 6 centrada en el origen. Podemos comprobarlo pasando a cartesianas, recordemos que $R = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 6$ $\Rightarrow x^2 + y^2 = 36$.

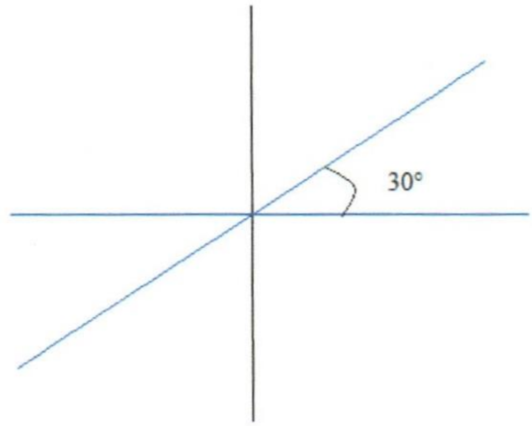


b.- $\theta = \dfrac{\pi}{6} \quad R \geq 0$ es la semirrecta cerrada con origen en el polo y ángulo con el semieje polar de $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.



c.- $\theta = \frac{\pi}{6}$ $R \in \Re$

es la recta cuyo ángulo con el semieje polar es de $\theta = \frac{\pi}{6}$.



5.- Identifique las siguientes curvas pasando a cartesianas:

a.- $R = 3\cos\theta$

b.- $R\cos\theta = 4$

c.- $R = \dfrac{6}{2sen\theta + \cos\theta}$

d.- $R = asen\theta + b\cos\theta$

Solución:

a.- Multipliquemos la ecuación $R = 3\cos\theta$ por "R" $\Rightarrow R^2 = 3R\cos\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 3x$ ahora completamos cuadrado

$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ circunferencia centrada en $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{3}{2}$.

b.- $R\cos\theta = 4 \Rightarrow x = 4$ recta vertical.

c.- $R = \dfrac{6}{2sen\theta + \cos\theta} \Rightarrow R(2sen\theta + \cos\theta) = 6 \Rightarrow 2Rsen\theta + R\cos\theta = 6$

$\Rightarrow 2y + x = 6 \Rightarrow y = \dfrac{-x}{2} + 3$ una recta cuya pendiente es $\dfrac{-1}{2}$.

d.- $R = asen\theta + b\cos\theta \underset{\substack{multiplicamos \\ por \quad R}}{\Rightarrow} R^2 = aRsen\theta + bR\cos\theta$

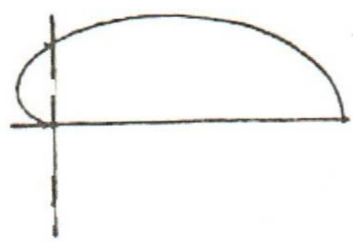
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = ax + by$$

Completando cuadrados nos queda:

$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{b^2+a^2}{4}$ circunferencia centrada en $\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2}\right)$ y de radio $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

6.- Hallar el área de la mitad superior ($0 \le \theta \le \pi$) de la cardioide $R = 1+\cos\theta$.

Solución:



Area $A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$

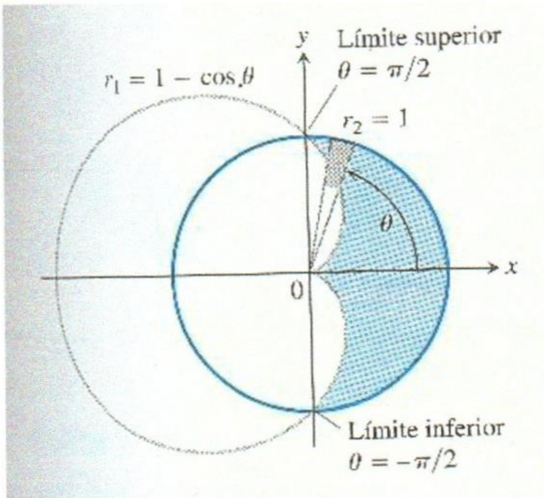
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\theta + 2sen\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{sen2\theta}{4}\right]_0^{\pi} =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\pi + 2sen\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{sen2\pi}{4} - 0\right]_0^{\pi} = \frac{3\pi}{4}$$

7.- Encontrar los puntos de intersección y el área de la región que se encuentra dentro del círculo $R=1$ y fuera de la cardioide $R = 1-\cos\theta$.

Solución:

Dibujemos la región para determinar sus fronteras y encontrar los límites de integración (Ver figura en la siguiente página).



Busquemos los límites de integración.

Para ellos igualemos las curvas:

$1 = 1 - \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \quad o \quad \theta = -\frac{\pi}{2}$

Los puntos de intersección serán:

$\left(1, \frac{\pi}{2}\right) \quad y \quad \left(1, -\frac{\pi}{2}\right).$

El área será:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1^2 - (1-\cos\theta)^2\right]d\theta \underset{\substack{por \\ simetría}}{=} 2\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 1 + 2\cos\theta - \cos^2\theta)d\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta - \cos^2\theta)d\theta = \left[2sen\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}sen(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{4}.$$

8.- Hallar la pendiente de la cardioide $R = -1 + \cos\theta$ en $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

Solución:

$f(\theta) = -1 + \cos\theta \Rightarrow f'(\theta) = -sen\theta$

$$m(\theta) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(R,\theta)} = \frac{f'(\theta)sen\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)sen\theta} = \frac{-sen\theta sen\theta + (\cos\theta - 1)\cos\theta}{-sen\theta\cos\theta - (\cos\theta - 1)sen\theta}$$

$$= \frac{-sen\theta sen\theta + (\cos\theta - 1)\cos\theta}{-sen\theta\cos\theta - (\cos\theta - 1)sen\theta} = \frac{-sen^2\theta + \cos^2\theta - \cos\theta}{-sen\theta\cos\theta - sen\theta\cos\theta + sen\theta}$$

$$\Rightarrow m(\theta)=\frac{\cos(2\theta)-\cos\theta}{-sen(2\theta)+sen\theta}$$

$$\Rightarrow m\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos\left(-2\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-sen\left(-2\frac{\pi}{2}\right)+sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=1$$

9.- Encontrar la longitud de la cardioide $R=1-\cos\theta$.

Solución:

$$R=1-\cos\theta \Rightarrow \frac{dR}{d\theta}=sen\theta$$

$$\Rightarrow L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{R^2+\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+sen^2\theta}\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\sqrt{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+sen^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta$$

$$1-\cos\theta=2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{2\left(2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}\,d\theta=2\int_o^{2\pi}\left|sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|d\theta$$

Como $sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\geq 0 \qquad \theta\in[0,2\pi]$

$$L=2\int_0^{2\pi}sen\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=2\left[-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=8$$

Ejercicios Propuestos:

1.- Dibuje los puntos:

a) $\left(3, \pi/6\right)$ b) $\left(-3, -\pi/6\right)$

c) $\left(-4, 2\pi/3\right)$ d) $\left(0, \pi\right)$

e) $\left(-1, \pi\right)$ f) $\left(9, -2\pi\right)$

2.- Dé la otra representación de los puntos:

a) $\left(-3, \pi/4\right)$ b) $\left(-5, 5\pi/4\right)$

c) $\left(6, 2\pi/3\right)$ d) $\left(-1, \pi\right)$

3.- Encuentre las coordenadas cartesianas:

a) $\left(-3, \pi/6\right)$ b) $\left(3, \pi/4\right)$

c) $\left(2, 5\pi/6\right)$ d) $\left(-5, -2\pi/3\right)$

4.- Encuentre las coordenadas polares:

a) $\left(-\sqrt{2}, 2\right)$ b) $\left(2\sqrt{3}, 2\right)$

c) $\left(-3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2\right)$ d) $\left(-3, 3\right)$

e) $\left(-3\sqrt{3}/2, 3/2\right)$

5.- Graficar las siguientes curvas polares:

a) $R = 9$

b) $\theta = \pi/2;\ R < 0$

c) $\theta = \pi/3$; $R \in \Re$

d) $Rsen\theta = -1$

e) $R = 2\csc\theta$

f) $R = \dfrac{-4}{2\cos\theta + sen\theta}$

6.- Hallar el área de una rosa de 4 pétalos $R = \cos(2\theta)$.

7.- Dadas las curvas $R_1 = 2(1 - sen\theta)$ y $R_2 = 2$. Hallar:

a) Las gráficas de las curvas.

b) Determinar los puntos de intersección de las curvas.

c) El área de la región dentro de R_2 y fuera de R_1.

8.- Hallar la pendiente de $R = \cos(2\theta)$ para cualquier θ.

9.- Hallar la longitud de la espiral $R = \dfrac{e^{\theta}}{\sqrt{2}}$ $\theta \in [0, \pi]$.

10.- Hallar la pendiente de la curva $R = 1 + \cos\theta$ en $\theta = \pi/2$ y luego calcule la longitud de arco con $\theta \in [0, 2\pi]$.

11.- Sea R la región limitada por la proyección en el plano $x = 0$, de la intersección de las superficies:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 \geq 16 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 32 \end{cases}$$

Determine el área de la región R utilizando coordenadas polares.

12.- Calcular el área mediante polares de la región del plano determinada por:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

13.- Sea la expresión $\frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[1-(1-\cos\theta)^2\right]d\theta$.

a) ¿Qué representa dicha integral?

b) Representar gráficamente dicha expresión y encuentre los puntos de intersección.

14.- Sean las curvas $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ y $R = 1+\cos\theta$.

a) Graficar ambas curvas.

b) Encuentre los puntos de intersección de las curvas en coordenadas polares.

c) Dibuje el área de la región dentro de $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ y fuera de $R = 1+\cos\theta$. Luego calcule dicha área usando polares.

15.- Encuentre la ecuación cartesiana de las gráficas en cada caso y dibuje las mismas:

a.- $R^2 - 6R(\cos\theta + sen\theta) + 9 = 0$

b.- $R^2\cos(2\theta) = 9$

16.- Determinar el área de la región que yace dentro del círculo $R = 3sen\theta$ y fuera de la cardioide $R = 1 + sen\theta$.

17.- Sean las curvas $(x-1)^2+y^2=1$ y $R=1$.

a.- Dibuje la región dentro de la primera curva y fuera de la segunda.

b.- Halle los puntos de intersección en polares.

c.- Halle el área de la región dibujada en la parte (a) en polares.

18.- Sean la región $R=\begin{cases} y\leq 1 \\ y\geq x^2 \end{cases}$.

a.- Dibuje la región R

b.- Halle los puntos de intersección en polares.

c.- Halle el área de la región R dibujada en la parte (a) en polares.

Capítulo 6: Funciones Vectoriales...

1.- Una función vectorial es una función de la forma $\vec{R}:\Re \rightarrow \Re^n$ / $\vec{R}(t)=[R_1(t),R_2(t),\cdots,R_n(t)]$. Nosotros estudiaremos en $\Re^2$ y principalmente en $\Re^3$.

2.- Si $\overrightarrow{R(t)}=[R_1(t),R_2(t),R_3(t)]$ entonces el **Límite de una función vectorial** es:

$$lím_{t\rightarrow a}\overrightarrow{R(t)}=\left[lím_{t\rightarrow a}R_1(t),lím_{t\rightarrow a}R_2(t),lím_{t\rightarrow a}R_3(t)\right]$$

3.- La función $\overrightarrow{R(t)}$ es contínua en $t=a$ sí y sólo si $lím_{t\rightarrow a}\overrightarrow{R(t)}=\overrightarrow{R(a)}$.

4.- Definimos una curva en el espacio como una función de la forma:

$$C:\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \qquad t\in I \\ z=h(t) \end{cases}.$$

5.- La **<u>Derivada de una función vectorial</u>** es: $\overrightarrow{R'(t)}=\left[R_1{}'(t),R_2{}'(t),R_3{}'(t)\right]$

6.- El vector tangente unitario se define como "un vector paralelo a $\overrightarrow{R'(t)}$ unitario", esto es: $\overrightarrow{T(t)}=\dfrac{\overrightarrow{R'(t)}}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|}$

7.- **<u>La recta tangente</u>**: La ecuación vectorial de la recta tangente a la curva $C\equiv\overrightarrow{R(t)}$ en el punto $\overrightarrow{R(t_0)}=(x_0,y_0,z_0)$ es: $(x,y,z)=\overrightarrow{R(t_0)}+t.\overrightarrow{R'(t_0)}$.

8.- **Teorema:** Sean $\overrightarrow{R(t)}$ y $\overrightarrow{S(t)}$ funciones vectoriales derivables, $\alpha \in \Re$ y $f(t)$ una función real / $f : \Re \to \Re \quad y = f(t)$.

(i) $D_t\left[\overrightarrow{R(t)} + \overrightarrow{S(t)}\right] = \overrightarrow{R'(t)} + \overrightarrow{S'(t)}$

(ii) $D_t\left[\alpha \overrightarrow{R(t)}\right] = \alpha \overrightarrow{R'(t)}$

(iii) $D_t\left[f(t)\overrightarrow{R(t)}\right] = f'(t)\overrightarrow{R(t)} + f(t)\overrightarrow{R'(t)}$ esto devuelve una función vectorial

(iv) $D_t\left[\overrightarrow{R(t)} \cdot \overrightarrow{S(t)}\right] = \overrightarrow{R'(t)} \cdot \overrightarrow{S(t)} + \overrightarrow{R(t)} \cdot \overrightarrow{S'(t)}$ esto devuelve una función escalar

(v) $D_t\left[\overrightarrow{R(t)} \times \overrightarrow{S(t)}\right] = \overrightarrow{R'(t)} \times \overrightarrow{S(t)} + \overrightarrow{R(t)} \times \overrightarrow{S'(t)}$ esto devuelve una función vectorial.

(vi) $D_t\left[\overrightarrow{R(f(t))}\right] = \overrightarrow{R'(f(t))} f'(t)$

9.- La **integral definida** de una función vectorial es:

$$\int_a^b \overrightarrow{R(t)}dt = \left[\int_a^b R_1(t)dt, \int_a^b R_2(t)dt, \int_a^b R_3(t)dt\right]$$

Teorema fundamental para funciones vectoriales:

$$\int_a^b \overrightarrow{R(t)}dt = \overrightarrow{S(t)}\Big]_a^b = \overrightarrow{S(b)} - \overrightarrow{S(a)} \text{ donde } \int \overrightarrow{R(t)}dt = \overrightarrow{S(t)} + \overrightarrow{K}$$

10.- **Longitud de arco**: $L = \int_a^b \left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\| dt$

11.- **Diferencial de longitud de arco**: $\dfrac{dS}{dt} = \left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|$ este concepto será útil en las demostraciones posteriores.

12.- La **curvatura** dela curva $C \equiv \overrightarrow{R(t)}$ en un punto dado es una **medida** de que tan rápido cambia la curva de dirección en ese punto. Específicamente, se define como la magnitud de la tasa de cambio del vector unitario tangente con respecto a la longitud de arco.

13.- **Definición de curvatura**: En $\Re^2 o \Re^3$: $K(t) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{T'(t)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|}$

Teorema: La curvatura de la curva dada por la función vectorial en $\Re^3$ es:

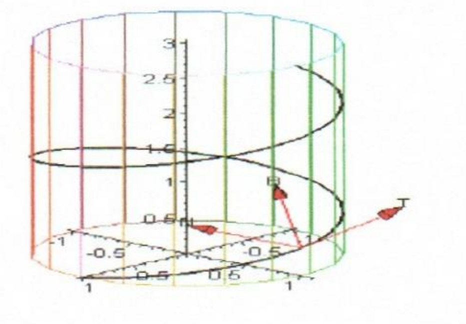
$$K(t) = \frac{\left\|\overrightarrow{R'(t)} \times \overrightarrow{R''(t)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|^3}$$

14.- En el caso especial de una curva plana cuya ecuación es $y = f(x)$ la curvatura será:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}} .$$

15.- **Vectores Normal y Binormal unitarios:** El vector $\overrightarrow{T'(t)} \perp \overrightarrow{T(t)}$ entonces definimos el vector normal unitario como: $\overrightarrow{N(t)} = \dfrac{\overrightarrow{T'(t)}}{\left\|\overrightarrow{T'(t)}\right\|}$. Luego el vector Binormal unitario será: $\overrightarrow{B(t)} = \overrightarrow{T(t)} \times \overrightarrow{N(t)}$

OBS: Los vectores tangente, normal y binormal unitarios son tres vectores ortogonales entre sí con norma "1" en un punto dado de la curva. Ellos forman el **"triedo de frenet". (Ver figura anexa).**



Además podemos agregar que $\overrightarrow{N(t)} = \overrightarrow{B(t)} \times \overrightarrow{T(t)}$.

16.- El plano determinado por los vectores $\overrightarrow{N(t)}$ y $\overrightarrow{B(t)}$ en el punto P sobre la curva C se llama **plano normal** de la curva C en el punto P. (Consiste en todas las rectas que son ortogonales al vector tangente unitario).

El plano normal es aquel que tiene como vector normal el tangente unitario o $\overrightarrow{R'(t)}$.

OBS: $\overrightarrow{T(t)} \,//\, \overrightarrow{R'(t)}$.

La ecuación del plano normal a la curva C en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \overrightarrow{R'(t_0)} = 0$ donde $\overrightarrow{R(t_0)} = (x_0, y_0, z_0)$.

17.- El plano determinado por $\overrightarrow{T(t)}$ y $\overrightarrow{N(t)}$ se llama **plano osculante** de C en el punto P.

Osculum es una palabra latina que quiere decir "beso".

Este plano es el plano que está tan cerca que contiene la parte de la curva que está cerca de P. (Para una curva plana, el plano osculante es simplemente el plano que contiene la curva).

El plano osculante es aquel que tiene como vector normal el binormal unitario o $\overrightarrow{R'(t)} \times \overrightarrow{R''(t)}$.

OBS: $\overrightarrow{B(t)} // \overrightarrow{R'(t)} \times \overrightarrow{R''(t)}$

La ecuación del plano osculante a la curva C en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \overrightarrow{R'(t_0)} \times \overrightarrow{R''(t_0)} = 0$. Donde $\overrightarrow{R(t_0)} = (x_0, y_0, z_0)$.

18.- El **plano rectificante** es aquel que tiene como vector normal el normal unitario o $(\overrightarrow{R'(t)} \times \overrightarrow{R''(t)}) \times \overrightarrow{R'}(t)$.

OBS: $\overrightarrow{N(t)} // (\overrightarrow{R'(t)} \times \overrightarrow{R''(t)}) \times \overrightarrow{R'}(t)$

La ecuación del plano rectificante a la curva C en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (\overrightarrow{R'(t_0)} \times \overrightarrow{R''(t_0)}) \times \overrightarrow{R'}(t_0)$=0.

Donde $\overrightarrow{R(t_0)} = (x_0, y_0, z_0)$.

19.- El círculo que está en el plano osculante de la curva C en el punto P (que tiene la misma tangente que la curva C en el punto P) está en el lado cóncavo de C (hacia donde apunta $\overrightarrow{N(t)}$), y tiene como radio $\rho = \frac{1}{\kappa}$ se llama **CIRCULO OSCULADOR** o **CÍRCULO DE LA CURVATURA** de C en P. Este es el círculo que mejor describe la forma en que C se comporta cerca de P, comparte la misma tangente, normal y curvatura de P.

El círculo osculante de una curva $\overrightarrow{R(t)}$ en el punto P es:

$$\begin{cases} plano \quad osculante \quad en \quad P \\ \cap \\ esfera \quad osculadora \quad en \quad P \end{cases}$$

El radio de la esfera osculadora $\rho(t) = \dfrac{1}{K(t)}$ y el centro es:

$\overrightarrow{R(t)} + \rho(t).\overrightarrow{N(t)}$.

20.- **Movimiento en el Espacio:** Si $\overrightarrow{R(t)}$ representa el vector posición entonces ocurre:

$\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{R'(t)}$ (velocidad) y la rapidez = $\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|$

$\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{V'(t)} = \overrightarrow{R''(t)}$ (aceleración)

Ahora si tenemos la aceleración entonces ocurre: $\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{V(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{a(u)}du$

$\overrightarrow{R(t)} = \overrightarrow{R(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{V(u)}du$.

