AAS3541

TRAB
ED 2012
S3.

Universidad Católica Andrés Bello

Facultad de Humanidades y Educación

Escuela de Educación

UCAB Universidad Católica Andrés Bello
CENTRO CULTURAL PADRE CARLOS G. PLAZA S.J
BIBLIOTECA CENTRAL - SALA P. PLAZA S.J
PLANTA BAJA - REFERENCIA

Trabajo de Ascenso:
DISCRETIZACIONES DE PRIMER ORDEN PARA EL MODELO DE DARCY-FORCHHEIMER

por:

M.Sc. José Javier Salas González

Caracas, Enero de 2012

Resumen En este trabajo se hace un estudio a dos espacios de elementos finitos $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$ para la solución del modelo de Darcy - Forchheimer. En 2007 Girault y Wheeler en su articulo *Numerical Discretization of a Darcy-Forchheimer model* presentan un estudio teórico del espacio de elementos finitos $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para resolver el problema planteado por el modelo de Darcy - Forchheimer. Este trabajo motivó un estudio numérico realizado a los espacios de elementos finitos $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$ que permitió verificar los resultados teóricos mostrados por Girault y Wheeler para el espacio $X_h^0 \times M_h^{1,m}$: además de presentar características numéricas análogas para el espacio $X_h^0 \times M_h^1$. Seguidamente se realizó el estudio teórico para el espacio $X_h^0 \times M_h^1$ que junto a la experimentación numérica describen las características de esta discretización. El análisis numérico y teórico del espacio de elementos finitos $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ sumado a la implementación de estrategias de resolución de sistema de ecuaciones no lineales tipo Peaceman Rachford y el Método de Newton son el objeto de esta investigación.

Palabras claves: Darcy - Forchheimer, elementos finitos, sistemas de ecuaciones no lineales, método de Newton, método de Peaceman Rachford.

Índice

- Agradecimientos, 05
- Índice de tablas, 06
- Índice de figuras, 09
- Introducción, 11
- Capítulo 1: Descripción del problema, 13
    1. Contexto, 13
    2. Ley de Darcy, 14
    3. Darcy - Forchheimer, 15
        (a) Solución Débil, 17
        (b) Formulación Variacional, 18
- Capítulo 2: Discretización del problema vía Elementos Finitos, 23
    1. Discretizaciones, 24
        (a) Velocidades con elementos discontinuos constantes y presiones con elementos discontinuos $\mathbb{P}_1$ Crouzeix - Raviart $\left(X_h^0 \times M_h^{1,m}\right)$, 25
            i. Orden de la discretización $\left(X_h^0 \times M_h^{1,m}\right)$, 27
        (b) Velocidades con elementos discontinuos constantes y presiones con elementos continuos $\mathbb{P}_1$ $\left(X_h^0 \times M_h^1\right)$, 28
            i. Orden de la discretización $\left(X_h^0 \times M_h^1\right)$, 30
- Capítulo 3: Esquemas de resolución, 44
    1. Método de Peaceman Rachford, 45

2. Método de Newton Standard (SN), 48

3. Método de Newton Modificado (MN), 51

- Capítulo 4: Resultados numéricos, 53

1. Problemas de prueba, 53

   (a) Problema de prueba 1 (PP1), 54

   (b) Problema de prueba 2, Roger Pierre (PP2), 56

   (c) Problema de prueba 3, Smith - Hutton (PP3), 57

2. Comportamiento del método de Peaceman Rachford, 58

   (a) Sobre la influencia de α en el método de Peaceman-Rachford, 60

   (b) Autovalores, 72

3. Comportamiento del método de Newton, 84

   (a) Autovalores, 93

   (b) Números de condición, 96

4. Comparación Peaceman Rachford - Newton, 99

   (a) Orden numérico de las discretizaciones, 99

   (b) Tiempo de ejecución y costo computacional, 102

5. Sistemas de ecuaciones lineales, 106

   (a) Paso lineal de Darcy, 106

   (b) Aspectos técnicos, 108

- Capítulo 5: Conclusiones y próximos trabajos, 109

- Bibliografía, 112

Agradecimientos *A Dios por rodearme de tantas personas importantes y determinantes en mi vida: mis padres, mi hermana, mi familia de Utopía, mis panas de la central, mis compañeras de camino, mis referentes ucabistas Yolanda y Muñiz, mis profesoras de siempre Hilda, Zenaida y Brígida. Gracias por la paciencia y el cariño que llenan de tinta y vida cada palabra de este trabajo.*

Lista de Tablas

- Tabla 2.1: Tamaño de la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$, 28
- Tabla 2.2: Tamaño de la discretización $X_h^0 \times M_h^1$, 43
- Tabla 4.1: Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP1, $X_h^0 \times M_h^{1,m}$, 63
- Tabla 4.2: Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP1, $X_h^0 \times M_h^1$, 64
- Tabla 4.3: Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP2, $X_h^0 \times M_h^{1,m}$, 67
- Tabla 4.4: Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP2, $X_h^0 \times M_h^1$, 68
- Tabla 4.5: Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP3, $X_h^0 \times M_h^{1,m}$, 71
- Tabla 4.6: Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP3, $X_h^0 \times M_h^1$, 72
- Tabla 4.7: Comportamiento de PR para diferentes β, PP1 con $h = \frac{1}{10}$, $h = \frac{1}{20}$ y $\alpha = 0.1$, 75
- Tabla 4.8: Comportamiento de PR para diferentes β, PP1 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$ y $\alpha = 0.1$, 76
- Tabla 4.9: Comportamiento de PR para diferentes β, PP2 con $h = \frac{1}{10}$, $h = \frac{1}{20}$ y $\alpha = 0.1$, 77
- Tabla 4.10: Comportamiento de PR para diferentes β, PP2 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$ y $\alpha = 0.1$, 78

- Tabla 4.11: Comportamiento de PR para diferentes β, PP3 con $h = \frac{1}{10}$, $h = \frac{1}{20}$ y $\alpha = 0.1$, 79
- Tabla 4.12: Comportamiento de PR para diferentes β, PP3 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$ y $\alpha = 0.1$, 80
- Tabla 4.13: Comportamiento de PR para diferentes β, PP1 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$ y $\alpha = 0.1$ y $tol = 1.95h$, 81
- Tabla 4.14: Comportamiento de PR para diferentes β, PP2 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$ y $\alpha = 0.1$ y $tol = 1.95h$, 82
- Tabla 4.15: Comportamiento de PR para diferentes β, PP3 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$ y $\alpha = 0.1$ y $tol = 1.95h$, 83
- Tabla 4.16: Comportamiento de Newton para diferentes β, PP1 con $h = \frac{1}{10}$, $h = \frac{1}{20}$, 84
- Tabla 4.17: Comportamiento de Newton para diferentes β, PP1 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$, 85
- Tabla 4.18: Comportamiento de Newton para diferentes β, PP2 con $h = \frac{1}{10}$, $h = \frac{1}{20}$, 86
- Tabla 4.19: Comportamiento de Newton para diferentes β, PP2 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$, 87
- Tabla 4.20: Comportamiento de Newton para diferentes β, PP3 con $h = \frac{1}{10}$, $h = \frac{1}{20}$, 88
- Tabla 4.21: Comportamiento de Newton para diferentes β, PP3 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$, 89
- Tabla 4.22: Comportamiento de Newton para diferentes β, PP1 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$ y $tol = 1.95h$, 90

- Tabla 4.23: Comportamiento de Newton para diferentes β, PP2 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$ y $tol = 1.95h$, 91
- Tabla 4.24: Comportamiento de Newton para diferentes β, PP3 con $h = \frac{1}{40}$, $h = \frac{1}{80}$ y $tol = 1.95h$, 92
- Tabla 4.25: Números de Condición para PR con $X_h^0 \times M_h^{1,m}$, 99
- Tabla 4.26: Números de Condición para PR con $X_h^0 \times M_h^1$, 99
- Tabla 4.27: Orden numérico con PP1, 100
- Tabla 4.28: Orden numérico con PP2, 101
- Tabla 4.29: Orden numérico con PP3, 102
- Tabla 4.30: Tiempos de ejecución Newton vs Peaceman Rachford en PP1, 103
- Tabla 4.31: Tiempos de ejecución Newton vs Peaceman Rachford en PP2, 104
- Tabla 4.32: Tiempos de ejecución Newton vs Peaceman Rachford en PP3, 105
- Tabla 4.33: Orden Numérico paso lineal de Darcy en PP1, 107
- Tabla 4.34: Orden Numérico paso lineal de Darcy en PP2, 107
- Tabla 4.35: Orden Numérico paso lineal de Darcy en PP3, 108

Índice de Figuras

- Fig. 2.1: Discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$, 27
- Fig. 2.2: Discretización $X_h^0 \times M_h^1$, 30
- Fig 4.1: Triangulación $\Im_h$, 54
- Fig 4.2: Solución PP1, 55
- Fig 4.3: Solución PP2, 57
- Fig 4.4: Solución PP3, 58
- Fig 4.5: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$ para $\alpha \geq 1$ en PP1, 61
- Fig 4.6: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para $\alpha \geq 1$ en PP1, 61
- Fig 4.7: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$ para $0 < \alpha \leq 1$ en PP1, 62
- Fig 4.8: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para $0 < \alpha \leq 1$ en PP1, 62
- Fig 4.9: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$ para $\alpha \geq 1$ en PP2, 65
- Fig 4.10: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para $\alpha \geq 1$ en PP2, 65
- Fig 4.11: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$ para $0 < \alpha \leq 1$ en PP2, 66
- Fig 4.12: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para $0 < \alpha \leq 1$ en PP2, 66
- Fig 4.13: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$ para $\alpha \geq 1$ en PP3, 69
- Fig 4.14: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para $\alpha \geq 1$ en PP3, 69
- Fig 4.15: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$ para $0 < \alpha \leq 1$ en PP3, 70
- Fig 4.16: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para $0 < \alpha \leq 1$ en PP3, 70
- Fig 4.17: Autovalores de PR $X_h^0 \times M_h^1$ para distintos α con $h = \frac{1}{20}$, 73

- Fig 4.18: Autovalores de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para distintos α con $h = \frac{1}{20}$, 74
- Fig 4.19: Autovalores de Newton para $k = 0, 1, 2, 11$ y $X_h^0 \times M_h^{1,m}$, 93
- Fig 4.20: Comportamiento Autovalores de Newton alrededor de 0, 94
- Fig 4.21: Autovalores de Newton para $k = 0, 1, 2, 11$ y $X_h^0 \times M_h^1$, 95
- Fig 4.22: Comportamiento Autovalores de Newton alrededor de 0, 95
- Fig 4.23: Números de condición para $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ con $h = \frac{1}{5}$, 97
- Fig 4.24: Números de condición para $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ con $h = \frac{1}{10}$, 97
- Fig 4.25: Números de condición para $X_h^0 \times M_h^1$ con $h = \frac{1}{5}$, 98
- Fig 4.26: Números de condición para $X_h^0 \times M_h^1$ con $h = \frac{1}{10}$, 98

0.1 Introducción

Se considera el siguiente modelo para describir un flujo estable de Darcy-Forchheimer de una fase en un medio poroso Ω :

$$\frac{\mu}{\rho}K^{-1}\boldsymbol{u}+\frac{\beta}{\rho}\left|\boldsymbol{u}\right|\boldsymbol{u}+\nabla p=0 \text{ en } \Omega,$$

con la restricción de divergencia:

$$\mathsf{div}\ \boldsymbol{u}=b \text{ en } \Omega,$$

y la condición de frontera

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=g \text{ sobre } \partial\Omega,$$

Este problema *no lineal es de tipo monótono.* Bajo suposiciones suaves de regularidad sobre los datos b y g, muchos autores han demostrado que existe una única solución débil. La fundamentación teórica, así como la descripción del problema se presentan en el capítulo 1.

Una formulación variacional para este problema es la siguiente:

$$\forall\boldsymbol{\varphi}\in X,\ \ \frac{\mu}{\rho}\int_{\Omega}\left(K^{-1}\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x}+\frac{\beta}{\rho}\int_{\Omega}\left|\boldsymbol{u}\right|\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)d\boldsymbol{x}+\sum_{T\in\Im_h}\int_{T}\nabla p\cdot\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x}=0.$$

$$\forall q\in M,\ \ \int_{\Omega}\nabla q\cdot\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x}=-\int_{\Omega}bqd\boldsymbol{x}+\int_{\partial\Omega}gqd\sigma.$$

con $X=L^3\left(\Omega\right)^d$ y $M=W^{1,\frac{3}{2}}\left(\Omega\right)\cap L_0^2\left(\Omega\right)$.

El objetivo principal de este trabajo es aproximar la formulación variacional mediante el método de los elementos finitos, utilizando 2 pares de espacios (X_h, M_h) que aproximan a X y M respectivamente, ellos son:

- Velocidades con elementos discontinuos constantes y presiones con elementos discontinuos $\mathbb{P}_1$ Crouzeix - Raviart, $\left(X_h^0 \times M_h^{1,m}\right)$.

- Velocidades con elementos discontinuos constantes y presiones con elementos continuos $\mathbb{P}_1$ $\left(X_h^0 \times M_h^1\right)$.

El estudio teórico realizado al espacio $X_h^0 \times M_h^1$ así como las características propias de este espacio $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ se presentan en el capítulo 2 dedicado a las discretizaciones.

La resolución del problema descrito por las formulaciones variacionales asociadas al modelo de Darcy Forchheimer con cada uno de los espacios de elementos finitos se realiza aplicando los métodos Peaceman Rachford y el método de Newton presentados en el capítulo 3.

En el capítulo 4 se presentan los resultados numéricos obtenidos en la implementación de los esquemas de resolución de sistemas de ecuaciones nolineales junto a las formulaciones variacionales asociadas a los espacios de elementos finitos. Finalmente el capítulo 5 se dedica a conclusiones y próximos trabajos.

Capítulo 1

Descripción del problema

1.0.1 Contexto

El movimiento de un flujo en un medio poroso se puede describir por ciertas leyes fundamentales: conservación de la masa, ecuación de continuidad, ecuación del momento y la energía. Estas ecuaciones relacionan aspectos característicos del fenómeno físico como: acumulación, conducción, convección, presión, gravedad, densidad, viscosidad, permeabilidad, dispersión, temperatura, velocidad, entre muchos; Quintard y Whitaker en [61] profundizan al respecto presentando un análisis teórico del transporte en medios porosos.

La Ley de Darcy es la herramienta más conocida para relacionar y describir este flujo en fluidos Newtonianos para un rango limitado de caudales donde la turbulencia, los efectos inerciales y otros asociados a elevadas velocidades son despreciables, para flujos con número de Reynolds $R_e < 2100$. Correcciones como la de Brinkman (viscosidad de Brinkman) y Forchheimer surgen para abordar situaciones más generales, menos específicas.

En las siguientes secciones desarrollaremos el modelo de Darcy Forchheimer, conversaremos sobre su solución teórica, abordaremos el problema desde el punto de vista numérico estudiando las características más importantes de dos discretizaciones vía elementos finitos $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$, ahondaremos en su aplicación y desempeño

destacando cualidades como el orden de convergencia. Finalmente estudiaremos el comportamiento de diferentes métodos de resolución para los sistemas de ecuaciones lineales y nolineales asociados.

1.0.2 Ley de Darcy

Henry Darcy en 1856, preocupado por determinar las características que debía tener un filtro conveniente para una cantidad de agua suministrada diariamante, construyó una columna vertical saturada con arena y observó el comportamiento del agua al transportarse por este medio poroso, más detalles conceptuales y experimentales los podemos encontrar en [6], sus observaciones le permitieron enunciar la ley que lleva su nombre, ésta describe el flujo de un fluido en medios porosos.

Muchos investigadores han analizado y puesto a prueba esta ley, verificando su validez para la mayoría de los flujos presentes en el suelo, por ejemplo la Ley de Darcy sustenta el modelo **Black Oil,** también conocido en la simulación de yacimientos como Modelo de Petróleo Negro. En este modelo se caracteriza al yacimiento como el resultado de la interacción de 3 fases: agua w (usualmente se reconoce como la fase líquida), gas g (la fase no líquida) y petróleo o (la fase intermedia). Cada una de éstas fases se describen a través de su velocidad $\boldsymbol{u}$ y presión p durante el flujo de un fluido compuesto por ellas, así reconocemos, por ejemplo, como velocidad del agua a $\boldsymbol{u}_w$ y presión de gas a p_g.

La Ley de Darcy, desde el punto de vista físico, plantea una relación lineal entre la velocidad y el gradiente de la presión, ver [4]. Su expresión como una ecuación diferencial para el caso monofásico es:

$$\frac{\mu}{\rho}K^{-1}\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0, \tag{1.1}$$

con μ la viscosidad, ρ la densidad del fluido y K el tensor de permeabilidad acotado y uniformemente definido positivo.

Evidencias experimentales muestran que cuando la velocidad del fluido es suficientemente alta, se desarrolla una relación no lineal entre la velocidad del flujo y el gradiente

de presión, aún cuando se trate de un flujo Newtoniano a través de un medio poroso. Dupuit en 1863 [20] y Forchheimer en 1901 [24] sugirieron, en la descripción de este tipo de flujo, modificar la ecuación de Darcy (1.1) agregando un término cuadrático a la velocidad, con un coeficiente que depende de la geometría de los poros. Esta modificación, conocida como la ecuación de Forchheimer ha llevado a realizar muchas investigaciones, tanto desde el punto vista experimental [2, 3, 8, 57, 61, 63], como teórico [9, 20, 23, 25, 61] y numérico [17, 36, 37, 40].

En yacimientos petroleros y acuíferos, se observan bajas velocidades debido a la poca permeabilidad. En estos casos el término no lineal inercial se hace insignificante obteniendo a través de la ley de Darcy una aproximación aceptable para el flujo simple (monofásico). Sin embargo, hay casos donde las velocidades de los flujos son relativamente altas y los efectos inerciales no pueden ser ignorados, haciendo inadecuada la Ley de Darcy.

Rami, Fawzi y Fahmi [50] advierten que la Ley de Darcy es válida bajo condiciones de baja velocidad y poca porosidad. Sin embargo, en muchas situaciones prácticas el medio poroso está limitado por una pared impermeable, donde se presentan tasas elevadas de flujo, y además se observan distribuciones de porosidad no uniformes en las regiones cercanas a la pared, haciendo la Ley de Darcy inaplicable.

Las razones antes expuestas justifican el estudio de un flujo, considerando una relación no lineal entre la velocidad y el gradiente de presión, mediante la Ecuación de Darcy-Forchheimer.

1.0.3 Darcy - Forchheimer

En 1901, Philippe Forchheimer estudió el comportamiento del flujo del gas a través de capas de carbón; descubrió que el gas presenta una relación no lineal entre la velocidad y el gradiente de la presión cuando la velocidad es suficientemente elevada, además observó que la nolinealidad aumenta con el incremento de la velocidad. Él determino que el incremento de la nolinealidad es proporcional a u^2. Luego Cornel y Katz en [16] encontraron

la constante de proporcionalidad $\frac{\beta}{\rho}$ con β el factor inercial.

Las relaciones anteriores son consideradas por el siguiente modelo que describe el flujo estable de Darcy-Forchheimer de una fase en un medio poroso Ω :

$$\frac{\mu}{\rho}K^{-1}\boldsymbol{u}+\frac{\beta}{\rho}\left|\boldsymbol{u}\right|\boldsymbol{u}+\nabla p=0 \text{ en } \Omega, \tag{1.2}$$

con la restricción de divergencia:

$$\text{div } \boldsymbol{u}=b \text{ en } \Omega, \tag{1.3}$$

y la condición de frontera

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=g \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{1.4}$$

donde $|\cdot|$ denota la norma vectorial Euclídea: $|\boldsymbol{u}|^2=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$; μ,β y ρ son constantes positivas que representan: la viscosidad del fluido, su viscosidad dinámica y su densidad respectivamente, K el tensor permeabilidad acotado y uniformemente definido positivo, b y g funciones definidas para satisfacer la condición de compatibilidad:

$$\int_{\Omega}b\left(\boldsymbol{x}\right)d\boldsymbol{x}=\int_{\partial\Omega}g\left(\sigma\right)d\sigma. \tag{1.5}$$

Este problema *no lineal es de tipo monótono.* Bajo suposiciones suaves de regularidad sobre los datos b y g, muchos autores han demostrado que existe una única solución débil, ver por ejemplo [23, 25].

Una formulación variacional para el problema (1.2) a (1.4) es la siguiente:

$$\forall\boldsymbol{\varphi}\in X,\quad \frac{\mu}{\rho}\int_{\Omega}\left(K^{-1}\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x}+\frac{\beta}{\rho}\int_{\Omega}\left|\boldsymbol{u}\right|\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)d\boldsymbol{x}+\sum_{T\in\Im_h}\int_{T}\nabla p\cdot\boldsymbol{\varphi}d\boldsymbol{x}=0. \tag{1.6}$$

$$\forall q\in M,\quad \int_{\Omega}\nabla q\cdot\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x}=-\int_{\Omega}bqd\boldsymbol{x}+\int_{\partial\Omega}gqd\sigma. \tag{1.7}$$

con $X = L^3(\Omega)^d$ y $M = W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$.

El problema de Darcy es ampliamente abordado por muchos autores [4, 6, 30, 31, 56], en el estudio de la dinámica de fluidos en medios porosos o como ejemplo de una ecuación diferencial parcial. Sin embargo, no se cuenta con una bibliografía tan extensa para el modelo de Darcy-Forchheimer, ver por ejemplo [2, 9, 19, 23, 26, 25].

Solucion débil

Brevemente daremos algunas ideas sobre la existencia y unicidad de una solución débil para las ecuaciones (1.2) - (1.4), para mayores se puede consultar [25].

Notación Nosotros usamos la siguiente notación, por razones de simplicidad, consideramos las definiciones en tres dimensiones. Sea (k_1, k_2, k_3) una terna de enteros no negativos, tal que $|k| = k_1 + k_2 + k_3$, ahora definimos la derivada parcial ∂^k por:

$$\partial^k v = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} v$$

Entonces para cualquier entero no negativo m y cualquier número $r \geq 1$ encontramos el espacio clásico de Sobolev [1, 7, 10, 46, 48, 51, 54, 55, 56, 64]:

$$W^{m,r}(\Omega) = \left\{ v \in L^r(\Omega) ; \partial^k v \in L^r(\Omega), \forall |k| \leq m \right\},$$

equipado con la seminorma:

$$|v|_{W^{m,r}(\Omega)} = \left[\sum_{|k|=m} \int_\Omega \left| \partial^k v \right|^r d\boldsymbol{x} \right]^{\frac{1}{r}},$$

y norma:

$$\|v\|_{W^{m,r}(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leq k \leq m} |v|^r_{W^{m,r}(\Omega)} \right]^{\frac{1}{r}},$$

con la extensión usual cuando $r = \infty$. Para más detalles consultar [11, 13, 21, 22, 34, 29,

39] para extensiones de esta definición para valores de m no integrables. Cuando $r = 2$ es un espacio de Hilbert $H^m(\Omega)$. Las definiciones para estos espacios son extendidas a espacios vectoriales usando la misma notación, pero con la siguiente modificación para las normas en el caso no-Hilbert: sea $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ se tiene:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^r(\Omega)} = \left[\int_\Omega |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^r \, d\boldsymbol{x}\right]^{\frac{1}{r}}.$$

Para una matriz B, denotamos por $\|B\|$ la norma matricial subordinada a la norma euclídea $|\cdot|$. Sea $\mathcal{D}(\Omega)$ el conjunto de funciones indefinidamente diferenciables con soporte compacto en Ω y $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ el conjunto de funciones indefinidamente diferenciables en $\overline{\Omega}$. Para funciones que se anulan en la frontera se define:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{v \in H^1(\Omega)\,;\, v|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$

y se recuerda la desigualdad de Poincare: existe una constante C tal que:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \operatorname{diam}(\Omega) |v|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.8}$$

Gracias a esta desigualdad la seminorma $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ es una norma en $H_0^1(\Omega)$.

