AAS 3158

GEOMETRÍA PLANA
Y
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN (DPO)

Agregado

LUIS ALEJANDRO ROTUNDO LIENDO
INGENIERO CIVIL
CARACAS, ENERO 2012

Quien no se resuelve a cultivar el hábito de pensar,
se pierde el mayor placer de la vida.

Thomas Alva Edison

PRESENTACIÓN

El estudio de la Geometría Descriptiva acerca al hombre a la representación gráfica, en un plano, de todos los objetos tridimensionales que lo rodean. Es con el estudio de la Geometría Descriptiva donde el futuro ingeniero aprende a definir correctamente las técnicas y procedimientos para lograr esa representación plana. Estudiar Geometría Descriptiva es estudiar al mundo, es describir y representar todos los objetos que en esencia forman parte de la vida misma. Estudiar Geometría Descriptiva permitirá, al nuevo profesional abrir su mente de suerte que pueda concebir y entender mediante la representación plana de los objetos, su forma real y su interacción con el resto. Es describir la forma de objetos tan sencillos como un tornillo o un resorte, hasta unos mucho más complejos como pueden ser plantas industriales, represas, carreteras y en fin todos los objetos que nos rodean. Adicionalmente, y para lograr esto, el estudiante aprenderá a analizar ordenadamente las situaciones que finalmente conforman los problemas que deberá resolver. Este aprendizaje también lo conducirá a buscar, ordenar y procesar los datos que requerirá para determinar, y luego saber aplicar, las condiciones que definen los problemas que se le presentarán en el ejercicio profesional. Tal vez aprender este *"orden"* en el raciocinio, es el mayor beneficio que se transfiere al alumno con el estudio sistemático de la Geometría Descriptiva.

Sin embargo el estudio de la Geometria Descriptiva debe comenzar por el estudio de la Geometría Plana, la cual debería formar parte de los programas de Educación Media y el nuevo aspirante llegar a la Universidad, con al menos los conocimientos básicos de la materia. Desafortunadamente esta no es la realidad, los noveles universitarios adolecen de una ignorancia casi total del tema, por lo que la enseñanza en la Universidad debe tratar dichos temas de forma de poder iniciar al estudiante en una forma rápida en el nuevo aprendizaje.

Son muchos los textos que tratan la Geometría y/o la Geometría Descriptiva, pero la rapidez exigida en los programas de la materia obligan a resumir y tratar sólo los temas más importantes y por ende más necesarios.

En este trabajo se ha tratado de exponer dichos temas en una forma clara y sucinta, de suerte que el Profesor pueda al seguirlos, cubrir los programas de la materia. Pero al propio tiempo, expuestos en una forma que puedan servir para que el alumno disponga de una herramienta que le permitirá atender más a las explicaciones del Profesor en clases ya que no tendrá que hacer mayores anotaciones durante las mismas. En general sólo se han tratado los temas en una forma teórica, sin el planteamiento sistemático de problemas asociados a cada tema y la solución de los mismos, esto sólo se ha hecho en pocas ocasiones.

El mismo se ha estructurado según el pensum de la materia que se dicta en la Escuela de Ingeniería Industrial-UCAB, donde se utiliza el Sistema de Representación de la Doble Proyección Ortogonal (DPO), por lo demás mundialmente utilizado con ese fin.

Sin embargo no por esto debe ser considerado únicamente para su utilización en esa Escuela y en esa materia. Los conceptos contenidos se han organizado por Objetivos Generales y éstos en Objetivos Específicos. Todos son de carácter general y, sin lugar a ningún tipo de dudas, podrán ser utilizados como ayuda en otros programas, incluso en aquellos que no son propiamente de Geometría Descriptiva tales como Geometría Analítica y otros.

Caracas, enero 2012

CONTENIDO

		Pág
01_01	Introducción	1
01_02	Elementos Geométricos y sus relaciones	7
01_03	Figuras planas	13
01_04	Razón y proporción	19
02_01	Polígonos y poligonales	31
02_02	Triángulos	37
02_03	Teoremas de la Bisectriz, Pitágoras y Euclides	45
02_04	Cuadriláteros	51
03_01	Líneas curvas	55
03_02	Circunferencias	57
03_04	Curvas cónicas	67
04_01	El espacio. Ángulo diedro	83
04_02	Sistemas de proyección	85
05_01	Sistemas de proyección. Doble Proyección Ortogonal (DPO)	93
05_02	DPO de Puntos y rectas	99
05_03	Verdadero tamaño	105
05_04	Rectas que se cortan y rectas que se cruzan	115
05_05	DPO de planos. Proyecciones	119
05_06	DPO de plano. Pertenencia	125
05_07	Planos paralelos a LT	127
05_08	Intersección de rectas con planos y planos con planos	131
06_01	Perpendicularidad. Condiciones	135
06_02	Perpendicularidad-Rectas de máxima pendiente y máxima inclinación	139
07_01	Circunferencias-DPO de la circunferencia	141
08_01	Abatimiento y relevamiento de planos	147
09_01	Diedros, triedros y poliedros	155
09_02	Tetraedro regular	157
09_03	Hexaedro regular	163
09_04	Octaedro regular	167
10_01	Superficies poliédricas y poliedros	171
10_02	Superficies poliédricas. Sección sencilla	173
10_03	Poliedros. Prismas	177
10_04	Poliedros. Pirámides	183
10_05	Poliedros. Cilindros	189
10_06	Poliedros. Conos	195
11_01	Sólidos de revolución. La esfera	205

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Introducción	• Breve reseña histórica • Definición de teoremas, postulados y axiomas • Problemas y reducción al absurdo

El hombre siempre requirió establecer reglas que explicaran de alguna forma las relaciones entre los elementos donde se desenvolvía. En un principio estas *reglas* fueron eminentemente prácticas.

BABILONIA: Los Babilonios, 4.000 años AC inventan la rueda y encuentran que la relación entre la longitud de la circunferencia y lo que ellos llamaban su eje mayor (diámetro), es aproximadamente igual a 3 (π = 3,14159...). En la Biblia -Primer Libro de los Reyes, se menciona este valor como cierto; fue deducido considerando que el valor del perímetro de la circunferencia (Rueda) era intermedio entre los perímetros de los cuadrados circunscrito e inscrito. También lograron grandes avances en astronomía y supieron que el tiempo de revolución de la tierra alrededor del sol (Un año) tenía aproximadamente unos 360 períodos iguales (Días), quizás por esto dividieron la circunferencia en 360 partes dando origen al *Grado Sexagesimal.* Sabían trazar el Hexágono Regular inscrito en la circunferencia y conocían una fórmula para calcular el área del trapecio rectángulo.

EGIPTO: Los egipcios fundaban su desarrollo en una base eminentemente agrícola. Aplicaron sus conocimientos geométricos fueron aplicados a la medida de la tierra, ésta era dividida en parcelas y los impuestos que se pagaban siempre eran proporcionales a las superficies cultivadas en las mismas. De allí tal vez el nombre de Geometría -*medida de la tierra*.

Los conocimientos de los egipcios en cuanto a la geometría se pueden observar en la precisión de las dimensiones de la Gran Pirámide y en su orientación. En los papiros egipcios se encuentra documentación acerca de la solución a varios problemas geométricos como:

Área del triángulo isósceles

Área del trapecio isósceles

Área del círculo

Adicionalmente se encuentra un estudio sobre los cuadrados de donde se puede pensar que al menos tenían nociones acerca de la propiedad de los

triángulos rectángulos, definidas más tarde por Pitágoras; conocían las propiedades del triángulo cuyos lados medían 3; 4 y 5 unidades. En todo caso se trataba de una geometría eminentemente empírica ya que no se basaba en un sistema lógico deductivo, sino más bien en reglas prácticas.

GRECIA: Es en Grecia donde se transforman esas *reglas prácticas* de la geometría en una *ciencia deductiva*. Esta transformación deja de resolver problemas particulares y, basándose en un sistema lógico deducido a partir de axiomas y postulados, establece reglas generales. Entre los más estudiosos se encuentran:

Tales de Mileto. Uno de los siete sabios de la antigua Grecia, representa el comienzo de la geometría como ciencia racional. Sus estudios llevaron a la determinación de distancias en lugares inaccesibles, la demostración de la igualdad de los ángulos de la base en los triángulos isósceles, el valor del ángulo inscrito en la circunferencia y principalmente la demostración de los teoremas relativos a la proporcionalidad de los segmentos de rectas cortadas por un sistema de rectas paralelas (Teoremas de Tales).

Pitágoras de Samos. Enunció el famoso Teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulos: *El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Demostró el valor de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

Euclides. Poco se conoce de su vida, algunos autores lo refieren como el líder de un grupo de matemáticos de Alejandría, otros incluso piensan que no existió sino que fue el nombre que adoptaron en ese grupo de matemáticos quienes escribieron en conjunto con el nombre de Euclides en honor a Euclides de Megara, filósofo que había vivido unos cien años antes. Si embargo la hipótesis más generalizada es que se trató de un pensador que vivió en Alejandría en los años 300 AC, escribió la obra *Los Elementos,* dividida en 13 Libros. En esa obra, construye la Geometría desde definiciones, postulados y axiomas, demostrando teoremas que a su vez sirven para la demostración de nuevos teoremas. Como ejemplo se menciona el *Postulado 1. Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.*

Se creó así la Geometría Euclidiana. Es considerado el Padre de la Geometría.

Platón. Impulsa una corriente donde el estudio de las matemáticas debe ser considerado, solamente, con la finalidad de cultivar el conocimiento y no con

una finalidad práctica. Es por eso que se opone a las aplicaciones prácticas de los conocimientos de geometría. Divide a la geometría en dos: Elemental, que comprendía a todos los problemas que se podía resolver con regla y compás, y en Superior: dedicada al estudio de los tres grandes problemas que la geometría antigua no podía resolver sólo con regla y compás:

La cuadratura del círculo : Construir un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado.

La trisección del ángulo: Dividir un ángulo dado en tres partes iguales.

La duplicación del cubo: Encontrar un cubo que tenga el doble del volumen de un cubo dado.

Hoy en día todos han sido resueltos.

Arquímedes de Siracusa. Calcula un valor más aproximado para la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro (π). Determinó el área de la elipse, el volumen del cono y el de la esfera. Estudió la hoy llamada *Espiral de Arquímedes*, utilizada para la trisección del ángulo.

Apolonio de Perga. Estudia ampliamente las secciones cónicas que luego sirvieron a Kepler en sus trabajos sobre astronomía. Enuncia muchas ideas en las que Descartes se basó casi 20 siglos más tarde para inventar la Geometría Analítica.

Heron de Alejandría. Demostró la Fórmula de Heron para hallar el área de un triángulo en función de sus lados.

Geometrías no euclidianas El V Postulado de Euclides – *Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela.* Es el que llamó más la atención, durante siglos se trató de negarlo como postulado y convertirlo en teorema, dando origen a las geometrías no euclidianas.

MÉTODO DEDUCTIVO

El método deductivo, para la solución de PROBLEMAS, consiste en encadenar conocimientos supuestos verdaderos, para deducir o justificar nuevos conocimientos.

Obtener nuevas proposiciones como consecuencia lógica de otras anteriores.

Sin embargo algunas proposiciones no son consecuencia de otras y son aceptadas como ciertas por si mismas. Se llaman AXIOMAS y POSTULADOS. Otras proposiciones requieren demostración para poder aceptarlas, luego de lo cual podrán ser utilizadas, sin ningún tipo de restricción, estas son denominadas TEOREMAS.

AXIOMA

Proposición tan clara o evidente que se acepta como verdadera sin demostración alguna.

- *El todo es mayor que cualquiera de sus partes*
- *Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí*

POSTULADO

Como el axioma, los postulados son aceptados sin demostración aunque no son tan evidentes como aquellos.

- *Por dos puntos pasa una y sólo una recta*

TEOREMA

Proposición que requiere su demostración para poderla dar por cierta. Esta demostración se basa en axiomas y postulados así como en teoremas ya conocidos o demostrados.

- *La suma de los ángulos internos de un triángulo vale dos rectos.*

PROBLEMA

Proposición en la que se pide la solución para la construcción de una figura que cumpla con ciertas condiciones. Pueden ser gráficos, o Construcciones Geométricas. En la búsqueda de esa solución se aplican los conocimientos

previamente demostrados, o aquellos que por lo evidente no han requerido esa previa demostración.

REDUCCIÓN AL ABSURDO

Método de demostración en el cual al razonar una proposición contraria a la que se quiere solucionar, se infiere que contradice a otras ya demostradas o aceptadas como ciertas, por lo que se concluye que la segunda es verdadera.

PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Elementos Geométricos y sus relaciones	• Definir los entes principales: punto, recta y plano. Relaciones entre ellos. Punto y recta. Punto y plano. Recta y recta. Recta y plano. Plano y plano • Concepto de pertenencia. El lugar geométrico. *¿Dónde está?*, como solución a los problemas de geometría. Intersección de LG • Rectas paralelas a otras rectas. Rectas paralelas a planos. Planos paralelos a otros planos. Condiciones mínimas y suficientes

GEOMETRÍA

Rama de las matemáticas que trata de las medidas, relaciones y propiedades de las extensiones.

(DRAE) **extensión.** (Del lat. *extensio).*

5. f. *Geom.* Capacidad para ocupar una parte del espacio.
El punto no tiene extensión.

6. f. *Geom.* Medida del espacio ocupado por un cuerpo.

La geometría deductiva se basa en el encadenamiento de conocimientos que se suponen verdaderos para obtener nuevos conocimientos, partiendo del ente más sencillo el PUNTO, el cual más que definirlo debe entenderse como un concepto.

PUNTO

Por definición (DRAE) *El punto no tiene extensión*, pero es un ente real que existe y por lo tanto ocupa un lugar en el espacio. Siendo ésta, tal vez, la definición más general.

PUNTO: POSICIÓN O LUGAR EN EL ESPACIO

Por convención, se designan con una letra mayúscula o con un número

(A; B; C, 1; 2; 3; etc.)

RECTA (LÍNEA RECTA)

Sucesión infinita de puntos que se encuentran en una sola dirección. Por ser un conjunto de puntos, no tiene dimensiones salvo la que determina la dirección en las que se encuentran los puntos que la integran.

Por convención, se designan con una letra minúscula o por el nombre de dos de sus puntos (a; b; c; AB; 3C).

Si esta dimensión se limita entre dos puntos cualesquiera de la recta, se obtiene un ***SEGMENTO***. El cual se define como la porción de una recta limitada entre dos de sus puntos. La distancia entre los puntos se llama LONGITUD o VALOR NUMÉRICO.

La longitud de un segmento es una magnitud ESCALAR, o sea se puede medir y se puede operar con ella. Cabe mencionar el Segundo Postulado de Euclides *"Todo segmento rectilíneo se puede prolongar indefinidamente".*

PLANO

Es el conjunto de puntos contenidos en el espacio ilimitado en anchura, determinado por dos direcciones (rectas) que tengan un punto en común. Por ser un conjunto de puntos contenidos en sólo dos direcciones, el plano no tiene espesor.

Por convención, se designan por una letra griega minúscula o por el nombre de tres de sus puntos o de una recta y un punto (α; β; ABC; D3J; aB; etc.)

RECTAS PARALELAS

Se definen como paralelas a dos rectas que no teniendo ningún punto en común TODOS los puntos de una de las rectas están a una misma distancia de la otra.

Forman un plano por lo que SIEMPRE son coplanares.

Se dice también que se cortan en el infinito, es decir, en un **punto impropio**.

RECTAS QUE SE CRUZAN

Se dice que dos rectas se cruzan cuando no teniendo ningún punto en común la distancia de los puntos de una de las rectas a la otra recta no es constante.

Estas rectas NO son paralelas y NO definen un plano.

RECTAS QUE SE CORTAN

Se dice que dos rectas se cortan cuando tienen UN punto en común. Son siempre coplanares.

RECTAS PARALELAS A PLANOS

Una recta es paralela a un plano cuando TODOS sus puntos tienen la misma distancia al plano. Basta y es suficiente determinar que DOS (2) de sus puntos tiene la misma distancia al plano para definir que la recta sea paralela al plano.

RECTA QUE SE CORTA CON UN PLANO

Siendo las rectas y los planos infinitos en sus dimensiones, NECESARIAMENTE si la recta no es paralela al plano se cortará con el mismo o lo penetrará. Basta y es suficiente demostrar que dos de los puntos de la recta no tienen la misma distancia al plano para afirmar que se corta con el mismo. El punto de corte o penetración será el que pertenece tanto a la recta como al plano (ocupa la misma posición en el espacio).

PLANOS QUE SE CORTAN CON OTROS PLANOS

Siendo los planos infinitos en sus dimensiones, NECESARIAMENTE si las distancias entre dos puntos de un plano a otro plano son diferentes se cortarán en algún lugar.

Si se toma una recta en uno de los planos la distancia entre los puntos de esa recta, en uno de los sentidos de la misma al otro plano, se hará cada vez más

pequeña hasta que sea nula, o sea coincidirá con el segundo plano, ocupará la misma posición en el espacio, pertenecerá al segundo plano y a la recta (por ende al primer plano). Será un punto de ambos planos, un punto de la intersección de los planos. El mismo procedimiento con otra recta, determinará otro punto perteneciente a ambos planos o sea, otro punto de la intersección de los planos. La recta así definida contendrá los puntos que pertenecen a ambos planos, será la intersección de los mismos.

PLANOS PARALELOS A OTROS PLANOS

Si en el análisis anterior la distancia entre los dos planos es constante. La distancia entre una recta en uno de ellos será también constante determinándose en el segundo plano una recta paralela a la primera. Tomado, en el primer plano, una segunda recta que se corte con la primera, ésta será otra paralela al segundo plano. Existirán dos rectas que se cortan en el primer plano con sendas rectas paralelas en el segundo.

No existirá NINGUNA recta en uno de los planos que se corte con el otro. Los planos serán paralelos. Bastará demostrar que en uno de los dos existen dos rectas que se corten que sean paralelas a sendas rectas paralelas en el otro plano, para afirmar que ambos planos son paralelos.

PERTENENCIA

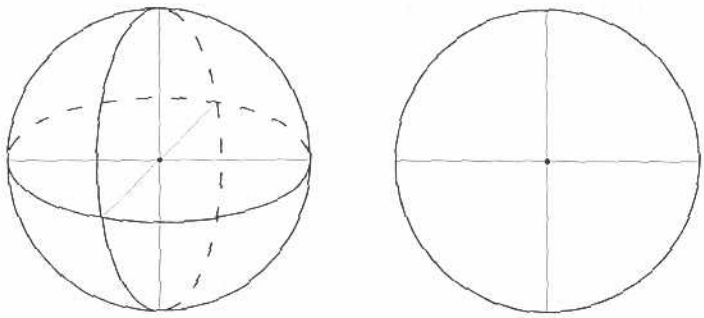
Se dice que un elemento geométrico pertenece a otro, cuando TODOS sus puntos forman parte del conjunto de puntos que definen al otro.

LUGAR GEOMÉTRICO

Se define como LG al conjunto de puntos que cumplen una o más condiciones especificadas.

En general se DEBEN cumplir TODAS las condiciones que se especifican entendiéndose que si no hay restricciones se aplican las más generales, esto hace que las condiciones impuestas en la definición de un LG sea RESTRICTIVAS.

Ej. La ESFERA, LG de los puntos que equidistan de otro. Como quiera que no se dice que los puntos sean coplanares, hay que entender que se trata de TODOS los puntos del espacio. La CIRCUNFERENCIA sería el LG de todos los puntos coplanares que equidistan de otro.



La visualización de un LG requiere un análisis detallado de las RESTRICCIONES impuestas hasta lograr la misma. NO se conocen métodos específicos para su cálculo o visualización. La mayoría de las veces se visualizan por la unión o intersección de otros LG's conocidos, o lo que es lo mismo imponiendo a los LG's más generales nuevas restricciones.

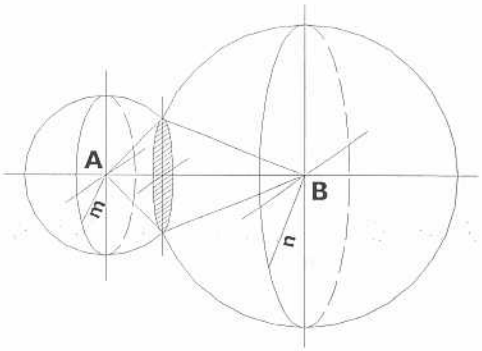
La importancia que tiene la definición de encontrar LG radica en la solución de problemas que requieran encontrar puntos que cumplan una o varias condiciones.

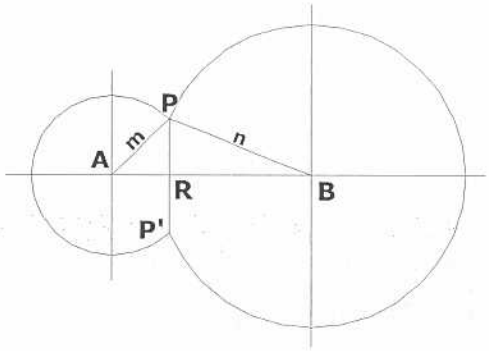
Las respuestas a la pregunta ***¿dónde está(n) el(los) punto(s) que....?*** , llevará a la definición de un LG, al encontrar TODOS los puntos que cumplan la condición impuesta. Si a éstos puntos así encontrados, se le aplican sucesivamente nuevas preguntas *¿Dónde está(n)?* se restringirán los puntos considerados hasta encontrar el o los puntos buscados.

La definición de estos puntos ayudará en la solución de TODOS los problemas geométricos que se puedan plantear.

La intersección de LG dará lugar a la definición de otros que cumplan en conjunto con las condiciones impuestas por separado a cada uno de los LG.

Ej. Encontrar el LG de los puntos que equidistan una distancia (m) de un punto (A) y una distancia (n) de otro punto (B). El primer LG será una esfera de radio m con centro en A. El segundo LG será una esfera de radio n con centro en B. La intersección de dichos LGs será el LG buscado.





OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Figuras planas	• Definir figuras planas y su clasificación: ángulos, polígonos y cónicas. • Ángulo Plano. Concepto, formas de medirlo. Suma y resta de ángulos. La bisectriz como LG • Construcciones geométricas. Trazado de rectas paralelas y perpendiculares entre si • Ángulos de lados paralelos. Ángulos de lados perpendiculares. • Ángulos que se forman en un haz de rectas paralelas cortadas por una secante

FIGURA GEOMÉTRICA

FIGURA PLANA

Desde el punto de vista geométrico una FIGURA PLANA es el conjunto de puntos COPLANARES comprendidos entre **líneas** (rectas o curvas)

Se pueden clasificar en abiertas o cerradas.

La más simple es el ÁNGULO PLANO.

Si las líneas que la limita tienen varios vértices o quiebres la figura se llama POLÍGONO. (Triángulos, cuadriláteros, etc)

Cuando los límites son líneas curvas las figuras serán también curvas, Las CÓNICAS (Circunferencias, elipses, etc), llamadas así por ser secciones de un cono, son las principales.

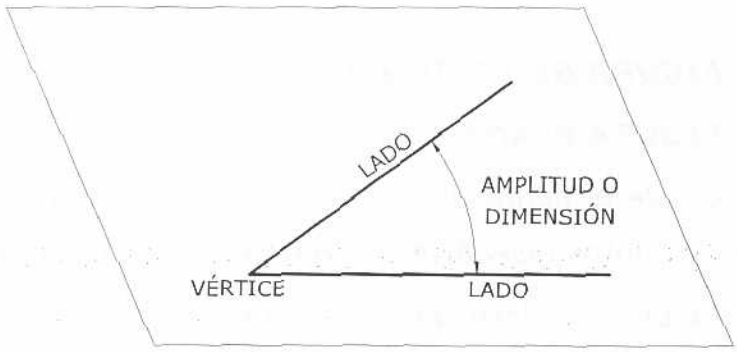
Ejemplos de figuras geométricas planas: Circunferencia, Paralelogramo, Triángulo, Trapecio, etc.

ÁNGULO PLANO

El ángulo plano es la figura geométrica más simple. Es el conjunto de puntos coplanares que se encuentran limitados por dos semirectas del plano con el origen común.

Las semirrectas se llaman LADOS y el origen o punto de corte: VÉRTICE.

La separación de las semirrectas determinará una mayor o menor amplitud de la superficie del plano contenida entre éstas. Esa mayor o menor amplitud es la DIMENSIÓN del ángulo.



Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma por la unidad. Normalmente se expresa en GRADOS o en RADIANES. Las medidas expresadas en grados tienen varias unidades de referencia dependiendo de su uso.

Grado sexagesimal (cuenta o divide de 60 en 60): arco igual a 1/360 de la circunferencia de un círculo o ángulo central que corresponde a dicho arco. Se divide en 60 minutos y éstos a su vez, en 60 segundos (°; '; ").

Grado centesimal (cuenta o divide de 100 en 100): arco igual a 1/400 de la circunferencia de un círculo o ángulo central que corresponde a dicho arco. Se divide en 100 minutos y éstos a su vez, en 100 segundos.

Milésima: es la medida del ángulo central formado por un arco que es 1/6.400 de la circunferencia. Equivale aproximadamente a 0,001 radianes (de allí su nombre, **milésima** de radián). Es usado en artillería.

Radián: unidad de ángulo plano del Sistema Internacional, equivalente a uno cuyo arco tiene igual longitud que el radio.

Relación entre grados sexagesimales y radianes:

La amplitud del ángulo que abarca toda la circunferencia es, expresada en grados sexagesimales 360° y expresada en radianes (Rad) 2π

Luego:

$1° = 2\pi/360° = 0{,}01745329...$Radianes; o

1Radián = $360°/2\pi$ $=57{,}2957795...°$

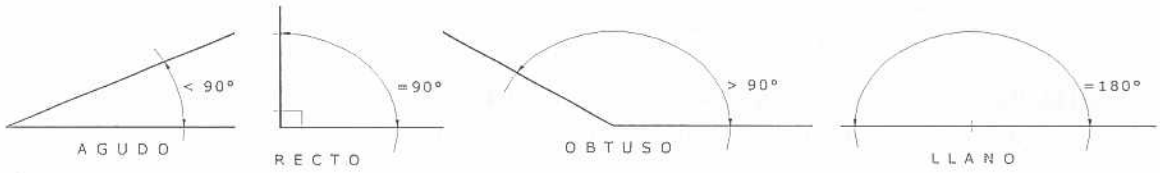
CLASIFICACIÓN SEGÚN SU DIMENSIÓN

AGUDOS: Cuando su dimensión es menor que un recto (<90°)

RECTO: Cuando su dimensión es igual a un recto (=90°)

OBTUSO: Cuando su dimensión es mayor que un recto (>90°)

LLANO: Cuando su dimensión es igual a dos rectos (=2*90°=180°)



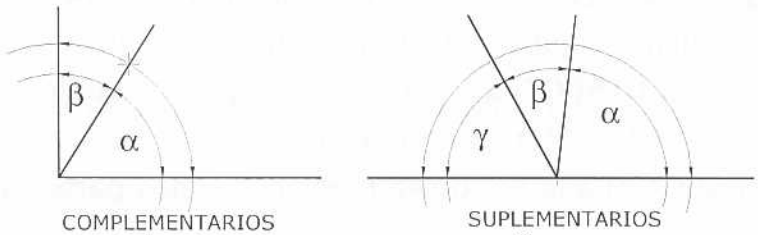
OPERACIONES CON ÁNGULOS

Los ángulos son medidas escalares por lo que se pueden hacer operaciones con ellos. En efecto los ángulos se pueden transportar, trasladar, copiar, sumar, restar, etc.

ADYACENTES Son los que tienen un lado común.

COMPLEMENTARIOS Son ángulos adyacentes cuya suma de amplitud es igual a un recto ($90°=\pi/2$)

SUPLEMENTARIOS Son ángulos adyacentes cuya suma de amplitud es igual a dos rectos ($180°=2\pi$)



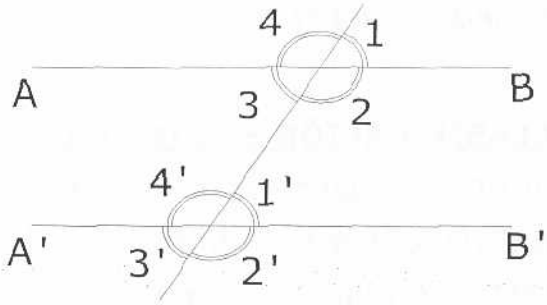
COMPLEMENTARIOS
$\alpha + \beta = 90°$

SUPLEMENTARIOS
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

OPUESTOS POR EL VÉRTICE Son los ángulos que teniendo el mismo vértice, los lados de uno son la prolongación de los lados del otro. Necesariamente son iguales.

RECTAS PARALELAS CORTADA POR UNA SECANTE

Se definen los siguientes ángulos:



ALTERNOS EXTERNOS Situados en lados alternos de la secante en el exterior de las paralelas. SON IGUALES (4;2´/ 1;3´)

ALTERNOS INTERNOS Situados en lados alternos de la secante en el interior de las paralelas. SON IGUALES (3;1´/ 2;4´)

CORRESPONDIENTES Situados del mismo lado de la secante en lados alternos de las paralelas. SON IGUALES (1;1´ / 2;2´/3;3´/ 4;4´)

CONJUGADOS EXTERNOS Situados del mismo lado de la secante en el exterior de las paralelas. SON SUPLEMENTARIOS (1;2´/ 4;3´)

CONJUGADOS INTERNOS Situados del mismo lado de la secante en el interior de las paralelas. SON SUPLEMENTARIOS (2;1´/ 3;4´)

PERPENDICULAR: *(DRAE) Dicho de una línea o un plano: Que forma ángulo recto con otra línea o con otro plano.*

BISECTRIZ

Definiendo como distancia de un punto a una recta a la magnitud del segmento perpendicular a la recta trazado desde el punto; una recta que pasando por el vértice de un ángulo (Dist. 0) pase por otro punto que sea equidistante de las rectas que definen los lados del ángulo, equidistará de dichos lados y dividirá al ángulo en dos partes iguales. Esa recta se llama **BISECTRIZ.** La bisectriz es el LG de los puntos que equidistan de los lados de un ángulo plano.

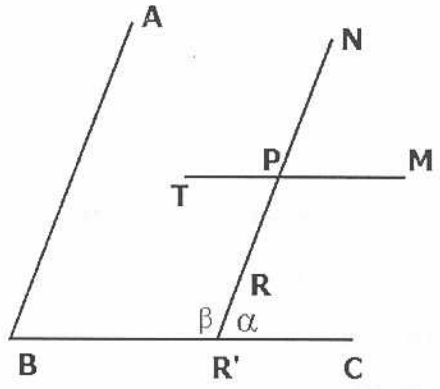
La bisectriz BISECA al ángulo, o sea lo divide en dos partes iguales.

PARALELO, LA *(DRAE) Dicho de dos o más líneas o planos: Equidistantes entre sí y que por más que se prolonguen no pueden encontrarse.*

RELACIONES DE RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

- Dos rectas coplanares perpendiculares a otra recta, son paralelas
- Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas
- En el espacio existen infinitas rectas que son perpendiculares a recta
- Por un punto exterior a una recta pasan INFINITAS rectas perpendiculares a ella
- Por un punto exterior a un plano sólo pasa UNA recta perpendicular al plano
- Toda recta perpendicular a un plano será perpendicular a TODAS las rectas del plano. *Bastará demostrar que sea perpendicular a dos rectas que se corten del plano, para aseverar que sea perpendicular al plano.*

DOS ÁNGULOS CUYOS LADOS SEAN PARALELOS SON IGUALES O SON SUPLEMENTARIOS

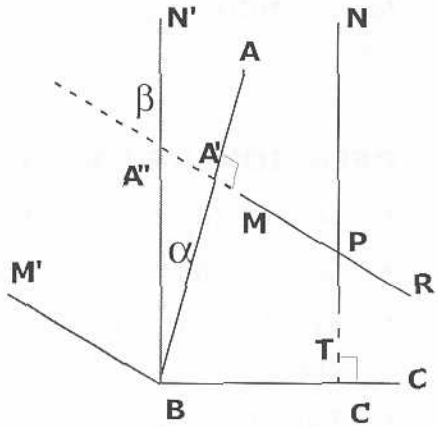


Demostración

<NPM =<TPR (*opuestos por el vértice*)
< RPM =<TPN (*opuestos por el vértice*)
α=<NPM (*correspondientes de las paralelas BC y TM cortadas por la recta NR'*)
<ABC= α (*correspondientes de las paralelas AB y NR' cortadas por la recta BC*)
Luego **<ABC=<NPM=<TPR**
α+<RPM=180° (*conjugados internos de las paralelas BC y TM cortadas por la recta NR'*)
Luego **<ABC+<RPM=<ABC+<TPN= 180°**

DOS ÁNGULOS CUYOS LADOS SEAN PERPENDICULARES SON IGUALES O SON SUPLEMENTARIOS

Demostración



<NPM=<TPR (*opuestos por el vértice*)
<MPT=<NPR (*opuestos por el vértice*)
Sean M'B || MR y N'B || NT
β=<NPM (*correspondientes de las paralelas N'B y TN cortadas por la recta A''R*)
<M'BN'=β (*correspondientes de las paralelas M'B y A''R cortadas por la recta N'B*
Luego **<M'BN'=<NPM=<TPR** (1)
M'B^BA -> **<M'BN'+α=90°** (2)

N'B^BC -> **<ABC+α=90°** (3)
Igualando (2) y (3) <M'BN'+α=<ABC+α -> <M'BN'=<ABC
sustituyendo (1) **<ABC =<NPM =<TPR**
<NPR+ β=180° (*conjugados de las paralelas N'B y NT cortadas por la recta A''R*
pero β=<NPM=<ABC y <NPR=<MPT
luego **<ABC+<MPT=<ABC+<NPR=180°**

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Razón y proporción	• Razón y proporción. Cuarta, Tercera y Media Proporcional. Concepto de escala. • Teorema de Tales: aplicación a la división de un segmento en partes iguales y en partes proporcionales Proporcionalidad. • Proporcionalidad de figuras geométricas. Semejanza y homotecia

(DRAE) **razón.** (Del lat. *ratĭo, -ōnis*).

11. f. *Mat.* Cociente de dos números o, en general, de dos cantidades comparables entre sí.

(DRAE) **proporción.** (Del lat. *proportĭo, -ōnis*).

5. f. *Mat.* Igualdad de dos razones.

Si se tienen **dos cantidades** o magnitudes escalares que se puedan comparar entre sí, **el cociente** de ellas es la **RAZÓN** en que dichas cantidades o magnitudes se encuentran. Así la RAZÓN de dos números (4 y 5) será 4/5 ó 0,80. El numerador de la fracción (4) será el **ANTECEDENTE** y el denominador (5) el **CONSECUENTE**. Es posible que otro par de números, por ejemplo 8 y 10, tengan la misma razón (8/10=0,80). En estos casos se podrá establecer la igualdad de ambas expresiones (Razones). Se habrá establecido una **PROPORCIÓN** ya que las **RAZONES** son **IGUALES**. O sea 4 es a 5 lo mismo que 8 es a 10.

Ej. En medicina los medicamentos se suelen administrar en dosis que son ***PROPORCIONALES*** *al peso de los pacientes. Las dosis se expresan en relación a la unidad de peso (p.ej: mg/kg). Esta dosis es la RAZÓN del medicamento suministrado por cada kilogramo de peso. La cantidad de medicamento que se le suministra a dos pacientes de diferente peso, es-*

*tará en la misma PROPORCIÓN o sea las CANTIDADES de medicamento suministradas a los paciente, aunque diferentes, son proporcionales porque sus DOSIS (**razón**) son iguales.*

RAZÓN DE DOS SEGMENTOS

Se llama razón de *dos segmentos*, a la relación de sus *valores numéricos* (longitud) expresados en la misma unidad.

Así, si el segmento **a** mide 6cm y el **b** mide 3cm, la razón **a/b** será **6/3=2**

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Dos segmentos rectilíneos (a, b) son proporcionales a otros dos (c, d), cuando la razón de dos de ellos es igual a la razón de los otros dos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Donde: *a* y *c* por una parte y, *b* y *d*, por la otra son términos *correspondientes* entre sí.

Para poder comparar segmentos sus magnitudes DEBEN ser comparables, o sea deben estar expresadas en la misma unidad de medida.

CUARTA PROPORCIONAL Se llama cuarta proporcional de tres cantidades (a; b; c) a una cuarta cantidad (x) tal que

$$a/b = c/\mathbf{x}$$

TERCERA PROPORCIONAL Se llama tercera proporcional de dos cantidades (a; b) a una tercera cantidad (x) tal que

$$a/b = b/\mathbf{x}$$

MEDIA PROPORCIONAL Se llama media proporcional de dos cantidades (a; b) a una tercera cantidad (x) tal que

$$a/\mathbf{x} = \mathbf{x}/b$$

SERIE DE RAZONES IGUALES En una serie de razones proporcionales

$$a/a'=b/b'=c/c'=d/d'.....$$

Se cumple que la suma de todos los antecedentes es a la suma de todos los consecuentes, como un antecedente cualquiera es a su consecuente

$$\mathbf{(a+b+c+d+....) / (a'+b'+c'+d'+...) =}$$

$$\mathbf{a/a'=b/b'=c/c'=....}$$

En general para que se pueda hablar de PROPORCIÓN DEBE haber al menos CUATRO cantidades escalares que se puedan comparar entre sí, la RAZÓN, SIEMPRE es referida a DOS cantidades.

ESCALA

La representación gráfica de objetos, piezas de maquinarias, terrenos, estructuras, etc. debe se hecha en forma proporcional a cada uno de los prototipos ya que es la única forma de comprender la interrelación de cada uno con el medio y/u otros objetos, estructuras, etc.

Hacer esta representación en tamaño natural por supuesto que es imposible, dado el tamaño real de cada objeto. Incluso, en elementos muy pequeños también resulta imposible dado lo poco práctico que resultaría su observación.

Surge entonces la representación hecha en forma proporcional conservando entre el DIBUJO y el PROTOTIPO una RAZÓN que origine un dibujo útil y cómodo de manejar.

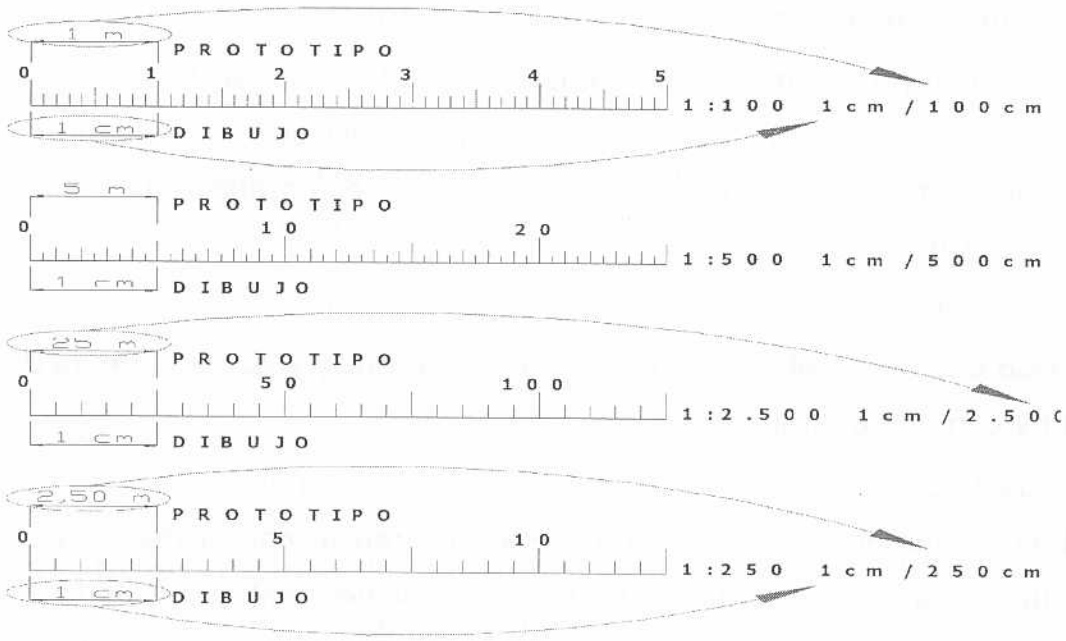
Surge la ESCALA, que es la RAZÓN entre la magnitud o tamaño de un objeto o dimensión en su representación gráfica, con la magnitud o tamaño de su correspondiente en sus dimensiones reales, tomando en cada caso la misma unidad de medida, o mencionando la unidad correspondiente a la representación y al modelo en tamaño natural.

Entonces se logra que cada parte del objeto en su dimensión real tenga la misma razón con la correspondiente en su dimensión de representación. Como quiera que la representación es PROPORCIONAL se podrán hacer mediciones y cálculos en la representación gráfica. En efecto bastará aplicar la razón o escala a las mediciones hechas en el dibujo para conocer cuales son las correspondientes en el prototipo. Es la RAZÓN DE PROPOR-CIONALIDAD entre la representación y la verdadera dimensión.

Estas operaciones supondrían efectuar una cantidad muy grande de cálculos, que no por simples dejarán de ser incómodos.

Comercialmente se fabrican unas reglas graduadas hechas de tal forma que las mediciones sobre los dibujos sean fáciles y expeditas de realizar. Son conocidos como ESCALÍMETROS y vienen preparados para las escalas más usuales.

Sin embargo siempre se puede, con la aplicación del Teorema de Tales, construir un ESCALÍMETRO para facilitar el trabajo en cualquier escala que se desee.



No obstante se recomienda, utilizar las escalas consideradas como "comerciales".

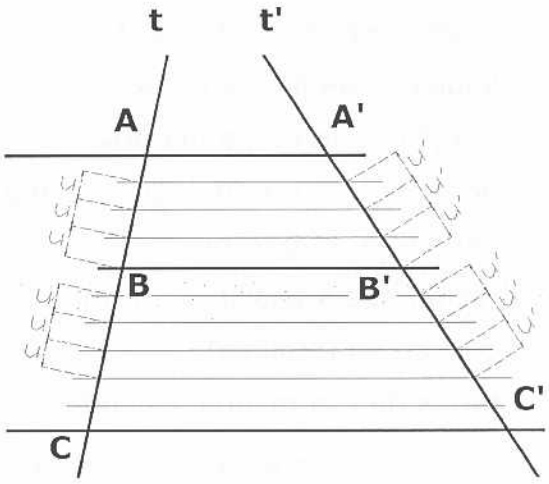
Durante el ejercicio de la ingeniería resulta muy importante escoger la escala adecuada para la representación deseada en cada caso. Deberá se una que permita mostrar cada una de las estructuras representadas con los detalles correspondientes. La escogencia de la escala apropiada deberá estar ligada a los detalles que se quieran o deban enseñar, dependiendo por supuesto de la etapa del proyecto que se esté realizando, en un anteproyecto, por ejemplo no se requerirá mostrar tantos detalles como en un proyecto definitivo, lo que permitirá utilizar escalas mayores. Cada tipo de representación suele asociarse a una escala. Los planos de planta de una vivienda, casi en su totalidad, se representan en escala 1:50, los detalles de los sanitarios de esa misma vivienda se representan en escala 1:20, etc.

Comoquiera que la escala es la RAZÓN DE PROPORCIONALIDAD, se podrán establecer nuevas escalas multiplicando o dividiendo por una constante adecuada las graduaciones preparadas en uno u otro escalímetro. Una graduación preparada para "leer" representaciones hechas en escala 1:50 podrá ser utilizada para "leer" dimensiones preparadas en escala 1:500 sin otros cambios que multiplicar cada lectura por 10 (500/50). Lecturas en escala 1:5 se podrán realizar multiplicando por 0,10 (5/50) o lo que es lo mismo dividiendo entre 10. Con otras escalas se podrá proceder en forma similar. Si sólo se dispone de un escalímetros con la escala 1:20 pero se quiere hacer o leer una representación en escala 1:40, bastará multiplicar cada lectura por 2 (40/20). Por supuesto que en todos los casos será conveniente utilizar, en el escalímetros, una escala que sea fácil de convertir a la deseada.

TEOREMA DE TALES

Varias paralelas que cortan a dos rectas transversales determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales

Demostración



Considérese una unidad de medida (u) tal que quepa un número entero de veces en el segmento AB y, otro número entero de veces en el segmento BC. Se podrán localizar en cada uno de los segmentos puntos intermedios. Supongamos que AB contiene a la unidad m veces y BC n veces. Entonces:

AB=mu y BC=nu

La razón AB/BC=mu/nu,

simplificando

AB/BC=m/n (1)

Por cada uno de los puntos así determinados se trazan rectas paralelas a AA'. Se obtienen así puntos sobre los segmentos A'B' Y B'C'. Por ser segmentos de rectas paralelas separadas igual distancia entre sí, todos serán iguales (u').

Como quiera que se obtienen al trazar las rectas paralelas por cada punto en AB y BC, a cada segmento u le corresponderá un segmento u', luego se obtienen en A'B', m segmentos u' y en B'C', n segmentos u'.

Entonces A'B'=mu' y B'C'=nu'

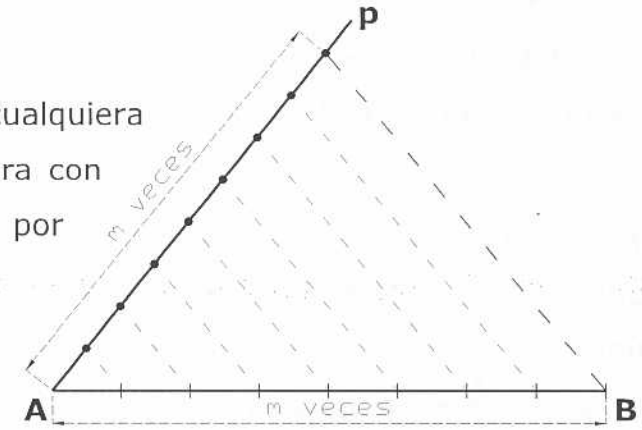
La razón A'B'/B'C'=mu'/nu', simplificando

A'B'/B'C'=m/n (2).

Igualando (1) y (2) **AB/BC= A'B'/B'C'**

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO NÚMERO CUALQUIERA DE PARTES IGUALES

Sea el segmento AB, el cual se quiere dividir en un número m de partes iguales.



1) Se traza una recta (AP) cualquiera que forme un ángulo cualquiera con el segmento AB y que pase por uno de sus extremos (A).

2) Se determinan sobre esta recta m puntos situados la misma distancia que puede ser cualquiera.

3) Se traza la recta que une al último de los puntos determinados con el otro extremo (B) del segmento AB.

4) Se trazan paralelas a esta última recta por cada uno de los puntos sobre la recta p.

DIVIDIR UN SEGMENTO EN OTROS DOS QUE ESTEN EN UNA RAZÓN DADA

1) Se traza la recta p, cualquiera, por uno de los extremos del segmento (AB) dado.

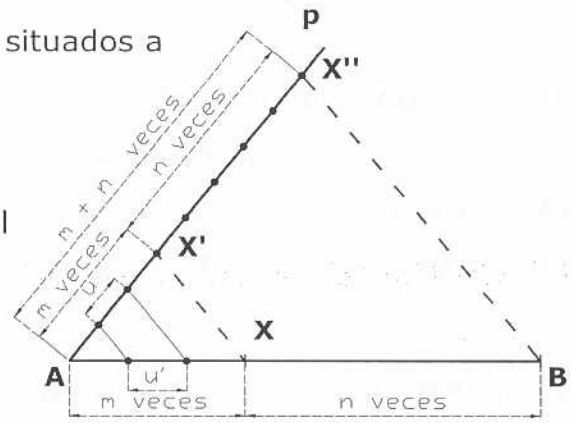
2) Se ubican m+n puntos equidistantes sobre la recta p.

3) Se determinan los puntos X' y X'', situados a m y m+n puntos desde el origen.

4) Se traza la recta que une X'' y B.

5) La paralela a esta recta por el punto X', determinará sobre AB el punto X.

6) La longitud AX será mu' y la de XB será nu'.



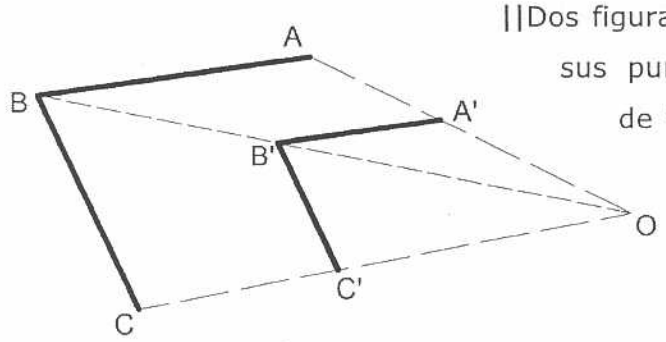
Luego **AX/XB = m.u'/n.u' = m/n**

PROPORCIONALIDAD DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

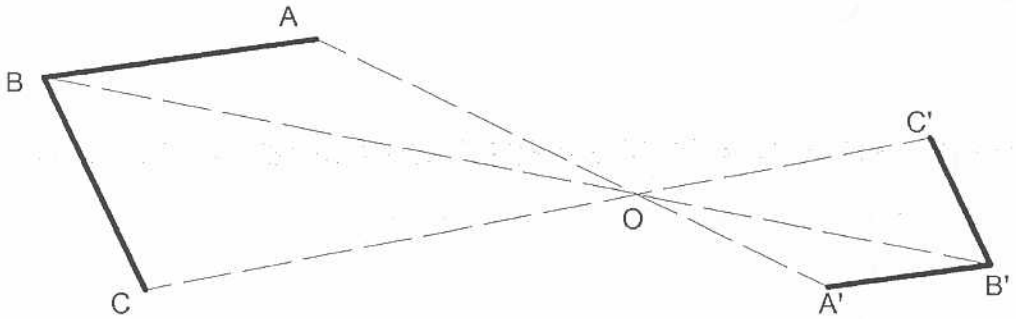
Si dos figuras geométricas tienen elementos correspondientes que conservan la razón entre ellos, se dice que las figuras son SEMEJANTES, y la razón entre los diferentes elementos correspondientes es la RAZÓN DE PROPORCIONALIDAD.

Ej. Dos CUADRADOS son proporcionales y el cociente entre la longitud de los lados de uno entre la longitud de los lados del otro es la razón de proporcionalidad.

FIGURAS HOMOTÉTICAS



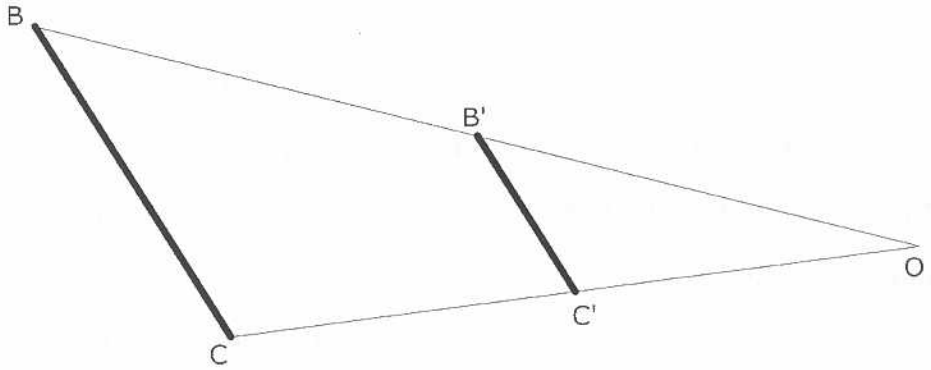
||Dos figuras se dicen *HOMOTÉTICAS* cuando sus puntos homólogos se corresponden de tal manera que las rectas que los unen pasan todas por un único punto (O), denominado CENTRO DE HOMOTECIA



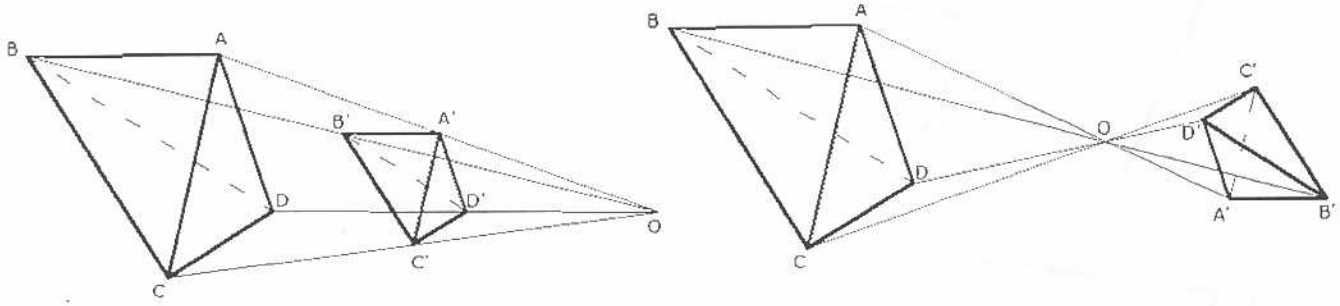
PROPORCIONALIDAD

En los planos que se forman se podrán establecer razones de proporcionalidad (Teorema de Tales)

BC/B'C' = AB/A'B' = AB/BC = ... = K(Constante)



Considerando todos los planos que se forman en el caso de sólidos o superficies tridimensionales también se podrán establecer razones de proporcionalidad



$$AB / A'B' = BC / B'C' = AC / A'C' = CD / C'D' = ... = K \text{ (constante)}$$

Por ser una relación LINEAL la razón de proporcionalidad también lo será, por lo que no aplicará a la razón de proporcionalidad de ÁREAS y VOLÚMENES, las cuales existirán pero serán el cuadrado o el cubo de la razón lineal para las áreas o los volúmenes respectivamente.

$$(\text{Área}) ABC / (\text{Área}) A'B'C' = (\text{Área}) ACD / (\text{Área}) A'C'D' = ... = K^2$$

$$(\text{Vol}) ABCD / (\text{Vol}) A'B'C'D' = K^3$$

Propiedades de la Homotecia

La homotecia es una trasformación lineal

Las imágenes de puntos alineados son también alineados

La imagen de una recta es otra recta paralela

Rectas paralelas tienen imágenes paralelas y por consiguiente conservan su alineamiento

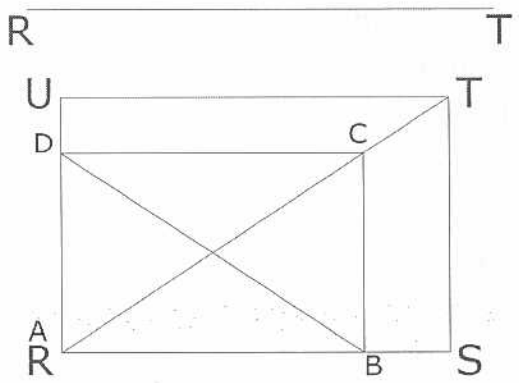
Al conservar el alineamiento se conserva el ángulo entre los elementos en la imagen

La razón de partes de un mismo segmento es la misma a sus correspondientes en la imagen

Ej de aplicación práctica.

Sea el segmento RT la diagonal de un rectángulo cuyos lados están en la razón 2/3. Determinar el rectángulo.

Siempre se podrá construir un rectángulo (ABCD) cuyos lados estén en una razón dada (AD/AB=2/3). En ese rectángulo AC es la diagonal. Como la imagen de los segmentos correspondientes es paralela al objeto original RT será paralela (se hace coincidir) a AC.



Conservando la propiedad de paralelismos de elementos comparables se trazan paralelas a CB y a CD por los puntos T y R, obteniendo el rectángulo RSTU que es el que se busca.

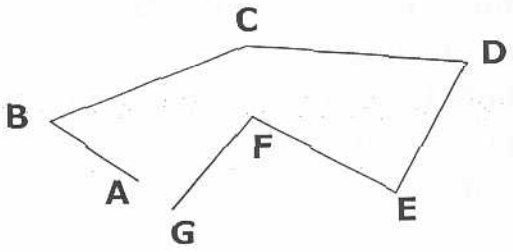
PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Polígonos y poligonales	• Definir línea poligonal. Definir polígonos y su clasificación • Definir polígonos regulares y sus elementos: apotema, diagonal, suma de los ángulos internos y suma de los ángulos externos. Área y perímetro

LÍNEA POLIGONAL O QUEBRADA

Se define como *Línea poligonal o quebrada*, a aquella que se compone de dos o más segmentos rectilíneos, de modo que dos consecutivos estén en distinta dirección y tales que el extremo de uno de ellos sea el comienzo del siguiente.