21.- **Componente tangencial de la aceleración**: $a_T(t) = \dfrac{\overrightarrow{R'(t)} \cdot \overrightarrow{R''(t)}}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|}$

Componente normal de la aceleración: $a_N(t) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{R'(t)} \times \overrightarrow{R''(t)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|}$

El vector aceleración puede escribirse en función de las componentes anteriores de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{a(t)} = a_T.\vec{T} + a_N.\vec{N}$$

22.- Sea C la curva suave. La **torsión de C** mide el "grado de torcedura" de la curva, mide el desvío de la curva respecto al plano osculante. Su fórmula será:

$$\tau(t)=\frac{\left(\overrightarrow{R'(t)}\cdot\left(\overrightarrow{R''(t)}\times\overrightarrow{R'''(t)}\right)\right)}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\times\overrightarrow{R''(t)}\right\|^2}$$

23.- Se denomina **curva plana** al recorrido de una función vectorial tal que todos sus puntos se encuentra en un mismo plano.

OSB: Para probar que una partícula se mueve en un plano basta ver que su torsión sea "0".

24.- **Fórmulas de Frenet**:

$$\frac{dT}{ds}=k.\vec{N}$$

$$\frac{dN}{ds}=-k.\vec{T}+\tau.\vec{B}$$

$$\frac{dB}{ds}=-\tau.\vec{N}$$

Ejercicios Resueltos:

1.- Sean la funciones vectoriales: $\overrightarrow{R(t)}=\left(\frac{1-\cos t}{t^2},\frac{t^2+2t}{t},\sqrt{9-t}\right)$;

$\overrightarrow{S(t)}=\left(\frac{1-9t}{t^2-25},\frac{\ln t}{t},\sqrt{9-t}\right)$. Hallar:

a.- $lím_{\ t\to 0}\overrightarrow{R(t)}$.

b.-- Dominio de $\overrightarrow{S(t)}$.

Solución:

a.- $lím_{t\to 0}\overrightarrow{R(t)}=\left(lím_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2},lím_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{t},lím_{t\to 0}\sqrt{9-t}\right)$

$$lím_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{0}{0}$$

$$L'Hopital$$

$$lím_{t\to 0}\frac{sent}{2t}=\frac{0}{0}$$

$$L'Hopital$$

$$lím_{t\to 0}\frac{\cos t}{2}=\frac{1}{2}$$

$$lím_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{t}=\frac{0}{0}$$

$$L'hopital$$

$$lím_{t\to 0}\frac{2t+2}{1}=2$$

$$lím_{t\to 0}\sqrt{9-t}=\sqrt{9-0}=3$$

$$\Rightarrow lím_{t\to 0}\overrightarrow{R(t)}=\left(\frac{1}{2},2,3\right)$$

b.- $Dom\quad \overrightarrow{S(t)}=dom\left(\frac{1-9t}{t^2-25}\right)\cap\quad dom\left(\frac{\ln t}{t}\right)\quad\cap\quad dom\sqrt{9-t}$

$$Dom\quad \overrightarrow{S(t)}=\Re-\{-5,5\}\cap(0,\infty)\cap(-\infty,9]=(0,9]-\{5\}$$

2.- Sea la función vectorial $\overrightarrow{R(t)}=\left(3t^2+4t,e^tt^2,sent-t^4\right)$ hallar el tangente unitario en $t=0$.

Solución:

$$\overrightarrow{T(0)}=\frac{\overrightarrow{R'(0)}}{\left\|\overrightarrow{R'(0)}\right\|}$$

$$\overrightarrow{R'(t)}=\left(6t+4,e^tt^2+e^t2t,\cos t-4t^3\right)$$

$$\overrightarrow{R'(0)}=\left(6.0+4,e^00^2+e^02.0,\cos 0-4.0^3\right)=(4,0,1)$$

$$\left\|\overrightarrow{R(t)}\right\|=\sqrt{4^2+0^2+1^2}=\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{T(0)}=\frac{1}{\sqrt{17}}(4,0,1)$$

3.- Muestre que si $\left\|\overrightarrow{R(t)}\right\| = \alpha$ entonces $\overrightarrow{R'(t)} \perp \overrightarrow{R(t)}$.

Solución:

Como $\left\|\overrightarrow{R(t)}\right\| = \alpha$ elevemos al cuadrado ambos lados y nos queda que

$\left\|\overrightarrow{R(t)}\right\|^2 = \alpha^2 \Rightarrow \overrightarrow{R(t)} \cdot \overrightarrow{R(t)} = \alpha^2$ derivando a ambos lados nos queda que:

$$\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{R(t)} \cdot \overrightarrow{R(t)}\right] = \frac{d}{dt}(\alpha^2) \underset{8(iv)}{\Rightarrow} \overrightarrow{R'(t)} \cdot \overrightarrow{R(t)} + \overrightarrow{R(t)} \cdot \overrightarrow{R'(t)} = 0$$

$$2\overrightarrow{R'(t)} \cdot \overrightarrow{R(t)} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{R'(t)} \cdot \overrightarrow{R(t)} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{R'(t)} \quad \perp \quad \overrightarrow{R(t)}$$

4.- Sea $\overrightarrow{R(t)} = (2\cos t, sent, 2t)$ calcular $\int_0^{\pi/2} \overrightarrow{R(t)}dt$.

Solución:

$$\int \overrightarrow{R(t)}dt = \int (2\cos t, sent, 2t)dt = (2sent, -\cos t, t^2) + (k_1, k_2, k_3)$$

$$\int_0^{\pi/2} \overrightarrow{R(t)}dt = (2sent, -\cos t, t^2)\Big]_0^{\pi/2} = \left(2sen\frac{\pi}{2}, -\cos\frac{\pi}{2}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) - (2sen0, -\cos 0, 0^2)$$

$$= \left(2, 0, \frac{\pi^2}{4}\right) - (0, -1, 0) = \left(2, 1, \frac{\pi^2}{4}\right)$$

5.- Sea la curva $C:\begin{cases} y = z^2 \\ z = x^2 \end{cases}$ Hallar:

a.- El punto de la curva C donde el plano osculante es paralelo a la recta $x = z - 4; y = 22$.

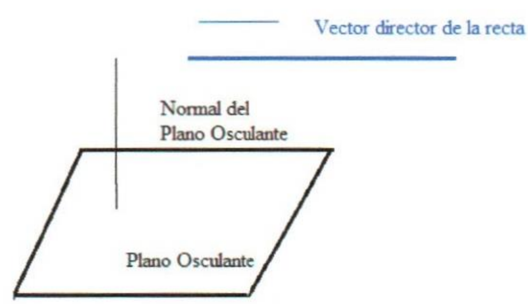
b.- El binormal unitario en el punto $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$.

c.- El normal unitario en el punto $(1,1,1)$.

Solución:

a.- Primero debemos buscar la función vectorial que representa la curva C:

$x=t \quad z=t^2 \quad y=\left(t^2\right)^2=t^4$ la función vectorial será $\overrightarrow{R(t)}=(t,t^4,t^2)$



En la figura podemos ver que el vector normal del plano osculante es perpendicular al vector director de la recta.

$$\overrightarrow{n_{P.O.}}=\overrightarrow{B(t)} \;//\; \overrightarrow{R'(t)}\times\overrightarrow{R''(t)}$$

$$\overrightarrow{R'(t)}=(1,4t^3,2t) \quad y \quad \overrightarrow{R''(t)}=(0,12t^2,2)$$

$$\overrightarrow{R'(t)}\times\overrightarrow{R''(t)}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 4t^3 & 2t\\ 0 & 12t^2 & 2\end{vmatrix}=(-16t^3,-2,12t^2)$$

$$\overrightarrow{n_{P.O.}} \perp (1,0,1)\Rightarrow(-16t^3,-2,12t^2)\cdot(1,0,1)=0\Rightarrow -16t^3+12t^2=0$$

$$\Rightarrow t^2(-16t+12)=0\Rightarrow t=0 \quad o \quad t=\frac{3}{4}$$

Los puntos serán: para $t=0 \Rightarrow \overrightarrow{R(0)}=(0,0,0)$

$y \quad t=\frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{R\left(\frac{3}{4}\right)}=\left(\frac{3}{4},\frac{81}{256},\frac{9}{16}\right)$

b.- Queremos saber de que *"t"* viene el punto $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{16},\frac{1}{4}\right)$

$$\begin{cases} t=-\frac{1}{2} \\ t^4=\frac{1}{16} \Rightarrow \quad t=-\frac{1}{2} \\ t^2=\frac{1}{4} \end{cases} \qquad \overrightarrow{B\left(-\frac{1}{2}\right)} \,//\, \overrightarrow{R'\left(-\frac{1}{2}\right)}\times\overrightarrow{R''\left(-\frac{1}{2}\right)}=(2,-2,3)$$

Como el Binormal debe ser un vector unitario dividimos entre su norma.

$$\overrightarrow{B\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{(2,-2,3)}{\|(2,-2,3)\|}=\frac{1}{\sqrt{17}}(2,-2,3)$$

c.- Queremos saber de que *"t"* viene el punto $(1,1,1)$

$$\begin{cases} t=1 \\ t^4=1 \Rightarrow \quad t=1 \\ t^2=1 \end{cases} \qquad \overrightarrow{N(1)} \,//\, \left[\overrightarrow{R'(1)}\times\overrightarrow{R''(1)}\right]\times\overrightarrow{R'(1)}$$

$$\overrightarrow{R'(1)}\times\overrightarrow{R''(1)}=(-16,-2,12) \,//\, (-8,-1,6)$$

$$(-8,-1,6)\times\overrightarrow{R'(1)}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -8 & -1 & 6 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=(-26,22,-31)$$

$$\overrightarrow{N(1)}=\frac{(-26,22,-31)}{\|(-26,22,31)\|}=\frac{1}{\sqrt{2121}}(-26,22,-31)$$

6.- Sea la curva $\overrightarrow{R(t)} = (-\pi + \cos t, \pi + sent, t - 2\pi)$ hallar la ecuación del círculo osculador en el punto de intersección de la curva $\overrightarrow{R(t)}$ con el plano $z = -\pi$.

Solución: Primero hallaremos el punto de intersección.

$$\begin{cases} x = -\pi + \cos t \\ y = \pi + sent \\ z = t - 2\pi \end{cases} \cap \; z = -\pi \Rightarrow t - 2\pi = -\pi \Rightarrow t = 2\pi - \pi = \pi$$

El punto de intersección será sustituir $t = \pi$ en la curva $\overrightarrow{R(t)}$ así tendremos:

$$\overrightarrow{R(\pi)} = (-\pi + \cos\pi, \pi + sen\pi, \pi - 2\pi) = (-\pi - 1, \pi, -\pi)$$

El círculo osculante de una curva $\overrightarrow{R(t)}$ en el punto $P(-\pi - 1, \pi, -\pi)$ es:

$$\begin{cases} plano \quad osculante \quad en \quad P \\ \cap \\ esfera \quad osculadora \quad en \quad P \end{cases}$$

$$\kappa(\pi) = \frac{\left\|\overrightarrow{T'(\pi)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R'(\pi)}\right\|}$$

$$\overrightarrow{R'(t)} = (-sent, \cos t, 1)$$

$$\overrightarrow{R(\pi)} = (sen\pi, \cos\pi, 1) = (0, -1, 1)$$

$$\left\|\overrightarrow{R(t)}\right\| = \sqrt{(-sent)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad \left\|\overrightarrow{R(\pi)}\right\| = \sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{T(t)} = \frac{\overrightarrow{R'(t)}}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-sent, \cos t, 1) \Rightarrow \overrightarrow{T'(t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -sent, 0)$$

$$\overrightarrow{T'(\pi)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{T'(\pi)}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\kappa(\pi)=\frac{\left\|\overrightarrow{T'(\pi)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R'(\pi)}\right\|}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

El radio de la esfera osculadora $\rho(\pi)=\dfrac{1}{\kappa(\pi)}=2$ y el centro es: $\overrightarrow{R(\pi)}+\rho(\pi).\overrightarrow{N(\pi)}$.

$$\overrightarrow{N(\pi)}=\frac{\overrightarrow{T'(\pi)}}{\left\|\overrightarrow{T'(\pi)}\right\|}=\frac{1}{1/\sqrt{2}}\cdot 1/\sqrt{2}\,(1,0,0)=(1,0,0)$$

El centro será $C(\pi)=\overrightarrow{R(\pi)}+\rho(\pi)\overrightarrow{N(\pi)}=(-\pi-1,\pi,-\pi)+2(1,0,0)=(-\pi+1,\pi,-\pi)$

La esfera osculadora es: $(x+\pi-1)^2+(y-\pi)^2+(z+\pi)^2=4$

Hallemos el vector binormal unitario en $t=\pi$:

$$\overrightarrow{B(\pi)}=\overrightarrow{T(\pi)}\times\overrightarrow{N(\pi)}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & k\\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

El plano osculante en $t=\pi$ será:

$$(x+1+\pi,y-\pi,z+\pi)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)=0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}(y-\pi)+\frac{1}{\sqrt{2}}(z+\pi)=0\Rightarrow y+z=0$$

Círculo Osculador $\begin{cases}(x+\pi-1)^2+(y-\pi)^2+(z+\pi)^2=1\\ y+z=0\end{cases}$.

7.- Pruebe usando las fórmulas de Frenet que $\overrightarrow{R''(t)}=S''(t)\overrightarrow{T(t)}+\kappa(t)[S'(t)]^2\overrightarrow{N(t)}$.

Solución:

En la parte 11 de la teoría vimos que el **Diferencial de longitud de arco** es:

$\dfrac{dS}{dt} = \left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|$ sustituyendo en $\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{\overrightarrow{R'(t)}}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|}$ nos queda que $\overrightarrow{T(t)} = \dfrac{\overrightarrow{R'(t)}}{\dfrac{dS}{dt}}$

$\overrightarrow{R'(t)} = \overrightarrow{T(t)}\dfrac{dS}{dt}$ ahora podemos derivar para hallar la segunda derivada:

$$\overrightarrow{R''(t)} = \overrightarrow{T'(t)}\frac{dS}{dt} + \overrightarrow{T(t)}\frac{d^2S}{dt^2}$$

como $\overrightarrow{T'(t)} = \dfrac{dT}{dt}$, sustituimos en la anterior y nos queda:

$$\overrightarrow{R''(t)} = \frac{dT}{dt}\frac{dS}{dt} + \overrightarrow{T(t)}\frac{d^2S}{dt^2} \quad (*)$$

Por regla de la cadena tenemos que $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{dT}{dS}\dfrac{dS}{dt}$, sustituimos en (*)

$$\overrightarrow{R''(t)} = \frac{dT}{dS}\frac{dS}{dt}\frac{dS}{dt} + \overrightarrow{T(t)}\frac{d^2S}{dt^2} \underset{\substack{Frenet \\ \frac{dT}{dS} = \kappa\vec{N}}}{=} \kappa\vec{N}\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 + \frac{d^2S}{dt^2}\vec{T}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{R''(t)} = S''(t)\overrightarrow{T(t)} + \kappa(t)[S'(t)]^2\,\overrightarrow{N(t)}$ (esto es lo que queríamos probar).

8.- Determine el círculo osculante de $y = x^2$ en $(0,0)$.

Solución:

Como es una curva plana utilizaremos la fórmula $\kappa(x) = \dfrac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}}$

$$\kappa(0) = \frac{|f''(0)|}{\left[1 + (f'(0))^2\right]^{3/2}}$$

$$\begin{matrix} f'(x) = 2x \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) = 2 \Rightarrow f''(0) = 2 \end{matrix} \Rightarrow \kappa(0) = \frac{|2|}{\left[1+0^2\right]^{3/2}} = 2$$

El centro del círculo osculador es $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ y el radio es $\rho = \dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{1}{2}$ por lo tanto

el círculo osculador será: $x^2 - \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

9.- Hallar la velocidad y posición en un tiempo t. Si se sabe que una partícula tiene posición inicial $\overrightarrow{R(0)} = (1,0,0)$ con una velocidad inicial $\overrightarrow{V(0)} = (1,-1,1)$ donde la aceleración viene dada $\overrightarrow{a(t)} = (4t,6t,1)$.

Solución:

$$\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{V(0)} + \int_0^t \overrightarrow{a(u)}du = (1,-1,1) + \int_0^t (4u,6u,1)du = (1,-1,1) + \left[(2u^2,3u^2,u)\right]_0^t$$

$$\overrightarrow{V(t)} = (1,-1,1) + (2t^2,3t^2,t) - (0,0,0)$$

$$\overrightarrow{V(t)} = (2t^2+1,3t^2-1,t+1)$$

$$\overrightarrow{R(t)} = \overrightarrow{R(0)} + \int_0^t \overrightarrow{V(u)}du = (1,0,0) + \int_0^t (2u^2+1,3u^2-1,u+1)du$$

$$\overrightarrow{R(t)} = (1,0,0) + \left[\left(\frac{2u^3}{3}+u,u^3-u,\frac{u^2}{2}+u\right)\right]_0^t$$

$$\overrightarrow{R(t)} = (1,0,0) + \left(\frac{2t^3}{3}+t,t^3-t,\frac{t^2}{2}+t\right) - (0,0,0) = \left(\frac{2t^3}{3}+t+1,t^3-t,\frac{t^2}{2}+t\right)$$

10.- Dada la función vectorial $\overrightarrow{R(t)} = (\cos t, sent, t)$ con $t \in [0,2\pi]$ determinar la recta tangente en $t = \dfrac{3\pi}{2}$.

Solución:

Hallemos el punto en $t=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \overrightarrow{R\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), sen\left(\frac{3\pi}{2}\right), \frac{3\pi}{2}\right)$

$\overrightarrow{R\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=\left(0,-1,\frac{3\pi}{2}\right)$

La ecuación vectorial de la recta tangente a la curva $C \equiv \overrightarrow{R(t)}$ en el punto $\overrightarrow{R\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=\left(0,-1,\frac{3\pi}{2}\right)$ es: $(x,y,z)=\overrightarrow{R\left(\frac{3\pi}{2}\right)}+t.\overrightarrow{R'\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$.

$\overrightarrow{R'(t)}=(-sent, \cos t, 1) \Rightarrow \overrightarrow{R'\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=(1,0,1)$

La ecuación vectorial de la recta tangente será: $(x,y,z)=\left(0,-1\frac{3\pi}{2}\right)+t(1,0,1)$

Ejercicios Propuestos:

1.- Hallar el dominio para cada función vectorial:

a.- $\overrightarrow{R(t)} = \dfrac{1}{t-2}\hat{i} + \sqrt{4+t}\,\hat{j}$

b.- $\overrightarrow{R(t)} = \left(\dfrac{1}{t}, \sqrt{t^2+1}, \dfrac{9}{t-5}\right)$

c.- $\overrightarrow{R(t)} = \left[\ln\left(\dfrac{1}{2t}\right), \dfrac{-1}{6-t}, \dfrac{2}{t}\right]$

d.- $\overrightarrow{R(t)} = \left(arctgt, \ln(t^2+1), t^8\right)$

2.- Hallar los siguientes límites:

a.- $lím_{t\to 2}\overrightarrow{R(t)}$ donde $\overrightarrow{R(t)} = \left(\dfrac{t-2}{t^2-4}, \dfrac{t^2+t-6}{t-2}, \sqrt{t+2}\right)$

b.- $lím_{t\to 0}\overrightarrow{R(t)}$ donde $\overrightarrow{R(t)} = \left(\dfrac{sen(4t)}{t}, \dfrac{\cos t - 1}{t^2}, \dfrac{t^2+9t}{t}\right)$

3.- Dada la curva $\overrightarrow{R(t)} = (3t - t^3)\hat{i} + 3t^2\hat{j} + (3t + t^3)\hat{k}$:

a.- Hallar la velocidad, rapidez y aceleración en $t = 1$.

b.- El plano normal a la curva en $t = 1$.

4.- Una partícula se mueve sobre la curva

$\overrightarrow{R(t)} = (t^3 - 4t)\hat{i} + (t^2 + 4t)\hat{j} + (8t^2 - 3t^3)\hat{k}$. Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t=2$.

5.- Hallar las ecuaciones del plano oscilador, y de los vectores normal y binormal a la curva $\begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases}$ en el punto (1,1,1).

6.- Dada la curva $\overrightarrow{R(t)} = \frac{t^4}{4}\hat{i} + \frac{t^3}{3}\hat{j} + \frac{t^2}{2}\hat{k}$ encuentre los puntos de la curva donde la tangente es paralela al plano $x + 3y + 2z = 10$.