Formulación Variacional Tomamos (1.2) y debilitamos las restricciones (1.3) y (1.4) con la fórmula de Green. Observando el término no lineal en (1.2) determinamos que la velocidad $\boldsymbol{u}$ y las funciones de prueba $\boldsymbol{v}$ pertenecen a $L^3(\Omega)^d$, además el gradiente de la presion p pertenece a $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d$. Por ello definimos los espacios:

$$\begin{aligned} X &= L^3(\Omega)^d \\ M &= W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \end{aligned} \tag{1.9}$$

consideramos una regularidad muy suave sobre los datos: b debe pertenecer al espacio dual de M y g al dual del espacio traza de M. Esta regularidad es suficiente para aplicar la

fórmula de Green al producto $(\nabla q)\cdot u$ sobre Ω. Sin embargo, esta regularidad es muy suave, y nosotros preferimos evitar dualidades haciendo uso de las inmersiones de Sobolev, para determinar los espacios para b y g. Así, en dimensión $d = 2$ ó 3 el espacio $W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$ está inmerso en $L^{\frac{3d}{2d-3}}(\Omega)$ y su espacio traza en $\partial\Omega$ está inmerso en $L^{\frac{3(d-1)}{2d-3}}(\partial\Omega)$, consideramos entonces que b pertenece a $L^{\frac{3d}{d+3}}(\Omega)$ y g a $L^{\frac{3(d-1)}{d}}(\partial\Omega)$. Estas consideraciones llevan a la formulación variacional propuesta en [25]:

Buscar un par $(\boldsymbol{u}, p)$ en $X \times M$ tal que

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in X, \quad \frac{\mu}{\rho}\int_\Omega \left(K^{-1}\boldsymbol{u}\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}dx + \frac{\beta}{\rho}\int_\Omega |\boldsymbol{u}|\left(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\varphi}\right)dx + \sum_{T\in\Im_h}\int_T \nabla p\cdot\boldsymbol{\varphi}dx = 0. \tag{1.10}$$

$$\forall q \in M, \quad \int_\Omega \nabla q\cdot\boldsymbol{u}dx = -\int_\Omega bqdx + \int_{\partial\Omega} gqd\sigma. \tag{1.11}$$

con $b \in L^{\frac{3d}{d+3}}(\Omega)$ y $g \in L^{\frac{3(d-1)}{d}}(\partial\Omega)$.

La equivalencia entre (1.10) y (1.11) con (1.2) - (1.4) sigue rápidamente de la validez de la fórmula de Green:

$$\forall q \in M, \forall \boldsymbol{v} \in H, \quad \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\nabla q dx = -\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}dx + \langle q, \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\Omega}, \tag{1.12}$$

en el espacio

$$H = \left\{v \in L^3(\Omega)^d; \mathrm{div}\, v \in L^{\frac{3d}{d+3}}(\Omega)\right\},$$

que es un espacio de Banach reflexivo cuando se equipa con la norma:

$$\|\boldsymbol{v}\|_H = \|\boldsymbol{v}\|_{L^3(\Omega)} + \|\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\|_{L^{\frac{3d}{d+3}}(\Omega)}.$$

Condición "inf-sup" Puede demostrarse que para todo b en $L^{\frac{3d}{d+3}}(\Omega)$ y g en $L^{\frac{3(d-1)}{d}}(\partial\Omega)$, existe sólo un $\boldsymbol{u}_l \in L^3(\Omega)^d/V$ tal que:

$$\forall q \in M, \int_\Omega \nabla q\cdot\boldsymbol{u}_l\, dx = -\int_\Omega bqdx + \int_{\partial\Omega} gqd\sigma, \tag{1.13}$$

$$\|\boldsymbol{u}_l\|_{L^3(\Omega)^d/V} \leq C\left(\|b\|_{L^{\frac{3d}{d+3}}(\Omega)} + \|g\|_{L^{\frac{3(d-1)}{d}}(\partial\Omega)}\right), \tag{1.14}$$

donde

$$V = \left\{\boldsymbol{v} \in X; \forall q \in M, \int_\Omega \nabla q \cdot \boldsymbol{u} dx = 0\right\}$$

y C es una constante que sólo depende de Ω y d.

Ahora, nuestra partición de $\boldsymbol{u}$ como

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_l,$$

donde $\boldsymbol{u}_0 \in V$ y $u_l \in L^3(\Omega)^d/V$ satisface (1.13) y (1.14).

Para estudiar la existencia y unicidad de la solución $(\boldsymbol{u}, p)$ del problema (1.2) a (1.4) es conveniente definir la aplicación:

$$\forall \boldsymbol{v} \in L^3(\Omega)^d, \quad \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \frac{\mu}{\rho} K^{-1}\boldsymbol{v} + \frac{\beta}{\rho}|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}, \tag{1.15}$$

la cual lleva $L^3(\Omega)^d$ en $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d$, además nos permitirá abordar las propiedades de convergencia de la solución discreta y proponer la siguiente formulación variacional:

Encontrar $\boldsymbol{u}_0 \in V$ tal que

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in V, \int_\Omega \mathcal{A}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_l) \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} = 0. \tag{1.16}$$

Esta formulación es equivalente a: (1.10)-(1.11) ya que p está en M tal que $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_l) = \nabla p$ con $(\boldsymbol{u}, p)$ solución de (1.10)-(1.11) y $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_l$.

Se demuestra en [25] que $\mathcal{A}$ aplica $L^3(\Omega)^d$ en $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d$ y verifica las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{A}$ esta acotada en todo subconjunto acotado de $L^3(\Omega)^d$:

$$\|\mathcal{A}(\boldsymbol{v})\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d} \leq \frac{\mu}{\rho}\|K^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\boldsymbol{v}\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \frac{\beta}{\rho}\|\boldsymbol{v}\|^2_{L^3(\Omega)}.$$

2. En casi todas partes de Ω

$$\forall \boldsymbol{v}, \forall \boldsymbol{w}, |\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) - \mathcal{A}(\boldsymbol{w})| \leq \frac{\mu}{\rho} \left\| K^{-1} \right\| |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}| + \frac{\beta}{\rho} |\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}| (|\boldsymbol{v}| + |\boldsymbol{w}|). \tag{1.17}$$

3. Se asume que K es uniformemente definido positivo: Sea $\lambda_{\min} > 0$ el más pequeño de los autovalores K sobre Ω :

$$\forall x \in \Omega, \forall \boldsymbol{u} \in \Re^d, (K(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} \geq \lambda_{\min} |u|^2.$$

Para $\boldsymbol{u}_l$ fijo en $L^3(\Omega)^d$, la aplicación $\boldsymbol{u} \mapsto \mathcal{A}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_l)$ definida por (1.15) es:

(a) Monótona de $L^3(\Omega)^d$ en $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d$: para todo $\boldsymbol{u}$,v en $L^3(\Omega)^d$,

$$\int_\Omega (\mathcal{A}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_l) - \mathcal{A}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_l)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}))\, d\,\boldsymbol{x} \geq \frac{\mu}{\rho} \lambda_{\min} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.18}$$

(b) Coerciva en $L^3(\Omega)^d$:

$$\lim_{\|\boldsymbol{u}\|_{L^3(\Omega)} \to \infty} \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^3(\Omega)}} \int_\Omega \mathcal{A}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_l) \cdot \boldsymbol{u} dx \right) = \infty. \tag{1.19}$$

(c) Hemicontinua: para $\boldsymbol{u}_l, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ fijo en $L^3(\Omega)^d$ la aplicación

$$t \mapsto \int_\Omega \mathcal{A}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_l + t\boldsymbol{v})\, dx, \tag{1.20}$$

es continua de $\Re$ en $\Re$

Éstas propiedades en la aplicaión $\mathcal{A}$ permiten obtener las siguientes estimaciones, a priori, para toda partición con $\boldsymbol{u}_l$ en $L^3(\Omega)^d$ (ver [25]),

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^3(\Omega)} \leq \left(\|\boldsymbol{u}_l\|^3_{L^3(\Omega)} + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\beta} \frac{\|K^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_{\min}} \|\boldsymbol{u}_l\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\|\nabla p\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq \frac{\mu}{\rho} \left\|K^{-1}\right\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\boldsymbol{u}\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \frac{\beta}{\rho} \|\boldsymbol{u}\|^2_{L^3(\Omega)} .$$

A partir de las propiedades de la aplicación $\mathcal{A}$ monotonia, coercividad y hemi-continuidad la existencia y unicidad de la solución del problema (1.10) a (1.11) sigue fácilmente con argumentos clásicos utilizando la siguiente condición *"inf - sup"*:

$$\inf_{q \in M} \sup_{\boldsymbol{v} \in X} \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{v} \cdot \nabla q d\boldsymbol{x}}{\|\nabla q\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{L^3(\Omega)}} = 1. \tag{1.21}$$

esta condición se verifica inmediatamente de la representación dual de la norma:

$$\forall \boldsymbol{u} \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d, \|\boldsymbol{u}\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d} = \sup_{\boldsymbol{v} \in L^3(\Omega)^d} \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} dx}{\|\boldsymbol{v}\|_{L^3(\Omega)}}$$

Esto garantiza la existencia de una solución débil para el problema descrito por las ecuaciones (1.2) - (1.4).

Capítulo 2

Discretización del problema vía Elementos Finitos

Consideremos que Ω es un polígono en dos dimensiones que puede ser triangulado completamente por triángulos. Sea $\Im_h$ una familia de triángulaciones conforme de $\overline{\Omega}$:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \Im_h} T, \tag{2.1}$$

regular (también se le conoce como no degenerada) en el sentido de Ciarlet [14, 15]: existe una constante σ independiente de h y T, tal que:

$$\forall T \in \Im_h, \frac{h_T}{\rho_T} = \sigma_T \leq \sigma,$$

donde h_T es el diámetro de T y ρ_T el diámetro de la esfera inscrita en T. Ahora, denotamos por Γ_h el conjunto de todas las aristas de los triángulos en $\Im_h$, y por b_e el punto medio de una arista $e \in \Gamma_h$.

Con la ayuda de esta triangulación $\Im_h$, construimos un par de espacios de elementos finitos X_h y M_h que aproximan a X y M respectivamente. Así la formulación variacional discreta de (1.10) y (1.11) es:

Buscar $(\boldsymbol{u}_h, p_h) \in X_h \times M_h$ tal que:

$$\forall \boldsymbol{\varphi}_h \in X_h; \frac{\mu}{\rho} \int_\Omega \left(K^{-1}\boldsymbol{u}_h\right) \cdot \boldsymbol{\varphi}_h d\boldsymbol{x} + \frac{\beta}{\rho} \int_\Omega |\boldsymbol{u}_h| \left(\boldsymbol{u}_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h\right) d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla p_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h d\boldsymbol{x} = 0. \quad (2.2)$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad \sum_{T \in \mathbb{T}_h} \int_T \nabla q_h \cdot \boldsymbol{u}_h d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega b q_h d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g q_h d\sigma \quad (2.3)$$

Un estudio detallado del método de los elementos finitos se puede encontrar, por ejemplo, en [7, 13, 14, 15, 32, 51].

2.1 Discretizaciones

A continuación presentamos los dos pares (X_h, M_h) espacios de aproximación de elementos finitos analizados en este trabajo.

Para denotar los espacios utilizaremos la siguiente notación:

Sea $k \geq 0$ un entero positivo y sean X_h^k y M_h^k los espacios de elementos finitos definidos por:

$$\begin{aligned} X_h^k &= \left\{\boldsymbol{v} \in \left(\boldsymbol{C}^0\left(\overline{\Omega}\right)\right)^n ; \boldsymbol{v}|_T \in \left(\mathbb{P}_k\left(T\right)\right)^n \forall T \in \Im_h\right\}, \\ Q_h^k &= \left\{q \in C^0\left(\Omega\right); q|_T \in \left(\mathbb{P}_k\left(T\right)\right) \forall T \in \Im_h\right\}, \\ M_h^k &= Q_h^k \cap L_0^2\left(\Omega\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $\mathbb{P}_k(T)$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual que k con soporte T.

De forma similar se definen los espacios de elementos finitos $X_h^{1,m}$ y $M_h^{1,m}$:

$$\begin{aligned} X_h^{1,m} &= \left\{\boldsymbol{v} \in \left(\boldsymbol{L}^2\left(\Omega\right)\right)^n ; \boldsymbol{v}|_T \in \left(\mathbb{P}_1^m\left(T\right)\right)^n \forall T \in \Im_h\right\}, \\ Q_h^{1,m} &= \left\{q \in L^2\left(\Omega\right); q|_T \in \left(\mathbb{P}_1^m\left(T\right)\right) \forall T \in \Im_h\right\}, \\ M_h^{1,m} &= Q_h^{1,m} \cap L_0^2\left(\Omega\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

con $\mathbb{P}_1^m(T)$ definido por los puntos medios b_e de cada arista de T, manteniendo así continuidad en cada b_e para todo $e \in \Gamma_h$.

A continuación se presentan las diferentes discretizaciones para los espacios X_h y M_h.

2.1.1 Velocidades con elementos discontinuos constantes y presiones con elementos discontinuos $\mathbb{P}_1$ Crouzeix - Raviart $\left(X_h^0 \times M_h^{1,m}\right)$

Definimos los espacios (X_h, M_h) de la manera siguiente:

$$X_h^0 = \left\{ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d ; \forall T \in \Im_h, \boldsymbol{v}|_T \in \mathbb{P}_0^d \right\}, \tag{2.6}$$

$$Q_h^{1,m} = \left\{ q \in L^2(\Omega) ; \forall T \in \Im_h, q|_T \in \mathbb{P}_1, \text{ y } \forall e \in \Gamma_h, q \text{ es contuna en } b_e \right\}, \tag{2.7}$$

$$M_h^{1,m} = Q_h^{1,m} \cap L_0^2(\Omega). \tag{2.8}$$

El espacio $Q_h^{1,m}$ es el espacio no conforme de grado 1 estudiado por Crouzeix y Raviart en [18]. El problema discreto (2.2) y (2.3) con $X_h = X_h^0$ y $M_h = M_h^{1,m}$ tiene solución única y bajo hipótesis de regularidad se tiene que:

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\, |\boldsymbol{u}|_{W^{1,4}(\Omega)},$$

$$\left(\sum_{T \in \Im_h} \|\nabla (p - p_h)\|_{L^{\frac{3}{2}}(T)}^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \leq Ch \left(|p|_{W^{2,\frac{3}{2}}(\Omega)} + |\boldsymbol{u}|_{W^{1,4}(\Omega)} \right).$$

Los detalles de estas afirmaciones se pueden ver en [25].

Sea N el número total de triángulos en $\Im_h$, para aproximar las velocidades tenemos:

$$X_h^0 = span \left\{ \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ v_i \end{bmatrix} \right\} \tag{2.9}$$

$$\forall T_j \in \Im_h,\ v_i]_{T_j} = \delta_{ij}\ i = 1, ..., N, j = 1. ..., N \tag{2.10}$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker, y para aproximar las presiones tenemos:

$$Q_h^{1,m} = span\left\{\varphi_i\right\}, i = 1, ..., M \tag{2.11}$$

donde M es el número de aristas, φ_i es la función base global correspondiente al nodo i el cual es el punto medio de una arista e_i de la triangulación. La restricción a un triángulo T de una función base global es una función base ψ local de T. Para este elemento finito las funciones base locales ψ de T se escriben:

$$\begin{aligned} \psi_1(x,y) &= 1 - 2\lambda_1(x,y) \\ \psi_2(x,y) &= 1 - 2\lambda_2(x,y) \\ \psi_3(x,y) &= 1 - 2\lambda_3(x,y), \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde $\lambda_i(x,y)$ es la coordenada baricéntrica del vértice del triángulo T que se encuentra frente a la arista e_i.

En la figura 2.1 se muestran los grados de libertad del espacio de las velocidades y del espacio de las presiones. Las velocidades son constantes en cada triángulo y las presiones son continuas en b_e el punto medio de la diagonal del cuadrado

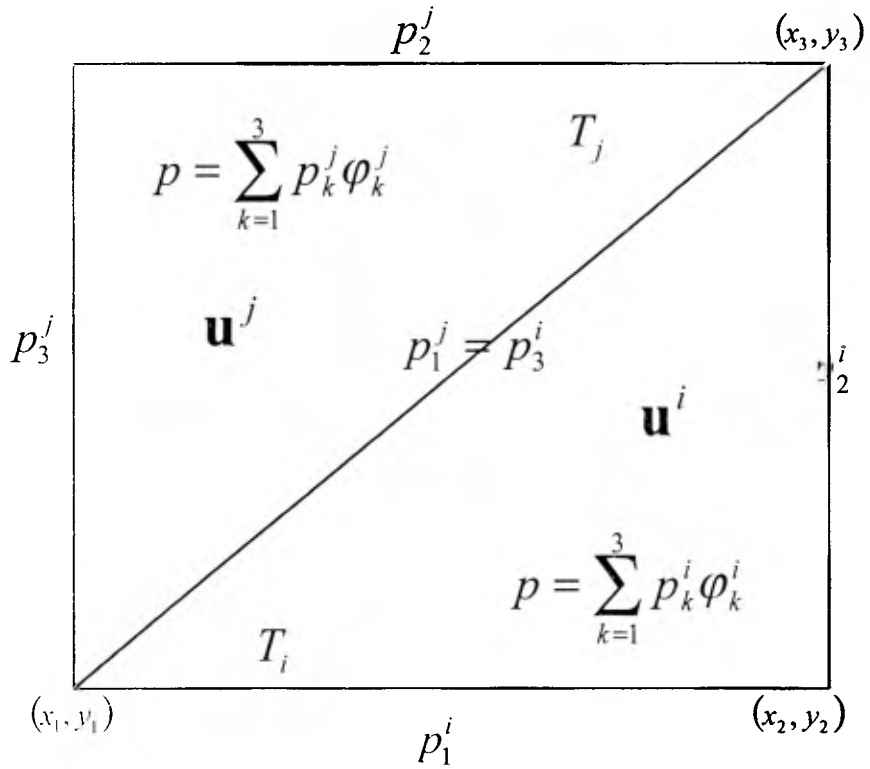

Fig. 2.1: Discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$

Orden de la discretización $\left(X_h^0 \times M_h^{1,m}\right)$

Se cuenta con el trabajo realizado por Girault y Wheleer [25] donde se demuestra teóricamente que el orden de esta discretización para el modelo de Darcy - Forchheimer es 1, además en el trabajo realizado por López, Molina y Salas en 2009 [40] se recogen una serie de pruebas numéricas verificando los resultados teóricos de [25].

Tamaño del sistema de ecuaciones asociado a la discretización:

Más adelante se presentan con más detalle características numéricas relacionadas a la implementación de cada discretización en esta sección sólo se desea presentar el tamaño

de cada uno de los sistemas de ecuaciones que serán resueltos al considerar $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$, h_x la longitud de cada arista (cateto) horizontal y h_y la longitud de cada arista (cateto) vertical en cada triángulo de la discretización.

Para $h_x = h_y = h$

- el número de presiones es: $n_p(h) = 4\frac{h+3}{h^2}$
- el número de triángulos de la discretización es: $n_T(h) = \frac{8}{h^2}$ y
- el número de velocidades es: $n_v(h) = 2n_T(h)$.

A continuación se muestran en detalle el tamaño del sistema de ecuaciones a resolver

h	$n_p(h)$	$n_v(h)$	$n_p(h) + n_v(h)$
$\frac{1}{10}$	1240	1600	2840
$\frac{1}{20}$	4880	6400	11 280
$\frac{1}{40}$	19 360	25 600	44 960
$\frac{1}{80}$	77 120	102 400	179 520

Tabla 2.1: Tamaño de la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$

Continuamos con la segunda discretización de este trabajo.

2.1.2 Velocidades con elementos discontinuos constantes y presiones con elementos continuos $\mathbb{P}_1$ $\left(X_h^0 \times M_h^1\right)$

En este caso el espacio X_h es el mismo de antes para aproximar la velocidad mientrás que las presiones se aproximan con el espacio M_h^1 definido por:

$$Q_h^1 = \left\{q \in C^0\left(\overline{\Omega}\right); \forall T \in \Im_h, q|_T \in \mathbb{P}_1\right\}, \tag{2.13}$$

$$M_h^1 = Q_h^1 \cap L_0^2(\Omega). \tag{2.14}$$

En este caso el espacio que aproxima a la presión viene dado por:

$$Q_h^1 = span\{\varphi_i\}, i = 1, ..., n \tag{2.15}$$

donde n es el número de vértices, φ_i es la función base global correspondiente al vértice i, la cual restringida a un triángulo T se corresponde con alguna de las siguientes funciones base locales:

$$\begin{aligned} \psi_1(x,y) &= \lambda_1 \\ \psi_2(x,y) &= \lambda_2 \\ \psi_3(x,y) &= 1 - \lambda_1 - \lambda_2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

En la figura 2.2 se muestran los grados de libertad del espacio de las velocidades y del espacio de las presiones. Las velocidades son constantes en cada triángulo y las presiones

son continuas en los vértices los triángulos.

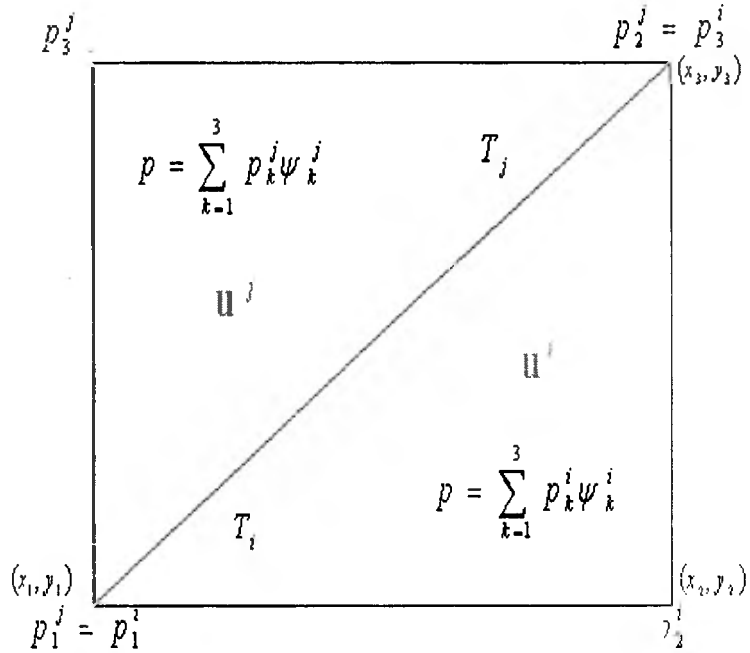

Fig. 2.2: Discretización $X_h^0 \times M_h^1$

Orden de la discretización $(X_h^0 \times M_h^1)$

A continuación se presenta todo un análisis teórico sobre el orden de convergencia para esta discretización, es importante resaltar en que López, Molina y Salas en [40] hacen un estudio numérico que verifica que el orden de la discretización al igual que en el caso anterior es 1. Más detalles se pueden encontrar en [41].