Ej. ABCDEFG es una línea poligonal

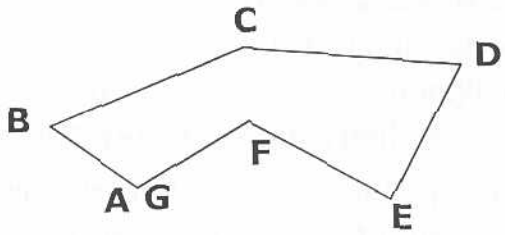


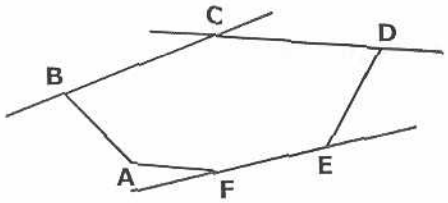
En la línea poligonal el punto común de cada dos segmentos es un VÉRTICE, y cada segmento rectilíneo se llama LADO.

En el ejemplo los puntos A y G son el comienzo y el extremo.

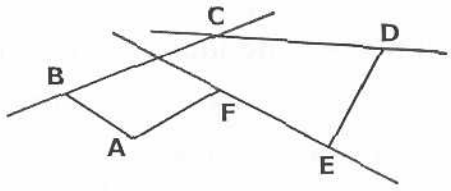
Si estos puntos (Comienzo y Extremo) se diferencian la poligonal es ABIERTA.

Si se confunden en un solo punto entonces la poligonal será CERRADA.





CONVEXO



CONCAVO

Si al prolongar los lados de una poligonal, y en todos los casos queda ubicada íntegramente a un mismo lado de ese lado prolongado, la polígonal será CONVEXA. Si al menos en uno de los casos parte de la polígonal se ubica en lado diferente al resto, será CONCAVA.

POLÍGONO

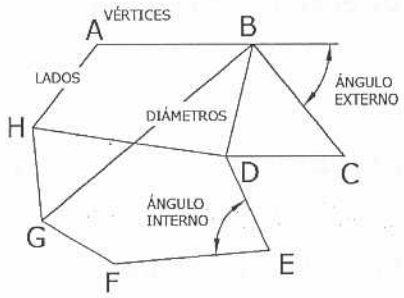
Se define como polígono, la porción del plano que queda dentro de una poligonal cerrada.

ELEMENTOS

Cada uno de los lados de la poligonal también será el LADO del polígono. Cada uno de los puntos comunes a dos lados consecutivos, será un VÉRTICE.

El segmento que une a dos vértices no consecutivos se denomina DIAGONAL.

El ángulo que forman dos lados consecutivos hacia la parte interna del polígono es el ÁNGULO INTERNO, el que se forma entre un lado y la prolongación del adyacente, será el ÁNGULO EXTERNO.



CLASIFICACIÓN

Si la longitud de TODOS los lados de un polígono convexo es la misma, el polígono será REGULAR, en este caso también todos sus ángulos. Si al menos una es diferente, será IRREGULAR.

Si la poligonal que define al polígono es convexa o cóncava, el polígono también será CONVEXO o CÓNCAVO.

En función del número de lados algunos polígonos son:

TRIÁNGULO (3) - CUADRILÁTERO (4) - PENTÁGONO (5) - HEXÁGONO (6) - EPTÁGONO (7)

OCTÁGONO (8) - ENEÁGONO (9) - DECÁGONO (10) - ENDECÁGONO (11)

DODECÁGONO (12) - PENTADECÁGONO (15) - ICOSÍGONO (20)

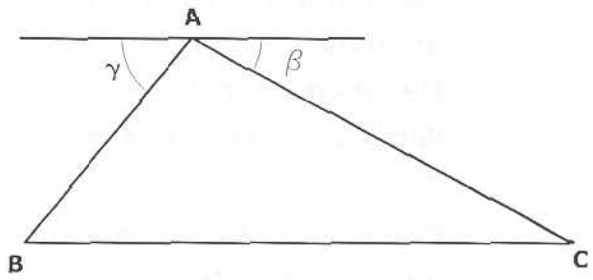
En todos los polígonos mencionados el nombre obedece al número de ángulos, menos el cuadrilátero que se refiere al número de lados.

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO

La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°

Sea ABC un triángulo cualquiera.

Trácese una recta paralela al lado BC por el vértice A.



La suma de los ángulos formados alrededor del vértice A, sobre la recta paralela trazada es:

$$\gamma + <BAC + \beta = 180°$$

pero

$\gamma = <ACB$ (Alternos internos)

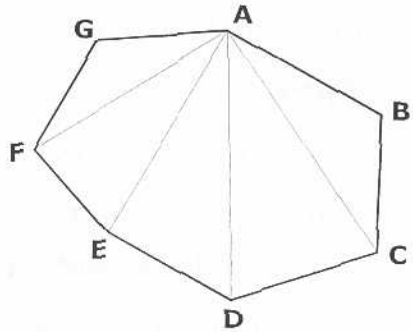
$\beta = <ABC$ (Alternos internos)

luego

<ABC + <BAC + <ACB = 180°

SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN POLÍGONO CONVEXO

La suma de los ángulos internos de un polígono convexo, puede ser estimada dividiendo el polígono en tantos triángulos como sea posible, teniendo todos ellos un vértice común.



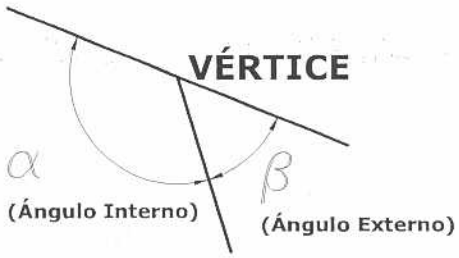
En todos los casos un vértice se podrá unir, para formar triángulos, con todos los otros vértices del polígono, menos con los dos adyacentes. Luego se podrán formar tantos triángulos como vértices, no adyacentes existan (N° de lados o vértices menos 2).

La suma de todos los ángulos internos, será igual a la suma de los ángulos de todos los triángulos, o sea $\sum_1^n(\acute{A}ngulosInternos) = (n-2)*180°$, siendo n el N° de lados.

SUMA DE LOS ÁNGULOS EXTERNOS DE UN POLÍGONO CONVEXO

En un polígono convexo se entiende como ángulo externo, el que se forma entre un lado y la prolongación del adyacente.

En cada vértice se tendrá una situación similar a la de la figura



En cada vértice la suma del ángulo interno (α) más el ángulo externo (β), será igual a 180°.

Si se considera la suma de todos los ángulos de todos los vértices, se tendrá, siendo n el número de vértices:

$$\sum_1^n(\acute{A}ngulosInternos) + \sum_1^n(\acute{A}ngulosExternos) = n*180°$$

pero

$$\sum_1^n(\acute{A}ngulosInternos) = (n-2)*180°$$

luego

$$(n-2)*180° + \sum_1^n(\acute{A}ngulosExternos) = n*180°$$

de donde

$$\sum_1^n(\acute{A}ngulosExternos) = n*180° - (n-2)*180°$$

$$\sum_1^n(\acute{A}ngulosExternos) = 360°$$

Valor independiente del número de vértices.

PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Triángulos	• Definir triángulos y sus elementos (lados, ángulos int y ext, mediana, bisectriz, altura, mediatriz, incentro, ortocentro, baricentro y circuncentro). • Los elementos de los triángulos como lugares geométricos • Construcción de triángulos • Definir semejanza y congruencia, diferencias entre estos conceptos, teoremas de semejanza y de congruencia.

TRIÁNGULOS

Se denominan así a los polígonos de tres lados y tres ángulos.

CLASIFICACIÓN

Según sus ángulos:

ACUTÁNGULO - Cuando todos sus ángulos son agudos

RECTÁNGULO - Cuando uno de sus ángulos es recto o de 90°

OBTUSÁNGULO - Cuando uno de sus ángulos es obtuso

Según las dimensiones de sus lados:

EQUILÁTERO – Cuando todos sus lados son iguales

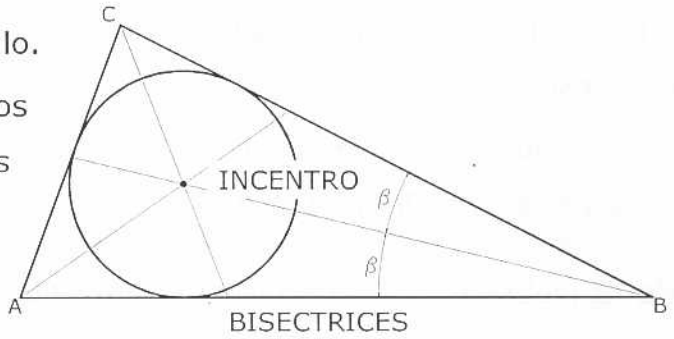
ISÓSCLES – Cuando dos de sus lados son iguales

ESCALENO – Cuando sus tres lados son diferentes

LÍNEAS NOTABLES

BISECTRIZ

Es a recta que biseca a cada ángulo. Siendo la bisectriz el LG de los puntos que equidistan de los dos lados del ángulo bisecado, cada bisectriz será el LG de los puntos que equidistan de los lados del triángulo considerados dos a dos. El punto de corte de esos LG, en consecuencia, equidistará de los tres lados. Una circunferencia trazada con centro

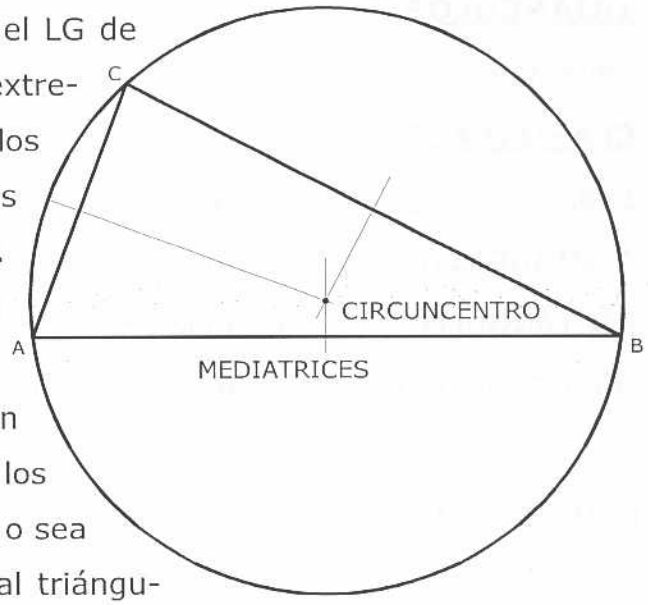


en dicho punto y radio la distancia a los lados, será tangente a cada uno de los tres lados del triángulo, o sea esa circunferencia estará inscrita en el triángulo. Ese punto se denomina *INCENTRO*.

MEDIATRIZ

Es la recta perpendicular a cada lado trazada por su punto medio.

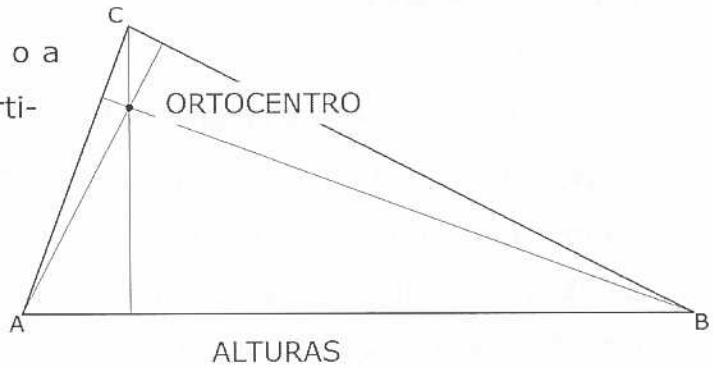
Siendo la mediatriz de un segmento el LG de los puntos que equidistan de sus extremos, cada mediatriz será el LG de los puntos que equidistan de los vértices del triángulo considerados dos a dos. El punto de intersección de esos LG equidistará de los tres vértices. Una circunferencia trazada con centro en dicho punto y radio la distancia a los vértices, pasará por los tres vértices, o sea la circunferencia estará circunscrita al triángulo. Este punto se llama *CIRCUNCENTRO.*



ALTURA

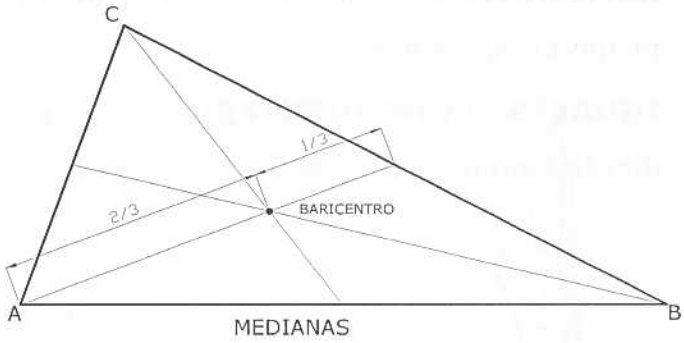
Es la recta perpendicular a cada lado o a su prolongación trazada desde el vértice opuesto.

El punto de intersección de las alturas se denomina *ORTOCENTRO.*



MEDIANA

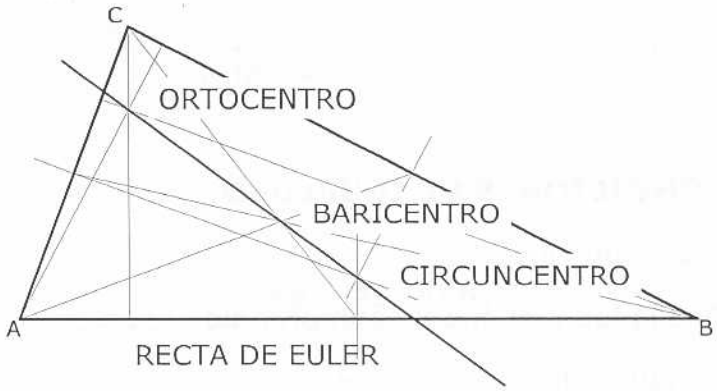
Es la recta que une cada vértice con el punto medio del lado opuesto.



El punto de corte de las medianas se llama *BARICENTRO*. Es el centro de gravedad del triángulo. El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos cuya razón es 2 (2/3; 1/3), siendo el de mayor longitud el comprendido entre el vértice correspondiente y el baricentro.

RECTA DE EULER

Es la recta que une, en un triángulo, el Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro



Cuando se hace referencia a valores (dimensiones) de la bisectriz, la altura y/o la mediana en un triángulo, siempre se refiere a la longitud del segmento comprendido entre el vértice y el lado opuesto.

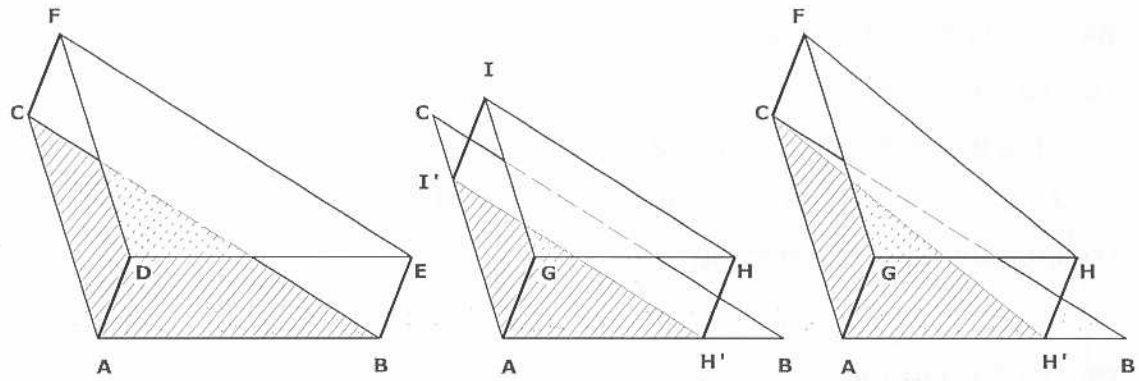
CONGRUENCIA Y SEMEJANZA

Dos polígonos serán CONGRUENTES o IGUALES si al moverlos y hacerlos coincidir uno sobre el otro hay una coincidencia total de todos sus lados. Si sólo hay coincidencia en sus ángulos entonces los polígonos son SEMEJANTES.

Dos o más triángulos pueden ser:

SEMEJANTES Si tienen sus tres ángulos iguales y lados correspondientes proporcionales entre sí

IGUALES (**CONGRUENTES**), Si tienen sus tres ángulos y lados correspondientes iguales entre sí.



IGUALES (CONGRUENTES) SEMEJANTES DIFERENTES

CONDICIONES DE IGUALDAD

Tres lados iguales

Dos lados y el ángulo comprendido iguales

Un lado y los dos ángulos adyacentes

CONDICIONES DE SEMEJANZA

Tres ángulos iguales

La semejanza de dos triángulos SIEMPRE implica que son proporcionales (Teorema de Tales)

APLICACIONES PRÁCTICAS DE SEMEJANZAS DE TRIÁNGULOS

Solución de problemas por semejanza de triángulos

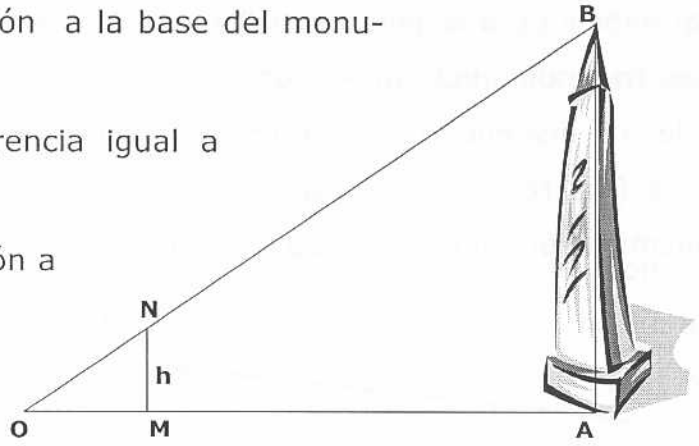
1.- Se desea conocer la altura de un monumento para lo cual se realizaron las siguientes mediciones:

Distancia del punto de observación a la base del monumento (OA) igual a 50m.

Altura (h) de la regla de referencia igual a 2,50m.

Distancia del punto de observación a la regla de referencia (OM) igual a 5,00m.

¿Cuál es la altura del monumento?

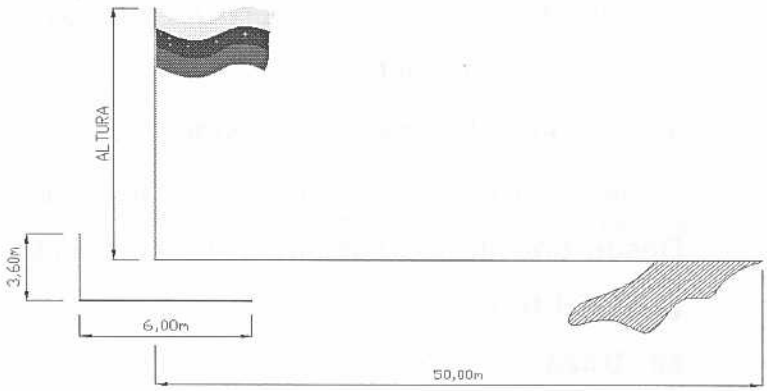


Los triángulos OAB y OMN son semejantes ya que tienen dos ángulos iguales. En efecto son rectángulos en A y en M respectivamente, y el ángulo O es común.

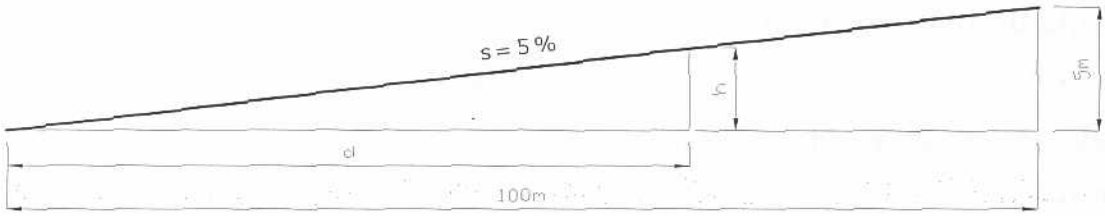
Luego:

OA/OM=AB/MN(h) -> 50,00/5,00 = AB/2,50 -> ***AB= 25,00m***

2.- La sombra proyectada en el suelo (horizontal) por un asta de bandera tiene una longitud, desde el pie del asta, de 50m. En el mismo momento la sombra de una vara clavada verticalmente en el piso mide 6m. Calcular la altura del asta conociendo que la longitud de la vara es de 3,60m. ALTURA / 3,60 = 50,00 / 6,00 --> ALTURA = 30 m



Otro ejemplo de la utilización de triángulos semejantes son las expresiones que designan la pendiente de carreteras, tejados, tuberías, etc. Por ejemplo: al hablar de una pendiente del +/- 5% se está estableciendo la relación con un triángulo rectángulo donde la inclinación de la hipotenusa es tal que se eleva o disminuye a razón de 5 unidades de longitud (m) por cada 100 unidades (m) recorridas (horizontalmente). Obedeciendo el signo al aumento o disminución de la distancia vertical entre dos puntos de referencia.



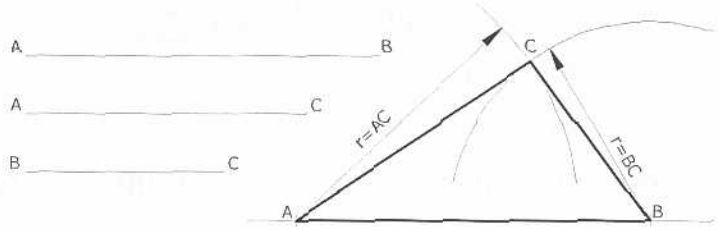
Estableciendo las relaciones de proporcionalidad entre los elementos correspondientes se podrá determinar, P.Ej. La distancia (d) que se debe recorrer (horizontal) para subir o bajar una altura (h) deseada.

PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

La construcción de triángulos requiere el conocimiento o la posibilidad de conocer los lados que lo definen. Todos estos problemas se resuelven encontrando el o los LG de los vértices o lados desconocidos. A continuación se presentan algunos ejemplos.

1) Conocidos los tres (3) lados

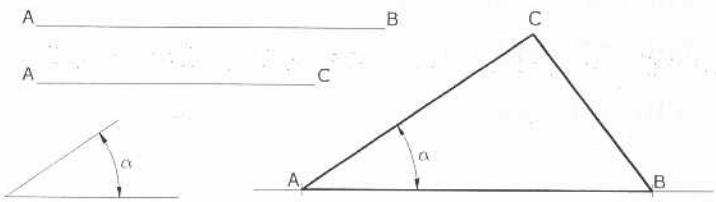
Se lleva la dimensión de uno de los lados (AB) sobre una recta cualquiera. Desde uno de los extremos del segmento que representa ese lado (AB) del triángulo, se traza un arco con radio igual a la dimensión de



otro de los lados (BC - LG del vértice C trazado desde B), desde el otro extremo del primer lado (AB), se traza otro arco de radio igual a la dimensión del tercer lado (AC - LG del vértice C trazado desde A). Donde se corten los arcos trazados (LG's) se encuentra el tercer vértice (C) del triángulo buscado.

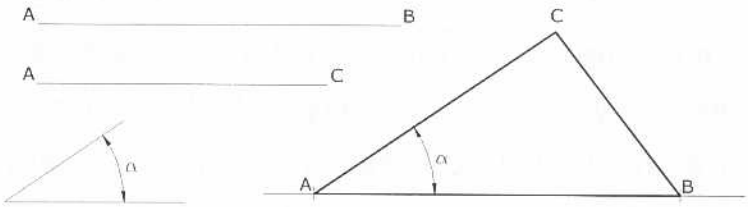
2) Conocidos dos(2) lados y el ángulo comprendido

Sobre una recta cualquiera se lleva la dimensión de uno de los lados conocidos (AB). Se copia el ángulo comprendido entre los lados conocidos haciendo coincidir su vértice con uno de los extremos (A) del lado anterior. Sobre el lado que coincide con el correspondiente del ángulo, se lleva la dimensión del otro lado conocido (AC). Los extremos de los segmentos copiados serán los vértices del triángulo buscado.



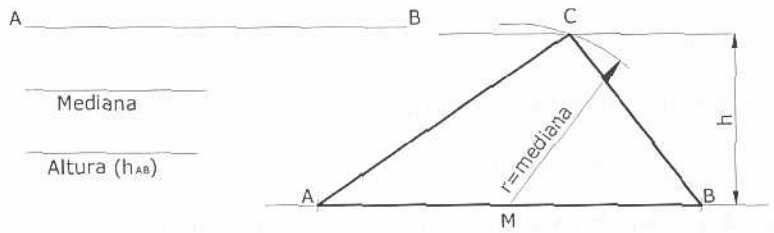
3) Un (1) lado y los ángulos adyacentes

Sobre una recta cualquiera se lleva la dimensión del lado conocido (AB). Se copian los ángulos dados haciendo coincidir sus vértices con los extremos del segmento (AB). El punto de corte de los lados libres de los ángulos será el tercer vértice (C) del triángulo.



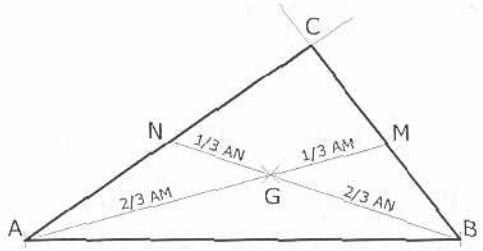
4) Un lado y, la mediana y la altura sobre dicho lado

Sobre una recta cualquiera se lleva el lado conocido (AB). La mediana es la *recta que pasa por el punto medio de un lado trazada desde el vértice opuesto*. El LG de ese vértice será un arco de circunferencia con centro en el punto medio (M) del lado (AB) y radio la *dimensión de la mediana*. *La altura de un triángulo es el segmento perpendicular* a un lado trazado desde el vértice opuesto. El LG del vértice opuesto al lado AB será una recta paralela a una distancia igual a la dimensión (h) de la altura. El punto de corte de ambos LG será el vértice C que se busca.



5) Un lado y el Baricentro

En un triángulo el Baricentro (G en la figura) es el punto de corte de las medianas trazadas desde un vértice hasta el lado opuesto. El Baricentro divide a cada mediana en dos segmentos cuya razón es 2 (2/3 desde el vértice y 1/3 desde el centro del lado). Una recta trazada por uno de los extremos del lado conocido y el baricentro será la dirección de la mediana trazada *desde ese vértice. La dimensión desde el vértice hasta el Baricentro será* el doble de la distancia, en esa misma mediana, desde el Baricentro hasta el centro del lado opuesto (M). El mismo procedimiento para el otro vértice, permitirá definir el centro del otro lado(N). Uniendo cada vértice conocido con los puntos medios determinados definirán los otros dos lados, el punto de corte de los mismos será el tercer vértice.



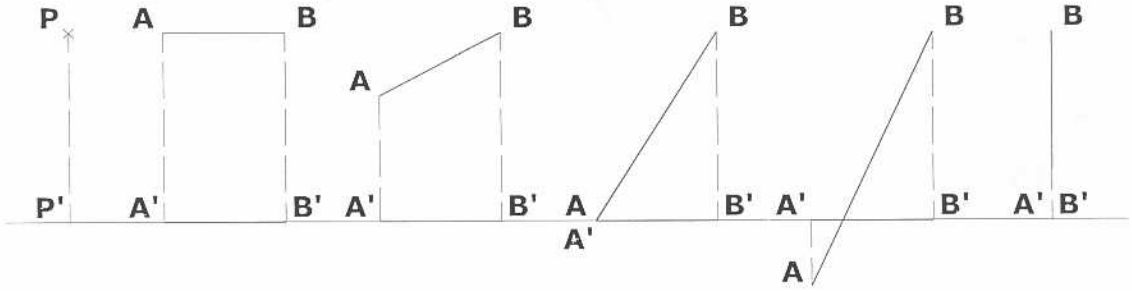
OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Teoremas de la Bisectriz, Pitágoras y Euclides	• Proyecciones • Teorema de la Bisectriz • Teorema de Pitágoras • Teorema de Euclides • Determinar gráficamente la raíz cuadrada de números naturales por medio del Teorema de Pitágoras • Determinar la media proporcional de dos números naturales por medio del Teorema de Euclides

PROYECCIONES

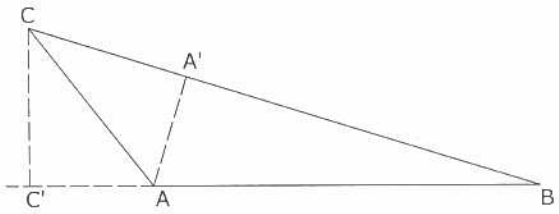
Se llama proyección de un punto (P) sobre una recta, al pié (P') de la perpendicular a la recta trazada desde el punto. La proyección de un segmento, será la porción de la recta (*segmento*), definido por las proyecciones de los puntos que lo determinan. Cada una de las perpendiculares trazadas entre un punto y la recta, se denomina PROYECTANTE.

La figura representa las proyecciones sobre una recta de un punto (P) y de varios segmentos (AB) colocados en diferentes posiciones.

La longitud de la proyectante de cada punto, por ser perpendicular a la recta, representa la distancia del punto a la recta.



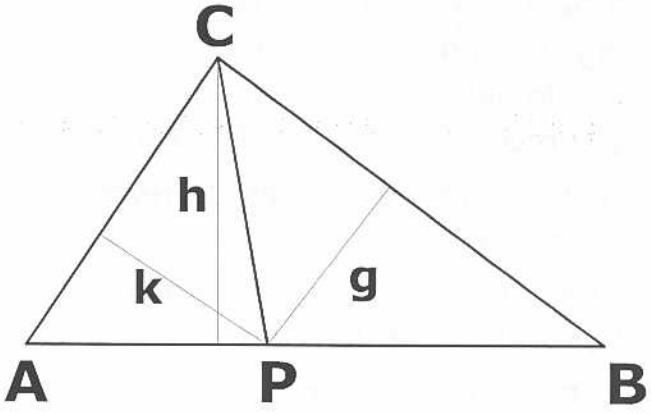
En un triángulo la proyección de un lado sobre otro la definen el vértice común y la proyección del otro vértice sobre el lado o su prolongación.



TEOREMA DE LA BISECTRIZ

En todo triángulo la bisectriz de un ángulo interno, trazada desde un vértice hasta el lado opuesto, divide a dicho lado en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados del triángulo

$$CA / CB = AP / BP$$



Sea CP la bisectriz del $\angle ACP$

El área del ΔACB $A_{ACP} = AP*h/2$
El área del ΔBCP $A_{BCP} = BP*h/2$

$A_{ACP}/A_{PBC} = AP/PB$ (1)

El área del ΔACP $A_{ACP} = CA*k/2$
El área del ΔBCP $A_{BCP} = CB*g/2$

Pero g=k (CP -> bisectriz)

$A_{ACP}/A_{BCP} = CA/CB$ (2)

Igualando (1) y (2)

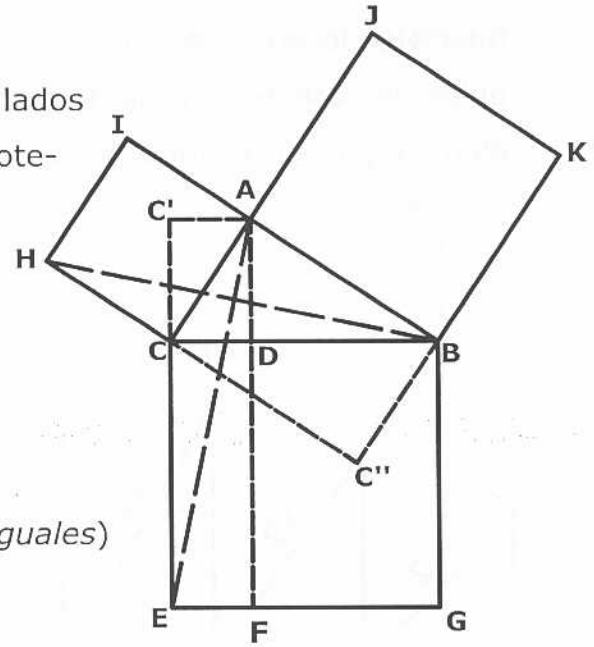
AP/PB = CA/CB

l.q.q.d.

TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Demostración



Se trazan cuadrados sobre cada uno de los lados del ΔABC y las líneas BH, AE y AF ($\perp$ a la hipotenusa BC)

En los Δs ACE y BCH

$\angle ACE = \angle BCH$ ($90° + \angle ACB$)

AC=CH y CB=CE (Lados de cuadrados)

Luego

$\Delta ACE = \Delta BCH$ (*2 lados y ángulo comprendido iguales*)

Área ΔACE (A_{ACE}) =1/2CE*CD(CD=AC')

Área ΔBCH (A_{BCH}) =1/2CH*AC(AC=BC'')

pero si $\Delta ACE = \Delta BCH \rightarrow A_{ACE} = A_{BCH}$

luego CE*CD = CH*AC

como AC=CH $\rightarrow$ $CE*CD=AC^2$

Área del cuadrado CDEF (A_{CDEF}) = CE*CD = AC^2 (1)

Por procedimiento similar se puede comprobar que:

Área del cuadrado BDFG $A_{BDFG} = AB^2$ (2)

Pero

$A_{BCEG} = A_{CDEF} + A_{BDFG}$ (3)

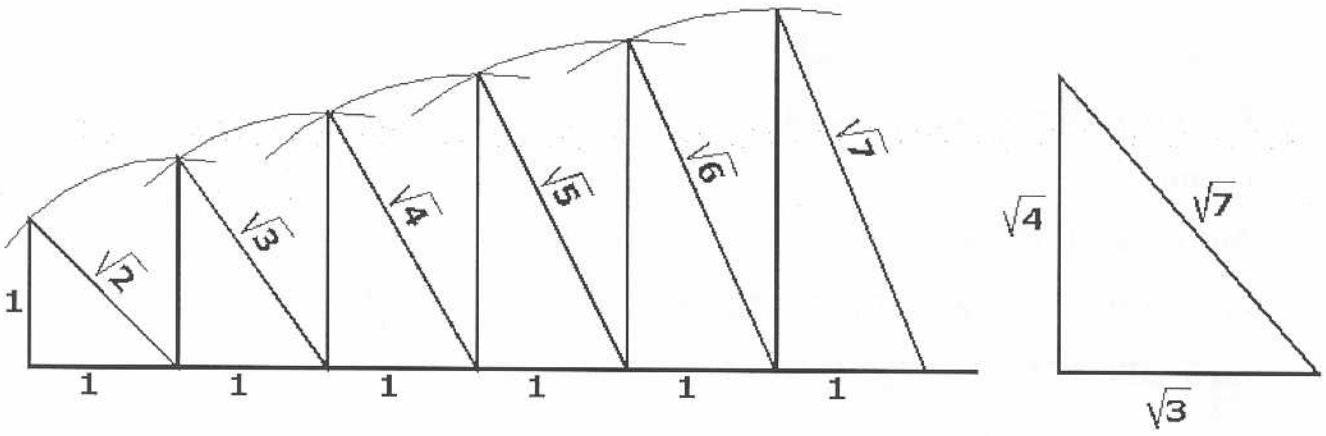
Sustituyendo (1) y (2) en (3)

$$\mathbf{BC^2 = AC^2 + AB^2}$$

l.q.q.d.

DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LA RAÍZ CUADRADA DE NUMEROS NATURALES

Resolviendo en forma gráfica planteamientos hechos sobre triángulos rectángulos de catetos conocidos, se podrán determinar las hipotenusas correspondientes que representarán valores de raíces cuadradas.

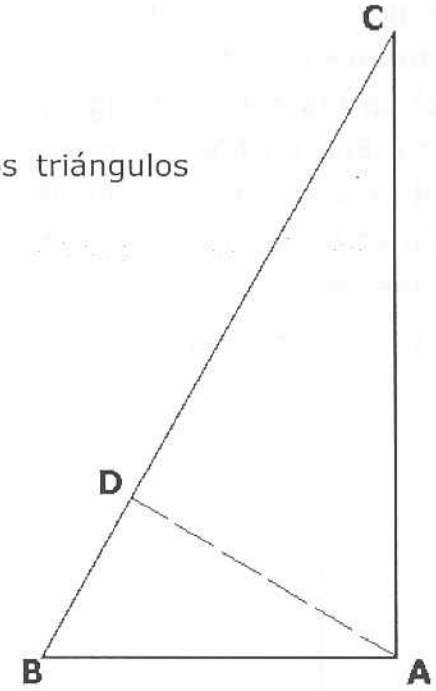


TEOREMA DE EUCLIDES

1.- En todo triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

2.- En todo triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es media proporcional de los dos segmentos en que ésta queda dividida.

Demostración



1) En los ΔABC y ΔADC

$\angle ABD = \angle DAC$ (Agudos de lados $\perp$)

necesariamente $\angle BAD = \angle ACD$, o sea ambos triángulos tienen sus tres ángulos iguales por lo que

$\Delta ABC \sim \Delta ADC$ luego

$\mathbf{BC/AC=AC/CD}$

Por razonamiento similar

$\Delta ABC \sim \Delta ABD$ luego

$\mathbf{BC/AB=AB/BD \rightarrow}$

$\mathbf{AB^2=BC \times BD \rightarrow AB=\sqrt{BC \times BD}}$

2) Por los razonamientos anteriores

$\Delta ABC \sim \Delta ADC$ y $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ luego $\Delta ADC \sim \Delta ABD$; entonces

$\mathbf{CD/AD=AD/DB \rightarrow AD^2=CD \times DB \rightarrow AD=\sqrt{CD \times AD}}$

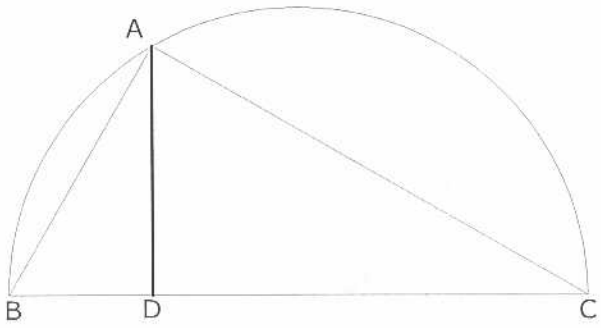
l.q.q.d.

DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LA MEDIA PROPORCIONAL DE DOS NUMEROS NATURALES

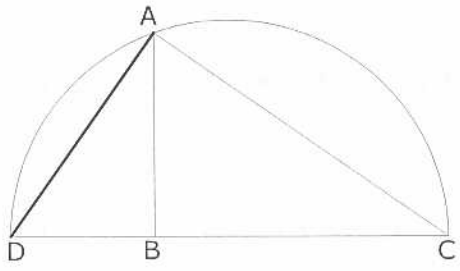
Resolviendo en forma gráfica planteamientos hechos sobre triángulos rectángulos de hipotenusa conocida, la cual se encuentra dividida en dos segmentos que representan los números a los cuales se les quiere determinar su media proporcional. Se podrá proceder por dos vías según los enunciados del Teorema de Euclides. (1) La hipotenusa es igual a la suma de los dos números. (2) La hipotenusa es igual al mayor de los números pero se le sobrepone el otro. En el primer caso la altura sobre la hipotenusa será la media proporcional buscada. En el segundo caso el cateto junto a la parte de la hipotenusa que es la sobreposición del número menor, será la media proporcional de los números dados.

(1) $BD/AD = AD/DC \dashrightarrow AD^2 = BD \times DC \dashrightarrow AD = \sqrt{BD \times DC}$

(2) $BC/AC = AC/CD \dashrightarrow AD^2 = BD \times DC \dashrightarrow AD = \sqrt{BD \times DC}$



(1)



(2)

En ambos casos si :

$BD = 3$ y $DC = 5 \dashrightarrow AD = \sqrt{3 \times 5} = \sqrt{15}$

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Cuadriláteros	• Definir cuadriláteros y su clasificación • Definir sus elementos (diagonales, mediana de un trapecio) • Definir y determinar áreas y perímetros • Construcción de cuadriláteros

CUARILÁTEROS

Son polígonos de CUATRO (4) lados y cuatro vértices.

VÉRTICE punto de corte de dos lados

LADOS OPUESTOS son los que no tienen ningún vértice común

LADOS CONSECUTIVOS son los que tienen un vértice común

VÉRTICES OPUESTOS son los que no pertenecen a un mismo lado

ÁNGULOS OPUESTOS son los que corresponden a vértices opuestos

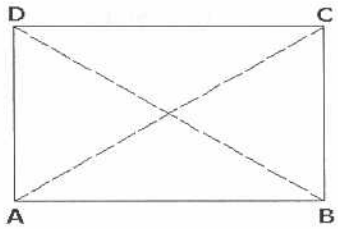
DIAGONAL segmento comprendido entre vértices opuestos

PARALELOGRAMOS

Lados opuestos paralelos dos a dos

Ángulos opuestos iguales

Diagonales se cortan en su punto medio



RECTÁNGULO

Lados opuestos iguales dos a dos

Todos los ángulos iguales (90°)

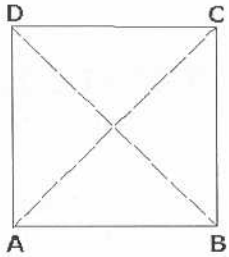
Diagonales iguales, no perpendiculares

CUADRADO

Todos los lados iguales

Todos los ángulos iguales (90°)

Diagonales iguales, perpendiculares y bisectrices de los ángulos

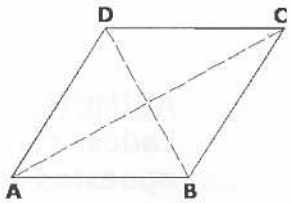


ROMBO

Todos sus lados iguales

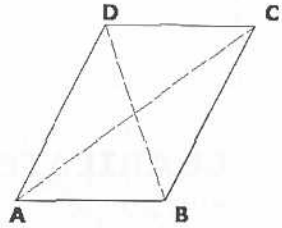
Ángulos opuestos iguales

Diagonales desiguales, perpendiculares y bisectrices de los ángulos



ROMBOIDE

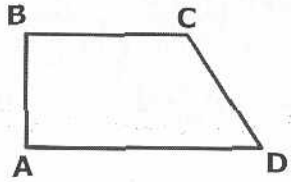
Lados y ángulos contiguos desiguales.
Lados y ángulos opuestos iguales



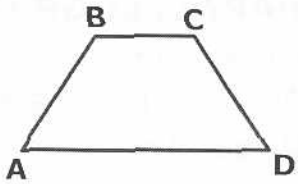
TRAPECIOS

Dos lados (Bases) paralelos
Los lados paralelos se llaman Bases y según su dimensión son Base Mayor y Base Menor. La línea que une los puntos medios de los lados no paralelos es la Base Media

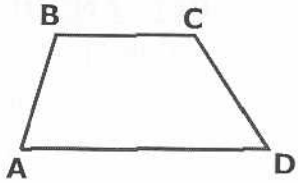
RECTÁNGULO
Uno de los lados desiguales es perpendicular a los dos paralelos



ISÓSCELES
Los lados no paralelos son iguales



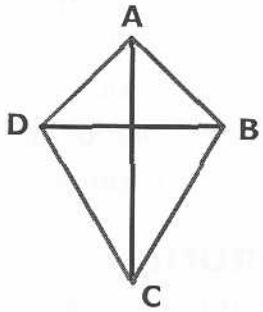
ESCALENO
Los cuatro lados son distintos



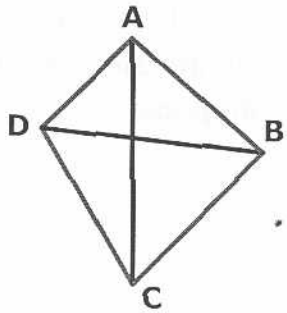
TRAPEZOIDES

Cuadriláteros sin lados paralelos

SIMÉTRICOS
Lados consecutivos iguales dos a dos Diagonales perpendiculares



ASIMÉTRICOS
Lados consecutivos desiguales Dos de sus lados opuestos pueden ser iguales, pero no paralelos



AREA Y PERÍMETRO DE CUADRILÁTEROS

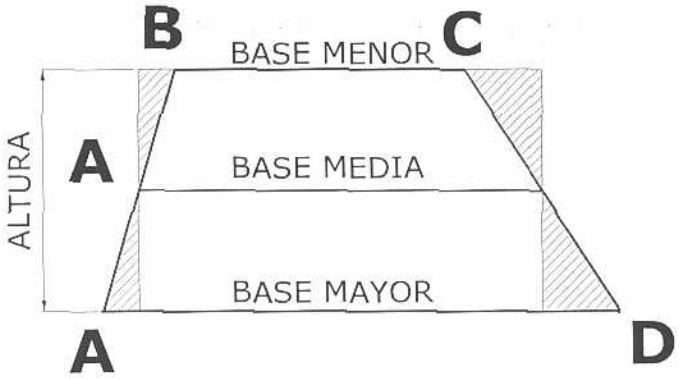
PARALELOGRAMOS

BASE * ALTURA

Siendo la BASE uno cualquiera de los lados y ALTURA la perpendicular trazada sobre ese lado o su prolongación desde un vértice del lado opuesto

TRAPECIOS

BASE MEDIA * ALTURA



PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

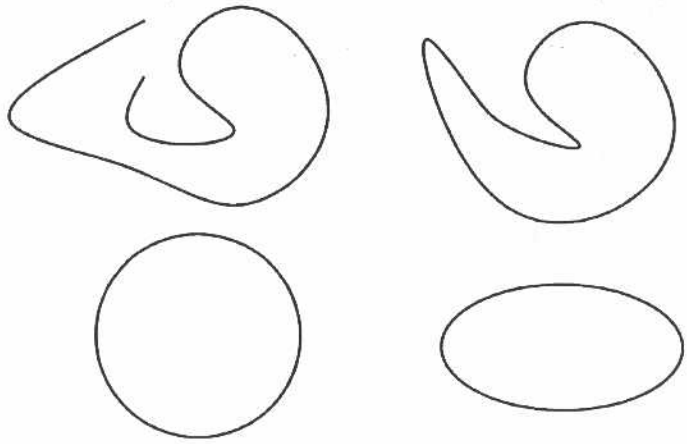
OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Líneas curvas	• Definir curvas planas y alabeadas • Definir curvas de segundo orden

LÍNEAS CURVAS PLANAS Y LÍNEAS CURVAS ALABEADAS

Por anteposición con la definición de RECTA. Toda sucesión de puntos que no sigue una misma dirección es una LÍNEA CURVA.

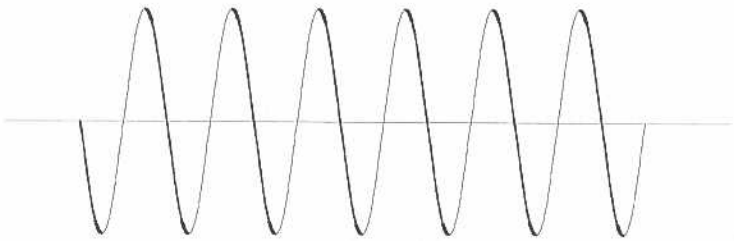
Igual que las líneas poligonales o quebradas, pueden ser abiertas o cerradas.

De hecho las líneas curvas pueden ser consideradas poligonales de infinitos vértices.



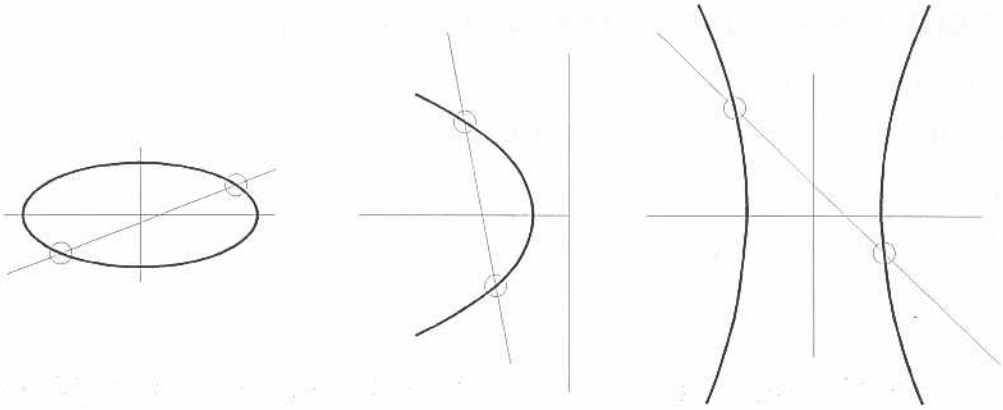
Si los puntos son coplanares, la línea curva se definirá como PLANA.

Si los puntos NO son coplanares se definirá como LÍNEA ALABEADA (Ej Un resorte).

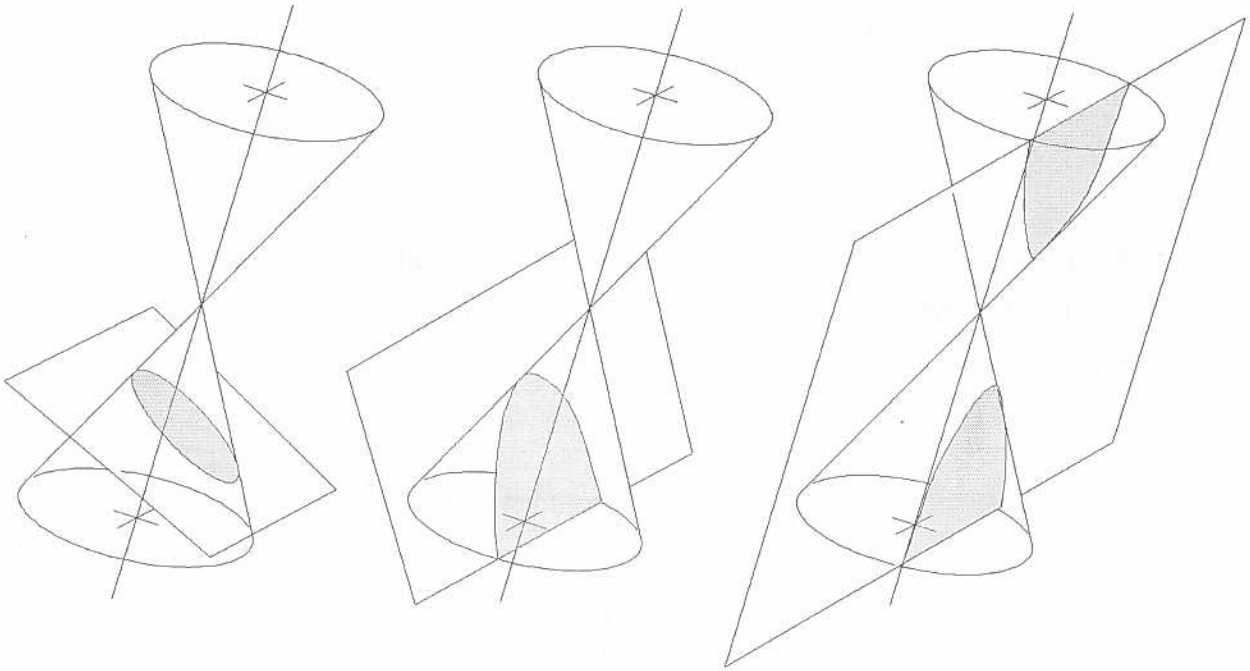


CURVAS DE SEGUNDO ORDEN

Son aquellas en las que una recta coplanar con la curva (secante), sólo la corta en dos (2) puntos.



Son también llamadas CÓNICAS, por corresponder a las secciones planas de un cono.



ELIPSE PARÁBOLA HIPÉRBOLA

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Circunferencias	• Definir circunferencia y círculo, perímetro de la circunferencia y área del círculo • Razón del perímetro al diámetro. El número π • Definir cuerda y arco. Ángulos y sus medidas: central, inscrito, semi inscrito, ex inscrito, interior y exterior de una circunferencia. Arco capaz • Posiciones relativas entre rectas y circunferencias. Rectas exteriores, secantes y tangentes • Ángulo de la tangente y el radio. Trazado de tangentes utilizando el arco capaz • Definir líneas proporcionales. Determinar la potencia de un punto respecto a una circunferencia • Solución de problemas aplicando los conceptos de arco capaz y potencia de puntos respecto a circunferencias

CIRCUNFERENCIA

LG de los puntos coplanares, que equidistan de otro coplanar o no con aquellos. Si ese punto fuese coplanar se denomina CENTRO.

Usualmente una circunferencia es denominada con el nombre de su centro y se detalla por su radio. (P.Ej Circunferencia "O" de radio r).

CÍRCULO

Conjunto de los puntos coplanares limitados por una circunferencia.

EL NÚMERO π (PI)

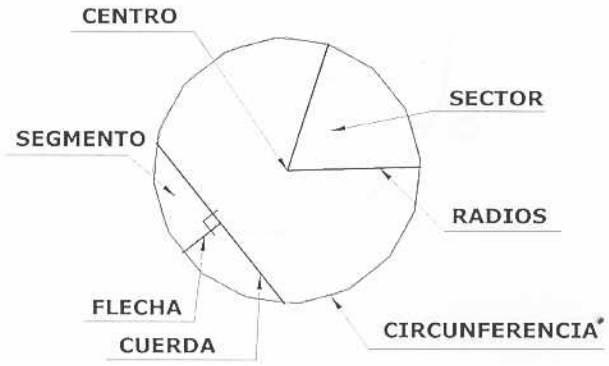
π (PI) = 3,14159...

Número trascendente definido como:

- Razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro.
- Razón de la superficie de un círculo a la superficie de un cuadrado de lado igual al radio de la circunferencia que limita al círculo.

Área del círculo $\rightarrow \pi r^2 = \pi d^2/4$

Perímetro de la circunferencia $\rightarrow 2\pi r = \pi d$

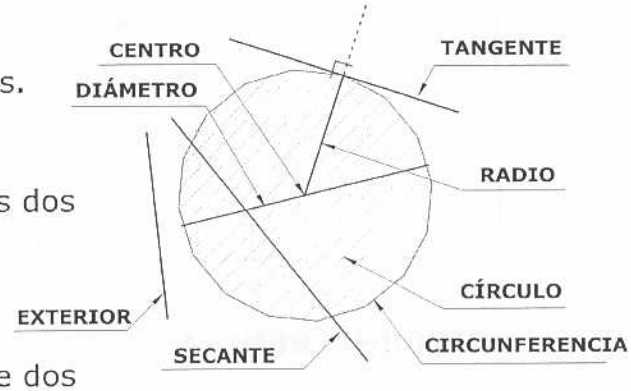


RADIO

Segmento de recta comprendido entre el CENTRO y la circunferencia.

SECANTE

Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.



CUERDA

Segmento de una secante comprendido entre los dos puntos de corte de la circunferencia.

DIÁMETRO

Cuerda que pasa por el centro. Su longitud es de dos radios y divide al círculo en dos partes iguales, por lo que todo diámetro es un eje de simetría de la circunferencia y del círculo.

FLECHA

Segmento de recta comprendido entre el punto medio de una cuerda y la circunferencia

TANGENTE

Es una recta coplanar con la circunferencia que la toca en un solo punto, denominado PUNTO DE TANGENCIA. El radio que pasa por el Punto de Tangencia, es PERPENDICULAR a la tangente.

RECTA EXTERIOR

Es una recta coplanar con la circunferencia, que no tiene ningún punto en común con la circunferencia.

SECTOR

Es la porción de círculo limitada por dos radios.

RADIÁN

Ángulo al centro de una circunferencia cuyo arco correspondiente tiene igual longitud que el radio de la circunferencia.

En una circunferencia de radio igual a la unidad (1,00), el perímetro es:

$$2\pi \text{(Si } r=1 \text{ -> } D=2;\ P=\pi x D \text{ -> } P=2\pi)$$

El ángulo al centro, que abarca la totalidad de la circunferencia vale 360°; luego:

$$360° = 2\pi \text{ radianes ->}$$

$$1° = 0{,}0174532... \text{ Radianes -> 1 radián} = 57{,}2958...°$$

ÁNGULOS GENERADOS EN UNA CIRCUNFERENCIA

Para mejor comprensión los arcos de una circunferencia se denominarán por los nombres de sus extremos dichos en orden horario (Hacia la derecha sobre la circunferencia)

ÁNGULO CENTRAL O AL CENTRO

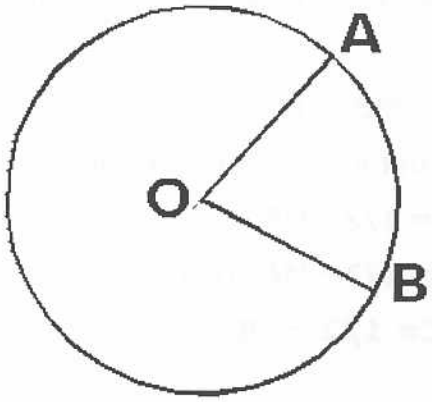
Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia

Por definición de la unidad de medida de los arcos (radián).