7.- Sea $\overrightarrow{R(t)} = (\cos t)\hat{i} + (sent)\hat{j} + t\hat{k}$ donde $t \in [0, 2\pi]$ determine:

a.- Los puntos de $\overrightarrow{R(t)}$ en los cuales el plano oscilador es perpendicular al plano $x + z = 5$.

b.- Una función vectorial que represente a la recta tangente a $\overrightarrow{R(t)}$ en los puntos hallados en la parte (a).

c.- La curvatura para cualquier "t".

8.- Dada la curva $\overrightarrow{R(t)} = (-\pi + \cos t)\hat{i} + (\pi + sent)\hat{j} + (t - 2\pi)\hat{k}$ hallar el vector aceleración en términos de los vectores tangente unitario y normal unitario en el punto de intersección de la curva $\overrightarrow{R(t)}$ con el plano $z = -\pi$

9.- Demuestre usando las fórmulas de Frenet:

a.- $\overrightarrow{R''(t)} = s''(t).\vec{T} + k.[s'(t)]^2.\vec{N}$ b.- $\overrightarrow{R'(t)} \times \overrightarrow{R''(t)} = k.[s'(t)]^3.\vec{B}$

c.- $\overrightarrow{R'''(t)} = [s''' - k^2.(s')^3]\vec{T} + [3k.s'.s'' + k'.(s')^2]\vec{N} + k.\tau(s')^3.\vec{B}$

10.- Hallar la curvatura de $\overrightarrow{R(t)} = [8\cos^3 t, 8sen^3 t]$ en $t = \frac{\pi}{12}$.

11.- Demuestre la fórmula de la curvatura $k(t) = \frac{\left\|\overrightarrow{R'} \times \overrightarrow{R''}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R'}\right\|^3}$

12.- ¿En qué punto de la curva $\overrightarrow{R(t)}=(t^3,3t,t^4)$ el plano normal es paralelo al plano 6x+6y-8z=1?

13.- Sea el vector posición $\overrightarrow{R(t)}=(t,\ln t,2.\sqrt{2t})$ para $t\in[1,2]$. Encontrar:

a) La longitud de arco.

b) ¿En qué punto(s) de la curva $\overrightarrow{R(t)}$ el plano normal es paralelo al plano $x+y+\sqrt{2}.z=9$?

c) La recta tangente en el punto(s) encontrado en la parte (b).

14.- Dada la curva $\overrightarrow{R(t)}=t\hat{i}+t^2\hat{j}+\left(\frac{2}{3}t^3\right)\hat{k}$ hallar la relación entre la curvatura y la torsión.

15.- Sea la curva $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=1+y \end{cases}$. Determinar la recta tangente en el punto (1,0,1).

16.- Dada la curva $\overrightarrow{R(t)}=t\hat{i}+\ln(\sec t)\hat{j}+\ln(\sec t+tgt)\hat{k}$ ¿en qué punto la curvatura es máxima?

17.- Sea la curva $C:\begin{cases} x^2+y^2-2=0 \\ x+z-4=0 \end{cases}$.

a) Parametrice C.

b) Determine la ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva C en el punto $(1,1,3)$.

c) Halle la curvatura en el punto $(1,1,3)$.

18.- Una mosca camina a lo largo de un alambre en forma de hélice de tal manera que su posición es $\overrightarrow{R(t)} = 6\cos(\pi t)\hat{i} + 6sen(\pi t)\hat{j} + 2t\hat{k} \quad para \quad t \geq 0$.

Hallar:

a.- ¿En qué punto chocaría la mosca con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 100$?

b.- ¿Qué tanto viajó desde el inicio (*t=0*) hasta que choca con la esfera?

c.- Curvatura en *t=2*.

19.- Dada la curva $\overrightarrow{R(t)} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + \left(\frac{2}{3}t^3\right)\hat{k}$ hallar:

a.- Suponga que un móvil se desplaza a lo largo de la curva $\overrightarrow{R(t)}$. Determine la longitud recorrida por dicho móvil en el intervalo $[0,2]$ y luego encuentre las coordenadas de los puntos inicial y final del recorrido.

b.- Torsión en el punto $\left(-1,1,\frac{-2}{3}\right)$.

20.- Sea $\overrightarrow{R(t)} = \frac{t^4}{4}\hat{i} + \frac{t^3}{3}\hat{j} + \frac{t^2}{2}\hat{k}$. Hallar:

a.- Los puntos de la curva $\overrightarrow{R(t)}$ donde el plano oscilador es paralelo a la recta $\frac{x-2}{2} = y-3; z=1$.

b.- El vector binormal unitario en el punto $\left(\frac{1}{4},\frac{-1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

21.- Sea la curva $\overrightarrow{R(t)} = \left(e^t.\cos t, e^t.sent\right)$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Hallar:

a.- Punto inicial y final de la trayectoria.

b.- Longitud de la trayectoria.

c.- Curvatura $\forall t$.

22.- ¿En qué puntos de la recta tangente a la curva $\overrightarrow{R(t)} = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^2)$ es paralela al plano $x + y + z + 2 = 0$?

23.- Sea el arco definido por $\overrightarrow{r(t)} = \left(\frac{2}{t^2+1} - 1, \frac{2t}{t^2+1}\right)$ $t \in [0,1]$, hallar la longitud de arco.

24.- Dada la curva definida por $\overrightarrow{R(t)} = (t^3, t^3 + t^2, t - t^3)$ calcule los puntos donde la torsión es "0".

25.- La posición de una partícula es de $\overrightarrow{R(t)} = (1 + sent, \cos t, 2\cos t - sent)$ pruebe que:

a.- La partícula se mueve en un plano. **(Sug: Pruebe que** $\tau(t) = 0$).

b.- Encuentre la ecuación del plano.

Capítulo 7: Funciones de Varias Variables.

Dominio, Conjunto de Nivel y Gráficas

1) Sea $f:\Re^n \to \Re /\ w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ esta función es una función de varias variables la cual tiene una variable dependiente "w" y n-variables independientes "$x_1, x_2, \cdots, x_n$" en particular estudiaremos el caso de n=2 o 3. Es decir las funciones $f:\Re^2 \to \Re /\ z = f(x,y)$ donde *"z"* es la variable dependiente y *"x,y"* son las variables independientes y $f:\Re^3 \to \Re /\ w = f(x,y,z)$ donde *"w"* es la variable dependiente y *"x,y,z"* son las variables independientes.

2) **Dominio de funciones de varias variables**: Sea $f:\Re^2 \to \Re /\ z = f(x,y)$ decimos que el $Domf \subseteq \Re^2$ y se cumplen las siguientes reglas de dominio:

a.- $DomP(x,y) = \Re^2$ donde $P(x,y)$ es un polinomio en $\Re^2$.

b.- $Dom(K) = \Re^2$ donde K es una constante real.

c.- $Dom\left(\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right) = \Re^2 - \{Q(x,y) = 0\}$ donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son polinomios en $\Re^2$.

d.- $Dom\left(\sqrt[n]{f(x,y)}\right) = \begin{cases} si \quad n \quad es \quad par & f(x,y) \geq 0 \\ si \quad n \quad es \quad impar & Dom = Dom(f(x,y)) \end{cases}$

e.- $Dom(f(x,y) \pm g(x,y)) = Domf(x,y) \cap Domg(x,y)$

f.- $Domf(x,y) \cdot g(x,y) = Domf(x,y) \cap Domg(x,y)$

g.- $$Dom\left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right) = Domf(x,y) \cap Domg(x,y) - \{g(x,y)=0\}$$

3.- **<u>Conjunto de Nivel</u>**: Si $f:\Re^n \to \Re \,/\, w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ definimos el conjunto de nivel como $N_c f = \{x \in \Re^n \,/\, f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c\}$.

Para $\Re^2$ el conjunto de nivel como $N_c f = \{(x,y) \in \Re^2 \,/\, f(x,y) = c\}$ es llamado "curvas de nivel".

Para $\Re^3$ el conjunto de nivel como $N_k f = \{(x,y,z) \in \Re^3 \,/\, f(x,y,z) = k\}$ es llamado "superficies de nivel".

4.- **<u>Grafica de una superficie</u>**: El conjunto de todos los puntos $(x, y, f(x,y))$ en el espacio, para (x,y) en el dominio de f, se llama la gráfica de f. A la gráfica de f también se le llama superficie $z = f(x,y)$.

OBS: Para graficar una superficie utilizamos las curvas de nivel y las trazas.

Ejercicios Resueltos:

1.- En cada caso escriba el conjunto dominio y la gráfica del mismo.

a.- $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y} - 101$

b.- $f(x,y) = \dfrac{3x^2}{x+y} - \dfrac{9-xy}{\sqrt{2-x}}$

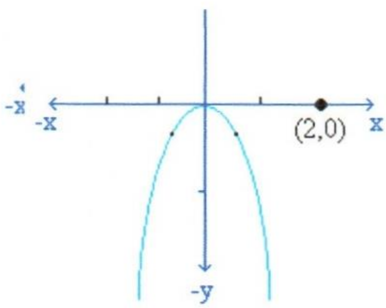
c.- $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

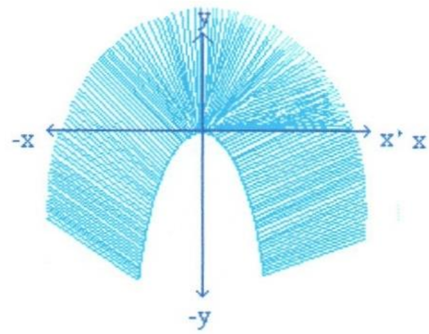
Solución:

a.- $Domf = Dom(xy\sqrt{x^2+y}) \cap Dom(101) = \{(x,y) \,/\, x^2 + y \geq 0\} \cap \Re^2$

$Domf = \{(x,y) \,/\, x^2 + y \geq 0\}$

Para dibujar el conjunto primero dibujamos la frontera $x^2 + y = 0 \Rightarrow y = -x^2$, tomo un punto cualquiera dentro o fuera de la parábola por ejemplo (2,0) que está fuera, lo meto dentro de la inecuación $x^2 + y \geq 0$ y nos queda $2^2 + 0 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 0$ es verdadero por lo tanto son los puntos fuera de la parábola. **(Ver figura)**

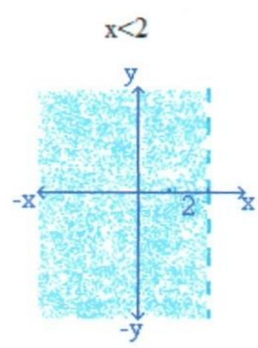


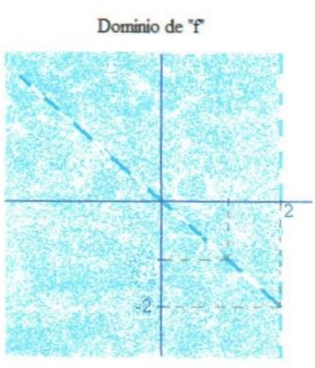


OBS: Si nos hubiese dado falsa la inecuación entonces el resultado serían los puntos internos.

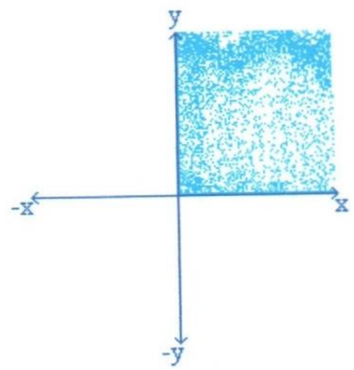
b.- $Domf = Dom\left(\dfrac{3x^2}{x+y}\right) \cap Dom\left(\dfrac{9-xy}{\sqrt{2-x}}\right) = \Re^2 - \{x+y=0\} \cap \{(x,y)/2-x>0\}$

$Domf = \{(x,y)/\, y \neq -x \quad \wedge \quad x<2\}$





c.- $Domf = \{(x,y) / x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ esto corresponde al primer cuadrante



2.- Supongamos que la temperatura T en cualquier punto *(x,y)* del plano viene dada por $T(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$ responda:

a.- Identifique para todo "c" posible y luego dibuje solo para $c = 0$ *y* $c = \ln 4$ las curvas de nivel de la función temperatura.

b.- Hallar el dominio de la función $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[3]{e^{T(x,y)}}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 3}}$.

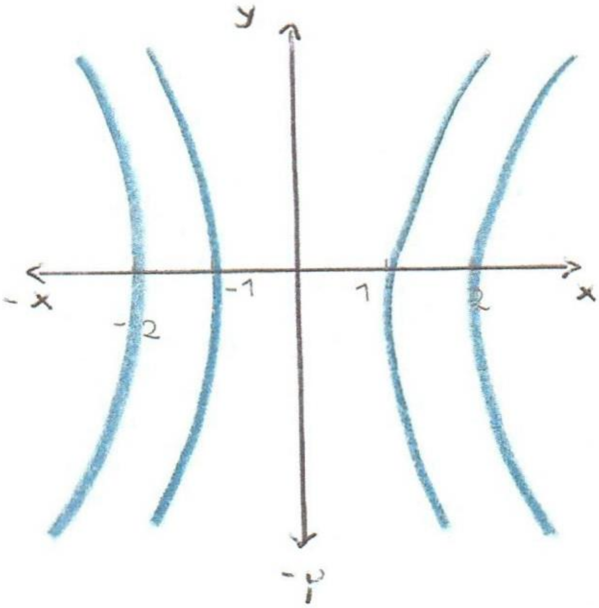
Solución:

a.- $N_c T = \{(x,y) / \ln(x^2 - y^2) = c\}$

$\ln(x^2 - y^2) = c \Rightarrow e^{\ln(x^2 - y^2)} = e^c \Rightarrow x^2 - y^2 = e^c \Rightarrow \dfrac{x^2}{e^c} - \dfrac{y^2}{e^c} = 1$ esto es una familia de hipérbolas con centro $(0,0)$ donde $a = b = \sqrt{e^c}$ donde $c \in \Re$.

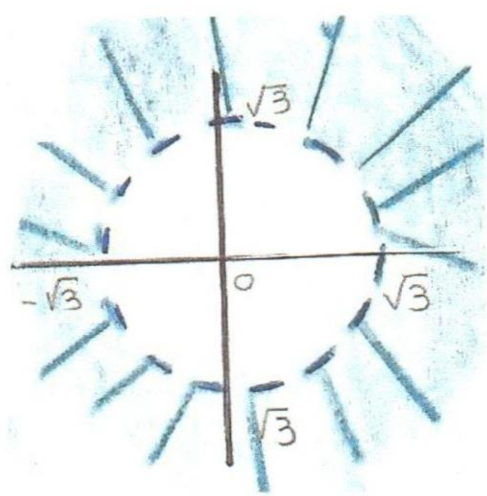
Dibujemos para $c = \ln 4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{e^{\ln 4}} - \dfrac{y^2}{e^{\ln 4}} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Para $c=0 \Rightarrow \frac{x^2}{e^0}-\frac{y^2}{e^0}=1 \Rightarrow x^2-y^2=1$ otra hipérbola donde $a=b=1$; a continuación sus gráficas respectivas:



b.- $$Domf = Dom\left(\frac{\sqrt[3]{e^{T(x,y)}}}{\sqrt{x^2+y^2-3}}\right) = Dom\left(\frac{\sqrt[3]{e^{\ln(x^2-y^2)}}}{\sqrt{x^2+y^2-3}}\right) = Dom\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-3}}\right)$$

$$Domf = \{(x,y)/x^2+y^2-3>0\}$$



3.- Supongamos que la temperatura T en cualquier punto (x,y,z) del espacio viene dada por: $T(x,y,z)=\dfrac{60}{x^2+y^2+z^2+3}$. Identifique para todo "k" posible y luego dibuje solo para $k=5,15,20$ las superficies de nivel de la función temperatura.

Solución:

$$N_kT=\left\{(x,y,z)/\frac{60}{x^2+y^2+z^2+3}=k\right\}\Rightarrow\frac{60}{k}=x^2+y^2+z^2+3$$

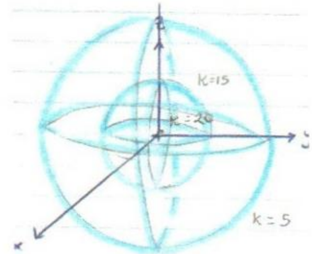
$\dfrac{60}{k}-3=x^2+y^2+z^2$ Familia de esferas centradas en el origen con radio $\sqrt{\dfrac{60}{k}-3}$

donde $\dfrac{60}{k}-3\geq 0\Rightarrow\dfrac{60-3k}{k}\geq 0$ aplicando tabla de signos nos queda que $k\in(0,20]$.

Para $k=20\Rightarrow\dfrac{60}{20}-3=x^2+y^2+z^2\Rightarrow x^2+y^2+z^2=0\Rightarrow(0,0,0)$

Para $k=15\Rightarrow\dfrac{60}{15}-3=x^2+y^2+z^2\Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$ una circunferencia centrada en el origen de radio *1*.

Para $k=5\Rightarrow\dfrac{60}{5}-3=x^2+y^2+z^2\Rightarrow x^2+y^2+z^2=9$ una circunferencia centrada en el origen de radio *3*. El dibujo será:

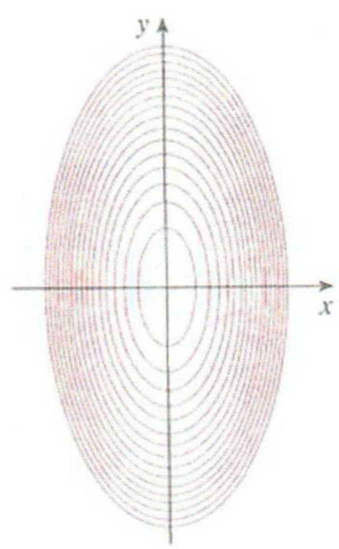


4.- Dibuje el gráfico de la función $f(x,y)=4x^2+y^2$.

Solución:

Para ello haremos dos pasos:

Paso1) Curvas de nivel: $N_c f=\{(x,y)/4x^2+y^2=c\}\Rightarrow \dfrac{x^2}{c/4}+\dfrac{y^2}{c}=1$ esta es una familia de elipses centradas en el origen donde $a=\sqrt{\dfrac{c}{4}}$ y $b=\sqrt{c}$ $donde$ $c\in(0,\infty)$.



Mapa de curvas de nivel

Paso2) Trazas

Plano *xy* *(z=0)* $4x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$ en este plano solo vemos el origen de coordenadas.

Plano *yz* *(x=0)* $4y^2 = z$ en este plano veremos una parábola centrada en *(0,0)* cóncava hacia arriba.

Plano *xz* *(y=0)* $z = x^2$ en este plano veremos también una parábola centrada en *(0,0)* cóncava hacia arriba.

La gráfica será:

Trazas horizontales, son curvas de nivel elevadas

Ejercicios Propuestos:

1.- En cada caso escriba el conjunto dominio y la gráfica del mismo.

a.- $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$

b.- $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

c.- $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt[16]{xy}}$

d.- $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2 - y^2 + 4}{x^2 + y^2}}$

e.- $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4x - x^2 - y^2}}{\sqrt{x - |y|}} + \dfrac{1}{\ln(x^2 + y^2)}$

f.- $g(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 - y^2 - 4)}{\sqrt[42]{2-y}}$

g..- $f(x,y) = \dfrac{\sqrt[31]{x^2 - y^2 - 4}}{\sqrt[12]{2-x}}$

h. $f(x,y) = \ln(9 - 3x^2 + 6y^2)$

i.- $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2 - 1}}{x-1}$

2.- Identifique las superficies de Nivel para todo *"k"* y luego dibuje solo para $k = 0,1,-1,-4$, donde $F(x,y,z) = -x^2 - (y-1)^2 + z$.

3.- $V(x,y)$ es el voltaje o potencial en un punto (x,y) del plano xy, las curvas de nivel de V se llaman **curvas equipotenciales**. A lo largo de una curva tal, el voltaje permanece constante. Para un potencial de $V(x,y)\dfrac{8}{\sqrt{16+x^2+y^2}}$.