Para tal demostración comenzamos definiendo $X_h = X_h^0$ y $M_h = M_h^1$ donde

$$X_h^0 = \left\{ \boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)^d ; \forall T \in \mathcal{T}_h, \boldsymbol{v}|_T \in \mathbb{P}_0^d \right\} \subset X, \tag{2.17}$$

$$M_h^1 = Q_h^1 \cap L_0^2(\Omega) \subset M, \tag{2.18}$$

con

$$Q_h^1 = \left\{ q \in C^0\left(\overline{\Omega}\right); \forall T \in \mathcal{T}_h,\, q|_T \in \mathbb{P}_1 \right\}.$$

Propiedades de los espacios discretos: la condición inf − sup discreta

Dado que las funciones de M_h^1 son suaves ($Q_h^1 \subset W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$), podemos aplicar directamente el teorema de traza y las desigualdades de Sobolev. Sea $\mathcal{T}_h$ como en (2.1) para algún par de números reales $p \geq 1, q \geq 1$ tal que:

1. $p \leq p_0$ con $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q} - \frac{1}{d}$, existe una constante C independiente de h tal que:

$$\forall z_h \in M_h^1, \|z_h\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla z_h\|_{L^q(\Omega)}. \tag{2.19}$$

2. $p \leq p_0$ con $\frac{1}{p_0} = \frac{1}{q}\left(\frac{d}{d-1}\right) - \frac{1}{d-1}$, existe una constante C independiente de h tal que:

$$\forall z_h \in M_h^1, \|z_h\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|\nabla z_h\|_{L^q(\Omega)} \tag{2.20}$$

la siguiente proposición verifica la condición inf-sup discreta para este espacio.

Proposición 1 *Para algún número real $p \in [2, \infty)$ y p' con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ el par de espacios X_h^0, M_h^1 definidos por (2.17) y (2.18) satisfacen:*

$$\forall q_h \in M_h^1, \sup_{\boldsymbol{v}_h \in X_h} \left(\frac{1}{\|v_h\|_{L^p(\Omega)}} \int_\Omega \nabla q_h \cdot \boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x} \right) = \|\nabla q_h\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{2.21}$$

Demostración. Consideramos q_h un elemento cualquiera en Q_h^1 porque podemos agregar cualquier constante a q_h en (2.21). Entonces, ∇q_h y v_h son vectores constantes en cada T, por lo tanto demostrar (2.21) es equivalente a demostrar que para todos los vectores constantes $\boldsymbol{q}_T$ definidos en cada T, existe un vector constante $\boldsymbol{v}_T$ tal que:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{q}_T' \cdot \boldsymbol{v}_T') = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\boldsymbol{v}_T'|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |\boldsymbol{q}_T'|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}; \tag{2.22}$$

tomando

$$\boldsymbol{v}'_T = |T|^{\frac{1}{p}}\, \boldsymbol{v}_T, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{q}'_T = |T|^{\frac{1}{p'}}\, \boldsymbol{q}_T.$$

Entonces (2.22) es verificada para $p' \leq 2$ y $\boldsymbol{v}'_T = \frac{\boldsymbol{q}'_T}{|\boldsymbol{q}'_T|^{2-p'}}$. ■

Debido a esta propiedad de uniformidad de la condición inf - sup discreta y a las características de la aplicación $\mathcal{A}$ (1.18), (1.19) y (1.20), tenemos la existencia y unicidad de la solución discreta.

Existencia y unicidad de la solución discreta

Sea V_h el espacio discreto análogo de V, y $V_h^{\perp}$ el espacio ortogonal a V_h en X_h para el producto interno de $L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} V_h &= \left\{ \boldsymbol{v}_h \in X_h^0, \forall q_h \in M_h^1, \int_\Omega \nabla q_h \cdot \boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x} = 0 \right\}. \\ V_h^{\perp} &= \left\{ \boldsymbol{v}_h \in X_h^0, \forall\ \boldsymbol{w}_h \in V_h, \int_\Omega \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{w}_h d\boldsymbol{x} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

La aplicación

$$q_h \mapsto -\int_\Omega b q_h d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g q_h d\sigma,$$

es lineal, entonces la condición inf-sup discreta (2.21) y la teoría de Babuska-Brezzi implican un análogo discreto de (1.13): existe $\boldsymbol{u}_{h,l} \in X_h^0$ único en $V_h^{\perp}$ tal que

$$\forall q_h \in M_h, \int_\Omega \nabla q_h \cdot u_{h,l} d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega b q_h d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} g q_h d\sigma. \tag{2.23}$$

Ahora aplicando (2.19) con $q = \frac{3}{2}$ y $p = \frac{3d}{2d-3}$, (2.20) con $q = \frac{3}{2}$ y $p = \frac{3(d-1)}{2d-3}$ y (2.21) con $p = 3$ tenemos que $u_{h,l}$ satisface el análogo discreto de (1.14) con alguna constante C independiente de h

$$\|u_{h,l}\|_{L^3(\Omega)^d/V_h} \leq C \left(\|b\|_{L^{\frac{3d}{d+3}}(\Omega)} + \|g\|_{L^{\frac{3(d-1)}{d}}(\partial\Omega)} \right). \tag{2.24}$$

Ahora la partición de $\boldsymbol{u}_h$ en

$$\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_{h,0} + \boldsymbol{u}_{h,l}, \tag{2.25}$$

con $\boldsymbol{u}_{h,0} \in V_h$ y $\boldsymbol{u}_{h,l}$ satisface (2.23).

Esto nos permite introducir la versión discreta del problema (1.16): Encontrar $\boldsymbol{u}_{h,0} \in V_h$ tal que

$$\forall \boldsymbol{\varphi}_h \in V_h, \quad \frac{\mu}{\rho} \int_\Omega \mathcal{A}\left(\boldsymbol{u}_{h,0} + \boldsymbol{u}_{h,l}\right) \cdot \boldsymbol{\varphi}_h d\boldsymbol{x} = 0, \tag{2.26}$$

Proposición 2 *El problema (2.26) es equivalente al problema (2.2)-(2.3).*

Demostración. Sea $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ una solución de (2.2)-(2.3) entonces, de (2.23) tenemos que $\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_{h,0} + \boldsymbol{u}_{h,l}$ y $\boldsymbol{u}_{h,0}$ resuelve (2.26). En el otro sentido, sea $\boldsymbol{u}_{h,0}$ una solución de (2.26), la condición inf-sup discreta (2.21) y una extensión de la teoría de Babuska-Brezzi para espacios de Banach reflexivos implican la existencia y unicidad de p_h en M_h satisfaciendo

$$\mathcal{A}\left(\boldsymbol{u}_{h,0} + \boldsymbol{u}_{h,l}\right) = \nabla p.$$

■

Teorema 3 *El problema (2.2)-(2.3), para cualquier (b, g) en $L^{\frac{3d}{d+3}}(\Omega) \times L^{\frac{3(d-1)}{d}}(\partial\Omega)$ satisfaciendo (1.5) tiene una solución única $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ en $X_h^0 \times M_h^1$ y para cualquier función $\boldsymbol{u}_{h,l} \in X_h^0$ satisfaciendo (2.23) tenemos:*

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_{L^3(\Omega)} \leq \left(\|\boldsymbol{u}_{h,l}\|_{L^3(\Omega)}^3 + \frac{3}{4}\frac{\mu}{\beta}\frac{\|K^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_{\min}} \|\boldsymbol{u}_{h,l}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{3}}, \tag{2.27}$$

$$\|\nabla p_h\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq \frac{\mu}{\rho} \|K^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{u}_h\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \frac{\beta}{\rho} \|\boldsymbol{u}_h\|_{L^3(\Omega)}^2. \tag{2.28}$$

Demostración. La existencia de $\boldsymbol{u}_h$ en X_h^0 es una prueba clásica que utiliza la condición inf-sup discreta, la teoría de Babuska-Brezzi y la propiedades (1.18), (1.19) y (1.20), más detalles pueden encontrarse en [55]. La existencia y unicidad de p_h en M_h^1 proviene de la proposición 2. ■

Convergencia de la solución discreta

De las cotas (2.24), (2.27) y (2.28) podemos construir $\{\boldsymbol{u}_h\}, \{p_h\}$ sucesiones que convergen débilmente en $L^3(\Omega)^d$ y $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d$ respectivamente. En primer lugar, vamos a demostrar que el límite de la sucesión $\{\boldsymbol{u}_h\}$ es la solución del problema (2.26).

Sea $P_h : L^1(\Omega)^d \to X_h^0$ el operador local de proyección de funciones constantes definido como:

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall v \in L^1(T), P_h(v)|_T = \frac{1}{|T|}\int_T v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Es bien conocido que para cualquier r con $1 \leq r \leq \infty$ [26],

$$\forall v \in L^r(\Omega), \quad \lim_{h\to 0} P_h(v) = v \text{ fuertemente en } L^r(\Omega). \tag{2.29}$$

aún más,

$$\|P_h(v) - v\|_{L^r(\Omega)} = O(h). \tag{2.30}$$

Siendo M_h^1 el subespacio de elementos finitos estándar $\mathbb{P}_1$ y ∇q_h constante en cada T por cada q_h en M_h^1 se verifica que:

$$\int_\Omega P_h(\boldsymbol{u}_l)\cdot\nabla q_h d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \boldsymbol{u}_l\cdot\nabla q_h d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega b q_h dx + \int_{\partial\Omega} g q_h d\sigma. \tag{2.31}$$

Debido a (2.31) podemos elegir $\boldsymbol{u}_{h,l} = P_h(\boldsymbol{u}_l)$ teniendo los elementos necesarios para demostrar la convergencia débil en $L^3(\Omega)^d$ de la sucesión $\{\boldsymbol{u}_h\}$.

Teorema 4 *Sea $\boldsymbol{u}_h$ solución de* (2.26) *y $\boldsymbol{u}$ la solución de* (1.16). *Asumiendo que $\mathcal{T}_h$ satisface* (2.1), $b \in L^{\frac{3d}{d+3}}(\Omega)$ *y* $g \in L^{\frac{3(d-1)}{d}}(\partial\Omega)$. *Tenemos:*

$$\lim_{h\to 0} \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u} \textit{ débilmente en } L^3(\Omega)^d.$$

Demostración. Como tenemos la convergencia débil de $\boldsymbol{u}_h$ en $L^3(\Omega)^d$ para alguna función $\boldsymbol{u} \in L^3(\Omega)^d$, es suficiente probar que $\boldsymbol{u}$ satisface (2.26). De nuevo, usamos la

partición (2.25) con $u_{h,l} = P_h(u_l)$. Debido a (1.18) nosotros tenemos:

$$\forall v_h \in V_h, \int_\Omega \left(\mathcal{A}(u_{h,0} + u_{h,l}) - \mathcal{A}(v_h + u_{h,l})(u_{h,0} - v_h)\right) dx \geq 0,$$

pero de acuerdo con (2.26)

$$\forall v_h \in V_h, \int_\Omega \mathcal{A}(u_{h,0} + u_{h,l}) \cdot (u_{h,0} - v_h)\, dx = 0.$$

por lo tanto

$$\forall v_h \in V_h, \int_\Omega \mathcal{A}(v_h + u_{h,l}) \cdot (u_{h,0} - v_h)\, dx \leq 0. \tag{2.32}$$

Elegimos $v_h = P_h(v)$, v siendo un elemento arbitrario de V, entonces $P_h(v) \in V_h$ y (2.29) implica que $P_h(v)$ tiende a v fuertemente en V; por lo tanto, aplicando (1.17) con $v = P_h(v) + u_{h,l}$ y $w = v + u_l$ tenemos:

$$\lim_{h \to 0} \mathcal{A}(P_h(v) + u_{h,l}) = \mathcal{A}(v + u_l) \text{ fuertemente en } L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d;$$

adicionalmente como:

$$\lim_{h \to 0} (u_{h,0} - P_h(v)) = u_0 - v \text{ débilmente en } L^3(\Omega)^d.$$

tomando el límite en (2.32), obtenemos

$$\forall v \in V, \int_\Omega \mathcal{A}(v + u_l) \cdot (u_0 - v)\, dx \leq 0.$$

fácilmente tenemos:

$$\forall v \in V, \int_\Omega \mathcal{A}(u_0 + u_l) \cdot v dx = 0,$$

probando así el teorema. ■

Teorema 5 *Bajo las hipótesis del teorema 4 y $p \in W^{2,\frac{3}{2}}(\Omega)$ tenemos que u_h converge fuertemente a u en $L^2(\Omega)^d$.*

Demostración. Tomemos $\varphi_h = v_h \in V_h$ en (2.2) restando con (1.10), quedándonos con:

$$\forall v_h \in V_h, \int_\Omega \left(\mathcal{A}\left(u_{h,0} + u_{h,l}\right) - \mathcal{A}\left(u_0 + u_l\right)\right) \cdot v_h dx + \int_\Omega \nabla\left(p_h - p\right) \cdot v_h dx = 0. \quad (2.33)$$

Esta expresión la podemos escribir:

$$\forall v_h \in V_h, \forall \mu_h \in M_h^1, \int_\Omega \left(\mathcal{A}\left(u_{h,0} + u_{h,l}\right) - \mathcal{A}\left(u_0 + u_l\right)\right) \cdot v_h dx = \int_\Omega \nabla\left(p - \mu_h\right) \cdot v_h dx.$$

Insertando $\mathcal{A}\left(P_h\left(u_0 + u_l\right)\right)$ y tomando $v_h = u_h - P_h\left(u\right) = u_{h,0} - P_h\left(u_0\right)$, tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(\mathcal{A}\left(u_{h,0} + u_{h,l}\right) - \mathcal{A}\left(P_h\left(u_0 + u_l\right)\right)\right) \cdot \left(u_{h,0} - P_h\left(u_0\right)\right) dx \\ = & -\int_\Omega \left(\mathcal{A}\left(P_h\left(u_0 + u_l\right)\right) - \mathcal{A}\left(u_0 + u_l\right)\right) \cdot \left(u_{h,0} - P_h\left(u_0\right)\right) dx \\ & + \int_\Omega \nabla\left(p - \mu_h\right) \cdot \left(u_{h,0} - P_h\left(u_0\right)\right) dx, \end{aligned}$$

como $\mathcal{A}$ satisface (1.18), tenemos que $\forall \mu_h \in M_h^1$:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\rho} \left\|u_h - P_h\left(u\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq & \int_\Omega \nabla\left(p - \mu_h\right) \cdot \left(u_{h,0} - P_h\left(u_0\right)\right) dx \\ & - \int_\Omega \left(\mathcal{A}\left(P_h\left(u_0 + u_l\right)\right) - \mathcal{A}\left(u_0 + u_l\right)\right) \cdot \left(u_{h,0} - P_h\left(u_0\right)\right) dx. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Sea I_h el operador de interpolación estándar P_1 nosotros elegimos $\mu_h = I_h\left(p\right)$. De la teoría de aproximación de espacios de Sobolev (ver por ejemplo [14], [26]) tenemos la siguiente estimación del error:

$$\left\|p - I_h\left(p\right)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq Ch^2 \left|p\right|_{2,\frac{3}{2},\Omega}. \quad (2.35)$$

Usando (2.29), (2.35) y (1.17) nosotros encontramos la convergencia fuerte

$$\lim_{h \to 0} \left(\mathcal{A}\left(P_h\left(u_0\right) + u_{h,l}\right) - \mathcal{A}\left(u_0 + u_l\right)\right) = 0 \text{ fuertemente en } L^{\frac{3}{2}}\left(\Omega\right)^d. \quad (2.36)$$

La convergencia fuerte de $\boldsymbol{u}_h$ en $L^2(\Omega)^d$ es obtenida pasando al límite en (2.34) aplicando (2.35), (2.36) y el teorema 4. ■

Ahora estudiaremos la convergencia de la sucesión $\{p_h\}$. La estimación a priori (2.27), (2.28) y (2.24) muestran que la sucesión $\{\nabla p_h\}$ esta uniformemente acotada en $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d$ y, (2.19) con $q = \frac{3}{2}$, implica que la secuencia $\{p_h\}$ esta uniformemente acotada en $L^{\frac{3d}{2d-3}}(\Omega)$. Definiendo entonces $\boldsymbol{w}_h$ una función definida en cada T por

$$\boldsymbol{w}_h|_T = \nabla p_h|_T\,, \tag{2.37}$$

tenemos que existe $\boldsymbol{w} \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d$ y $q \in L^{\frac{3d}{2d-3}}(\Omega)$ tal que:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \boldsymbol{w}_h &= \boldsymbol{w} \text{ débilmente en } L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d, \\ \lim_{h\to 0} p_h &= q \text{ débilmente en } L^{\frac{3d}{2d-3}}(\Omega). \end{aligned}$$

Proposición 6 *Sea $\boldsymbol{w}_h$ una función definida en (2.37). Bajo las suposiciones del teorema 4 tenemos que $\boldsymbol{w} = \nabla q \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ y $q \in W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{\varphi}$ en $\mathcal{D}(\Omega)^d$ entonces

$$\langle \nabla p_h, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \int_\Omega \nabla p_h \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})\, p_h d\boldsymbol{x},$$

tomando el límite cuando h tiende a cero,

$$\int_\Omega \boldsymbol{w} \cdot \varphi d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega (\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi})\, q d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \nabla q \cdot \boldsymbol{\varphi} d\boldsymbol{x},$$

tenemos que $\boldsymbol{w} = \nabla q \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ y $q \in W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$. ■

Probaremos que q es la segunda componente de la solución del problema (1.10)-(1.11).

Proposición 7 *Sea $(\boldsymbol{u}, p)$ una solución de (1.10)-(1.11). Bajo las suposiciones del teo-*

rema 4

$$\lim_{h\to 0} \nabla p_h = \nabla p \text{ débilmente en } L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d.$$

Demostración. En (2.2) tomamos $\varphi_h = P_h(\boldsymbol{v})$ e insertamos $\mathcal{A}(\boldsymbol{u})$:

$$\int_\Omega \nabla p_h \cdot P_h(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega (\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_h) - \mathcal{A}(\boldsymbol{u})) \cdot P_h(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \mathcal{A}(\boldsymbol{u}) \cdot P_h(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x}. \quad (2.38)$$

Aplicando (1.17) podemos escribir:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_h) - \mathcal{A}(\boldsymbol{u})) \cdot P_h(\boldsymbol{v}) d\boldsymbol{x}\right| \leq\ & \|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \left(\frac{\mu}{\rho} \left\|K^{-1}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \|P_h(\boldsymbol{v})\|_{L^2(\Omega)}\right. \\ & \left. + \frac{\beta}{\rho}(\|\boldsymbol{u}_h\|_{L^3(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^3(\Omega)}) \|P_h(\boldsymbol{v})\|_{L^6(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

La convergencia fuerte de $\boldsymbol{u}_h$ en $L^2(\Omega)^d$ y de $P_h(\boldsymbol{v})$ en $L^r(\Omega)^d$ $1 \leq r \leq \infty$ implican que:

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega (\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_h) - \mathcal{A}(\boldsymbol{u})) \cdot P_h(\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x} = 0.$$

tomando el límite cuando h tiende a cero, a ambos lados de (2.38) obtenemos

$$\int_\Omega \nabla q \cdot \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega \mathcal{A}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} d\boldsymbol{x},$$

entonces $q = p$. ■

Ahora probaremos la convergencia fuerte de $\boldsymbol{u}_h$ en $L^3(\Omega)^d$.

Teorema 8 *Bajo las suposiciones del teorema 4*

$$\lim_{h\to 0} \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u} \text{ fuertemente en } L^3(\Omega)^d.$$

Demostración. tomando $\varphi_h = \boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_{h,0} + \boldsymbol{u}_{h,l}$ en (2.2) y usando el hecho que $\boldsymbol{u}_{h,0} \in V_h$

obtenemos

$$\frac{\mu}{\rho}\int_{\Omega} K^{-1}\boldsymbol{u}_h\cdot\boldsymbol{u}_h d\boldsymbol{x}+\frac{\beta}{\rho}\int_{\Omega}|\ \boldsymbol{u}_h|^3\,d\boldsymbol{x}+\int_{\Omega}\nabla p_h\cdot\boldsymbol{u}_{h,l}d\boldsymbol{x}=0.$$

tomando el límite en esta expresión y recordando que $\boldsymbol{u}_h$ converge fuertemente a $\boldsymbol{u}$ en $L^2(\Omega)^d$, ∇p_h converge débilmente a ∇p en $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d$, $\boldsymbol{u}_{h,l}$ converge fuertemente a $\boldsymbol{u}_l$ en $L^3(\Omega)^d$ y que $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}_l$ con $\boldsymbol{u}_0\in V$ obtenemos

$$\frac{\mu}{\rho}\int_{\Omega} K^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x}+\frac{\beta}{\rho}\lim_{h\to 0}\int_{\Omega}|\boldsymbol{u}_h|^3\,d\boldsymbol{x}+\int_{\Omega}\nabla p\cdot\boldsymbol{u}d\boldsymbol{x}=0.$$

Finalmente, comparando con (1.10) y eligiendo $\boldsymbol{u}$ como una función de prueba

$$\lim_{h\to 0}\|\boldsymbol{u}_h\|^3_{L^3(\Omega)}=\|\boldsymbol{u}\|^3_{L^3(\Omega)}.$$

Este resultado junto con la convergencia débil de $\boldsymbol{u}_h$ en $L^3(\Omega)$ prueban el teorema.

■

Finalmente probamos al convergencia fuerte de $\boldsymbol{w}_h=\nabla p_h$ a ∇p en $L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d$.