$\frown AB$ es igual al $\angle AOB$. (r=1)

Luego se aceptará la expresión

$\angle AOB = \frown AB$

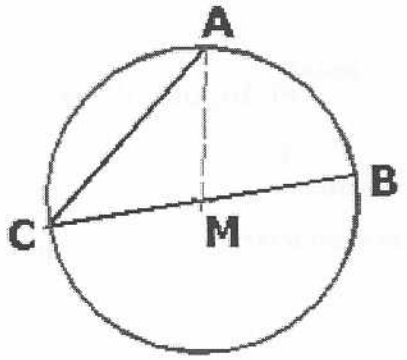


ÁNGULO INSCRITO

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son secantes.

Se pueden presentar tres casos o posibilidades:

1) Que uno de los lados pase por el centro de la circunferencia



Utilizando la construcción auxiliar MA se tiene:

En ΔAMC (Isósceles)

$\angle C = \angle A$

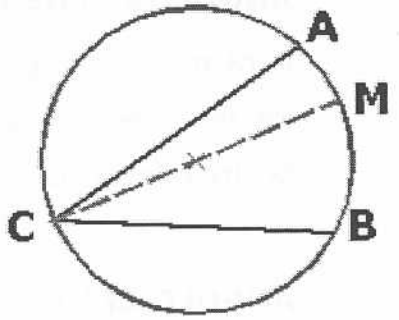
$\angle C + \angle A = \angle AMB$ (Exterior del ΔAMC)

Sustituyendo

$2 \times \angle C = \angle AMB$

Pero $\angle AMB = \cap AB$; luego

$\angle$ **C= 1/2 $\cap$AB**



2) Que el centro de la circunferencia esté dentro del ángulo

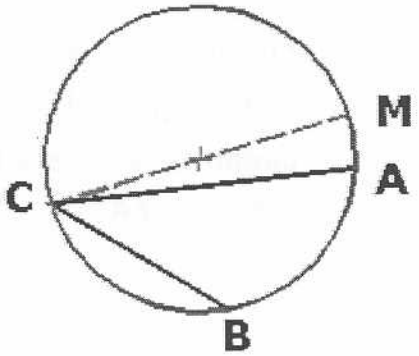
$\cap AB = \cap AM + \cap MB$

Según demostración anterior

$\angle ACM = 1/2 \cap AM$

$\angle MCB = 1/2 \cap MB$; sumando

$\angle$ **C= 1/2 $\cap$AB**



3) Que el centro de la circunferencia esté fuera del ángulo

$\cap AB = \cap MB - \cap MA$

Según demostración anterior

$\angle MCB = 1/2 \cap MB$

$\angle MCA = 1/2 \cap MA$; restando

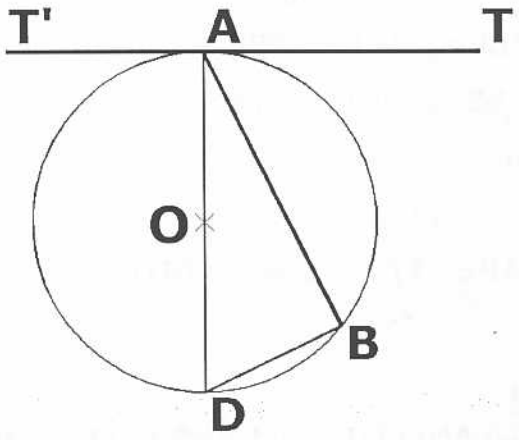
$\angle$ **C= 1/2 $\cap$AB**

LA AMPLITUD DEL ÁNGULO INSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA CORRESPONDE A LA MITAD DE LA LONGITUD DEL ARCO ABARCADO POR SUS LADOS

ÁNGULO SEMI-INSCRITO

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia, uno de sus lados es secante y el otro tangente a la circunferencia

Se pueden presentar dos casos o posibilidades



1) Que el ángulo sea agudo

Sea ∠BAT un ángulo semi-inscrito en la circunferencia

∠BAT=∠ADB por tener sus lados perpendiculares

∠ ADB=1/2 ∩AB por ser inscrito en C

Luego

∠ BAT=1/2 ∩AB

2) Que el ángulo sea obtuso

Sea ∠BAT' un ángulo semi-inscrito en la circunferencia O

∠ BAT'=∠ BAD+∠ ABD (=∠ T'AD, rectos)

∠ BAT'= 1/2 ∩BD + 1/2 ∩DA

∠ BAT'= 1/2 (∩BD + ∩DA)

∠ BAT'= 1/2 ∩BA

LA AMPLITUD DEL ÁNGULO SEMI-INSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA CORRESPONDE A LA MITAD DE LA LONGITUD DEL ARCO ABARCADO ENTRE EL LADO Y SU VÉRTICE

ÁNGULO EXINSCRITO

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia, uno de sus lados es una cuerda y el otro la rama exterior de una secante

Sea ∠ ABE un ángulo exinscrito en la circunferencia

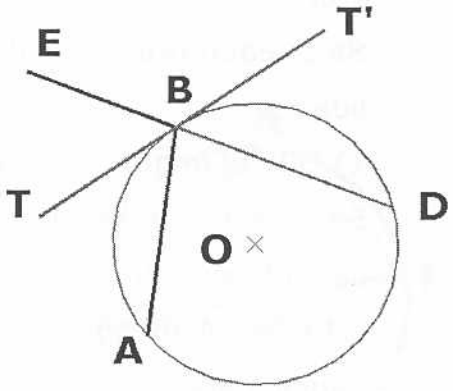
∠ ABE=∠ ABT+∠ TBE

∠TBE=∠ DBT' (Opuestos por el vértice)

∠ABE=∠ ABT+∠ DBT'

∠ ABE=1/2 ∩AB + 1/2 ∩BD

∠ABE=1/2 (∩AB + ∩BD)



LA AMPLITUD DEL ÁNGULO EXINSCRITO A UNA CIRCUNFERENCIA CORRESPONDE A LA SEMISUMA DE LA LONGITUD DE LOS ARCOS ABARCADOS ENTRE EL VÉRTICE Y LOS EXTREMOS DEL LADO INTERIOR Y LA PROLONGACIÓN DEL LADO EXTERIOR

ÁNGULO INTERIOR

Es el que tiene su vértice en el área interna de la circunferencia

Sea ∠ AED un ángulo interior a la circunferencia

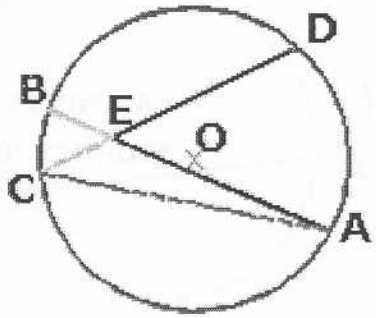
∠ AED=∠ DCA + ∠ BAC (Externo a un triángulo)

∠ DCA=1/2 ∩DA

∠ BAC=1/2 ∩CB

∠ AED=1/2 ∩DA + 1/2 ∩CB

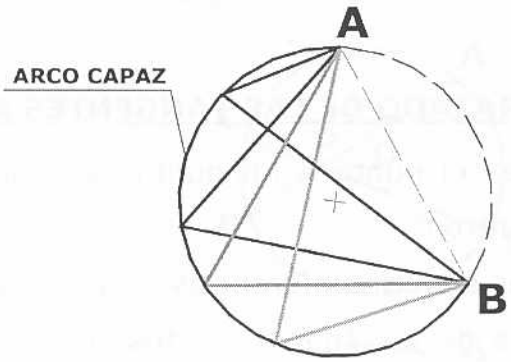
∠ AED =1/2 (∩DA + ∩CB)



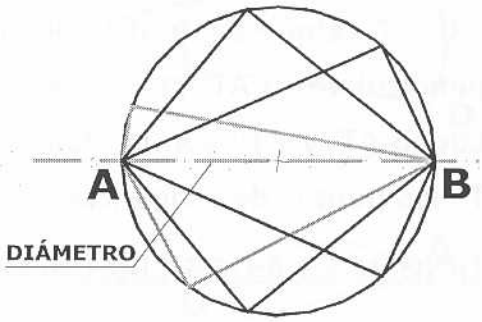
LA AMPLITUD DEL ÁNGULO INTERIOR A UNA CIRCUNFERENCIA CORRESPONDE A LA SEMISUMA DE LAS LONGITUDES DE LOS ARCOS ABARCADOS POR SUS LADOS Y SU PROLONGACIÓN

ARCO CAPAZ

Todos los ángulos inscritos en una circunferencia o en circunferencias iguales, que abarcan un mismo arco, o sus extremos están sobre la misma secante (AB en la figura) son NECESARIAMENTE iguales.
El arco donde se inscribe su vértice (BA) se denomina ARCO CAPAZ del ángulo, y es el LG del vértice de dichos ángulos inscritos.



Si el arco abarcado es una semicircunferencia, o sea la cuerda es un diámetro, el arco será igual a π (180°), el valor de los ángulos será igual a
½ ∩AB= ½ ∩BA=90°



EL ARCO CAPAZ DE LOS ÁNGULOS RECTOS ES UNA SEMICIRCUNFERENCIA

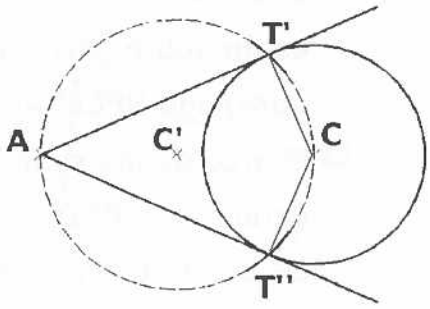
RELACIONES ENTRE RECTA Y CIRCUNFERENCIA COPLANARES

Recta Exterior → No tienen puntos en común
Recta Secante → Tienen dos puntos en común
Recta Tangente → Tienen un punto en común
Todas son coplanares con la circunferencia

Ángulo formado por la tangente y el radio al punto de tangencia.

Una cuerda y el centro de una circunferencia, siempre definen un triángulo isósceles, donde el lado desigual es la cuerda y los lados iguales radios. Si la longitud de la cuerda tiende a hacerse nula, los ángulos de los lados iguales con la cuerda (secante) serán cada vez mayores tendiendo a hacerse rectos (90°) y ambos radios coincidirán en uno sólo. El radio formará 90° con la secante que por tener un único punto de contacto con la circunferencia será una TANGENTE.

TRAZADO DE LAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA



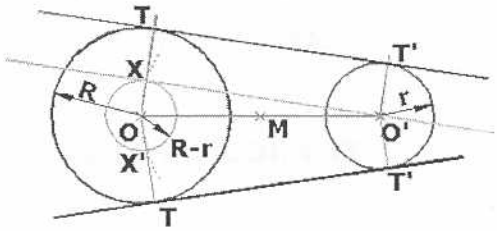
Sea el punto A un punto exterior a la circunferencia de centro C.

Las semicircunferencias ∩AC y ∩CA , son los arcos capaces de los ángulos rectos con el vértice (T' y T'') sobre ellas, y extremos en A y en C.

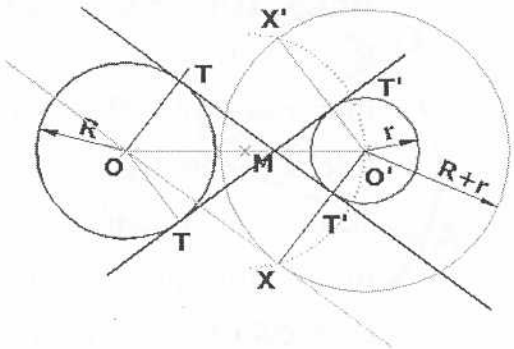
T'C y T''C, que son radios de la circunferencia C', son perpendiculares a AT' y AT'' respectivamente.

Luego AT' y AT'' son las tangentes a la circunferencia de centro C. Siendo T' y T'' los puntos de tangencia

TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS



La solución al problema planteado son las rectas TT', tangentes a ambas circunferencias en cada caso.



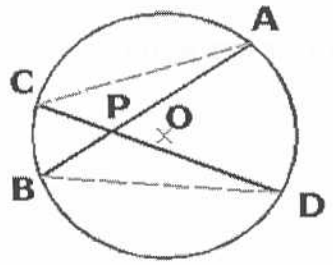
Como esas rectas son tangentes a las circunferencias, serán perpendiculares a los radios en los puntos de tangencia. Las rectas O'X, trazadas paralelas a TT', formarán con estas, los paralelogramos TT'XO' luego, si se puede determinar la posición de O'X (Caso 1) o de OX (Caso 2), una paralela a ella por el punto T' o T, será la tangente buscada.

La distancia O'T' es r (Caso 1) entonces la distancia X será Rr. En el segundo caso, la distancia OT es R y la distancia O'X será R+r.

Los puntos X y T' podrán ser determinados trazando el LG del vértice recto del triángulo que tiene por hipotenusa OO' (Circunferencia de diámetro OO') que corte las circunferencias con centros O y O' de radios Rr y R+r respectivamente

PROPORCIÓN DE LAS SECANTES A LA CIRCUNFERENCIA

Sean AB y CD secantes a la circunferencia de centro O que pasan por el punto P

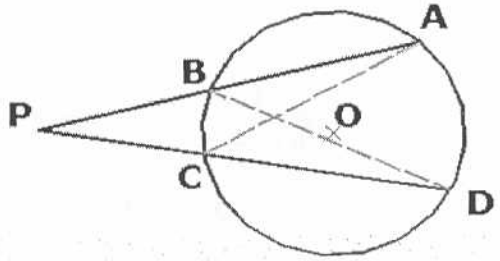


En ambos casos

$\Delta PAC \sim \Delta PDB$ -> Tienen 3 ángulos iguales,

$\angle DPB = \angle CPA$ -> Opuestos por el vértice o común

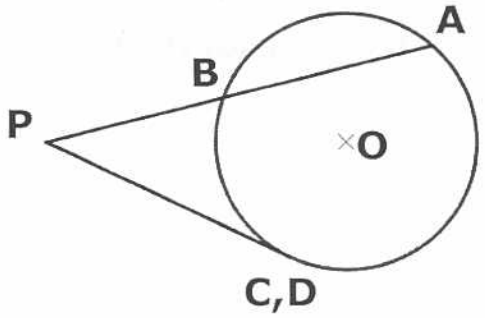
$\angle BDP = \angle CAP$ -> Ángulos inscritos que abarcan el mismo arco ($\cap BC$)



Si dos ángulos son iguales el tercero también lo será

Luego PA/PD = PC/PB

Si una de las secantes permanece en una misma posición y se considera a la otra en cualquier otra posición, se cumplirá que:



PA x PB = PD x PC = K (Constante)

Si los puntos C y D se acercan hasta coincidir en el punto de tangencia de la recta PC con la circunferencia PC = PD ->

$PA \times PB = (PC)^2 = K$ (Constante)

La porción de la tangente trazada a una circunferencia desde un punto exterior cualquiera, es media proporcional a las porciones de una secante cualquiera trazada desde el mismo punto exterior.

POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA

El producto de las distancias desde un punto cualquiera del plano una circunferencia, a los puntos de intersección de una secante que pase por dicho punto, es constante. Este producto constante se llama:

POTENCIA DEL PUNTO RESPECTO A LA CIRCUNFERENCIA

PUNTO EXTERIOR $PA \times PB = PC \times PD = K$ o $PA \times PB = PC^2 = K$

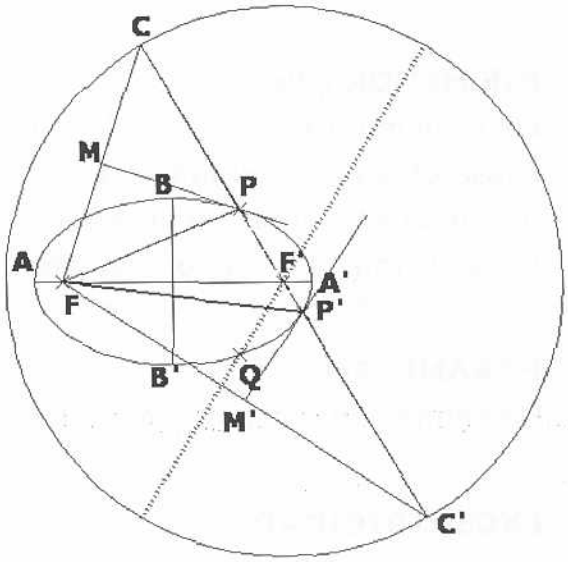
PUNTO INTERIOR $-|PA| \times |PB| = -|PB|^2$

PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

LA ELIPSE

Se puede definir también como el LG de los puntos coplanares cuya suma de *distancias a otros dos fijos llamados focos es constante.*

En efecto: por definición, cualquier punto (P) de la elipse equidistará de la circunferencia (F') y del foco (F). Luego FP=CP y el ΔFPC será isósceles (FP=CP) con FC como lado desigual. El punto P deberá pertenecer a la altura (⊥ a FC en su punto medio, M) y deberá pertenecer al radio **R** (F'C), luego estará en la intersección de ambos. (*Por igual razonamiento se obtiene P', sobre el mismo diámetro CC'*).



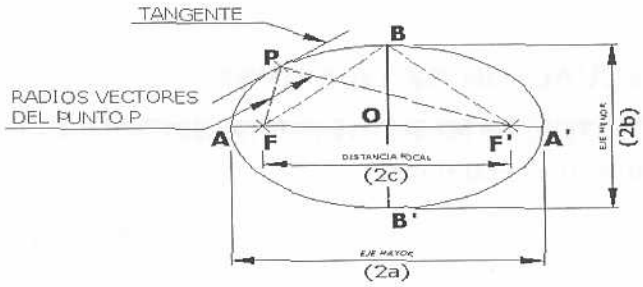
F'C=F'P+CP=R pero R es constante e igual a 2a (Eje mayor) y FP=CP

Luego ***FP+F'P=2a (Constante)***

DEFINICIONES

DISTANCIA FOCAL (2c)

Es la distancia entre los focos **(FF')**

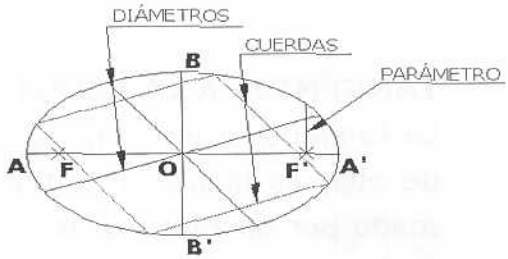


CUERDA

Cualquier segmento que una dos puntos de la elipse

DIÁMETRO (O)

Cualquier cuerda que pase por el centro



DIÁMETROS CONJUGADOS

Dos diámetros son conjugados cuando cada uno pasa por los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro.

EJE MAYOR (2a)

Es el diámetro que pasa por los focos. Une los puntos extremos de la elipse en su sentido más largo.

EJE MENOR (2b)

Es el diámetro perpendicular al eje mayor. Une los puntos extremos de la elipse en su sentido más corto. (Los focos distan de cada extremo del eje menor una distancia igual al semieje mayor).
Los ejes mayor y menor son diámetros conjugados.

PARÁMETRO

Se define como la longitud de la semicuerda focal perpendicular al eje mayor.

EXCENTRICIDAD

Se define como la razón existente entre la distancia focal y el eje mayor (c/a). A menor excentricidad, menor diferencia entre los ejes mayor y menor. Cuando es nula, los focos coinciden con el centro y la elipse es una circunferencia.

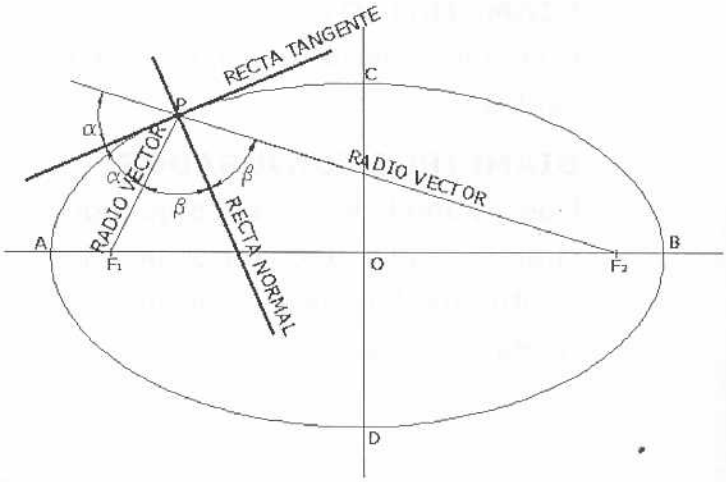
ECUACIÓN DE LA ELIPSE

Referida a su centro como eje de coordenadas cartesiano, la elipse tiene la siguiente ecuación:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

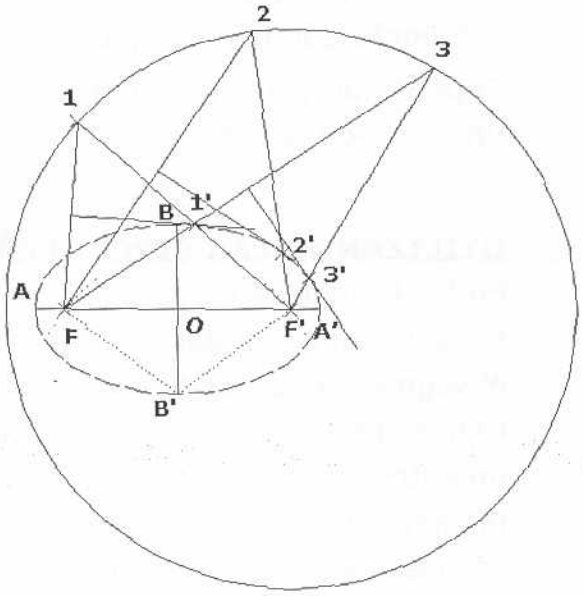
TANGENTES A LA ELIPSE

La tangente a una elipse, en un punto de ella, es la bisectriz del ángulo formado por un radio vector al punto y la prolongación del otro.



RECTA NORMAL

Es la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. Es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores del *ese punto.*



TANGENTE A LA ELIPSE QUE PASA POR UN PUNTO FUERA DE ELLA

Por definición de elipse, el punto G está situado en la generatriz (Circunferencia de radio 2a con centro en F).

La tangente PT es la mediatriz del segmento F'G (Altura y base del DGTF' que es isósceles). Luego G y F' son simétricos respecto a la tangente PT y son equidistantes del punto P.

En consecuencia G estará situado en la intersección de los LG, directriz de la *elipse y circunferencia de radio PF' y centro en P.*

Determinado G, se traza la mediatriz de GF' que es la tangente buscada.

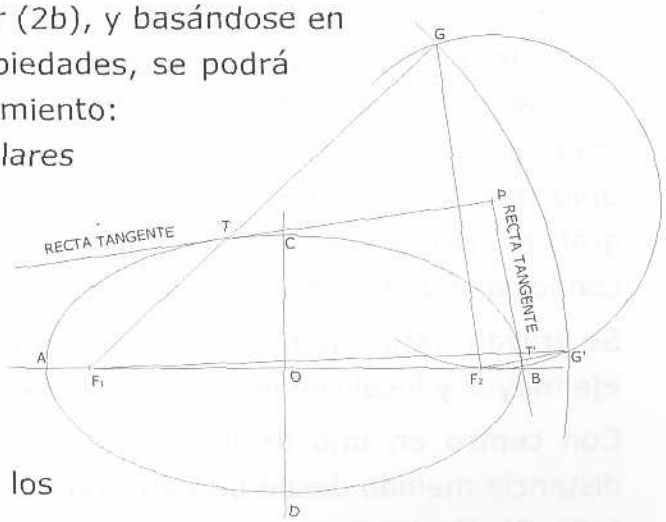
TRAZADO DE LA ELIPSE

SEGÚN SU DEFINICIÓN RESPECTO A LA CIRCUNFERENCIA DIRECTRIZ

Conocidos los ejes mayor (2a) y menor (2b), y basándose en la definición de la elipse y en sus propiedades, se podrá trazar la elipse con el siguiente procedimiento:

Se trazan los dos semiejes, perpendiculares entre sí en el punto medio de cada uno.

Con centro en uno de los extremos del eje menor se trazan arcos de circunferencia de radio igual al semieje *mayor (a). Los puntos de intersección* sobre el eje mayor definirán los focos (F y F')



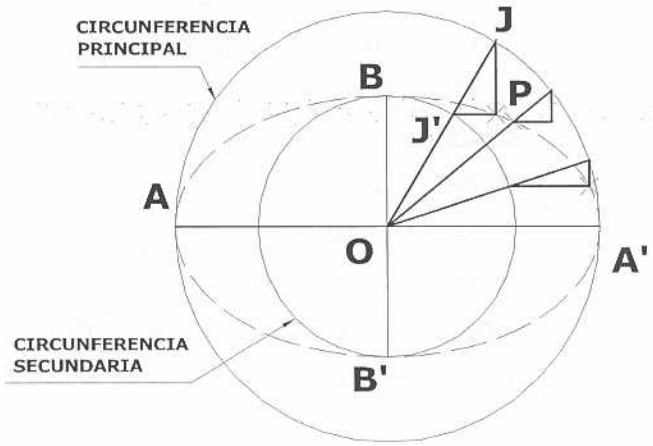
Con centro en uno de los focos (F') y radio 2a se traza la circunferencia generatriz de la elipse.

Se traza un radio a un punto cualquiera (1) de la generatriz, y se traza el segmento que une ese punto con el foco (F) de la elipse.

El punto de corte (1') de la mediatriz del segmento (1F) con el radio (F'1) es un punto de la elipse.

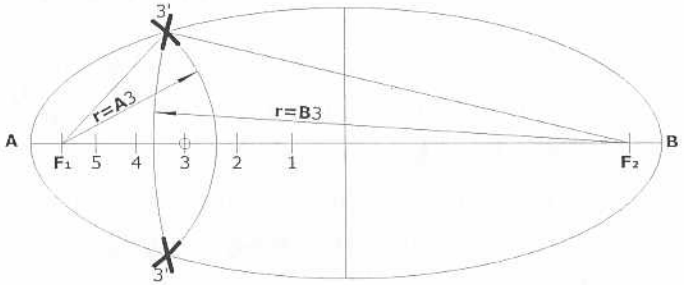
UTILIZANDO LAS CIRCUNFERENCIAS PRINCIPAL Y SECUNDARIA

En los triángulos rectángulos JPJ' que se forman con la hipotenusa coincidiendo con el segmento de los radios de las circunferencias principal y secundaria, comprendido entre ambas, y tiene como catetos rectas paralelas a los ejes de la elipse, los vértices rectos (P) son puntos de la elipse.



SEGÚN SU DEFINICIÓN RESPECTO A LA DISTANCIA DOS PUNTOS FIJOS (FOCOS)

Comoquiera que por su definición, la suma de distancias a un punto cualquiera de la elipse a los focos (radios vectores) es constante e igual a 2a (Eje mayor), se podrá utilizar el sigiente procedimieto gráfico para trazar una elipse, conocidos su eje mayor y sus focos.



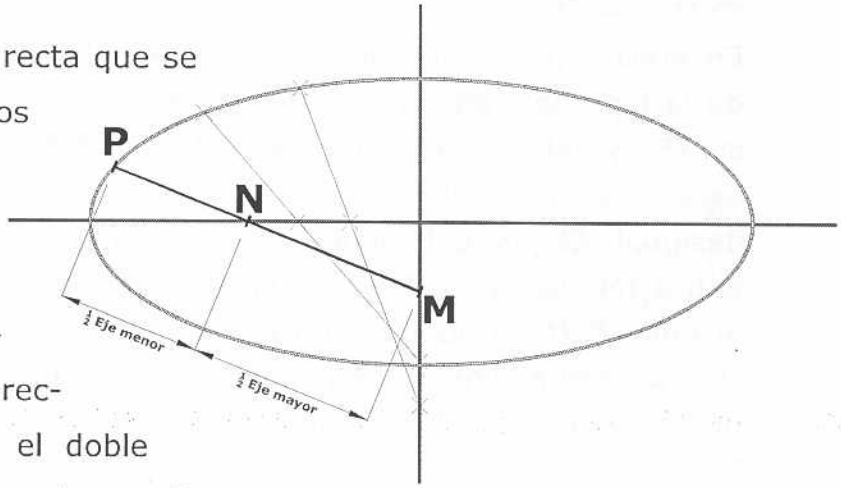
Se trazan varios puntos (cualesquiera) que servirán de referencia, sobre el eje mayor y localizados entre los focos.

Con centro en uno de los focos (F_1) se traza un arco de radio igual a la distancia medida desde un extremo del eje mayor (A) hasta uno de los puntos (pEj, 3). Se traza otro arco con centro en el otro foco (F_2) y radio igual a la distancia medida desde el otro extremo del eje mayor (B) hasta el mismo

punto (3) sobre el eje mayor. Los puntos de corte de los arcos trazados son puntos de la elipse (3′ y3″).

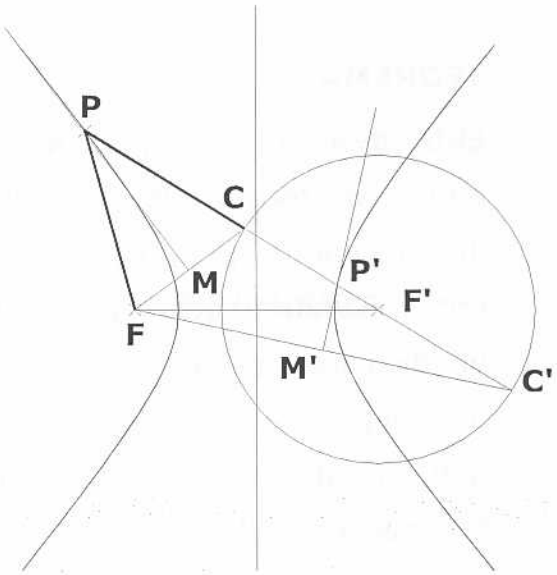
TEOREMA

El LG de un punto (P) de una recta que se mueve de forma que otros dos de sus puntos (M y N), describen sendas rectas perpendiculares entre sí, es una elipse cuyos ejes coinciden con la dirección de dichas rectas perpendiculares y miden el doble que los segmentos limitados entre ambos puntos y el punto problema (P).



HIPÉRBOLA

LG de los puntos coplanares cuya diferencia de distancias a otros dos fijos llamados focos es constante.



En efecto, por definición cualquier punto (P) de la hipérbola equidistará de la circunferencia (F') y del foco (F). Luego FP=CP y el ΔFPC será isósceles (FP=CP) con FC como lado desigual. El punto P deberá pertenecer a la altura (Mediatriz de FC) y deberá pertenecer al radio **R** (C'C), luego estará en la intersección de ambas líneas. (Por igual razonamiento se obtiene P', sobre el mismo diámetro CC').

PF'-PC=R pero R=2a constante y PF=PC

Luego **PF' – PF = 2a (Constante)**

DEFINICIONES

DISTANCIA FOCAL (2c)

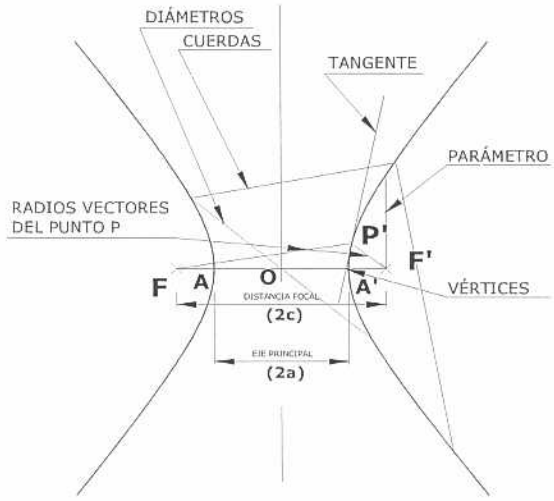
Es la distancia entre los focos (FF')

CUERDA

Cualquier segmento que una dos puntos de la hipérbola

DIÁMETRO

Cualquier cuerda que pase por el centro (O)



DIÁMETROS CONJUGADOS

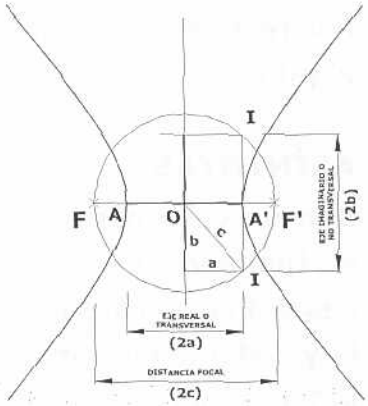
Dos diámetros son conjugados cuando cada uno pasa por los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro. Uno siempre será imaginario (Corta a la hipérbola en el infinito -punto impropio) y el otro real

EJE REAL O TRANSVERSAL (2a)

Es el diámetro que une los vértices

EJE IMAGINARIO O NO TRANSVERSAL (2b)

Es el diámetro perpendicular al eje mayor. Tiene una longitud igual a la cuerda de la circunferencia de centro O que pasa por los focos (radio=c), perpendicular al eje mayor en uno de los vértices. c2 = a2 + b2



PARÁMETRO

Se define como la longitud de la semicuerda focal *perpendicular al eje real*

EXCENTRICIDAD

Se define como la razón existente entre la distancia focal y el eje real (c/a).

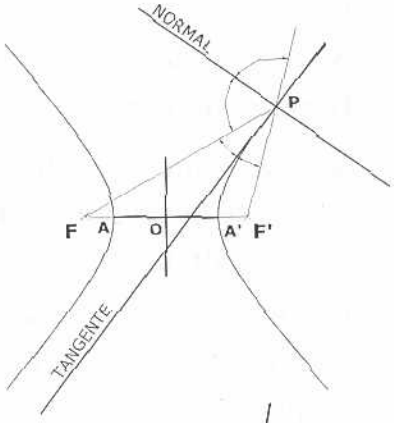
ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Referida a su centro en un sistema de coordenadas cartesianas la hipérbola tiene la siguiente ecuación:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$

TANGENTES A LA HIPÉRBOLA

La tangente a una hipérbola, en un punto de ella, es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de dicho punto.

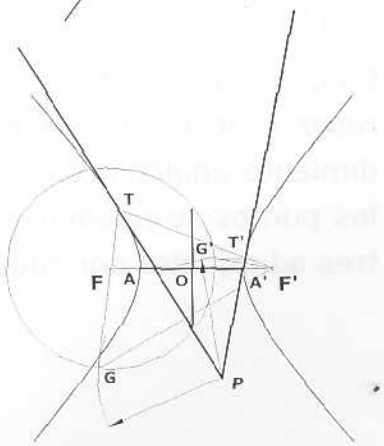


RECTA NORMAL

Es la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. Es la bisectriz del ángulo que forman un radio vector del punto y la prolongación del otro.

TANGENTE A LA HIPÉRBOLA QUE PASA POR UN PUNTO FUERA DE ELLA

El punto G deberá estar situado en la circunferencia generatriz. La tangente PT es la mediatriz del segmento F'G (Altura y base del ΔGTF' que es isósceles). Luego G y F' son simétricos respecto a la tan-



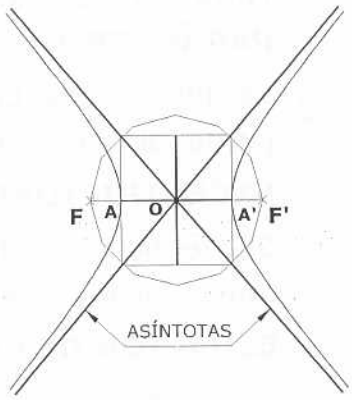
gente PT y son equidistantes del punto P. En consecuencia G estará situado en la intersección de los LG, directriz de la elipse y circunferencia de radio PF' y centro en P.

Determinado G, se traza la mediatriz de GF' que es la tangente buscada.

Por razonamiento similar se obtiene la otra tangente a la elipse que pasa por el punto P.

ASÍNTOTAS

Son un caso particular de las tangentes. Tienen el punto de tangencia en el infinito. Pasan por el centro y los vértices del cuadrilátero inscrito en la circunferencia de centro O y radio igual a media distancia focal (c). Los puntos de la hipérbola, cortados por una misma secante, equidistan de los puntos de intersección de dicha secante con sus asíntotas.



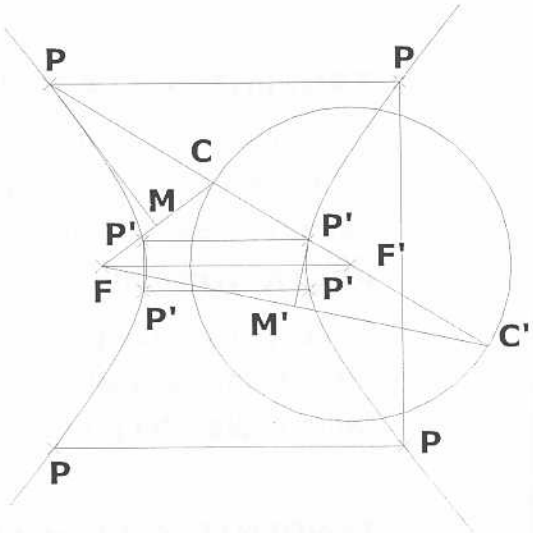
TRAZADO DE LA HIPÉRBOLA

Conocidos los focos y el radio de la generatriz, sobre la base de la definición de la hipérbola y en sus propiedades, se podrá trazar la hipérbola con el siguiente procedimiento:

Se traza un diámetro cualquiera (CC') de la generatriz y se prolonga. Sobre esta recta deberá estar el punto P de la hipérbola con focos F y F'.

La distancia FP deberá ser igual a la distancia CP, luego P estará además sobre la mediatriz del segmento FC.

En consecuencia P está en la intersección de la generatriz y de la prolongación del diámetro. Por procedimiento análogo se podrá determinar P'. El resto de los puntos se pueden obtener por simetría, logrando tres adicionales por cada uno determinado.



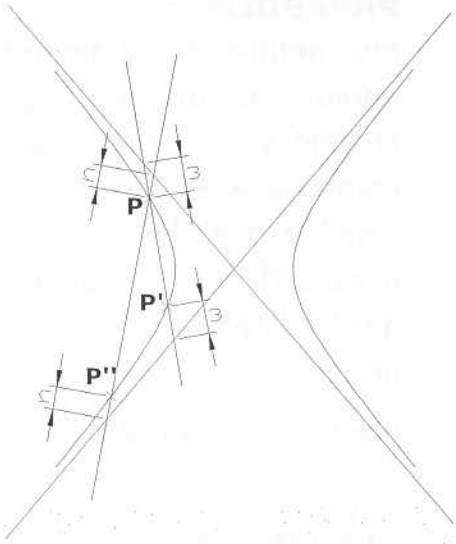
OTRO PROCEDIMIENTO

Conocido un punto (P) de la hipérbola y sus asíntotas, se podrá determinar la hipérbola con el siguiente procedimiento:

Cualquier secante cortará a la curva en dos puntos. La distancia desde el punto de la curva hasta su asíntota será igual para ambos puntos (medido sobre la secante).

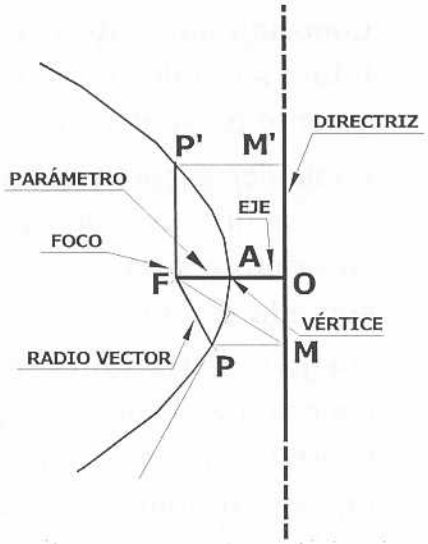
Luego si se trazan varias secantes por el punto conocido y se lleva la distancia hasta la asíntota, sobre la misma secante pero desde la otra asíntota, se determinará otro punto de la curva.

Por procedimientos análogos desde estos nuevos puntos se obtendrán otros. Por la simetría de la curva se obtendrán, como se dijo anteriormente, tres puntos adicionales por cada uno determinado



PARÁBOLA

Por definición, cualquier punto P de la parábola equidistará de la directriz y del foco (F). Luego FP=PM y el ΔFPM será isósceles (FP=MP) con FM como base. El punto P deberá pertenecer a la altura (mediatriz de FM) y deberá pertenecer al radio de la generatriz (⊥), luego estará en la intersección de ambas líneas.



PF=PM

Por lo que se puede enunciar que:

La parábola es el lugar geométrico de los puntos coplanares que equidistan de un punto llamado foco y una recta.

Las alturas de los triángulos isósceles (DFPM) utilizados para la localización de los puntos P intersecan a las perpendiculares MP en un único punto. Este punto (P) pertenece a la parábola y a la altura; por sólo tener un punto en común con la parábola, necesariamente será tangente a ella y precisamente en ese punto.

VERTICE

Es el punto de la parábola más cercano a la generatriz. Por definición FA=AO.

PARÁMETRO

Se define como el segmento del eje de la parábola comprendido entre el Foco y la Directriz.

Por definición de la parábola, la semicuerda focal mide lo mismo que el parámetro, es por esta razón que a la semicueda focal en la elipse y la hipérbola se la define como parámetro.

RADIO VECTOR

Es la distancia entre el foco y un punto de la parábola. La parábola, como la elipse y la hipérbola, tiene dos focos y cada punto dos radios vectores. El segundo foco, por definición de las cónicas es el centro de la circunferencia di-

rectriz, luego en la parábola estará localizado en el infinito, o sea es un punto impropio donde convergen los radios vectores que necesariamente serán paralelos. Los otros radios vectores convergerán en el otro foco.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

Referida a un sistema de coordenadas cartesianas con su origen coincidente con el vértice de la parábola y el eje de las abscisas coincidente con su eje de simetría, la parábola tiene la siguiente ecuación, donde "p" es el Parámetro.

$$y^2 = 2\,p\,x^2$$

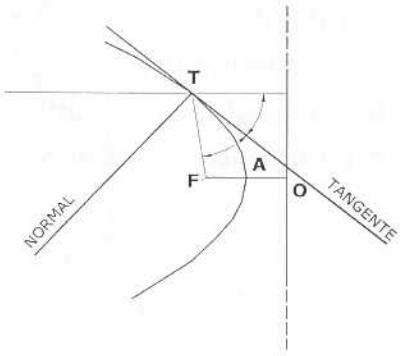
TANGENTES A LA PARÁBOLA

La tangente a la parábola en un punto cualquiera (T) de ella, es la bisectriz del ángulo que forman el radio vector (TF) y la perpendicular a la directriz desde el punto.

La normal se define como la perpendicular a la tangente en el punto dado. En la parábola la normal es la bisectriz del radio vector y la prolongación de la perpendicular a la directriz.

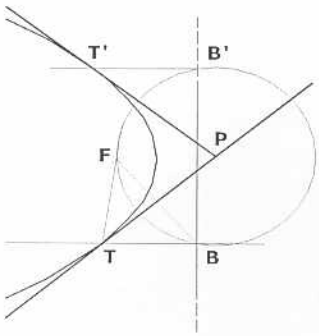
TANGENTE A LA PARÁBOLA DESDE UN PUNTO EXTERIOR

Sea PT la recta que pasando por el punto P, es tangente a la parábola en el punto T.



T en consecuencia debe pertenecer a la parábola y entonces FT=BT. Como PT debe ser, por definición, la mediatriz de FB, los puntos F y B deben equidistar del punto P.

El punto B debe pertenecer a la directriz (definición), luego B estará ubicado sobre la directriz en el punto de intersección con una circunferencia de centro P y radio PF. Determinada la posición de B, se determina T en la intersección de la ⊥ a la directriz en B con la mediatriz de FB (tangente) y la parábola. Como la circunferencia corta a la directriz en dos puntos, existirán dos tangentes



TANGENTE A LA PARÁBOLA EN SU VÉRTICE

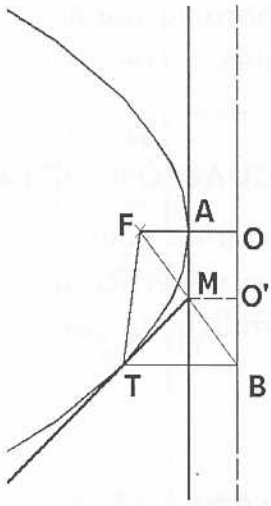
La tangente a la parábola en el vértice, es el LG de los pies de las perpendiculares a otras tangentes trazadas desde el foco

Todas las tangentes que se tracen serán mediatrices de los segmentos FB, luego FM=MB.

Por definición: FA=AO

y como DFAM=DMO'B

O'M = OA. Luego AM es paralela a la directriz y tangente a la parábola en el vértice A y M, pie de las perpendiculares a las tangentes, pertenece a AM y sus prolongaciones.

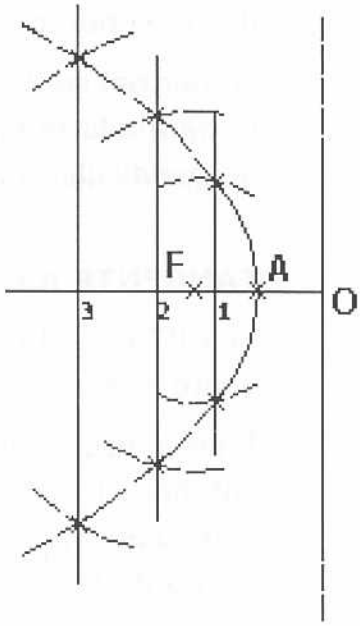


TRAZADO DE LA PARÁBOLA

Conocidos el foco y la directriz, se determina el punto A (Vértice) en el punto medio de FO.

Se trazan perpendiculares al eje por cualquier punto de éste.

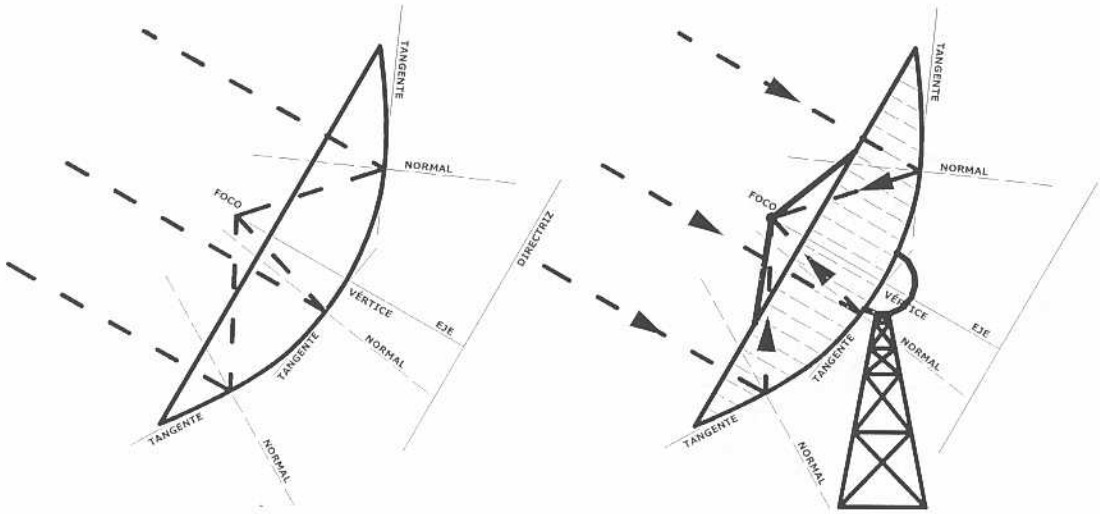
Con centro en F y radio igual a la distancia entre cada perpendicular y la directriz, se trazan arcos que cortarán a la correspondiente perpendicular determinando los puntos de la parábola. Se cumple en cada caso que la distancia entre F y el punto es igual a la distancia del punto a la directriz



UNA APLICACIÓN PRÁCTICA – ANTENAS PARABÓLICAS

Si desde una distancia muy grande (P.Ej, un satelite de comunicaciones) llegan a una superficie señales de radio y, esa superficie es opaca a dichas señales, los reflejará con un ángulo igual al que forma con la normal a la superficie. El ángulo entre el rayo que llega y el reflejado será bisecado por la normal a la superficie.

Si la sección de la superficie es una parábola, todos los rayos que llegan (paralelos entre sí) serán reflejados en un ángulo igual al que forman con la normal a la parábola por lo que serán los radios vectores que pasarán todos por el foco. Si en ese foco se coloca un aditamento capaz de captar esas señales, sobre ese pequeño aditamento convergerán todas las señales que lleguen a la superficie mucho mayor que los refleja. Este es el principio de las Antenas Parabólicas, en las cuales la superficie posterior (parábolas) es una superficie opaca a la radiofrecuencia que reflejará las señales sobre el elemento de captación logrando una gran amplificación de las mismas.



PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
El espacio. Ángulo diedro	• El espacio. Dos y tres dimensiones • Ángulo diedro. Definición. Características

EL ESPACIO

Hasta ahora se han tratado construcciones y figuras ubicadas en un plano (dos dimensiones), sin embargo todo el desarrollo de la Ingeniería deberá ser ejecutado en el espacio (tres dimensiones). O sea considerando el VOLUMEN de las figuras (ancho, largo, profundidad).

ÁNGULO DIEDRO

Se define como Ángulo Diedro a cada una de las porciones del espacio limitado por dos semi-planos que parten de una misma recta.

La recta intersección de dos planos genera o da origen a cuatro semiplanos.

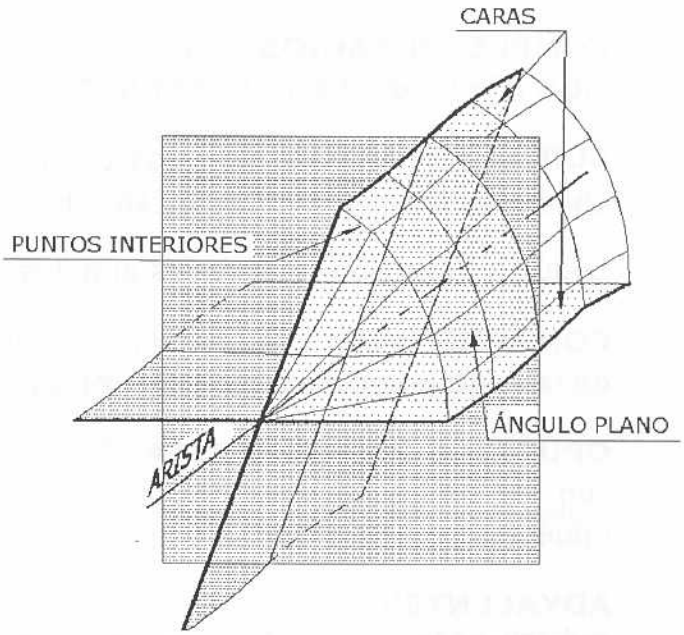
La REGIÓN comprendida entre dos de esos semiplanos es un ÁNGULO DIEDRO o simplemente un **DIEDRO**, se definen los siguientes términos:

ARISTA: La recta común o de intersección de los dos planos. Origen de los semi-planos,

CARAS: Superficies de los semiplanos

PUNTOS INTERIORES: Todos los puntos de la región del espacio comprendida entre las dos caras del diedro.

PUNTOS EXTERIORES: Todos los puntos que están fuera de la región del espacio comprendida entre las dos caras del diedro



ÁNGULO PLANO CORRESPONDIENTE: Es el ángulo plano comprendido entre dos recta perpendiculares a la arista, contenidas respectivamente en cada semiplano. Representa la **AMPLITUD** (medida o dimensión) del ángulo diedro. Se expresa en grados o en radianes. Por ser sus lados perpendicu-

lares a la arista definen un tercer plano perpendicular a los planos de las caras, por lo que también se llama **SECCIÓN NORMAL**

Según su forma o dimensión los ángulos diedros se denominan:

CONVEXOS: Cuando los semiplanos, uno respecto del otro, se encuentran en una posición más cerrada que la determinada por un plano perpendicular al otro. El ángulo plano correspondiente es agudo

CONCAVOS: Cuando los semiplanos, uno respecto del otro, se encuentran en una posición más abierta que la determinada por un plano perpendicular al otro. El ángulo plano correspondiente es obtuso

RECTOS: Cuando los semiplanos, uno respecto del otro, se encuentran en una posición igual a la determinada por un plano perpendicular al otro. El ángulo plano correspondiente es recto. Se define también como la posición de los semiplanos que determina dos diedros consecutivos iguales.

LLANOS: Cuando cada uno de los semiplanos se confunde con la prolongación del otro. El ángulo plano correspondiente es llano

COMPLEMENTARIOS: Son dos o más diedros cuya suma de amplitudes es igual a la de un diedro recto (90°)

SUPLEMENTARIOS: Son dos o más diedros cuya suma de amplitudes es igual a la de un diedro llano (180°)

Según su posición relativa los ángulos diedros pueden ser:

CONSECUTIVOS: Los que tienen la arista común y están situados uno a cada lado de una cara también común (Hojas de un libro)

OPUESTOS POR LA ARISTA: Cuando la arista es común y las caras de uno son las prolongaciones de las caras del otro. Sus secciones normales son opuestas por el vértice. Siempre son iguales.

ADYACENTES: Son los dos diedros en que queda dividido uno llano, por un semiplano interior a él. Los diedros adyacentes siempre son suplementarios

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Sistemas de proyección	• Representación plana de objetos o figuras tridimensionales • Proyección cónica y Proyección cilíndrica. • Proyección Ortogonal y Proyección Oblicua. • Proyección Acotada • Otras proyecciones. Axonométrica. Acotada. • Proyecciones en varios planos • Sistemas de coordenada

REPRESENTACIÓN PLANA DE OBJETOS Y FIGURAS TRIDIMENSIONALES

Todo objeto, maquinaria, edificaciones, etc. que concibe el hombre, en una primera etapa se hace sobre la base de una idea mental, la cual es básicamente tridimensional. Luego esa idea debe ser plasmada con todo detalle de suerte que pueda ser llevada a cabo por los encargados de ejecutar o construir la obra u objeto.

Esta representación evidentemente también puede ser hecha en forma tridimensional, pero esto resultaría muy poco práctico. Siendo lo usual es que estas representaciones sean hechas en forma plana.

Estas se logran PROYECTANDO los objetos en uno o más planos donde se logran plasmar con suficientes detalles.

En todo sistema de representación, además del objeto a representar se pueden distinguir: El Punto de Vista, las Líneas Proyectantes, el Plano de Proyección y la o la Proyección sobre el Plano.

Punto de Vista, es el sitio donde se ubica el observador y desde el cual salen las Líneas Proyectantes.

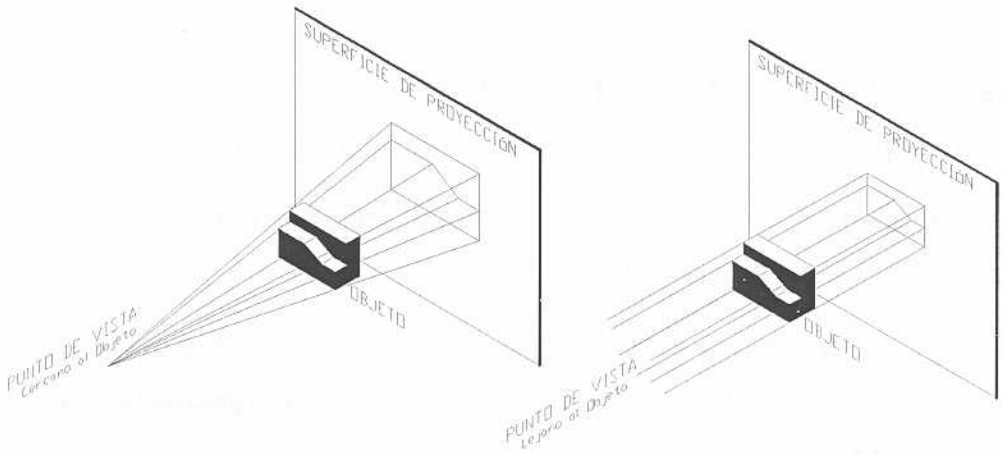
Línea Proyectante, son líneas que partiendo del Punto de Vista pasan por los puntos notables del objeto y continúan hacia el Plano de Proyección. Esto cuando el Plano está situado detrás del Objeto. Puede lograrse un efecto similar con el plano situado delante del Objeto.