Identifique las curvas equipotenciales de manera general y luego dibuje solo para $c=2$ y $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

4.- Sea las funciones $F(x,y,z)=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(z-1)^2}{16}-\dfrac{(y-2)^2}{8}$; $m(x,y)=\sqrt{x-4}$; $g(x,y)=\ln(x.y-1)$.

a.- Identifique para todo "k" y luego dibuje solo para $k=1$, $1/4$ las superficies de nivel de la función $F(x,y,z)$.

b.- Encuentre y dibuje el dominio de $P(x,y)=\dfrac{g(x,y)}{m(x,y)}$.

5.- Grafique las siguientes superficies:

a.- $F(x,y)=-x^2-(y-1)^2$

b.- $z=x^2+y^2+4$

c.- $z=\sqrt{x^2+y^2}+2$

d.- $z=e^{-x^2-y^2}$

Capítulo 8: Funciones de Varias Variables:

Límite, Derivadas Parciales y sus aplicaciones...

1.- **<u>Límite de una función de dos variables</u>**:

$$lím_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \|(x,y)-(x_o,y_o)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-L| < \varepsilon .$$

2.- **<u>Definición</u>**: Sea la función $f(x,y)$ una función de dos variables, los siguientes límites son llamados **límites iterados:**

$$lím_{x\to x_o}\left(lím_{y\to y_o} f(x,y)\right) \quad , \quad lím_{y\to y_o}\left(lím_{x\to x_o} f(x,y)\right)$$

3.- **<u>Teorema</u>**: Si existen $lím_{x\to x_o}\left(lím_{y\to y_o} f(x,y)\right)$ y $lím_{y\to y_o}\left(lím_{x\to x_o} f(x,y)\right)$ pero son diferentes, entonces $lím_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ no existe.

4.- Si una función $f(x,y)$ tiene distintos límites a lo largo de dos trayectorias distintas cuando (x,y) tiende (x_o,y_o), entonces $lím_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$ no existe.

5.- En el cálculo de un límite se puede pasar de coordenadas cartesianas a polares, técnica que a veces tiene éxito.

<u>Teorema</u>: Si $\varphi(\theta)$ es una función acotada (en alguna bola con centro en el origen) y $\psi(R)$ es una función que tiende a cero cuando R tiende a *0*, entonces:

$$lím_{R\to 0} f(R,\theta) = lím_{R\to 0} \varphi(\theta)\psi(R) = 0 .$$

6.- **<u>Continuidad de una función de dos variables</u>**: $f(x,y)$ es contínua en (x_o,y_o) si:

a.- $f(x_o,y_o)$ existe

b.- $lím_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x_o,y_o)$ existe c.- $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o,y_o)$

OBSERVACIÓN: Si una de las tres condiciones no se cumple decimos que $f(x,y)$ no es contínua en (x_o,y_o).

Sea $f:\Re^2 \to \Re$, supongamos que es discontínua en (x_0,y_0), si el $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ entonces (x_0,y_0) es una discontinuidad evitable y podemos redefinir la función $f(x,y)$ para que sea contínua en (x_0,y_0), ¿cómo hacemos esto?

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \neq (x_0,y_0) \\ L & (x,y) = (x_0,y_0) \end{cases}$$

En caso de que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ no exista decimos que la discontinuidad es no evitable o esencial y no podemos redefinir la función de forma tal que sea contínua en dicho punto.

7.- **Derivadas Parciales**: La derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a "x" es: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ y la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a "y" es: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$.

¿Cómo calculamos las derivadas parciales?

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = Derivamos $f(x,y)$ con respecto a "x" pensando "y" constante.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = Derivamos $f(x,y)$ con respecto a "y" pensando "x" constante.

OBSERVACIÓN: Todas las reglas de derivación se cumplen.

8.- Notación de las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=f_x=z_x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=f_y=z_y$$

9 .- <u>**Derivadas de orden superior**</u>: Si $f(x,y)$ es una función de dos variables, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, de modo que pueden volver a derivarse con respecto a *"x"* o *"y"*.

Ejemplo: $f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ esto es derivar con respecto a *"x"* la primera derivada respecto a *"x"*.

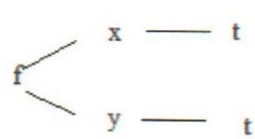
OBS: La notación subíndice se lee de izquierda a derecha y la notación de parciales se lee de derecha a izquierda.

Así por ejemplo f_{xyxy} que se lee de "izquierda a derecha", primero derivamos respecto a *"x"* luego respecto a *"y"* luego respecto a *"x"* y de último respecto a *"y"*.

10.- <u>**Teorema de Clairaut**</u>: Sea $f: D \subseteq \Re^2 \to \Re$ donde $(a,b)\in D$, si tanto la función f_{xy} como f_{yx} son contínuas en D entonces $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$.

11.- <u>**Regla de la Cadena**</u>:

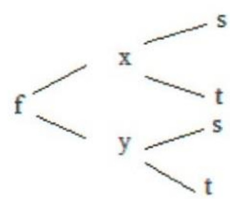
CASO 1) Sea $z=f(x,y)$ una función de *"x,y"* diferenciable, donde $x=g(t)$ y $y=h(t)$ son funciones también diferenciables pero en *"t"*, entonces *"z"* es una función de *"t"* diferenciable y su árbol será:



De aquí podemos deducir su derivada respectiva:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

CASO 2) Sea $z=f(x,y)$ es una función de *"x,y"* diferenciable, donde $x=g(s,t)$ y $y=h(s,t)$ son funciones también diferenciables pero en *"s,t"*, entonces *"z"* es una función de *"s,t"* diferenciable y su árbol será:



De aquí podemos deducir sus derivadas respectivas:

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

12.- **Aproximación lineal**: En $\Re^2$, sea $z=f(x,y)$ su aproximación lineal será:

$f(a^*,b^*)\approx f(a,b)+dz$ donde $dz=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y$

$\Delta x=a^*-a$ $\qquad$ $\Delta y=b^*-b$

En $\Re^3$, sea $w=f(x,y,z)$ su aproximación lineal será:

$f(a^*,b^*,c^*)\approx f(a,b,c)+dw$

donde $dw=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\Delta x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\Delta y+\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\Delta z$

$\Delta x=a^*-a$ $\qquad$ $\Delta y=b^*-b$ $\qquad$ $\Delta z=c^*-c$

13.- **Gradiente de una función**: Si $f(x,y)$ es una función de dos variables, entonces su gradiente es la función vectorial $\overrightarrow{\nabla f}$ definida por:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Si $f(x,y,z)$ es una función de tres variables, entonces su gradiente será:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x,y,z)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

14.- **Plano Tangente a una superficie**: Sea $f(x,y,z)=k$ y (x_0,y_0,z_0) un punto de tangencia de la misma entonces el $\overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0,z_0)$ es perpendicular al plano tangente a dicha superficie en dicho punto. Esto nos lleva a ver que el vector normal del plano tangente a la superficie $f(x,y,z)=k$ en el punto (x_0,y_0,z_0) es $\overrightarrow{n_{PT}}=\overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0,z_0)$.

La ecuación vectorial del plano tangente a la superficie $f(x,y,z)=k$ en el punto (x_0,y_0,z_0) es:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_o)=0$$

15.- **Recta Normal a una superficie**: La recta normal a la superficie $f(x,y,z)=k$ en el punto (x_0,y_0,z_0) es la recta que pasa por el punto de tangencia (x_0,y_0,z_0) y es perpendicular al plano tangente a dicha superficie en dicho punto por ello su vector director es $\overrightarrow{V_{DT}}=\overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0,z_0)$ y por lo tanto su ecuación simétrica será:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

16.- **Derivación implícita**: Supongamos que "z" está dada en forma implícita como una función $z = f(x,y)$ mediante una ecuación de la forma $F(x,y,z)=0$. Esto quiere decir que $F(x,y,f(x,y))=0 \quad \forall (x,y)\in domf$. Si F y f son diferenciables, entonces aplica la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x,y,z)=0$ y si $\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$ entonces tendremos la siguiente fórmula:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

17.- **Derivada Direccional:**

Teorema: Si f es una función diferenciable en $\bar{x}_0$, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$ y

$$D_{\vec{u}} f(\bar{x}_0) = \overrightarrow{\nabla f}(\overline{x_0})\cdot \vec{u}$$

Para $n=2$ será: $$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot (u_1,u_2)$$

Para $n=3$ será:

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)\cdot (u_1,u_2,u_3)$$

18.- **Teorema**: Supongamos que f es una función diferenciable $\overline{x_0}$, el valor máximo de la derivada direccional llamada **"tasa máxima de crecimiento o razón de cambio máxima"** es $\left\|\overrightarrow{\nabla f}(\overline{x_0})\right\|$ y su dirección será la dirección del gradiente es decir $\vec{u} = \overrightarrow{\nabla f}(\overline{x_0})$. El valor mínimo de la derivada direccional llamada **"tasa mínima de crecimiento o razón de cambio mínima"** es $-\left\|\overrightarrow{\nabla f}(\overline{x_0})\right\|$ y su dirección será la dirección del menos gradiente es decir $\vec{u} = -\overrightarrow{\nabla f}(\overline{x_0})$.

Ejercicios Resueltos:

1.- Calcule los siguientes límites:

a.- $lím_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$

Al evaluar tenemos $lím_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{0}{0}$

Veamos si podemos factorizar para eliminar la indeterminación:

$$lím_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = lím_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)(x+y)}{x-y} = lím_{(x,y)\to(0,0)} x + y = 0 + 0 = 0$$

b.- $lím_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

Al evaluar tenemos $lím_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 - y^2} = \dfrac{0}{0}$

Busquemos los límites iterados $lím_{x\to0}\left(lím_{y\to0} \dfrac{xy}{x^2 - y^2}\right) = lím_{x\to0}\left(\dfrac{0}{x^2}\right) = 0$

$lím_{y\to 0}\left(lím_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2-y^2}\right)=lím_{y\to 0}\left(\dfrac{0}{y^2}\right)=0$ parece ser que el límite vale *"0"*. Pero busquemos una ruta que pase por $(0,0)$.

$y=x\Rightarrow lím_{x\to 0}\dfrac{xx}{x^2-x^2}=lím_{x\to 0}\dfrac{x^2}{0}=\infty$ por lo tanto el $lím_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ no existe.

c.- $lím_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Al evaluar tenemos $lím_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\dfrac{0}{0}$

Busquemos los límites iterados $lím_{x\to 0}\left(lím_{y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=lím_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{x^2}\right)=1$

$lím_{y\to 0}\left(lím_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=lím_{x\to 0}\left(\dfrac{-y^2}{y^2}\right)=-1$ como los límites iterados son diferentes quiere decir que $lím_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe.

d.- $lím_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Al evaluar tenemos $lím_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{0}{0}$

Apliquemos polares y tenemos

$$lím_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=lím_{R\to 0}\frac{R\cos\theta\cdot Rsen\theta}{\sqrt{R^2\cos^2\theta+R^2sen^2\theta}}$$

$$lím_{R\to 0}\frac{R\cos\theta\cdot Rsen\theta}{\sqrt{R^2(\cos^2\theta+sen^2\theta)}}=lím_{R\to 0}\frac{R\cos\theta\cdot Rsen\theta}{\sqrt{R^2}}$$

$$=lím_{R\to 0}\frac{R^2\cos\theta\cdot sen\theta}{R}=lím_{R\to 0}R\cos\theta\cdot sen\theta=0$$

2.- Sea $f(x,y)=\dfrac{3x^2y}{x^2-y^2}$, vea si la función es contínua en *(0,0)* en caso de no serlo ¿puede redefinirse la función para que sea contínua en todo $\Re^2$?

Solución:

$Cont(f(x,y))=\Re^2-\{(0,0)\}$

$lím_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{3x^2y}{x^2-y^2}=\dfrac{0}{0}$ veamos los límites iterados

$$lím_{x\to 0}\left(lím_{y\to 0}\frac{3x^2y}{x^2-y^2}\right)=lím_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^2}\right)=0$$

$lím_{y\to 0}\left(lím_{x\to 0}\dfrac{3x^2y}{x^2-y^2}\right)=lím_{y\to 0}\left(\dfrac{0}{-y^2}\right)=0$ como los límites iterados son iguales parece ser que el límite vale *"0"*.

Apliquemos coordenadas polares al límite.

$$lím_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3R^2\cos^2\theta\cdot Rsen\theta}{R^2\cos^2\theta-R^2sen^2\theta}=lím_{R\to 0}\frac{3R^3\cos^2\theta\cdot sen\theta}{R^2(\cos^2\theta-sen^2\theta)}$$

$lím_{R\to 0}\dfrac{3R\cos^2\theta\cdot sen\theta}{\cos 2\theta}=0$ por lo tanto el límite existe y vale "0".

Esto significa que podemos redefinir la función *f(x,y)* para que sea contínua en todo $\Re^2$ ¿cómo lo hacemos?

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y}{x^2-y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

3.- Calcule por definición la derivada parcial de $f(x,y)=3x^2y$.

Solución:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=lím_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f(x+h,y)=3(x+h)^2y=3y(x^2+2xh+h^2)=3x^2y+6xyh+3yh^2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=lím_{h\to 0}\frac{3x^2y+6xyh+3yh^2-3x^2y}{h}=lím_{h\to 0}\frac{6xyh+3yh^2}{h}$$

$$=lím_{h\to 0}\frac{h(6xy+3yh)}{h}=lím_{h\to 0}6xy+3yh=6xy$$

4.- En cada caso hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

a.- $f(x,y)=3x^2\ln(x^2+y^3)$

b.- $f(x,y)=4^x tag(x^2+y^3)$

c.- $f(x,y)=\sqrt{\sec(x^2+e^y)}$

Solución:

a.- $$\frac{\partial f}{\partial x}=6x\ln(x^2+y^3)+3x^2\frac{2x}{x^2+y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2\frac{3y^2}{x^2+y^3}=\frac{9x^2y^2}{x^2+y^3}$$

b- $$\frac{\partial f}{\partial x}=4^x\ln 4\cdot tg(x^2+y^3)+4^x\sec^2(x^2+y^3)2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4^x \sec^2(x^2 + y^3)3y^2$$

c- $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sec(x^2+e^y)tg(x^2+e^y)2x}{2\sqrt{\sec(x^2+e^y)}} = \frac{\sec(x^2+e^y)tg(x^2+e^y)x}{\sqrt{\sec(x^2+e^y)}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sec(x^2+e^y)tag(x^2+e^y)e^y}{2\sqrt{\sec(x^2+e^y)}}$$

5.- En cada caso hallar $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

a.- $f(x,y) = 3x^2 + \ln x + tgx \cdot e^y$

b.- $f(x,y) = x^2 y^5 + e^{x^2+y^2}$

Solución:

a.- $$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + \frac{1}{x} + e^y \sec^2 x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(6x + \frac{1}{x} + e^y \sec^2 x\right) = 6 - \frac{1}{x^2} + e^y 2\sec x \sec x tgx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 - \frac{1}{x^2} + e^y 2\sec^2 x tgx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x + \frac{1}{x} + e^y \sec^2 x\right) = e^y \sec^2 x$$

b.- $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^5 + e^{x^2+y^2}(2x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[2xy^5 + e^{x^2+y^2}(2x)\right] = 2y^5 + e^{x^2+y^2}(2x)(2x) + e^{x^2+y^2}2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^5 + e^{x^2+y^2}(4x^2+2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left[2xy^5+e^{x^2+y^2}(2x)\right]=10y^4x+2xe^{x^2+y^2}2y$$

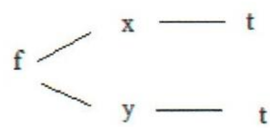
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=10y^4x+4xye^{x^2+y^2}$$

6.- En cada caso aplicar la regla de la cadena para hallar las derivadas indicadas.

a.- $f(x,y)=3x^2+y$ $\quad \begin{cases} x=t+1 \\ y=t^3 \end{cases}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial t}$ y $\frac{\partial f}{\partial t}(2)$

b.- $f(x,y)=x^3+y^2-z$ $\quad \begin{cases} x(u,v,w)=u^2v \\ y(u,v,w)=v^2 \\ z(u,v,w)=e^{-uw} \end{cases}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial u}$

a.-



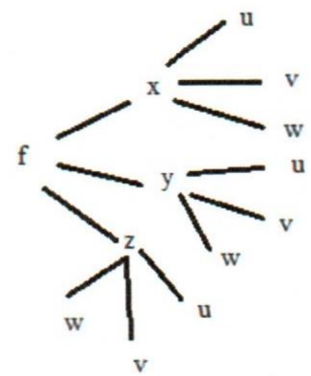
$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=6x\cdot 1+1\cdot 3t^2$$

Sustituimos $\begin{cases} x=t+1 \\ y=t^3 \end{cases}$ en la ecuación anterior:

$$\frac{df}{dt}(t)=6(t+1)+3t^2$$

$$\frac{df}{dt}(2)=6(2+1)+3\cdot 2^2=18+12=30$$

b.-



El dibujo anterior es el árbol asociado a $f(x,y,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

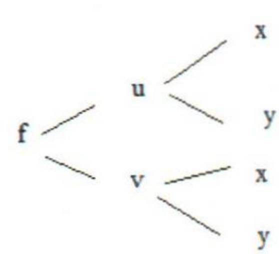
$$\frac{\partial f}{\partial u}=3x^2\cdot 2uv+2y\cdot 0+we^{-uw}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}=6(u^2v)^2\cdot uv+we^{-uw}=6u^5v^3+we^{-uw}$$

7.- Demostrar que la función definida por $z=y\cdot\ln(x^2-y^2)$ satisface la ecuación $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}=0$. **Sugerencia: Tome** $u=x^2-y^2$; $v=y$ **y aplique regla de la cadena.**

Solución:

Como $u=x^2-y^2$; $v=y \Rightarrow z=v\cdot\ln u$; el árbol asociado a la función es:



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{v}{u}2x+(\ln u)\cdot 0=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v}{u}(-2y)+(\ln u)\cdot 1=\frac{-2y^2}{x^2-y^2}+\ln(x^2-y^2)$$

Ahora, $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2xy}{x^2-y^2}\right)+\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{-2y^2}{x^2-y^2}+\ln(x^2-y^2)\right)-\frac{z}{y^2}$

$$=\frac{2y}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2-y^2}+\frac{1}{y}\ln(x^2-y^2)-\frac{y\ln(x^2-y^2)}{y^2}$$

$$=\frac{2y}{x^2-y^2}-\frac{2y}{x^2-y^2}+\frac{1}{y}\ln(x^2-y^2)-\frac{\ln(x^2-y^2)}{y}=0$$

8.- Utilice diferenciales para aproximar $(1{,}98)^3\sqrt{(3{,}01)^2+(3{,}97)^2}$.

Solución:

Sea $f(x,y,z)=x^3\sqrt{y^2+z^2}$ queremos calcular $f(1{,}98;3{,}01;3{,}97)$

Sabemos por el punto (12) de la teoría que $f(a^*,b^*,c^*)\approx f(a,b,c)+dw$

donde $a^*=1{,}98 \qquad b^*=3{,}01 \qquad c^*=3{,}97$

Donde a,b,c son los enteros más cercanos por la izquierda o derecha según sea el caso: $a=2 \qquad b=3 \qquad c=4$

$$\Delta x=a^*-a=1{,}98-2=-0{,}02=\frac{-2}{100}$$

$$\Delta y=b^*-b=3{,}01-3=0{,}01=\frac{1}{100}$$

$$\Delta z=c^*-c=3{,}97-4=-0{,}03=\frac{-3}{100}$$

$$f(1{,}98;3{,}01;3{,}97)\approx f(2{,}3{,}4)+dw$$

$$f(2{,}3{,}4)=2^3\sqrt{3^2+4^2}=40$$

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x}(2,3,4)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(2,3,4)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(2,3,4)\Delta z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\sqrt{y^2+z^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 y}{\sqrt{y^2+z^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^3 z}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3,4) = 3\cdot 2^2\sqrt{3^2+4^2} = 60; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,3,4) = \frac{2^3\cdot 3}{\sqrt{25}} = \frac{24}{5}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2^3\cdot 4}{\sqrt{25}} = \frac{32}{5}$$

$$dw = 60\cdot\left(\frac{-2}{100}\right) + \frac{24}{5}\cdot\frac{1}{100} + \frac{32}{5}\cdot\left(\frac{-3}{100}\right) = \frac{-168}{125}$$

$$f(1{,}98;3{,}01;3{,}97) \approx f(2,3,4) + dw = 40 - \frac{168}{125} = \frac{4832}{125} \approx 38{,}65$$

9.- Hallar la ecuación del plano tangente y la recta normal al hiperboloide $x^2+y^2-z^2=18$ en el punto $(3,5-4)$.