Teorema 9 *Bajo las suposiciones del teorema 4*

$$\lim_{h\to 0}\nabla p_h=\nabla p \textit{ fuertemente en } L^{\frac{3}{2}}(\Omega)^d.$$

Demostración. tomando la diferencia entre (1.10) y (2.2), e insertando $I_h(p)$

$$\begin{aligned}\forall v_h\in X^0_h,\int_{\Omega}\nabla\left(p_h-I_h(p)\right)\cdot\boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x} &= -\int_{\Omega}\left(\mathcal{A}(\boldsymbol{u}_h)-\mathcal{A}(\boldsymbol{u})\right)\cdot\boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x}\\ &\quad -\int_{\Omega}\nabla\left(I_h(p)-p\right)\cdot\boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x};\end{aligned}$$

usando (1.17) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\left|\int_\Omega \nabla\left(p_h - I_h\left(p\right)\right)\cdot \boldsymbol{v}_h d\boldsymbol{x}\right|}{\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{L^3(\Omega)}} &\leq \frac{\mu}{\rho}\left\|K^{-1}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}\frac{\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{L^2(\Omega)}}{\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{L^3(\Omega)}}\\ &+\frac{\beta}{\rho}\left\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\right\|_{L^3(\Omega)}\left(\left\|\boldsymbol{u}_h\right\|_{L^3(\Omega)} + \left\|\boldsymbol{u}\right\|_{L^3(\Omega)}\right)\\ &+\left\|\nabla\left(I_h\left(p\right) - p\right)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\frac{\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{L^2(\Omega)}}{\left\|\boldsymbol{v}_h\right\|_{L^3(\Omega)}}.\end{aligned}$$

La condición inf-sup (2.21) aplicada con $p = 3$ y $p' = \frac{3}{2}$ nos lleva a

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(p_h - I_h\left(p\right)\right)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} &\leq \frac{\mu}{\rho}\left|\Omega\right|^{\frac{1}{3}}\left\|K^{-1}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\right\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\frac{\beta}{\rho}\left\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\right\|_{L^3(\Omega)}\left(\left\|\boldsymbol{u}_h\right\|_{L^3(\Omega)} + \left\|\boldsymbol{u}\right\|_{L^3(\Omega)}\right)\\ &+\left|\Omega\right|^{\frac{1}{3}}\left\|\nabla\left(I_h\left(p\right) - p\right)\right\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)},\end{aligned} \tag{2.39}$$

entonces la convergencia fuerte de $\boldsymbol{u}_h$ en $L^3\left(\Omega\right)^d$ y de $\nabla I_h\left(p\right)$ en $L^{\frac{3}{2}}\left(\Omega\right)^d$ demuestran el teorema. ■

Dado que la solución $(\boldsymbol{u}, p)$ es única, la sucesión completa converge.

Estimación del Error

Sea $(\boldsymbol{u}_h, p_h)$ solución de (2.2)-(2.3) y $(\boldsymbol{u}, p)$ solución de (1.10)-(1.11) y nosotros asumimos que $\boldsymbol{u}$ está en $L^4\left(\Omega\right)^d$.

Sea $\boldsymbol{w}_h$ un elemento arbitrario de X_h^0 satisfaciendo la restricción (2.3). Nosotros elegimos $\boldsymbol{v}_h = \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{w}_h \in V_h$ en (2.33) e insertamos $\mathcal{A}\left(\boldsymbol{w}_h\right)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\mathcal{A}\left(\boldsymbol{u}_h\right) - \mathcal{A}\left(\boldsymbol{w}_h\right)\right)\cdot\left(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{w}_h\right)d\boldsymbol{x} &= -\int_\Omega \left(\mathcal{A}\left(\boldsymbol{w}_h\right) - \mathcal{A}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)\cdot\left(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{w}_h\right)d\boldsymbol{x}\\ &+\int_\Omega \nabla\left(p - p_h\right)\cdot\left(\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{w}_h\right)d\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

aplicando (1.18) en el lado izquierdo y (1.17) en el lado derecho:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{w}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq & \frac{\|K^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_{\min}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{\beta}{\mu\lambda_{\min}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h\|_{L^4(\Omega)} \left(\|\boldsymbol{w}_h\|_{L^4(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)}\right) \\ & + \frac{\rho}{\mu\lambda_{\min}} \|p - p_h\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)},\end{aligned}$$

un resultado que nos permite establecer la siguiente proposición.

Proposición 10 *Sea $\boldsymbol{u}$ en $L^4(\Omega)^d$. Para todo $\boldsymbol{w}_h \in X_h^0$ satisfaciendo la restricción* (2.3) *la solución $\boldsymbol{u}_h$ de* (2.26) *satisface*

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq & \left(1 + \frac{\|K^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}}{\lambda_{\min}}\right) \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \frac{\beta}{\mu\lambda_{\min}} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h\|_{L^4(\Omega)} \left(\|\boldsymbol{u}\|_{L^4(\Omega)} + \|\boldsymbol{w}_h\|_{L^4(\Omega)}\right) \\ & + \frac{\rho}{\mu\lambda_{\min}} \|p - p_h\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

Como una consecuencia de esto, si nosotros encontramos una aproximación $\boldsymbol{w}_h \in X_h^0$ que satisfaga (2.3) tal que

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}_h\|_{L^4(\Omega)} = O(h)$$

la proposición anterior sugiere que el error $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$ es del mismo orden. El siguiente teorema demuestra esta observación.

Teorema 11 *Sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación que satisface* (2.1) *y $\boldsymbol{w}_h = P_h(\boldsymbol{u})$. Supongamos que la solución $\boldsymbol{u}$ de* (1.16) *está en $W^{1,4}(\Omega)^d$ entonces la solución $\boldsymbol{u}_h$ de* (2.26) *satisface la siguiente cota para el error:*

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\,|\boldsymbol{u}|_{W^{1,4}(\Omega)} \tag{2.41}$$

con alguna constante C independiente de h.

Demostración. Su demostración es simple, comenzando desde (2.40) y usando (2.30).

■

En relación al orden de convergencia de la sucesión $\{p_h\}$, asumiendo que $\boldsymbol{u}$ pertenece a $L^6(\Omega)^d$, podemos usar la siguiente variante de (2.39):

$$\|\nabla(p_h - p)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq \|\nabla(I_h(p) - p)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \frac{\mu}{\rho}|\Omega|^{\frac{1}{3}} \left\|K^{-1}\right\|_{L^\infty(\Omega)} \| \boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.42)$$

$$+\frac{\beta}{\rho}\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}\left(\|\boldsymbol{u}_h\|_{L^6(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}\|_{L^6(\Omega)}\right) + |\Omega|^{\frac{1}{3}}\|\nabla(I_h(p) - p)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}$$

Esto requiere que $\boldsymbol{u}_h$ esté acotada en $L^6(\Omega)^d$. Esta cota es obtenida por medio de una desigualdad inversa que se mantiene para triangulaciones uniformes o casi uniformes en el sentido de Ciarlet [14] además de la constante σ, existe otra constante $\tau > 0$, independiente de h y T, tal que:

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \tau h \leq h_T \leq \sigma \rho_T.$$

Bajo estas suposiciones existe una constante C independiente de h tal que:

$$\forall \boldsymbol{u} \in L^6(\Omega)^d, \forall \boldsymbol{u}_h \in X_h^0, \|\boldsymbol{u}_h\|_{L^6(\Omega)} \leq C\left(\frac{1}{h}\| \boldsymbol{u}_h - P_h(\boldsymbol{u})\|_{L^6(\Omega)} + \|\boldsymbol{u}_h\|_{L^6(\Omega)}\right);$$

usando ahora(2.41) llegamos a la siguiente cota.

Proposición 12 *Sea $\mathcal{T}_h$ una triangulación que satisface* (2.1). *Supongamos que la solución $\boldsymbol{u}$ de* (1.16) *pertenece a $W^{1,4}(\Omega)^d$ entonces existe una constante C independiente de h tal que:*

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_{L^6(\Omega)} \leq C|\boldsymbol{u}|_{W^{1,4}(\Omega)}. \quad (2.43)$$

La siguiente estimación para el error de p_h es obtenida usando (2.42), (2.43) y las propiedades de aproximación de I_h.

Proposición 13 *A las suposiciones anteriores agregamos que la solución p de (1.10)-(1.11) pertenece a $W^{2,\frac{3}{2}}(\Omega)$. Entonces, existe una constante C independiente de h tal*

que:

$$\|\nabla (p - p_h)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq Ch \left(|p|_{W^{2,\frac{3}{2}}(\Omega)} + |\boldsymbol{u}|_{W^{1,4}(\Omega)} \right). \tag{2.44}$$

Tamaño del sistema de ecuaciones asociado a la discretización:

Manteniendo las mismas condiciones sobre el dominio y tomando $h_x = h_y = h$

- el número de presiones es: $n_p(h) = \left(\frac{2}{h} + 1\right)^2$,
- el número de triángulos de la discretización $n_T(h) = \frac{8}{h^2}$ y
- el número de velocidades es: $n_v(h) = 2n_T(h)$. La misma discretización sobre las velocidades que en el caso anterior, por ende la misma cantidad de velocidades.

En comparación con la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ esta discretización utiliza sistemas de ecuaciones $29,6\%$ más pequeños para h suficientemente pequeño.

h	$n_p(h)$	$n_v(h)$	$n_p(h) + n_v(h)$
$\frac{1}{10}$	441	1600	2041
$\frac{1}{20}$	1681	6400	8081
$\frac{1}{40}$	6521	25 600	32 161
$\frac{1}{80}$	25921	102 400	128 321

Tabla 2.2: Tamaño de la discretización $X_h^0 \times M_h^1$

Capítulo 3

Esquemas de resolución

Resolver el problema (2.2) y (2.3) utilizando alguno de los espacios para elementos finitos descritos anteriormente, implica resolver un sistema de ecuaciones no lineales de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} B(\widehat{\boldsymbol{u}}) & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}} \\ \widehat{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

con $B(\widehat{\boldsymbol{u}})$ una aplicación no lineal de $\widehat{\boldsymbol{u}}$ correspondiente a:

$$\frac{\mu}{\rho}\int_{\Omega}\left(K_h^{-1}\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right)\cdot\boldsymbol{\varphi}_h d\boldsymbol{x} + \frac{\beta}{\rho}\int_{\Omega}\left|\widehat{\boldsymbol{u}}_h\right|\left(\widehat{\boldsymbol{u}}_h\cdot\boldsymbol{\varphi}_h\right)d\boldsymbol{x},$$

y C es una matriz correspondiente a:

$$\sum_{T\in\Im_h}\int_T \nabla p_h\cdot\varphi_h d\boldsymbol{x}.$$

A continuación presentamos un arreglo para las incógnitas $\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}} & \widehat{p} \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{u}} & \widehat{p} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \widehat{u}_{1x} & \widehat{u}_{2x}\ldots & \widehat{u}_{1y} & \widehat{u}_{2y}\ldots & \widehat{p}_1 & \widehat{p}_2 & \widehat{p}_3 & \ldots \end{bmatrix}^T; \tag{3.2}$$

con $[\widehat{u}_{ix}, \widehat{u}_{iy}]^T$ una aproximación al campo de velocidad $\boldsymbol{u}$ en los grados de libertad de X_h y $\widehat{p}_j$ es una aproximación a la presión p en los grados de libertad de M_h.

La estructura mostrada en (3.1) es conocida como problema de punto de ensilladura, en nuestro caso, es un problema *punto de ensilladura no lineal.*

Dada la no-linealidad del problema (3.1) se requiere de algún esquema iterativo para encontrar una solución. En este trabajo se consideran dos métodos iterativos para resolver dicho problema: un *algoritmo de direcciones alternadas tipo Peaceman Rachford* propuesto en [25] y el *método de Newton* en dos versiones ([33, 47, 58]). A continuación se presenta una breve descripción de ambos métodos.

3.1 Peaceman-Rachford (PR)

Existen referencias de métodos tipo Peaceman - Rachford en la literatura sobre Diferencias Finitas, por ejemplo [4, 49, 58] donde vinculan este método a los conocidos esquemas Alternating Direction Implicit (ADI). Además se encuentran referencias de métodos tipo PR en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo ver [65].

El problema (3.1) tiene una no linealidad de tipo monótono, por lo tanto un algoritmo de direcciones alternadas de tipo PR esta bien adaptado. La siguiente versión del algoritmo PR fue presentada por Girault y Wheeler en [25] en la resolución de (1.10) y (1.11) con los espacios de elementos finitos $X_h^0 \times M_h^{1,m}$.

En este esquema se desacopla la no linealidad presente en (2.2) de la restricción (2.3) construyendo una sucesión $(\boldsymbol{u}_h^n, p_h^n)$ para $n \geq 1$ de la siguiente forma:

- *Un paso nolineal sin restricciones.* Dado (u_h^n, p_h^n), se obtiene una velocidad intermedia $u_h^{n+\frac{1}{2}}$ tal que:

$$\begin{aligned} &\forall \varphi_h \in X_h, \tfrac{1}{\alpha} \int_\Omega \left(\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{u}_h^n\right) \cdot \varphi_h dx + \tfrac{\beta}{\rho} \int_\Omega \left|\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}\right| \left(\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_h\right) dx \\ &= -\tfrac{\mu}{\rho} \int_\Omega (K^{-1} \boldsymbol{u}_h^n) \cdot \varphi_h dx - \textstyle\sum_T \int_T \nabla p_h^n \cdot \varphi_h dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

- *Un paso lineal con restricciones.* Una vez obtenido $\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}$ del paso anterior, se calcula $\left(\boldsymbol{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}\right)$ tal que:

$$\forall \boldsymbol{\varphi}_h \in X_h, \frac{1}{\alpha}\int_\Omega \left(\boldsymbol{u}_h^{n+1} - \boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}\right)\cdot \boldsymbol{\varphi}_h dx + \frac{\mu}{\rho}\int_\Omega \left(K^{-1}\boldsymbol{u}_h^{n+1}\right)\cdot \boldsymbol{\varphi}_h dx + \sum_{T\in\Im_h}\int_T \nabla p_h^{n+1}\cdot \boldsymbol{\varphi}_h dx$$
$$= -\frac{\beta}{\rho}\int_\Omega \left|\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}\right| \left(\boldsymbol{u}_h^{n+\frac{1}{2}}\cdot \boldsymbol{\varphi}_h\right) d\boldsymbol{x}, \tag{3.4}$$

$$\forall q_h \in M_h, \sum_{T\in\Im_h}\int_T \nabla q_h \cdot u_h^{n+1} dx = -\int_\Omega b q_h dx + \int_{\partial\Omega} g q_h d\sigma,$$

Donde $\alpha > 0$ es un parámetro positivo elegido conveniente, representando el paso de tiempo de una derivada en tiempo discreta artificial. Girault y Wheeler en [25] demuestran en el caso de la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ la convergencia del método para todo $\alpha > 0$. Para más detalles sobre Peaceman-Rachford ver [65, 49].

El algoritmo descrito por (3.3) y (3.4) necesita de un iterado inicial $(\boldsymbol{u}_h^0, p_h^0) \in \left(X_h^0 \times M_h^{1,m}\right)$ que se obtiene al resolver un paso lineal de Darcy:

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\varphi}_h &\in X_h, \frac{\mu}{\rho}\int_\Omega \left(K^{-1}\boldsymbol{u}_h^0\right)\cdot \boldsymbol{\varphi}_h dx + \sum_{T\in\Im_h}\int_T \nabla p_h^0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_h dx = 0 \\ \forall q_h &\in M_h, \sum_{T\in\Im_h}\int_T \nabla q_h \cdot \boldsymbol{u}_h^0 dx = -\int_\Omega b q_h dx + \int_{\partial\Omega} g q_h d\sigma \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ambos problemas (3.4) y (3.5) son problemas de punto de ensilladura lineales. El problema (3.4) se escribe en forma matricial:

$$M(\alpha)\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \tag{3.6}$$

con:

$$
\begin{aligned}
M(\alpha) &= \begin{bmatrix} A + \frac{1}{\alpha} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \\
y^0 &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_h^0 \\ p_h^0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{z} &= \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

donde A es la matriz asociada al termino $\frac{\mu}{\rho} \int_\Omega \left(K^{-1} \boldsymbol{u}_h^{n+1}\right) \cdot \boldsymbol{\varphi}_h d\boldsymbol{x}$ y B es la matriz asociada a $\sum_{T \in \Im_h} \int_T \nabla p_h^{n+1} \cdot \boldsymbol{\varphi}_h d\boldsymbol{x}$. Ahora el problema (3.5) se expresa en forma matricial como sigue:

$$N \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$$

con

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos como la matriz de coeficientes para el paso lineal de Darcy (3.5) sólo se diferencia de la matriz de coeficientes para (3.4) en el bloque superior izquierdo. Es por ello que a partir de la solución del paso lineal de Darcy se construye la matriz de coeficientes para (3.4).

Cuando los pares de espacios de elementos finitos son (X_h^0, M_h^1) y $\left(X_h^0, M_h^{1,m}\right)$ el paso no lineal (3.3) tiene una solución explícita a través de un manejo algebraico y la resolución de una ecuación de segundo grado, permitiendo en cada iteración resolver el paso (3.3) de forma sencilla y rápida; luego el paso (3.4) implica la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (3.6) el cual se resuelve usando métodos iterativos, por ejemplo MINRES *(Minimal Residual)*. Este método iterativo se ve favorecido por la estructura simétrica de las matrices, para más detalles sobre MINRES y otros métodos iterativos se puede consultar [27, 28, 35, 38, 42, 44, 45, 59].

Finalmente esta combinación de dos pasos uno nolineal explícito y sencillo con otro lineal convierten al algoritmo de PR en una alternativa muy atractiva.

3.1.1 Sobre la solución explícita de (3.3)

Dado que las funciones de prueba φ_h, así como la solución $u_h^{n+\frac{1}{2}}$ y ∇p_h^n son constantes sobre cada elemento T, un pequeño cálculo nos lleva a:

$$u_T^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma} F_T^{n+\frac{1}{2}}, \tag{3.8}$$

donde:

$$F_T^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha} u_T^n - K_T^{-1} u_T^n - \nabla_T p_h^n,$$

$$\gamma = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} + 4\frac{\beta}{\rho}\left|F_T^{n+\frac{1}{2}}\right|},$$

$$K_T^{-1} = \frac{1}{|T|}\int_T K^{-1}(x)\,dx.$$

para más detalles consultar [25].

3.2 Método de Newton Estandar (SN)

Sea $g(x) : \Re^m \to \Re^m$ (g una función vectorial) y denotamos el jacobiano de g en x, con $x \in \Re^m$ como la matriz de $m \times m$

$$D[g(x)] = \left[\left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|_x\right]_{m\times m}, i = 1, ..., m; j = 1, ..., m. \tag{3.9}$$

Si x_0 es alguna aproximación a la solución de:

$$g(x) = 0, \tag{3.10}$$

entonces el método de Newton para resolver (3.10) esta dado por el siguiente algoritmo:

Mientras $\|g(x_k)\| > 0$ hallar el vector Δx solución del sistema lineal:

$$D[g(x_k)]\Delta x = -g(x_k)$$

ahora el iterado siguiente x_{k+1} esta dado por:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x$$

para $k = 0, 1, ...,$hasta alcanzar la tolerancia (tol) exigida. Es bien conocido que si x_0 es una aproximación inicial suficientemente buena, el método de Newton tiene una convergencia cuadrática.

A continuación, presentamos su aplicación en la resolución del sistema no lineal, formado por (2.2) y (2.3) en función de las diferentes discretizaciones empleadas.

El método de Newton aplicado al problema (2.2) y (2.3) se escribe como:

$$\begin{aligned} &\text{mientrás } \|G(s_k)\| > tol \\ &\qquad k = k+1 \\ &\qquad D[G(s_k)]\,\varepsilon_{k-1} = -G(s_{k-1}) \\ &\qquad s_k = s_{k-1} + \varepsilon_{k-1} \\ &\text{fin} \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned} s_k &= \begin{pmatrix} u_h^k \\ p_h^k \end{pmatrix} \\ G(s_k) &= \begin{bmatrix} B(s_k) & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con $B(s_k)$ tal y como se definió en (3.1). Ahora para calcular $D[G(s_k)]$ necesitamos la

derivada de $B(s_k)$ con respecto a cada una de sus variables:

$$\begin{aligned} D\left[B\left(s^k\right)\right] &= D\left[B\left(u_h^k, p_h^k\right)\right] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial u_h^i} B\left(u_h^k, p_h^k\right), \frac{\partial}{\partial p_h^i} B\left(u_h^k, p_h^k\right)\right] \quad i = 1, ..., m; j = 1, ..., m \end{aligned}$$

Recordemos que X_h y M_h están formados por las funciones $\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{P}_1$ respectivamente sobre cada $T \in \Im_h$. Así pues, el gradiente de las funciones base de M_h es constante sobre cada T y la ecuación (2.2) se escribe:

$$A_{T_i} \frac{\mu}{\rho}\left(k_{11}^{-1} u_{hx}^i + k_{12}^{-1} u_{hy}^i\right) + A_{T_i} \frac{\beta}{\rho} \sqrt{\left(u_{hx}^i\right)^2 + \left(u_{hy}^i\right)^2} u_{hx}^i + \frac{A}{3} \sum_{j=1}^{3} p_h^j \nabla \psi_j = 0, \qquad (3.11)$$

donde A_{T_i} es el área del triángulo T_i, k_{ij}^{-1} es el elemento (i, j) de la matriz K^{-1} y ψ_j la función base del espacio M_h correspondiente al grado de libertad j.

La ecuación (2.3) por ser una ecuación lineal mantiene como jacobiano la matriz de coeficientes del sistema lineal para cada paso de la iteración de Newton.

La matriz jacobiana tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D\left[G\left(s_k\right)\right] &= \begin{bmatrix} D\left[B\left(s^k\right)\right] & C \\ C^T & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.12) \\ C &= \left[\frac{A_{T_i}}{3} \nabla \psi_i\right] \end{aligned}$$

En el caso del método de Newton, se utilizó como método iterativo para resolver los sistemas de ecuaciones lineales el método MINRES *(Minimal Residual)*. De todas las versiones posibles del MINRES se implementó su versión restart sin precondicionador, tomando como número máximo de iteraciones para reiniciar el método el número de velocidades n_v correspondientes a cada problema. Es importante resaltar que utilizamos

MINRES por las características de simetría de la matriz, para las aplicaciones en donde el Jacobiano no presente esta característica se puede utilizar por ejemplo GMRES más referencias sobre este y otros métodos son reseñadas por [5, 12, 43, 52, 53].

3.3 Método de Newton Modificado (MN)

La experimentación numérica nos mostró los costos computacionales, en cuanto a tiempo de procesador, que amerita el cálculo del Jacobiano $D[G(s_k)]$ en cada iteración, por ello buscamos una alternativa, basado en la no actualización del jacobiano en cada iteración. Inicializamos un contador, $count = 0$, que mide la cantidad de veces que la variación del Jacobiano es menor que 10^{-5}:

$$\text{Si} \quad \|D[G(s_k)] - D[G(s_{k-1})]\| \leq 10^{-5}$$

$$count = count + 1$$

$$\text{Si} \quad count == 5$$

$$D[G(s_{k+1})] = D[G(s_k)]$$

$$fin$$

$$fin$$

cuando $count = 5$ mantendremos fijo el jacobiano para las siguientes iteraciones de Newton a esta variante la hemos llamado Newton Modificado (MN).

MN comienza siendo un método SN y cuando el Jacobiano deje de cambiar significativamente durante 5 iteraciones consecutivas, es decir:

$$\|D[G(s_k)] - D[G(s_{k-1})]\| \leq 10^{-5}, \tag{3.13}$$

el jacobiano se fija y se itera hasta alcanzar la tolerancia exigida o el número máximo

de iteraciones previsto. Obviamente las aproximaciones realizadas con el Jacobiano fijo pierden calidad en comparación con la aproximación que se alcanza cuando se actualiza el jacobiano en cada iteración. En lo sucesivo al referirnos al método de Newton haremos referencia a su versión modificada por ser más vérsatil y eficiente.

Capítulo 4

Resultados numéricos

En esta sección desarrollamos el estudio numérico de las diferentes discretizaciones, para ello resolvemos tres problemas de prueba combinando los métodos de resolución antes descritos con cada una de las discretizaciones. Analizamos peño de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, la influencia de la distribución de autovalores y del número de condición de la matriz de coeficientes del sistema.