Plano de Proyección, es el plano que al intersectar las Líneas Proyectantes delinea el objeto en el plano, formando la Proyección.

PROYECCIÓN CÓNICA Y PROYECCIÓN CILÍNDRICA

Si el Punto de Vista está ubicado a una distancia finita del objeto, generalmente pequeña, las Líneas de Proyección tendrán un punto común que es precisamente el Punto de Vista y su conjunto formarán una figura que se asemejará a un cono. Estas proyecciones se conocen con el nombre de PROYECCIÓN CÓNICA.

Si el Punto de Vista está ubicado a una distancia muy grande (infinito) se puede suponer que las Líneas Proyectantes son paralelas, asemejándose a un Cilindro. Estas proyecciones se denominan PROYECCIÓN CILÍNDRICA.



PROYECCIÓN CÓNICA PROYECCIÓN CILÍNDRICA

PROYECCIÓN OBLÍCUA Y PROYECCIÓN ORTOGONAL

La posición relativa del Plano de Proyección y las Líneas Proyectantes originarán proyecciones diferentes. PROYECCIÓN OBLÍCUA cuando el Plano y las Proyectantes (o el eje de éstas) es oblícuo o PROYECCIÓN ORTOGONAL cuando dicho ángulo es recto, las Proyectantes son perpendiculares al Plano.

OTRAS PROYECCIONES

La Superficie de Proyección no necesariamente debe ser un plano. Por ejemplo para la elaboración de Cartas (Mapas) Cartográficos se emplea la Proyección Transveresal Mercator (UTM por sus siglas en inglés).

Gerhardus Mercator, nombre latinizado de Gerhard Kramer (1462-1532) creó la Proyección Cilíndrica de la Tierra, entre 1511 y 1513, situando el eje de un cilindro coincidente con el eje del mundo y lanzando proyectantes desde dicho eje en forma ortogonal a la superficie del cilindro. El inconveniente de la proyección es que las superficies de la Tierra se deforman significativamente con el aumento de la latitud.

Johan Heirich Lambert (1782-1777) resolvió el problema de pérdida de escala y al colocar el cilindro perpendicular al eje del mundo (transversal).

Aunque hay otras, ésta es la usualmente utilizada hoy en día para la representación de las superficies de la tierra. Es común oir hablar de las Coordenadas UTM.

Para la representación de objetos tridimensionales se utilizan también otros sistemas de proyección, los cuales sitúan los ejes del objeto en forma diferente.

En estas proyecciones el Plano de Proyección no es paralelo a ninguno de los ejes del objeto. Se denominan Proyecciones Axonométricas.

Las escalas en los ejes pueden ser iguales o diferentes según lo cual se denominarán en forma diferente.

Proyección ISOMÉTRICA, cuando la escala utilizada en los ejes es la misma y éstos forman entre si 120°.

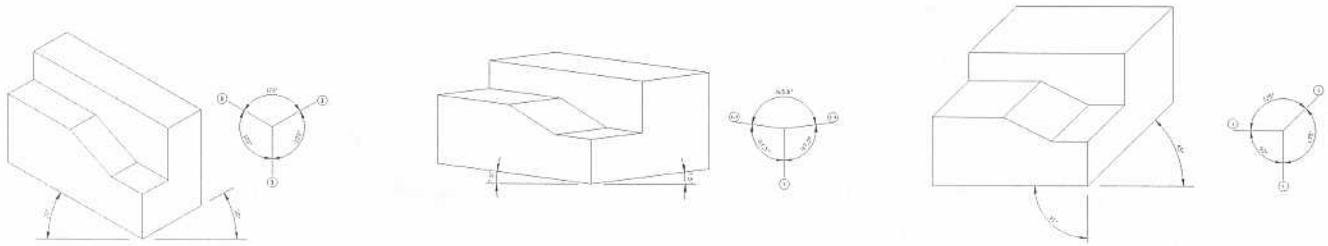
Proyección DIMÉTRICA, cuando la escala en dos de los ejes es la misma deformado la proyección al utilizar una escala diferente en el tercer eje.

Usualmente dos de los ejes forman ángulos iguales respecto al tercero, usualmente se emplean ángulos de 95,5° (7,5° sobre la horizontal).

Proyección TRIMÉTRICA, cuando los ángulos y las escales son diferentes para cada eje (No se muestra)

Proyección CABALLERA, muy empleada en múltiples disciplinas. En ésta dos ejes forma entre si 90°, siendo uno el vertical y el otro el horizontal de la cara frontal. El tercer eje, llamado recedente se coloca, en rigor, a 45° pero se conserva el factor de escala en los tres ejes.

Una variante es colocar el eje recedente a un ángulo menor a 45° y variar un poco el factor de escala haciéndolo un poco menor. Se logran efectos muy agradables a la vista. Esta última práctica es muy util en la representación, incluso en dibujos hechos a mano libre, de volúmenes en ingeniería, arquitectura, etc.



PROYECCIÓN ISOMÉTRICA | PROYECCIÓN DIMÉTRICA | PROYECCIÓN CABALLERA

PROYECCIÓN ACOTADA

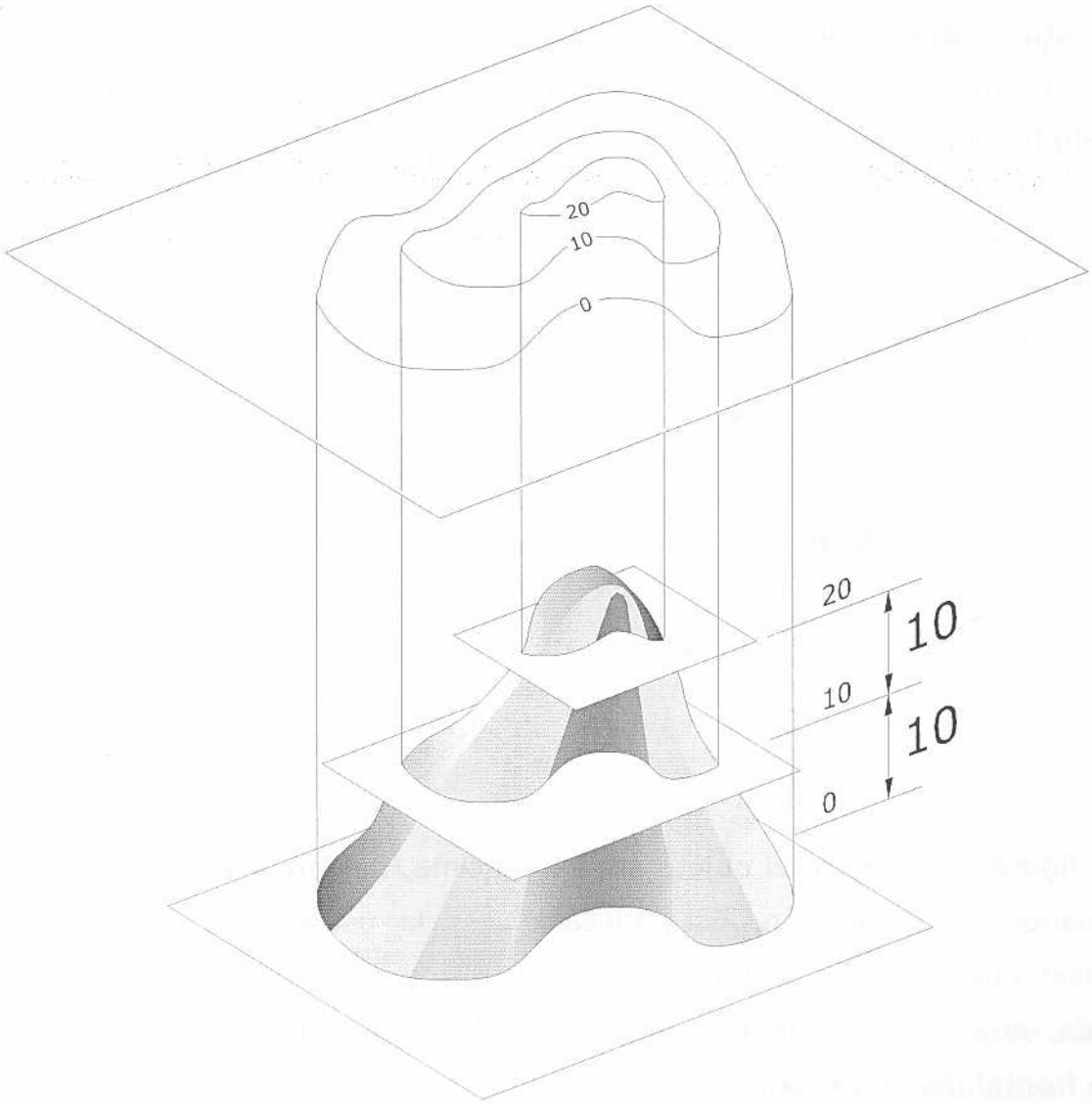
La representación gráfica de superficies irregulares tales como terrenos, montañas, accidentes geográficos, etc. tienen en Ingeniería particular importancia.

En estas proyecciones se "cortan" las superficies irregulares con planos horizontales ubicados a alturas (Cotas) referidas a una referencia común.

Sobre estos planos se formarán polígonos o figuras curvas las cuales se representan en un mismo plano identificándolas con el valor de la COTA del plano que la produjo.

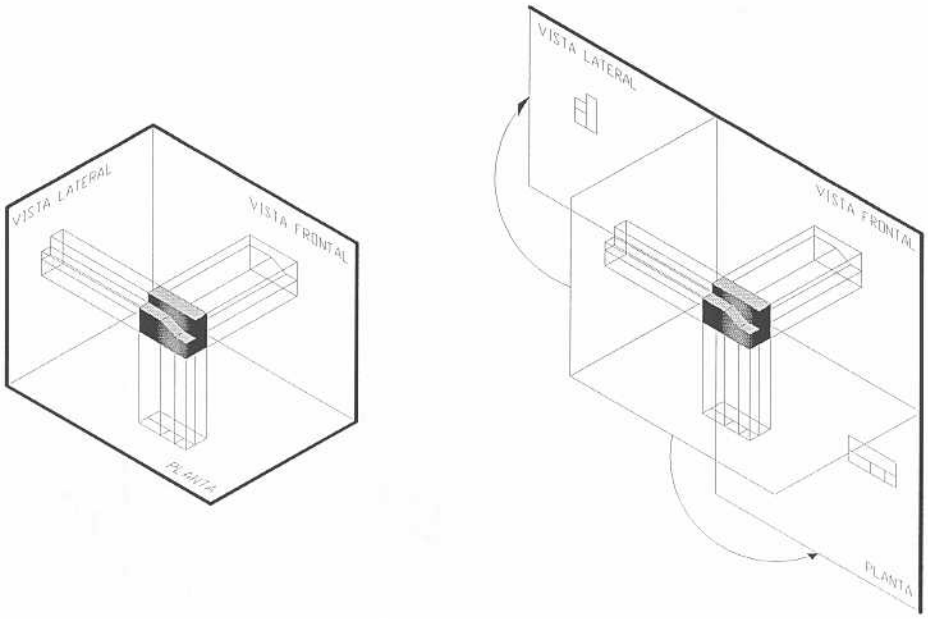
Es un sistema de proyección CILÍNDRICA-ORTOGONAL

Ejemplo de formación de la proyección acotada



PROYECCIÓN EN VARIOS PLANOS

Cobra particular importancia realizar todas las proyecciones necesaria para aclarar adecuadamente los destalles que se deben conocer del objeto. En oportunidades se realizan varias proyecciones en planos diferentes con la finalidad de lograr ese objetivo, produciendo dibujos vistos desde diferentes puntos de observación. Se suelen llamar vista en PLANTA cuando la observación se hace desde arriba del objeto y se proyectya sobre un plano horizontal. Vista FRONTAL o de FACHADA observándolo desde un punto frente al objeto, proyectándolo sobre un plano FORNTAL y vista LATERAL o de PERFIL, al proyectar el objeto sobre un plano LATERAL o de PERFIL.



En la figura se muestra el objeto situado encima, delante y a la derecha de los planos de proyección. Esta ubicación es la usualmente utilizada en prácticamente todo el mundo (Norma DIN), con la excepción de USA y Canada, que ubican el objeto encima del plano horizontal pero detrás del plano frontal (Norma ASA).

Luego de realizadas las proyecciones los planos se giran para ubicarlos en una sola hoja o plano.

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Curvas cónicas	• Secciones planas de un cono. Curvas cónicas. • La elipse y sus elementos. Trazado de la elipse. Tangentes a la elipse • La hipérbola y sus elementos. Trazado de la hipérbola. Tangentes a la hipérbola • La parábola y sus elementos. Trazado de la parábola. Tangentes a la parábola

SECCIONES PLANAS DE UN CONO

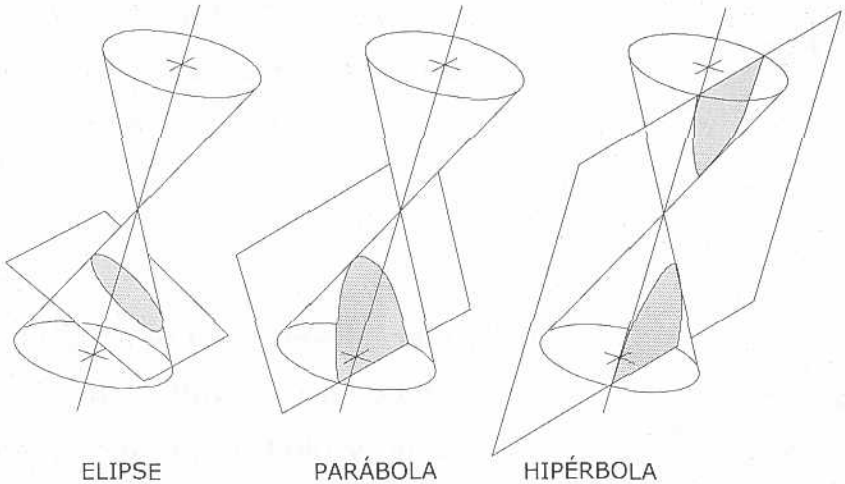
Si un CONO es cortado por un plano se formarán curvas, que dependiendo de la inclinación del plano secante respecto al eje del cono serán:

ELIPSE, si el plano secante forma con el eje del cono un ángulo mayor al que forma la generatriz del cono.

PARÁBOLA, si el plano secante es paralelo a una generatriz.

En ambos casos el plano sólo corta a una de las ramas del cono,

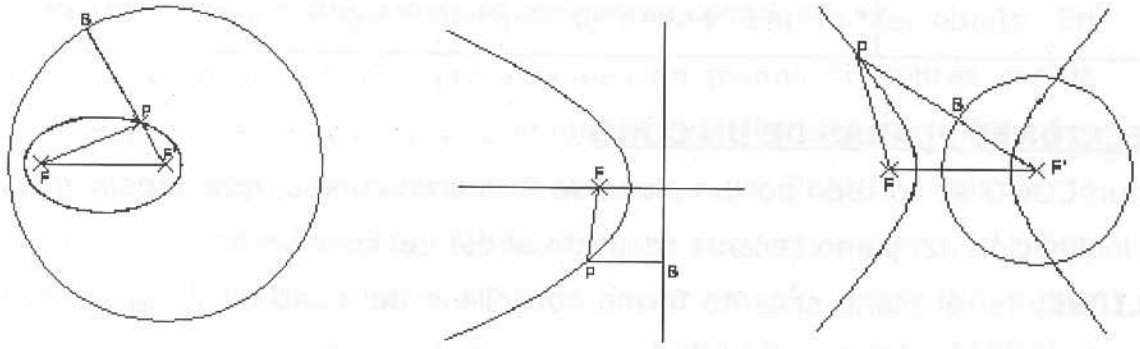
HIPÉRBOLA, si el plano secante forma con el eje del cono un ángulo menor al que forma la generatriz del cono. En este caso el plano cortará ambas ramas del cono.



ELIPSE PARÁBOLA HIPÉRBOLA

Por ser las secciones de un cono se denominan cónicas. Son curvas de segundo orden y se definen como: LG de los puntos coplanares que equidistan de *una circunferencia (DIRECTRIZ), distancia medida en forma normal (según su*

radio) y un punto fijo (F) llamado FOCO. Según la posición relativa del punto fijo y la circunferencia serán:



ELIPSE PARÁBOLA HIPÉRBOLA

ELIPSE, si el punto fijo está situado dentro de la circunferencia

PARÁBOLA, si el radio de la circunferencia es infinito (Línea recta)

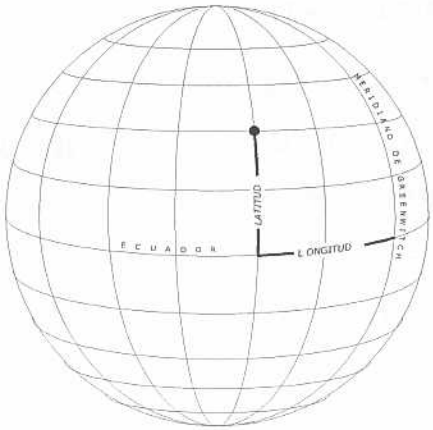
HIPÉRBOLA, si el punto fijo está situado fuera de la circunferencia

SISTEMAS DE COORDENADAS

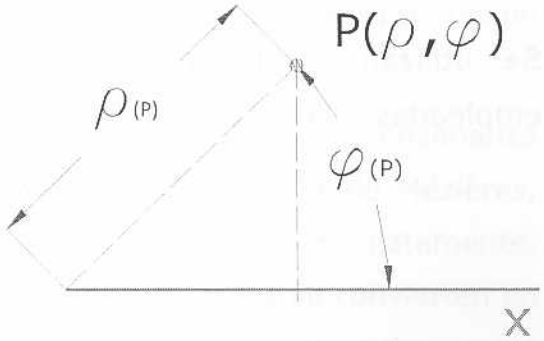
Además de lograr una proyección en uno u otro sistema, se hace necesario estar de acuerdo en unas referencias desde las cuales efectuar mediciones que ubiquen cada punto de la proyección. Surgen así los sitemas de coordenadas.

SISTEMAS LINEALES: Se utilizan para la ubicación de puntos sobre una línea. Generalmente esa línea es una recta y su utilización principal es la ubicación de puntos sobre una trayectoria lineal. Aunque no sobre una línea recta un ejemplo usual y común es la ubicación de puntos sobre una vía al expresarlo identificando la vía y la distancia (Km) desde el origen establecido para esa vía.

COORDENADAS GEOGRÁFICAS: La ubicación de puntos sobre la Tierra en una representación de la misma, es hecho con la distancia como la amplitud de los arcos medidos desde el Meridiano Cero (Greenwitch) llamado Longitud y desde el Ecuador llamado Latitud.

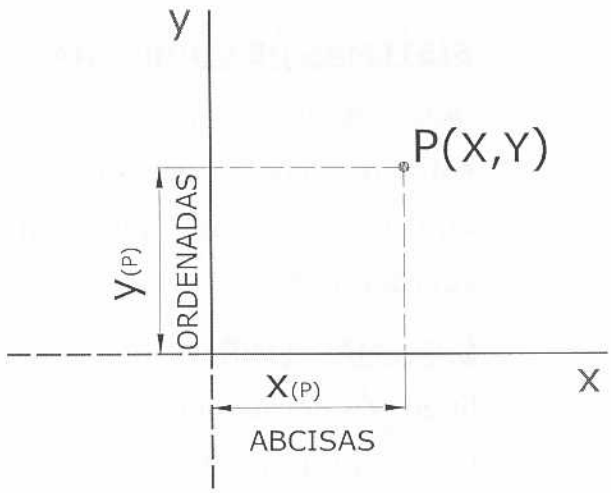


SISTEMA POLAR: Se hace referencia a la diatancia que hay a un punto desde otro puntoo fijo o Polo y en el ángulo que forma la recta que pasa por el Polo y el punto.



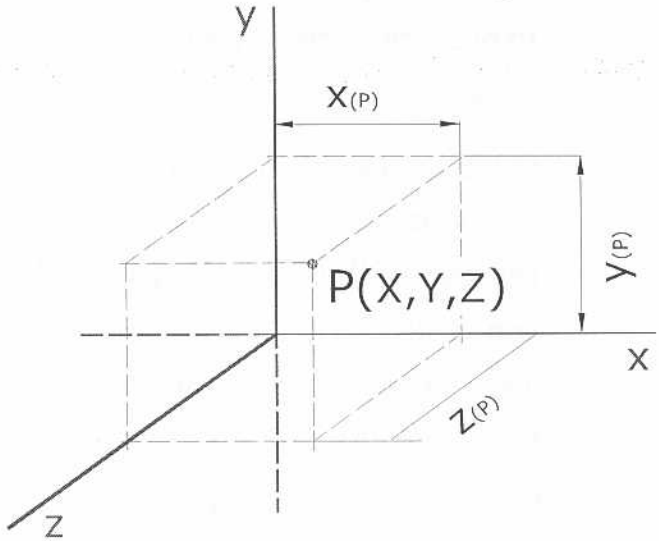
SISTEMA CARTESIANO (DOS EJES)

Se utiliza para ubicar puntos en un plano. Consta de dos ejes perpendiculares denominados de ABCISAS y de ORDENADAS. Es el sistema usualmente empleado en Geometría Analítica para la formulación de ecuaciones.



SISTEMA CARTESIANO (TRES EJES)

Se utiliza para ubicar puntos en el espacio. Consta de tres ejes perpendiculares entre si.



SISTEMAS NO CARTESIANOS
(TRES EJES)

Se utilizan en la representación de puntos cuando las proyecciones empleadas utilizan ejes dispuestos en ángulos no perpendiculares.

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Sistemas de proyección Doble Proyección Ortogonal (DPO)	• Breve reseña histórica • Mecánica de la DPO • Convenimientos • Coordenadas

DOBLE PROYECCIÓN ORTOGONAL

A principios del Siglo XVIII con la puesta en marcha de la Máquina de Vapor se inicia la Revolución Industrial. En ese entonces las representaciones en dibujo de máquinas se hacían sobre la base de técnicas similares a las utilizadas en la representación de edificaciones.

Es Gaspard Monge (1746-1818) quien crea un nuevo sistema de representación, base de una nueva ciencia, la Geometría Descriptiva.

Monge recoge las técnicas empleadas por los encargados del diseño y fabricación de máquinas y, es de tal variedad que se hacía necesaria la unificación de las mismas.

Monge utilizando sólo proyecciones cilíndricas ortogonales, lo hace sobre dos planos colocados uno en forma vertical y el otro , perpendicular al primero, colocado en forma horizontal. O sea realiza una doble proyección del objeto en forma ortogonal una con la otra. De allí su nombre de DOBLE PROYECCIÓN ORTOGONAL (DPO), también llamado Sistema Diédrico.

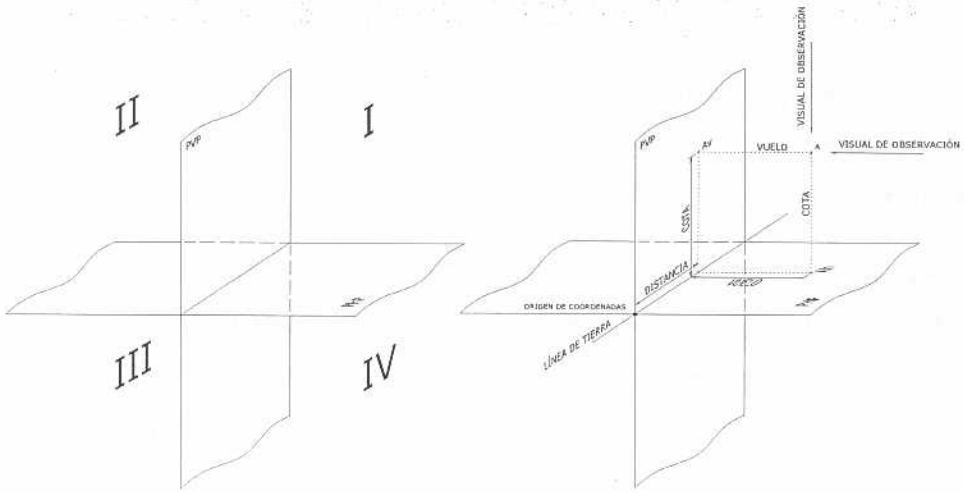
Por medio de la doble DPO se convierte un conjunto de sistemas de representación en un único sistema que basándose en procedimientos geométricos simples pero rigurosamente empleado, permite la representacion fidedigna y exacta de objetos tridimensionales.

La Ingeniería Militar, rápidamente acoje el sistema y se comienza su enseñanza en las Academias Militares. Como profesor de la Escuela Militar de Mézières, Monge propone mejoras de trazado las cuales son acogidas inmediatamente. *Sus lecciones, publicadas posteriormente (1878), rápidamente se convierten en* fundamentales para la enseñanza técnica en los países mas avanzados, como Alemania y Estados Unidos (West Point Academy).

TÉCNICA DE LA DOBLE PROYECCIÓN ORTOGONAL (DPO)

El espacio es dividido en CUATRO diedros mediante dos (2) planos ortogonales situados uno en forma vertical llamado Plano Vertical de Proyección (PVP) y el otro en forma horizontal, llamado Plano Horizontal de Proyección (PHP).

Los diedros I y II están ubicados por encima del PHP y respectivamente delante y detrás del PVP. Los diedros II y IV, debajo del PHV y respectivamente detrás y delante del PVP. El Observador se ubica en el Ier Diedro (Norma DIN).

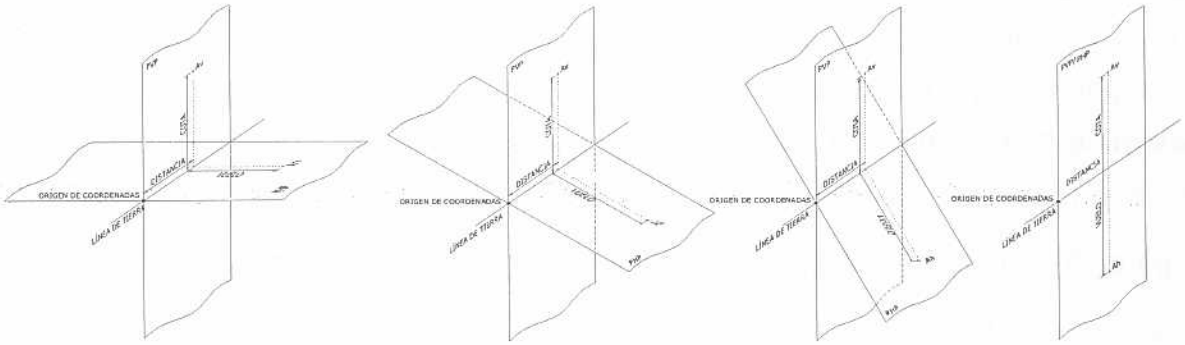


El Origen de Coordenadas está ubicado hacia la izquierda del Observador, coincidiendo con la intersección de los planos PVP y PHP, intersección que se denomina LÍNEA DE TIERRA. El alejamiento o distancia del OBJETO del PVP se denomina VUELO, considerando POSITIVO al Vuelo de los objetos que están por delante del PVP o sea en los Diedros I y IV. (Negativos en los Diedros II y III).

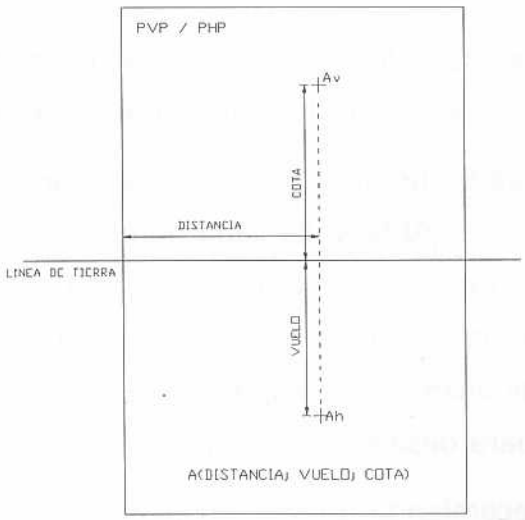
La distancia al Objeto medida desde el PHP se denomina COTA. Siendo POSITIVA la Cota de Objetos situados por encima del PHP o sea en los Diedros I y II (Negativas en los Diedros III y IV). Se utiliza como convención

expresar las coordenadas de un punto en la siguiente forma. La ubicación del punto A de la figura precedente se expresará así: A(DISTANCIA; VUELO; COTA).

Hechas las proyecciones sobre los dos planos la representación (dibujo) final se hará sobre una misma hoja de papel, en la siguiente forma: El PVP permanece inmovil. El PHP se gira teniendo como Eje de Giro a la Línea de Tierra (LT) hasta hacerlo coincidir con el PVP.



Se debe destacar que los Planos de Proyección, por ser infinitos en extensión, ocupan lugar a ambos lados de la LT. Por lo que las proyecciones sobre ellos se podrán ver a ambos lados de la LT, dependiendo del Diedro donde se ubique el Objeto.



CONVENIMIENTOS EN DPO

Como se requiere en todo sistema de representación hace falta llegar a algunos acuerdos de suerte que todos hablen el mismo idioma y se puedan entender. En ese sentido se plantean los siguientes convenimientos.

NOMBRES

Planos de proyección : PVP al vertical. PHP al horizontal. Adicionalmente y para ciertas proyecciones, éstas se hacen sobre un plano perpendicular al PHP y al PVP, generalmente ubicado en el origen de coordenadas. Este plano se denomina Plano Lateral o de Perfil de proyecciones y es un plano auxiliar a los dos principales (PHP y PVP).

Línea de Tierra : LT, corresponde a la intersección del PVP con el PHP.

Proyección Vertical de un Punto : PV. Corresponde a la proyección ortogonal del punto sobre el PVP.

Proyección Horizontal de un Punto : PH. Corresponde a la proyección ortogonal del punto sobre el PHP.

Línea de Referencia : LR. Corresponde a una línea inmaginaria que une la Proyección Vertical de un punto con la Proyección Horizontal.

Puntos Se nombrarán con letras (romanas) mayúsculas o números (A; B; C; D; 1; 2; 3...) Al lado de cada nombre se colocará una V o una H para indicar si se trata de la proyección vertical u horizontal, o ambas si las proyecciones coinciden. Estas letras se recomienda hacerla un poco más pequeñas (Subíndices). (A_V; A_H; 1_V; 1_H; B_{VH}). En algunos paises se utilizan los números 1 y 2 para designar las proyecciones horizontal y vertical.

Se recomienda utilizar letras para nombrar puntos pertenecientes a los objetos o figuras solicitadas o dadas como datos. Utilizar números para nombrar puntos auxiliares que sean requeridos durante los procedimientos de solución que se

empléen. Si adicionalmente estos números se utilizan en forma ordenada, se facilitarán las revisiones al seguir la secuencia de los procedimientos hechos.

Rectas. Se nombrarán con una letra (Romana) minúscula, identificando de que proyección se trata (a_V; a_H).

Planos: Se nombrarán con una letra (griega) minúscula (α; β; φ;).

COORDENADAS

ORIGEN DE COORDENADAS : Se establece el Extremo Izquierdo, en la hoja, de la Línea de Tierra (LT) y se ubica hacia el centro del borde izquierdo del área de dibujo.

DISTANCIA LATERAL : Es la distancia medida desde el Origen sobre la LT y corresponde a la Línea de Referencia

VUELO DE UN PUNTO : También llamado ALEJAMIENTO, es la distancia del punto al PVP. Es POSITIVO cuando el punto se ubica entre el Observador y el PVP (I y IV Diedro), NEGATIVO cuando el punto está detrás del PVP (II y III Diedro). De acuerdo a la mecánica de la DPO los vuelos positivos se miden desde la LT hacia abajo en el dibujo.

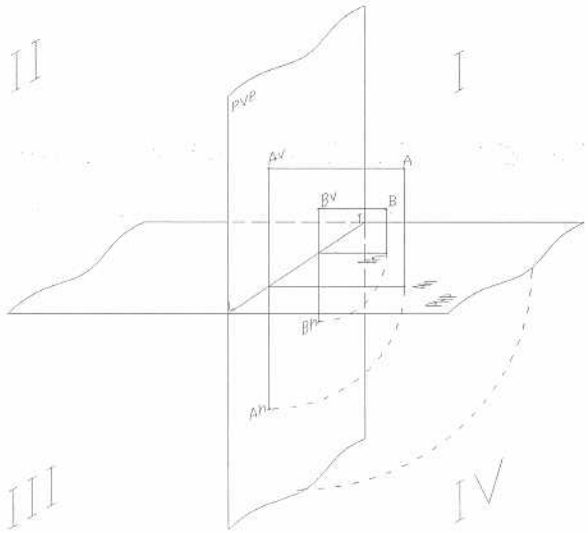
COTA DE UN PUNTO : Es la distancia del punto al PHP. Es POSITIVA cuando el punto está por encima del PHP (I y II Diedro) y NEGATIVO cuando está por debajo del PHP (III y IV Diedro). De acuerdo a la mecánica de la DPO las cotas positivas se miden desde la LT hacia arriba en el dibujo.

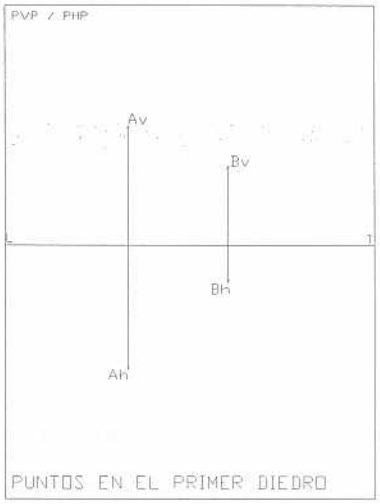
PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

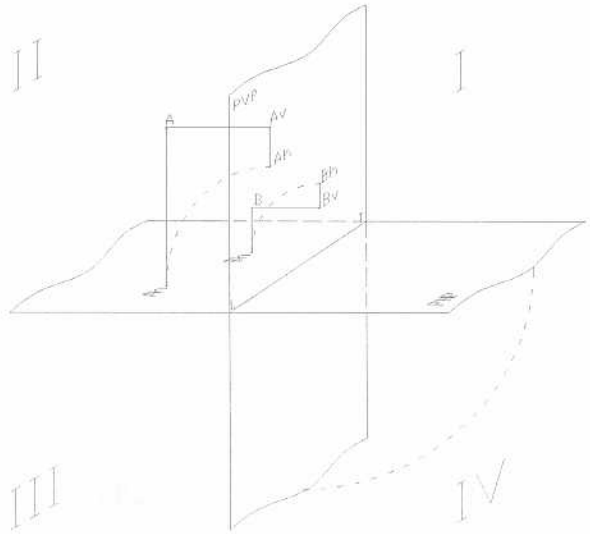
OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
DPO de Puntos y rectas	• Proyección de puntos • Proyección de rectas. Rectas cualesquiera. • Rectas en posiciones particulares: Horizontales, frontales y de perfil. • Posición relativa de rectas: Rectas que se cortan, rectas que se cruzan, rectas paralelas

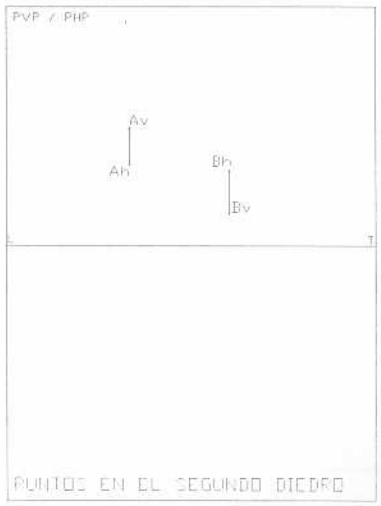
DPO DE PUNTOS

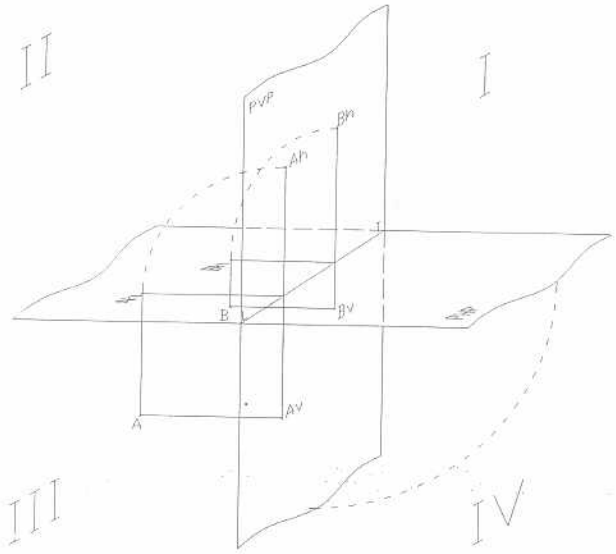
Según su ubicación en el espacio las proyecciones de puntos en DPO se verán en la siguiente forma

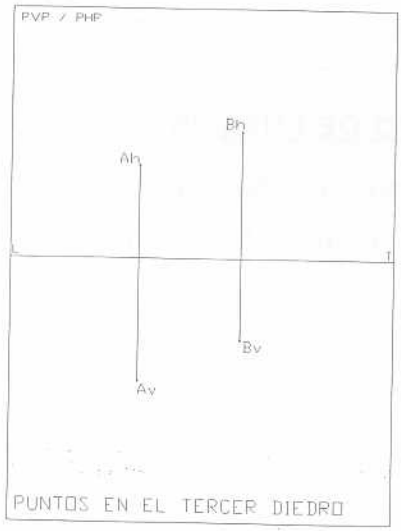


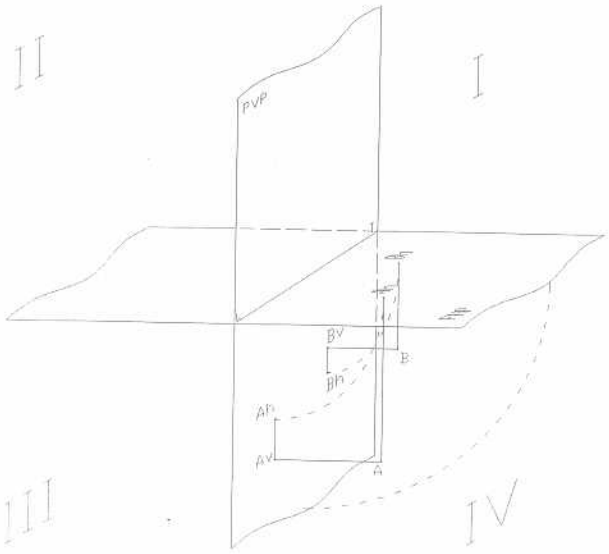


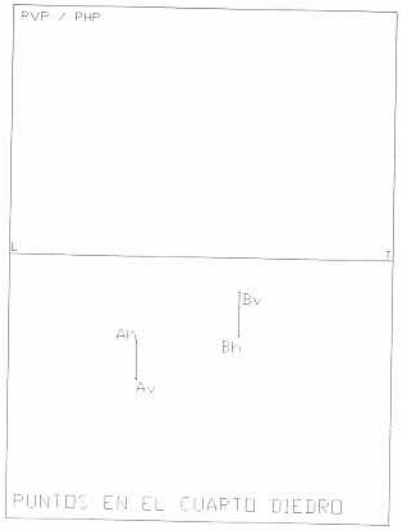




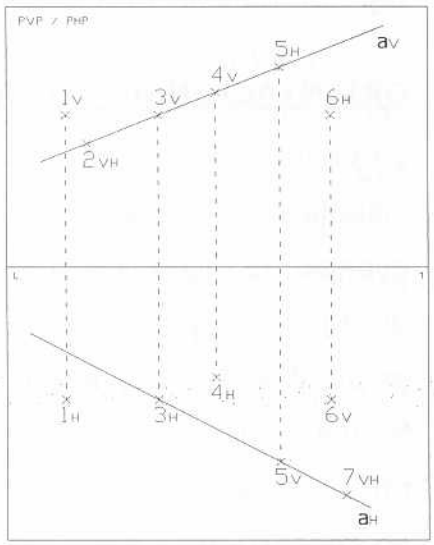

II
I
PVP
Bh
Ah
B
Bv
A
Av
III
IV


PVP / PHP
Bh
Ah
Bv
Av
PUNTOS EN EL TERCER DIEDRO


II
I
PVP
BV
B
Bh
Ah
Av
A
III
IV


PVP / PHP
Bv
Ah
Bh
Av
PUNTOS EN EL CUARTO DIEDRO

PERTENENCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA



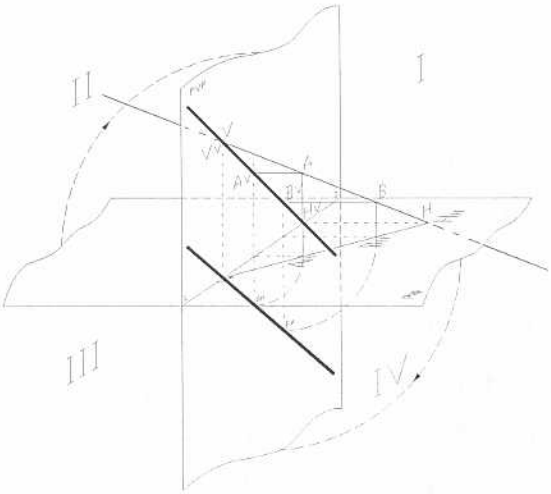
Un punto pertenece a una recta si sus dos proyecciones (PV y PH) coinciden, respectivamente, con ambas proyecciones de la recta. En la figura sólo el punto 3 pertenece a la recta a, ya es el único que sus proyecciones son coincidentes con las de la recta. Es pertinente observar detenidamente las proyecciones del punto 5, que podrían confundirse al ser aparentemente las proyecciones coincidentes con las de la recta.

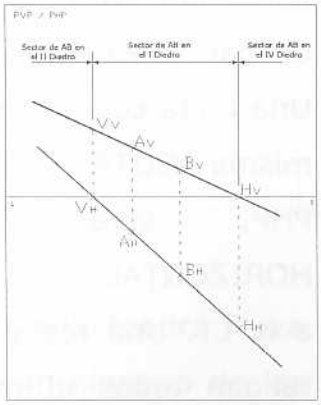
DPO DE RECTAS

Básica e independientemente de la posición que ocupen en el espacio, las proyecciones de las rectas se logran al trazarlas por las proyecciones de dos de sus puntos.

TRAZAS

Como quiera que las rectas son infinitas en longitud, si no son paralelas a los planos de proyección, se intersectarán con ellos en

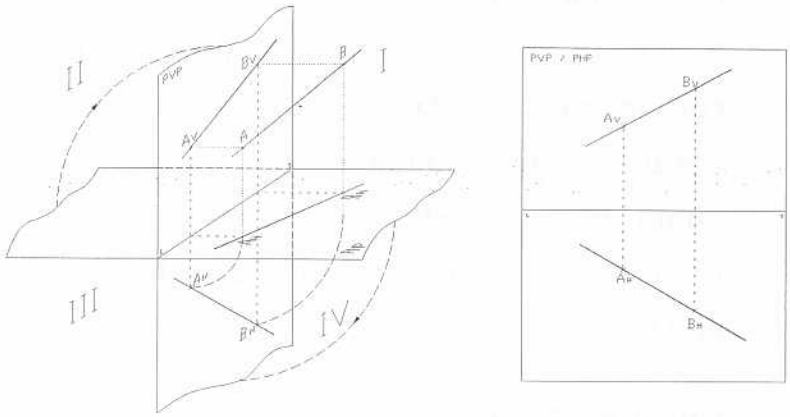


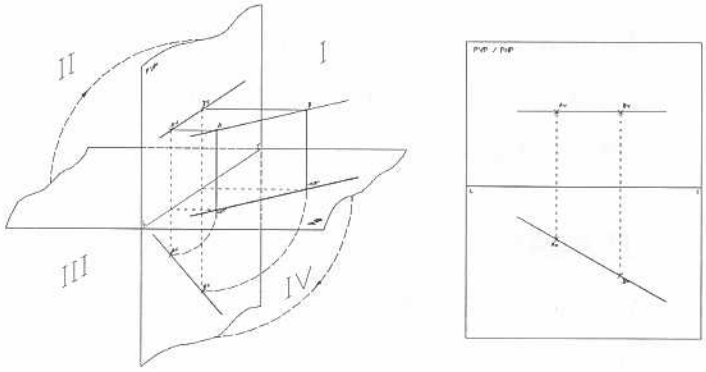


algún punto. Estos puntos tendrán COTA CERO si la intersección es con el PHP y VUELO CERO cuando sea con el PVP. Estos puntos de intersección con los planos de proyección se denominan las TRAZAS, siendo la horizontal la que corresponda al PHP (Cota=0) y la vertical la que corresponda al PVH (Vuelo=0).

ORIENTACIÓN DE RECTAS EN EL ESPACIO

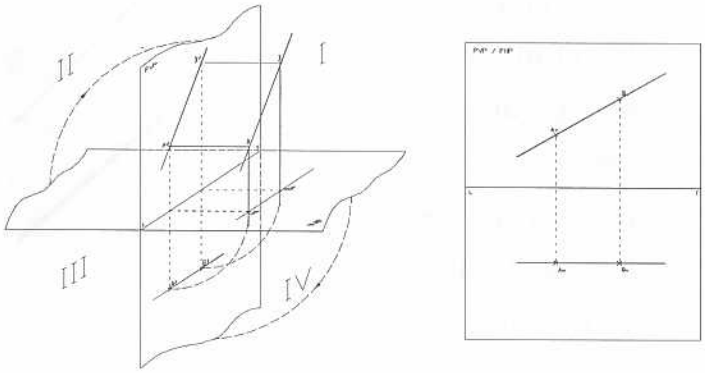
La observación de la posición relativa de dos puntos de una recta permitirá visualizar la posición en el espacio de dicha recta. En la figura el punto A se encuentra a la izquierda del B, tiene menor cota y tiene menor vuelo. La recta AB, en consecuencia gana cota y gana vuelo hacia la derecha. O sea se ELEVA y ADELANTA de izquierda a derecha, o simplemente a la derecha.





RECTAS EN POSICIONES PARTICULARES

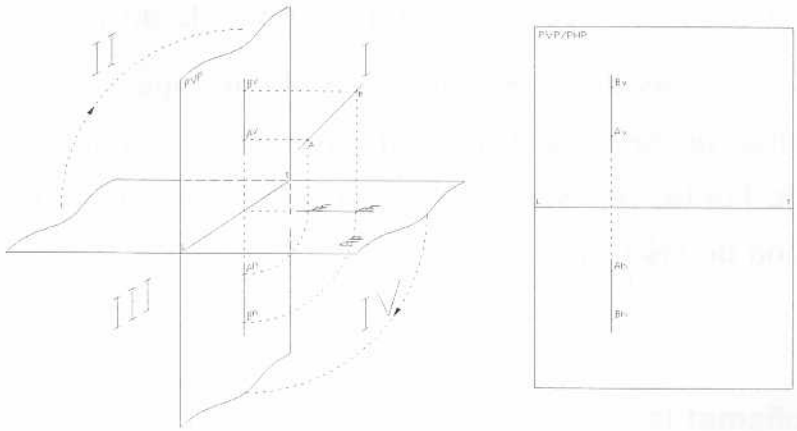
Las recta en el espacio pueden ocupar posiciones particulares. Una recta cuyos puntos tengan la misma COTA será paralela al PHP, será una recta HORIZONTAL, su PV será paralela a la LT. Una recta cuyos puntos tengan todos el mismo VUELO, será paralela al PVP, será una



recta FRONTAL, su PH será paralela al PHP.

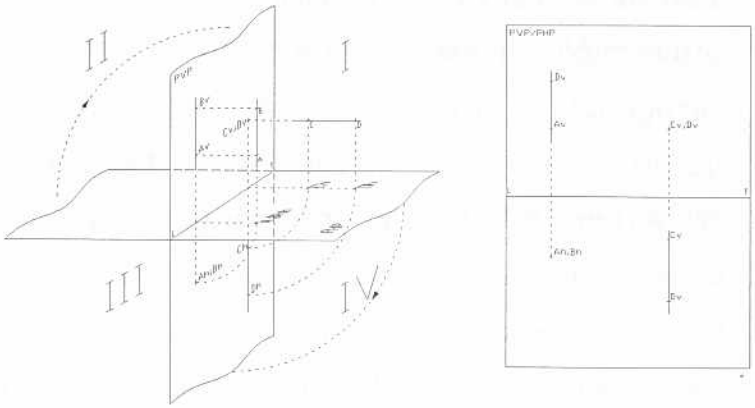
En las proyecciones de rectas Horizontales o de rectas Frontales. La dimensión de la recta en el espacio (AB) es igual a la dimensión de las recta en la proyección correspondiente (A_HB_H o A_VB_V). En efecto siendo una proyección Ortogonal las proyectantes (AA_H, BB_V, Etc.) son perpendiculares a los planos de proyección y por consiguiente a las proyecciones. Pero por definición las rectas en el espacio son paralelas a los planos de proyección y por consiguiente a las proyecciones. Las figuras AA_HB_HB o AA_VB_VB, según el caso son unos rectángulos donde los lados opuestos son iguales. O sea en DPO la PV de un segmento de una Recta Frontal y la PH de un segmento de una Recta Horizontal, se verán en el tamaño real (en el espacio) del segmento correspondiente.

Estas rectas NO son paralealas a LT, una de sus proyecciones se verá, según el caso paralelas a la LT. Sin embargo si una recta en el espacio es paralela a ambos planos de proyección, será una recta Paralela a la LT y AMBAS proyecciones se verán paralelas a LT, esta será una recta FRONTAL-HORIZONTAL.



Al ser paralelas a uno o ambos planos de pro- yección no se intersec-tará con el plano al cual es paralela, en conse-cuencia no existira la traza correspondiente. Una recta Horizontal sólo tendrá la Traza vertical (Vuelo = 0) , una recta Frontal sólo tendrá Traza horizontal (Cota =0). Las rectas paralelas a LT no tendrán ninguna de las trazas por ser Horizontales-Frontales.

Una recta cuya distancia lateral al origen de coordenadas sea constante, será una recta paralela a un Plano Lateral (Perfil) de Proyección. Será una recta de PERFIL. Sus proyecciones (ambas) se confundirán con las Líneas de Referencia.



Casos particulares de las Rectas de Perfil suceden si además de tener todos los puntos la misma distancia lateral al origen, la recta es perpendicular al PVP o al PHP.

Si es perpendicular al PVP, será paralela al PHP, será una recta HORIZONTAL. Si es perpendicular al PHP será paralela al PVP, será una recta FRONTAL.

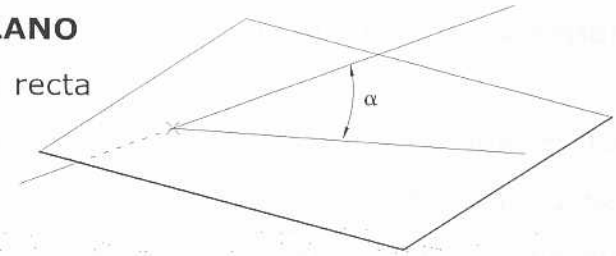
Estas recta se denominan Rectas de PUNTA a la perpendicular al PVP (Perfil Horizontal) y de PIE o VERTICAL a la perpendicular al PHP (Perfil Frontal). Las proyecciones se verán confundidas con las Líneas de Referencia en PH o PV según el caso y como un punto en la otra proyección.

Las Trazas de las rectas de Perfil por supuesto que coincidirán con la misma línea de referencia al igual que todos sus puntos. En las rectas Verticales o de Punta, por ser paralelas a uno u otro plano de proyección, sólo tendrán una de las trazas.

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Verdadero tamaño	• Ángulo que forma una recta con un plano • Ángulo que forma una recta con los planos de proyección. • Verdadero tamaño de un segmento de recta. Triángulos de verdadero tamaño. • Determinar las proyecciones de una recta mediante la utilización de los triángulos de verdadero tamaño • Solución de problemas que incluyen medidas usando triángulos de VT

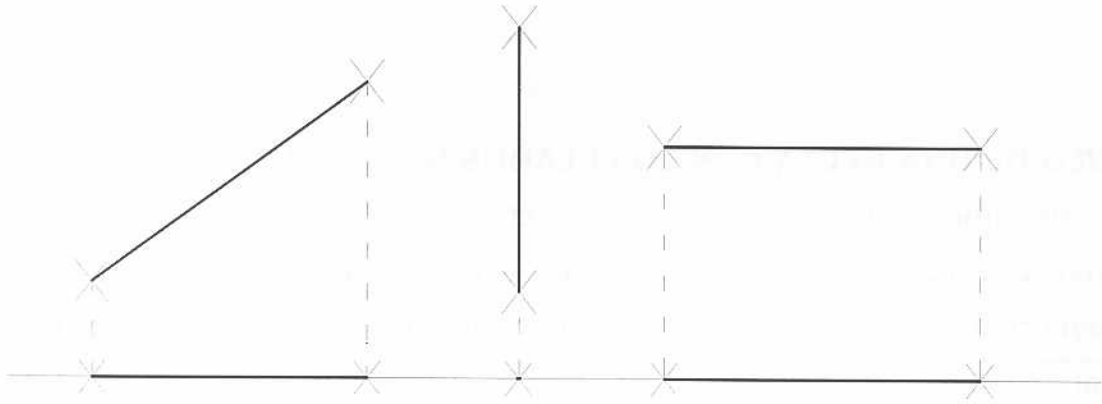
ÁNGULO DE UNA RECTA CON UN PLANO

Se define como el ángulo que forma la recta con su proyección sobre el plano.



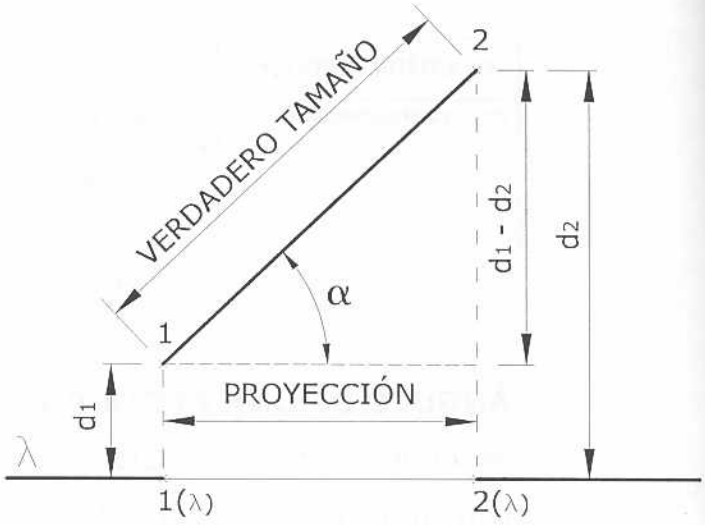
TAMAÑO DEL SEGMENTO PROYECTADO

En el espacio un segmento tiene una dimensión que es su Verdadera dimensión o Tamaño. Al ser proyectado esta dimensión puede variar y verse en una dimensión aparente diferente a la real del segmento. En proyecciones cilíndri-



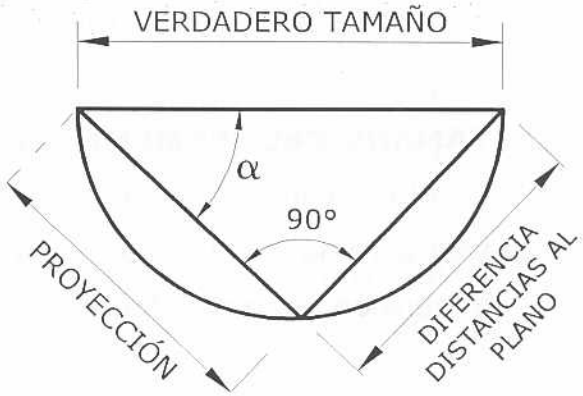
cas ortogonales, en NINGÚN caso la proyección puede ser mayor al tamaño real (Verdadero tamaño) del segmento siendo la longitud máxima de las proyecciones, igual al VT del segmento. Esto sólo ocurrirá cuando el segmento sea paralelo al plano de proyección.