Solución:

Sea $F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-18 \Rightarrow \overrightarrow{\nabla F} = (2x,2y,-2z)$

Normal
Plano $\overrightarrow{n_{PT}} = \overrightarrow{\nabla f}(3,5,-4) = (6,10,8)$
Tangente

La ecuación vectorial del plano será: $(x-3, y-5, z+4)\cdot(6,10,8) = 0$

Desarrollando tenemos $6(x-3)+10(y-5)+8(z+4) = 0$

Haciendo distributiva $6x-18+10y-50+8z+32 = 0 \Rightarrow 6x+10y+8z = 36$

Simplificando nos queda que la ecuación lineal del plano tangente es:

$3x+5y+4z = 18$

Vector
Ahora *Director* $\overrightarrow{VD_{RN}} = \overrightarrow{\nabla f}(3,5,-4) = (6,10,8)$
recta normal

La ecuación simétrica de la recta normal será: $\frac{x-3}{6}=\frac{y-5}{10}=\frac{z+4}{8}$

10.- Hallar la ecuación la recta normal a la superficie $4x^2+y^2-16z=0$ que es perpendicular al plano $2x+y-2z=4$.

Solución:

Sea $F(x,y,z)=4x^2+y^2-16z$

Sea el punto (x_0,y_0,z_o) el punto de tangencia por donde pasa la recta normal buscada entonces:

Vector Director recta normal $\overrightarrow{VD_{RN}}=\overrightarrow{\nabla F}(x_0,y_0,z_o)$

$$\overrightarrow{\nabla F}(x,y,z)=(8x,2y,-16)\Rightarrow\overrightarrow{\nabla F}(x_0,y_0,z_o)=(8x_0,2y_0,-16)$$

Vector normal del plano $2x+y-2z=4$ $\vec{n}=(2,1,-2)$

Una recta es perpendicular a un plano cuando el vector director de la recta es paralelo al vector normal del plano, es decir $\overline{\nabla F}(x_0,y_0,z_o)=\alpha(2,1-2)$

$$(8x_0,2y_0,-16)=\alpha(2,1-2)\Rightarrow\begin{cases}8x_0=2\alpha\\2y_0=\alpha\\-16=-2\alpha\end{cases}\Rightarrow\alpha=8\Rightarrow x_0=2;\quad y_0=4$$

Nos falta saber el valor de z_0, para ello recordemos que el punto de tangencia **siempre** satisface la ecuación de la superficie es decir ocurre que: $4x_0{}^2+y_0{}^2-16z_0=0\Rightarrow 4\cdot 2^2+4^2-16z_0=0\Rightarrow 16+16-16z_0=0\Rightarrow z_0=2$.

Ya tenemos el punto de tangencia $P_T(2,4,2)$;como la recta que queremos es paralela al vector normal del plano quiere decir que podemos usar como vector director de la recta normal el normal del plano es decir $\overrightarrow{VD}_{RN} = (2,1,-2)$.

La ecuación simétrica de la recta buscada es:

$$\frac{x-2}{2} = y-4 = \frac{z-2}{-2}$$

11.- Sea la siguiente ecuación $2x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 2$ que define a *"z"* implícitamente hallar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

FORMA 1: Según el teorema del punto (16) la ecuación la igualamos a *"0"*

$2x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - 2 = 0$ el lado izquierdo lo llamamos *"F(x,y,z)"*

$F(x,y,z) = 2x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - 2$ por lo tanto se cumple que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-(6x^2 + 3yz)}{3z^2 + 3xy} = \frac{-3(2x^2 + yz)}{3(z^2 + xy)} = \frac{-(2x^2 + yz)}{z^2 + xy}$$

FORMA 2: Al igual que en el cálculo de una variable, en funciones de varias variables se pueden obtener las derivadas de manera implícita cuando se tiene una ecuación que contiene todas las variables. La técnica es esencialmente la misma: se derivan los términos en forma sucesiva, aplicando las reglas de derivación correspondientes.

Para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ se debe mantener *"y"* como constante y derivar implícitamente respecto a la variable independiente *"x"*, tomando en cuenta que *"z"* es una función que depende de *"x,y"*. Entonces, se tiene:

$$\frac{\partial(2x^3+y^3+z^3+3xyz)}{\partial x}=\frac{\partial(2)}{\partial x}$$

$$6x^2+0+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+\left(3yz+3xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

De aquí $\quad \frac{\partial z}{\partial x}(3z^2+3xy)=-(6x^2+3yz)$

Luego, $\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(6x^2+3yz)}{3z^2+3xy}=\frac{-3(2x^2+yz)}{3(z^2+xy)}=\frac{-(2x^2+yz)}{z^2+xy}$

Ahora para hallar $\frac{\partial z}{\partial y}$ utilicemos la forma 2, se debe mantener *"x"* como constante y derivar implícitamente respecto a la variable independiente *"y"*, tomando en cuenta que *"z"* es una función que depende de *"x,y"*. Entonces, se tiene:

$$\frac{\partial(2x^3+y^3+z^3+3xyz)}{\partial y}=\frac{\partial(2)}{\partial y}$$

$$0+3y^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+\left(3xz+3xy\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

Luego, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}(3z^2+3xy)=-(3y^2+3xz)$

Por lo tanto, $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(3y^2+3xz)}{3z^2+3xz}=\frac{-(y^2+xz)}{z^2+xy}$

12.- Sea la función $f(x,y)=x\cos^2 y$ y el punto $P\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ con el vector $\vec{v}=(5,1)$ hallar $D_{\vec{v}}f(P)$.

Solución:

Lo que nos piden es la derivada direccional de la función $f(x,y)=x\cos^2 y$ en el punto P y dirección $\vec{v}$.

Por el teorema de la parte (17) de la teoría tenemos $D_{\vec{u}}f(\bar{x}_0)=\overrightarrow{\nabla f}(\overline{x_0})\cdot\vec{u}$ es decir: $D_{\vec{v}}f\left(2,\frac{\pi}{4}\right)=\overrightarrow{\nabla f\left(2,\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\overrightarrow{v_u}$ $\qquad \overrightarrow{\nabla f}(x,y)=\left(\cos^2 y,-x\cdot 2\cos y\cdot seny\right)$

$$\overrightarrow{\nabla f}\left(2,\frac{\pi}{4}\right)=\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right),-2\cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\frac{1}{2},-2\right)$$

$$\left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{v_u}=\frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{1}{\sqrt{26}}(5,1)$$

$$D_{\vec{v}}f\left(2,\frac{\pi}{4}\right)=\overrightarrow{\nabla f\left(2,\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\overrightarrow{v_u}=\left(\frac{1}{2},-2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}(5,1)=\frac{1}{\sqrt{26}}\left(\frac{1}{2},-2\right)\cdot(5,1)$$

$$D_{\vec{v}}f\left(2,\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{26}}\left(\frac{1}{2}\cdot 5+(-2)\cdot 1\right)=\frac{1}{\sqrt{26}}\left(\frac{5}{2}-2\right)=\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{26}}$$

13.- Sea $f(x,y)=x^2y+2y^2x$ encuentre en el punto $(1,3)$:

a.- La dirección de mayor y menor crecimiento.

b.- La Tasa máxima y mínima de crecimiento.

Solución:

a.- La dirección de mayor crecimiento de $f(x,y)$ en el punto $(1,3)$ es:

$\overrightarrow{\nabla f}(1,3)$

$$\overrightarrow{\nabla f}(x,y) = \left(2xy + 2y^2, x^2 + 4xy\right)$$

$$\overrightarrow{\nabla f}(1,3) = \left(2\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 3^2, 1^2 + 4\cdot 1\cdot 3\right) = \left(6+18, 1+12\right) = \left(24,13\right)$$

La dirección de menor crecimiento de $f(x,y)$ en el punto $(1,3)$ es:

$$-\overrightarrow{\nabla f}(1,3) = (-24,-13)$$

b.- La tasa máxima de crecimiento es $\left\|\overrightarrow{\nabla f}(1,3)\right\| = \sqrt{24^2 + 13^2} = \sqrt{745}$

La tasa mínima de crecimiento es $-\left\|\overrightarrow{\nabla f}(1,3)\right\| = -\sqrt{24^2 + 13^2} = -\sqrt{745}$

Ejercicios Propuestos:

1.- Hallar los siguientes límites:

a.- $$lím_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^2+y^2}$$

b.- $$lím_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

c.- $$lím_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7y^2}{x^2+y^2}$$

d.- $$lím_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$$

e.- $$lím_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

f.- $$lím_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

g.- $$lím_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 x}{x^6+y^2}$$

h.- $$lím_{(x,y)\to(0,0)} \frac{12x^2 y^2}{3x^2+3y^2}$$

2.- Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

a.- $$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

b.- $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

3.- Calcular en cada caso $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ por definición:

a.- $f(x,y)=x^3y$

b.- $f(x,y)=3ysenx$

4.- Calcular usando reglas de derivación en cada caso $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$:

a.- $f(x,y)=\ln(x^3+y^4)+x^2$

b.- $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

c.- $f(x,y)=arctg(xy)+4^x-7^y$

d.- $f(x,y)=9^{x^2+\ln y}$

e.- $f(x,y)=\displaystyle\int_x^{y^3} e^{sent}\,dt$

5.- Dada $z=\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ pruebe que $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

6.- Dada $z=\ln(x^2+xy+y^2)$ pruebe que $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$.

7.- Hallar en cada caso $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$:

a.- $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

b.- $f(x,y)=x^y$

c.- $f(x,y)=xy\cdot e^{x^2+y^2}$

8.- Dada $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ pruebe que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

9.- En cada caso hallar la derivada direccional de la función en el punto y vector dados:

a.- $f(x,y)=x^2y+4xy^2$ $P(1,2)$ $\vec{v}=(2,-1)$

b.- $f(x,y)=\ln(x+y)$ $P(1,3)$ $\vec{v}=(4,-3)$

c.- $f(x,y,z)=x^2+2xy-y^2+xz+z^2$ $P(2,1,1)$ $\vec{v}=(1,-2,2)$

10.- La temperatura en cualquier punto está dada por $T(x,y)=x^2+2y^2+x$.

a) ¿Cuál es la razón de cambio máximo en el punto $(-1,2)$.

b) ¿En qué dirección cambia con menor temperatura en el punto anterior?

11.- Suponga que sobre una cierta región del espacio, el potencial eléctrico V está dada por $V(x,y,z)=5x^2-3xy+xyz$. Determinar:

a.- La razón de cambio del potencial eléctrico en el punto $P(3,-3,3)$ en la dirección del vector $\vec{w}=(2,2,1)$.

b.- ¿En qué dirección cambia con menor velocidad de V en P.

c.- ¿Cuál es la razón máxima de cambio en el punto P ?

12.- Sea $g(x,y)=\ln(x.y-1)$. ¿Cuál es la tasa mínima de crecimiento de la función $g(x,y)$ en el punto $\left(8,\frac{1}{4}\right)$?

13.- En cada caso utilice diferenciales para aproximar

a.- $(1{,}02)^{3{,}81}$

b.- $(2{,}98).(4{,}04).\sqrt{(2{,}98)^2+(4{,}04)^2}$

c.- $(3{,}01).\sqrt{(1{,}09)^2+(2{,}7)^2-1}$

d.- $\sqrt{2(2{,}03)^2+(2{,}97)^2}$

14.- La ecuación $x^{y-2}.z+z^3=\ln z$ define a "z" implícitamente hallar: $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

15.- La siguiente ecuación define a la "z" implícitamente: $y^2.z.e^{x+y}-sen(x.y.z)=0$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$.

16.- La siguiente ecuación define a la "z" implícitamente: $y^x+x^2.z=x^y.\ln z$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}$.

17.- La siguiente ecuación define a la "z" implícitamente: $x^2+y^2+z^2=2x(y+z)$. Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

18.- Dada la ecuación $F\left[\ln\left(\frac{x}{y}\right),\frac{z}{x}\right]=0$; siendo F una función derivable donde z es **función implícita** de x,y. Pruebe que $z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

19.- Sea $G:\Re^2 \to \Re$ diferenciable y $f:\Re^2 \to \Re / \ f(x,y) = y.G(x^2 - y^2)$.

Verificar que se cumple la siguiente igualdad: $\frac{1}{x}.\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}.\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f}{y^2}$

(Sug: Llame $u = x^2 - y^2$).

20.- Sea la función $f(x,y) = \cos x.seny$ y $\begin{cases} x(s,t) = \cos(t^2.s) \\ y(s,t) = \ln\left(\sqrt{1+s^2}\right) \end{cases}$ .Calcular

$\frac{\partial f}{\partial s}(1,0)$.

21.- Sea $u = f(x,y)$, donde $x(s,t) = e^s.\cos t$ y $y(s,t) = e^s.sent$.

Muestre que: $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$.

22.- Sea $w(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ pruebe que $\frac{\partial w}{\partial r}(r,\theta) = \frac{2.r}{|r|\sqrt{2}}$

Donde $\begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = rsen\theta \\ z(r,\theta) = r \end{cases}$

23.- Sea f derivable y sea $w = f(u)$ donde $u = x + 2y + 3z$. Pruebe que se cumple: $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 6\frac{\partial w}{\partial u}$

24.- Sea f derivable y sea $w = f(\rho)$ donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pruebe que se cumple: $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial \rho}\right)^2$

25.- Sea $z = f(x,y)$, donde $x(r,\theta) = r.\cos\theta$ y $y(r,\theta) = r.sen\theta$.

a.- Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$

b.- Muestre que: $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}.\left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$.

26.- Muestre que toda recta normal a la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ pasa por el centro de dicha esfera.

27.- Sea la superficie $x^{y.z}=1$. Hallar la ecuación simétrica de la recta normal a dicha superficie en el punto $\left(1,2,\dfrac{1}{2}\right)$.

28.- Sea la superficie $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1$. Hallar la ecuación simétrica de la recta normal a dicha superficie, sabiendo que dicha recta es perpendicular al plano $x+y+z=101$.

29.- Hallar el plano tangente a la superficie $z=x^2+3xy+y^2$ que sea perpendicular a la recta $2x=3y-1=z$.

30.- Hallar la recta normal al hiperboloide $x^2-y^2+2z^2=1$ la cual es paralela a la recta que une los puntos $A(3,-1,0)$ y $B(5,3,6)$.

31.- Muestre que la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ en el punto (x_o,y_o,z_o) puede escribirse como: $\dfrac{2x.x_o}{a^2}+\dfrac{2y.y_o}{b^2}=\dfrac{z+z_o}{c}$.

32.- ¿En qué punto de la gráfica del paraboloide $y = x^2 + z^2$ el plano tangente es perpendicular a la recta $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-5}{-1} = z$?

33.- Hallar los puntos de la superficie $xy + yz + zx - x - z^2 = 0$ en los que el plano tangente es paralelo al plano xy.

34.- Sea la función $f(x,y,z) = 4x^2 + y^2 - 16z$.

a.- Hallar la razón de cambio en el punto $P(3,4,5)$ en la dirección $\vec{v} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

b.- Hallar la tasa mínima de crecimiento en el punto $P(1,0,2)$.

c.- Hallar el plano tangente a la superficie $f(x,y,z) = 0$ que es paralelo al plano $2x + y - 2z = 4$.

35.- Sea la función $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, encuentre la razón de cambio de $f(x,y,z)$ en el punto $(1,0,-1)$ en la dirección del vector normal del plano $3x + y - z = 1$.

36.- Pruebe en $\Re^2$, que

$$D_{\hat{i}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$D_{\hat{j}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

37.- Pruebe en $\Re^3$, que

$$D_{\hat{i}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

$$D_{\hat{j}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

$$D_{\hat{k}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

38.- Si $z = f(x, y)$, donde $x = s + t \quad y = s - t$ pruebe que:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

39.- Sea $z = f(x + at, x - at)$, pruebe que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Sug: Haga $u = x + at \quad y \quad v = x - at$

Capítulo 9: Funciones de Varias Variables:

Máximos y Mínimos...

Máximos y Mínimos Relativos...

1.- Sea $f:\Re^2 \to \Re$. Decimos que f alcanza un **"mínimo relativo"** en el punto (x_o,y_o) si existe un entorno V de $(x_o,y_o) / \forall x \in V : f(x,y) \geq f(x_o,y_o)$.

2.- Sea $f:\Re^2 \to \Re$. Decimos que f alcanza un **"máximo relativo"** en el punto (x_o,y_o) si existe un entorno V de $(x_o,y_o) / \forall x \in V : f(x,y) \leq f(x_o,y_o)$.

3.- Llamamos a (x_o,y_o) **punto crítico** (candidato a ser máximo, mínimo o punto silla) de la función f si ocurre que:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_o,y_o) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o) = 0 \end{cases}.$$

Criterio de la Segunda Derivada...

4.- Sea $f:\Re^2 \to \Re$, (x_o,y_o) un punto crítico de la función y $f \in C^2$ es decir las mixtas son iguales. Definamos la matriz Hesiana como: $H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$. Definimos el $\Delta(x_o,y_o) = \det H(x_o,y_o)$.

a.- Si $\Delta(x_o,y_o) > 0$ y $f_{xx}(x_o,y_o) > 0$ entonces en (x_o,y_o) hay un mínimo relativo.

b.- Si $\Delta(x_o, y_o) > 0$ y $f_{xx}(x_o, y_o) < 0$ entonces en (x_o, y_o) hay un máximo relativo.

c.- Si $\Delta(x_o, y_o) < 0$ entonces en (x_o, y_o) es un punto silla (punto donde hay cambio de concavidad).

d.- Si $\Delta(x_o, y_o) = 0$ no hay decisión acerca del punto (x_o, y_o), y debemos usar la definición (ver puntos 1 y 2).

Máximos y Mínimos Absolutos…

5.- Para calcular los valores máximos y mínimos **absolutos** de una función continua f sobre un conjunto cerrado y acotado D se realizan los siguientes pasos:

PASO 1: Determinar los puntos críticos de f en el interior de D.

PASO 2: Calcular los extremos de f en la frontera de D.

PASO 3: Elaborar una tabla con los puntos hallados en el paso 1 y 2 con sus respectivos valores de f en dichos puntos. El valor más grande es el **valor máximo absoluto** y el más pequeño será el **valor mínimo absoluto.**

OBS: Recordemos de Cálculo I,

Sea f una función definida en el intervalo $[a,b]$ los puntos críticos (o candidatos a ser máximos o mínimos) son:

1.- Puntos fronteras: $x = a$ y $x = b$ (esto es en el caso de que el intervalo sea cerrado, si es semiabierto habrá un punto frontera y si el intervalo es abierto no habrán puntos fronteras).

2.- Puntos estacionarios = $\{c \in [a,b] / f'(c) = 0\}$

3.- Puntos singulares = $\{d \in [a,b] / f'(d) no \exists\}$

Lagrange… ***(Método para calcular máximos y mínimos de f sobre fronteras).***

6.- **<u>CON 1-RESTRICCIÓN</u>**:

En $\Re^2$. Si queremos calcular valores máximos y mínimos de $f(x,y)$ sujeta a la restricción $g(x,y)=c$ se procede así:

PASO1: Determinar todos los valores de x, y, λ tales que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f} = \lambda \overrightarrow{\nabla g} \\ g(x,y) = c \end{cases}$$

(Donde $\overrightarrow{\nabla f} = \lambda \overrightarrow{\nabla g}$ se lee: El gradiente de la función a optimizar es igual a landa veces el gradiente de la función restricción)

PASO2: Evaluar f en todos los puntos (x,y) que surjan del **PASO 1**. El más grande de esos valores es el máximo valor de f y el más pequeño es el mínimo valor de f.

En $\Re^3$. Si queremos calcular valores máximos y mínimos de $f(x,y,z)$ sujeta a la restricción $g(x,y,z)=c$ se procede así:

PASO1: Determinar todos los valores de x, y, z, λ tales que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f} = \lambda \overrightarrow{\nabla g} \\ g(x,y,z) = c \end{cases}$$

PASO2: Evaluar f en todos los puntos (x,y,z) que surjan del **PASO 1**. El más grande de esos valores es el máximo valor de f y el más pequeño es el mínimo valor de f.