4.1 Problemas de Prueba

A continuación presentamos tres problemas de prueba cada uno de ellos construidos en función de un campo de velocidad $\boldsymbol{u}(x,y)$ de divergencia nula y una función presión $p(x,y)$. Para cada uno de ellos se calcula una solución numérica con cada una de las discretizaciones y esquemas de resolución desarrollados en los capítulos precedentes. Éstas aproximaciones se comparan con la solución analítica para mostrar la calidad de la solución obtenida.

La experimentación numérica se realizó tomando como dominio un cuadrado $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$ y una triangulación $\Im_h$ formada por una familia de tres rectas paralelas como se muestra en la figura 4.1:

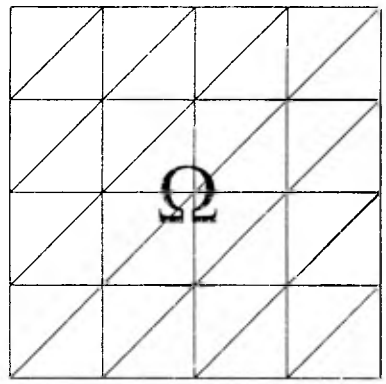

Fig. 4.1: Triangulación $\Im_h$

4.1.1 Problema de Prueba 1 (PP1)

Se construyó un problema del tipo (1.2) a (1.5) tomando como solución exacta para el campo de velocidades y presión:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(x,y) &= \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} \\ p(x,y) &= x^3+y^3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde cada componente de la velocidad $\boldsymbol{u}(x,y)$ es una función lineal y la presión un polinomio de tercer grado, esta forma de fijar la presión fue tomada de Urquiza y otros en [60]. Además la div $\boldsymbol{u}(x,y) = 0$ en Ω como ya se había mencionado.

Consideramos las siguientes constantes:

$$\mu = \rho = 1, K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Así el probema (1.2) a resolver es:

$$\frac{\mu}{\rho}K^{-1}\boldsymbol{u}+\frac{\beta}{\rho}\left|\boldsymbol{u}\right|\boldsymbol{u}+\nabla p = \boldsymbol{f}\left(x,y\right) \text{ en } \Omega \tag{4.3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ en } \Omega \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = g \text{ sobre } \partial\Omega \tag{4.5}$$

con:

$$\boldsymbol{f}\left(x,y\right)=\begin{pmatrix} x+y+\beta\sqrt{2x^2+2y^2}\left(x+y\right) \\ x-y+\beta\sqrt{2x^2+2y^2}\left(x-y\right)\end{pmatrix},$$

$$g\left(\sigma\right)=\begin{cases} 1+\sigma, & x=1 \\ 1-\sigma, & x=-1 \\ \sigma-1, & y=1 \\ -\sigma-1, & y=-1 \end{cases} \text{.sobre } \partial\Omega$$

En la figura 4.2 se muestra la distribución del campo de velocidades en Ω:

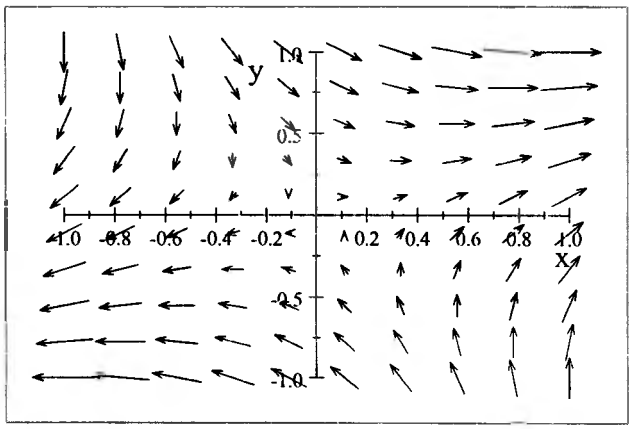

Fig 4.2: Solución PP1 $\boldsymbol{u}\left(x,y\right)=\begin{bmatrix} x+y \\ x-y\end{bmatrix}$

4.1.2 Problema de Prueba 2, Roger Pierre (PP2)

En este segundo problema se tomó como solución exacta para la velocidad y presión:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(x,y) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(x+1)^2 \\ -\frac{1}{2}(x+1)(y+1) \end{bmatrix} \\ p(x,y) &= x^3+y^3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

en este caso la velocidad esta representada por un polinomio de segundo grado, mientrás la presión sigue siendo una función de grado 3. Igual que antes la $\operatorname{div} \boldsymbol{u}(x,y) = 0$ en Ω. Este problema es resuelto para el caso lineal $\beta = 0$ en [60] en un estudio sobre la Ecuación de Darcy y las discretizaciones de elementos finitos. Consideramos las mismas constantes (4.2) con

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{(x+1)^2}{4}\left[1+\beta\frac{(x+1)}{4}\sqrt{(x+1)^2+4(y+1)^2}\right]+3x^2 \\ -\frac{(x+1)(y+1)}{2}\left[1+\beta\frac{(x+1)}{4}\sqrt{(x+1)^2+4(y+1)^2}\right]+3y^2 \end{pmatrix}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & x=1, \\ 0, & x=-1, \\ -(x+1), & y=1, \\ 0, & y=-1, \end{cases} \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

Se muestra la distribución de las velocidades en Ω para PP2 en la figura 4.3:

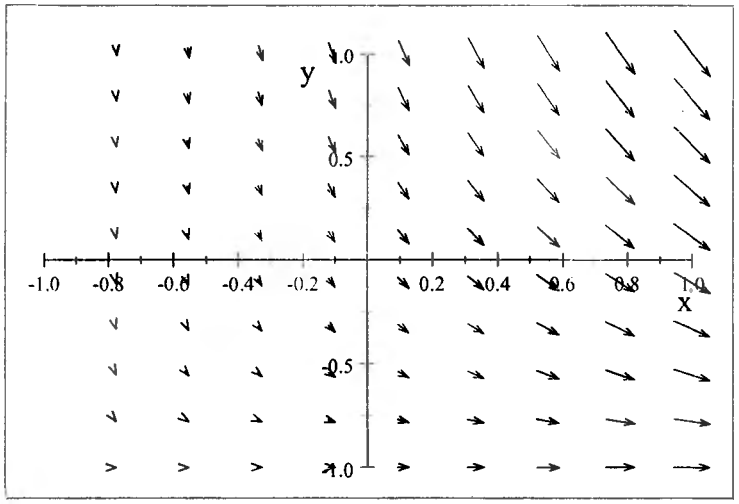

Fig. 4.3: Solución PP2 $\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(x+1)^2 \\ -\frac{1}{2}(x+1)(y+1) \end{bmatrix}$

4.1.3 Problema de Prueba 3, Smith - Hutton (PP3)

Finalmente se tomó como solución exacta para la velocidad y presión:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(x,y) &= \begin{bmatrix} 2y(1-x^2) \\ -2x(1-y^2) \end{bmatrix} \\ p(x,y) &= x^3 + y^3 \end{aligned} \tag{4.7}$$

en este caso las componentes de la velocidad y la presión son funciones polinómicas grado 3. Igual que antes la $\operatorname{div} \boldsymbol{u}(x,y) = 0$ en Ω. Este problema es también resuelto para el caso lineal $\beta = 0$ en [60]. Consideramos las mismas constantes en (4.2) con

$$\boldsymbol{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y(1-x^2) + \beta\sqrt{(2y(1-x^2))^2 + (2x(1-y^2))^2}\,2y(1-x^2) \\ -2x(1-y^2) - \beta\sqrt{(2y(1-x^2))^2 + (2y(1-x^2))^2}\,2x(1-y^2) \end{pmatrix},$$

$$g(\sigma) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

Se muestra la distribución de las velocidades en Ω para PP3 en la figura 4.4:

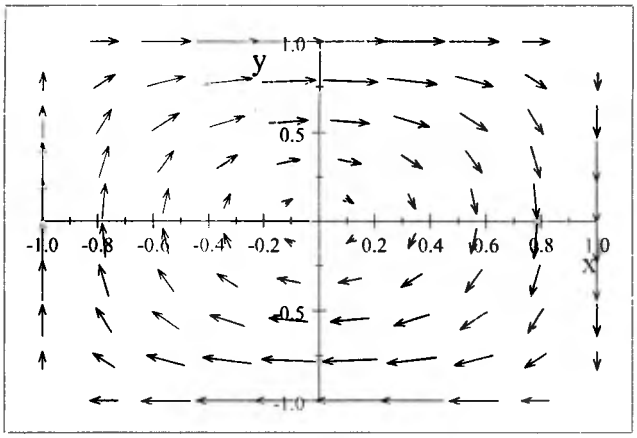

Fig. 4.4: Solución PP3 $\boldsymbol{u}(x,y) = \begin{bmatrix} 2y(1-x^2) \\ -2x(1-y^2) \end{bmatrix}$

Este trabajo presenta estrategias de resolución del problema (1.2) a (1.4) utilizando dos esquemas de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales: Peaceman-Rachford y el método de Newton con dos discretizaciones de elementos finitos: $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$. El modelo de Darcy-Forchheimer (1.2) a (1.4), como ya se ha dicho, es un modelo no lineal, al fijar valores para los parámetros μ, ρ y K concentramos **el peso no lineal del modelo en el parámentro** β, es por ello que es uno de nuestros objetos de estudio.

4.2 Comportamiento de Peaceman Rachford (PR)

Para estudiar el método PR necesitamos observar la influencia de α en su comportamiento, con la seguridad (ver [25]) de que para cualquier $\alpha > 0$ el método converge, debemos estimar qué valor o valores de α optimizan su desempeño, aunque no contamos con resultados teóricos que caractericen la velocidad de convergencia en función de α, podemos a partir de un estudio matricial de (3.7).

Es fácil concluir que para para $\alpha >> 1$ tenemos que $M(\alpha) \to M$ con

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

siendo M la matriz asociada al modelo lineal de Darcy, matriz evidentemente inadecuada para aproximar y resolver el sistema nolineal de Darcy Forchheimer, razón de nuestro estudio, como veremos en las figuras 4.7, 4.9 y 4.11 la convergencia de PR se ve seriamente perjudicada para $\alpha >> 1$.

Finalmente para $\alpha << 1$ tenemos $M(\alpha) \rightarrow N$ con

$$N = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

siendi I la matriz identidad, N se hace singular en la medida que $\alpha \rightarrow 0$ lo cual deteriora la convergencia de los esquemas de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y con ella la convergencia de PR, este comportamiento puede observarse en las figuras 4.8, 4.10 y 4.12.

Es importante destacar que Girault y Wheeler en [25] demuestran que el algoritmo de PR provee una aproximación $\boldsymbol{u}_h^n$ adecuada a la solución exacta $\boldsymbol{u}_h$, sólo para el campo de velocidades. En el caso de la presión, señalan que la convergencia de $p_h^n \rightarrow p_h$ no es obvia y recuerdan que a partir de la solución de la ecuación de Poisson:

$$\forall q_h \in M_h, \sum_{T\in\Im_h} \int_T \nabla p_h \cdot \nabla q_h d\boldsymbol{x} = -\frac{\mu}{\rho} \sum_{T\in\Im_h} \int_T (K^{-1}\boldsymbol{u}_h^n)\cdot\nabla q_h d\boldsymbol{x} - \frac{\beta}{\rho} \sum_{T\in\Im_h} \int_T |\boldsymbol{u}_h^n| (\boldsymbol{u}_h^n \cdot \nabla q_h)\, d\boldsymbol{x} \tag{4.8}$$

podemos recuperar una solución p_h^n adecuada. Es por ello que en lo sucesivo los esquemas de resolución para la formulación variacional (2.2) y (2.3) miden el grado de aproximación a la solución exacta sólo considerando la velocidad. Así tenemos que el error e_n es:

$$e_n = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.9}$$

Es e_n el parámetro responsable de detener los esquemas de resolución. En algunos casos se define un margen máximo de tolerancia o error entre la solución numérica y la analítica a través de la constante tol. Si $e_n \leq tol$ los métodos se detienen finalizando el

cálculo de u_h^n.

Hemos impuesto una condición de estancamiento para detener la iteración antes de alcanzar el máximo número de iteraciones previsto, esta condición es similar a (3.13), sólo que en lugar de comparar los Jacobianos comparamos los errores e_n si $|e_n - e_{n-1}| \leq 10^{-5}$ durante 5 iteraciones consecutivas detenemos los métodos de resolución del sistema no lineal declarando estancamiento.

En esta sección presentamos un análisis sobre los diferentes aspectos computacionales y matriciales involucrados en la resolución numérica de los problemas de prueba. Se consideró $h_x = h_y = h$ en todos los casos, una malla uniforme sobre Ω.

Ahora profundizaremos sobre la influencia de α en el método de Peaceman-Rachford.

4.2.1 Sobre la influencia de α en el método de Peaceman-Rachford

En [25] se puede encontrar la demostración sobre la convergencia de PR para todo $\alpha > 0$. Sin embargo, el comportamiento de PR se ve influenciado por los valores que este parámetro pueda asumir. Es por ello, que a continuación, mostramos los resultados de varias pruebas numéricas con los problemas de prueba que nos permitan decidir qué valor de α tomar o fijar para realizar las comparaciones con el método de Newton.

Se utilizan las constantes definidas en (4.2), $h = \frac{1}{40}$ y $\beta = 10$ tomando valores de $\alpha \geq 1$ y $0 < \alpha \leq 1$. El comportamiento de PR se ve reflejado en la convergencia de la solución numérica $u_h^n \to u$, esta convergencia se observa en las figuras 4.5 y 4.6 para las discretizaciones $X_h^0 \times M_h^1$ y $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ donde mostramos e_k versus la iteración k.

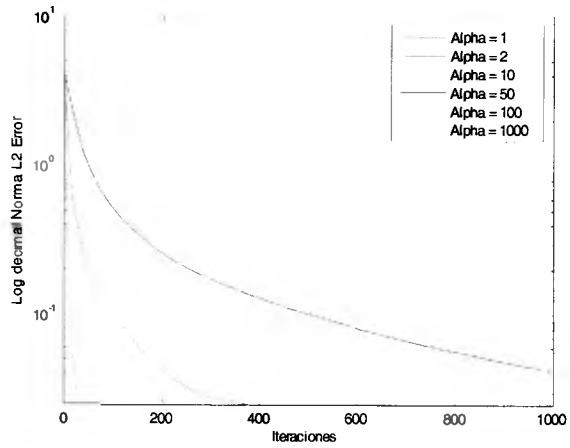

Fig. 4.5. Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$
para $\alpha \geq 1$ en PP1

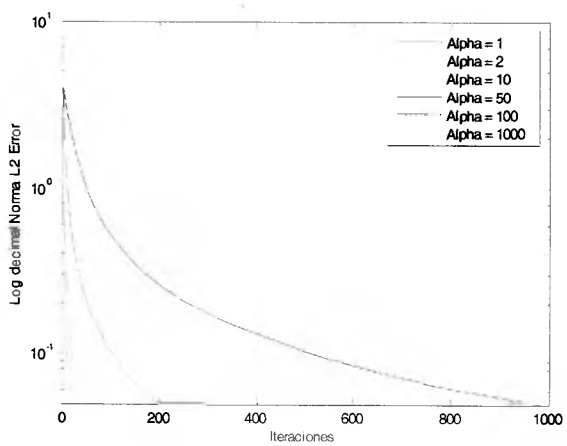

Fig. 4.6. Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$
para $\alpha \geq 1$ en PP1

En cuanto al comportamiento de PR para valores $0 < \alpha \leq 1$ tenemos:

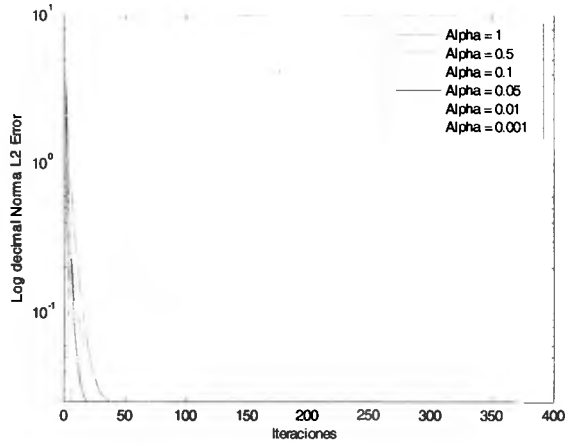

Fig. 4.7: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$
para $0 < \alpha \leq 1$ en PP1

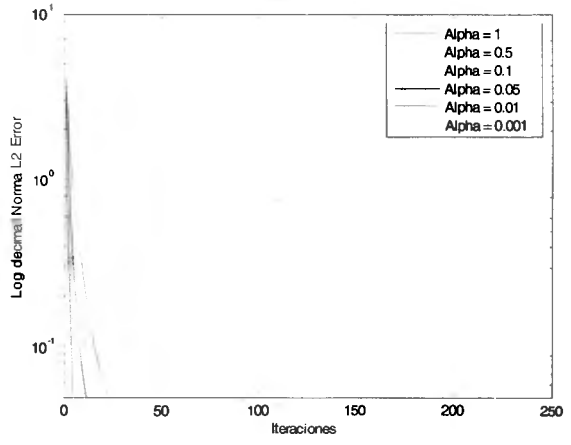

Fig. 4.8: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$
para $0 < \alpha \leq 1$ en PP1

Además presentamos las siguientes tablas donde se muestra el comportamiento de Peaceman Rachford para distintos valores de α en función de las iteraciones, tiempo de ejecución y error obtenido, se fijaron como parámetros para detener el método: a) el

número máximo de iteraciones permitidas $M_{axiter} = 1000$ b) el estancamiento del método $tol = 0$. Dada la monotonía del comportamiento de la solución numérica el proceso de estancamiento en el error e_h^n nos conduce a la mejor solución numérica provista para cada valor de h. En las tablas 4.1 a 4.6 se utilizan estos criterios para presentar el desempeño de PR.

	$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$			$h = \frac{1}{40}$		
α	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$
1000	1000	1.272	0.168753	1000	871.7	0.119608	1000	6100	0.103247
100	1000	1.275	0.168753	1000	867.8	0.119608	1000	6168	0.103247
50	1000	1.282	0.144688	1000	872.8	0.078293	1000	6214	0.049170
10	309	0.382	0.141464	354	302.8	0.071143	397	2454	0.035923
2	84	0.104	0.141034	95	79.7	0.070668	105	608	0.035415
1	49	0.061	0.140971	55	44.5	0.070610	60	341	0.035355
0.5	29	0.035	0.140985	33	26.9	0.070588	35	206	0.035330
0.1	**13**	**0.017**	**0.140975**	**13**	**11.2**	**0.070584**	**14**	**86**	**0.035321**
0.05	28	0.031	0.140972	32	23.8	0.070589	35	179	0.035333
0.01	48	0.044	0.140982	54	33.0	0.070612	58	233	0.035366
0.001	316	0.184	0.141375	351	112.4	0.071127	362	826	0.036278

Tabla 4.1 Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP1, $X_h^0 \times M_h^1$

	$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$			$h = \frac{1}{40}$		
α	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$
1000	1000	51.465	0.140528	1000	283,1	0.109700	1000	2483	0.100445
100	1000	51.371	0.140528	1000	282.8	0.109700	1000	2462	0.100445
50	1000	52,089	0.101829	1000	285.6	0.058980	1000	2498	0.041867
10	350	18,377	0.095435	384	110.5	0.048022	424	1089	0.024329
2	96	5,132	0.094925	102	30.1	0.047515	111	290	0.022381
1	55	3,136	0.094868	59	17.8	0.047449	63	167	0.023746
0.5	33	1,888	0.094839	35	10.9	0.047423	37	96	0.023718
0.1	**14**	**0,905**	**0.094829**	**14**	**4.8**	**0.047414**	**14**	**41**	**0.023703**
0.05	35	1.654	0.094845	36	9.5	0.047428	37	86	0.023722
0.01	58	2.184	0.094881	60	12.6	0.047462	62	117	0.023761
0.001	375	8.268	0.095441	392	46.6	0.048020	421	479	0.024318

Tabla 4.2: Comportamiento de PR para diferentes α con $\beta = 10$, PP1, $X_h^0 \times M_h^{1,m}$

Para el problema PP2 tenemos:

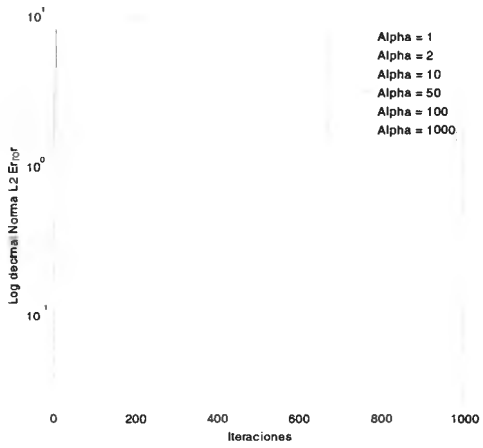

Fig. 4.9. Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$

para $\alpha \geq 1$ en PP2

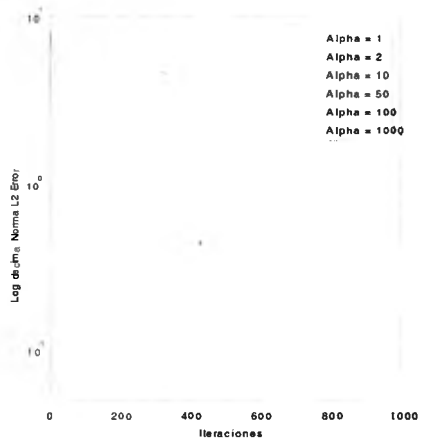

Fig. 4.10. Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$

para $\alpha \geq 1$ en PP2

para $0 < \alpha \leq 1$:

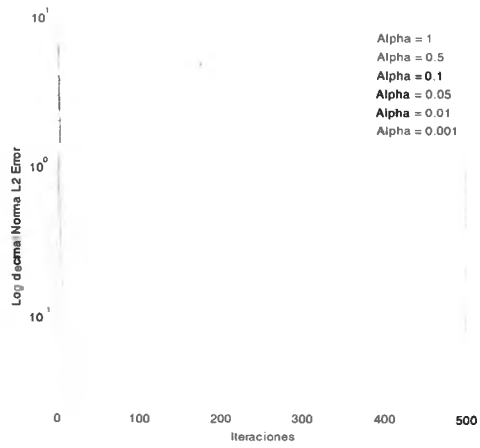

Fig. 4.11. Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$ para $0 < \alpha \leq 1$ en PP2

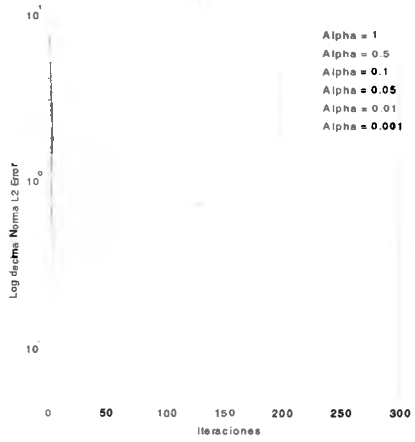

Fig. 4.12. Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para $0 < \alpha \leq 1$ en PP2