Conocida la PROYECCIÓN y la diferencia de distancias (d_1 y d_2) de dos puntos de la recta al plano de proyección (longitud de las proyectantes), se podrá construir un TRIÁNGULO RECTÁNGULO que definirá el VERDAERO TAMAÑO y el ÁNGULO que forma la recta con el plano.



Claro que ese TRIÁNGULO RECTÁNGULO se podrá construir conocidos otro par de elementos del mismo como podrían ser el ángulo y el VT, el ángulo y la diferencia de distancias o el VT y la diferencia de distancias.

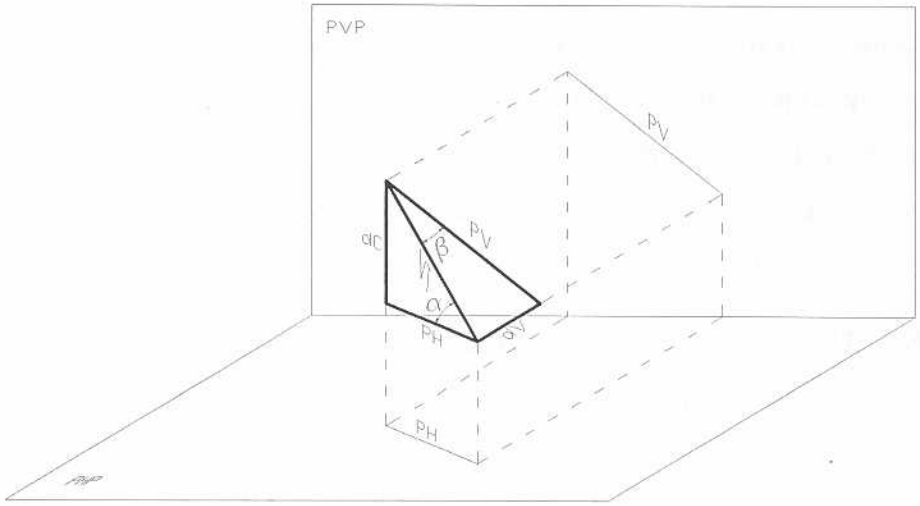
Por ser un triángulo rectángulo, resultará muy conveniente trabajar con el ARCO CAPAZ de los ángulos rectos.



ÁNGULO DE UNA RECTA CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

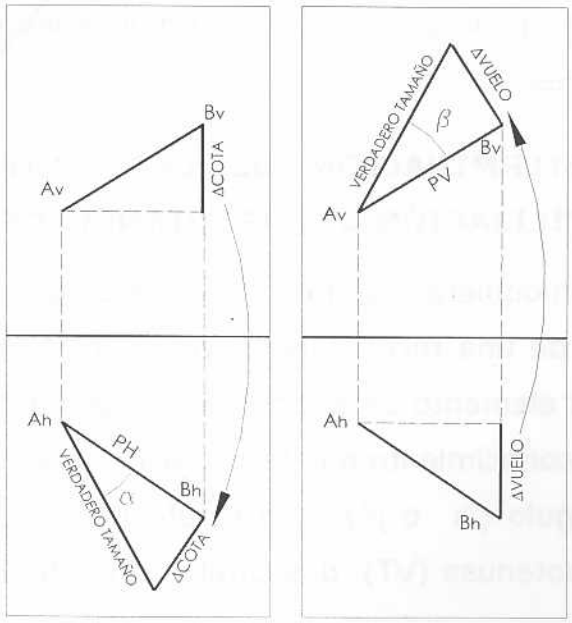
Se define como el ángulo que forma la recta con su proyección sobre el plano de proyección correspondiente, luego con el PHP será el ángulo entre la recta su proyección horizontal y con el PVP el ángulo entre la recta y su proyección vertical.

En DPO, considerando la proyección sobre el PHP, la distancia de cada punto de un segmento al PHP es la COTA del punto, luego la diferencia de distancias al plano de dos de sus puntos será la DIFERENCIA DE COTAS (dC). La proyección será la PROYECCIÓN HORIZONTAL (PH) y el ángulo entre el VT y la



proyección será el ÁNGULO CON EL PHP (α). Si la proyección es sobre el PVP los elementos del TRIÁNGULO serán: VT; PROYECCIÓN VERTICAL (PV); DIFERENCIA DE VUELO (dV) y ángulo con el PVP (β).

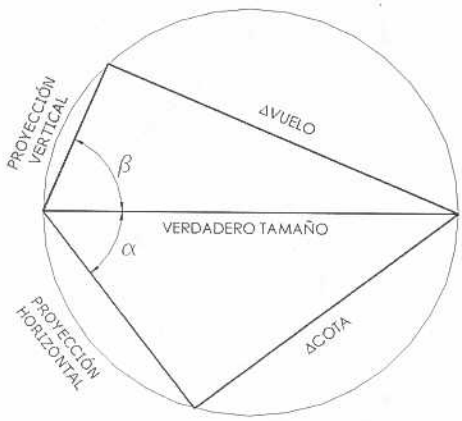
Estos triángulos son conocidos como TRIÁNGULOS DE VERDADERO TAMAÑO y con la utilización de los mismos se podrán determinar, además del tamaño real (VT) de los segmentos proyectados su ubicación en el espacio y por consiguiente sus proyecciones, conocidas algunas de sus características. Su determinación o construcción en DPO se puede hacer como se muestra en la figura.



También se pueden construir en forma separada a las proyecciones.

Como son triángulos rectángulos ya de antemano se conoce uno de sus ángulos. Este ángulo recto se ubicará, como en la figura sobre los arcos ca-

paces de los ángulos rectos. El diámetro de dichos arcos, será la hipotenusa de cada uno de los triángulos y, los catetos la proyección correspondiente y el dC o dV según el caso. El ángulo entre cada proyección y la hipotenusa, será en cada caso el que forma el segmento en el espacio con el plano correspondiente.



PROPORCIONALIDAD DE LOS TRIÁNGULOS DE VT

Una recta sólo forma UN ángulo con un plano cualquiera. Rectas paralelas formarán con un mismo plano ángulos iguales. Diferentes segmentos sobre una misma recta o sobre rectas paralelas formarán ángulos iguales con un mismo plano. Luego los triángulos de VT de segmentos de una misma recta o de rectas paralelas, siendo rectángulos y teniendo el ángulo que forman con su proyección (plano) el mismo, necesariamente el tercer ángulo también será igual en todos, o sea serán semejantes, luego serán proporcionales.

Conocido el (los) ángulo(s) con el(los) plano(s) de proyección, se podrá definir un segmento cualquiera de una recta en VT y luego, relacionando los triángulos semejantes determinar los elementos correspondientes proporcionales.

DETERMINACIÓN DE LAS PROYECCIONES DE RECTAS CON LA UTILIZACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS DE VT

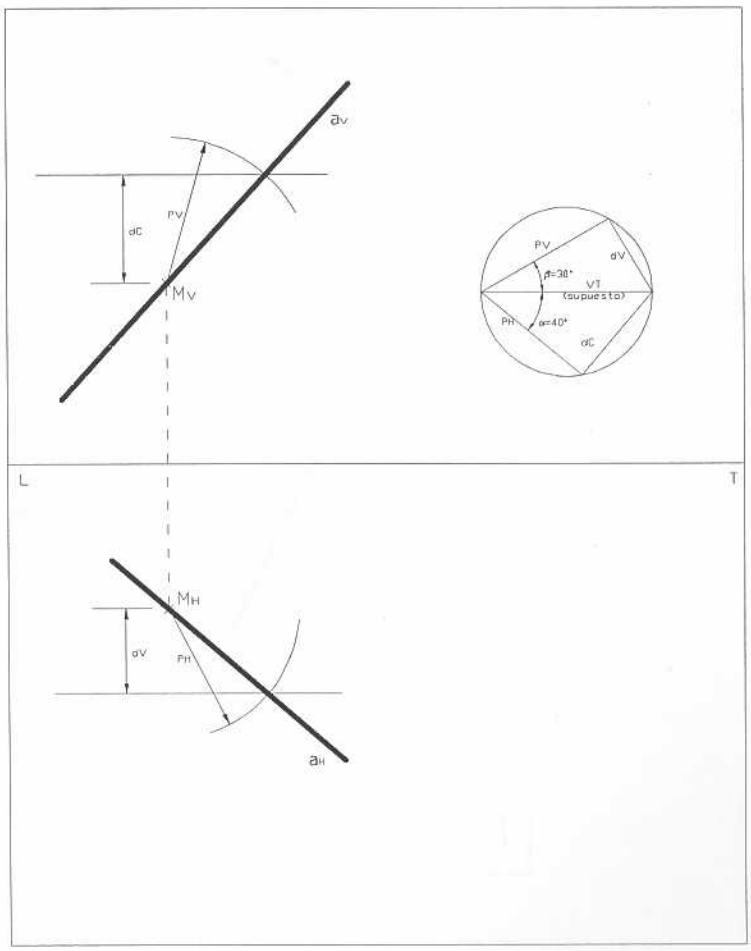
Comoquiera que los triángulos de VT son semejantes para cualquier segmento de una recta. Sus proyecciones se podrán determinar al conocer parte de los elemento de dichos triángulos. Por ser triángulos rectángulos, se requerirá el conocimiento o determinación de otros dos elementos de cada triángulo. Un ángulo (α o β) y un cateto (PH, PV, dC o dV), un ángulo (α o β) y la hipotenusa (VT), dos catetos (PH, PV, dC o dV) o un cateto (PH, PV, dC o dV)

y la hipotenusa (VT). Ahora bien al ser proporcionales se podrá construir un triángulo suponiendo alguno de esos elementos, generalmente la hipotenusa (VT). Con lo cual se obtendrá la o las proyecciones para un segmento cualquiera de la recta buscada, luego estableciendo las correspondientes relaciones de proporcionalidad se obtendrá la o las proyecciones de la recta o segmento buscado.

EJEMPLOS DE SOLUCIÓN DE PROBLEMAS UTILIZANDO TRIÁNGULOS DE VT

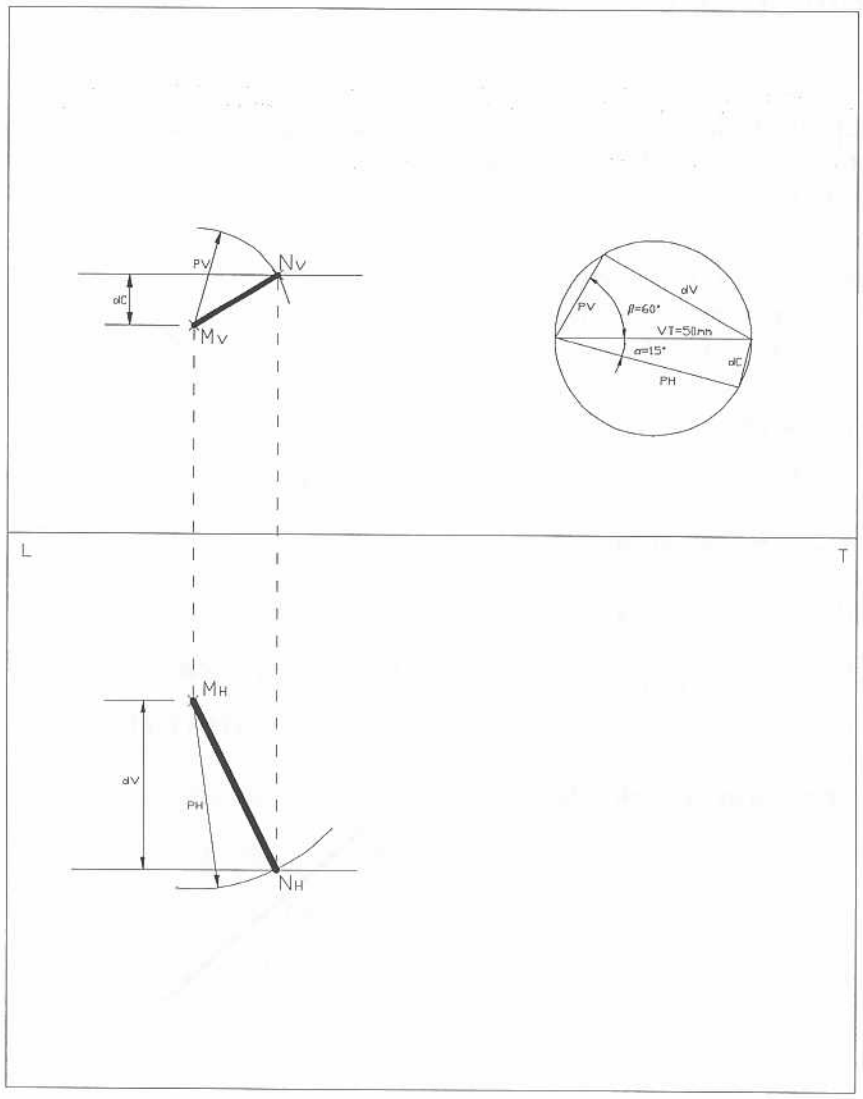
1.- Determinar la recta "a" sabiendo que pasa por el punto "M" y se eleva (gana cota) y adelanta (gana vuelo) hacia la derecha formando un ángulo de 40° con el PHP y 30° con el PVP

Conocidos los ángulos que forma la recta con los planos de proyección, se construyeron sendos triángulos utilizando los arcos capaces de los ángulos rectos correspondientes a un VT supuesto (cualquiera). Con esto se determinaron los parámetros de dC, dV, PH y PV. Éstos se llevaron a cada proyección desde donde el punto M, observando las indicaciones de orientación de la recta.



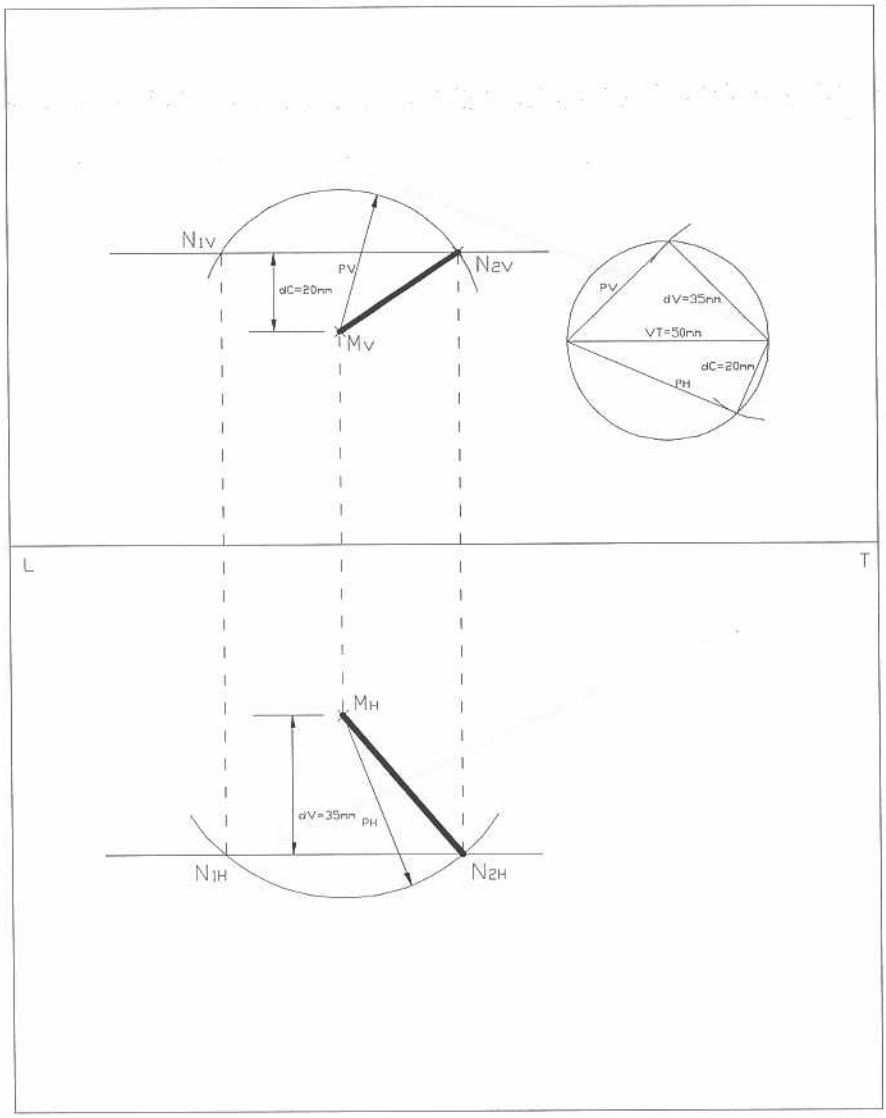
2.- Determinar el segmento MN conocido el punto M, sabiendo que mide (VT) 50mm y que N se encuentra más alto (mayor cota) y más adelante (mayor vuelo) que M. Se sabe además que forma un ángulo de 15° con el PHP y 60° con el PVP. El punto N está a la derecha del M.

Conocidos los ángulos que forma la recta con los planos de proyección, se construyeron sendos triángulos utilizando los arcos capaces de los ángulos rectos correspondientes al VT (50mm) del segmento solicitado. Con esto se determinaron los parámetros de dC, dV, PH y PV. Éstos se llevaron a las proyecciones correspondientes desde el punto M observando las indicaciones de ubicación del punto N.



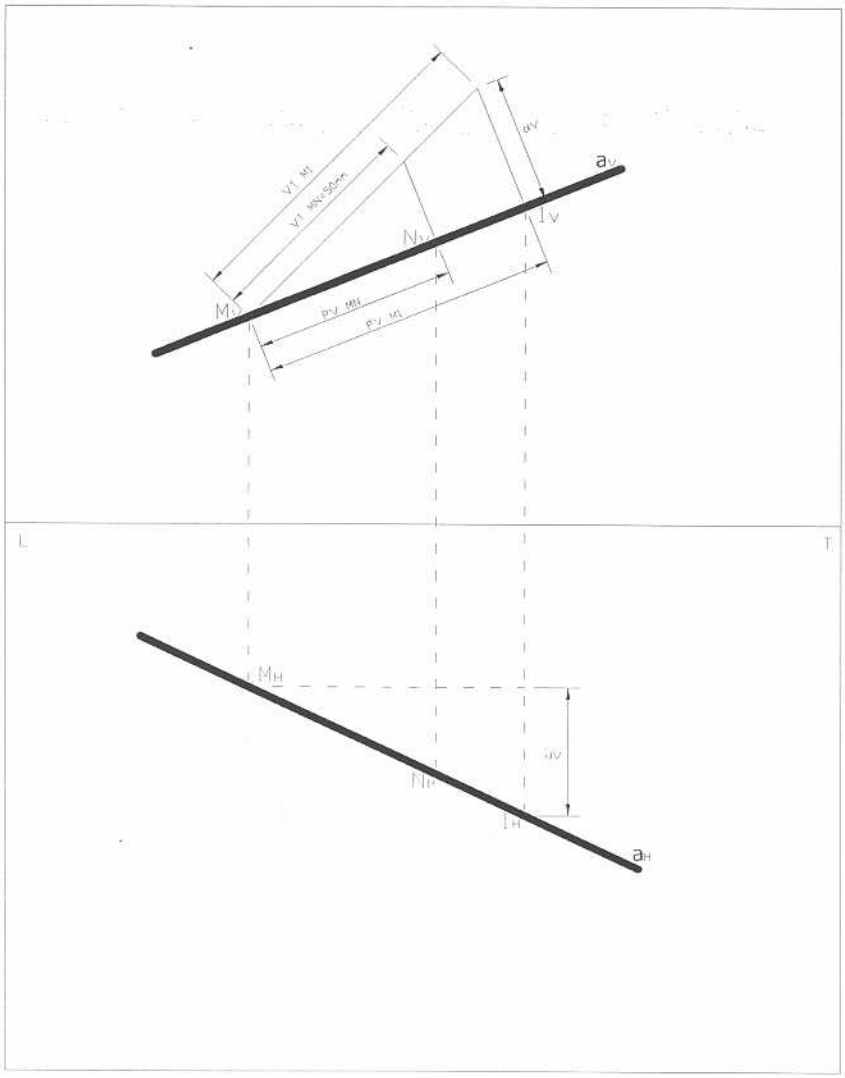
3.- Determinar el segmento MN conocido el punto "M", sabiendo que mide (VT) 50mm y que "N" se encuentra más alto (mayor cota) 20mm y más adelante (mayor vuelo) 35mm que "M". (Dos soluciones: N a la derecha o a la izquierda de M)

Conocidos los parámetros de dC y dV, se construyeron sendos triángulos utilizando los arcos capaces de los ángulos rectos correspondientes al VT (50mm) del segmento solicitado. Con esto se determinaron los parámetros de PH y PV. Éstos se llevaron a las proyecciones correspondientes desde el punto M observando las indicaciones de ubicación del punto N.



4.- Determinar el segmento MN sobre la recta a, conocido el punto M, sabiendo que mide (VT) 50mm y que N se encuentra a la derecha del punto M.

Conocidas las proyecciones de la recta a, se determina un triángulo de VT de un segmento cualquiera de la recta (M1). Como todos los triángulos de VT son semejantes, sobre la hipotenusa (VT) se lleva el tamaño real del segmento que se quiere determinar el cual es proyectado al construir el triángulo semejante.



TRIÁNGULOS DE VT DE RECTAS FRONTALES Y HORIZONTALES

En una recta horizontal todos los puntos tienen la misma cota. En el triángulo de VT que relaciona la PH el dC y el VT, El cateto dC será nulo por lo que el cateto PH y la hipotenusa VT coincidirán o sea la PH se verá en VT.

Iguales consideraciones se podrá hacer para la PV de una recta frontal, que se verá en VT.

Los triángulos de VT correspondientes a las otras proyecciones son absolutamente normales tal como los que correspondería a una recta cualquiera.

PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Rectas que se cortan y rectas que se cruzan	• Rectas que se cortan. Condiciones proyectivas • Rectas que se cruzan. Condiciones proyectivas • Rectas paralelas. Condiciones proyectivas • Ángulo de dos recta que se cortan o se cruzan • Trazado de rectas que se corten con otra en un ángulo dado

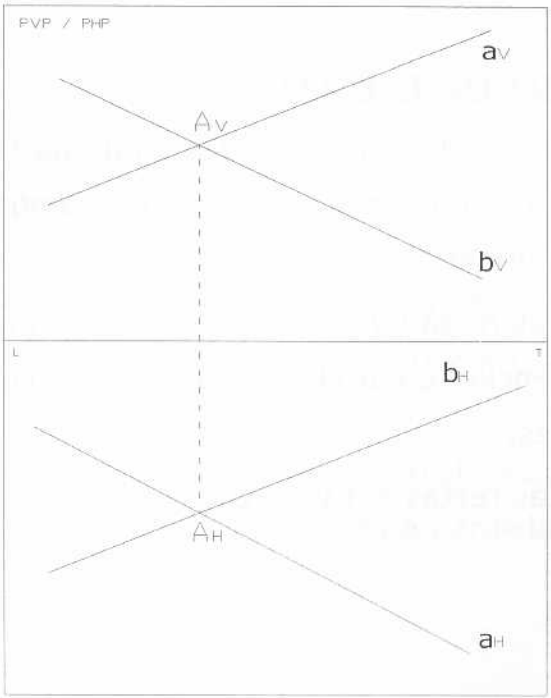
POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS

En el espacio dos rectas pueden tener o no tener un punto en común. Si tienen un punto en común, de acuerdo a la definición adoptada de que un punto es una "posición en el espacio", significa que ambas rectas pasan por esa misma posición o sea que se intersectan o SE CORTAN.

Si no tienen ningún punto en común, pueden ser PARALELAS, cuando la distancia entre ellas es constante, o pueden CRUZARSE si la distancia varia.

RECTAS QUE SE CORTAN

Como se mencionó, dos rectas que se cortan pasan por una misma posición en el espacio, o sea un mismo PUNTO. En consecuencia ambas rectas deberán tener sobre ellas el mismo punto, en el espacio y por consiguiente en cada proyección.



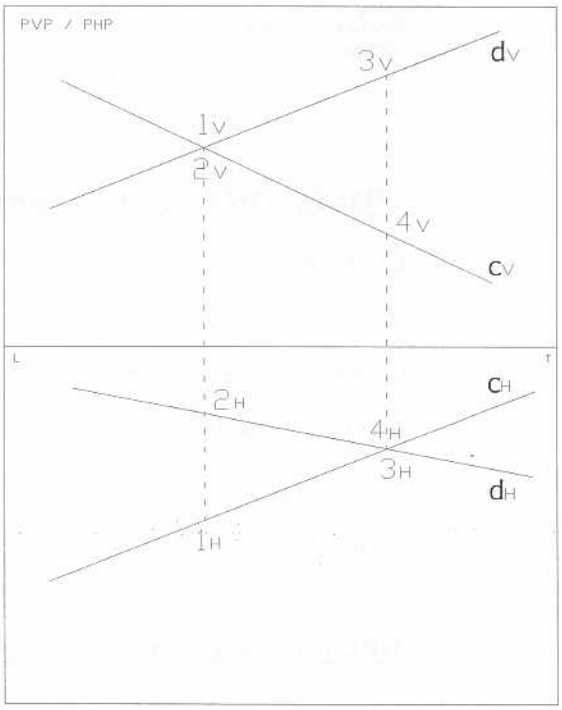
Las rectas a y b, en la figura, tienen en común el punto A, en efecto la PV (A_V) se ubica sobre las PV's de ambas rectas (a_V; b_V). Por otra parte la PH (A_H) se ubica sobre las PH's de ambas rectas (a_H; b_H).

RECTAS QUE SE CRUZAN

Son rectas que no tienen puntos en común y la distancia entre ellas no es constante.

Las rectas c y d aparentemente tienen en común los puntos 1 y 2 al ser observadas en la PV, o los puntos 3 y 4 si se observan en la PH.

Sin embargo al observar la otra proyección de las rectas se infiere que aunque coinciden en PV (1 y 2) o en PH (3 y 4) en la otra proyección no coinciden o sea en ambos casos se trata de puntos diferentes. Las rectas c y d no tiene puntos en común. Las rectas c y d SE CRUZAN.

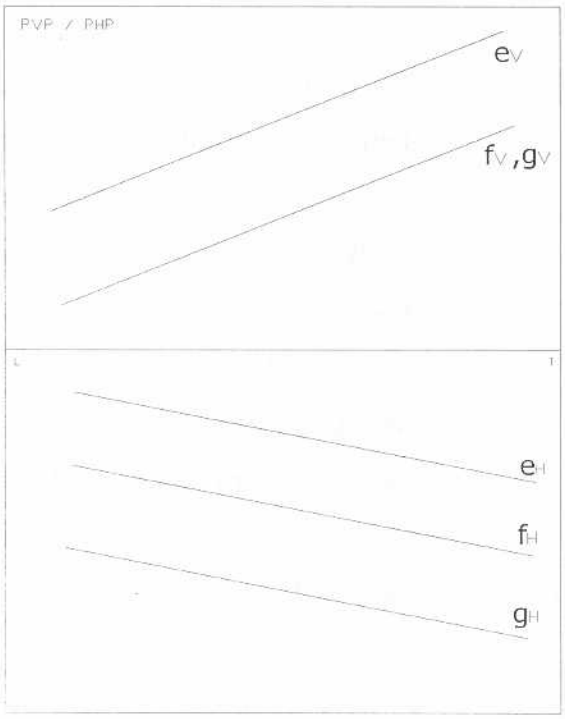


RECTAS PARALELAS

Las rectas e, f y g además de no tener puntos en común sus proyecciones, ambas respectivamente, son paralelas.

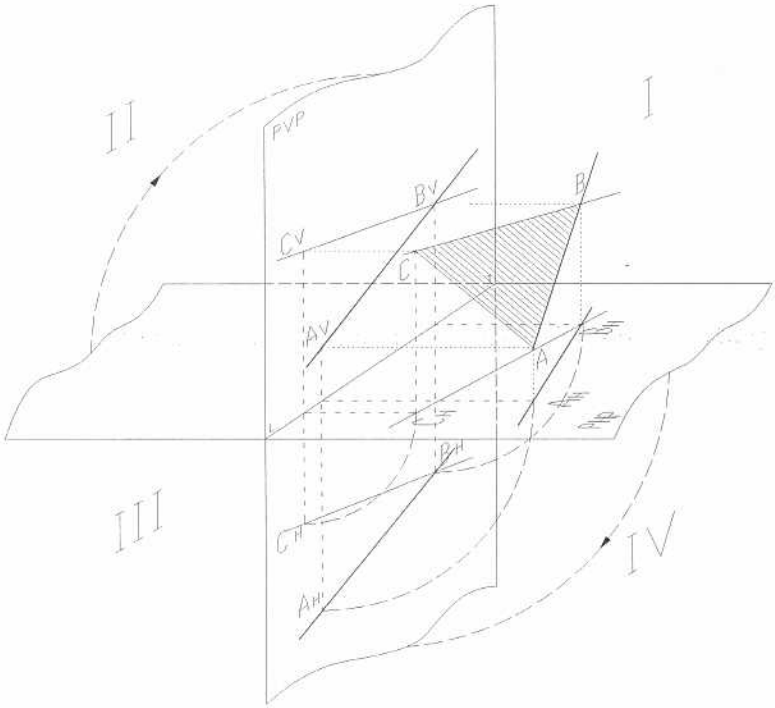
Las recta f y g, aunque coinciden en PV se diferencian en la PH, o sea son dos rectas diferentes.

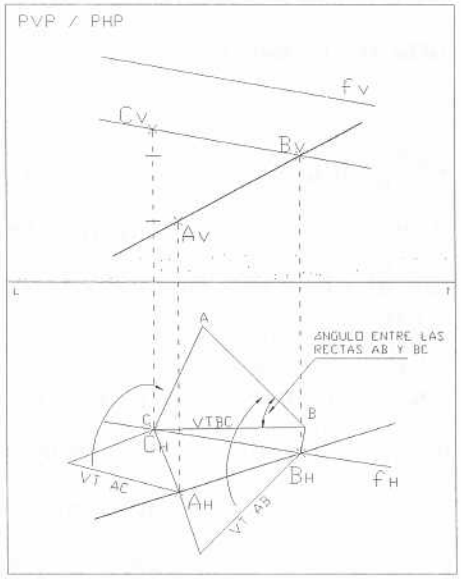
Las rectas e, f y g SON PARALELAS



ÁNGULO DE DOS RECTAS QUE SE CORTAN O SE CRUZAN

Los puntos A; B y C, definen dos rectas que se cortan. El caso que se muestra se tienen las rectas AB y BC, que se cortan en el punto B.





Si se consideran los segmentos AB; AC y BC se podrán determinar los VT de dichos segmentos. Teniendo las verdaderas dimensiones de estos segmentos se podrá trazar el triángulo ABC. En este triángulo el ángulo interno en B será el ángulo (VT) que forman las rectas AB y BC.

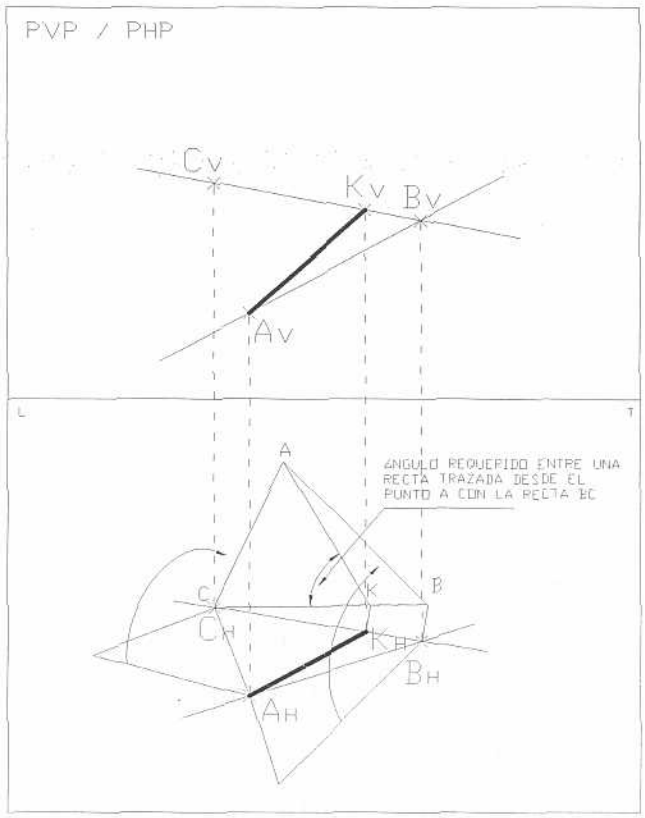
La recta f no se corta con la recta AB, pero se puede definir una recta BC, que si se corte y tal que sea paralela a f. El ángulo que forman esta paralela a f (BC) con la recta AB será el que forma f con AB.

DEFINICIÓN DE RECTAS QUE SE CORTAN FORMANDO UN ÁNGULO DADO

El problema planteado es definir las proyecciones de una recta, trazada por un punto conocido, tal que se corte con otra recta en un ángulo dado.

En la figura adjunta se conocen las proyecciones de la recta BC y del punto A. Se pide determinar un punto K, sobre BC tal que el ángulo AKC sea de una dimensión dada.

El problema se puede resolver aplicando un procedimiento similar al utilizado para la determinación del ángulo que forman dos rectas que se cortan. Conocidos los puntos ABC, se puede encontrar en sus dimensiones reales (VT) dicho triángulo. Definido el mismo se traza una recta que pase por A y se corte con BC formando el ángulo solicitado. Se define así el punto K, el cual puede ser proyectado sobre BC.

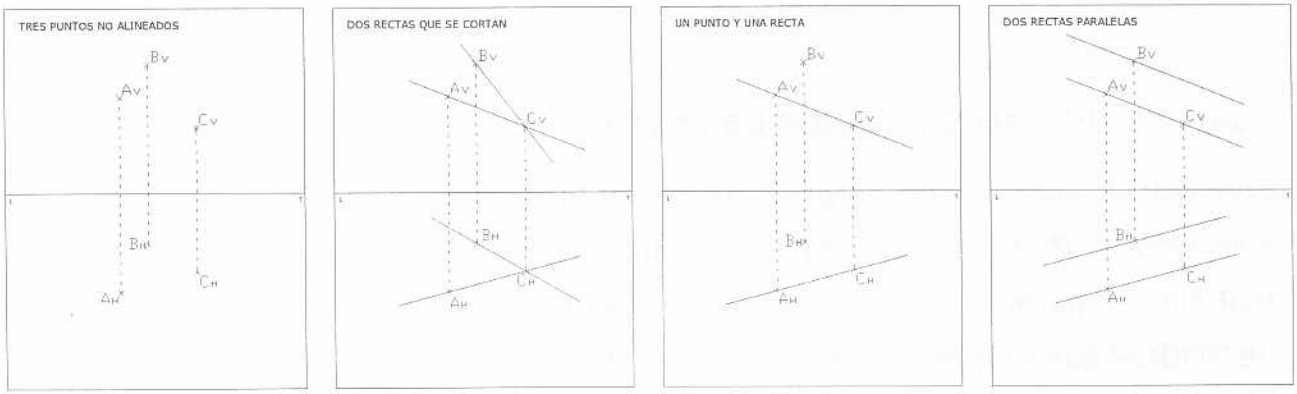


Este procedimiento es particularmente útil para la definición de rectas perpendiculares a otra conocida.

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
DPO de planos	• Proyección de planos cualesquiera • Planos horizontales y planos frontales. El PHP y el PVP • Planos verticales y planos de canto • Planos de perfil • Proyección girada o rebatida de planos de perfil • Rectas particulares pertenecientes a planos en posiciones particulares

PROYECCIÓN DE PLANOS CUALESQUIERA

Las proyecciones de un plano NO SE PUEDEN *"VER"* por si mismas. Por ser infinitos en extensión se proyectarán, sobre otro plano como la proyección de todos sus puntos y ocupará TODOS los puntos del plano de proyección. Sin embargo las proyecciones de un plano quedarán definidas por las proyecciones de elementos que lo forman: 3 puntos no alineados, dos recta que se cortan, una recta y un punto externo a ella o dos rectas paralelas. También se podrán definir por la proyección de algunas rectas particulares, tales como las rectas de máxima pendiente o de máxima inclinación, como se verá más adelante.

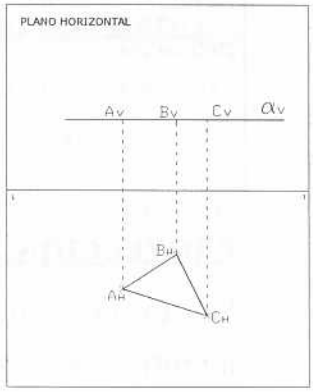


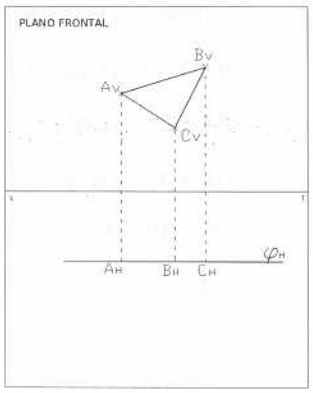
PROYECCIÓN DE PLANOS EN POSICIONES PARTICULARES

Las proyecciones de planos ubicados en posiciones particulares se realiza mediante la proyección de su o sus rectas de intersección con los planos de proyección (Trazas).

PLANOS HORIZONTALES Y PLANOS FRONTALES

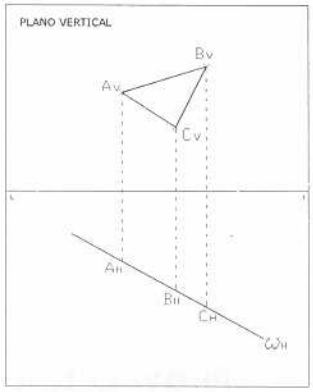
Son aquellos que son respectivamente paralelos al PHP o al PVP. Si se considera un segmento en un plano con esas características este segmento será según el caso horizontal o frontal y la dimensión de su proyección (PH o PV) será igual a la dimensión del segmento en el espacio. Por extensión la proyección (PH o PV) de un conjunto de segmentos que formen una determinada figura también será en dimensiones igual a la figura en el espacio. En la otra proyección (PV o PH) TODOS los puntos proyectados estarán sobre la TRAZA correspondiente. Evidentemente el PHP y el PVP son planos horizontal y frontal respectivamente pero sus trazas se ubican sobre LT, luego su PV o PH según el caso se ubicará sobre LT.



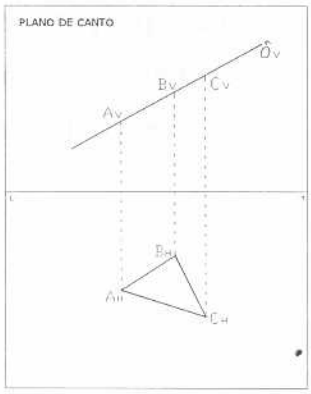


PLANOS VERTICALES Y PLANOS DE CANTO

Son VERTICALES si son perpendiculares al PHP pero no son paralelos al PVP. Son de CANTO si son perpendiculares al PVP sin ser paralelos al PHP. Respectivamente la proyección de TODOS sus puntos sobre el PVP o el PHP estará sobre la TRAZA correspondiente (PV o PH).



Sobre el otro plano (PHP o PVP) la proyección de una figura NO será en dimensiones igual al objeto en el espacio al no ser paralelos los planos. Por supuesto se exceptúan las rectas que perteneciendo a uno de estos planos sea horizontal o frontal.



PLANOS DE PERFIL Son perpendiculares a ambos PHP y PVP. En todos estos planos la o las proyecciones correspondientes se verán sobre las TRAZAS del plano en los planos de proyección. Estas trazas coincidirán con las líneas de referencia (perpendiculares a LT) de todos los puntos ya que la distancia lateral de los mismos es constante.

GIRO O REBATIMIENTO DE PLANOS DE PERFIL

Las proyecciones de figuras contenidas en planos de PERFIL al estar confundidas con las Líneas de Referencia se hace muy difícil para trabajar con las mismas. Sin embargo si se GIRA o se REBATE el plano (perfil) hasta que coincida o se haga paralelo al PVP o al PHP, se podrá observar la figura como se vería en un plano Frontal o en un plano Horizontal.

Este GIRO debe suponer que la posición relativa de los puntos de la figura se mantenga. Si se gira hasta que el plano de perfil se haga paralelo o coincida con el PVP, se conservarán las COTAS de cada punto y las diferencias de VUELO con otros puntos. Si se gira hasta que el plano de perfil se haga paralelo o coincida con el PHP, se conservarán los VUELOS de cada punto y las diferencias de COTA con otros puntos.

Es conveniente girar los planos de perfil 90° hasta hacerlos coincidir con uno de los planos de proyección, o un plano paralelo a éstos. Si el centro de giro se coloca sobre la LT el rebatimiento será sobre uno de los planos de proyección.

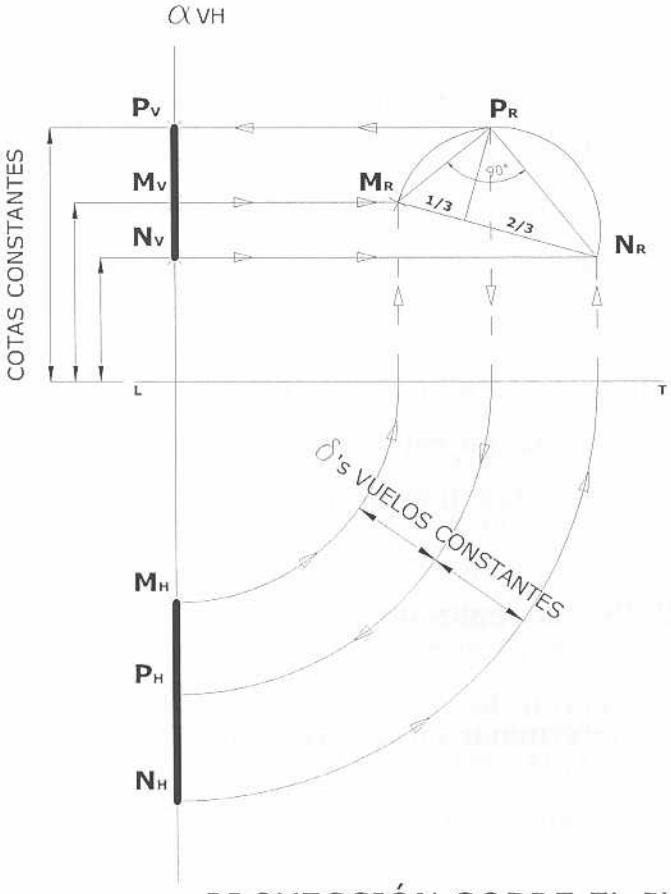
En todo caso el giro de cada punto DEBE ser realizado en el mismo sentido para todos.

El relevo de los puntos que se puedan determinar en la proyección girada o rebatida será en el sentido contrario.

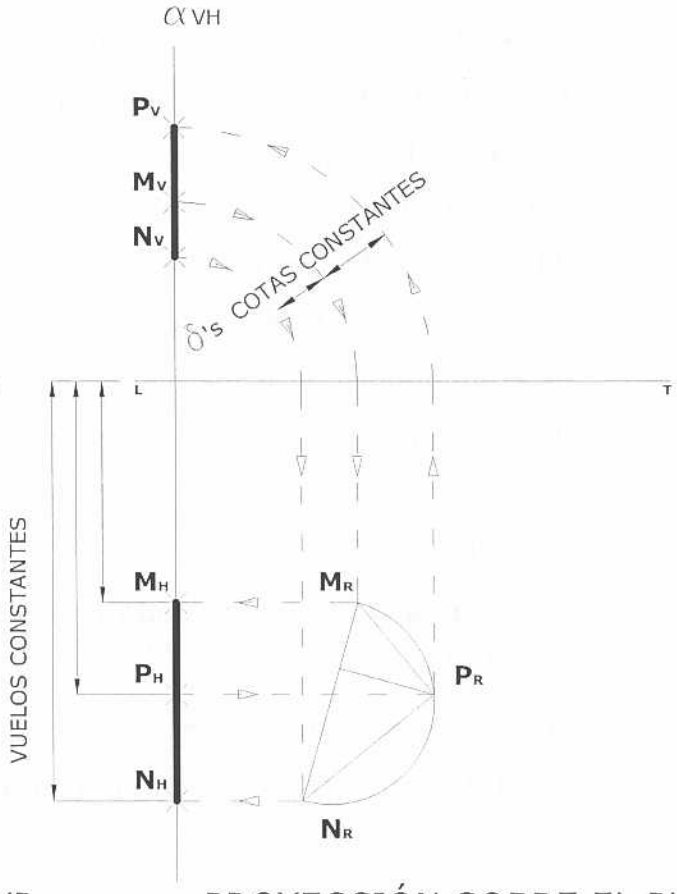
Problema: *Determinar en DPO las proyecciones del triángulo rectángulo MNP contenido en el plano de perfil α, sabiendo que la altura sobre la hipotenusa (MN) la divide en dos segmentos cuya razón es ½. Se conocen las trazas del plano α, y los puntos M y N. P es el vértice de mayor cotas del triángulo.*

Se muestran dos soluciones girando sobre el PVP y el PHP.

Se giran los puntos M y N (conocidos) conservando los vuelos o las cotas constantes según el caso. En la proyección girada se determina el punto P en el LG de los ángulos rectos de los triángulos cuya hipotenusa es MN. Determinado P, se encuentran sus proyecciones realizando el relevo del mismo



PROYECCIÓN SOBRE EL PVP



PROYECCIÓN SOBRE EL PH

RECTAS PARTICULARES PERTENECIENTES A PLANOS PARTICULARES

HORIZONTALES, FRONTALES Y VERTICALES EN UN PLANO DE CANTO

Una recta horizontal es paralela al PHP (cota constante). una recta horizontal de un plano de canto necesariamente será una recta de punta.

Una recta frontal es paralela al PVP (vuelo constante). La PH se verá como una recta paralela a LT y en PV confundida con la PV del plano.

Una recta vertical o de pié es perpendicular al PHP. NO EXISTIRÁ ninguna recta que sea perpendicular al PHP en un plano de canto, que no sea un plano de perfil.

HORIZONTALES, FRONTALES Y DE PUNTA EN UN PLANO VERTICAL

Una recta frontal es paralela al PVP (vuelo constante). Una recta frontal de un plano vertical necesariamente será una recta de pié o vertical.

Una recta horizontal es paralela al PHP (cota constante). La PV se verá como una recta paralela a LT y en PH confundida con la PH del plano.

Una recta punta es perpendicular al PVP. NO EXISTIRÁ ninguna recta que sea perpendicular al PVP en un plano vertical, que no sea un plano de perfil.

PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
DPO de planos	• Condiciones para que un punto pertenezca a un plano • Condiciones para que una recta pertenezca a un plano • Recta paralela a un plano • Planos paralelos a otros planos • Determinar puntos y rectas específicas, sabiendo que pertenecen a un plano • Determinar puntos específicos, sabiendo que pertenecen a un plano • Determinar las trazas de un plano

CONDICIONES PARA QUE UN PUNTO PERTENEZCA A UN PLANO

Si un punto pertenece a un plano existirán infinitas rectas que pertenecerán al plano y pasarán por el punto. Todas esas rectas se cortarán en ese punto. Si una recta pertenece a un plano los infinitos puntos que pertenecen a la recta pertenecerán al plano. Luego bastará determinar que el punto pertenezca a una de esas infinitas rectas para poder afirmar que pertenece al plano.

CONDICIONES PARA QUE UNA RECTA PERTENEZCA A UN PLANO

Primer Postulado de Euclides:

"Dados dos puntos se puede trazar una y sólo una recta que los una"

Luego si se definen dos puntos que pertenezcan a un plano dado la recta que definen dichos dos puntos pertenecerá al plano.

RECTAS PARALELAS A UN PLANO

Los planos y las rectas son infinitos en extensión. Si no fuesen paralelos existirá un punto en el plano que a la vez sea de la recta. O sea existirá un punto donde la recta penetra al plano. Si desde dos puntos de la recta se trazan perpendiculares al plano, estas perpendiculares penetrarán al plano, la recta que pasa por esos puntos de penetración pertenecerá al plano por tener dos puntos sobre dicho plano. Si las distancias (perpendiculares) no son iguales, disminuirán en longitud hacia uno de los sentidos de la recta hasta que se haga nula, justo en el puno de intersección de las rectas. Si son iguales no cambiarán en ninguno de los sentidos de la recta y ambas rectas serán paralelas. O sea la recta en el plano será paralela a la recta externa. Bastará demostrar que una recta es paralela a una recta del plano para poder concluir o demostrar que dicha recta es paralela al plano.

PLANOS PARALELOS A OTROS PLANOS

Si en un plano dado existen dos rectas que se corten y que a la vez sean paralelas a rectas en otro plano. Ninguna de las rectas de uno de los planos penetrará al otro plano. Los planos serán paralelos.

DETERMINAR PUNTOS Y RECTAS ESPECÍFICAS, SABIENDO QUE PERTENECEN A UN PLANO

En todos los casos se trata de comprobar que un punto pertenece a una recta del plano o una recta tiene dos puntos que pertenecen al plano.

DETERMINAR LAS TRAZAS DE UN PLANO

La TRAZA de un plano se define como la intersección de dicho plano con uno de los planos de proyección. Traza Vertical con el PVP y Traza Horizontal con el PHP.

Dos puntos de un plano cuya COTA sea nula (cero) definirán una recta del plano que a su vez es del PHP. Será la TRAZA HORIZONTAL, como quiera que las cotas de los puntos de dicha recta es cero, la PV de dicha recta se confundirá con LT. La PH no tendrá límites en su localización, salvo que coincidan con las PH de rectas del plano.

Dos puntos de un plano cuyo VUELO sea nulo (cero) definirán una recta del plano que a su vez es del PVP. Será la TRAZA VERTICAL, como quiera que los vuelos de los puntos de dicha recta es cero, la PH de dicha recta se confundirá con LT. La PV no tendrá límites en su localización, salvo que coincidan con las PV de rectas del plano.

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Planos paralelos a LT	• Propiedades y proyección de los planos paralelos a la línea de tierra • Planos que pasan por la línea de tierra • Planos bisectores • Planos paralelos a los planos bisectores

PLANOS PARALELOS A LA LÍNEA DE TIERRA

Además de los planos horizontales y los planos frontales, existen otros planos que son paralelos a LT.

Por no ser ni horizontales ni frontales necesariamente se cortarán con con ambos, el PHP y el PVP.

Las trazas serán necesariamente paralelas a LT.

Las rectas horizontales o frontales en estos planos necesariamente serán frontales-horizontales y sus proyecciones (ambas) serán paralelas a LT y se verán en VT.

Por formar un ángulo cualquiera con el PHP y el PVP, las proyecciones de segmentos que les pertenezcan, salvo los horizontales-frontales, NO se verán en VT.

Las rectas de perfil tendrán las mismas características de TODAS las rectas de perfil.

No podrán existir rectas de punta (perpendiculares a PVP) ni verticales (perpendiculares al PHP)

PLANOS QUE PASAN POR LA LÍNEA DE TIERRA

Además del PHP y del PVP, existirán otros planos que pasarán por la LT.

En estos planos las trazas se confunden con la LT (ambas proyecciones).

Las rectas horizontales o frontales en estos planos necesariamente serán frontales-horizontales y sus proyecciones (ambas) serán paralelas a LT y se verán en VT.

Por formar un ángulo cualquiera con el PHP y el PVP, las proyecciones de segmentos que les pertenezcan, salvo los horizontales-frontales, NO se verán en VT.

Las rectas de perfil tendrán las mismas características de TODAS las rectas de perfil.

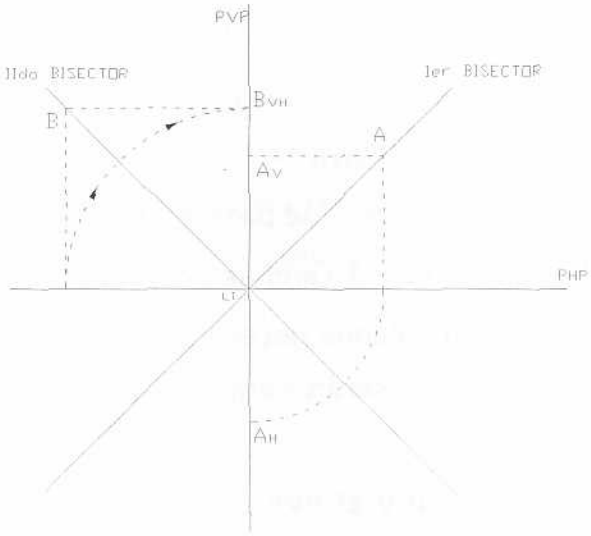
No podrán existir rectas de punta (perpendiculares a PVP) ni verticales (perpendiculares al PHP)

PLANOS BISECTORES

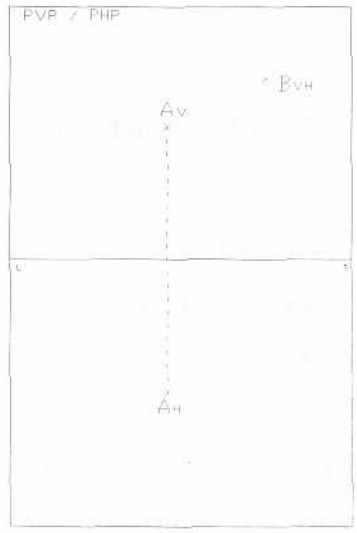
Son planos pasan por la LT y bisecan a los diedros I y III (PRIMER BISECTOR) y a los diedros II y IV (SEGUNDO BISECTOR).

Los puntos de ambos bisectores, por ser éstos los planos bisectrices de los diedros, tendrán, en cada caso igual COTA que VUELO.

Los del Ier Bisector por ser puntos del I o III Diedro, tendrán proyecciones ubicadas a ambos lados de LT, pero como COTA=VUELO, estos puntos tendrán proyecciones simétricas. Este plano se denomina también PLANO DE SIMETRÍA. Las proyecciones de rectas que pertenecen al I Bisector, serán simétricas respecto a la LT, luego se cortarán sobre LT. Los del II^{do} Bisector por ser puntos del II o IV Diedro, tendrán proyecciones ubicadas a un mismo lado de LT, como COTA=VUELO, estos puntos tendrán proyecciones coincidentes. Este plano se denomina también PLANO DE COINCIDENCIA. Las proyecciones de rectas que pertenecen al II Bisector se confunden.



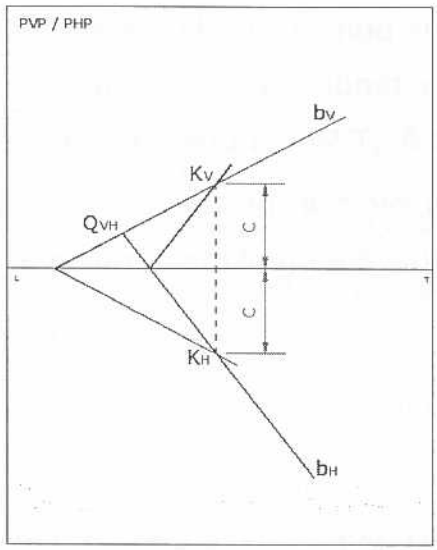
VISTA LATERAL



DPO

TRAZA DE UNA RECTA CON LOS PLANOS BISECTORES

Dada una recta cualquiera, la traza de dicha recta con el Ier Bisector será un punto de la recta que tenga COTA=VUELO y sus proyecciones sean simétricas según la LT.

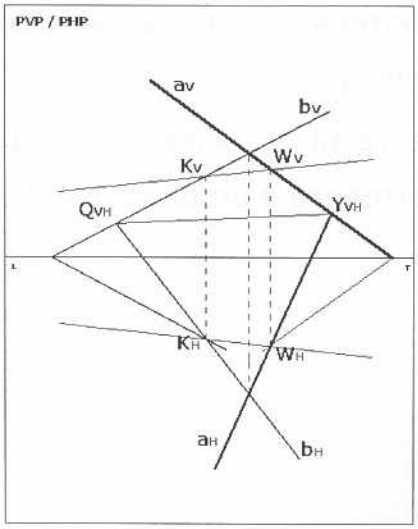


Para encontrar dicho punto sobre la recta se traza una recta simétrica a una cualquiera de las proyecciones, teniendo LT como el eje de simetría. El punto de intersección de esta simétrica con la otra proyección de la recta (K) es el punto buscado.