7.- <u>CON 2-RESTRICCIONES</u>:

En $\Re^2$. Si queremos calcular valores máximos y mínimos de $f(x,y)$ sujeta a las restricciones $g(x,y)=c$ y $h(x,y)=k$ se procede así:

PASO1: Determinar todos los valores de $x, y, \lambda_1, \lambda_2$ tales que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f} = \lambda_1 \overrightarrow{\nabla g} + \lambda_2 \overrightarrow{\nabla h} \\ g(x,y) = c \\ h(x,y) = k \end{cases}$$

PASO2: Evaluar f en todos los puntos (x,y) que surjan del **PASO 1**. El más grande de esos valores es el máximo valor de f y el más pequeño es el mínimo valor de f.

En $\Re^3$. Si queremos calcular valores máximos y mínimos de $f(x,y,z)$ sujeta a las restricciones $g(x,y,z)=c$ y $h(x,y,z)=k$ se procede así:

PASO1: Determinar todos los valores de $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ tales que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f} = \lambda_1 \overrightarrow{\nabla g} + \lambda_2 \overrightarrow{\nabla h} \\ g(x,y,z) = c \\ h(x,y,z) = k \end{cases}$$

PASO2: Evaluar f en todos los puntos (x,y,z) que surjan del **PASO 1**. El más grande de esos valores es el máximo valor de f, y el más pequeño es el mínimo valor de f.

Ejercicios Resueltos:

1.- Hallar los extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2+3$ por definición.

Solución: Para resolver este estilo de problemas realizamos dos pasos:

Paso 1) Hallar los puntos críticos $f(x,y)$. Para ello hacemos el gradiente igual al vector nulo.

$$\overrightarrow{\nabla f}(x,y)=(2x,2y)=(0,0)$$

$$\begin{cases}2x=0\\2y=0\end{cases}\Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

Paso 2) Clasificar los puntos críticos, en el problema nos dice que se haga por definición.

$$f(0,0)=0^2+0^2+3=3$$

Nótese que la primera parte de la función $x^2+y^2\geq 0\,(*)$ ¿Qué le falta a x^2+y^2 para que sea igual a $f(x,y)=x^2+y^2+3$? Le falta un "3". Sumemos 3 a ambos lados de la desigualdad (*) nos queda:

$$x^2+y^2+3\geq 0+3\Rightarrow x^2+y^2+3\geq 3\Rightarrow f(x,y)\geq f(0,0)\Rightarrow (0,0) \text{ es mínimo.}$$

2.- Hallar y clasificar los puntos críticos de la función $f(x,y)=x^2+y^2-xy$.

Solución: Para resolver este estilo de problemas realizamos dos pasos:

Paso1) Hallar los puntos críticos $f(x,y)$

$$\overrightarrow{\nabla f}(x,y)=(2x-y,2y-x)=(0,0)$$

$$\begin{cases}2x-y=0\\2y-x=0\end{cases}\Rightarrow (x,y)=(0,0)$$

Paso 2) Clasificar los puntos críticos. Usemos el **criterio de la segunda derivada.**

Construyamos las matriz Hesiana. $H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$

$f_x = 2x - y \Rightarrow f_{xy} = -1 \quad y \quad f_{xx} = 2$

$f_x = 2y - x \Rightarrow f_{yx} = -1 \quad y \quad f_{yy} = 2 \Rightarrow H(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

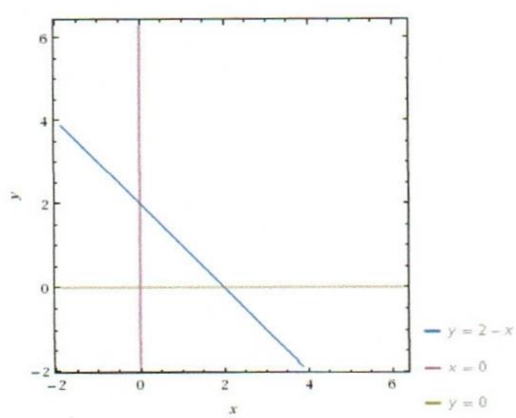
$\Rightarrow \Delta(0,0) = \det H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3.$

Como $\Delta(0,0) = 3 > 0$ y $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ entonces en $(0,0)$ hay un mínimo.

3.- Hallar los extremos absolutos de:

$f(x,y) = 8x^3 - 24xy + 8y^3$ en $D = \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}.$

Solución: Este ejercicio necesita tres pasos para su resolución. Nótese que la región D es el triángulo dentro de las fronteras $x=0; y=0; y=2-x$, (ver figura).



Paso1) Hallamos los puntos críticos en el interior ¨ del conjunto D.

$\overrightarrow{\nabla f}(x,y) = (24x^2 - 24y, 24y^2 - 24x) = (0,0)$

$$\begin{cases} 24x^2 - 24y = 0 \\ 24y^2 - 24x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (i) x^2 - y = 0 \\ (ii) y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow despejar \;\; de\ la\ (i)\ \text{“}y\text{”} \Rightarrow y = x^2$$

sustituimos en (ii)

$$\Rightarrow (x^2)^2 - x = 0 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad o \quad x^3 - 1 = 0$$

podemos ver por Rufini que $x^3 - 1 = 0$ solo tiene una solución $x = 1$. Estudiemos los dos casos:

Caso 1) $x = 0$ *sustituimos en (i) y nos queda* $y = x^2 = 0$ el primer punto es $(0,0)$ pero este punto no pertenece al interior de *D*.

Caso 2) $x = 1$ *sustituimos en (i) y nos queda* $y = x^2 = 1^2 = 1$ el segundo punto es $(1,1)$ pero este punto tampoco pertenece al interior de *D* (de hecho se encuentra en la mitad de la hipotenusa del triángulo *D*).

Conclusión: No hemos encontrado puntos críticos en el interior del conjunto *D*

Paso 2) Buscar extremos en la frontera de *D*.

$FrontD = \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{y = 2 - x\}$. Para cada frontera buscamos los extremos.

$x = 0$ está restringida en el intervalo $y \in [0,2]$, sustituimos en la función original y nos queda $f(0, y) = 8.0^3 - 24.0.y + 8y^3 = 8y^3 = h(y)$. Ahora el problema se reduce a buscar extremos en la función $h(y) = 8y^3 \quad y \in [0,2]$.

Puntos fronteras $y = 0; y = 2$

Puntos estacionarios

$= \{y \in [0,2] / h'(y) = 0\} \qquad h'(y) = 24y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \in [0,2]$

Puntos singulares no existen porque la primera derivada es un polinomio.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow P_1(0,0) \\ y = 2 \Rightarrow P_2(0,2) \end{cases}$$

$y = 0$ está restringida en el intervalo $x \in [0,2]$, sustituimos en la función original y nos queda $f(x,0) = 8x^3 - 24.x.0 + 8.0^3 = 8x^3 = g(x)$. Ahora el problema se reduce a buscar extremos en la función $g(x) = 8x^3 \quad x \in [0,2]$

Puntos fronteras $x = 0; x = 2$

Puntos estacionarios

$= \{x \in [0,2] / g'(x) = 0\} \qquad g'(x) = 24x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \in [0,2]$

Puntos singulares no existen porque la primera derivada es un polinomio.

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow P(0,0) & ya \\ x = 2 \Rightarrow P_3(2,0) \end{cases}$$

$y = 2 - x$ esta restringida en el intervalo $x \in [0,2]$, sustituimos en la función original y nos queda

$f(x,2-x) = 8x^3 - 24.x.(2-x) + 8.(2-x)^3 = 72x^2 - 144x + 64 = S(x)$. Ahora el problema se reduce a buscar extremos en la función $S(x) = 72x^2 - 144x + 64 \quad x \in [0,2]$

Puntos fronteras $x = 0; x = 2$

Puntos estacionarios

$= \{x \in [0,2] / S'(x) = 0\} \qquad S'(x) = 144x - 144 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0,2]$

Puntos singulares no existen porque la primera derivada es un polinomio.

$$y = 2 - x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 - 0 = 2 \Rightarrow P(0,2) & ya \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 - 2 = 0 \Rightarrow P(2,0) & ya \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 - 1 = 1 \Rightarrow P_4(1,1) \end{cases}$$

Paso 3) Tabla de valores.

P(x,y)	$f(x,y)=8x^3-24xy+8y^3$
(0,0)	0
(0,2)	**64 Valor máximo absoluto**
(2,0)	**64 Valor máximo absoluto**
(1,1)	**-8 Valor mínimo absoluto**

4.- (Lagrange) Calcular los extremos de la función $f(x,y)=x^2+2y^2$ sobre el círculo $x^2+y^2=1$.

Solución: Cuando tengamos que optimizar una función sujeta a UNA FRONTERA lo ideal es utilizar Lagrange.

¿Qué hacemos? Identificamos la función a optimizar (maximizar o minimizar según sea el caso) e identificamos la función restricción. En este problema es sencillo porque nos dicen **los extremos de** $f(x,y)=x^2+2y^2$ indicándonos que esta es la función a optimizar y cuando nos dice **sobre el círculo** $x^2+y^2=1$ quiere decir que esta es la restricción.

Llamemos el lado izquierdo de $x^2+y^2=1$ como la función $g(x,y)$ es decir, $g(x,y)=x^2+y^2$.

Aplicando Lagrange tenemos: $\overrightarrow{\nabla f}=\lambda\overrightarrow{\nabla g}\Rightarrow(2x,4y)=\lambda(2x,2y)\Rightarrow\begin{cases}2x=2\lambda x\\4y=2\lambda y\end{cases}$

a este último sistema le agregamos la restricción y nos queda:

$$\Rightarrow \begin{cases} (i)2x = 2\lambda x \\ (ii)4y = 2\lambda y \\ (iii)x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$ simplificando las dos primeras ecuaciones nos queda

$$\Rightarrow \begin{cases} (i)x = \lambda x \\ (ii)2y = \lambda y \\ (iii)x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$ de la *(i)* obtenemos que $x - \lambda x = 0$

$\Rightarrow x(1-\lambda) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad o \quad 1-\lambda = 0 \quad (\lambda = 1)$

Caso 1) $x = 0 \Rightarrow (iii) y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow P_1(0,1) \quad y \quad P_2(0,-1)$

Caso 2)

$\lambda = 1 \Rightarrow (ii) 2y = y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (iii) x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow P_3(1,0) \quad y \quad P_4(-1,0)$

Hacemos la tabla con los puntos hallados:

P(x,y)	$f(x,y) = x^2 + 2y^2$
(0,1)	**2Valor máximo absoluto**
(0,-1)	**2Valor máximo absoluto**
(1,0)	**1 Valor mínimo absoluto**
(-1,0)	**1 Valor mínimo absoluto**

5.- **(Aplicación con Lagrange)** Determine los puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que estén más cercano y más alejados del punto $(3,1,-1)$.

Solución: La función a optimizar es distancia del un punto cualquiera (x,y,z) al punto $(3,1,-1)$, esto es:

$F.O: d(x,y,z) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$

Pero trabajar con esta función puede volverse tedioso por las derivadas parciales que involucran raíces en el denominador. Así que usaremos el truco de utilizar como función a optimizar:

$F.O: F(x,y,z) = d^2 = \left(\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}\right)^2 = (x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$ y luego en la tabla cuando busquemos la verdadera distancia sacaremos la raíz cuadrada.

La restricción es que los puntos deben estar en la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ por ello llamemos $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Entonces aplicando Lagrange tenemos:

$$\overrightarrow{\nabla F} = \lambda \overrightarrow{\nabla g} \Rightarrow [2(x-3),2(y-1),2(z+1)] = \lambda(2x,2y,2z) \Rightarrow \begin{cases} 2(x-3)=2\lambda x \\ 2(y-1)=2\lambda y \\ 2(z+1)=2\lambda z \end{cases}$$

a este sistema agregamos la restricción y simplificamos las primeras tres ecuaciones:

$$\begin{cases} (i)x-3=\lambda x \\ (ii)y-1=\lambda y \\ (iii)z+1=\lambda z \\ (iv)x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\dfrac{3}{1-\lambda} \\ y=\dfrac{1}{1-\lambda} \\ z=\dfrac{-1}{1-\lambda} \end{array}$$

$$\textit{sustituímos en } (iv) \Rightarrow \left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2+\left(\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2=4$$

$$\Rightarrow \frac{9}{(1-\lambda)^2}+\frac{1}{(1-\lambda)^2}+\frac{1}{(1-\lambda)^2}=4$$

$$\frac{11}{(1-\lambda)^2}=4 \Rightarrow \frac{11}{4}=(1-\lambda)^2 \Rightarrow 1-\lambda=\pm\frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow 1\mp\frac{\sqrt{11}}{2}=\lambda$$

Para $\lambda = 1 + \dfrac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{-6}{\sqrt{11}}; y = \dfrac{-2}{\sqrt{11}}; z = \dfrac{2}{\sqrt{11}}$

Para $\lambda = 1 - \dfrac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{6}{\sqrt{11}}; y = \dfrac{2}{\sqrt{11}}; z = \dfrac{-2}{\sqrt{11}}$

P(x,y)	$F(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$	$d = \sqrt{F}$
Punto más alejado $\left(\dfrac{-6}{\sqrt{11}}, \dfrac{-2}{\sqrt{11}}, \dfrac{2}{\sqrt{11}}\right)$	28,26	$\sqrt{28{,}26} = 5{,}31$
Punto más cerca $\left(\dfrac{6}{\sqrt{11}}, \dfrac{2}{\sqrt{11}}, \dfrac{-2}{\sqrt{11}}\right)$	1,73	$\sqrt{1{,}73} = 1{,}31$

Ejercicios propuestos:

Máximos y Mínimos relativos...

1.- Hallar y clasificar los puntos críticos en:

a.- $f(x,y)=x^2-2xy+y^2$

b.- $f(x,y)=2x^2+2y^2+7xy$

c.- $f(x,y)=e^{2+y^2-x^2}$

d.- $f(x,y)=x^3-4x^2-16x+y^3-4y^2$

e.- $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$

f.- $f(x,y)=x^3-3xy^2+y^3+x^2+1$

g.- $f(x,y)=8x^3-24xy+8y^3$

Valores máximos y mínimos absolutos...

2.- Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y)$ en la región D.

a.- $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$ en $D=\{(x,y)/-x\leq y\leq 2;0\leq x\leq 2\}$

b.- $f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$ en $D=\begin{cases} x\geq 0\\ y\geq 0\\ x+y\leq 9\end{cases}$

c.- $f(x,y)=x^3+2xy+3y^2$ en $D=\{(x,y)/-2\leq x\leq 4;-1\leq y\leq 3\}$

d.- $f(x,y)=2x^2-4x+y^2-4y+1$ en $D=\begin{cases} x\geq 0\\ y\leq 2\\ y\geq 2x\end{cases}$

Multiplicadores de Lagrange....

Con una restricción...

3.- Hallar los extremos de $f(x,y)=xy$ sujeto a la restricción $S=\{(x,y)/x^2+y^2=1\}$.

4.- Minimizar $f(x,y)=x^2y^2$ sujeta a $S=\{(x,y)/x+y=1\}$.

5.- Hallar los máximos y mínimos de $f(x,y,z)=x-2y+5z$ sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=30$.

Aplicaciones...

6.- Hallar el punto más cercano al punto $(1,4)$ que está sobre la parábola $y^2=2x$.

7.- Halle dos números no negativos cuya suma sea igual a "1" y que hagan que la suma de sus cuadrados sea mínima.

8.- Hallar tres números reales cuya suma es "9" y que la suma de sus cuadrados sea lo más pequeña posible.

9.- Sobre la superficie $\dfrac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ determine el punto más cercano y más alejado al plano $3x+4y+12z=288$.

10.- Entre todos los triángulos con área dada "A", hallar aquel que su hipotenusa tenga el valor mínimo.

11.- En los siguientes ejemplos hallar ***los valores máximos y mínimos absolutos*** de las siguientes funciones sobre los siguientes conjuntos cerrados y acotados.

a.- $f(x,y)=x^2+y^2$ en $D=\{(x,y)/(x-\sqrt{3})^2+(y-\sqrt{3})^2\leq 10\}$.

b.- $f(x,y)=x^2+3y^2+2y$ en $D=\{(x,y)/x^2+y^2\le 1\}$

SUG: ***Halle los puntos críticos en el interior del conjunto D. Luego calcule los extremos a través de lagrange por último elabore una tabla con todos los valores el más grande será el máximo absoluto y el más pequeño el mínimo absoluto.***

12.- Determine el punto más alejado del plano $x+2y-z=0$ sobre la gráfica $z=10+x^2+y^2$.

13.- Una placa circular tiene forma $x^2+y^2\le 1$; se calienta de modo que la temperatura en cualquier punto (x,y) es $T(x,y)=x^2+2y^2+x$. Determine los puntos más caliente y más frío de la placa. ***(Siga la sugerencia del ejercicio 11).***

14.- ¿Qué puntos de la superficie de ecuación $4x^2+y^2-z^2=1$ están más cercanos al eje z?

15.- Encuentre los puntos sobre el cono $z^2=x^2+y^2$ mas cercanos al punto $(4,2,0)$.

Con dos restricciones…

16.- Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y,z)=x^2+z$ en la intersección del cilindro dado por $x^2+y^2=1$ con el plano $x+z=0$.

17.- ***Aplicación…***

Encontrar usando los Multiplicadores de Lagrange, los puntos sobre la curva intersección de las superficies $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ que están más cerca y más lejos del origen de coordenadas.

Respuestas del Capítulo 1:

2) *a.- Si son colineales*

b.- No son colineales

c.- Si son colineales

d.- Si son colineales

Respuestas del Capítulo 2:

1.- *a)* 4

b) 151,26°

c) $\sqrt{65}$

d) 27

e) $3\sqrt{5}$

f) $\overrightarrow{A_u}\frac{1}{5}(3,0,-4)$; $\quad \overrightarrow{D_u}=\frac{1}{\sqrt{26}}(-1,0,5)$

g) $\alpha=-4$

h) $-7(2,3,-1)=(-14,-21,7)$

2.- $\beta=-4$;

3.- $8\sqrt{6}$

4.- *a)* $\|\vec{x}+\vec{y}\|=\sqrt{13+6\sqrt{2}}$ *b)* $\|\vec{x}-\vec{y}\|=\sqrt{13-6\sqrt{2}}$

5.- $\left(\frac{-4}{3},\frac{2}{3},\frac{13}{3}\right)$

6.- *a) SI ES C.L.* *b) SI ES C.L* *c) NO ES C.L.*

d) SI ES C.L. *e) NO ES C.L.*

7.- *Ambas son iguales a* $\sqrt{58}$.

8.- *a)* 6 *b)* $\sqrt{37}$ *c)* $13\sqrt{13}$

9.- 56.

10.- *a)* -5 *b)* -4 *c)* $4\sqrt{59}$

11.- $\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$

15.- *El ángulo entre* $\vec{u};(\vec{u}-\vec{v})$ ***es*** $\pi/_3$.