	$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$			$h = \frac{1}{40}$		
α	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$
1000	1000	1.428	0.196474	1000	976.3	0.180976	1000	7197	0.176941
100	1000	1.430	0.196474	1000	984.5	0.180976	1000	6955	0.176941
50	1000	1.433	0.104112	1000	979.7	0.072296	1000	7003	0.061928
10	412	0.569	0.086084	450	433.4	0.043243	492	3390	0.021929
2	110	0.150	0.085540	117	110.4	0.042706	126	877	0.021376
1	63	0.087	0.085447	66	62.9	0.042643	71	489	0.021311
0.5	37	0.051	0.085473	39	37.4	0.042611	41	284	0.021283
0.1	**16**	**0.022**	**0.085441**	**18**	**17.3**	**0.042599**	**19**	**129**	**0.021273**
0.05	49	0.056	0.085423	51	37.9	0.042651	55	298	0.021325
0.01	84	0.085	0.085486	91	63.0	0.042702	96	463	0.021402
0.001	527	0.314	0.085552	586	195.1	0.043721	650	1532	0.022482

Tabla 4.3 Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP2, $X_h^0 \times M_h^{1,m}$

	$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$			$h = \frac{1}{40}$		
α	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$
1000	1000	55.022	0.191363	1000	312.0	0.179865	1000	2824	0.176677
100	1000	55.162	0.191363	1000	311.3	0.179865	1000	2829	0.176677
50	1000	55.193	0.094576	1000	311.9	0.070170	1000	2805	0.061548
10	441	24.414	0.072438	469	146.8	0.038238	504	1412	0.020032
2	119	6.755	0.071805	123	39.2	0.037645	129	363	0.019457
1	69	3.994	0.071772	70	22.7	0.037568	73	208	0.019383
0.5	41	2.449	0.071674	41	13.7	0.037530	43	127	0.019347
0.1	**27**	**1.607**	**0.071646**	**29**	**9.5**	**0.037495**	**33**	**94**	**0.019306**
0.05	49	2.434	0.071268	57	15.5	0.037033	65	159	0.018935
0.01	68	2.902	0.071657	74	18.1	0.037301	86	188	0.019159
0.001	511	12.402	0.072655	569	73.3	0.038358	641	782	0.020311

Tabla 4.4 Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP2, $X_h^0 \times M_h^1$

Para el problema PP3 tenemos:

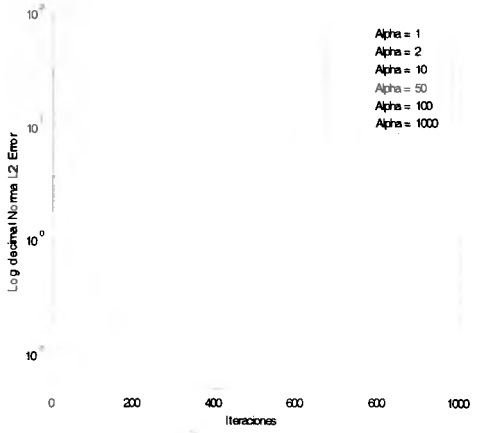

Fig. 4.13: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$

para $\alpha \geq 1$ en PP3

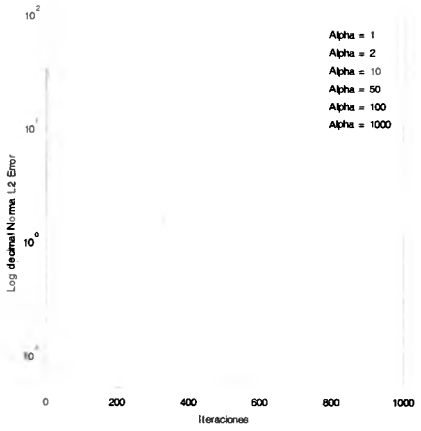

Fig.4.14: Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$

para $\alpha \geq 1$ en PP3 para $0 < \alpha \leq 1$:

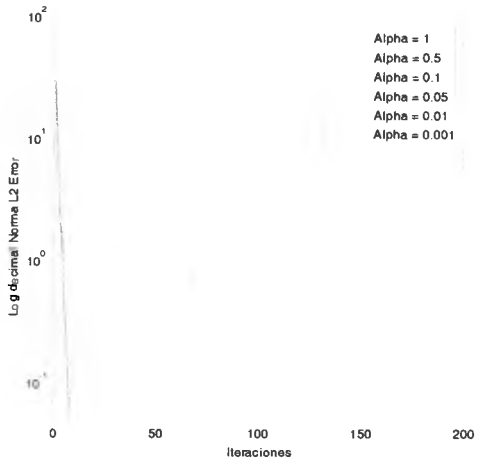

Fig. 4.15. Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^1$ para $0 < \alpha \leq 1$ en PP3

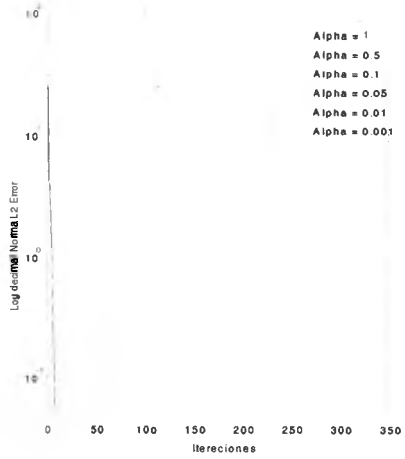

Fig. 4.16. Comportamiento de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para $0 < \alpha \leq 1$ en PP3

	$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$			$h = \frac{1}{40}$		
α	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$
1000	605	0.761	0.199695	962	838.3	0.102744	1000	6112	0.058231
100	605	0.761	0.199695	962	837.7	0.102744	1000	6056	0.058231
50	483	0.601	0.197161	674	582.1	0.099999	855	4961	0.051388
10	187	0.228	0.195036	226	190.6	0.097846	264	1589	0.049187
2	59	0.072	0.194621	67	56.3	0.097421	75	454	0.048755
1	36	0.045	0.194575	40	34.7	0.097373	44	263	0.048707
0.5	23	0.029	0.19457	25	21.5	0.097355	27	162	0.048688
0.1	**18**	**0.022**	**0.194554**	**17**	**13.8**	**0.097351**	**18**	**102**	**0.048684**
0.05	22	0.024	0.194558	22	14.7	0.097357	24	112	0.048690
0.01	35	0.033	0.194563	36	22.4	0.097372	40	164	0.048714
0.001	206	0.108	0.194873	217	63.3	0.097782	224	466	0.049372

Tabla 4.5 Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP3, $X_h^0 \times M_h^{1,m}$

	$h=\frac{1}{10}$			$h=\frac{1}{20}$			$h=\frac{1}{40}$		
α	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$	iter	tiempo	$e_n(h)$
1000	822	39.967	0.137545	1000	273.2	0.073489	1000	2413	0.046050
100	822	40.545	0.137545	1000	273.6	0.073489	1000	2413	0.046050
50	599	29.375	0.134871	778	214.3	0.068829	952	2316	0.035839
10	209	10.436	0.132765	247	68.5	0.066667	285	699	0.033595
2	63	3.307	0.132356	71	20.1	0.066242	79	199	0.033165
1	38	2.044	0.132312	42	12.2	0.066195	46	119	0.033116
0.5	23	1.295	0.132299	26	7.8	0.066177	28	75	0.033097
0.1	**17**	**0.983**	**0.132300**	**18**	**5.6**	**0.066174**	**18**	**50**	**0.033093**
0.05	23	1.108	0.132311	24	6.1	0.066182	25	55	0.033101
0.01	38	1.607	0.132340	40	9.0	0.066206	42	86	0.033128
0.001	229	4.852	0.132727	242	27.0	0.066567	263	287	0.033490

Tabla 4.6 Comportamiento de PR para diferentes α, con $\beta = 10$, PP3, $X_h^0 \times M_h^1$

En las figuras 4.4 a 4.16 se observó como la convergencia de PR fue perjudicada en todos los problemas de pruebas para valores de $\alpha >> 1$ y $0 < \alpha << 1$.

4.2.2 Autovalores

Para ampliar aún más nuestro análisis sobre la convergencia de PR para la discretizaciones $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$, presentamos a continuación para $h = \frac{1}{20}$, la distribución de autovalores para el paso lineal de Darcy asociado al método y para las matrices $M(\alpha)$ asociadas a Peaceman Rachforf.

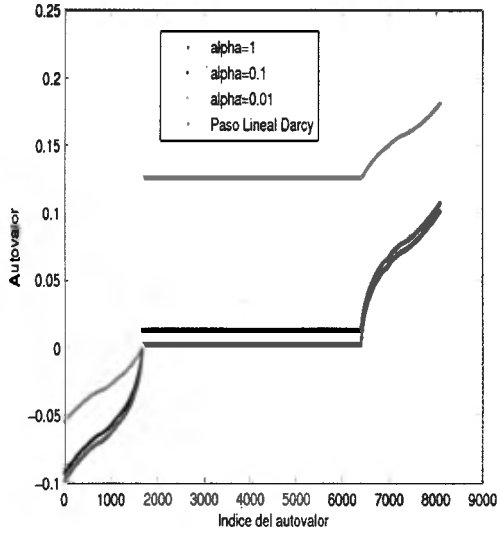

Fig 4.17: Autovalores de PR $X_h^0 \times M_h^1$ para distintos α con $h = \frac{1}{20}$

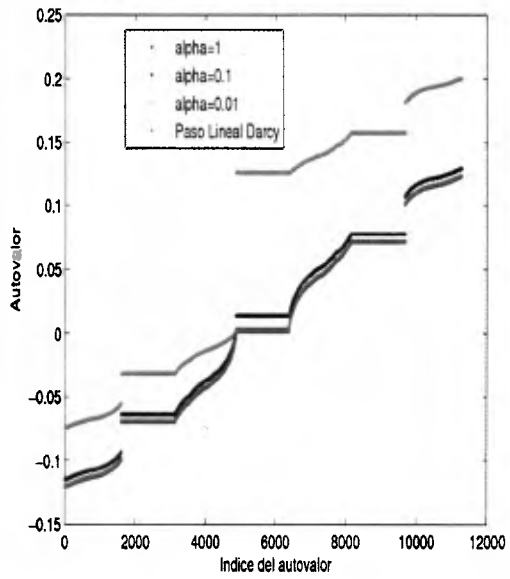

Fig 4.18: Autovalores de PR $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ para distintos α con $h = \frac{1}{20}$

En las figuras 4.17 y 4.18 se observa como los autovalores tienden agruparse alrededor de dos valores extremos, en el caso de $\alpha << 1$ esto mejoraría el comportamiento de MINRES siempre y cuando ninguno de los autovalores estuviese cerca de cero ver [45, 59, 62]. Además esto influye en el incremento del número de condición de $\kappa(M(\alpha))$. En el caso de $\alpha >> 1$ los autovalores tienden a comportarse como los autovalores de la matriz de coeficientes del paso lineal de Darcy (3.5). La distribución de autovalores para $\alpha > 1$ no se presentan ya que las mismas tienden a superponerse sobre los autovalores de (3.5) de manera que no logra apreciarse la diferncia entre unos autovalores y otros.

Todos éstos resultados **nos permitieron fijar** $\alpha = 0.1$ para el **método** PR que será utilizado en la solución y comparación de todos los métodos de resolución y sus respectivas discretizaciones. Las siguientes tablas muestran el desempeño de PR para las discretizaciones $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$ estos resultados serán la base para comparar

ambos esquemas de resolución posteriormente, se mantienen los criterios de $tol = 0$ y $M_{axiter} = 1000$, así podemos cualificar las soluciones provistas por cada uno de las discretizaciones

Problema 1

		$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	13	1.75	0.140975	13	11.07	0.070584
10	$X_h^0 \times M_h^1$	14	0.89	0.094829	14	4.75	0.047413
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	18	2.25	0.140990	19	16.49	0.070586
20	$X_h^0 \times M_h^1$	19	1.08	0.094438	20	6.32	0.047216
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	22	2.68	0.140996	24	19.77	0.070587
30	$X_h^0 \times M_h^1$	23	1.28	0.094361	25	7.60	0.047178
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	27	3.37	0.140999	29	24.04	0.070559
40	$X_h^0 \times M_h^1$	28	1.48	0.094334	30	8.86	0.047165
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	31	3.71	0.141001	33	26.25	0.070559
50	$X_h^0 \times M_h^1$	33	1.83	0.094325	34	10.16	0.047164

Tabla 4.7 Comportamiento de PR para diferentes β, PP1 $h = \frac{1}{10}$ y $h = \frac{1}{20}$ con $\alpha = 0.1$

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	84.80	0.035321	14	1026.11	0.017669
10	$X_h^0 \times M_h^1$	14	40.91	0.023708	15	530.81	0.011805
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	20	121.65	0.035321	20	1410.17	0.017669
20	$X_h^0 \times M_h^1$	20	54.24	0.023608	20	669.46	0.011805
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	25	152.13	0.035323	26	1803.3	0.017671
30	$X_h^0 \times M_h^1$	26	68.34	0.023589	27	873.51	0.011797
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	30	175.97	0.035326	32	2190.28	0.017674
40	$X_h^0 \times M_h^1$	31	80.90	0.023586	32	1010.34	0.011798
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	34	200.77	0.035333	35	2383.29	0.176874
50	$X_h^0 \times M_h^1$	35	89.65	0.023592	37	1151.94	0.011806

Tabla 4.8 Comportamiento de PR para diferentes β, PP1 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$ con $\alpha = 0.1$

Problema 2

		$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	16	2.25	0.085423	18	16.84	0.042599
10	$X_h^0 \times M_h^1$	27	1.65	0.071646	29	9.54	0.037495
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	20	2.78	0.085443	20	18.65	0.042603
20	$X_h^0 \times M_h^1$	22	1.37	0.063316	25	8.42	0.032969
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	25	3.32	0.085460	26	22.85	0.042609
30	$X_h^0 \times M_h^1$	28	1.67	0.059928	28	9.29	0.031016
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	31	4.13	0.085474	31	28.61	0.042620
40	$X_h^0 \times M_h^1$	33	1.98	0.058105	34	11.12	0.029923
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	35	4.73	0.085497	38	34.88	0.042624
50	$X_h^0 \times M_h^1$	40	2.29	0.056966	42	13.40	0.029220

Tabla 4.9 Comportamiento de PR para diferentes β, PP2 $h = \frac{1}{10}$ y $h = \frac{1}{20}$ con $\alpha = 0.1$

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	19	123.44	0.021273	20	1541.66	0.010633
10	$X_h^0 \times M_h^1$	33	92.72	0.019306	35	1171.71	0.009786
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	21	132.59	0.021274	22	1699.81	0.010631
20	$X_h^0 \times M_h^1$	27	78.09	0.017019	25	868.39	0.008667
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	27	17812	0.021278	28	2115.70	0.010635
30	$X_h^0 \times M_h^1$	27	78.41	0.015988	28	965.27	0.008179
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	33	220.88	0.021285	37	2768.05	0.010636
40	$X_h^0 \times M_h^1$	37	104.02	0.015371	39	1295.45	0.007858
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	40	261.30	0.021289	42	3137.82	0.010646
50	$X_h^0 \times M_h^1$	42	117.11	0.014982	45	1483.15	0.007653

Tabla 4.10 Comportamiento de PR para diferentes β, PP2 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$ con $\alpha = 0.1$

Problema 3

		$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	18	2.22	0.194554	17	13.81	0.097351
10	$X_h^0 \times M_h^1$	17	1.00	0.132299	18	5.60	0.066174
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	27	3.18	0.194562	26	20.59	0.097352
20	$X_h^0 \times M_h^1$	26	1.44	0.131978	26	7.57	0.065995
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	35	4.17	0.194565	32	24.45	0.097352
30	$X_h^0 \times M_h^1$	34	1.76	0.131915	32	8.89	0.065958
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	39	4.49	0.194567	37	28.19	0.097355
40	$X_h^0 \times M_h^1$	38	1.90	0.131892	37	10.00	0.065946
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	44	4.91	0.194566	42	32.12	0.097353
50	$X_h^0 \times M_h^1$	43	2.14	0.131884	40	10.65	0.065938

Tabla 4.11 Comportamiento de PR para diferentes β, PP3 $h = \frac{1}{10}$ y $h = \frac{1}{20}$ con $\alpha = 0.1$

		$h=\frac{1}{40}$			$h=\frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	18	103.63	0.048684	19	1306.84	0.024342
10	$X_h^0 \times M_h^1$	18	49.11	0.033094	19	632.80	0.001655
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	27	148.87	0.048684	27	1758.22	0.024343
20	$X_h^0 \times M_h^1$	27	67.97	0.032999	27	843.05	0.016501
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	33	179.68	0.048685	33	2107.93	0.024343
30	$X_h^0 \times M_h^1$	33	80.50	0.032980	33	1002.91	0.016491
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	37	197.25	0.048685	38	2399.19	0.024343
40	$X_h^0 \times M_h^1$	38	91.65	0.032972	39	1151.55	0.016487
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	41	213.86	0.048686	42	2691.55	0.024343
50	$X_h^0 \times M_h^1$	41	96.86	0.032970	42	1230.46	0.016485

Tabla 4.12 Comportamiento de PR para diferentes β, PP3 $h=\frac{1}{40}$ y $h=\frac{1}{80}$ con $\alpha=0.1$

En las siguientes tablas establecemos una tolerancia distinta de cero que pueda ser satisfecha por ambas discretizaciones, de esta forma podemos comparar los tiempos de ejecución en la obtención de esta cota, para ello se fijó $tol=1.95h$, esto además es consistente con el hecho de que ambas discretizaciones son $O(h)$. Presentamos los resultados para $h=\frac{1}{40}$ y $h=\frac{1}{80}$ los tamaños más exigentes resueltos en este trabajo.

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	5	36.9566	0.042552	6	530.55	0.019485
10	$X_h^0 \times M_h^1$	5	19.7341	0.034126	6	280.48	0.014478
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	9	61.1212	0.042846	10	786.54	0.020077
20	$X_h^0 \times M_h^1$	8	26.4422	0.043028	10	393.30	0.015246
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	12	79.6385	0.039287	14	1039.90	0.0186742
30	$X_h^0 \times M_h^1$	12	36.1298	0.029560	12	451.279	0.0210197
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	84.7085	0.041454	16	1170.61	0.019660
40	$X_h^0 \times M_h^1$	14	40.7787	0.032510	16	561.338	0.014669
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	16	101.1510	0.041856	18	1301.31	0.020183
50	$X_h^0 \times M_h^1$	16	45.5367	0.033031	18	619.511	0.015372

Tabla 4.13 Comportamiento de PR para diferentes β, PP1 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$ con $\alpha = 0.1$ y $tol = 1.95h$

En este problema se puede observar como PR con la discretización $X_h^0 \times M_h^1$ es evidentemente más eficiente, al punto que la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ con este método, necesitó de entre 90% y 110% más tiempo que $X_h^0 \times M_h^1$ para satisfacer la tolerancia exigida. Además es fácil observar que el número de iteraciones fue similar evidenciando lo costosa de cada iteración en la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ en comparación con $X_h^0 \times M_h^1$.

En el caso del problema PP2 tenemos:

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	6	46.8783	0.030334	6	567.59	0.024192
10	$X_h^0 \times M_h^1$	6	24.7262	0.027080	6	294.19	0.023213
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	10	69.5296	0.028331	10	865.73	0.021605
20	$X_h^0 \times M_h^1$	9	32.9942	0.047350	10	418.24	0.020472
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	12	85.3325	0.0475735	14	1139.57	0.018213
30	$X_h^0 \times M_h^1$	12	40.0299	0.0456459	14	540.87	0.016826
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	16	112.1179	0.030183	16	1299.16	0.023940
40	$X_h^0 \times M_h^1$	16	49.7331	0.026560	16	600.24	0.022880
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	18	123.1472	0.031962	20	1595.89	0.015845
50	$X_h^0 \times M_h^1$	18	55.0060	0.028406	20	727.60	0.014067

Tabla 4.14 Comportamiento de PR para diferentes β, PP2 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$ con $\alpha = 0.1$ y $tol = 1.95h$

En este problema se puede observar como PR con la discretización $X_h^0 \times M_h^1$ sigue siendo más eficiente, al punto que la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ con este método necesitó de entre 92% y 119% más tiempo que $X_h^0 \times M_h^1$ para satisfacer la tolerancia exigida. En el caso del problema PP3 tenemos:

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	12	72.8837	0.0487122	13	940.58	0.024356
10	$X_h^0 \times M_h^1$	9	28.6886	0.040710	10	387.10	0.019244
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	20	112.3987	0.048719	21	1393.88	0.024375
20	$X_h^0 \times M_h^1$	15	41.3715	0.043158	16	543.24	0.023014
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	26	142.7721	0.048717	28	1803.64	0.024356
30	$X_h^0 \times M_h^1$	20	51.7455	0.040970	21	675.61	0.023352
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	30	160.6498	0.0487333	32	2034.07	0.024367
40	$X_h^0 \times M_h^1$	23	57.7672	0.046148	25	772.02	0.022697
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	34	176.8583	0.048722	36	2254.32	0.024365
50	$X_h^0 \times M_h^1$	26	63.2896	0.045180	28	850.44	0.022803

Tabla 4.15 Comportamiento de PR para diferentes β, PP3 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$ con $\alpha = 0.1$ y $tol = 1.95h$

Como ya se ha dicho, este es el problema que presenta mayores complicaciones en su resolución numérica, precisamente es el problema donde se evidencia un mejor desempeño de la discretización $X_h^0 \times M_h^1$ en contraste con $X_h^0 \times M_h^{1,m}$, con este método y en este problema la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ necesitó de entre 142% y 165% más tiempo que $X_h^0 \times M_h^1$ para satisfacer la tolerancia exigida, lo que representa más de el doble del tiempo de ejecución. Además, este problema permite observar una diferencia sustancial en el número de iteraciones requerido para alcanzar la tolerancia a diferencia de los resultados presentes en los problemas PP1 y PP2, donde el número de iteraciones fue similar.

4.3 Comportamiento del Método de Newton

Uno de los métodos más usados en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales es el método de Newton. A continuación presentamos un estudio similar al realizado con el método de Peaceman Rachford para cada uno de los problemas de prueba.