La traza de una recta con el II^{do} Bisector será un punto de la recta que tenga COTA=VUELO y sus proyecciones sean coincidentes. Para encontrar dicho punto bastará prolongar las proyecciones hasta que se corten, ese punto de corte (Q) es el punto buscado.

TRAZAS DE UN PLANO CON LOS PLANOS BISECTORES

Conocidas dos rectas de un plano se determinarán las trazas de dichas rectas que definirán las trazas del plano

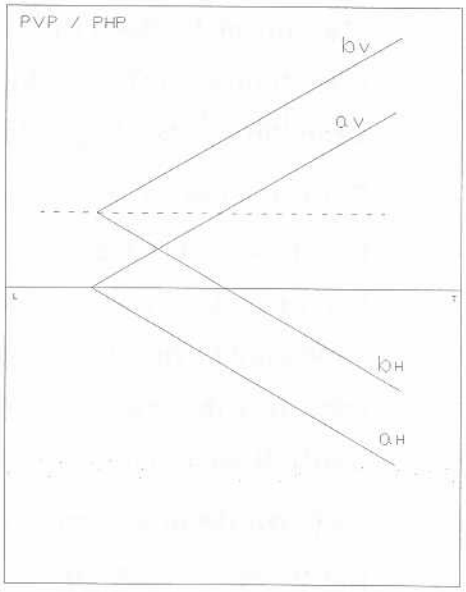


En el plano ab, la recta QY, cuyas proyecciones coinciden, es la traza de ab en el II Bisector. La recta FW, cuyas proyecciones son simétricas, es la traza de ab en el I Bisector. Las proyecciones de KW, DEBEN cortarse sobre la LT

PLANOS PARALELOS AL PRIMER BISECTOR

Los puntos de planos que sean paralelos al I Bisector tendrán proyecciones simétricas pero no respecto a LT sino a una paralela a ella.

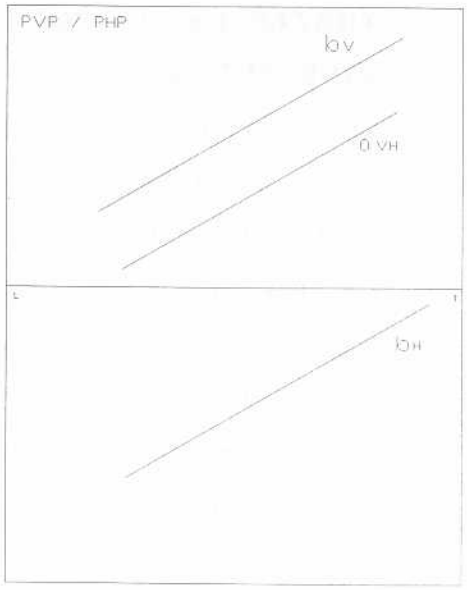
La recta a, pertenece al I Bisector. La recta b, pertenece a un plano paralelo al I Bisector.



PLANOS PARALELOS AL SEGUNDO BISECTOR

Los puntos de planos que sean paralelos al II Bisectores tendrán proyecciones paralelas no coincidentes.

La recta a, pertenece al II Bisector. La recta b, pertenece a un plano paralelo al II Bisector.



OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Intersección de rectas con planos y planos con planos	• Punto de penetración de una recta en un plano • Intersección de recta con casos particulares de planos • Intersección de recta con planos cualquiera • Planos paralelos. Condiciones • Planos que se cortan. Cómo encontrar la recta de intersección

PUNTO DE PENETRACIÓN DE UNA RECTA EN UN PLANO

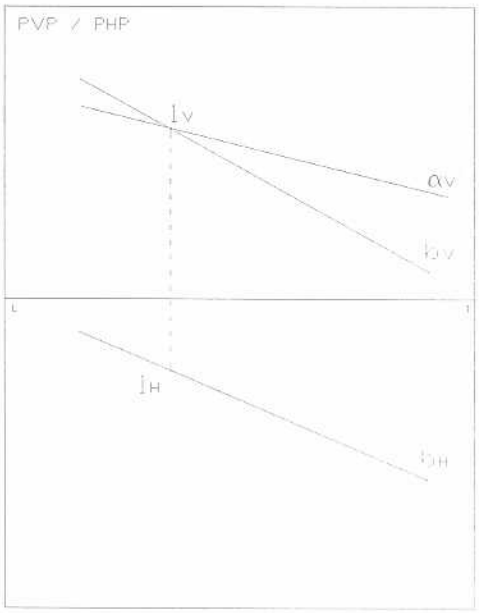
Si una recta no es paralela a un plano, por ser ambos de extensión infinita, en algún punto coincidirán, o sea tendrán un punto común. Ese punto común será el punto de penetración o intersección de la recta en el plano.

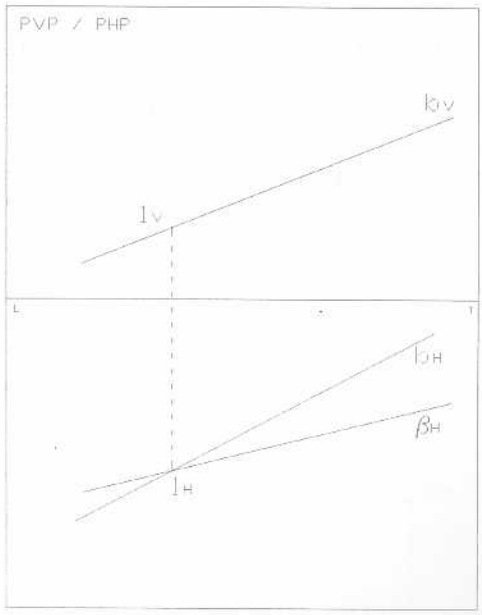
En DPO la determinación de ese punto común requerirá procedimientos diferentes de acuerdo al tipo de plano y/o recta que se trate.

PENETRACIÓN DE UNA RECTA EN UN PLANO DE CANTO O EN UN PLANO VERTICAL

Considérese, en cada caso, el plano de canto α o el plano vertical β. El punto 1 pertenece a la recta b. En el primer caso, por estar sobre la proyección vertical del plano de canto α, también pertenecerá a dicho plano.

En el segundo, en forma análoga, se podrá decir que pertenece a la recta b y



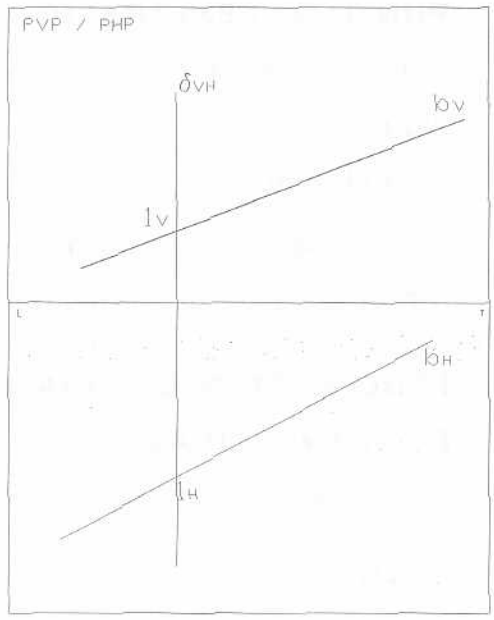


al plano vertical β. El punto 1 será el punto de penetración de la recta b en uno u otro plano.

PENETRACIÓN DE UNA RECTA EN UN PLANO DE PERFIL

En el caso de penetración de una recta en un plano de perfil, la solución es directa.

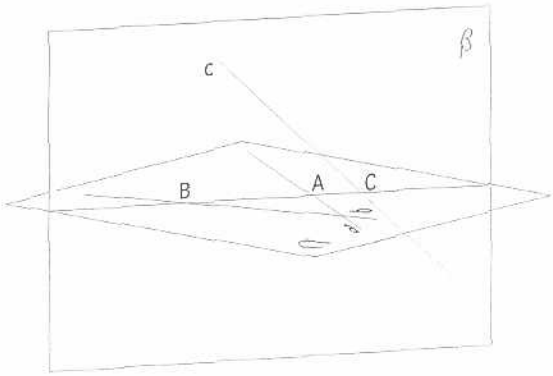
En efecto, el punto se ubicará sobre la recta y sobre el plano, que por ser de perfil coincidirá, en ambas proyecciones con las líneas de referencia. El punto 1 es el punto de penetración de la recta b en el plano de perfil δ

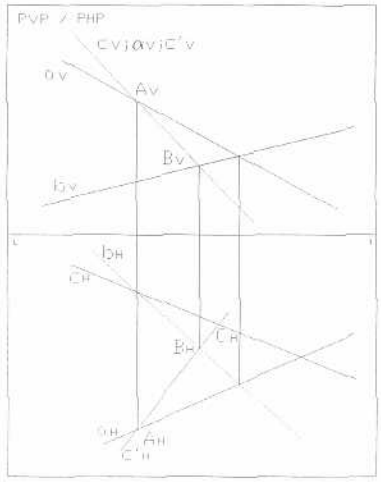


PENETRACIÓN DE UNA RECTA EN UN PLANO CUALQUIERA

Sea el plano cualquiera α definido por las rectas que se cortan (ab) y la recta c que es externa, no paralela al plano.

Considérese un plano de canto (β), cuya PV coincida con la PV de la recta c, o sea esta c recta pertenecerá a dicho plano. Los puntos A y B serán los puntos





de penetreación de las rectas a y b en el plano β. La recta c' que pasa por los puntos A y B, pertenecerá tanto al plano α (ab) como al plano de canto β , por tanto es la intersección de ambos planos. Pero como ambas recta c y c' pertenecen al plano β, deberán cortarse en algún punto. Ese punto (C) pertenece a ambas rectas y como c' pertenece al plano α (ab), C es el punto común de la recta c y del plano ab. Es el punto de penetración o intersección de la recta (c) y del plano α(ab).

Este procedimiento puede ser aplicado utilizando un plano vertical que contenga la recta (c) que se quiere penetrar, en lugar del plano de canto.

Si la recta c' resultare paralela a la recta c, significaría que la recta c es paralela al plano ab, por lo que NO EXISTIRÍA ningún punto de penetración de la recta en el plano.

INTERSECCIÓN DE PLANOS NO PARALELOS

Si dos planos no son paralelos, por tener una extensión infinita se cortarán según una recta. Esta intersección se podrá determinar encontrando la penetración de dos rectas de uno de ellos en el otro plano, o rectas de uno u otro de los planos en el otro.

PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Perpendicularidad	• Perpendicularidad u ortogonalidad. Condiciones. Convención de nombres • Plano normal a una recta. LG de las rectas ortogonales a otra recta. Planos perpendiculares a una misma recta. Condiciones

PERPENDICULARIDAD U ORTOGONALIDAD

Perpendicular *(Del lat. perpendicularis) Adj. Geom. Dicho de una línea o un plano. Que forma ángulo recto con otra línea u otro plano*

Ortogonal *(ortogonio) Que está en ángulo recto.*

Normal *(Del lat. normalis) Geom. Dicho de una recta o un plano perpendicular a un plano o a una recta.*

Las dos primeras definiciones tienen el mismo significado. Pero al hablar de rectas, algunos autores prefieren el término ortogonal para aplicarlo a rectas que estando en ángulo recto NO SE CORTAN y el perpendicular para los casos cuando las líneas SE CORTAN.

El término normal se emplea para nombrar a la recta que es perpendicular a un plano o al plano que es perpendicular a una recta, de acuerdo a su definición. Aunque también es común utilizar el término perpendicular en ambos casos.

RECTAS ORTOGONALES A OTRA RECTA. PLANO NORMAL A UNA RECTA

El LG de las rectas perpendiculares u ortogonales a otra recta es un plano perpendicular a dicha recta.

TODAS las rectas de dicho planos serán perpendiculares a la otra recta y por tanto ésta será perpendicular a TODAS las rectas de dicho plano.

RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO. PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA

Una recta perpendicular a un plano es perpendicular a TODAS las rectas de dicho plano. Para definirla bastará que sea perpendicular u ortogonal a dos

rectas NO PARALELAS (que se corten) del plano. Las rectas perpendiculares a un plano o a planos paralelos son PARALELAS entre si

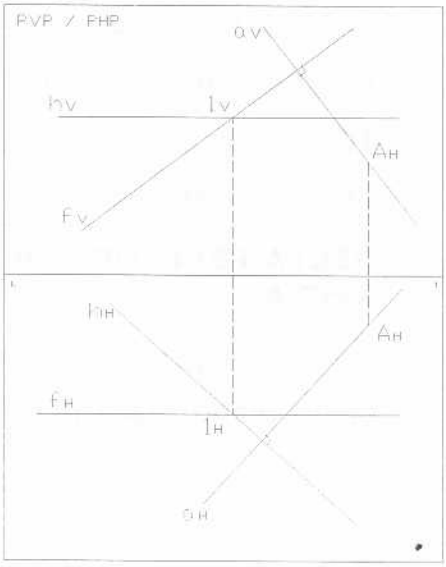
Se podrá definir un plano perpendicular a una recta, cuando dicho plano contenga a dos rectas no paralelas o que se corten que sean perpendiculares a la otra recta. Los planos perpendiculares a una recta o a rectas paralelas son PARALELOS entre si

DPO DE RECTAS PERPENDICULARES A PLANOS

La perpendicularidad u ortogonailidad NO SON invariables proyectivos. Luego en general NO SE CONSERVARÁ en DPO u otra proyección, SÓLO se conservará cuando sea perpendicular a una recta paralela al plano de proyección. En DPO se verá perpendicular en PH cuando lo sea a una recta horizontal y se verá perpendicular en PV cuando lo sea a una recta frontal. Esta cualidad de las proyecciones serán de gran utilidad para definir planos y recta perpendiculares entre si.

Comoquiera que para que una recta sea perpendicular a un plano bastará que lo sea a dos rectas cualesquiera que se corten de dicho, se podrá definir una recta perpendicular a un plano haciéndola perpendicular a una recta horizontal del plano que se corte con una recta frontal también del mismo plano. Las proyecciones (DPO) de la recta perpendicular se "verá" perpendicular a la recta horizontal en la PH y a la frontal en PV.

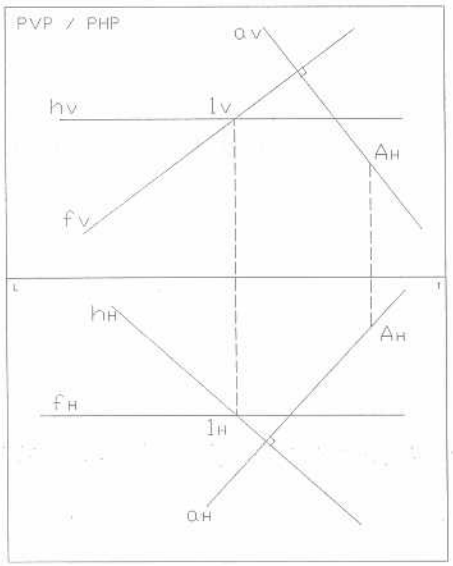
Considérense el plano definido por las recta f y h que se cortan en el punto 1, por otra parte considérese la recta a que pasa por el punto A. La a_V se ve perpendicular a f_V y, a_H se ve perpendicular a h_H. La recta a es perpendicular al plano fh por ser perpendicular a dos de sus rectas que se cortan.



LG DE LAS RECTAS PERPENDICULARES A OTRA RECTA

Considérese la recta a que pasa por el punto A.

Determínese el LG de las rectas perpendiculares a la recta a que pasan por el punto 1.

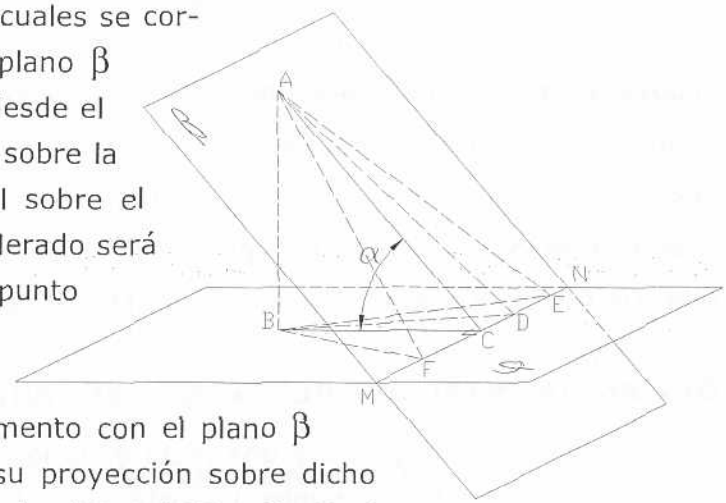


Por el punto 1 se traza una recta horizontal (h) de tal suerte que h_H se vea perpendicular a a_H. También se traza una recta frontal (f) de tal suerte que f_V sea perpendicular a a_V, el plano definido por las rectas h y f será perpendicular a la recta a y como una recta perpendicular a un plano lo es a TODAS las rectas del plano, todas las rectas del plano, que pasen por el punto 1 definirán el LG solicitado.

PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Perpendicularidad	• Rectas de máxima pendiente y máxima inclinación • Ángulos que forma un plano con los planos de proyección. • Ángulos de un plano con los planos de proyección • Distancia entre dos rectas que se cruzan (Perpendicular común)

RECTAS DE MÁXIMA PENDIENTE DE UN PLANO RESPECTO DE OTRO



Considérense los planos β y φ los cuales se cortan según la recta MN. Sobre el plano β trácense varios segmentos, todos desde el punto A hasta puntos cualesquiera sobre la recta MN. La proyección ortogonal sobre el plano φ, de cada segmento considerado será el segmento comprendido entre el punto B, proyección de A sobre φ y el otro punto sobre la recta de intersección. El ángulo de cada segmento con el plano β será el que forma cada uno con su proyección sobre dicho plano φ. Todos los triángulos formados (ABC, ABF, ABD, Etc.) son rectángulos en B y todos tienen un cateto común (AB). En estos triángulos el que tiene el menor ángulo interno en A será el que tenga el menor cateto opuesto. El triángulo ABC es el que tiene menor ángulo en A, necesariamente será el que tiene MAYOR ángulo con el plano φ. AC será el segmento (recta) del plano β que tiene la MÁXIMA PENDIENTE respecto al plano φ, y α será el ángulo entre esta recta de máxima pendiente del plano β con el plano φ, será el ángulo que forman los planos β y φ.

Las rectas de máxima pendiente de un plano respecto a otro son las perpendiculares a la intersección de los dos planos.

DPO DE LAS RMP Y RMI

En DPO se define como RECTA DE MÁXIMA PENDIENTE (RMP) a la recta con mayor ángulo con el PHP. Será perpendicular a la recta de intersección del plano con el PHP, pero esta recta de intersección necesariamente será una recta horizontal que pertenecerá a ambos planos. Luego la RMP de un plano será perpendicular a sus rectas horizontales.

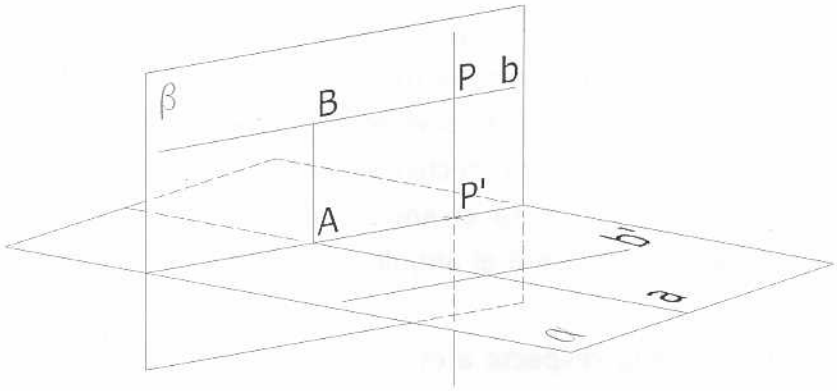
Por igual razonamiento la recta de un plano con el MAYOR ángulo con el PVP será la perpendicular a las FRONTALES del plano. Estas rectas, para distinguirlas de las perpendiculares a las horizontales (RMP), se llamarán RECTAS DE MÁXIMA INCLINACIÓN (RMI).

ÁNGULOS DE UN PLANO CON LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

El ángulo que forma una recta con un plano es el que forma dicha recta con su proyección sobre el plano. Como quiera las PMP y las RMI son en cada caso, perpendiculares a las correspondientes intersecciones con el PHP y el PVP, corresponderán al ángulo plano de la "sección normal" de los diedros formados entre el plano y los planos de proyección. Éstos serán los ángulos del plano con dichos planos de proyección. El ángulo de la RMP de un plano con el PHP será el ángulo de dicho plano con el PHP. De similar manera el ángulo de la RMI será el ángulo del plano con el PVP.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

La distancia entre un punto y una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta trazada desde el punto. La distancia entre dos rectas que se cruzan será la longitud del segmento que es perpendicular a ambas rectas. En la figura, a y b son dos rectas que se cruzan. La recta b' es una recta paralela a b que se corta con la recta a. El plano α, definido por la recta a y la recta b', es paralelo a la recta b por contener una recta paralela (b') y contiene a la recta a. Por un punto cualquiera de la recta b, se traza una perpendicular al plano α. Una perpendicular (normal) trazada a ese plano α será perpendicular a ambas rectas (a y b') y como una perpendicular a una recta lo será a todas sus paralelas esa perpendicular también lo será a la recta b. El punto P', penetración de esa perpendicular en α, determinará el segmento PP'. Este segmento desplazado paralelamente a si mismo, hasta que se corte con la recta a, determinará el segmento AB el cual será perpendicular a ambas rectas, o sea la perpendicular común que es el segmento de menor longitud que se puede trazar entre las rectas a y b.



OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Circunferencias	• DPO de la circunferencia • Proyecciones de una circunferencia en plano cualquiera • Proyecciones de una circunferencia en planos particulares • Puntos notables y tangentes en dichos puntos

CIRCUNFERENCIA

(DRAE) Curva plana, cerrada, cuyos puntos son equidistantes de otro, el centro, situado en el mismo plano.

En términos geométricos se puede definir como el LG de los puntos coplanares que equidistan de otro. Este otro punto puede ser o no coplanar con los definidos. Si es coplanar será el CENTRO de la circunferencia. Si no es coplanar podría ser, por ejemplo, el vértice de un cono recto.

DPO DE LA CIRCUNFERENCIA. CONCEPTOS GENERALES

Existen infinitos diámetros en una circunferencia, uno de esos diámetros será paralelo al PHP, o sea será una Recta Horizontal (RH) del plano que contiene a la circunferencia. La PH de ese diámetro se verá en VT por ser horizontal, Por tratarse de proyecciones ortogonales ese será el diámetro que se verá en la proyección con el mayor tamaño (longitud). Todos los demás diámetros se verán en menor tamaño en la proyección sobre el PHP. Una simple observación de la situación, permitirá inferir que el diámetro cuya proyección se verá en menor tamaño será el que corresponde a una perpendicular al diámetro horizontal. Como se trata de una horizontal y una recta perpendicular a dicha horizontal. La proyección sobre el PHP se verá conservando su perpendicularidad. O sea se verán dos diámetros de la circunferencia en PH perpendiculares entre si, uno el de mayor tamaño y el otro, el perpendicular, el de menor tamaño. La PH de esa circunferencia será una ELIPSE cuyo EJE MAYOR será la proyección del diámetro horizontal de la circunferencia y cuyo EJE MENOR

será la proyección de la perpendicular. Por ser perpendicular a una recta horizontal, será de hecho una Recta de Máxima Pendiente (RMP) del plano de la circunferencia.

De forma similar, estos razonamientos podrán ser aplicados a la PV de la circunferencia modificando cada parámetro convenientemente, por lo que: La PV de esa circunferencia será una ELIPSE cuyo EJE MAYOR será la proyección del diámetro frontal de la circunferencia y cuyo EJE MENOR será la proyección de la perpendicular. Por ser perpendicular a una recta frontal, será de hecho una Recta de Máxima Inclinación (RMI) del plano de la circunferencia.

En resumen:

El EJE MAYOR de la PH será una recta HORIZONTAL y se verá en VT en PH.

El EJE MENOR de la PH será una RMP y NO se verá en VT.

El EJE MAYOR de la PV será una recta FRONTAL y se verá en VT en PV.

El EJE MENOR de la PV será una RMI y NO se verá en VT.

PUNTOS NOTABLES

Se definen PUNTOS NOTABLES a los que se encuentran en posiciones determinadas consideradas como relevantes. Estos son:

PUNTOS MÁS ADELANTE Y MÁS ATRÁS Corresponden a los puntos de la circunferencia que tienen mayor y menor vuelo. Las tangentes en esos puntos serán rectas paralelas al PVP, o sea rectas FRONTALES. Los radios perpendiculares a dichas tangentes serán los que pasan por dichos puntos MÁS ADELANTE y MÁS ATRÁS, los radios serán perpendiculares a una recta frontal, de hecho una RMI, que como se dijo corresponde al EJE MENOR de la PH. Luego los puntos MÁS ADELANTE y MÁS ATRÁS, corresponderán a los extremos del eje menor de la PH.

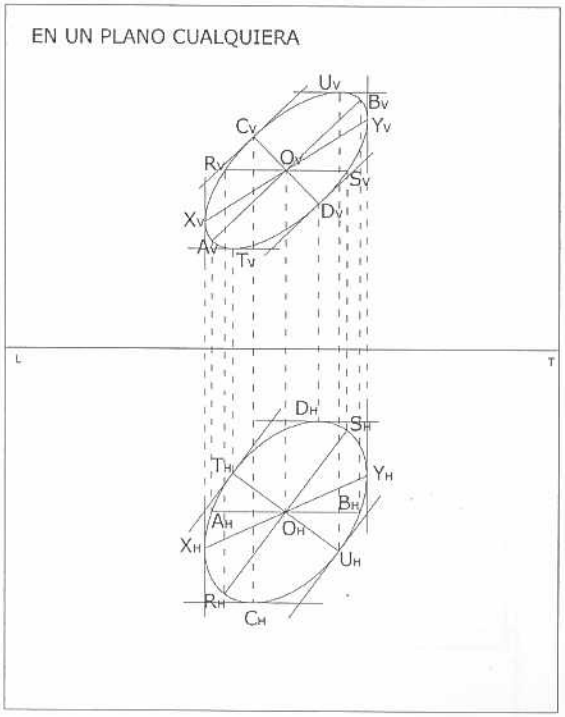
PUNTOS MÁS ARRIBA Y MÁS ABAJO Corresponden a los puntos de la circunferencia que tienen mayor y menor cota. Las tangentes en esos puntos serán

rectas paralelas al PHP, serán rectas HORIZONTALES. Los radios perpendiculares a dichas tangentes serán los que pasan por dichos puntos MÁS ARRIBA y MÁS ABAJO, al ser perpendiculares a una recta horizontal estarán sobre una RMP, que como se dijo corresponde al EJE MENOR de la PV. O sea los puntos MÁS ARRIBA y MÁS ABAJO son los extremos del eje menor de la PV.

PUNTOS MÁS A LA IZQUIERDA Y MÁS A LA DERECHA Corresponden a los puntos de la circunferencia que tienen mayor y menor distancia a la referencia de perfil. Las tangentes en esos puntos serán rectas paralelas a un plano de perfil, los radios por dichos puntos serán perpendiculares a las rectas de perfil del plano de la circunferencia.

PROYECCIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA SEGÚN EL PLANO QUE LA CONTENGA

PLANO CUALQUIERA

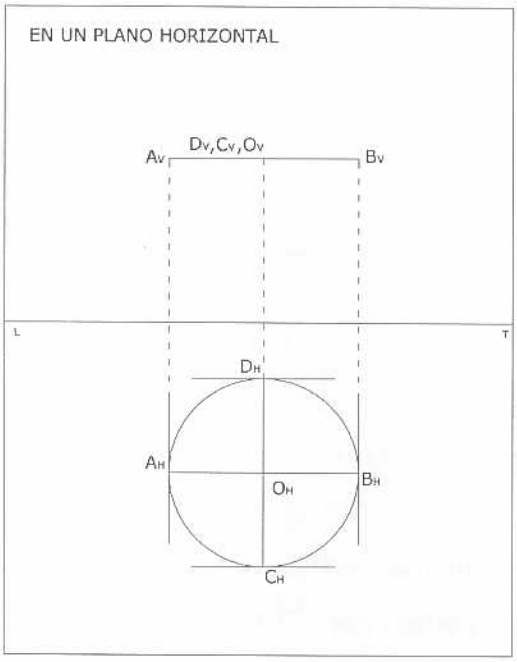


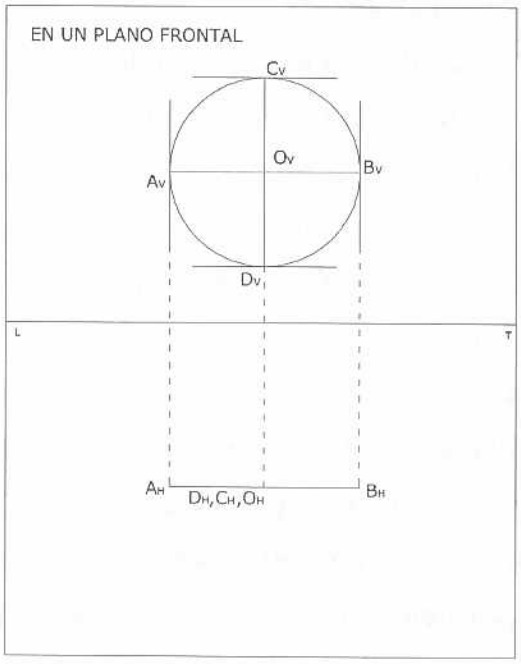
Una circunferencia contenida en un plano cualquiera se verá proyectada en DPO como se muestra en la figura. Ambas proyecciones se verán como elipses. En la PV el eje mayor se corresponde con las rectas frontales del plano y sus extremos (A y B) está a una distancia que representa el radio de la circunferencia (VT) en esa proyección. Este diámetro (AB) se proyectará paralelo a LT en la PH. No significando nada diferente a que se trata de dos puntos de la PH. El eje menor (CD) corresponde a una RMI del plano luego se proyectará perpendicular (VT) en la PV. Las tangentes en esos puntos serán paralelas al eje mayor (AB) o

sea serán rectas frontales del plano. C y D corresponderán a los puntos más adelante (C) y más atrás

PLANO HORIZONTAL O PLANO FRONTAL

Las circunferencias ubicadas en planos frontales o en planos horizontales se verán en forma similar a como se ve cualquier figura contenida en esos planos. Las figuras contenidas en planos horizontales se ven en verdadero tamaño (VT) en su proyección horizontal y, sobre su traza (paralela a LT) en la proyección vertical. En el caso de planos frontales, la situación es similar pero el VT corresponderá a la PV y la PH sobre la traza del plano, también paralela a LT. Las tangentes en los puntos notables son de determinación directa ya que son rectas horizontales-frontales y rectas de punta o verticales. En la figura que sigue se pueden observar estas características.

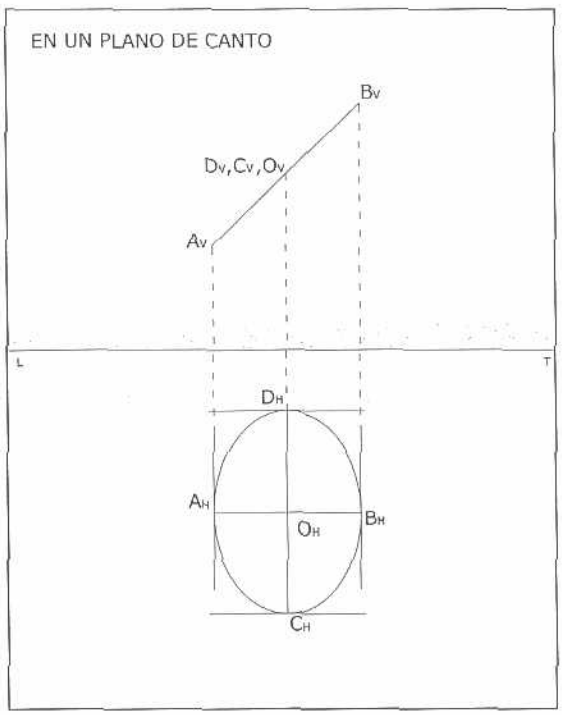


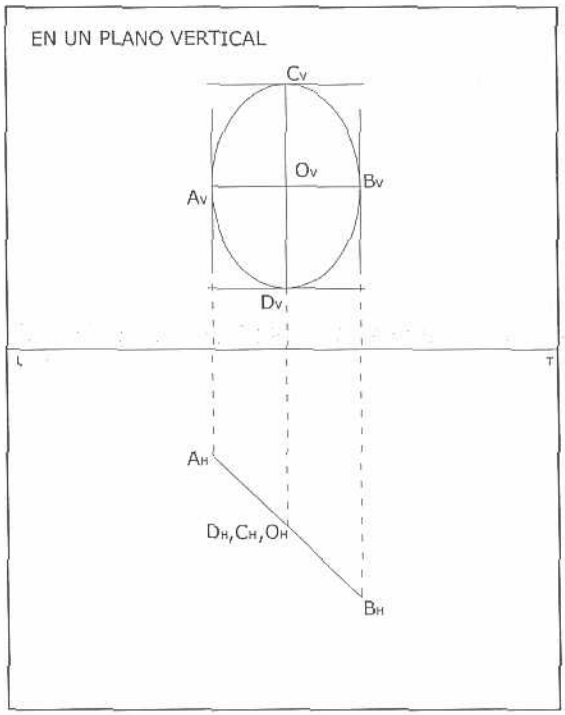


PLANO DE CANTO O PLANO VERTICAL

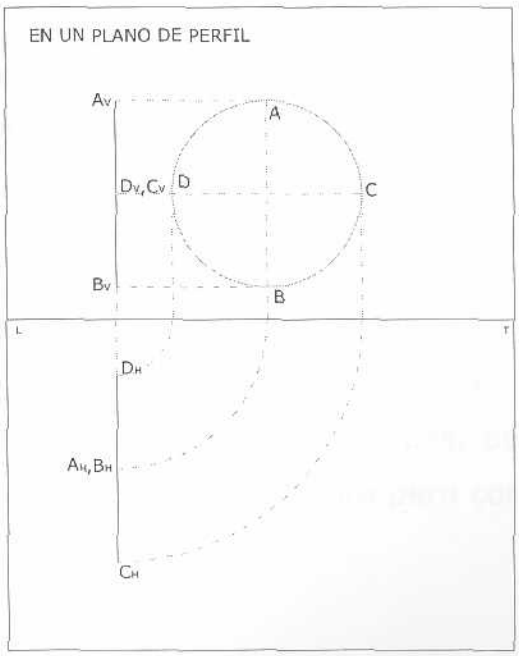
Las proyecciones (DPO) de una circunferencia contenidas en planos de canto o planos verticales se presentarán de la siguiente forma parecida a las conte-

nidas en planos horizontales o frontales. En estos casos la proyección horizontal o la vertical, *según el caso, no se verán en VT, pero las elipses tendrán* sus ejes paralelos a LT los menores y según las líneas de referencia los mayores. Las figuras que siguen ilustran estas características.





PLANO DE PERFIL Las proyecciones de *una circunferencia ubicada en un plano* de perfil se confundirán con las líneas *de referencia, por tener todos sus puntos* la misma distancia a la referencia lateral. Los diámetros paralelos a los planos de proyección serán una recta vertical (|| al PVP) y una recta de punta (|| al PHP). En ambos casos se proyectarán en VT. Sus extremos serán los



puntos más adelante (C) y más atrás (D) y el más bajo (B) y el más alto (A). No existirá ningún punto ubicado más a la derecha o más a la izquierda de otro. Como es usual en otros casos, para trabajar con circunferencias ubicadas en planos de perfil resultará muy conveniente obtener la proyección girada del plano que la contiene.

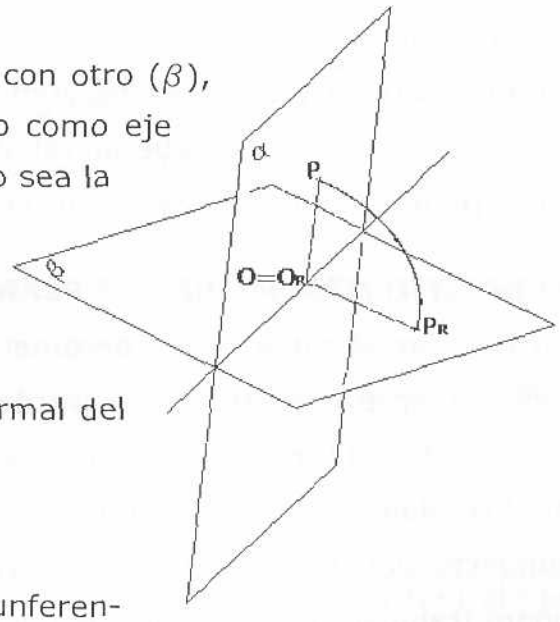
OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Abatimiento y relevamiento de planos	• Abatimiento y relevamiento de un plano: eje de giro, radio de giro, ángulo de giro • Realizar el abatimiento de un plano sobre los planos de proyección utilizando sus trazas • Realizar el abatimiento de un plano sobre un plano horizontal o frontal. • Rebatimiento o giro de planos de canto o verticales • Rebatimiento o giro de planos de perfil

REBATIMIENTO DE PLANOS

El rebatimiento de planos consiste en el cambio de posición que se la hace a un plano para ubicarlo en otra, donde sus proyecciones sean más cómodas para trabajar. Generalmente la mejor posición es cuando se logra que el plano coincida o sea paralelo al plano sobre el cual se está haciendo la proyección (plano de proyección). Esto es especialmente válido en proyecciones cilíndricas ortogonales, donde la proyección por ser de un plano paralelo al de proyección se verá en su verdadero tamaño.

EJE DE GIRO

Al girar un plano (α) para que coincida con otro (β), el giro se hará necesariamente teniendo como eje la recta que es común a ambos planos, o sea la recta de intersección.



ÁNGULO DE GIRO

El ángulo de giro será el que forman los planos o sea el ángulo de la sección normal del diedro que tiene por caras a los planos.

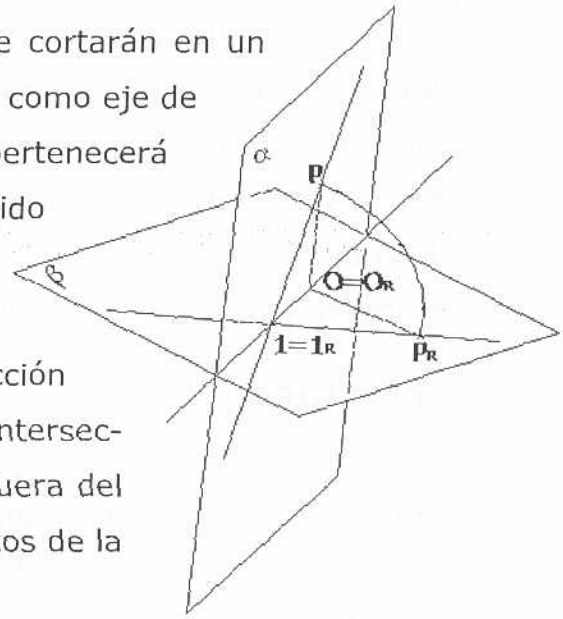
REBATIMIENTO DE UN PUNTO

El punto P, al girarlo describirá una circunferencia con centro en el punto O y radio la distancia OP. El punto O pertenece a la recta intersección de los planos luego pertenece a ambos planos, por lo que al girar NO CAMBIARÁ de posición, se puede decir que gira pero con un radio de giro nulo.

Al girar el plano sobre la recta intersección, la circunferencia descrita por el punto considerado está sobre un plano perpendicular a la recta eje del giro o sea sobre un plano perpendicular a ambos planos (α y β). Las trazas OP y $O_R P_R$, serán perpendiculares a la recta intersección de los planos (eje de giro)

REBATIMIENTO DE UNA RECTA

En un plano dos rectas, si no son paralelas se cortarán en un punto. Si una de esas rectas es la que se utiliza como eje de rebatimiento del plano, el punto de corte (1) pertenecerá al eje y a la recta, se considerará como rebatido ya que en todo caso su radio de giro será nulo. El otro punto (P) se podrá girar hasta obtener su proyección rebatida (P_R). La proyección rebatida de la recta será $1_R P_R$. Si el punto de intersección de la recta y el eje de rebatimiento está fuera del área útil del dibujo, se deberán rebatir dos puntos de la recta para obtener su proyección rebatida.



REBATIMIENTO SOBRE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN (DPO)

En DPO los elementos que pertenecen a los Planos de Proyección (PHP y/o PVP) siempre "se ven" en su verdadero tamaño (VT). Luego si una figura contenida en un plano cualquiera se gira de forma tal que coincida con uno de los planos de proyección, estas figuras "se verán" en VT. Esto por supuesto significa una gran ayuda ya que en esas proyecciones rebatidas se podrá trabajar en VT sin mayores dificultades.

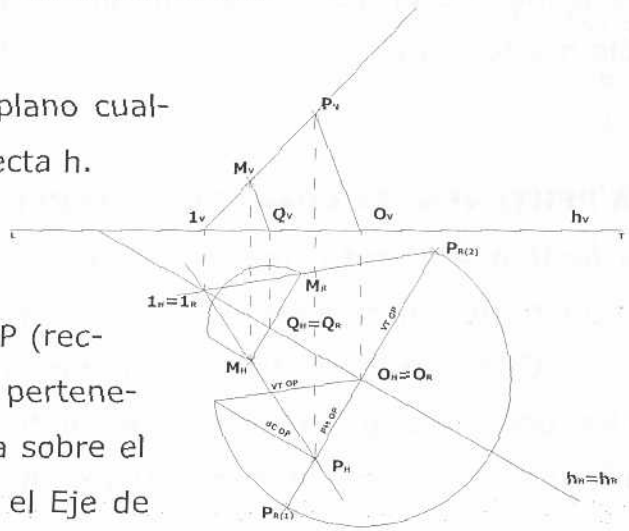
El rebatimiento sobre los planos de proyección (PHP o PVP) se deberá hacer girando sobre la traza correspondiente del plano a ser rebatido.

REBATIMIENTO SOBRE EL PHP

El ejemplo que se muestra supone el rebatimiento de una recta sobre el PHP.

Sea la recta PM una recta de un plano cualquiera cuya traza horizontal es la recta h.

El rebatimiento sobre el PHP del plano MPh, supone girarlo sobre la traza de dicho plano sobre el PHP (recta h). Esa recta h, comoquiera que pertenece a ambos planos ya se encuentra sobre el PHP o sea ya está rebatida y será el Eje de Rebatimiento. Cualquier punto que se encuentre sobre dicha recta h ya estará rebatido. Encontrando el VT de los segmentos OP y QM se podrán encontrar las proyecciones rebatidas sobre el PHP (M_R y P_R). Sin embargo se ha podido utilizar la proyección rebatida de uno de esos puntos (M o P) y utilizar la traza de la recta MP (Punto 1) el cual por ser del Eje de Rebatimiento, ya estará en proyección rebatida (1_R).



Los segmentos PO y/o MQ, y todos los similares, que son los que definen los Radios de Giro de los puntos que se rebatirán, son perpendiculares al Eje de Rebatimiento, por tratarse de una recta horizontal (Traza Horizontal del plano a ser rebatido), esos segmentos serán, en este caso, Rectas de Máxima Pendiente (RMP) del plano a rebatirse.

REBATIMIENTO SOBRE EL PVP

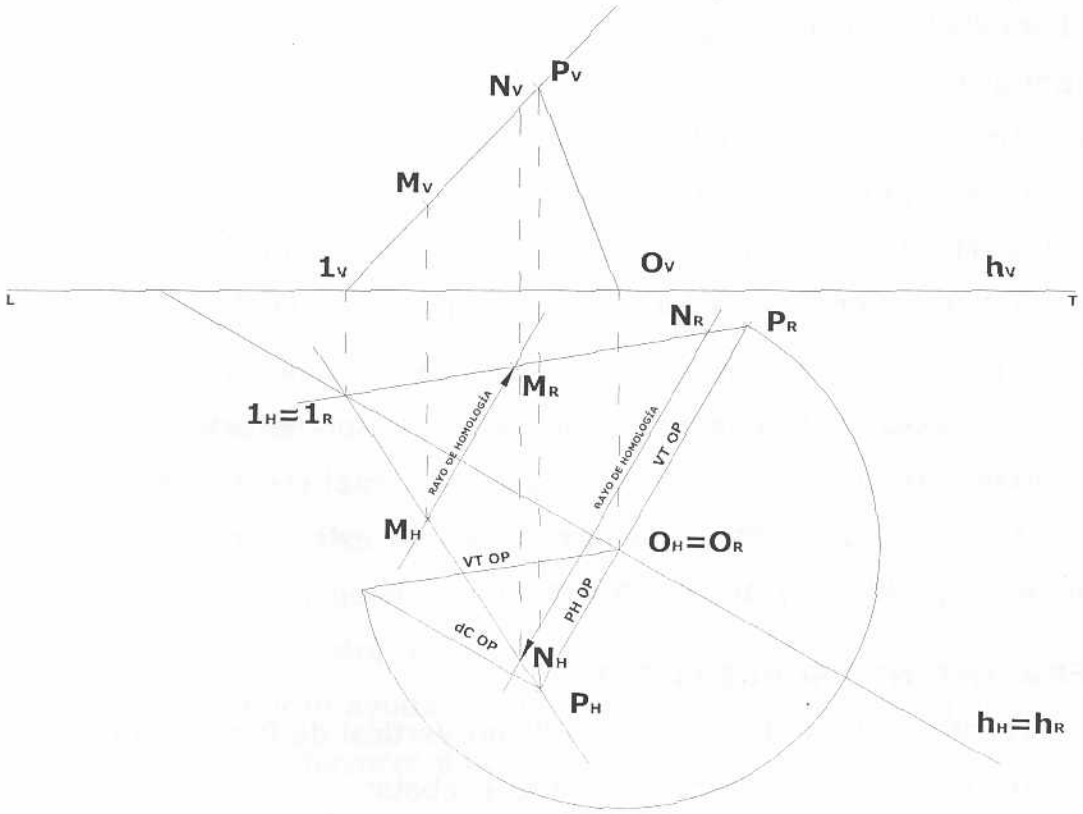
Si el rebatimiento se hace sobre el Plano Vertical de Proyección (PVP) el Eje de Giro será la Traza Vertical del plano a rebatir.

El resto de los procedimientos serán similares a los descritos para el rebatimiento sobre el PHP.

En todo caso los resultados que se obtendrán al rebatir sobre uno u otro de los planos de proyección serán iguales y la decisión de utilizar uno u otro sólo obedecerá a la conveniencia o comodidad del trabajo por realizar.

LA PERTENENCIA COMO INVARIABLE PROYECTIVO

La pertenencia en Geometría SIEMPRE es un invariable proyectivo, o sea si un punto pertenece a un elemento geométrico, pertenecerá a dicho elemento en TODAS sus proyecciones. Aplicando este axioma se puede concluir que si se conocen las proyecciones, DPO y Rebatida de un plano, CADA punto estará unido en su proyección DPO y su proyección rebatida por un segmento



que será perpendicular al Eje de Rebatimiento. Estas direcciones de las perpendiculares al eje se conocen como Rayos de Homología. Su utilización facilita la obtención de proyecciones conocidas otras.

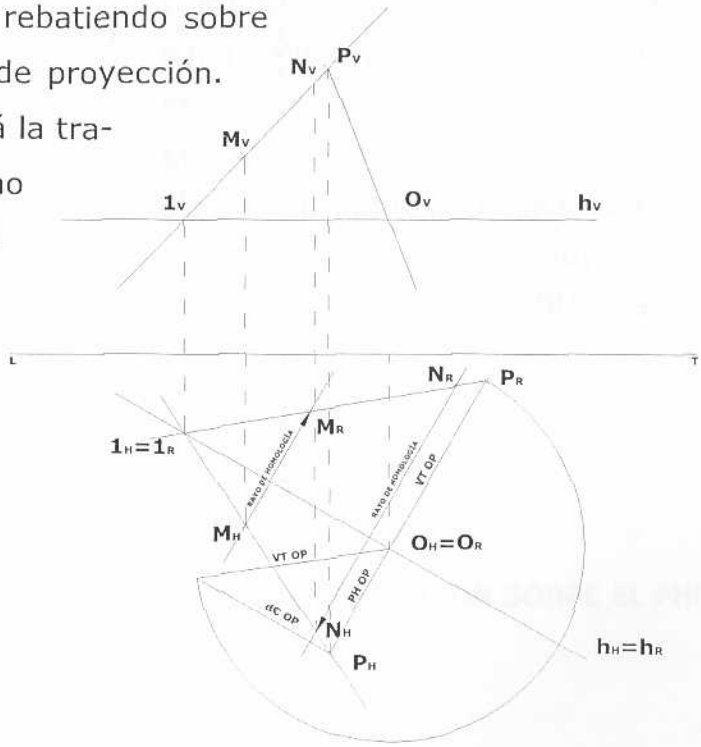
En el ejemplo mostrado se conocen las proyecciones de la recta MP.

Sin embargo la proyección rebatida se obtuvo a partir del rebatimiento del punto P y del punto 1(Traza de MP). La proyección rebatida de M (M_R) se puede obtener fácilmente trazando el "rayo de homología" de la PH de M (M_H), la intersección de dicho "rayo" con la proyección rebatida de la recta P1, definirá la proyección M_R. En forma análoga, suponiendo que se conoce la proyección N_R, trazando el correspondiente "rayo de homología" de dicha proyección facilitará la obtención de la proyección N_H, sobre la recta MP a la cual pertenece. Este procedimiento, o sea la determinación de las proyecciones DPO de puntos de los cuales se conocen sus proyecciones rebatidas se conoce como el RELEVAMIENTO. Constituye el procedimiento contrario, y en todo caso complementario, al rebatimiento.

REBATIMIENTO SOBRE PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

Es posible que el rebatimiento sobre uno de los planos de proyección no sea conveniente o cómodo para una situación específica.

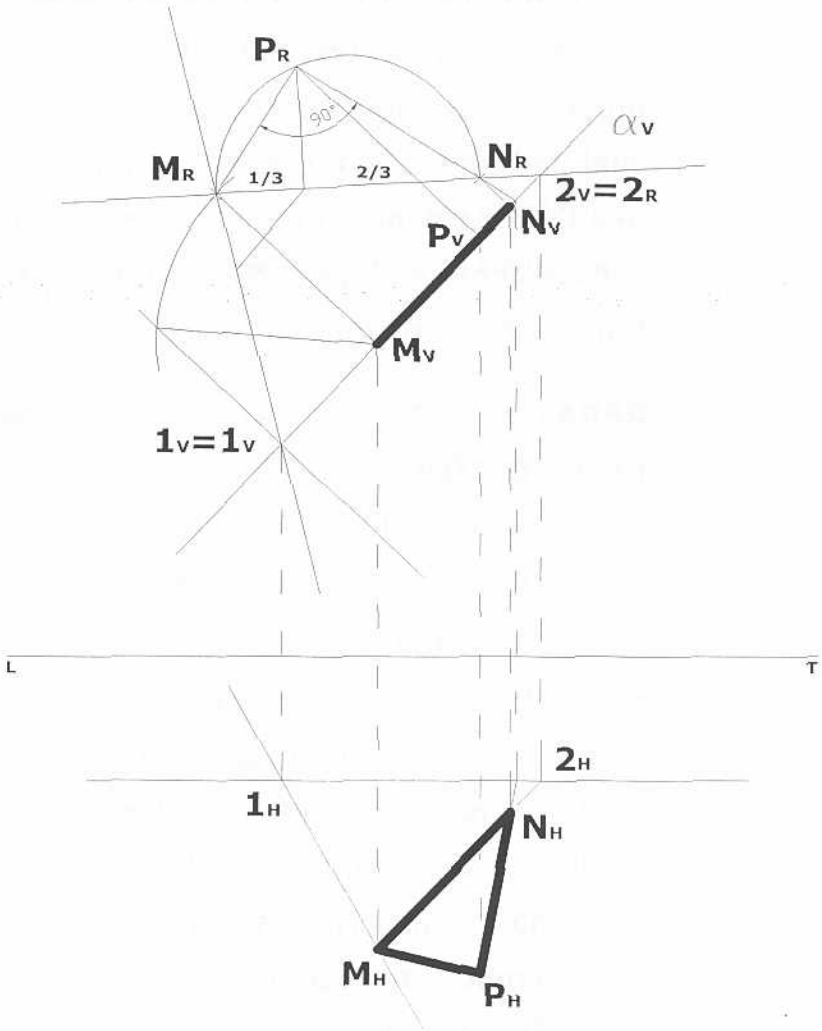
Iguales resultados se obtendrán rebatiendo sobre planos PARALELOS a los planos de proyección. En estos casos el Eje de Giro será la traza del plano a rebatir en el plano paralelo. Esa traza será según el caso una Recta Horizontal o una Recta Frontal del plano a rebatir. El resto de los procedimientos serán similares a los descritos.



REBATIMIENTO DE PLANOS DE CANTO O PLANOS VERTICALES

En los planos de canto o en los planos verticales todos los puntos de una de las proyecciones siempre coinciden totalmente con su traza, vertical u horizontal, según el caso. Inclusive el eje de giro coincidirá con dicha traza, luego todas las rectas de referencia entre las proyecciones de cada punto y las proyecciones rebatidas serán perpendiculares a dicha traza. La obtención de las proyecciones de cada punto en DPO, será facilitada por el empleo de rectas auxiliares de las cuales se conozcan sus proyecciones.

Ejemplo: *Determinar en DPO las proyecciones del triángulo rectángulo MNP contenido en el plano de canto α, sabiendo que la altura sobre la hipotenusa (MN) la divide en dos segmentos cuya razón es ½. Se conoce la traza vertical de α, el punto M y la proyección horizontal de N. Se sabe que el cateto NP es mayor que el MP.*

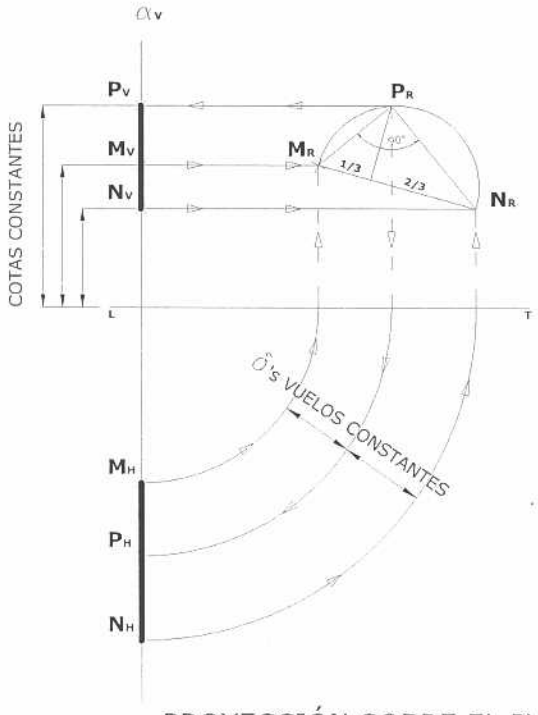


REBATIMIENTO O GIRO DE PLANOS DE PERFIL

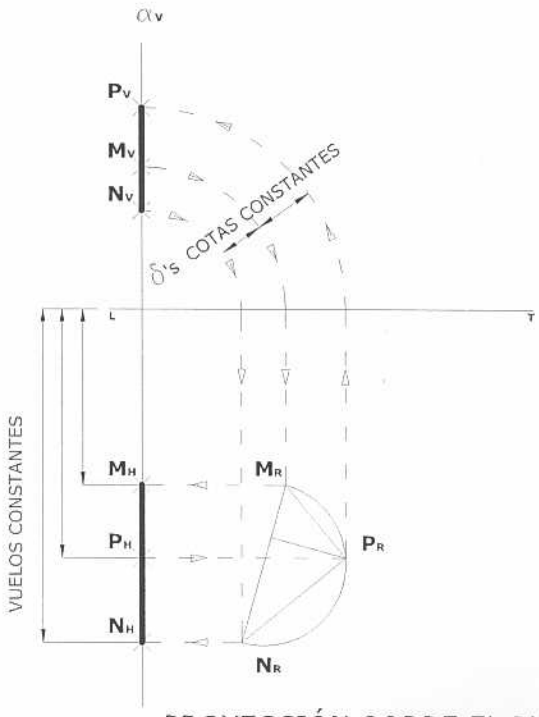
El rebatimiento de los planos de perfil, como ya se ha visto, supone que cada punto conserve su cota y al propio tiempo conserve las diferencias de vuelo con los otros puntos del plano (giro sobre el PVP) o que conserven su vuelo y las diferencias de cota con otros puntos (giro sobre el PHP).