16.- $\vec{A} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right).\vec{v}$ *y* $\vec{B} = \overrightarrow{u} - \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right).\vec{v}$

21.- $\vec{c}_1 = \dfrac{4}{\sqrt{42}}(1,5,-4)$ *y* $\vec{c}_2 = \dfrac{4}{\sqrt{42}}(-1,-5,4)$

22.- $\pi/_3$

23.- $\vec{v}_1 = 5(\sqrt{2},1,-1)$ *y* $\vec{v}_2 = -5(\sqrt{2},1,-1)$

24.- $\vec{c} = \left(-\dfrac{3}{11},\dfrac{1}{11},\dfrac{1}{11}\right)$ *y* $\vec{d} = \left(\dfrac{14}{11},\dfrac{43}{11},\dfrac{-1}{11}\right)$

25.- *a)* $\dfrac{81}{2}$ *b)* 9 *c)* 26,56°

27.- 9

28.- *a)* $42\sqrt{3}$ *b)* 2.197

29.- *a)* 3.125 *b)* 73,79°

30.- $\dfrac{16 \pm \sqrt{418}}{9}$

31.- *a.-* $3,\ \left(\frac{9}{5},-\frac{12}{5}\right)$ b.- $\frac{37}{7};\ \left(\frac{74}{49},\frac{-111}{49},\frac{222}{49}\right)$

c.- $\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

32.- (2,4,2)

Respuestas del Capítulo 3

1.- *a.-* *Se cortan en el punto (3,3,-3) y son perpendiculares.*

b.- *Son perpendiculares. Se cortan en el punto (1,2,1)*

c.- *Son rectas perpendiculares y oblicuas, es decir, se cruzan.*

d.- *Sugerencia: Vea que no son paralelas y que no se intersectan.*

2.- $x+3y+2z=4$

3.- $\frac{3}{\sqrt{5}}$

4.- *a.-* $-2x+19y-14z=-2$ *b.-* *Tiene infinitas soluciones*

c.- $x+y-3z=33$ *d.-* *Se procede igual al ejercicio (b)*

e.- $x+y=6$

6.- *a.-* $(-31,-63,-42)$ *b.-* $(1,0,1)$ *y* $(-5,-2,-1)$

c.- $(4,2,4)$ *y* $(2,0,-4)$

7.- a.- $E.S.RI \vdots x = \frac{z}{-1}; y = 1$

b.- $E.S.RI: \frac{x + 3/2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+8}{12}$

c.- $E.S.RI: \frac{x}{2} = \frac{y+10}{13} = \frac{z+4}{4}$

8.- 6a) $\theta = 35{,}26^{o}$,

6b) $\theta = 61{,}97^{o}$

6c) $\theta = 56{,}78^{o}$,

9.- a.- $\frac{1}{2\sqrt{94}}$ b.- $\frac{1}{\sqrt{2}}$

10.- a.- 972π b.- $\frac{32\pi}{3}$

c.- $\frac{378\sqrt{21}\pi}{\sqrt{2}}$

***Problemas de desarrollo*:**

11.- $\pi_2 \vdots 2x + 2y - z = 42$

12.- $E.S.L: \frac{x + 1/2}{3} = \frac{y-2}{-1} = z - 10$

13.1- 7

14.- $E.C.E_1 \vdots (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$

$y\ E.C.E_1 \vdots \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = 9$

15.- $\arccos\left(\dfrac{-5}{6}\right)$

16.- $25x-4y-19z=57$

17.- $9x+18y+2z=31$

18.- *Los otros vértices son* $(4,2,4)$, $(2,0,-4)$ *y el área es* $18\sqrt{3}$.

19.- ***Volumen*** 68

20.- $10\sqrt{6}$

21.- $-6x+17y+6z=-33$ *y* $-2x-y+2z=9$

22.- $L_1:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$

23.- *23.1)* $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1/2}{2}=z;$

23.2) $a=b=1$

23.3) $a=9; b=-5.$

24.- *Los vértices son* $(1,2,3)$ $(2,2,13)$ *y* $(-1,6,11)$ *y el área es* $10\sqrt{6}$.

Respuestas del Capítulo 4

1.- ***Cono:*** $4(x^2+y^2)=(z+6)^2 \quad -6\le z\le 10$

Paraboloide: $-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)=z-10 \quad 2\le z\le 10$

Esfera: $x^2+y^2+(z-10)^2=64 \quad 10\le z\le 18$

2.- ***Cono:*** $y^2+z^2=\dfrac{1}{4}(x-2)^2 \quad 2\le x\le 6;$

Hiperboloide de una hoja: $\dfrac{y^2+z^2}{4}-\dfrac{(x-6)^2}{64/3}$ $\quad 6\le x\le 14$;

Hiperboloide de dos hojas:

$$-\frac{7(y^2+z^2)}{144}+\frac{(x-6)^2}{36}=1 \qquad 12\le x\le 14$$

3.- ***Cono:*** $4\left(x^2+z^2\right)=(y-8)^2 \quad -4\le y\le 8$

Paraboloide: $\dfrac{2}{3}\left(x^2+z^2\right)=y+4 \quad -4\le y\le 2$

4.- En las siguientes respuestas sólo aparecen las ecuaciones canónicas de las cuádricas y su identificación, usted debe esbozar la gráfica, hallar los valores de "a,b,c" el centro, vértices según sea el caso, el eje donde está girando etc. Como se hizo en clase.

4a) ***Hiperboloide de dos hojas:*** $-x^2-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=1$

(Elíptico)

4b) ***Paraboloide Elíptico:*** $\dfrac{(x-3)^2}{2}+z^2=\dfrac{y-1}{2}$

4c) ***Hiperboloide de dos hojas:*** $-\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{4}=1$

(Circular)

4d) ***Paraboloide Elíptico:*** $\dfrac{(y+1)^2}{2/5}+\dfrac{(z-2)^2}{2/3}=x-2$

4e) ***Paraboloide Elíptico:*** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=y$

4f) ***Hiperboloide de dos hojas circular:***

$$\frac{(x+5)^2}{4}-(y-2)^2-(z+1)^2=1$$

4g) ***Paraboloide Circular:*** $-\dfrac{(x-1)^2}{4/9}-\dfrac{(z+4)^2}{4/9}=y-4$

4h) ***Hiperboloide de dos hojas:*** $-(x+1)^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{(z+4)^2}{4}=1$

(Elíptico)

5.- ***Un hiperboloide de una hoja con centro en*** $\left(2,\frac{1}{3},-1\right)$ ***y ecuación canónica:***

$$\frac{(z+1)^2}{40/9}+\frac{(y-1/3)^2}{40/9}-\frac{(x-2)^2}{40/3}=1.$$

Obs: Recuerde buscar los valores de "a,b,c", dibujar y colocar los vértices.

6.- ***Paraboloide circular:*** $-4x=y^2+z^2$

7.- $y^2+16z^2+8yz-64x+32y=0$

8.- $256z^2-256zx+64x^2-400y^2-400yx-100x^2-6400=0$

9.- $6z^2+6x^2+12zx-3y-5x=0$

10.- $16x^2+32x-25y^2+50zy-25z^2=384$

Respuestas del Capítulo 5

2.- ***a.-*** $\left(3,\frac{5\pi}{4}\right)$ ***b.-*** $\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$

c.- $\left(-6,\frac{5\pi}{3}\right)$ ***d.-*** $(1,2\pi)$

3.- ***a.-*** $\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2},\frac{-3}{2}\right)$ ***b.-*** $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

c.- $\left(-\sqrt{3},1\right)$ d.- $\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

4.- a.- $\left(\sqrt{6},\pi-arctg(\sqrt{2})\right)$ b.- $\left(4,\frac{\pi}{6}\right)$

c.- $\left(3,\frac{5\pi}{4}\right)$ d.- $\left(3\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$

e.- $\left(3,\frac{5\pi}{6}\right)$

5.- a.- ***Circunferencia de radio 9.*** b.- ***recta x=o para y<0***

c.- ***la recta*** $y=\sqrt{3}x$ d.- ***la recta*** $y=-1$

e.- ***la recta*** $y=2$ f.- ***la recta*** $2x+y=-4$

6.- $\frac{\pi}{2}$

7.- b.- $(2,0)$ $(2,\pi)$ c.- $8-\pi$

9.- $e^{\pi}-1$

10.- ***m=1 y L=8.***

11.- $-16\ln(2+\sqrt{3})+\frac{32\pi}{3}$

12.- $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

13.- a.- ***El área dentro del círculo R=1 y fuera de la cardioide.***

b.- $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(1,\frac{-\pi}{2}\right)$

14 . b.- $\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right)$ $\left(\frac{3}{2},\frac{5\pi}{3}\right)$

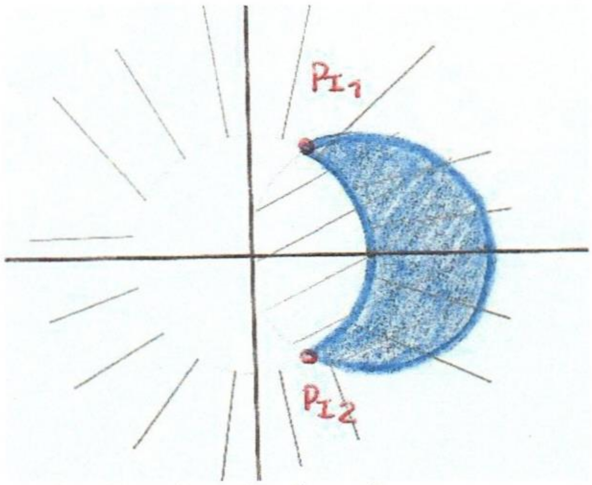
c.- π

15.- *a.-* $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

b. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$

16.- π

17.- *a.-*



b. $\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$ $\left(1,\frac{5\pi}{3}\right)=\left(1,\frac{-\pi}{3}\right)$

c.- $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

18.- *b.-* $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$

c.- $\frac{4}{3}$

Respuestas del Capítulo 6

1.- *a.-* $[-4,\infty)-\{2\}$

b.- $\Re-\{0,5\}$

c.- $(0,\infty)-\{6\}$

d.- $\Re$

2.- ***a.-*** $\left(\frac{1}{4},5,2\right)$

b.- $\left(4,\frac{-1}{2},9\right)$

3.- *a.-* $\overrightarrow{V(1)}=(0,6,6)$ $\quad$ *Rapidez* $=6\sqrt{2}$ $\quad$ $\overrightarrow{a(1)}=(-6,6,6)$

b.- $y+z=7$

4.- *tang "16" y la normal* "$2\sqrt{73}$".

5.- *El plano oscilador es* $6x-8y-z=-3$. $\quad$ $\vec{N}=\frac{1}{\sqrt{2121}}(31,26,-22)$;

$\vec{B}=\frac{1}{\sqrt{101}}(-6,8,1)$

6.- $(0,0,0)$ $\quad$ $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$ *y* $\left(4,-\frac{8}{3},2\right)$

7.- *a.-* $\left(0,-1,\frac{3\pi}{2}\right)$.

b.- $\overrightarrow{F(t)}=\left(t,-1,\frac{3\pi}{2}+t\right)$.

c.- $\frac{1}{2}$.

8.- $\overrightarrow{a(t)}=\vec{N}$.

10.- $\frac{1}{6}$.

12.- $\overrightarrow{R(-1)}=(-1,-3,1)$

13.- *a.-* $1+\ln 2$

b.- $\left(1,0,2\sqrt{2}\right)$

c.- $x-1=y=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

14.- $k(t)=\tau(t)=\dfrac{2}{(2t^2+1)^2}$.

15.- $(x,y,z)=(1,0,1)+k(1,1,1)$

16.- $\overrightarrow{R(2k\pi)}=(2k\pi,0,0)$ *con k entero.*

17.- *a.-* $\overrightarrow{R(t)}=(t,\pm\sqrt{2-t^2},4-t)$

b.- *Tomo la rama positiva de la parametrización* $E.P.R_T:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=3-t\end{cases}$

c. - $k(1)=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$.

18.- *a.-* $(6,0,8)$

b.- $8\sqrt{9\pi^2+1}$

c.- $\dfrac{3\pi^2}{2(9\pi^2+1)}$

19.- *a.-* $\dfrac{22}{3}$ $PI(0,0,0)$ $PF\left(2,4,\dfrac{16}{3}\right)$

b.- $\dfrac{2}{9}$

20.- ***a.-*** $(0,0,0)$ *y* $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

b.- $\overrightarrow{B(-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,-1)$.

21.- ***a.-*** $(1,0)$ *y* $\left(0,e^{\pi/2}\right)$

b.- $\sqrt{2}.(e^{\pi/2}-1)$

c.- $k(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}$

22.- $t_1=\dfrac{4+\sqrt{34}}{3}$ *y* $t_2=\dfrac{4-\sqrt{34}}{3}$

23.- $\dfrac{\pi}{2}$

24.- *No hay valor posible.*

25.- *b.-* $x-2y+z=1$

Respuestas del Capítulo 7

1.- ***a.-*** $\{(x,y)/\, y^2-x>0\}$

b.- $\{(x,y)/\, x+y+1\geq 0 \wedge x\neq 1\}$

c.- $\{(x,y)/\, xy>0\}$

d.- $\{(x,y)/\, x^2-y^2+4\geq 0 \wedge (x,y)\neq(0,0)\}$

e.- $\{(x,y)/(x-2)^2+y^2\leq 4 \wedge x-|y|>0 \wedge x^2+y^2>0 \wedge x^2+y^2\neq 1\}$

f.- $\{(x,y)/\, x^2-y^2>4 \wedge y<2\}$

g.- $\{(x,y)/\, x<2\}$

h.- $\left\{(x,y)/\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{3/2}<1\right\}$

i.- $\{(x,y)/\, x^2-y^2>1 \wedge x\neq 1\}$

2.- ***Familia de paraboloides circulares cóncavos hacia arriba con vértice*** $V(0,1,k)$

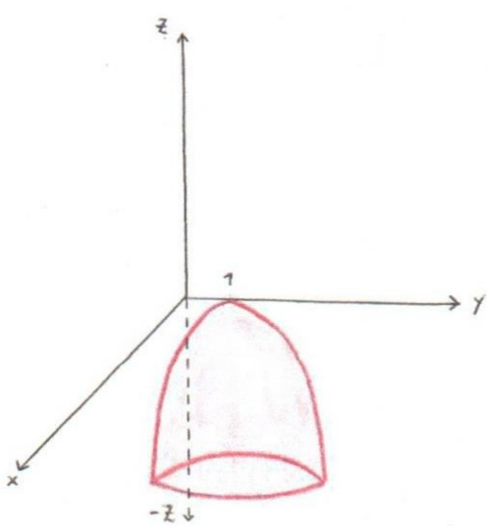
3.- ***Familia de circunferencias centradas en el origen y radio*** $\sqrt{\frac{64}{c^2}-16}$ donde $c \in [-2,2]-\{0\}$.

4.- ***a.- Si K>0 es una familia de hiperboloides de una hoja centrados en*** $C(2,2,1)$ ***donde*** $a=c=4\sqrt{k} \quad b=2\sqrt{2k}$.

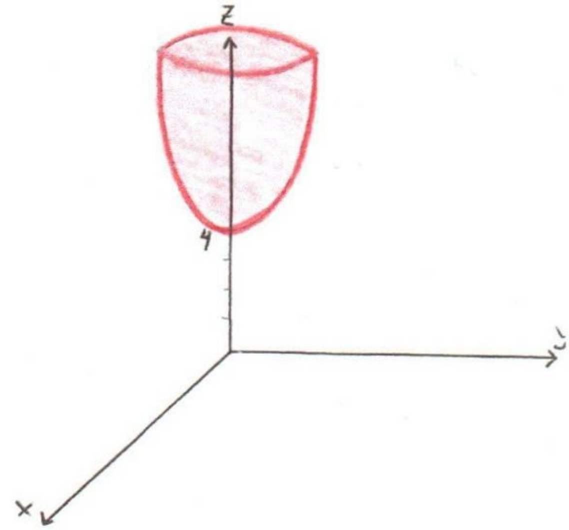
Si K<0 es una familia de hiperboloides de dos hojas centrados en $C(2,2,1)$ ***donde*** $a=c=4\sqrt{k} \quad b=2\sqrt{2k}$

b.- $DomP(x,y)=\{(x,y)/xy>1;x>4\}$

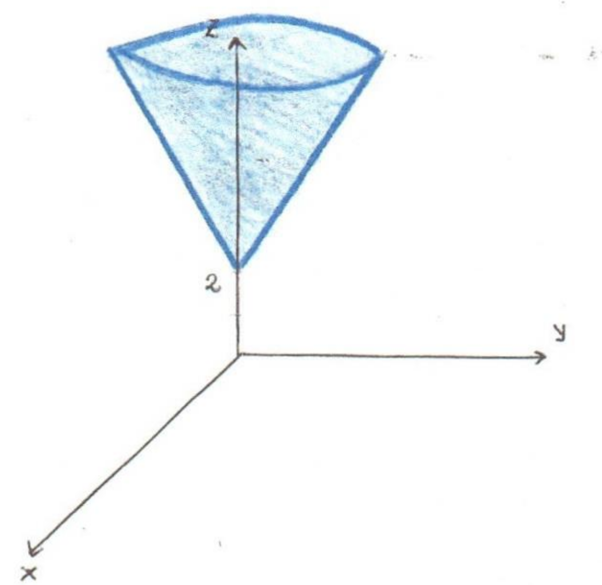
5.- ***a.- Paraboloide cóncavo hacia abajo corrido una unida a la derecha del eje y.***



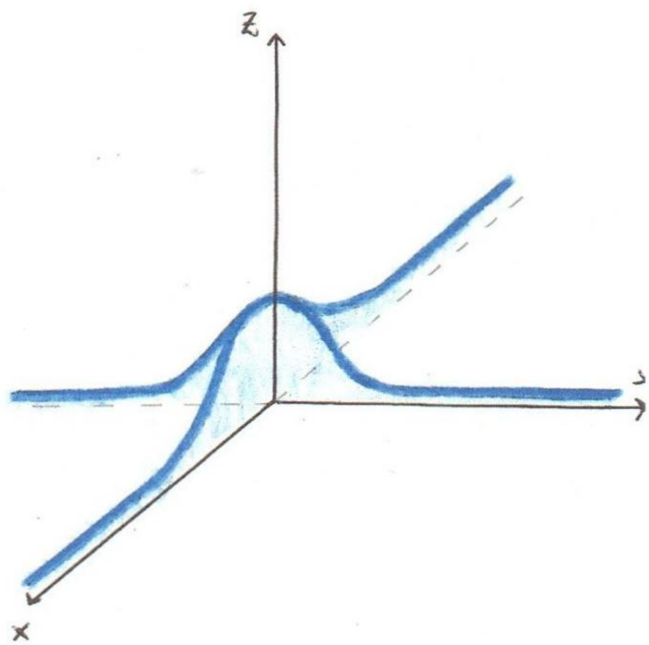
b.- Paraboloide cóncavo hacia arriba centrado en el origen corrido 4 espacios hacia arriba.



c.- Rama positiva de un cono centrado en el origen subido 2 espacios hacia arriba.



d.-



Respuestas del Capítulo 8

1.-

a.- 0

b.- 0

c.- $no \quad \exists$

d.- 0

e.- 1

f.- $no \quad \exists$

g.- $no \quad \exists$

h.- 0

2.-

a.- ***no es contínua en*** $(0,0)$

b.- ***si es contínua en*** $(0,0)$

3.- *a.-* $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=x^3$

b.- $\frac{\partial f}{\partial x}=3y\cos x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=3senx$

4.- *a.-* $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{3x^2+2x^4+2xy^4}{x^3+y^4} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{4y^3}{x^3+y^4}$

b.- $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y(y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x(y^2-x^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

c.- $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{1+(xy)^2}+4^x\ln 4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{1+(xy)^2}-7^x\ln 7$

d.- $\frac{\partial f}{\partial x}=9^{x^2+\ln y}\cdot\ln 9(2x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\ln 9\cdot 9^{x^2+\ln y}}{y}$

e.- $\frac{\partial f}{\partial x}=-e^{senx} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=e^{sen(y^3)}\cdot 3y^2$

7.- *a.-* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{-xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

b.- $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=x^{y-1}(1+y\ln x)$

c.- $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=(1+2x^2)(1+2y^2)e^{x^2+y^2}$

9.- *a.-* $\frac{23\sqrt{5}}{5}$ *b.-* $\frac{1}{20}$

c.- $\frac{11}{3}$

10.- *a.-* $\sqrt{65}$ *b.-* $(1,-8)$

11.- *a.-* 17 *b.-* $(-30,0,9)$

c.- $3\sqrt{109}$

12.- $\dfrac{5\sqrt{41}}{4}$

13.- *a.-* 1,08 *b.-* 60,44

c.- 8,22 *d.-* $\sqrt{17}+\dfrac{3}{100\sqrt{17}}\approx 4{,}13$

14.- $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{(2-y)x^{y-3}z}{x^{y-2}+3z^2-\dfrac{1}{z}}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-x^{y-2}\ln xz}{x^{y-2}+3z^2-\dfrac{1}{z}}$

15.- $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz\cos(xyz)-2yze^{x+y}-zy^2e^{x+y}}{y^2e^{x+y}-yx\cos(xyz)}$

16.- $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-y^x\ln y-2xz+yx^{y-1}\ln z}{x^2-\dfrac{x^y}{z}}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^y\ln x\ln z-xy^{x-1}}{x^2-\dfrac{x^y}{z}}$

17.- $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x-y-z}{x+z}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y-x}{x+z}$

20.- $\dfrac{\cos(1)\cos(\ln\sqrt{2})}{2}$

27.- $\begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

28.- $x-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=y-\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}=z-\dfrac{9\sqrt{2}}{2\sqrt{7}}$

29.- $18x+12y+36z=-1$

30.- $x-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{y+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{z-\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}}{3}$

32.- $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

33.- $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *y* $(0,1,0)$.