En el problema PP1:

		$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	12	2.61	0.140975	12	19.56	0.070584
10	$X_h^0 \times M_h^1$	12	1.73	0.094829	12	10.17	0.047414
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	13	2.82	0.140992	13	24.29	0.070586
20	$X_h^0 \times M_h^1$	14	2.18	0.094438	14	11.68	0.047216
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	13	2.95	0.140999	14	26.73	0.070586
30	$X_h^0 \times M_h^1$	14	2.39	0.094359	15	14.80	0.047176
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	3.53	0.141004	14	31.27	0.070588
40	$X_h^0 \times M_h^1$	15	2.57	0.094330	15	15.35	0.047161
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	3.53	0.141007	14	32.19	0.070589
50	$X_h^0 \times M_h^1$	15	2.48	0.094317	16	17.30	0.047154

Tabla 4.16 Comportamiento de Newton para diferentes β, PP1 $h = \frac{1}{10}$ y $h = \frac{1}{20}$

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	12	149.07	0.035321	12	1799.5	0.017669
10	$X_h^0 \times M_h^1$	12	76.05	0.023707	12	736.35	0.011853
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	13	178.47	0.035321	14	2280.6	0.017669
20	$X_h^0 \times M_h^1$	14	96.92	0.023608	14	976.3	0.011804
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	236.2	0.035322	15	2745.0	0.017669
30	$X_h^0 \times M_h^1$	15	113.9	0.023588	15	1138.0	0.011179
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	249.5	0.035322	15	2950.5	0.017669
40	$X_h^0 \times M_h^1$	15	115.23	0.023580	15	1117.8	0.011790
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	265.1	0.035322	15	2734.4	0.017669
50	$X_h^0 \times M_h^1$	16	142.7	0.023577	16	1399.8	0.011788

Tabla 4.17 Comportamiento de Newton para diferentes β, PP1 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$

En el problema PP2:

		$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	13	3.68	0.085424	14	28.28	0.042598
10	$X_h^0 \times M_h^1$	14	2.20	0.071650	14	12.37	0.037509
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	5.05	0.085440	15	40.03	0.042601
20	$X_h^0 \times M_h^1$	16	3.20	0.063312	16	18.17	0.032971
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	16	5.58	0.085450	16	51.16	0.042602
30	$X_h^0 \times M_h^1$	17	3.87	0.059915	17	22.24	0.031002
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	17	5.88	0.085457	17	62.30	0.042604
40	$X_h^0 \times M_h^1$	17	4.10	0.058079	18	27.09	0.029900
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	17	5.94	0.085463	18	72.22	0.042605
50	$X_h^0 \times M_h^1$	18	4.68	0.056937	18	30.83	0.029198

Tabla 4.18 Comportamiento de Newton para diferentes β, PP2 $h = \frac{1}{10}$ y $h = \frac{1}{20}$

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	220.42	0.021272	14	2519.8	0.010629
10	$X_h^0 \times M_h^1$	14	98.05	0.019332	14	883.4	0.009830
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	16	371.9	0.021272	16	3687.0	0.010630
20	$X_h^0 \times M_h^1$	16	136.9	0.017026	16	1178.8	0.008700
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	17	452.6	0.021273	17	4562.2	0.010630
30	$X_h^0 \times M_h^1$	17	185.7	0.015971	17	1630.7	0.008166
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	18	552.6	0.021273	18	6508.1	0.010630
40	$X_h^0 \times M_h^1$	18	207.7	0.015357	18	1958.9	0.007847
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	18	573.1	0.021273	19	6399.0	0.010630
50	$X_h^0 \times M_h^1$	19	253.7	0.014955	19	2102.1	0.007633

Tabla 4.19 Comportamiento de Newton para diferentes β, PP2 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$

Finalmente en el problema PP3:

		$h = \frac{1}{10}$			$h = \frac{1}{20}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	13	2.59	0.194554	13	21.27	0.097351
10	$X_h^0 \times M_h^1$	13	1.58	0.132300	13	9.08	0.066174
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	2.76	0.194561	14	19.92	0.097353
20	$X_h^0 \times M_h^1$	14	1.48	0.131979	14	9.39	0.065995
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	2.48	0.194564	14	16.82	0.097353
30	$X_h^0 \times M_h^1$	14	1.84	0.131916	14	10.20	0.065959
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	2.89	0.194565	15	24.42	0.097353
40	$X_h^0 \times M_h^1$	15	1.95	0.131893	15	12.38	0.065945
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	2.75	0.194567	15	20.51	0.097354
50	$X_h^0 \times M_h^1$	15	1.93	0.131884	15	12.96	0.065939

Tabla 4.20 Comportamiento de Newton para diferentes β, PP3 $h = \frac{1}{10}$ y $h = \frac{1}{20}$

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	13	163.2	0.048684	13	2119.7	0.024343
10	$X_h^0 \times M_h^1$	13	73.4	0.033094	13	1004.7	0.016548
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	220.5	0.048684	14	2859.1	0.024343
20	$X_h^0 \times M_h^1$	14	85.7	0.032999	14	828.9	0.016500
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	167.0	0.048684	14	1703.1	0.024343
30	$X_h^0 \times M_h^1$	14	86.36	0.032979	14	898.7	0.016490
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	205.3	0.048684	15	3261.2	0.024343
40	$X_h^0 \times M_h^1$	15	92.35	0.032972	15	1022.6	0.016486
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	193.5	0.048684	15	2541.3	0.024343
50	$X_h^0 \times M_h^1$	15	92.6	0.032969	15	1021.6	0.016484

Tabla 4.21 Comportamiento de Newton para diferentes β, PP3 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$

Los resultados mostrados en las tablas 4.16 a 4.21 nos permiten realizar las siguientes observaciones:

- El número de iteraciones fue similar para cada β en ambas discretizaciones.
- El tiempo de ejecución con la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ fue mayor al de $X_h^0 \times M_h^1$ en ocasiones más del triple del tiempo .
- El error al que convergen es muy similar.

En las siguientes tablas 4.22 a 4.24 mostramos el comportamiento de Newton tomando como criterio de parada $tol = 1.95h$, la misma tolerancia utilizada con PR.

En el caso de PP1:

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	6	52.45	0.035676	6	662.43	0.018230
10	$X_h^0 \times M_h^1$	6	30.50	0.024653	6	381.56	0.013112
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	7	69.67	0.036717	7	861.84	0.022104
20	$X_h^0 \times M_h^1$	7	39.33	0.029824	7	452.39	0.020221
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	8	87.78	0.035840	8	1075.70	0.020112
30	$X_h^0 \times M_h^1$	8	50.83	0.026362	8	539.09	0.016537
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	8	96.74	0.040392	9	1253.45	0.018010
40	$X_h^0 \times M_h^1$	8	54.44	0.042508	9	634.08	0.012897
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	8	103.62	0.044745	9	1361.87	0.018247
50	$X_h^0 \times M_h^1$	9	65.77	0.025979	9	682.43	0.014542

Tabla 4.22 Comportamiento de Newton para diferentes β, PP1 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$ y $tol = 1.95h$

En esta tabla se puede observar como el método de Newton con la discretización $X_h^0 \times M_h^1$ es la combinación más eficiente superando a la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$. Dado que ambas discretizaciones son $O(h)$ el tiempo de ejecución empleado será uno de los parámetros utilizados para contrastar el desempeño. Así tenemos que el tiempo empleado por $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ está entre 73% y 99% por encima del tiempo requerido por $X_h^0 \times M_h^1$; resultado similar al encontrado para el método de Peaceman Rachford. En cuanto al número de iteraciones es muy similar para cada β.

En el caso del problema PP2 tenemos:

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	7	94.66	0.024042	7	1141.83	0.015540
10	$X_h^0 \times M_h^1$	7	44.13	0.022833	7	491.70	0.015267
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	8	142.34	0.034412	9	1798.66	0.012776
20	$X_h^0 \times M_h^1$	8	66.43	0.032909	9	730.52	0.011374
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	9	186.05	0.031882	10	2325.71	0.012971
30	$X_h^0 \times M_h^1$	9	89.33	0.029635	10	949.56	0.011185
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	9	206.62	0.048542	10	2616.82	0.019768
40	$X_h^0 \times M_h^1$	9	102.60	0.047535	10	1085.27	0.018741
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	10	256.93	0.033137	11	3147.48	0.014534
50	$X_h^0 \times M_h^1$	10	124.30	0.030669	11	1280.49	0.012749

Tabla 4.23 Comportamiento de Newton para diferentes β, PP2 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$ y $tol = 1.95h$

Igual que antes, en esta tabla se puede observar como el método de Newton con la discretización $X_h^0 \times M_h^1$ es la combinación más eficiente más eficiente superando a la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$. La comparación entre $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$ señala que el tiempo de ejecución requerido por $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ está entre 130% y 140% por encima del tiempo requerido por $X_h^0 \times M_h^1$; resultado similar al encontrado para el método de Peaceman Rachford. El número de iteraciones es muy similar para cada β.

En el caso del problema PP3 tenemos:

		$h = \frac{1}{40}$			$h = \frac{1}{80}$		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	7	45.30	0.048711	8	633.00	0.024343
10	$X_h^0 \times M_h^1$	7	26.83	0.033131	7	331.95	0.016620
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	8	53.02	0.048705	9	721.11	0.024343
20	$X_h^0 \times M_h^1$	8	31.03	0.033029	8	364.82	0.016556
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	9	57.66	0.048685	9	691.61	0.024343
30	$X_h^0 \times M_h^1$	8	34.43	0.037378	8	377.80	0.024095
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	9	57.63	0.048703	10	783.56	0.024343
40	$X_h^0 \times M_h^1$	9	34.06	0.032998	9	396.54	0.016535
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	10	63.32	0.048684	10	789.82	0.024343
50	$X_h^0 \times M_h^1$	9	35.52	0.033508	9	416.27	0.017530

Tabla 4.24 Comportamiento de Newton para diferentes β, PP3 $h = \frac{1}{40}$ y $h = \frac{1}{80}$ y $tol = 1.95h$

Igual que antes, en esta tabla se puede observar como el método de Newton con la discretización $X_h^0 \times M_h^1$ es la combinación más eficiente. La comparación entre $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$ señala que el tiempo de ejecución requerido por $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ esta entre 83% y 90% por encima del tiempo requerido por $X_h^0 \times M_h^1$.

Es importante resaltar que el método de Newton resuelve sistemas de ecuaciones nolineales a partir de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales que utilizan como matriz de coeficientes el Jacobiano $J(s_k)$ es por ello que la sección siguiente la dedicamos a estudiar los autovalores y números de condición asociados a esta matriz.

4.3.1 Autovalores

En esta sección se presenta la distribución de los autovalores del Jacobiano para la primera, segunda y última iteración de Newton además se compara con los autovalores del paso lineal de Darcy. En este apartado se quiere hacer enfasis en lo mal condicionado que están las matrices construidas por la iteración de Newton y como progresivamente la distribución de autovalores se acerca a la distribución de autovalores de (3.5). Se tomó en todos los casos que siguen $h = \frac{1}{10}$.

En el caso de la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ tenemos:

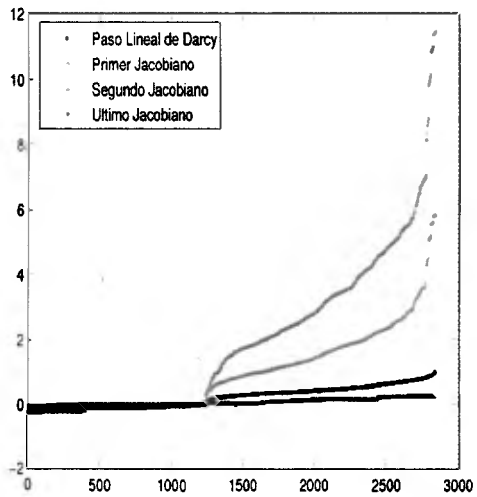

Fig. 4.19: Autovalores Newton para $k = 0, 1, 2, 14$ y $X_h^0 \times M_h^{1,m}$

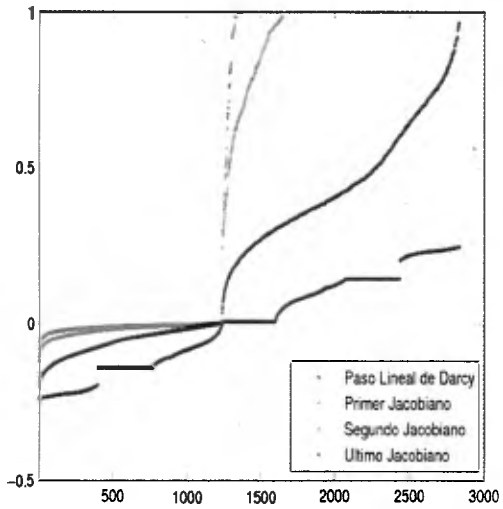

Fig. 4.20: Autovalores Newton para $k = 0, 1, 2, 14$
y $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ alrededor de 0

Para la discretización $X_h^0 \times M_h^1$ encontramos:

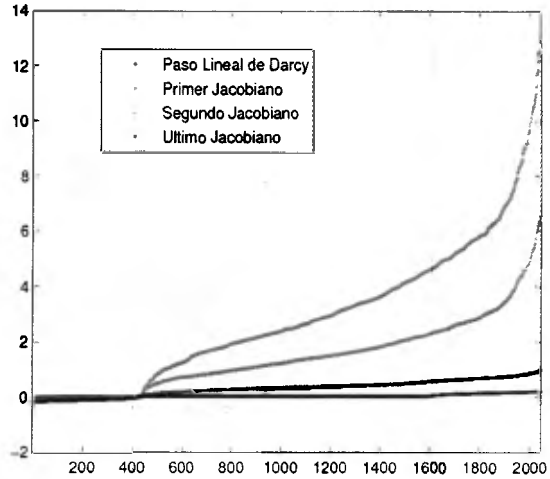

Fig. 4.21: Autovalores Newton para $k = 0, 1, 2, 15$ y $X_h^0 \times M_h^1$

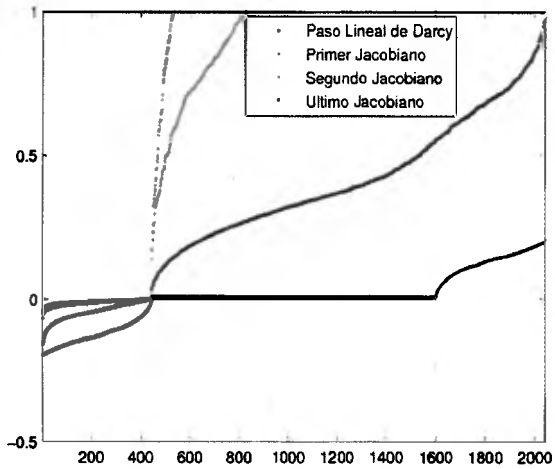

Fig. 4.22: Autovalores Newton para $k = 0, 1, 2, 15$ y $X_h^0 \times M_h^1$ alrededor de 0

La proximidad de los autovalores a 0 perjudica sustancialmente el desempeño de los esquemas iterativos tipo MINRES o GMRES es por ello que se presentan figuras que permitan apreciar esta característica en cada una de las discretizaciones.

Esto puede vincularse además con el número de condición $\kappa(A)$ de una matriz, $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ ya que el mismo mide la sensibilidad de A a los errores propios del cálculo computacional, errores de redondeo o punto flotante de la computadora en la que se está resolviendo el problema, además el número de condición mide en cierta medida el tamaño del espectro de la matriz A. Es por ello que presentamos la próxima sección.

4.3.2 Números de Condición

Presentamos un estudio sobre el comportamiento del número de condición en las distintas iteraciones de Newton y su comparación con la matriz de coeficientes del paso lineal de Darcy para cada una de las discretizaciones, dado el tamaño de cada una de las matrices y la necesidad de calcular la norma de su matriz inversa, sólo tomamos los valores más pequeños $h = \frac{1}{5}$ y $h = \frac{1}{10}$. Como se verá en todos los casos el número de condición es sumamente elevado lo cual habla del mal condicionamiento de la matriz Jacobiana. Se presentan pruebas para diferentes valores de β para establecer una relación directa entre este parámetro y el número de condición de los Jacobianos, en todos los casos se puede observar como a mayor valor de β mayor $\kappa(J(s_k))$, dado lo elevado de los números de condición fue necesario usar escala logarítmica en el eje y.

En el caso de las discretizaciones $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$ tenemos:

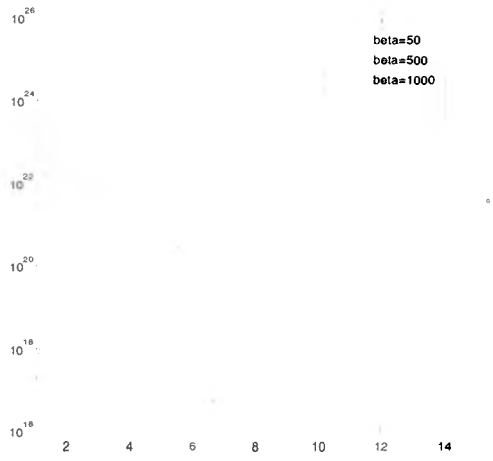

Fig 4.23: Números de Condición para $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ con $h = \frac{1}{5}$

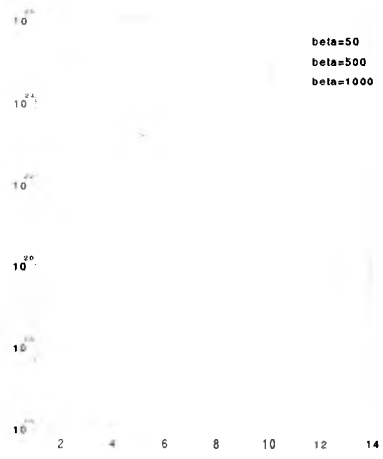

Fig 4.24: Números de Condición para $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ con $h = \frac{1}{10}$

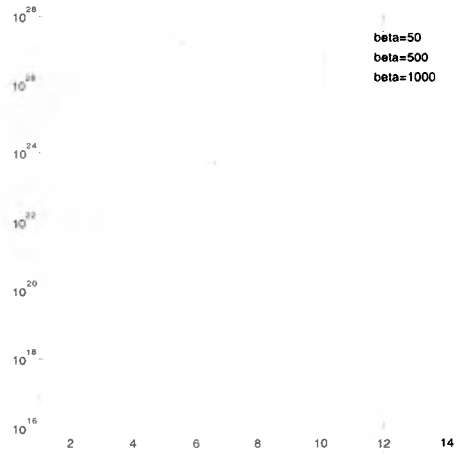

Fig 4.25: Números de Condición para $X_h^0 \times M_h^1$ con $h = \frac{1}{5}$

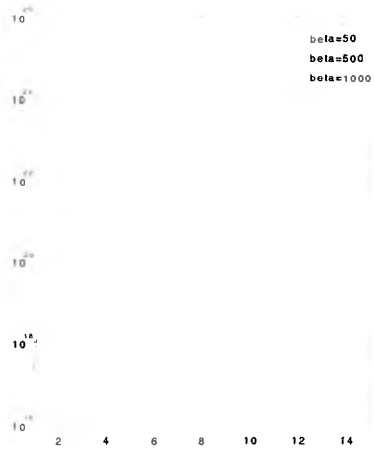

Fig 4.26: Números de Condición para $X_h^0 \times M_h^1$ con $h = \frac{1}{10}$

Es evidente que el número de condición asociado a la primera iteración de Newton es mucho mayor al asociado al paso 3.5. Una comparación importante se puede hacer con PR, como sabemos, la matriz que se utiliza para resolver (3.4) no depende de β, además es constante sólo se actualiza el lado derecho del sistema de ecuaciones por lo tanto sólo

interesan dos números de condición el del paso lineal de Darcy y el (3.4). Presentamos los números de condición para los tamaños de paso antes descritos en las tablas 4.25 y 4.26

$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	$h = \frac{1}{5}$	$h = \frac{1}{10}$
Paso lineal de Darcy	1.5975×10^{17}	3.6828×10^{17}
Paso lineal de Darcy Forchheimer	2.8175×10^{19}	4.8934×10^{17}

Tabla 4.25: Números de Condición para PR con $X_h^0 \times M_h^{1,m}$

$X_h^0 \times M_h^1$	$h = \frac{1}{5}$	$h = \frac{1}{10}$
Paso lineal de Darcy	6.3160×10^{16}	1.7824×10^{17}
Paso lineal de Darcy Forchheimer	2.1612×10^{17}	1.6339×10^{16}

Tabla 4.26: Números de Condición para PR con $X_h^0 \times M_h^1$

Esta información nos permite preveer que el método de Newton manifestará problemas en la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales en cada iteración del mismo, consumiendo una mayor cantidad de tiempo de ejecución

4.4 Comparación Peaceman Rachford - Newton

Para estudiar las discretizaciones $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$ hemos utilizado tanto PR como Newton, en tal sentido, es importante contrastar su desempeño para ello utilizaremos los siguientes parámetros: a) la aproximación numérica del orden de cada una de las discretizaciones b) el tiempo de ejecución y costo computacional.

4.4.1 Orden numérico de las discretizaciones

Recordamos que un método se dice de orden k si error $e_n(h) \leq C(h)^k$ con C una constante positiva y h el tamaño de paso. Para calcular el orden numérico utilizaremos

las tablas 4.7 a 4.18 en cada una de ellas encontramos el error $e_n(h)$ asociado con cada uno de los métodos y discretización. Para aproximar el orden utilizaremos la siguiente expresión

$$n = \lim_{h \to 0} \frac{\log \frac{e_n(h)}{e_n(\overline{h})}}{\log \frac{h}{\overline{h}}}$$

siendo $\overline{h} < h$ dos tamaños de paso. Presentamos las tablas 4.27 a 4.29 donde se aprecia la aproximación numérica al orden para cada uno de los problemas de prueba:

		$h = \frac{1}{20}$		$h = \frac{1}{40}$		$h = \frac{1}{80}$	
β	Discretización	PR	NW	PR	NW	PR	NW
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	0.998034	0.998036	0.998794	0.998795	0.999324	0.999328
10	$X_h^0 \times M_h^1$	1.000022	1.000021	1.000000	0.999999	0.999988	0.999991
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	0.998151	0.998153	0.998823	0.998830	0.999302	0.999338
20	$X_h^0 \times M_h^1$	1.000084	1.000086	0.999995	1.000018	0.999904	0.999996
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	0.998180	0.998207	0.998782	0.998849	0.999219	0.999343
30	$X_h^0 \times M_h^1$	1.000092	1.000106	0.999963	1.000025	0.999764	0.999998
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	0.998172	0.998238	0.998724	0.998861	0.999089	0.9993472
40	$X_h^0 \times M_h^1$	1.000057	1.000115	0.999771	1.000028	0.999373	0.999999
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	0.998133	0.998258	0.998548	0.998869	0.998237	0.999345
50	$X_h^0 \times M_h^1$	0.999951	1.000121	0.999410	1.000030	0.998788	1.000000

Tabla 4.27: Orden numérico PP1

		$h = \frac{1}{20}$		$h = \frac{1}{40}$		$h = \frac{1}{80}$	
β	Discretización	PR	NW	PR	NW	PR	NW
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	1.003797	1.003834	1.001778	1.001840	1.000502	1.000892
10	$X_h^0 \times M_h^1$	0.934201	0.933749	0.957655	0.956221	0.980172	0.975664
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	1.004015	1.004025	1.001877	1.001900	1.000828	1.000908
20	$X_h^0 \times M_h^1$	0.941446	0.941304	0.953962	0.953446	0.973598	0.968723
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	1.004102	1.004141	1.001781	1.001941	1.000542	1.000921
30	$X_h^0 \times M_h^1$	0.950208	0.950525	0.956026	0.956963	0.966970	0.967667
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	1.003956	1.004219	1.001668	1.001971	1.000921	1.000931
40	$X_h^0 \times M_h^1$	0.957402	0.957858	0.961026	0.961253	0.967929	0.968622
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	1.004219	1.004278	1.001521	1.001995	0.999720	1.000939
50	$X_h^0 \times M_h^1$	0.963129	0.963514	0.963726	0.965201	0.969083	0.970256

Tabla 4.28: Orden numérico PP2

		$h=\frac{1}{20}$		$h=\frac{1}{40}$		$h=\frac{1}{80}$	
β	Discretización	PR	NW	PR	NW	PR	NW
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	0.998901	0.998902	0.999754	0.999753	0.999940	0.999940
10	$X_h^0 \times M_h^1$	0.999466	0.999464	0.999720	0.999720	0.999856	0.999859
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	0.998945	0.998935	0.999757	0.999767	0.999943	0.999946
20	$X_h^0 \times M_h^1$	0.999867	0.999868	0.999914	0.999926	0.999933	0.999940
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	0.998962	0.998947	0.999750	0.999773	0.999936	0.999948
30	$X_h^0 \times M_h^1$	0.999990	0.999984	0.999965	0.999995	0.999947	0.999974
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	0.998943	0.998953	0.999764	0.999775	0.999968	0.999949
40	$X_h^0 \times M_h^1$	0.999997	1.000035	1.000054	1.000027	0.999941	0.999991
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	0.998963	0.998956	0.999723	0.999777	0.999971	0.999950
50	$X_h^0 \times M_h^1$	1.000095	1.000062	0.999945	1.000045	1.000021	1.000001

Tabla 4.29: Orden numérico PP3

Los resultados numéricos confirman que las discretizaciones $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$ son ambas $O(h)$, es decir de primer orden, bien sea utilizando PR o Newton.