Es conveniente girar los planos de perfil 90° hasta hacerlos coincidir con uno de los planos de proyección, o un plano paralelo a éstos. Si el centro de giro se coloca sobre la LT el rebatimiento será sobre uno de los planos de proyección.

Ejemplo: *Determinar en DPO las proyecciones del triángulo rectángulo MNP contenido en el plano de perfil α, sabiendo que la altura sobre la hipotenusa (MN) la divide en dos segmentos cuya razón es ½. Se conocen las trazas del plano α, y los puntos M y N.*



PROYECCIÓN SOBRE EL PVP



PROYECCIÓN SOBRE EL PHP

El giro del plano a ser rebatido puede realizarse en cualquier sentido, sin embargo una vez hecho el primer giro TODOS los demás deben ser hechos en el mismo sentido.

El relevamiento de los puntos se realizará en sentido contrario.

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Diedros, triedros y poliedros	• Ángulo diedro, • Ángulo triedro • Poliedros, Superficies poliédricas. • Poliedros regulares e irregulares. Clasificación

ÁNGULO DIEDRO

La región comprendida entre dos semiplanos originados por dos planos que se cortan, es un ÁNGULO DIEDRO o simplemente un DIEDRO.

Es una región de tres dimensiones pero es abierta ya que los semiplanos se originan en la arista (recta intersección de los dos planos) pero son infinitos en extensión a partir de dicha arista.

ÁNGULO TRIEDRO

Cuando el espacio se limita por más de dos semiplanos se forma una figura geométrica que recibe el nombre de POLIEDRO.

Si un tercer plano se corta con dos que forman un diedro, generará el menor poliedro que existe. Esta figura se conoce con el nombre de ángulo triedro o TRIEDRO; y se define como la región del espacio limitada por tres semiplanos que concurren en un punto. Sin embargo este poliedro también es abierto.

POLIEDROS

Planos adicionales que se corten con los anteriores limitarán la región espacial pero ahora serán espacios cerrados.

SUPERFICIE POLIÉDRICA

Se llama SUPERFICIE POLIÉDRICA a toda superficie formada por más de cuatro polígonos planos no coplanares, tales que cada uno de sus lados pertenezca a dos de ellos.

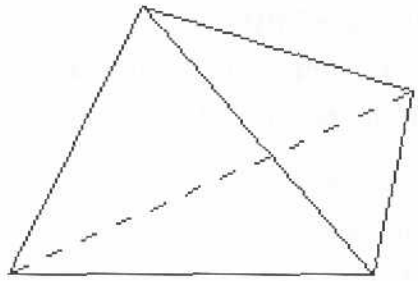
Necesariamente será una región cerrada que quedará limitada por las caras (polígonos) las cuales a su vez están limitadas por las aristas (lados de los polígonos).

Si todos los polígonos son iguales, la superficie poliédrica o simplemente el POLIEDRO será REGULAR.

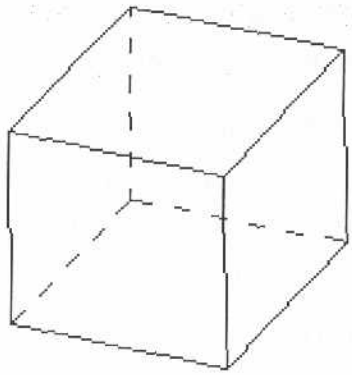
Derivan su denominación del número de caras que lo forman.

Los de menor número de cara son:

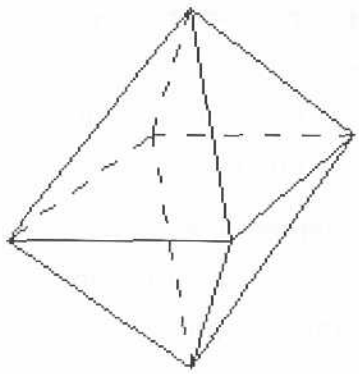
TETRAEDRO con cuatro (4) caras



HEXAEDRO O CUBO con seis (6) caras



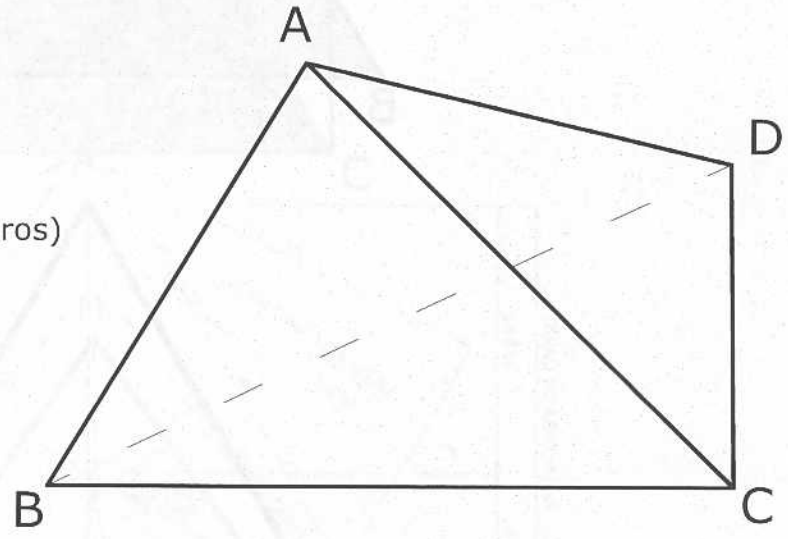
OCTAEDRO con ocho (8) caras



OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Tetraedro regular	• Definición, secciones principales

TETRAEDRO REGULAR

Figura geométrica formada por cuatro triángulos equiláteros no coplanares adosados dos a dos



4 CARAS (Triángulos equiláteros)

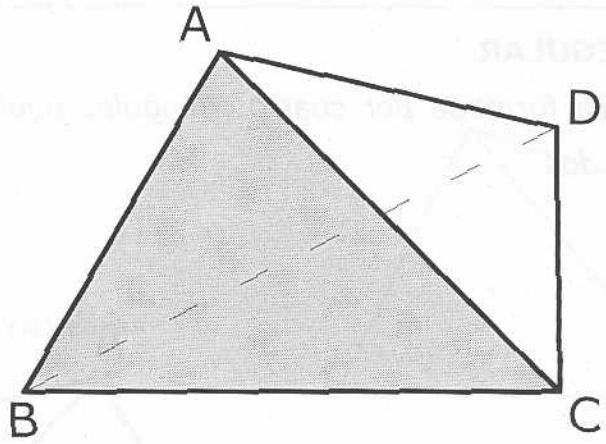
4 VÉRTICES

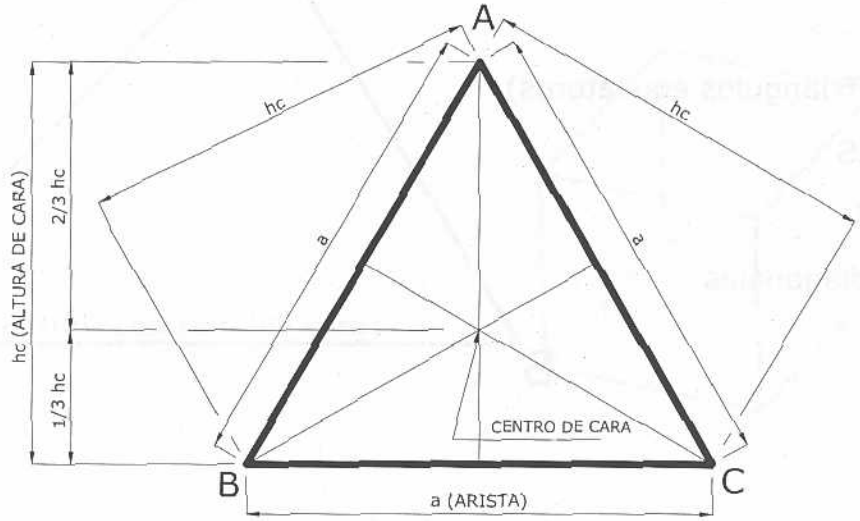
6 ARISTAS

No posee diagonales

El tetraedro es el menor poliedro regular factible, según el número de caras.

CARA (Triángulo Equilátero)



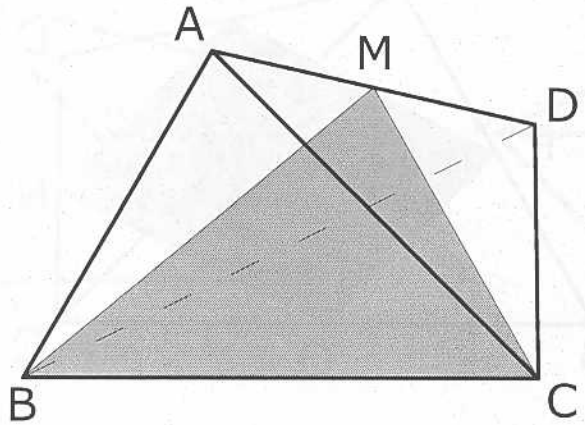


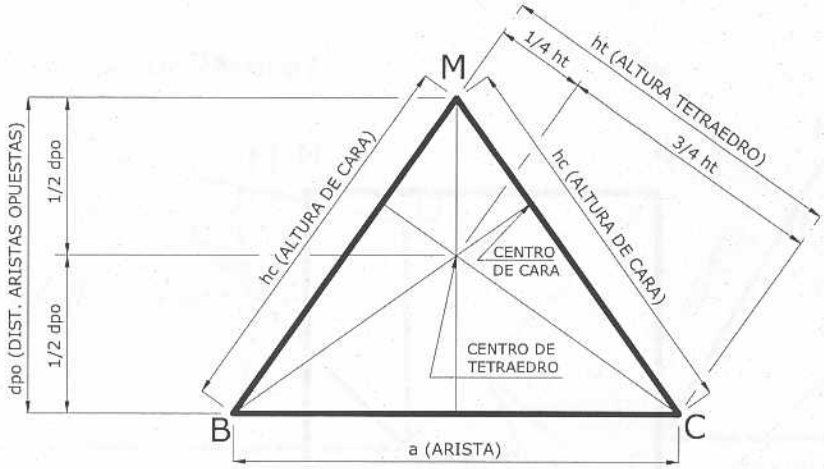
La cara del tetraedro es un triángulo equilátero cuyo lado es la ARISTA del poliedro.

Se distinguen TRES (3) ALTURAS DE CARA (hc) las cuales se cortan en el CENTRO DE CARA. La hc es la altura del triángulo y por lo tanto tiene todas las características de las alturas de los triángulos equiláteros.

SECCIÓN ARISTA- PUNTO MEDIO ARISTA OPUESTA

(Triángulo Isósceles)

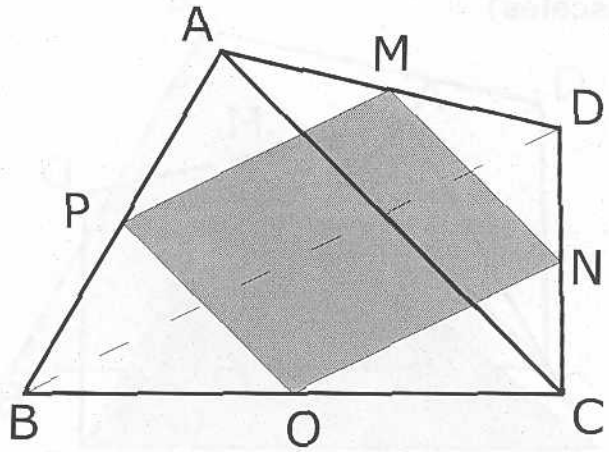


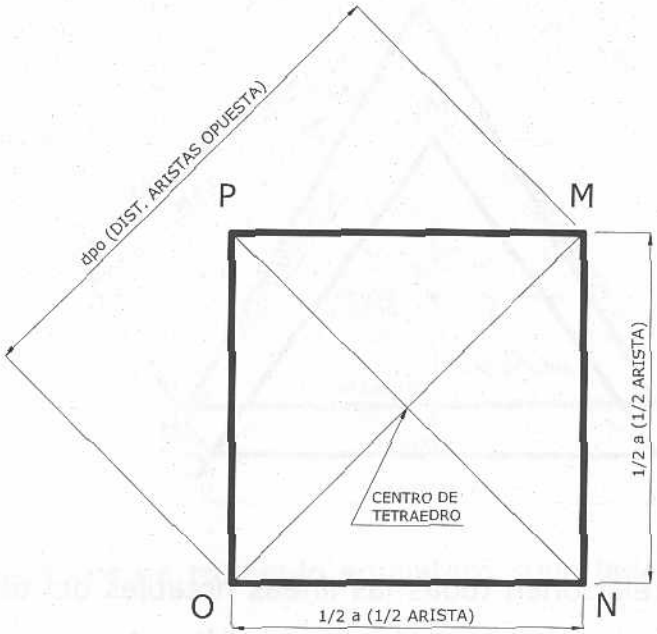


En esta sección se relacionan todas las líneas notables del tetraedro. Puede ser obtenida a partir de la cara (Triángulo equilátero) donde se determinará la Altura de Cara (hc). Esta altura de cara será la dimensión de los lados iguales del triángulo isósceles. El lado desigual será la arista. Determinada la sección se tendrán la Altura de Tetraedro, midiendo la altura sobre uno de los lados desiguales y, la Distancia entre Aristas opuestas (Perpendicular común), midiendo la altura sobre el lado desigual.

SECCIÓN 4 PUNTOS MEDIOS ARISTAS OPUESTAS

(Cuardado)

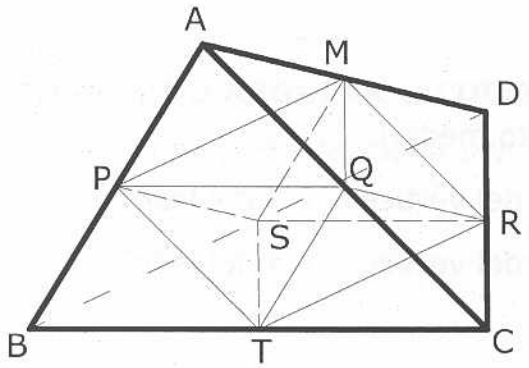


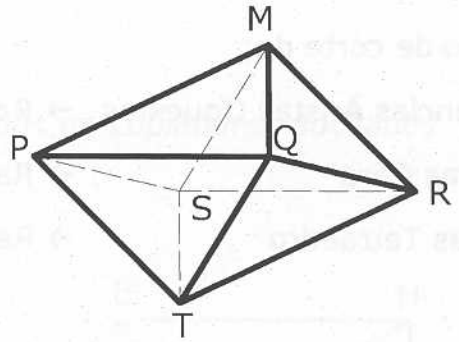


La sección que pasa por cuatro puntos medios de dos pares de aristas opuestas, es un cuadrado cuyo lado mide ½ arista del tetraedro. Las diagonales del cuadrado miden la distancia entre aristas opuestas.

Existen tres secciones distintas que pasan por cuatro puntos medios por lo que dichas secciones son todas cuadrados que entre si son perpendiculares.

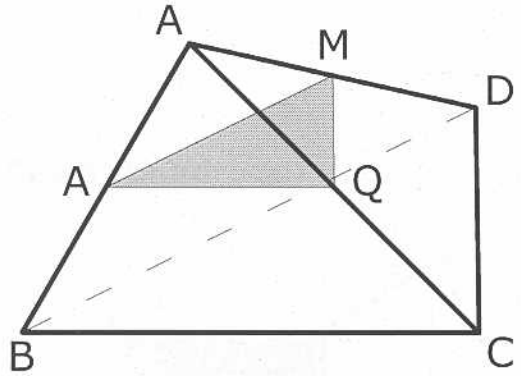
Estas secciones son a su vez las secciones principales de un octaedro que se resulta inscrito en el tetraedro.

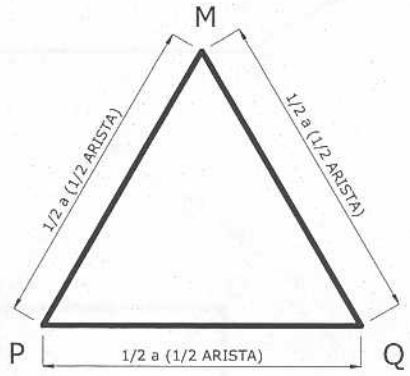




SECCIÓN PUNTOS MEDIOS ARISTAS CONCURRENTES

(Triángulo equilátero)





Esta sección resulta un triángulo equilátero de lado igual a ½ arista, que es paralelo a la cara opuesta al vértice donde concurren las aristas.

Es la cara de un tetraedro de la mitad de tamaño (arista, alturas, etc) del original

PUNTOS DE CORTE DE LAS LÍNEAS NOTABLES

Los puntos de corte de las líneas notables establecen en éstas las siguientes razones de proporcionalidad

Punto de corte de:

Distancias Aristas Opuestas → Razón 1 (Punto medio)

Alturas Cara → Razón 2 (2/3 del vértice – 1/3 del lado)

Aturas Tetraedro → Razón 3 (3/4 del vértice – 1/4 del lado)

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Hexaedro regular	• Definición, secciones principales

HEXAEDRO REGULAR O CUBO

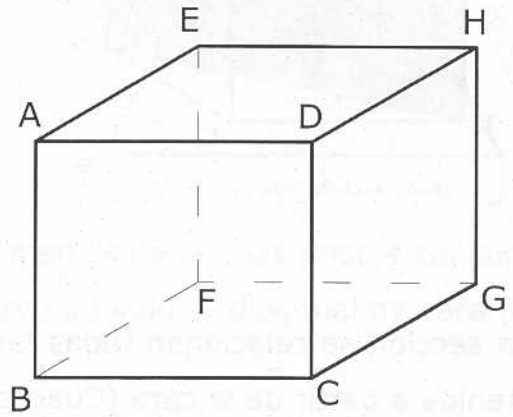
Figura geométrica formada por seis cuadrados no coplanares adosados dos a dos

6 CARAS (Cuadrados)

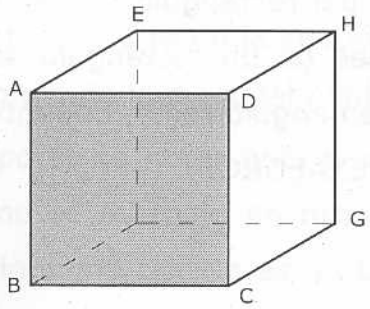
8 VÉRTICES

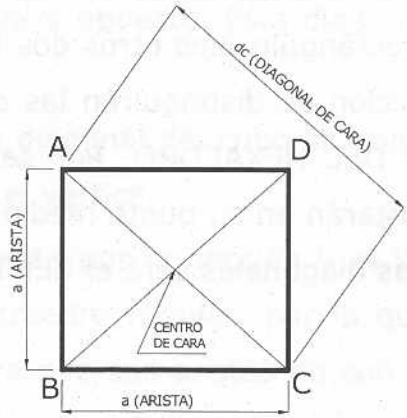
12 ARISTAS

4 DIAGONALES DE CUBO



CARA (Cuadrado)

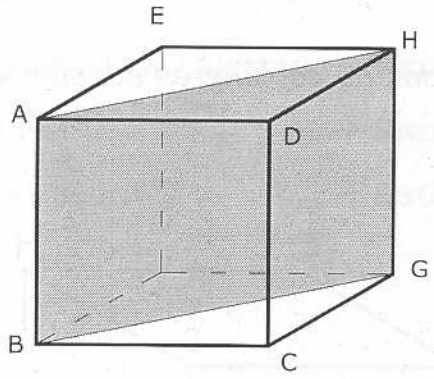


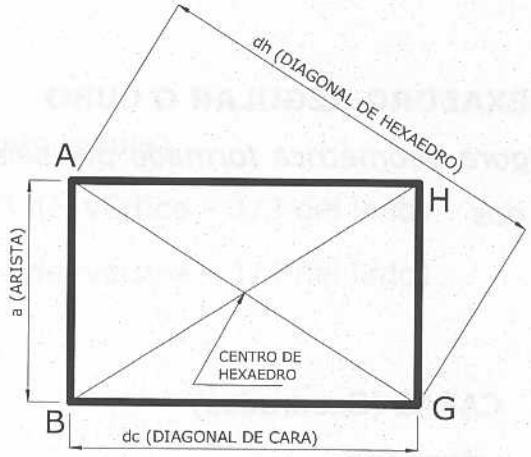


La cara del hexaedro es un cuadrado cuyo lado es la ARISTA del poliedro.

Se distinguen dos (2) DIAGONALES DE CARA (dc) las cuales se cortan en el CENTRO DE CARA. Por ser las diagonales de un cuadrado tienen todas las características de dichas diagonales, o sea son iguales, se cortan en su punto medio y en ángulo recto.

SECCIÓN POR ARISTAS OPUESTAS (Rectángulo)

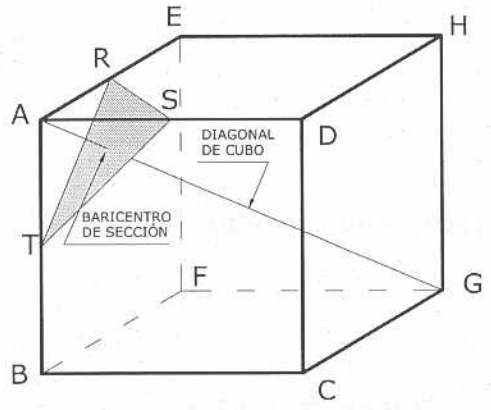


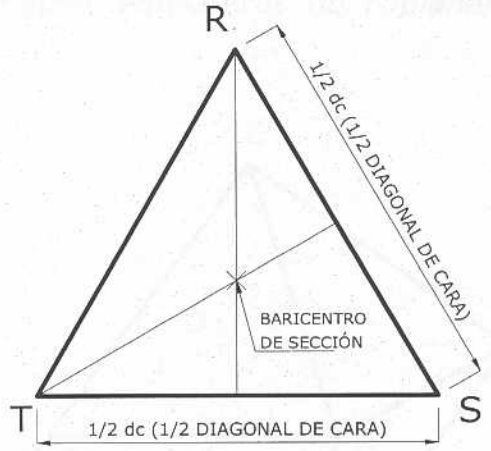


En esta sección se relacionan todas las líneas notables del hexaedro. Puede ser obtenida a partir de la cara (Cuadrado) donde se determinará la Diagonal de Cara (dc). Esta diagonal de cara será la dimensión de los lados de mayor longitud del rectángulo. Los otros dos lados serán iguales a la arista. Determinada la sección se distinguirán las diagonales del rectángulo que son las DIAGONALES DEL HEXAEDRO. Por ser diagonales de un rectángulo serán iguales, se cortarán en su punto medio, pero no en ángulo recto. El punto de corte de dichas diagonales será el CENTRO DEL HEXAEDRO.

SECCIÓN PUNTOS MEDIOS ARISTAS CONCURRENTES

(Triángulo equilátero)





La sección que pasa por los tres puntos medios de sendas aristas concurrentes en un vértice es un triángulo equilátero de lado ½ diagonal de cara (Teorema de Tales).

Esta sección es perpendicular a la diagonal del cubo trazada desde el vértice donde concurren las aristas hasta el vértice opuesto. Esta diagonal pasa por el centro del triángulo sección.

El punto de corte de la sección sobre la diagonal del cubo se ubica a 1/6 de la longitud de la diagonal medido desde el vértice.

Es importante notar que el sólido formado por la sección y el vértice más próximo se asemeja en forma a un tetraedro regular, por lo que se suele tomarlo como tal. No es un tetraedro ya que sus aristas no son iguales, en efecto las que concurren en el vértice del cubo miden ½ arista del cubo; las que forman la sección miden ½ diagonal de la cara del hexaedro. El sólido formado es una pirámide recta de base triangular equilátera.

PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Octaedro regular	• Definición, secciones principales

OCTAEDRO REGULAR

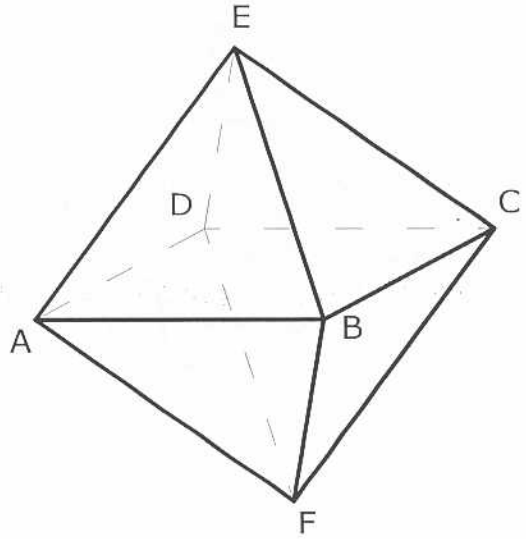
Figura geométrica formada por ocho triángulos equiláteros no coplanares adosados dos a dos

8 CARAS (Triángulos equiláteros)

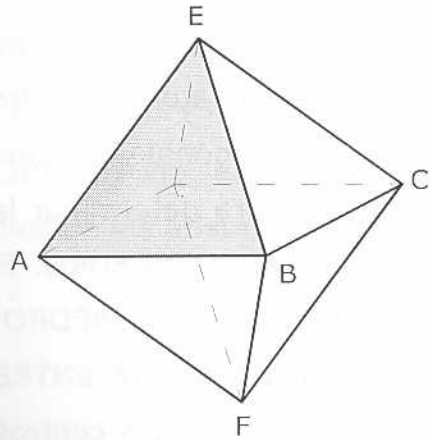
6 VÉRTICES

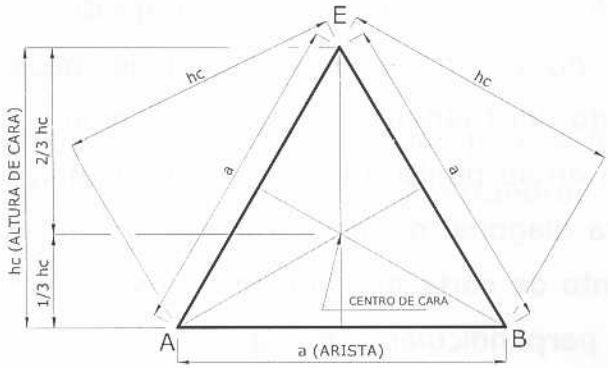
12 ARISTAS

3 DIAGONALES DE OCTAEDRO



CARA (Triángulo equilátero)





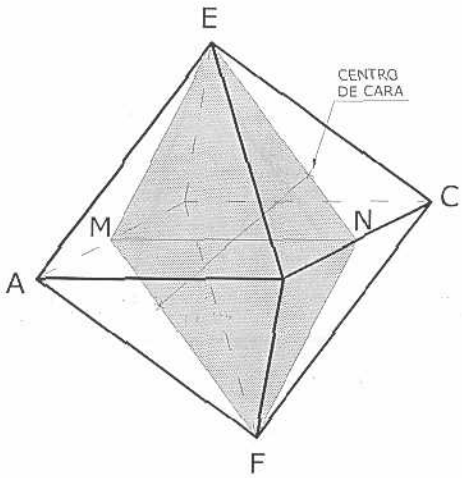
La cara del octaedro es un triángulo equilátero cuyo lado es la ARISTA del poliedro.

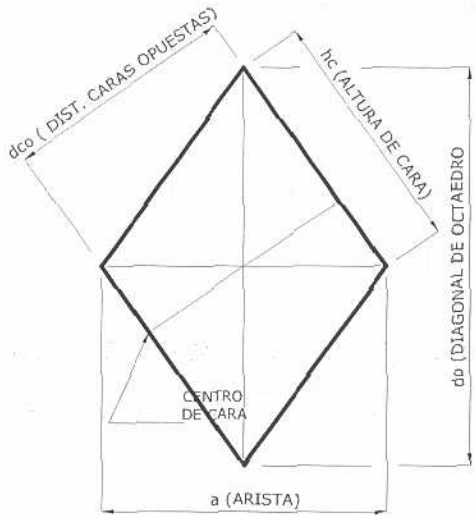
Se distinguen tres (3) ALTURAS DE CARA (hc) las cuales se cortan en el CENTRO DE CARA. Por ser las alturas de un triángulo equilátero su punto de

corte divide a cada altura en dos segmentos cuya razón es 1/2 (1/3; 2/3), siendo el de mayor longitud el próximo al vértice.

SECCIÓN VÉRTICES OPUESTOS –PUNTOS MEDIOS ARISTAS OPUESTAS

(Rombo)

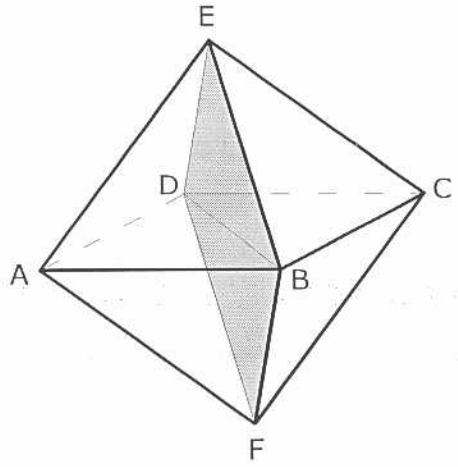


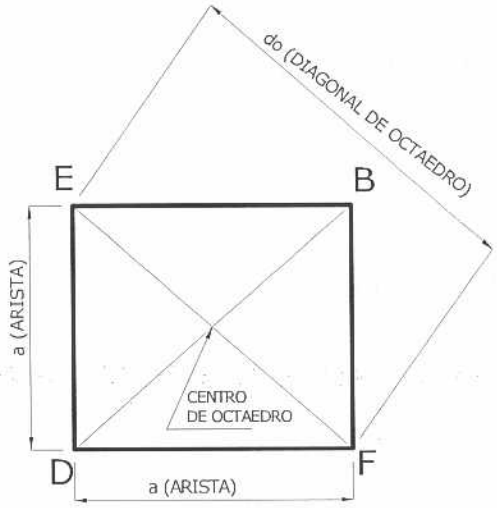


En esta sección se relacionan todas las líneas notables del octaedro. Puede ser obtenida a partir de la cara (Triángulo equilátero) donde se determinará la Altura de Cara (hc). Esta altura de cara será la dimensión de los lados de un rombo, una de cuyas diagonales mide la longitud de la arista del octaedro (lado del triángulo equilátero). Como en todo rombo sus diagonales se cortan en su punto medio y son perpendiculares, luego se podrá determinar la otra diagonal del rombo que representará la DIAGONAL DEL OCTAEDRO. El punto de corte de las diagonales del rombo, es el CENTRO DEL OCTAEDRO. La perpendicular a los lados opuestos del rombo, es la DISTANCIA ENTRE CARAS OPUESTAS. Esta perpendicular se corta con las caras en los centros de cara correspondientes.

SECCIÓN ARISTAS OPUESTAS

(Cuadrado)





La sección que pasa por aristas opuestas es un cuadrado cuyo lado es igual a la arista. El punto de corte de las diagonales de esta sección es el CENTRO DEL OCTAEDRO. Las diagonales son las DIAGONALES DEL OCTAEDRO.

Existen tres (3) secciones similares las cuales son perpendiculares entre sí.

Como se vio, estas secciones constituyen las secciones por los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular, donde se inscribe el octaedro.

PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Superficies poliédricas y poliedros	• Superficies prismáticas y superficies piramidales • Superficies cilíndricas y superficies cónicas

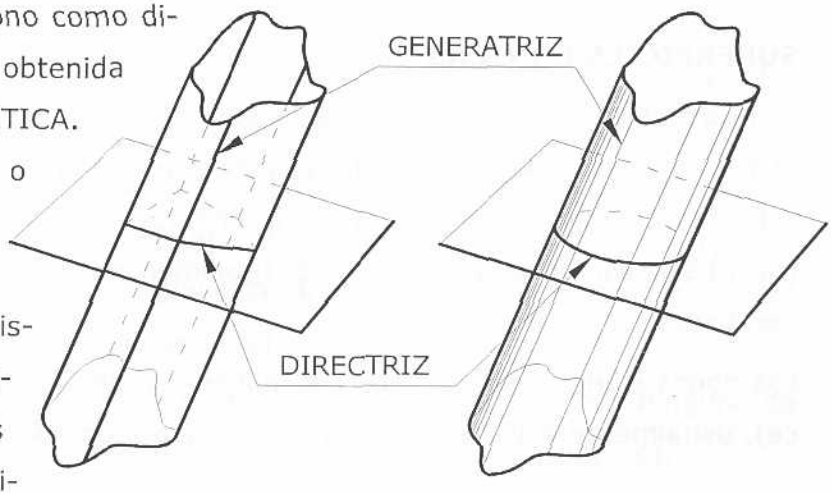
MOVIMIENTO DE UNA RECTA EN EL ESPACIO

El movimiento o desplazamiento de una recta en el espacio, generará una sucesión de rectas que constituirán una superficie, cuya forma quedará determinada de acuerdo a como se ubiquen dichas rectas.

Cada una de estas rectas se denomina **GENERATRIZ**. Esta ubicación puede lograrse, bien estando libremente en el espacio o bien apoyadas sobre una línea poligonal o polígono. En estos casos el polígono sobre el cual se apoya se denomina **DIRECTRIZ**.

SUPERFICIES PRISMÁTICAS

Si las generatrices se conservan paralelas, apoyándose sobre un polígono como directriz, la superficie que se obtenida es una SUPERFICIE PRISMÁTICA. Si el polígono es cerrado o abierto la superficie será igualmente cerrada o abierta. Las superficies prismáticas cerradas y comprendidas entre dos planos secantes (bases) son conocidas como PRISMAS



SUPERFICIE PRISMÁTICA

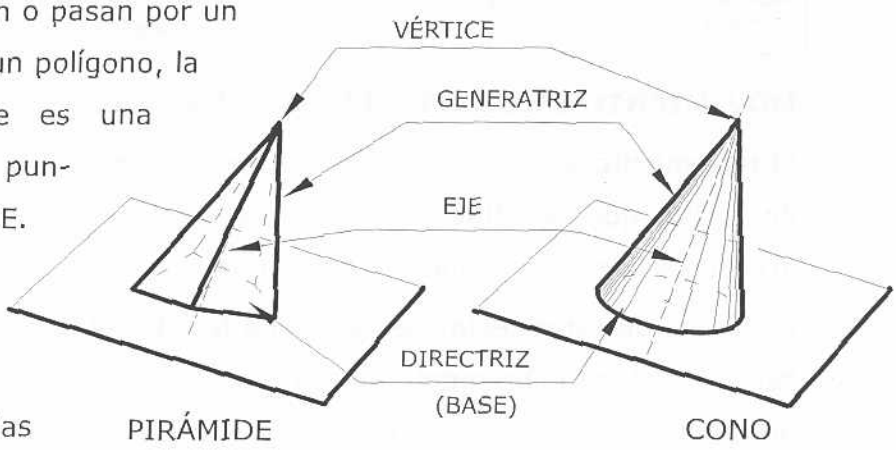
SUPERFICIE CILÍNDRICA

SUPERFICIES CILÍNDRICAS

Si las generatrices se conservan paralelas, apoyándose sobre una línea curva como directriz, la superficie que se obtenida es una SUPERFICIE CILÍNDRICA. Si el polígono es cerrado o abierto la superficie será igualmente cerrada o abierta. Las superficies cilíndricas cerradas y comprendidas entre dos planos secantes (bases) son conocidas como CILINDROS.

SUPERFICIES PIRAMIDALES

Si las generatrices concurren o pasan por un punto fijo, y la directriz es un polígono, la superficie que se obtiene es una SUPERFICIE PIRAMIDAL. El punto fijo se denomina VÉRTICE. Si el polígono es cerrado o abierto la superficie será cerrada o abierta. Las superficies piramidales cerradas y comprendidas entre el vértice y un plano secante (base) son conocidas como PIRÁMIDES. Las pirámides siempre son superficies dobles, simétricas respecto al punto fijo (Vértice), usualmente sólo se considera y representa una de sus ramas.



SUPERFICIES CÓNICAS

Si la directriz es una línea curva, la superficie que se obtiene es una SUPERFICIE CÓNICA. Si la curva es cerrada o abierta la superficie será cerrada o abierta. Las superficies cónicas cerradas, y comprendidas entre el vértice y un plano secante (base) son conocidas como CONOS. Igualmente el punto de concurrencia de las generatrices se denomina VÉRTICE.

Los conos siempre son superficies dobles, simétricas respecto al punto fijo (Vértice), usualmente sólo se considera y representa una de sus ramas.

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Superficies poliédricas. Sección sencilla	• Secciones sencillas

SECCIÓN SENCILLA

Se definirá como SECCIÓN SENCILLA de un poliedro, a aquella que es producida por un plano que pasa por su vértice.

SUPERFICIES PRISMÁTICAS Y CILÍNDRICAS

En las superficies prismáticas y cilíndricas, las generatrices son paralelas, por lo que el "vértice" será un punto impropio por estar en el infinito. Un plano que pase o contenga a dicho vértice necesariamente será paralelo a las generatrices.

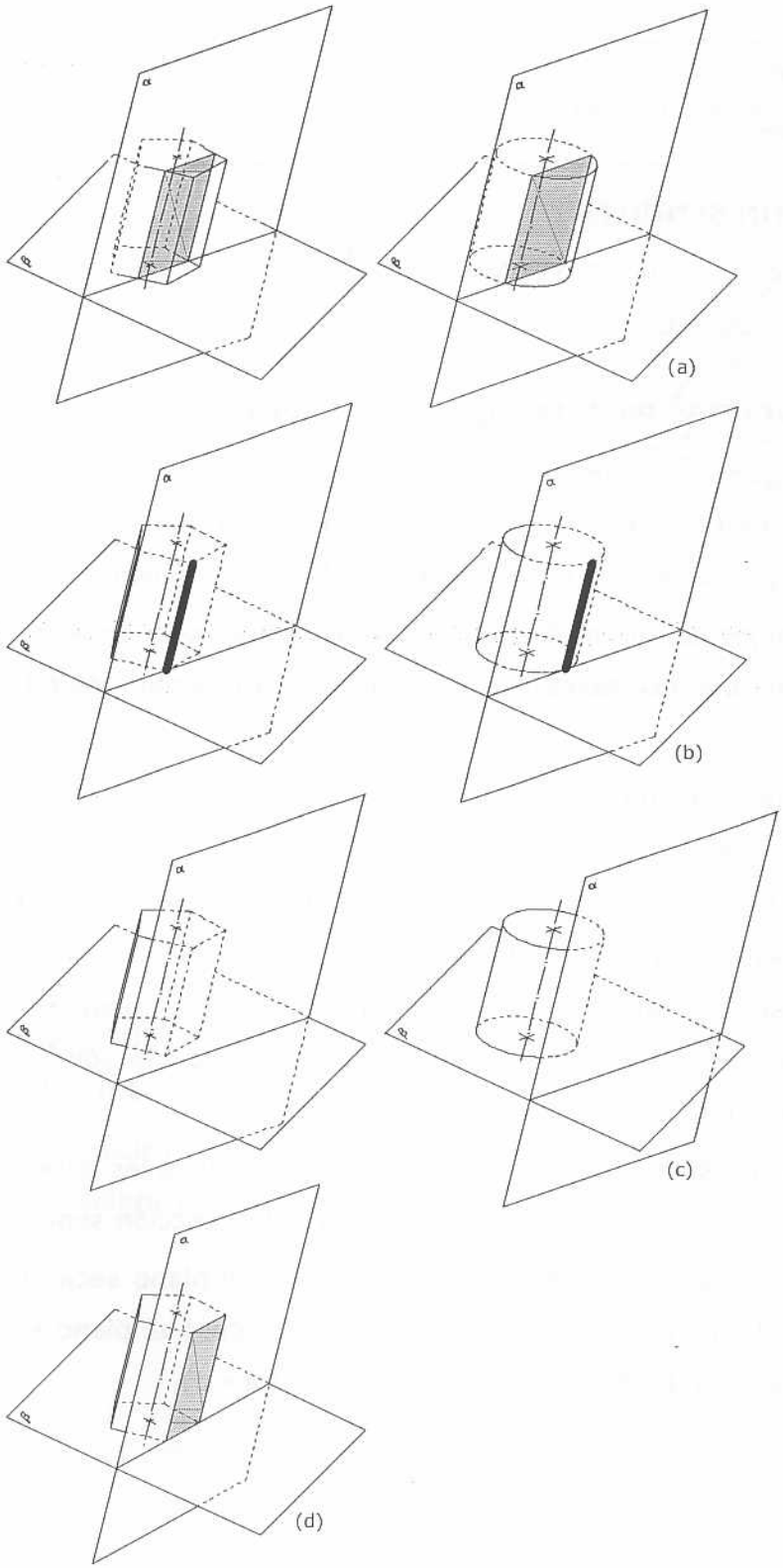
Para mejor comprensión sólo e estudiarán las secciones producidas en superficies limitadas por las bases o sea secciones en Prismas y/o Cilindros. (Ver las figuras anexas).

Si el plano secante al cortar las bases lo hace según secantes al polígono o curva directriz, también cortará a la superficie según dos generatrices, que serán paralelas. En cada caso la figura de la sección obtenida será un rectángulo. (Figura - a).

Si el plano secante al cortar las bases no corta a ninguno de los lados del polígono pero pasa por uno de sus vértices en el caso de un prisma o es tangente a la curva directriz, en el caso de un cilindro, el plano secante sólo originará en la superficie una recta que será una generatriz. (Figura - b).

Finalmente si el plano secante al cortarse con el de las bases, no corta a ninguno de los lados del polígono o a la curva, no existirá sección sencilla. (Figura - c).

En el caso de un prisma puede ocurrir que el plano secante pase por dos vértices consecutivos del polígono directriz. En este caso el plano secante coincidirá con el plano de una de las caras del prisma. (Figura - d).


α
β
(a)
(b)
(c)
(d)

SECCIONES SENCILLAS EN PRISMAS Y CILINDROS

SUPERFICIES PIRAMIDALES Y CÓNICAS

En las superficies piramidales y en las cónicas, las generatrices se cortan en el vértice.

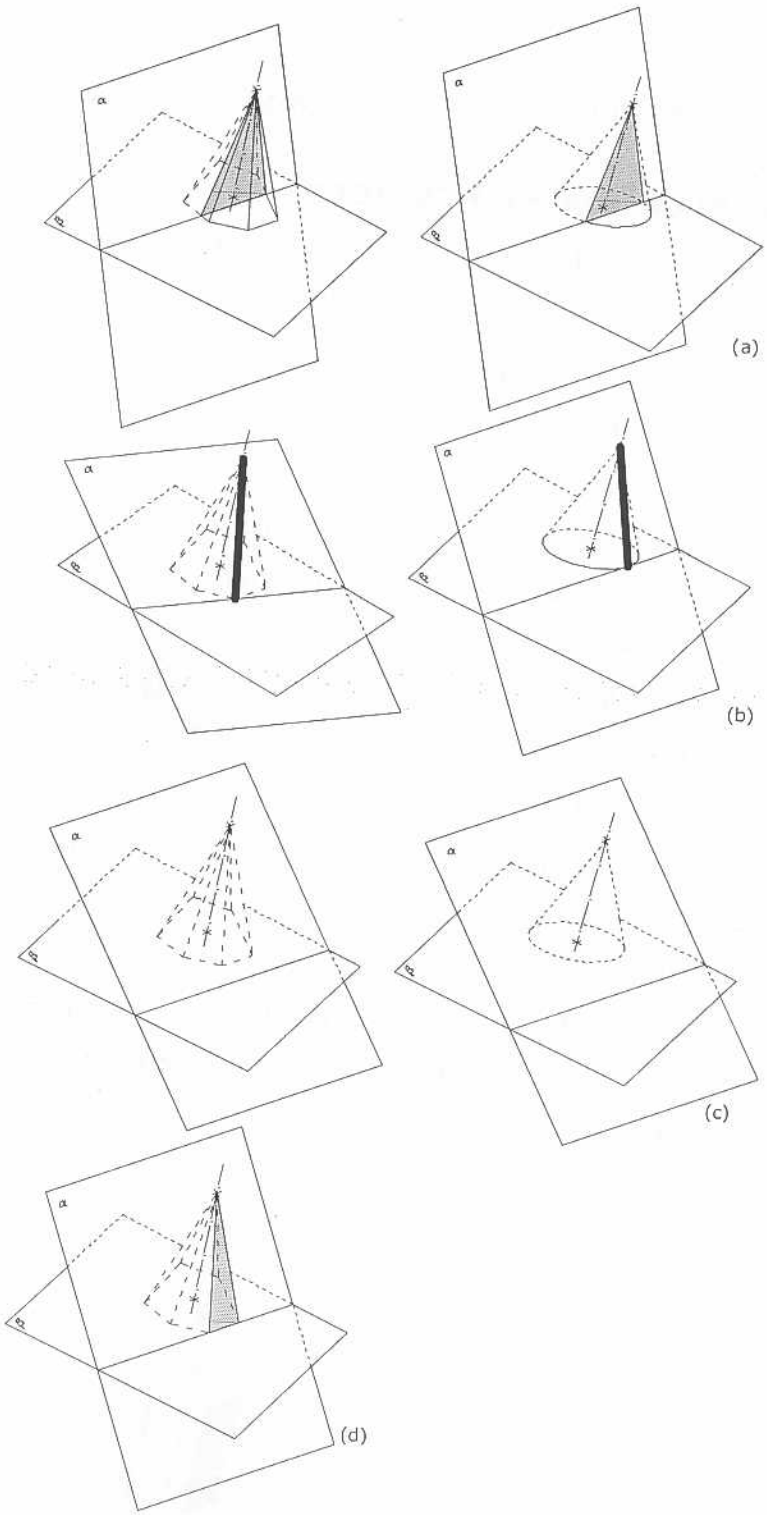
Un plano que pase o contenga a dicho vértice originará diferentes situaciones dependiendo de su inclinación. (Ver las figuras anexas)

Si el plano secante corta a dos de las aristas del polígono directriz dentro de su perímetro, o es una secante de la curva directriz se generará la sección sencilla, la cual necesariamente sólo podrá cortar a la superficie según dos de sus generatrices. La sección generada será un triángulo. (Figura - a)

Si el plano secante al cortar la base, contiene sólo a uno de los vértices del polígono directriz o es tangente a la curva directriz, la sección se reduce a una línea que es la generatriz que pasa por dicho vértice o punto de tangencia. (Figura – b)

Si el plano secante al cortar el plano de la base, no se interseca con ningún lado del polígono directriz o no pasa por uno de sus vértices, o no corta la curva directriz en los conos, no existirá la sección sencilla. (Figura – c)

En las pirámides puede darse el caso, al igual que en los prismas, que el plano secante contenga una de las aristas del polígono directriz. La sección sencilla coincidirá con una cara de la pirámide. (Figura – d).



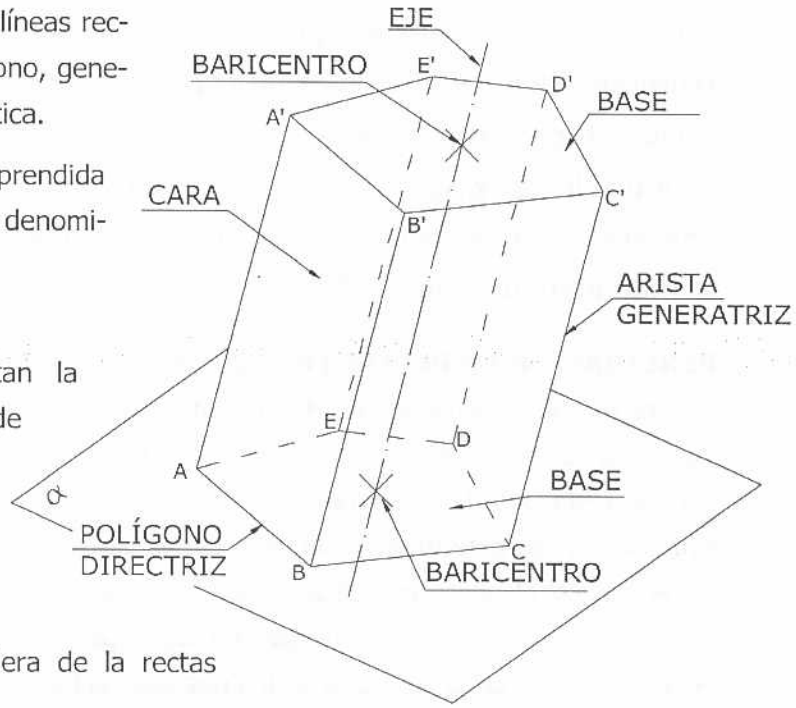
SECCIONES SENCILLAS EN PIRÁMIDES Y CONOS

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Poliedros. Prismas	• Definiciones y elementos notables • Proyecciones • Penetración de una recta en un prisma • Otras secciones planas. Visibilidad y representación de parte del prisma

DEFINICIONES Y ELEMENTOS NOTABLES

Como fue mencionado el conjunto de líneas rectas paralelas apoyadas sobre un polígono, generan una superficie denominada prismática.

La porción de estas superficies comprendida entre dos planos secantes (Bases), se denominan simplemente PRISMAS.



ELEMENTOS NOTABLES

BASES, Secciones planas que limitan la extensión del sólido. De la forma de estas secciones se deriva el nombre del poliedro. Así se tendrán prismas cuadrados, triángulares, pentagonales, etc.

RECTA GENERATRIZ, Es una cualquiera de la rectas paralelas que "generan" la superficie.

ARISTA, Son las generatrices que pasan por los vértices de las bases. También son aristas los lados del polígono de las bases.

POLÍGONO DIRECTRIZ, Es el polígono, regular o no, que "dirige" la posición de las rectas generatrices.

CARA, Son los planos comprendidos entre las aristas.

BARICENTRO, Como lo indica su nombre es el Centro de Gravedad del polígono directriz (Bases).

EJE, Es la recta paralela a las generatrices, que pasa por el Baricentro de las bases. La posición relativa del eje y las bases define, adicionalmente a la forma de la directriz, el nombre del poliedro. Si el ángulo entre las bases y el eje es recto (90°), el prisma será RECTO, si el ángulo es diferente al recto será OBLICUO.

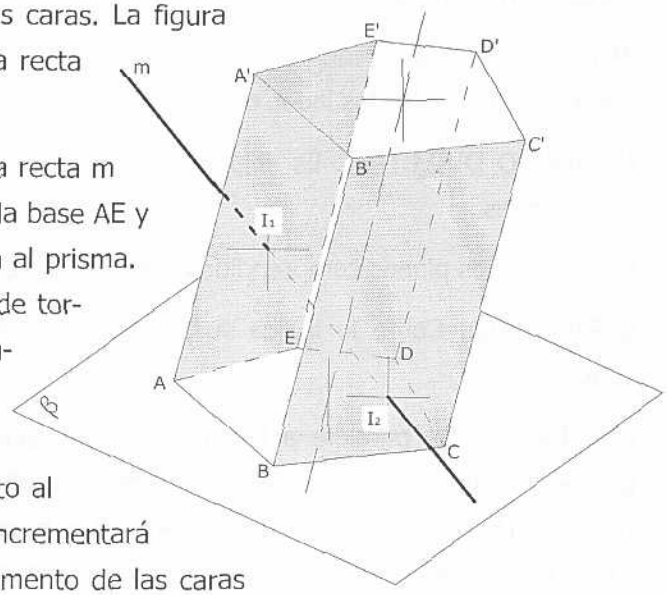
ALTURA, es la distancia, medida en forma perpendicular, entre las bases.

PROYECCIONES

La proyección de un prisma, en cualquiera de los sistemas en el cual se quiera representar, se limitará a encontrar las proyecciones de las bases. Luego se trazarán las aristas entre los vértices correspondientes de las bases. Conseguidas las proyecciones se deberá pasar a representar las zonas visibles y las ocultas del sólido. Todas las aristas que en una proyección constituyan el contorno de la representación serán visibles. Aristas que pertenezcan a caras visibles son visibles y las que pertenezcan a caras ocultas serán ocultas. Es de hacer notar que una cara puede ser visible en una proyección y oculta en otra. Si a un vértice concurre una arista oculta todas las concurrentes también lo serán, se exceptúan las que forman parte del contorno.

PENETRACIÓN DE RECTAS EN PRISMAS. MÉTODO DE PENETRACIÓN SIMPLE

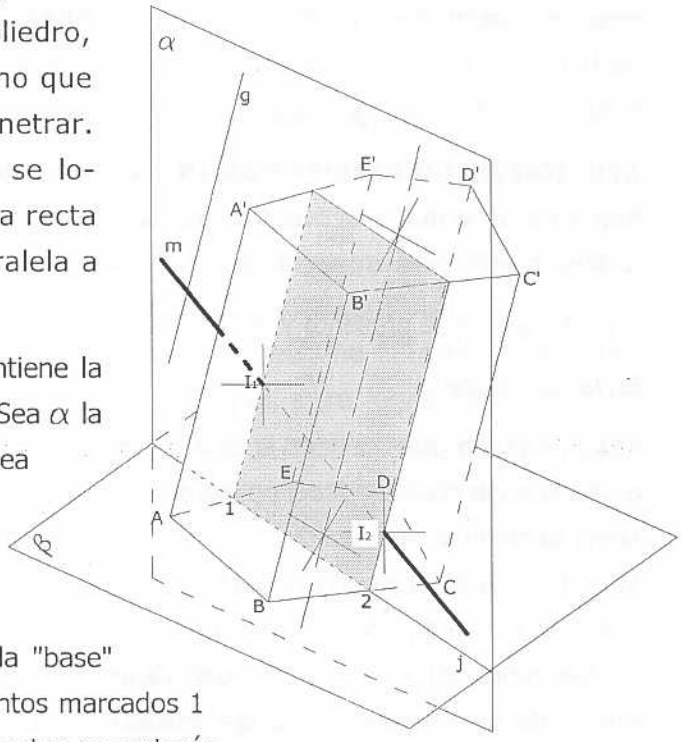
Una recta que penetra un prisma lo hará en dos puntos. El método más directo de encontrar los puntos de penetración, pero no por directo el menos laborioso, consiste en penetrar la recta con cada uno de los planos que conforman las caras del prisma. Aunque los planos son ilimitados en su extensión, en el caso de las caras de los poliedros, éstas están limitadas por las aristas, si el punto encontrado está fuera de dichos límites, la recta "pasa" por fuera del prisma, al menos en lo que concierne a dicha cara. Si punto hallado se ubica dentro del área de la cara, ese punto será uno de los dos que se buscan. Así se continúa hasta encontrar dos que si estén dentro del perímetro de sendas caras. La figura anexa muestra una típica disposición de una recta interactuando con un prisma.



Los puntos I_1 e I_2, los cuales pertenecen a la recta m y respectivamente a las caras con aristas en la base AE y BC, son los puntos donde la recta m penetra al prisma. El procedimiento de penetración simple puede tornarse muy laborioso, sin embargo una minuciosa observación de las figuras en el espacio permitirá, en algún modo, tratar con los planos con mayores posibilidades de éxito al encontrar los puntos. Esta "dificultad" se incrementará en forma directamente proporcional al incremento de las caras del poliedro.

PENETRACIÓN DE RECTAS EN PRISMAS. MÉTODO DE LA SECCIÓN SENCILLA

Para la determinación directa de los puntos de penetración de una recta en un poliedro, se define una sección Sencilla del mismo que contenga a la recta que se quiere penetrar. Operativamente, en los prismas, esto se logra al trazar un plano que contenga a la recta que se quiere penetrar y una recta paralela a las generatrices.



En la figura anexa, sea β el plano que contiene la base o una sección cualquiera del prisma. Sea α la Sección Sencilla que contiene a la recta m. Sea j la recta la intersección de los planos α y β.

La recta j cortará a dos de las aristas de la "base" dentro del perímetro de la misma en los puntos marcados 1 y 2. Las generatrices que pase por dichos puntos se cortarán con m en los puntos I_1 e I_2 Estos puntos son la penetración de la recta m en el prisma.

Si la recta j no se corta con ninguna de las aristas de la base o sección, dentro de su perímetro, la recta m no penetra al prisma.

Como puede observarse el método es directo y no hay ningún tipo de tanteo o prueba.