34.- *a.-* $\frac{48}{\sqrt{3}}$

b.- $-8\sqrt{5}$

c.- $2x+y-2z=4$

35.- $\frac{8}{\sqrt{5}}$

Respuestas del Capítulo 9

1.- *a.-* *Todos los puntos de la forma* (a,a) *son mínimo local.*

b.- $(0,0)$ *punto silla.*

c.- $(0,0)$ *punto silla.*

d.- $(4,0)$ *punto silla,* $\left(4,\frac{8}{3}\right)$ *mínimo local.* $\left(-\frac{4}{3},0\right)$ *máximo local y* $\left(-\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$ *punto silla.*

e.- $(0,0)$ *mínimo local.*

f.- $(0,0)$ $\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9}\right)$ $\left(-\frac{2}{3},0\right)$ *son puntos sillas.*

g.- $(0,0)$ *punto silla y* $(1,1)$ *mínimo.*

2.- *a.-* *En* $(2,2)$ *se alcanza el valor máximo que es 24. Y en* $(0,0)$ *el mínimo absoluto que es 0.*

d.- *En* $(0,0)$ *se alcanza el valor máximo absoluto que es* 1. *Y en* $(1,2)$ *se alcanza el valor mínimo absoluto que es* -5.

5.- *Máximo valor "30" en el punto* $(1-2,5)$ *y el mínimo valor es "-30" alcanzado en el punto* $(-1,2,-5)$.

6.- $(2,2)$. *Nótese que en la respuesta solo habrá un punto. ¿Cómo sabrá usted si es máximo o mínimo? Debe recurrir al criterio de la segunda derivada para clasificarlo.*

7.- $x = y = \frac{1}{2}$. *Como es el único resultado no olvide comprobar por medio del criterio de la segunda derivada que es un mínimo.*

8.- $(3,3,3)$.

9.- *El más cercano es* $\left(9,\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)$ *y el más alejado es* $\left(-9,-\frac{1}{8},-\frac{3}{8}\right)$.

10.- *La hipotenusa tendrá su valor mínimo cuando los catetos sean* ***iguales*** *a* $\sqrt{2A}$. *(Por ende es un triángulo iso-rectángulo).*

11.- *a.-* *Alcanza su máximo global en .* $x = y = \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$ *donde su valor es* "$\frac{2}{5}\left(5+\sqrt{15}\right)^2$" *y su mínimo global será en* $(0,0)$ *tomando el valor de "0".*

b.- *En* $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$ *se alcanza el valor mínimo absoluto que es* $-\frac{1}{3}$. *En* $(0,1)$ *se alcanza el valor máximo absoluto que es* 5.

12.- $\left(\frac{1}{2},1,\frac{45}{4}\right)$

13.- *El punto* $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ *es el más frío y los puntos* $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *y* $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *son los más calientes.*

14.- *Están más cerca del eje z los puntos* $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ *y* $\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$

15.- *Los puntos más cercanos son* $\left(2,1,\sqrt{5}\right)$ *y* $\left(2,1,-\sqrt{5}\right)$.

16.- *En el punto* $(-1,01,)$ *se alcanza el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función se alcanza en los puntos* $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ *y* $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

17.- *Lo más cercanos son* $(0,1,0);(1,0,0)$ *y el más lejano es* $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2}\right)$.

Bibliografía

1.- Guerreiro, Carlos, (2.004). ***Cálculo III.*** Facultad de Ingeniería. UCV.

2.- Jerrold E., Marsden y Tromba, Anthony. 3ª Edición (1.991). ***Cálculo Vectorial.*** Wilmington, Delaware, E.U.A. Addison-Wesley Ibeoamericana, S.A.

3.- Leithold, Louis, 7ma Edición (1.998). ***El Cálculo***. Oxdord University Press.

4.- Morales Bueno, Rafael. ***Problemario de MA-2112 (Matemáticas 5)***. Venezuela. Departamento de Matemáticas, USB.

5.- Pereira, Luz Marina, (2.005). ***Problemario de Cálculo de Varias Variables***. Caracas Venezuela.

6.- Purcell, Edwin; Varger, Dale y Rigdon, Esteven, 9na Edición (2.007). ***Cálculo***. Pearson Prentice Hall.

7.- Quintero, José Luis (2.011), ***Cálculo III***. Facultad de Ingeniería. UCV.

8.- Stewart, James, 6° Edición (2.008). ***Cálculo de Varias variables***. México, D.F: Cengage Learning.

9.- Thomas, G. y Finney, R. (1.999). ***Cálculo Varias Variables***. México, D.F: Addison-Wesley Ibeoamericana, S.A.

10.- Velasco, Gabriel, López Irma y Wisniewski Piotr. (2.003). ***Problemario de Cálculo Multivariable.*** México. Thomson Editores.

Formulario de Varias Variables

Vectores…

1.- **Definiciones**:

a.- La norma de un vector $\left\|\vec{x}\right\| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2}}$

b.- Combinación lineal de Vectores: El vector $\vec{x}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{y}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_n$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ / $\vec{x} = \alpha_1 \vec{y}_1 + \alpha_2 \vec{y}_2 + ... + \alpha_n \vec{y}_n$

c.- Un vector $\vec{x}$ es unitario si su norma es uno.

d.-¿Cómo hacer un vector $\vec{x}$ "unitario"? $\vec{x}_u = \vec{x}/\left\|\vec{x}\right\|$.

e.- $\vec{x} // \vec{y} \Leftrightarrow \exists \alpha \in \Re / \vec{x} = \alpha \vec{y}$

f.- $\left\|\alpha \vec{x}\right\| = |\alpha| \left\|\vec{x}\right\|$

2.- Producto Escalar:

$(en \Re^2)$ $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1.y_1 + x_2.y_2$

$(en \Re^3)$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3$

3.- Algunas Propiedades:

$\vec{x} \cdot \vec{x} = \left\|\vec{x}\right\|^2$

$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$

$\vec{x} \cdot \vec{0} = 0$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

4.- Si θ es el ángulo entre los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ entonces:

$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left\|\vec{x}\right\| \cdot \left\|\vec{y}\right\| . \cos\theta$

5.- $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

6.- Si $\theta \in [0, \pi]$ es el ángulo entre los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ entonces:

$\left\|\vec{x} \times \vec{y}\right\| = \left\|\vec{x}\right\| \cdot \left\|\vec{y}\right\| . sen\theta$

7.- $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{x}$ y $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{y}$

8.- $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} // \vec{y}$

9.- El área de un paralelogramo cuyos lados adyacentes son $\vec{x}, \vec{y}$ es: $\left\|\vec{x} \times \vec{y}\right\|$

10.-El área de un triángulo cuyos lados adyacentes son $\vec{x}, \vec{y}$ es: $\frac{1}{2}\left\|\vec{x} \times \vec{y}\right\|$.

11.- Algunas propiedades del producto cruz:

$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

$(\overrightarrow{\alpha x}) \times \vec{y} = \alpha(\vec{x} \times \vec{y}) = \vec{x} \times (\overrightarrow{\alpha y})$

$\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$

$(\vec{x} \times \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$

Producto mixto

$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$

Triple producto vectorial

$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$

12.- El volumen de un paralelepípedo cuyos lados adyacentes son $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ es: $\left|\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})\right|$

Obs: Tres vectores son coplanares (están en un mismo plano) si su producto mixto es "0").

Rectas y Planos…

13.- Dos rectas son oblicuas si no son paralelas y no se intersectan.

14.- Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos.

15.-Dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son perpendiculares.

16.- El ángulo entre dos planos no paralelos es el ángulo agudo entre sus vectores normales.

17.- El ángulo entre dos rectas es el ángulo entre sus vectores directores.

18.- El vector director de la recta intersección entre dos planos es el producto cruz entre sus vectores normales.

19.-Distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\pi : ax + by + cy = d$ es:

$$d_{P,\pi} = \frac{|a.x_0 + b.y_0 + c.z_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

20.- La distancia entre dos planos paralelos: $\pi_1 : ax + by + cy = d_1$ y $\pi_2 : ax + by + cy = d_2$ es:

$$d_{\pi_1, \pi_2} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

21.- Distancia de un punto P a una recta L es:

$$d_{P,L} = \frac{\left\|\overrightarrow{V_D} \times \overrightarrow{QP}\right\|}{\left\|\overrightarrow{V_D}\right\|}$$

OBS: $\overrightarrow{V_D}$ = vector director de la recta L. Y Q es un punto cualquiera de la recta L.

22.- La distancia de dos rectas oblicuas $L_1 y L_2$ es: Sea P un punto de L_1 y Q un punto de L_2 entonces:

$$d_{L_1, L_2} = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{VD_{RPC}}\right|}{\left\|\overrightarrow{VD_{RPC}}\right\|}$$

Donde $\overrightarrow{VD_{RPC}}$ es el vector director de la recta perpendicular común.

Esfera …

23.- Ecuación canónica de una esfera:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$ donde el centro de dicha esfera es: (x_o, y_o, z_o) y el radio es "a".

Haz de planos

24.- Sean los planos $\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 y + d_1 = 0$ y $\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 y + d_2 = 0$ definimos un haz de planos como: $\pi_1 + \alpha.\pi_2 = 0$. Esto es la familia de planos que pasa por recta intersección de los planos: $\pi_1 y \pi_2$.

Proyecciones…

25.- La proyección vectorial del vector $\vec{x}$ sobre $\vec{y}$ es: $\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\left\|\vec{y}\right\|^2}\right)\vec{y}$.

26.- La proyección escalar del $\vec{x}$ sobre $\vec{y}$ es: $\frac{\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right|}{\left\|\vec{y}\right\|}$.

Cuádricas…

27.- Ecuaciones canónicas de las Cuádricas:

ELIPSOIDE:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA con centro genérico, que gira alrededor de un eje paralelo al eje z.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS con centro genérico, que gira alrededor de un eje paralelo al eje z.

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

CONO con centro genérico, que gira alrededor de un eje paralelo al eje z.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$

PARABOLOIDE con centro genérico, que gira alrededor de un eje paralelo al eje z.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\frac{z-z_0}{c}$$

Si $c>0$ el paraboloide es cóncavo hacia arriba.

Si $c<0$ el paraboloide es cóncavo hacia abajo.

Polares…

28.- Cambio de polares a cartesianas:

$x=R\cos\theta; y=R sen\theta$.

29.- De cartesianas a polares:

$$R=\sqrt{x^2+y^2};\overline{\theta}=arctg\left|\frac{y}{x}\right|$$

Donde $\overline{\theta}\in IC$. De donde deducimos:

$\theta\in IC\Rightarrow\theta=\overline{\theta}$

$\theta\in IIC\Rightarrow\theta=\pi-\overline{\theta}$

$\theta\in IIIC\Rightarrow\theta=\pi+\overline{\theta}$

$\theta\in IVC\Rightarrow\theta=2\pi-\overline{\theta}$

30.- Si $R=f(\theta)$, f es contínua, $f\geq 0$ con $\theta\in[\alpha,\beta]$. El área de la región $R=f(\theta)$ con las semirrectas $\theta=\alpha;\theta=\beta$ es:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\int_\alpha^\beta f^2(\theta).d\theta$$

31.- La pendiente de una curva $R=f(\theta)$ es:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(R,\theta)}=\frac{f'(\theta).sen\theta+f(\theta).\cos\theta}{f'(\theta).\cos\theta-f(\theta).sen\theta}$$

32.- Longitud de una curva polar:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{R^2+\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Funciones vectoriales:

33.- Si $\overrightarrow{R(t)}=[R_1(t),R_2(t),R_3(t)]$ entonces:

$$lim_{t\to a}\overrightarrow{R(t)}=[lim_{t\to a}R_1(t),lim_{t\to a}R_2(t),lim_{t\to a}R_3(t)]$$

$$\overrightarrow{R'(t)}=\left[R_1'(t),R_2'(t),R_3'(t)\right]$$

34.- Vector tangente unitario:

$$\overrightarrow{T(t)}=\frac{\overrightarrow{R'(t)}}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|}$$

35.-Integral definida:

$$\int_a^b\overrightarrow{R(t)}dt=\left[\int_a^b R_1(t)dt,\int_a^b R_2(t)dt,\int_a^b R_3(t)dt\right]$$

36. Longitud de arco:

$$L=\int_a^b\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|dt$$

37.- Diferencial de longitud de arco:

$$\frac{dS}{dt}=\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|$$

38.- Curvatura:

$$\Re^2 o\Re^3:\ K(t)=\frac{\left\|\overrightarrow{T'(t)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|}$$

$$\text{Sólo }\Re^3:\ K(t)=\frac{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\times\overrightarrow{R''(t)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|^3}$$

Y la Torsión:

$$\tau(t)=\frac{\left(\overrightarrow{R'(t)}\cdot\left(\overrightarrow{R''(t)}\times\overrightarrow{R'''(t)}\right)\right)}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\times\overrightarrow{R''(t)}\right\|^2}$$

39.- Normal unitario:

$$\overrightarrow{N(t)}=\frac{\overrightarrow{T'(t)}}{\left\|\overrightarrow{T'(t)}\right\|}$$

Binormal unitario:

$$\overrightarrow{B(t)}=\overrightarrow{T(t)}\times\overrightarrow{N(t)}$$

40.- El **plano normal** es aquel que tiene como vector normal el tangente unitario o $\overrightarrow{R'(t)}$.

41.- El **plano oscilante** es aquel que tiene como vector normal el binormal unitario o $\overrightarrow{R'(t)}\times\overrightarrow{R''(t)}$.

42.- El **plano rectificante** es aquel que tiene como vector normal el normal unitario o $(\overrightarrow{R'(t)}\times\overrightarrow{R''(t)})\times\overrightarrow{R'(t)}$.

43.-El **círculo osculante** de una curva $\overrightarrow{R(t)}$ en el punto P es:

$$\begin{cases} plano \quad osculante \\ \cap \\ esfera \quad osculadora \end{cases}$$

El radio de la esfera osculadora: $\rho(t)=\frac{1}{K(t)}$ y el centro es: $\overrightarrow{R(t)}+\rho(t).\overrightarrow{N(t)}$.

44.- Componente tangencial de la aceleración: $a_T(t)=\frac{\overrightarrow{R'(t)}\cdot\overrightarrow{R''(t)}}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|}$

Componente normal de la aceleración:

$$a_N(t)=\frac{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\times\overrightarrow{R''(t)}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|}$$

El vector aceleración puede escribirse en función de las componentes anteriores de la siguiente forma:

$\overrightarrow{a(t)} = a_T.\overrightarrow{T} + a_N.\overrightarrow{N}$

45.- Movimiento en el espacio:

Si $\overrightarrow{R(t)}$ representa el vector posición entonces ocurre:

$\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{R'(t)}$ (velocidad)

Rapidez = $\left\|\overrightarrow{R'(t)}\right\|$

$\overrightarrow{a(t)} = \overrightarrow{V'(t)} = \overrightarrow{R''(t)}$ (aceleración)

Ahora si tenemos la aceleración entonces ocurre:

$$\overrightarrow{V(t)} = \overrightarrow{V(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{a(u)}du$$

$$\overrightarrow{R(t)} = \overrightarrow{R(t_0)} + \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{V(u)}du$$

46.- **Fórmulas de Frenet:**

$$\frac{dT}{ds} = k.\overrightarrow{N}$$

$$\frac{dN}{ds} = -k.\overrightarrow{T} + \tau.\overrightarrow{B}$$

$$\frac{dB}{ds} = -\tau.\overrightarrow{N}$$

Funciones de Varias Variables…

47.- La ecuación del plano tangente a la superficie $f(x,y,z) = k$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es:

$\overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$

48.- La ecuación simétrica de la recta normal a la superficie $f(x,y,z) = k$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es:

$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ donde el vector director de la recta normal es: $\overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0,z_0)$.

49.- Aproximaciones:

$f(a^*, b^*) \approx f(a,b) + dz$

$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).\Delta y$

$\Delta x = a^* - a$

$\Delta y = b^* - b$

50.- $D_{\vec{w}} f(x_o) = \overrightarrow{\nabla f}(x_0)\cdot\overrightarrow{w_u}$

(derivada direccional)

51.- La tasa máxima de crecimiento de una función f en un punto x_0 es: $\left\|\overrightarrow{\nabla f(x_0)}\right\|$ y su dirección es $\overrightarrow{\nabla f}(x_0)$.

La tasa mínima de crecimiento de una función f en un punto x_0 es: $-\left\|\overrightarrow{\nabla f(x_0)}\right\|$ y su dirección es $-\overrightarrow{\nabla f}(x_0)$.

52.- **Criterio de la Segunda Derivada para clasificar máximos y mínimos:** Sea $f:\Re^2 \to \Re$, (x_o, y_o) un punto crítico de la función y $f \in C^2$ es decir las mixtas son iguales. Definamos la matriz Hessiana como: $H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$.

Definimos el

$\Delta(x_o, y_o) = \det H(x_o, y_o)$.

a.-Si $\Delta(x_o,y_o)>0$ y $f_{xx}(x_o,y_o)>0$ entonces en (x_o, y_o) hay un mínimo relativo.

b.- Si $\Delta(x_o,y_o)>0$ y $f_{xx}(x_o,y_o)<0$ entonces en (x_o, y_o) hay un máximo relativo.

c.-Si $\Delta(x_o,y_o)<0$ entonces en (x_o, y_o) es un punto silla (punto donde hay cambio de concavidad).

d.- Si $\Delta(x_o,y_o)=0$ no hay decisión acerca del punto (x_o, y_o), y debemos usar la definición para clasificarlo.

53.- Para calcular los valores máximos y mínimos **<u>absolutos</u>** de una función continua f sobre un conjunto cerrado y acotado D se realizan los siguientes pasos:

Paso 1: Determinar los puntos críticos de f en el interior de D.

Paso 2: Calcular los extremos de f en la frontera de D.

Paso 3: Elaborar una tabla con los puntos hallados en el paso 1 y 2 con sus respectivos valores de f en dichos puntos. El valor más grande es el **valor máximo absoluto** y el más pequeño será el **valor mínimo absoluto.**

54.- **<u>Lagrange</u>**: (Método para calcular máximos y mínimos de f sobre fronteras).

<u>CON 1-RESTRICCIÓN</u>: En $\Re^n$.

Si queremos calcular valores máximos y mínimos de $f(\bar{x})$ sujeta a la restricción $g(\bar{x}) = c$ se procede así:

PASO1: Determinar todos los valores de $\bar{x}, \lambda$ tales que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f} = \lambda \overrightarrow{\nabla g} \\ g(\bar{x}) = c \end{cases}$$

PASO2: Evaluar f en todos los puntos (x, y) que surjan del PASO 1. El más grande de esos valores es el máximo valor de f y el más pequeño es el mínimo valor de f.

<u>CON 2-RESTRICCIONES</u>:

En $\Re^2$. Si queremos calcular valores máximos y mínimos de $f(\bar{x})$ sujeta a las restricciones $g(\bar{x}) = c$ y $h(\bar{x}) = k$ se procede así:

PASO1: Determinar todos los valores de $\bar{x}, \lambda_1, \lambda_2$ tales que:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla f} = \lambda_1 \overrightarrow{\nabla g} + \lambda_2 \overrightarrow{\nabla h} \\ g(\bar{x}) = c \\ h(\bar{x}) = k \end{cases}$$

PASO2: Evaluar f en todos los puntos (x, y) que surjan del PASO 1. El más grande de esos valores es el máximo valor de f y el más pequeño es el mínimo valor de f.

55.- ***Algunas integrales importantes:***

$$\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}sen(2u) + C$$

$$\int sen^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{1}{4}sen(2u) + C$$

$$\int \cos^3 u du = senu - \frac{sen^3 u}{3} + C$$

$$\int sen^3 u du = -\cos u + \frac{\cos^3 u}{3} + C$$

$$\int \cos^4 u du = \frac{3u}{8} + \frac{1}{4}sen(2u) + \frac{1}{32}sen(4u) + C$$

$$\int sen^4 u du = \frac{3u}{8} - \frac{1}{4}sen(2u) + \frac{1}{32}sen(4u) + C$$