4.4.2 Tiempo de ejecución y costo computacional

El tiempo de ejecución esta relacionado con el costo de memoria computacional, las características matriciales de los sistemas de ecuaciones lineales y los métodos para resolver los mismos. En el caso de las discretizaciones $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$ en todas las pruebas realizadas la convergencia (estancamiento) de los métodos se dió alrededor del mismo error $e_n(h)$ para cada problema y para cada h. No fue necesario establecer una tolerancia que detuviese el método ya que la solución obtenida por ambas técnicas PR y Newton fue prácticamente la misma en cada una de las pruebas realizadas, por ello se calculó la mejor solución numérica que cada método fue capaz de proveer para cada problema con

cada discretización. En las siguientes tablas se muestra la comparación entre Newton y PR para $h = \frac{1}{80}$.

	$h = \frac{1}{80}$	Newton			Peaceman Rachford		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	12	1799.5	0.017669	14	1026.11	0.017669
10	$X_h^0 \times M_h^1$	12	736.35	0.011853	15	530.81	0.011805
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	2280.6	0.017669	20	1410.17	0.017669
20	$X_h^0 \times M_h^1$	14	976.3	0.011804	20	669.46	0.011805
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	2745.0	0.017669	26	1803.3	0.017671
30	$X_h^0 \times M_h^1$	15	1138.0	0.011179	27	873.51	0.011797
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	2950.5	0.017669	32	2190.28	0.017674
40	$X_h^0 \times M_h^1$	15	1117.8	0.011790	32	1010.34	0.011798
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	2734.4	0.017669	35	2383.29	0.176874
50	$X_h^0 \times M_h^1$	16	1399.8	0.011788	37	1151.94	0.011806

Tabla 4.30: Tiempos de ejecución Newton vs Peaceman Rachford PP1

Para este problema se puede observar que PR es necesita, en promedio, sólo el 73% del tiempo requerido por Newton para alcanzar la solución.

	$h = \frac{1}{80}$	Newton			Peaceman Rachford		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	2519.8	0.010629	20	1541.66	0.010633
10	$X_h^0 \times M_h^1$	14	883.4	0.009830	35	1171.71	0.009786
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	16	3687.0	0.010630	22	1699.81	0.010631
20	$X_h^0 \times M_h^1$	16	1178.8	0.008700	25	868.39	0.008667
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	17	4562.2	0.010630	28	2115.70	0.010635
30	$X_h^0 \times M_h^1$	17	1630.7	0.008166	28	965.27	0.008179
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	18	6508.1	0.010630	37	2768.05	0.010636
40	$X_h^0 \times M_h^1$	18	1958.9	0.007847	39	1295.45	0.007858
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	19	6399.0	0.010630	42	3137.82	0.010646
50	$X_h^0 \times M_h^1$	19	2102.1	0.007633	45	1483.15	0.007653

Tabla 4.31: Tiempos de ejecución Newton vs Peaceman Rachford PP2

Para este problema se puede observar que PR es necesita, en promedio, sólo el 64% del tiempo requerido por Newton para alcanzar la solución.

	$h = \frac{1}{80}$	Newton			Peaceman Rachford		
β	Discretización	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$	iter	tiempo (seg)	$e_n(h)$
10	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	13	2119.7	0.024343	19	1306.84	0.024342
10	$X_h^0 \times M_h^1$	13	1004.7	0.016548	19	632.80	0.001655
20	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	2859.1	0.024343	27	1758.22	0.024343
20	$X_h^0 \times M_h^1$	14	828.9	0.016500	27	843.05	0.016501
30	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	14	1703.1	0.024343	33	2107.93	0.024343
30	$X_h^0 \times M_h^1$	14	898.7	0.016490	33	1002.91	0.016491
40	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	3261.2	0.024343	38	2399.19	0.024343
40	$X_h^0 \times M_h^1$	15	1022.6	0.016486	39	1151.55	0.016487
50	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	15	2541.3	0.024343	42	2691.55	0.024343
50	$X_h^0 \times M_h^1$	15	1021.6	0.016484	42	1230.46	0.016485

Tabla 4.32: Tiempos de ejecución Newton vs Peaceman Rachford PP3

Para este problema se puede observar que PR y Newton necesitan prácticamente del mismo tiempo de ejecución en algunas ocasiones PR puede necesitar de algún tiempo adicional en comparación con el Newton. En líneas generales PR es más eficiente o rápido que Newton. En cuanto al costo computacional tanto PR como Newton para las discretizaciones $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ y $X_h^0 \times M_h^1$ resuelven sistemas de ecuaciones de dimensión $n_u(h) + n_p(h)$ con lo cual requieren las mismas disposiciones de memoria.

Para establecer la comparación entre PR y Newton utilizando como parámetro la tolerancia $tol = 1.95h$ debemos comparar los resultados presentes en las tablas 4.13 y 4.22 para el problema PP1, 4.14 y 4.23 para el problema PP2 y finalmente las tablas 4.15 y 4.24 para PP3, al hacerlo encontramos que PR presento un mejor comportamiento en cuanto a tiempo de ejecución para alcanzar la cota exigida, esto sumado al hecho de que necesitó de un mayor número de iteraciones señala lo económica (computacionalmente

hablando) de las iteraciones de PR en contraste con Newton.

4.5 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales se emplearon los esquemas iterativos MINRES y GMRES. En algunas situaciones la matriz de coeficientes resultó ser simétrica condición que favorece el desempeño de MINRES, además éstos esquemas de resolución son altamente recomendables para la resolución de sistemas de ecuaciones muy grandes y esparcidos, y aunque no se presentan en este trabajo, estamos realizando las pruebas con el uso de precondicionadores para la resolución numérica de los sistemas de ecuaciones lineales. Amplia información sobre MINRES y GMRES se encuentra en [12, 5, 43, 53, 52, 45, 59]. Dado lo importante del iterado inicial para cualquiera de los esquemas de resolución presentamos un estudio sobre (3.5).

4.5.1 Paso Lineal de Darcy (3.5)

Es importante hacer una consideración especial sobre la solución del problema lineal de Darcy (3.5):

- En primer lugar Urquiza y otros en [60] resuelven este problema con las siguientes discretizaciones de elementos finitos $X_h^0 \times M_h^1$, $X_h^{1,m} \times M_h^1$ y $X_h^1 \times M_h^1$ utilizando como técnica para resolver los sistemas de ecuaciones lineales la factorización LU sumado a una descomposición matricial que involucra el calculo de la matriz inversa del bloque principal de la matriz de coeficientes de 3.5. Aspecto radicalmente diferente al empleado en este trabajo donde utilizamos métodos iterativos tipo MINRES para resolver directamente el sistema de ecuaciones lineales asociado a cada discretización. Las tablas que siguen muestran el error $e_n(h)$ para cada discretización y cada h. Nuestros resultados para este paso confirman los resultados presentes en

[60] para los problemas y discretizaciones coincidentes en ambos estudios.

h	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	$X_h^0 \times M_h^1$
$\frac{1}{10}$	0.1409087450	0.1874459979
$\frac{1}{20}$	0.0705751144	0.0941124648
$\frac{1}{40}$	0.0353202774	0.0471157747
$\frac{1}{80}$	0.0176687736	0.0235667273
Orden	**0.999294767**	**0.99945874**

Tabla 4.33: Orden Numérico paso lineal de Darcy en PP1

- Este problema (PP1) no fue estudiado por Urquiza y sus coinvestigadores, sin embargo podemos confirmar los resultados numéricos relacionados con el orden de convergencia de ambas discretizaciones. En el caso de los problemas PP2 y PP3 tenemos:

h	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	$X_h^0 \times M_h^1$
$\frac{1}{10}$	0.0853907364	0.1703652968
$\frac{1}{20}$	0.0425942466	0.0856115788
$\frac{1}{40}$	0.0212715638	0.0428713017
$\frac{1}{80}$	0.0106294080	0.0214453558
Orden	**1.000864854**	**0.999346969**

Tabla 4.34: Orden Numérico paso lineal de Darcy en PP2

h	$X_h^0 \times M_h^{1,m}$	$X_h^0 \times M_h^1$
$\frac{1}{10}$	0.1944691025	0.2088113649
$\frac{1}{20}$	0.0973382795	0.1047801734
$\frac{1}{40}$	0.0486821426	0.0524466638
$\frac{1}{80}$	0.0243427302	0.0262316617
Orden	**0.999901682**	**0.999541803**

Tabla 4.35: Orden Numérico paso lineal de Darcy en PP3

Confirmando los resultados numéricos relacionados al orden de convergencia para las discretizaciones $X_h^0 \times M_h^1$

- En segundo lugar la resolución de 3.5 para cada valor de β nos provee de la aproximación inicial que toma tanto PR como Newton en sus diferentes esquemas iterativos.

- En tercer lugar desde el punto de vista computacional (3.5) es fundamental para el método de Peaceman Rachford, ya que, haciendo leves modificaciones a la matriz de coeficientes M del sistema lineal de Darcy construimos las matrices de iteración involucradas en Peaceman Rachfrod.

4.5.2 Aspectos Técnicos

Se realizaron todas las pruebas numéricas en ambiente Windows 7 Ultimate procesador core i-5 2300 CPU @ 2.80 GHz 3.00 GHz, 4 GB memoria RAM, con MatLab 7.8 (R2009).

Capítulo 5

Conclusiones y Próximos Trabajos

1. En cuanto a la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$, hemos verificado los resultados teóricos presentes en el artículo de Girault y Wheeler ([25]) la iteración de Peaceman Rachford converge con lo cual la linealización empleada es adecuada. Además se verificó numericamente que la discretización es $O(h)$ así que de allí la necesidad de tener mallas muy finas o estrechas permite garantizar errores cada vez más pequeños.

2. En cuanto a la discretización $X_h^0 \times M_h^1$:

   (a) Se ha demostrado teóricamente que la discretización es $O(h)$, además realizamos las pruebas numéricas que complementan este resultado.

   (b) Se implementó el método de Peaceman Rachford de forma adecuada al igual que con la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$.

   (c) En comparación con la discretización $X_h^0 \times M_h^{1,m}$ la presente es más eficiente, re-presenta un menor costo computacional (el sistema de ecuaciones a resolver es más pequeño) y provee el mismo orden de convergencia, siendo $X_h^0 \times M_h^1$ una mejor elección si se desea usar discretizaciones $O(h)$.

3. En cuanto a Peaceman Rachford:

(a) El parámetro α debe ser elegido con cuidado: valores grandes de α implican que la matriz del paso lineal tiende a la matriz del paso lineal de Darcy. Valores pequeños de α implican que el número de condición de la matriz crezca considerablemente, condición desfavorable para los métodos iterativos. En las pruebas realizadas se encontró que el mejor valor de α fue 0.1.

(b) Resultó ser más eficiente que el método de Newton el tiempo de ejecución resultó ser menor demostrando un costo computacional mucho menor al requerido por las iteraciones de Newton.

(c) Desde el punto de vista numérico el paso más importante corresponde al paso lineal de Darcy de aquí se extraen (salvo leves modificaciones) la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones para el paso lineal de Peaceman – Rachford. Además presentamos un enfoque distinto para resolver 3.5 el cual nos permitió acceder de mejor forma a Peaceman Rachford y Newton.

(d) La matriz del paso 3.4 permanece constante para todas las iteraciones y sólo se actualiza parte del lado derecho del mismo, esto representa una gran ventaja cuando se compara con las iteraciones de Newton donde el Jacobiano debe actualizarse en cada paso, además como se vió, el número de condición de cada Jacobiano es considerablemente superior al del paso lineal de Darcy haciendo más sensible la solución del sistema de ecuaciones lineal a los errores de redondeo y aproximación.

4. En cuanto al método de Newton:

(a) Hemos considerado el Jacobiano explícito, exacto, salvó los errores propios de redondeo. Esto en la práctica puede ser imposible de obtener o mantener, por lo cual deben realizarse pruebas para verificar el comportamiento con esquemas de Newton inexactos, o aproximaciones al Jacobiano.

(b) Es posible mejorar el comportamiento de Newton empleando iterados iniciales

más cercanos a la solución del sistema, por ende resulta atractivo realizar algunas iteraciones de Peaceman Rachford y con algún iterado iniciar Newton.

(c) Se realizaron pruebas con una fusión entre el método de Newton y el método de Uzawa los resultados de aplicar este método no fueron presentados por su poca eficiencia.

Bibliografía

[1] R. A. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, NY, 1975.

[2] E.AULISA, A.IBRAGIMOV, P.VALKO, Y J.WALTON, *Mathematical Frame-Work For Productivity Index of The Well for Fast Forchheimer (non-Darcy) Flow in Porous Media,* Texas Tech university, Department of Mathematics y Statistics.

[3] M. I. S. AZZAM Y A. L. DULLIEN, *Flow rate-pressure grodient measurements in periodically nonuniform capillary tubes,* AIChEJ, **19** (1973), pp. 22-229.

[4] K. AZIZ Y A. SETTARI, *Petroleum Reservoir Simulation*, Applied Science Publisher Ltd, London, 1979.

[5] Z. BAI, D. HU Y L. REICHEL, *A Newton Basis GMRES Implementation*, Tech. report 91-03, Departament of Mathematics, University of Kentucky, Lexington, KY, 1991.

[6] J. BEAR, *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Dover Publications, Inc.,New York, E.U.A., 1988.

[7] E. BECKER, G. CAREY Y T. ODEN, *Finite Elements An Introduction Vol I*, Prentice Hall, Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.

[8] G. S. BEAVERS Y E. M. SPARROW, *Non-Darcy flow through fibrous porous media*, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, December (1969), pp. 711-714.

[9] L. S. BENNETHUM y T. GIORGI, *Generalized Forchheimer equation for two-phase flow based on Hybrid Mixture Theory*, Transport in Porous Media, **26(3)** (1997), pp. 261-275.

[10] D. BOFFI y L. GASTALDI, *Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions y Applications*, Springer, (2006).

[11] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris (1983).

[12] P. N. BROWN y H. F. WALKER, *GMRES on (Nearly) Singular Systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol 18, No. 1, (1997) pp. 37 - 51.

[13] G. CAREY y T. ODEN, *Finite Elements: A Second Course Vol II*, Prentice Hall, Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.

[14] P. G. CIARLET, *Basic error estimates for elliptic problems - Finite Element Methods, Part 1, Hybok of Numerical analysis*, P. G. Ciarlet y J.L. Lions, eds., North-Holly, Amsterdam, (1991).

[15] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holly, Amsterdam, 1978.

[16] D. CORNEL y D. KATZ, *Flow of gases through consolidated porous media*, Industrial y Engineering Chemistry, 45 (10): 2145 - 2152.

[17] O. COULAUD, P. MOREL y J. P. CALTAGIRONE, *Numerical modelling of nonlinear laminar flow through a porous media*, J. Fluid Mech., 190:393-407, (1988).

[18] M. CROUZEIX y P. A. RAVIART, *Conforming y non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes problem*, RAIRO Anal. Numer., 8, (1973), pp. 33–76.

[19] J. DOUGLAS, P. J. PAES-LEME y T. GIORGI, *Generalized Forchheimer flow in porous media, in Boundary Value Problems for Partial Differential Equations y Aplications*, Lecture Notes in Phys., 58, Springer-Verlag , Berlin, pp. 207 - 216.

[20] J. DUPUIT, *Etudes Thèoriques et Pratiques sur le Mouvement des Eaux*, Dunod, Paris, (1863).

[21] H. ELMAN, D. SILVESTER Y A. WATHEN, *Finite Elements y Fast Iterative Solvers with applications in incompressible fluid dynamics*, Oxford Science Publications, Great Britain, (2005).

[22] G. EWING, *Calculus of Variations with Applications*, Dover Publications, Inc.,New York, E.U.A., 1985.

[23] P. FABRIE, *Regularity of the solution of Darcy-Forchheimer's equation*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods y Applications, **13** (1989), pp. 1025–1049.

[24] P. FORCHHEIMER, *Wasserbewegung durch boden*, Z. Vert. Deutsh, Ing., **45** (1901), pp. 1782–1788.

[25] V. GIRAULT Y M. F. WHEELER, *Numerical Discretization of a Darcy-Forchheimer model*, to appear in Numerische Mathematik.

[26] V. GIRAULT Y P. A. RAVIART, *Finite Elements Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany, (1986).

[27] ANNE GREENBAUM, *Iterative methods for solving linear systems*, SIAM, Philadelphia, (1997).

[28] S. GOOSSENS Y D. ROOSE, *Ritz y Harmonic Ritz Values y the Convergence of FOM y GMRES*, Department of Computer Science Katholieke University Leuven, Belgium, (1997), pp. 1 - 21.

[29] P. GRISVARD, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*,,Pitman Monographs y Studies in Mathematics, 24, Pitman, Boston, MA, 1985.

[30] R. HELMIG, *Multiphase Flow y Transport Processes in the Subsurface*, Springer Verlag, New York, 1997.

[31] M. HOLT, *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Springer Verlag, New York, 1977.

[32] J R. HUGHES, *The Finite Element Method*, Dover Publications, Inc.,New York, E.U.A., 2000.

[33] E, ISAACSON Y H. B. KELLER, *Analysis of Numerical Methods*, Dover Publications, Inc.,New York, E.U.A., 1994.

[34] C. JOHNSON, *Numerical solution of a partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, New York, 1992.

[35] C. T. KELLEY, *Iterative methods for linear y nonlinear equations*, SIAM, Philadelphia, (1995).

[36] C. KIM Y J. E. PASCIAK, *A lowest order mixed finite element code for Forchheimer flow*, reports in Simulation of Multicomponent Forchheimer Flow in Porous Media, (1997).

[37] C. KIM, J. E. PASCIAK Y S. L. WEEKES, *A lowest order mixed finite element code for Forchheimer flow II*, reports in Simulation of Multicomponent Forchheimer Flow in Porous Media, (1997).

[38] D. KINCAID Y W. CHENEY, *Numerical Analysis*, Brooks Cole Publishing Company, E.U.A., 1994.

[39] J. L. LIONS Y E. MAGENES, *Problémes aux Limites non Homogénes et Applications*, I, Dunod, Paris, 1968.

[40] H. LOPEZ, B. MOLINA Y J. J. SALAS, *Comparison between different numerical discretizations for Darcy-Forchheimer model*, ETNA, (2009).

[41] H. LOPEZ, B. MOLINA AND J. J. SALAS, An Analysis of a Mixed Finite Element Method for a Darcy-Forchheimer model, Mathematical and Computer Modelling, Elsevier, (2011).

[42] J. MATHEWS Y K. FINK, *Numerical Methods using MATLAB*, Prentice Hall Upper Saddle River,New York, E.U.A., 1999.

[43] J. C. MEZA, *A Modification to the GMRES Method for Ill-Conditioned Linear Systems*, Tech. report Sy95-8820, Syia National Laboratories, Livermore, 1995.

[44] G. I. MARCHUK, *Hybook of numerical analysis, Vol. I. Finite Difference Methods (Part 1) - Solution of Equations in $\Re^n$ (Part 1)*, Edited by P.G. Ciarlet y J.L. Lions, Elsevier Science Publishers B.V., North-Holly, (1990).

[45] C. C. PAIGE Y M. A. SAUNDERS, *Solution of sparse indefinite systems of linear equations*, SIAM J. Numer., **11** (1974), pp. 197–209.

[46] J. NEČAS, *Les Méthodes directes en théorie des équations ellptiques*, Masson, Paris, 1967.

[47] A. NIEVES Y F. DOMINGUEZ, *Metodos Numericos aplicados a la Ingenieria*, CECSA, Mexico, 1999.

[48] J. T. ODEN Y G. F. CAREY, *Finite Elements Mathematical Aspects*, Prentice Hall, Inc.,Englewood Cliffs, New Jersey, E.U.A., (1983).

[49] D. H. PEACEMAN Y H. H. RACHFORD, *The numerical solution of Parabolic Elliptic Differential Equations*, J. Soc. Indust. Appl. Math., 3, (1955), pp. 28 -41

[50] RAMI Y. JUMAH, FAWZI A. Y FAHMI ABU-AL-RUB, *Darcy-Forchheimer mixed convection heat y mass transfer in fluid saturated porous media*, International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, **11(6)** (2001), pp. 600–618..

[51] J. N. REDDY, *An Introduction to the Finite Element Method*, Mc. Graw Hill, E.U.A., 1993.

[52] Y. SAAD, *Iterative Methods for Linear Systems*, P. W. S. Publishing Company, Boston, 1996.

[53] Y. SAAD Y M. H. SCHULTZ, *GMRES: a generalized minimal residual method for solving nonsimetric linear systems*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 7 (1986), pp. 856-869.

[54] L. SEGERLIND, *Applied Finite Element Analysis*, John Wiley y Sons, United States, 1984.

[55] R. E. SHOWALTER, *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Math. Surveys and Monographs, **49**, AMS, Providence, R.I., (1997)

[56] S. L. SOBOLEV, *Partial Differential Equations if Mathematical Physics*, Dover Publications, Inc.,New York, E.U.A., 1989.

[57] M. R. TEK, *Development of a generalized Darcy equation*, Trans. AIME, **210** (1957), pp. 376–377.

[58] J. W, THOMAS, *Numerical Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[59] L. TREFETHEN Y D. BAU, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, 1997.

[60] J. M. URQUIZA, D. N. DRI, A. GARON Y M. C. DELFOUR, *A numerical study of a primal mixed finite element approximations of a Darcy equations*, Wiley & Sons, Ltd. Commun. Numer. Meth. Engng, 22 (2006), pp. 901–915.

[61] K. VAFAI, *Handbook of Porous Media*, Marcel Dekker, New York, 2000..

[62] H. A. VAN DER VORST, *Iterative Methods for Large Linear Systems*, H. A. van der Vorst Mathematical Institute Utrecht University, The Netherlys, 2000.

[63] J. C. WARD, *Turbulent flow in porous media*, J. Hydr. Div. ASCE, **90(5)** (1964), pp. 1–12.

[64] J. WHITEMAN, *The mathematics of finite elements y applications II, MAFELAP 1975*, Academic Press, London. New York, San Francisco, Engly, 1975.

[65] D. M. YOUNG, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Dover Publications, Inc.,New York, E.U.A., 2003.