OTRAS SECCIONES PLANAS DE PRISMAS. NATURALEZA DE LA SECCIÓN

Una sección plana de un prisma no es más que la intersección del mismo con un plano. Bastará encontrar los puntos comunes a ambos para obtener dicha sección plana. Por ser sus caras planos, los puntos comunes estarán sobre la intersección de cada cara con el plano secante. Estos puntos estarán sobre los segmentos de rectas comprendidos entre los puntos de penetración de las aristas en el plano secante. Luego, si se encuentran todos los puntos de penetración de las aristas se obtendrá el polígono que constituye la sección plana. En los prismas todas las secciones que se obtendrán serán polígonos cerrados cuyos lados son las rectas de intersección de cada cara o base con el plano secante.

SECCIÓN PLANA POR PENETRACION SIMPLE

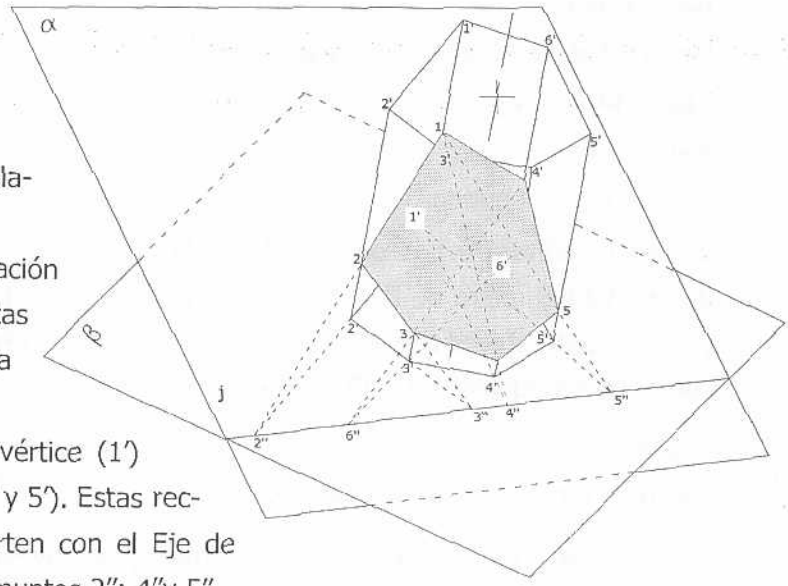
Se refiere a la penetración de cada una de las aristas del prisma en el plano secante. El método es directo y en principio como su nombre lo indica simple, pero puede tornarse muy laborioso en función del número de aristas del poliedro que se deban penetrar en el plano. Se trata de hallar el punto de penetración de cada arista en el plano secante. El conjunto de puntos hallados conformarán la sección plana.

SECCIÓN DE UN PRISMA POR INTERSECCIÓN DE PLANOS (HOMOLOGÍA)

Resulta mucho más efectivo y al final de cuenta más sencillo, utilizar el método de la intersección de planos para encontrar la sección del poliedro.

A continuación se presenta y discute este método.

En la figura anexa:



Sea β el plano que contiene la base o una sección cualquiera del poliedro.
Sea α el plano secante.
Sea j la recta intersección de ambos planos, que será el Eje de Homología.
Se determina el punto 1, por penetración simple de una cualquiera de las aristas del prisma en el plano secante α. Esta arista tendrá en la base el vértice (1').

- Se trazan rectas que unan dicho vértice (1') con otros vértices en la base (2'; 4' y 5'). Estas rectas se prolongan hasta que se corten con el Eje de Homología (recta j), en el ejemplo, puntos 2''; 4''y 5''.
- Se trazan rectas desde cada uno de estos puntos hasta el punto 1. Éstas se cortarán a su vez con las aristas que pasan por los vértices en la base (2; 4' y 5').
  Estos puntos de corte (2; 4 y 5) serán vértices de la sección plana generada por el plano secante α.
- Cada nuevo punto determinado podrá ser utilizado como apoyo para encontrar otro. Continuando con el mismo procedimiento se determinarán todos los puntos que sean requeridos.

Discusión del método:

Las aristas por 1' y 2' (también por 4' y 5') y el punto 2'' (también 4'' y 5''), forman planos que contienen caras del poliedro.

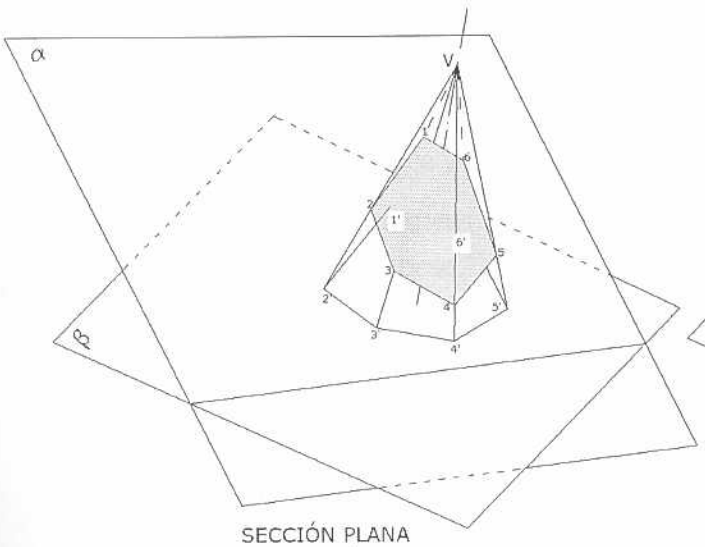
Las rectas 1-2'; 1-4' y 1-5', pertenecen a dichos planos, y se cortarán con las aristas por 2'; 4' y 5', por pertenecer éstas al plano secante α. Luego el punto de corte será el de penetración de la arista en el plano, o sea un punto de la sección del poliedro. En forma similar se podrá discutir el procedimiento cuando se utilizan rectas secantes al polígono de la base, trabajando entonces con un plano secante en lugar de un plano de una cara.

VISIBILIDAD Y REPRESENTACIÓN DE PARTE DEL PRISMA (TRONCO)

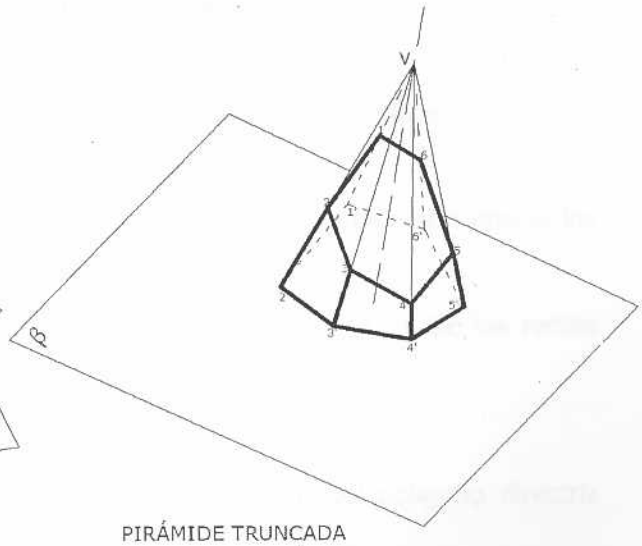
La única regla que existe para lograr representar la visibilidad de un sólido es que toda arista que esté contenida en una cara oculta, estará oculta; toda arista que esté contenida en una cara visible será visible. Una arista que sea límite entre una cara oculta y una cara visible, formará parte del contorno de la proyección y será visible. La condición de visibilidad cambia con el punto de observación, o sea una cara oculta en una proyección, puede ser visible en otra. En DPO, por ejemplo, para lograr la proyección horizontal (PH) el observador está ubicado en el infinito y por encima del PHP, sólo serán visibles los puntos de mayor cota, por ser éstos los que están más cerca del observador. Para la proyección sobre el PVP, el observador se ubicará en el infinito pero viendo hacia el PVP. Serán visibles los puntos que estén más cerca, o sea los de mayor vuelo.

Se denomina TRONCO a la parte de un sólido limitada por su base y un plano secante.

Las figuras ilustran un prisma seccionado por el plano α y la representación del Tronco de Prisma con base sobre el plano β.



SECCIÓN PLANA
DE LA PIRÁMIDE



PIRÁMIDE TRUNCADA
TRONCO DE PIRÁMIDE

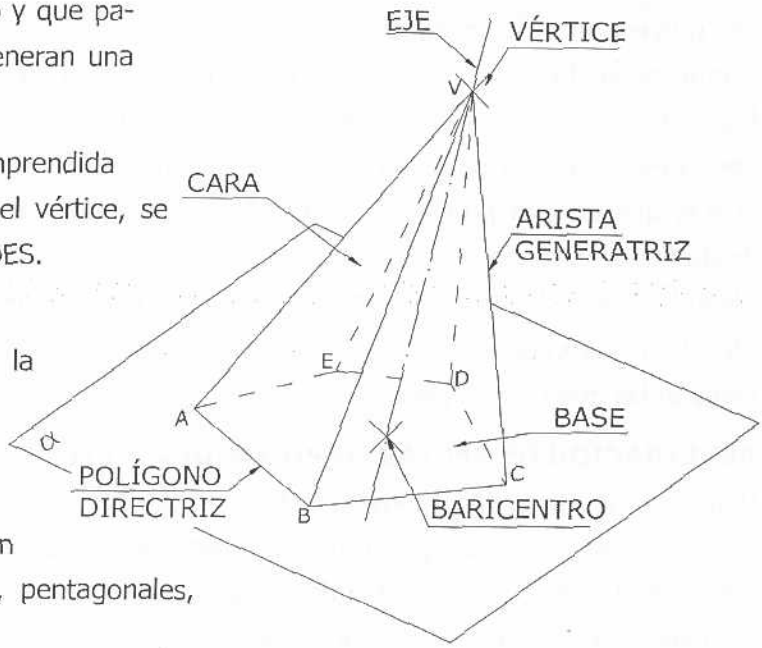
PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Poliedros. Pirámides	• Definiciones y elementos notables • Proyecciones • Penetración de una recta en una pirámide • Secciones planas. Visibilidad y representación de parte de la pirámide

DEFINICIONES Y ELEMENTOS NOTABLES

Como fue mencionado el conjunto de líneas rectas apoyadas sobre un polígono y que pasan por un punto fijo (Vértice), generan una superficie denominada piramidal.

La porción de estas superficies comprendida entre un plano secante (Base) y el vértice, se denominan simplemente PRIRÁMIDES.



ELEMENTOS NOTABLES

BASE, Sección plana que limita la extensión del sólido entre ella y el vértice. De la forma de esta seccione se deriva el nombre del poliedro. Así se tendrán pirámides cuadradas, triángulares, pentagonales, etc.

VÉRTICE, Punto fijo donde concurren todas las aristas, distintas a las de la base.

RECTA GENERATRIZ, Es una cualquiera de la rectas que "generan" la superficie. Son rectas que concurren en el vértice y se apoyan en el polígono directriz.

ARISTA, Son las generatrices que pasan por los vértices de la base. También son aristas los lados del polígono de la base.

POLÍGONO DIRECTRIZ, Es el polígono, regular o no, que "dirige" la posición de las rectas generatrices.

CARA, Son lo planos comprendidos entre las aristas.

BARICENTRO, Como lo indica su nombre es el Centro de Gravedad del polígono directriz (Base).

EJE, Es la recta que pasa por el Vértice y el Baricentro de la base. La posición relativa del eje y la base define, adicionalmente a la forma de la directriz, el nombre del poliedro. Si el ángulo entre la base y el eje es recto (90°), la pirámide será RECTA, si el ángulo es diferente al recto será OBLICUA.

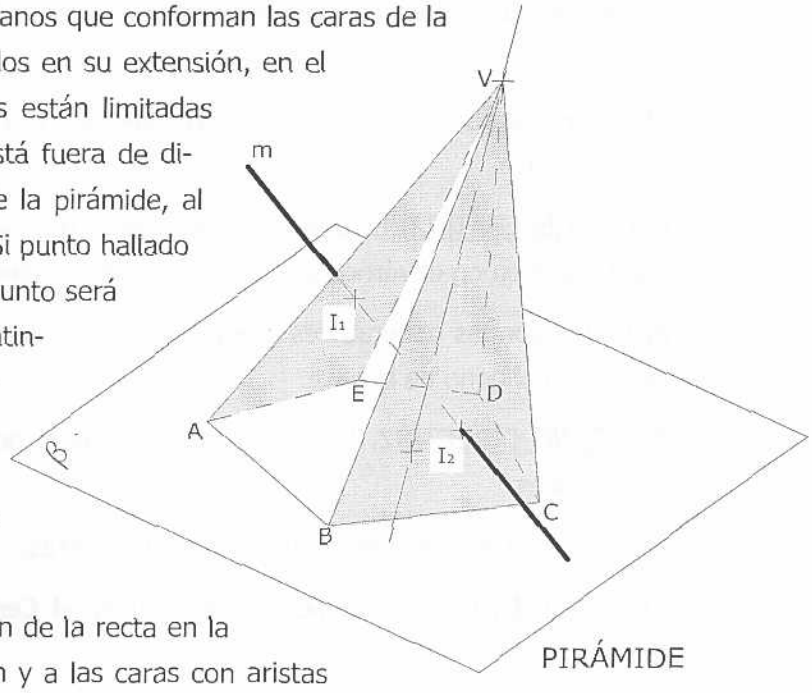
ALTURA, es la distancia, medida en forma perpendicular, entre el vértice y la base.

PROYECCIONES

Las proyecciones de las pirámides, en cualquiera de los sistemas en el cual se quieran representar, se limitarán a encontrar las proyecciones de la base y del vértice. Luego se trazarán las aristas entre éste y los correspondientes de la base. Conseguida la proyección o las proyecciones se deberá pasar a representar las zonas visibles y las ocultas del sólido. Todas las aristas que en una proyección constituyan el contorno de la representación serán visibles. Aristas que pertenezcan a caras visibles son visibles y las que pertenezcan a caras ocultas serán ocultas. Es de hacer notar que una cara puede ser visible en una proyección y oculta en otra. Si a un vértice concurre una arista oculta todas las concurrentes también lo serán, se exceptúan las que forman parte del contorno.

PENETRACIÓN DE RECTAS EN PIRÁMIDES. MÉTODO DE PENETRACIÓN SIMPLE

Una recta que penetra un prisma lo hará en dos puntos. El método más directo de encontrar los puntos de penetración, pero no por directo el menos laborioso, consiste en definir la penetración de la recta con cada uno de los planos que conforman las caras de la pirámide. Aunque los planos son ilimitados en su extensión, en el caso de las caras de los poliedros, éstas están limitadas por las aristas, si el punto encontrado está fuera de dichos límites, la recta "pasa" por fuera de la pirámide, al menos en lo que concierne a dicha cara. Si punto hallado se ubica dentro del área de la cara, ese punto será uno de los dos que se buscan. Así se continúa hasta encontrar dos que si estén dentro del perímetro de sendas caras. La figura anexa muestra una típica disposición de una recta interactuando con una pirámide.



Los puntos I_1 e I_2, son los de penetración de la recta en la pirámide, ya que pertenecen a la recta m y a las caras con aristas en la base AE y BC. El procedimiento puede resultar largo y tedioso, sin

embargo una minuciosa observación de las figuras en el espacio permitirá, en algún modo, tratar con los planos con mayores posibilidades de éxito al encontrar los puntos. Esta "dificultad" se incrementará en forma directamente proporcional al incremento de las caras del poliedro.

PENETRACIÓN DE RECTAS EN PIRÁMIDES. MÉTODO DE LA SECCIÓN SENCILLA

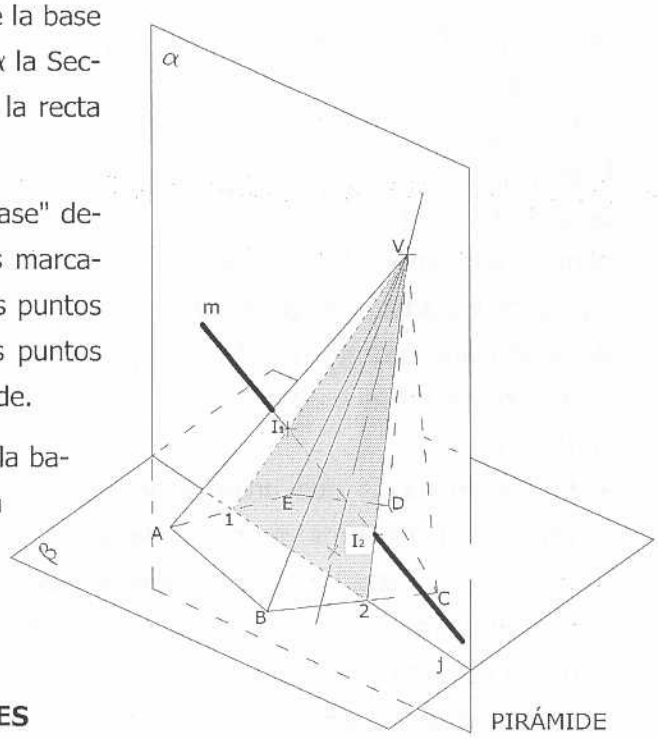
Para la determinación directa de los puntos de penetración de una recta en un poliedro, se define una Sección Sencilla del mismo que contenga a la recta que se quiere penetrar. Operativamente, en una pirámide esto se logra al trazar un plano que contenga a la recta que se quiere penetrar y su vértice.

En la figura anexa, sea β el plano que contiene la base o una sección cualquiera de la pirámide. Sea α la Sección Sencilla que contiene a la recta m. Sea j la recta la intersección de los planos α y β.

La recta j cortará a dos de las aristas de la "base" dentro del perímetro de la misma en los puntos marcados 1 y 2. Una generatriz que pase por dichos puntos se cortará con m en los puntos I_1 e I_2. Estos puntos son la penetración de la recta m en e la pirámide.

Si la recta j no se corta con ninguna arista de la base o sección, dentro de su perímetro, la recta m no penetra a la pirámide.

Como se puede observar el método es directo y no hay ningún tipo de tanteo o prueba.



PIRÁMIDE

OTRAS SECCIONES PLANAS DE PIRÁMIDES

Una sección plana de una pirámide no es más que la intersección de la misma con un plano. Bastará encontrar los puntos comunes a ambos para obtener dicha sección plana. Por ser sus caras planos, los puntos comunes estarán sobre la intersección de cada cara con el plano secante. Estos puntos estarán sobre los segmentos de rectas comprendidos entre los puntos de penetración de las aristas en el plano secante. Si se encuentran todos los puntos de penetración de las aristas se obtendrá el polígono que constituye la sección plana.

SECCIÓN PLANA POR PENETRACION SIMPLE

Se refiere a la penetración de cada una de las aristas de la pirámide en el plano secante. El método es directo y en principio como su nombre lo indica simple, pero puede tornarse muy laborioso en función del número de aristas del poliedro que se deban penetrar en el plano. Se

trata de hallar el punto de penetración de cada arista en el plano secante. El conjunto de puntos hallados conformarán la sección plana.

SECCIÓN DE UN POLIEDRO POR INTERSECCIÓN DE PLANOS (HOMOLOGÍA)

Resulta mucho más efectivo y al final de cuenta el más simple, utilizar el método de la intersección de planos para encontrar la sección del poliedro.

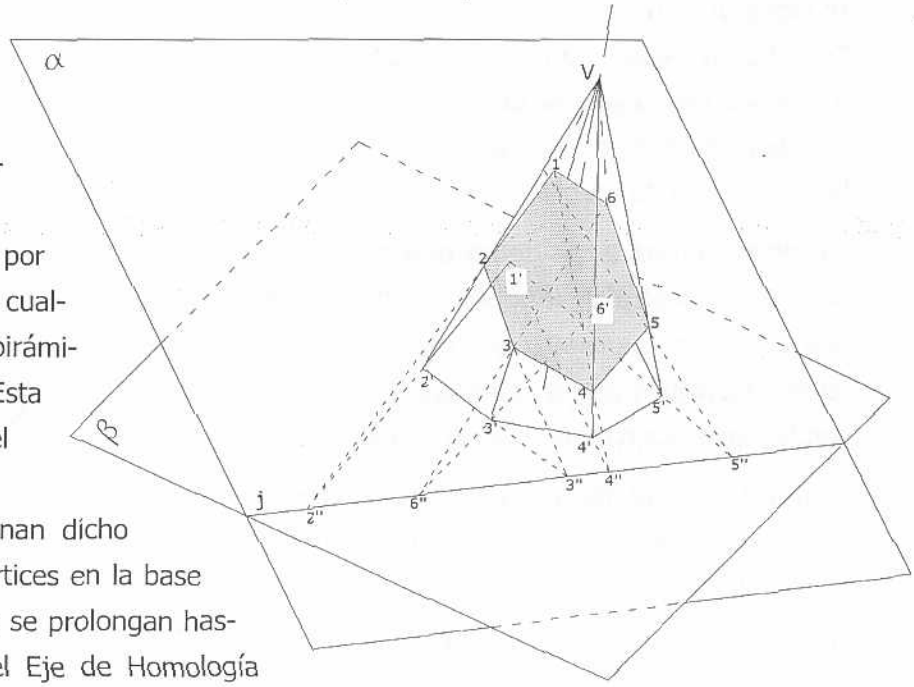
A continuación se presenta y discute este método.

Sea β el plano que contiene la base o una sección cualquiera del poliedro.

Sea α el plano secante.

Sea j la recta intersección de ambos planos, que será el Eje de Homología.

Se determina el punto 1, por penetración simple de una cualquiera de las aristas de la pirámide en el plano secante α. Esta arista tendrá en la base el vértice (1').



- Se trazan rectas que unan dicho vértice (1') con otros vértices en la base (2'; 4' y 5'). Estas rectas se prolongan hasta que se corten con el Eje de Homología (recta j) en los puntos 2''; 4''y 5''.
- Se trazan rectas desde cada uno de estos puntos hasta el punto 1. Éstas se cortarán a su vez con las aristas que pasan por los vértices en la base (2; 4' y 5').
  Estos puntos de corte (2; 4 y 5) serán puntos de la sección plana generada por el plano secante α.
- Cada nuevo punto determinado podrá ser utilizado como apoyo para encontrar otro. Continuando con el mismo procedimiento se determinarán todos los puntos que sean requeridos.

Discusión del método: Las aristas por 1' y 2' (también por 4' y 5') y el punto 2'' (también 4'' y 5''), forman planos que contienen caras del poliedro.

Las rectas 1-2'; 1-4' y 1-5', pertenecen a dichos planos.

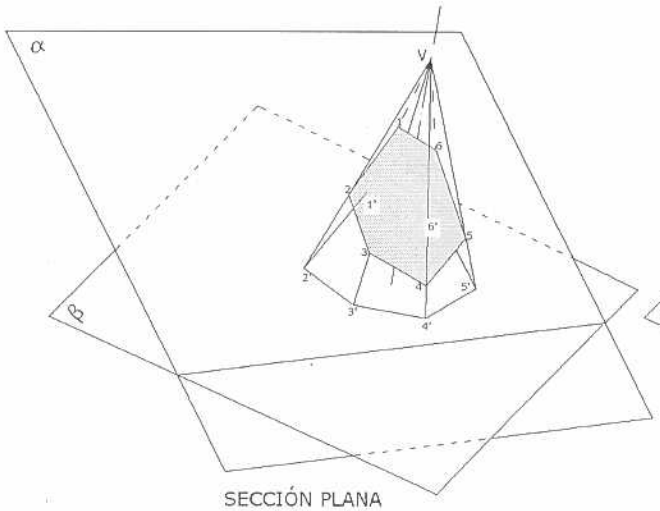
Luego se cortarán con las aristas por 2'; 4' y 5'. Por pertenecer éstas al plano secante α. Luego el punto de corte será el de penetración de la arista en el plano, o sea un punto de la sec-

ción de la pirámide. En forma similar se podrá discutir el procedimiento cuando se utilizan rectas secantes al polígono de la base, trabajando entonces con un plano secante en lugar de un plano de una cara.

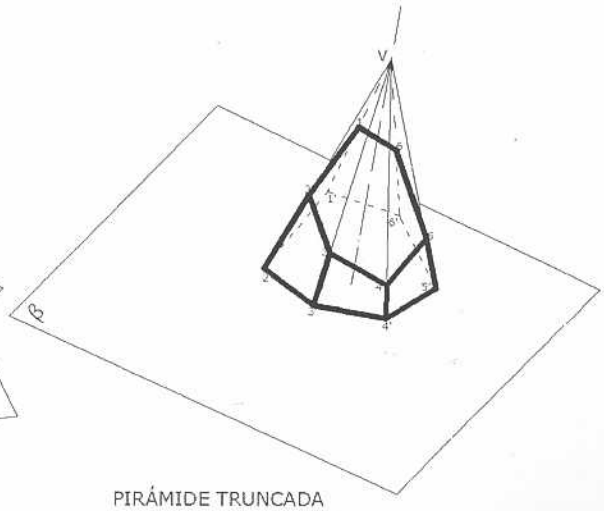
VISIBILIDAD Y REPRESENTACIÓN DE PARTE DE LA PIRÁMIDE (TRONCO)

La única regla que existe para lograr representar la visibilidad de un sólido es que toda arista que esté contenida en una cara oculta, estará oculta; toda arista que esté contenida en una cara visible será visible. Una arista que sea límite entre una cara oculta y una cara visible, formará parte del contorno de la proyección y será visible. La condición de visibilidad cambia con el punto de observación, o sea una cara oculta en una proyección, puede ser visible en otra. En DPO, por ejemplo, para lograr la proyección horizontal (PH) el observador está ubicado en el infinito y por encima del PHP, sólo serán visibles los puntos de mayor cota, por ser éstos los que están más cerca del observador. Para la proyección sobre el PVP, el observador se ubicará en el infinito pero viendo hacia el PVP. Serán visibles los puntos que estén más cerca, o sea los de mayor vuelo.

Se denomina TRONCO a la parte de un sólido limitada por su base y un plano secante. Las figuras ilustran una pirámide seccionada por el plano α y la representación del Tronco de Pirámide con base sobre el plano β.



SECCIÓN PLANA
DE LA PIRÁMIDE



PIRÁMIDE TRUNCADA
TRONCO DE PIRÁMIDE

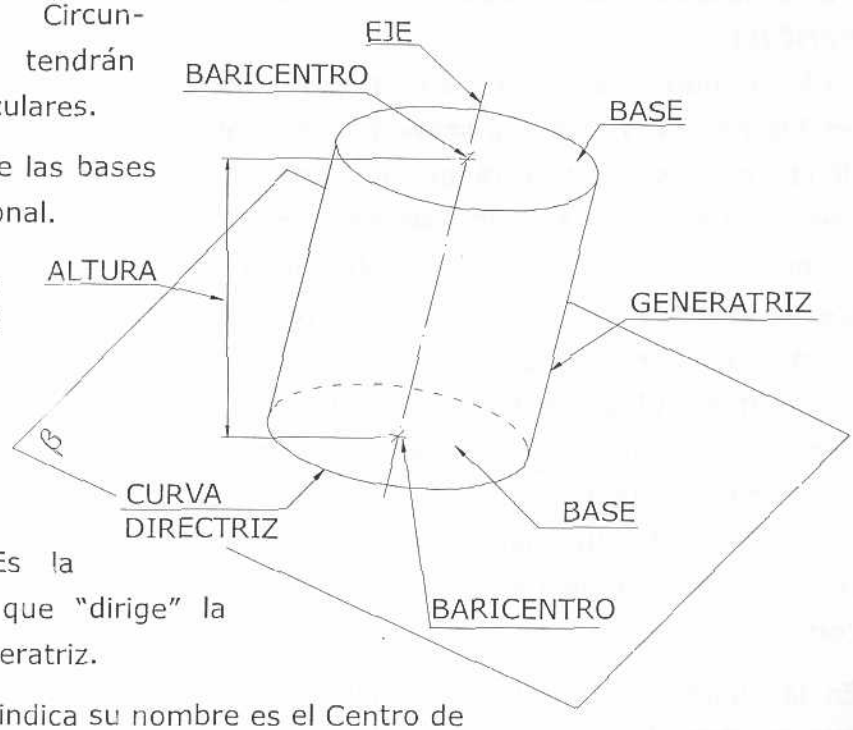
PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Poliedros. Cilindros	• Definiciones y elementos notables • Proyecciones • Penetración de una recta. • Secciones planas. Naturaleza. Homología • Visibilidad y representación de parte del sólido

DEFINICIONES Y ELEMENTOS NOTABLES

El conjunto de rectas paralelas apoyada en una figura geométrica plana curva, genera unas superficies denominadas cilíndricas. La porción de estas superficies comprendida entre dos planos secantes (Bases), se denominan simplemente CILINDROS.

BASES, Secciones planas iguales y paralelas que limitan la extensión del sólido. De la forma de estas secciones se deriva el nombre del mismo. En esta oportunidad sólo se considerarán los sólidos generados sobre curvas cerradas de segundo orden (Elipses o Circunferencias). Así se tendrán Cilindros, elípticos o circulares.



ALTURA, Distancia entre las bases medida en forma ortogonal.

RECTA GENERATRIZ, Cualquiera de la rectas paralelas al eje que apoyadas en el polígono directriz "genera" el sólido.

CURVA DIRECTRIZ, Es la curva, regular o no, que "dirige" la posición de la recta generatriz.

BARICENTRO, Como lo indica su nombre es el Centro de Gravedad de la curva directriz (Base).

EJE, Es la recta que pasa por el Baricentro de las bases. El eje es paralelo a las rectas generatrices.

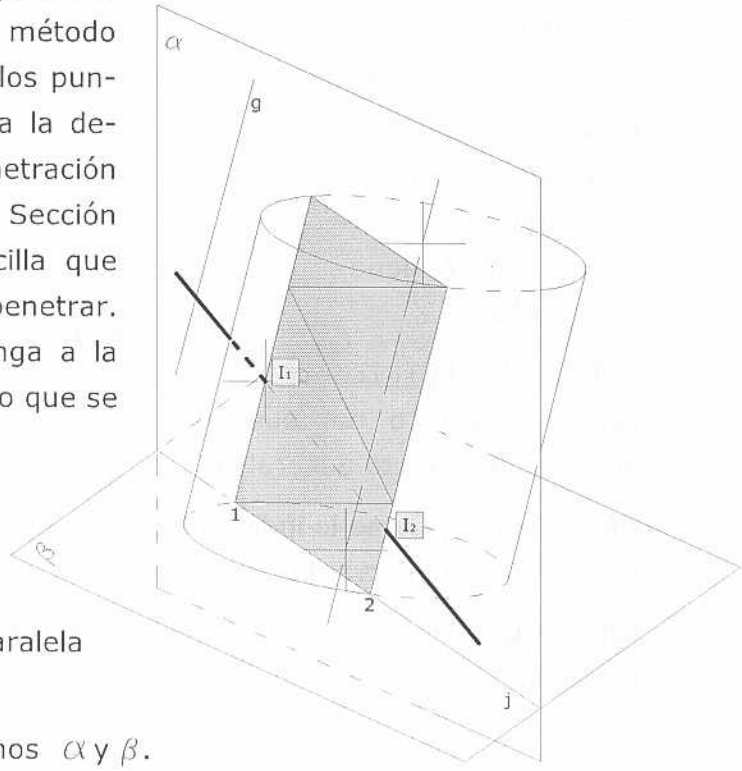
La posición relativa del eje y la base define, adicionalmente a la forma de la directriz, el nombre del sólido. Si el ángulo entre la base y el eje es recto (90°), el cilindro será RECTO, u OBLICUOS si el ángulo es diferente al recto.

PROYECCIONES

Las proyecciones de los cilindros, en cualquiera de los sistemas en el cual se quiera representar, se limitarán a encontrar la o las proyecciones de las bases. Como quiera que estos sólidos se pueden asemejar a poliedros de infinitas caras, no existirá la representación de "aristas". La proyección se limitará a representar los bordes o contorno en cada proyección. Conseguida la proyección o las proyecciones se deberá pasar a representar las zonas visibles y las ocultas del sólido. Sin embargo en estos casos la visibilidad sólo podrá ser representada en cada una de las bases, donde generalmente una será visible y la otra oculta. Es de hacer notar que una base puede ser visible en una proyección y oculta en otra.

PENETRACIÓN DE RECTAS EN CILINDROS. MÉTODO DE LA SECCIÓN SENCILLA

En los cilindros, como se mencionó, no existen "caras" definidas tal como ocurre en los poliedros como prismas y pirámides. En consecuencia no existen planos donde penetrar una recta que lo haga en el sólido, no se puede entonces utilizar el método de penetración simple para encontrar los puntos de penetración de una recta. Para la determinación de los puntos de penetración habrá que utilizar el método de la Sección Sencilla. Se define una Sección Sencilla que contenga a la recta que se quiere penetrar. Operativamente, un plano que contenga a la recta y a una paralela al eje del cilindro que se corte con la misma.



En la figura anexa: Sea β el plano que contiene la base o una sección cualquiera del poliedro. Sea α un plano definido por la recta m y una paralela al eje que se corte con m (recta g).

Sea la recta j la intersección de los planos α y β.

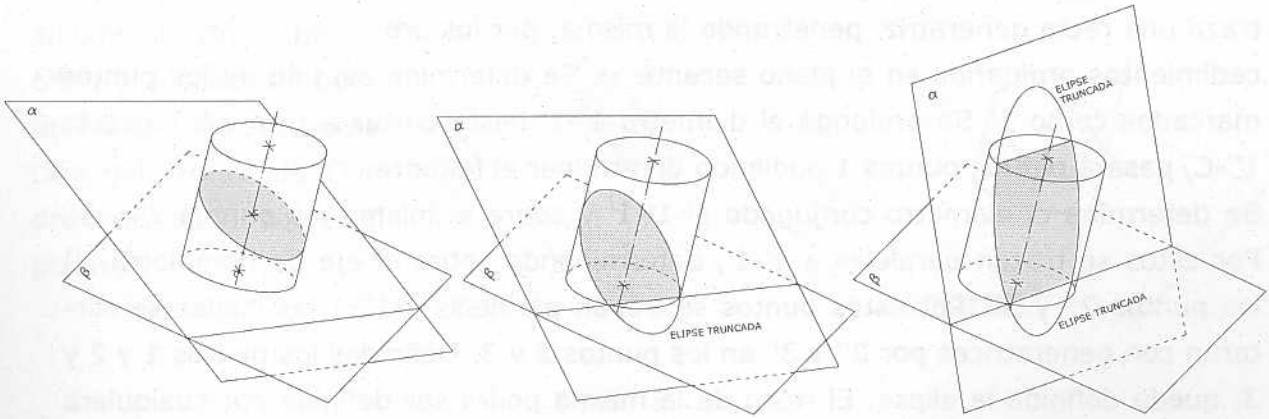
La recta j podrá ser externa a la curva de la base, podrá ser tangente o podrá cortarla en dos puntos (Ver 09-05 / Secciones Sencillas). En el primer caso la recta m no penetrará al sólido, en el segundo, que sea tangente a la base, la recta m será a su vez tangente al cilindro y, en el caso que la corte en dos puntos, la recta m si penetrará al sólido. Sean 1 y 2 los puntos donde se cortan la base y la recta j. Las generatrices trazadas por dichos puntos, se cortarán con m en los puntos I_1 e I_2 Estos puntos son la penetración de la recta m en el sólido.

NATURALEZA DE LAS SECCIONES PLANAS DE CILINDROS CIRCULARES RECTOS

Sólo se estudiarán las secciones en superficies cilíndricas (Cilindros) circulares rectos.

Las secciones de las superficies cilíndricas son curvas de segundo orden. Por su carácter de infinitos en longitud y, de simetría por su sección recta, todo plano secante a la superficie cortará a todas las rectas generatrices, por lo que todas las secciones planas de las superficies cilíndricas serán curvas cerradas come seundo orden, serán elipses. Incluso las originadas por planos paralelos al eje que son de forma rectangular, las cuales pueden ser consideradas como elipses de excentricidad infinita, o las originadas por planos perpendiculares al eje, de forma circular, las cuales pueden ser consideradas como elipses de excentricidad nula (cero). Todas estas secciones tendrán su centro coincidente con el eje de la superficie cilíndrica.

Sin embargo se debe tener cuidado al observar algunas secciones de cilindros (Limitados por sus bases) en los cuales la sección elíptica se muestre cortada o truncada por dichas bases. En efecto y especialmente cuando sólo se limita una parte de la elipse, puede ser confundida erróneamente con una parábola, cuando en realidad es una elipse truncada. Las figuras anexas ilustran estas secciones.



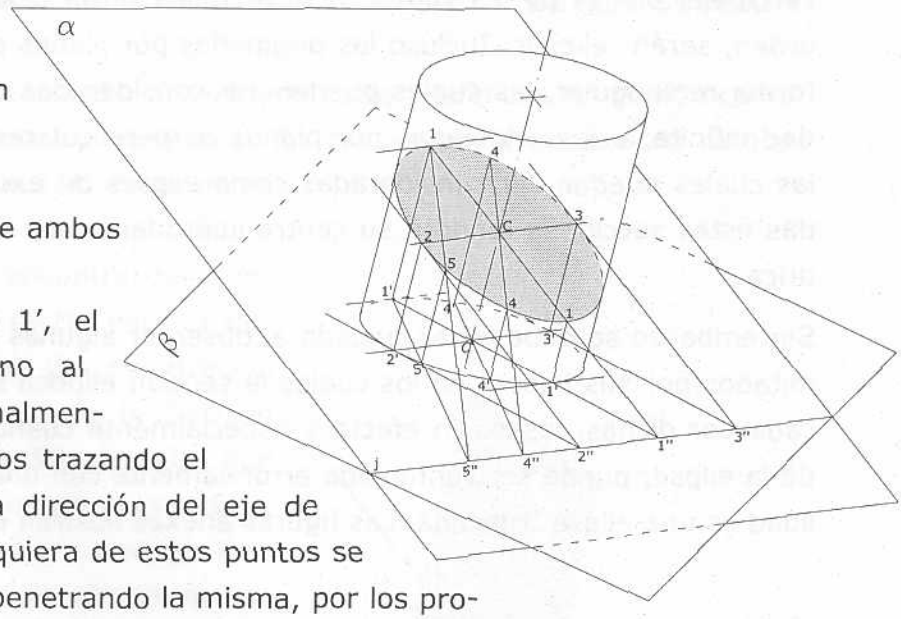
DETERMINACIÓN DE LAS SECCIONES PLANAS POR INTERSECCIÓN DE PLANOS (HOMOLOGÍA)

Como se mencionó, en los cilindros no existen "aristas" definidas, por lo que buscar la intersección de las mismas con el plano secante resultará una labor absolutamente aleatoria. Claro que trazando muchas generatrices se encontrará la forma de la sección plana que se busca. Sin embargo resultará mucho más "académico" y por lo demás mucho más adecuado, trabajar con las generatrices que pasen por puntos notables de la sección.

Ahora bien este procedimiento es mucho más expedito y al final de cuenta más sencillo, si se realiza utilizando el método de la intersección de planos para encontrar por homología de las figuras la penetración de las generatrices seleccionadas como las más adecuadas.

A continuación se presenta y discute el método.

En la figura anexa:



Sea β el plano que contiene la base o una sección cualquiera del sólido.
Sea α el plano secante.
Sea j la recta intersección de ambos planos. Eje de homología.
Se determinan los puntos 1', el más alejado y el más cercano al eje de homología. Operacionalmente estos podrán ser definidos trazando el diámetro perpendicular a la dirección del eje de homología (j). Por uno cualquiera de estos puntos se traza una recta generatriz, penetrando la misma, por los procedimientos ordinarios en el plano secante α. Se determina así uno de los puntos marcados como 1. Se prolonga el diámetro 1'-1' hasta cortar a j en 1". La recta 1"-C, pasará por los puntos 1 pudiendo determinar el faltante.
Se determina el diámetro conjugado al 1'-1' y sobre el mismo los puntos 2' y 3'. Por estos se trazan paralelas a 1'-1', determinando sobre el eje de homología (j) los puntos 2" y 3". Por estos puntos se trazan paralelas a 1"-1 las cuales se cortarán con generatrices por 2" y 3" en los puntos 2 y 3. Definidos los puntos 1 y 2 y 3, queda definida la elipse. El resto de la misma podrá ser definido por cualquiera

de los procedimientos adecuados para el trazado de elipses (Ver 03-03 / Curvas cónicas).

Sin embargo se recomienda seguir utilizando el procedimiento descrito de homología para encontrar otros puntos de la sección. En la figura se muestra la determinación de los puntos 4 y del punto 5, todos encontrados por homología.

Discusión del método:

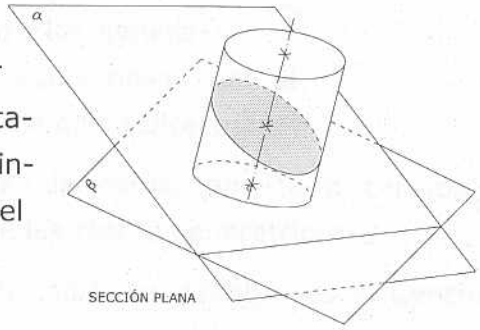
Se analizará sólo uno de los procedimientos trazados, siendo la justificación similar para el resto.

La recta 1'-5" y la generatriz por 1', forman un plano secante al cilindro. El punto 5', pertenece a dicho plano por pertenecer a 1'-5". La generatriz por 5' también pertenece a dicho plano por pasar por 5´y ser paralela a 1-1'. La recta 5"-1 pertenece a dicho y, también pertenece al plano secante α, en ambos casos por tener dos puntos en cada uno de los plano. Luego la recta 5"-1 y la generatriz por 5' se cortarán definiendo el punto 5. Este procedimiento se puede repetir hasta encontrar todos los puntos que puedan ser requeridos para el trazado de la elipse.

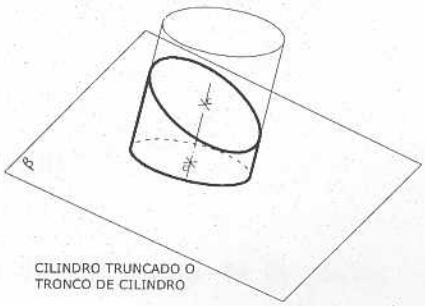
VISIBILIDAD Y REPRESENTACIÓN DE PARTE DEL SÓLIDO (TRONCO)

En los cilindros, sólo se representarán las proyecciones de los puntos de las bases y/o secciones. En cada proyección serán visibles los puntos que estén más cerca del observador. En DPO, por ejemplo, para lograr la proyección horizontal (PH) el observador está ubicado en el infinito y por encima del PHP, sólo serán visibles los puntos de mayor cota, por ser éstos los que están más cerca del observador. Para la proyección sobre el PVP, el observador se ubicará en el infinito pero viendo hacia el PVP. Serán visibles los puntos que estén más próximos a él, o sea los de mayor vuelo.

Se denomina TRONCO a la parte de un sólido limitada por su base y un plano secante. Las figuras anexas ilustran un cilindro seccionado por un plano y la representación del Tronco de Cilindro con base sobre el plano β.



SECCIÓN PLANA



CILINDRO TRUNCADO O TRONCO DE CILINDRO

PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Poliedros. Conos	• Definiciones y elementos notables • Proyecciones • Penetración de una recta • Secciones planas. Naturaleza. Determinación por homología según el tipo • Visibilidad y representación de parte del sólido.

DEFINICIONES Y ELEMENTOS NOTABLES

El movimiento de una recta en el espacio, apoyada en una figura geométrica plana curva y conservando un punto fijo (Vértice), genera unas superficies denominadas cónicas.

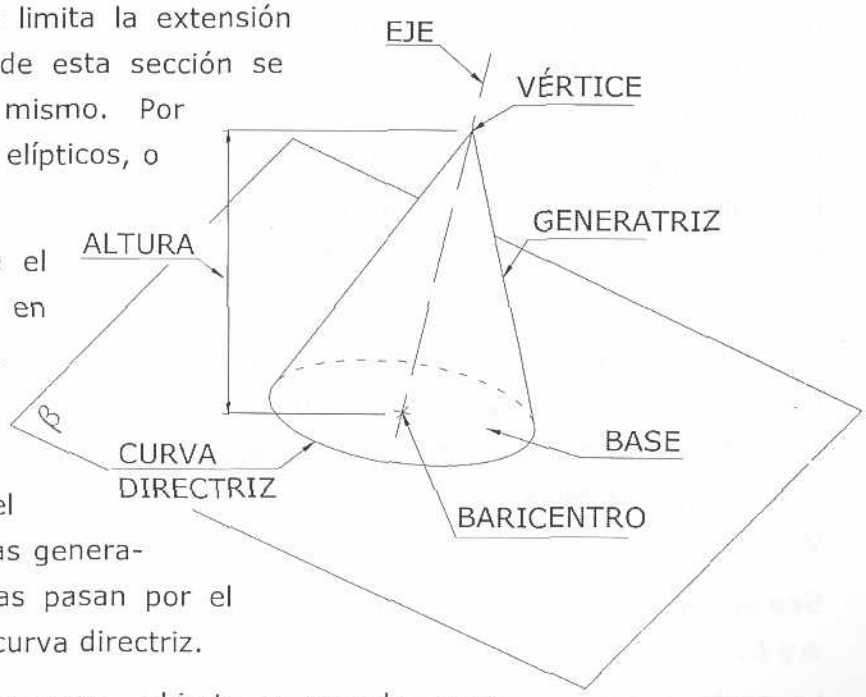
La porción de estas superficies comprendida entre el punto fijo (Vértice) y un plano secante (Base) se denominan simplemente CONOS.

VÉRTICE, Punto donde concurren las generatrices.

BASE, Sección plana que limita la extensión del sólido. De la forma de esta sección se deriva el nombre del mismo. Por ejemplo se tendrán conos elípticos, o circulares.

ALTURA, Distancia desde el vértice a la base, medida en forma ortogonal a la base.

RECTA GENERATRIZ, Es la recta que se desplaza en el espacio y "genera" el sólido. Como conjunto , las generatrices son todas las rectas pasan por el vértice y se apoyan en la curva directriz.



CURVA DIRECTRIZ, Es la curva, abierta o cerrada, que "dirige" la ubicación de las rectas generatrices.

BARICENTRO, Como lo indica su nombre es el Centro de Gravedad de la curva directriz (Base).

EJE, Es la recta que pasa por el Vértice y por el Baricentro de la base.

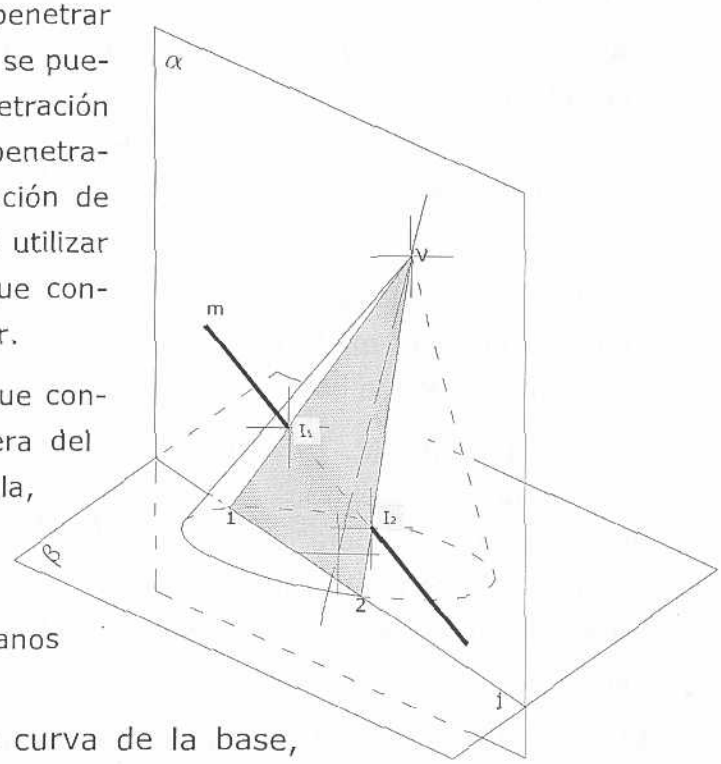
La posición relativa del eje y la base define, adicionalmente a la forma de la directriz, el nombre del sólido. Si el ángulo entre la base y el eje es recto (90°), el cono será RECTO, si el ángulo es diferente al recto será OBLICUO.

PROYECCIONES

Las proyecciones de estos sólidos, en cualquiera de los sistemas en el cual se quiera representar, se limitarán a encontrar la o las proyecciones de la base y el vértice. Como quiera que estos sólidos se pueden asemejar a poliedros de infinitas caras, no existirá la representación de "aristas". La proyección se limitará a representar los bordes o contorno en cada proyección. Conseguida la proyección o las proyecciones se deberá pasar a representar las zonas visibles y las ocultas del sólido.

PENETRACIÓN DE RECTAS. MÉTODO DE LA SECCIÓN SENCILLA

En los conos, no existen "caras" definidas tal como ocurre en los poliedros. En consecuencia no existen planos donde penetrar una recta que lo haga en el sólido, no se puede entonces utilizar el método de penetración simple para encontrar los puntos de penetración de una recta. Para la determinación de los puntos de penetración habrá que utilizar el Método de una Sección Sencilla que contenga a la recta que se quiere penetrar.



En la figura anexa: sea β el plano que contiene la base o una sección cualquiera del cono. Sea α un plano de sección sencilla, definido por la recta m y el vértice V.

Sea la recta j la intersección de los planos α y β.

La recta j podrá ser externa a la curva de la base, podrá ser tangente o podrá cortarla en dos puntos. En el primer caso la recta m no penetrará al sólido, en el segundo, que sea tangente a la base, la recta m será tangente al cono y en el caso que la corte en dos

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Poliedros. Conos	• Definiciones y elementos notables • Proyecciones • Penetración de una recta • Secciones planas. Naturaleza. Determinación por homología según el tipo • Visibilidad y representación de parte del sólido.

DEFINICIONES Y ELEMENTOS NOTABLES

El movimiento de una recta en el espacio, apoyada en una figura geométrica plana curva y conservando un punto fijo (Vértice), genera unas superficies denominadas cónicas.

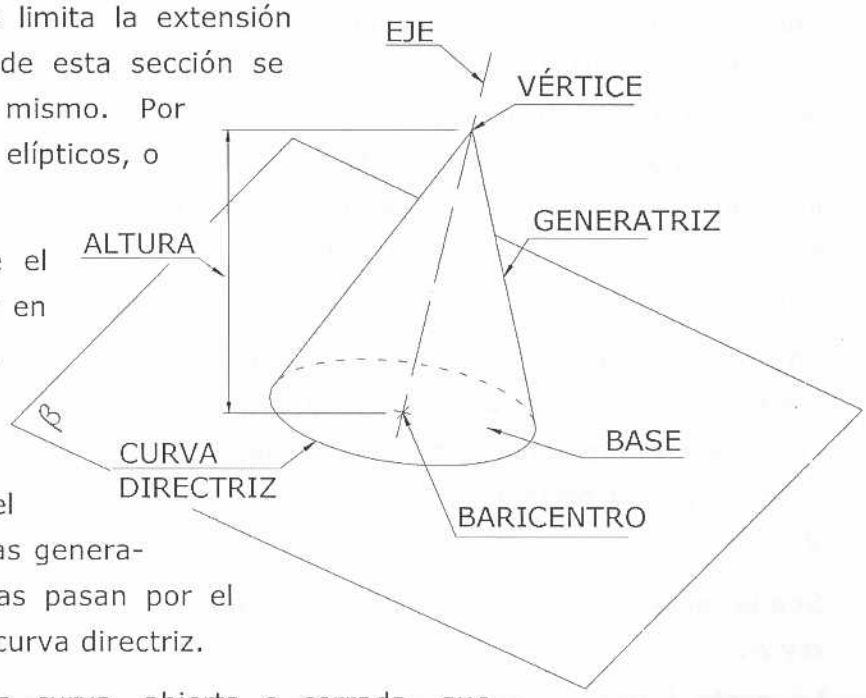
La porción de estas superficies comprendida entre el punto fijo (Vértice) y un plano secante (Base) se denominan simplemente CONOS.

VÉRTICE, Punto donde concurren las generatrices.

BASE, Sección plana que limita la extensión del sólido. De la forma de esta sección se deriva el nombre del mismo. Por ejemplo se tendrán conos elípticos, o circulares.

ALTURA, Distancia desde el vértice a la base, medida en forma ortogonal a la base.

RECTA GENERATRIZ, Es la recta que se desplaza en el espacio y "genera" el sólido. Como conjunto , las generatrices son todas las rectas pasan por el vértice y se apoyan en la curva directriz.



CURVA DIRECTRIZ, Es la curva, abierta o cerrada, que "dirige" la ubicación de las rectas generatrices.

BARICENTRO, Como lo indica su nombre es el Centro de Gravedad de la curva directriz (Base).

EJE, Es la recta que pasa por el Vértice y por el Baricentro de la base.

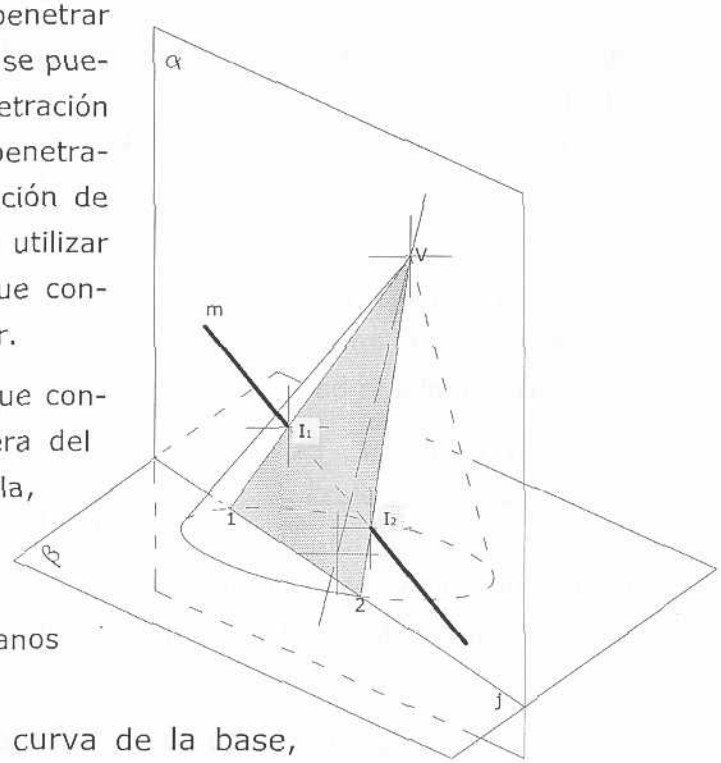
La posición relativa del eje y la base define, adicionalmente a la forma de la directriz, el nombre del sólido. Si el ángulo entre la base y el eje es recto (90°), el cono será RECTO, si el ángulo es diferente al recto será OBLICUO.

PROYECCIONES

Las proyecciones de estos sólidos, en cualquiera de los sistemas en el cual se quiera representar, se limitarán a encontrar la o las proyecciones de la base y el vértice. Como quiera que estos sólidos se pueden asemejar a poliedros de infinitas caras, no existirá la representación de "aristas". La proyección se limitará a representar los bordes o contorno en cada proyección. Conseguida la proyección o las proyecciones se deberá pasar a representar las zonas visibles y las ocultas del sólido.

PENETRACIÓN DE RECTAS. MÉTODO DE LA SECCIÓN SENCILLA

En los conos, no existen "caras" definidas tal como ocurre en los poliedros. En consecuencia no existen planos donde penetrar una recta que lo haga en el sólido, no se puede entonces utilizar el método de penetración simple para encontrar los puntos de penetración de una recta. Para la determinación de los puntos de penetración habrá que utilizar el Método de una Sección Sencilla que contenga a la recta que se quiere penetrar.



En la figura anexa: sea β el plano que contiene la base o una sección cualquiera del cono. Sea α un plano de sección sencilla, definido por la recta m y el vértice V.

Sea la recta j la intersección de los planos α y β.

La recta j podrá ser externa a la curva de la base, podrá ser tangente o podrá cortarla en dos puntos. En el primer caso la recta m no penetrará al sólido, en el segundo, que sea tangente a la base, la recta m será tangente al cono y en el caso que la corte en dos

puntos, la recta m si penetrará al sólido. Sean 1 y 2 los puntos donde se cortan la base y la recta j. Las generatrices trazadas por dichos puntos, se cortarán con m en los puntos I_1 e I_2 , estos puntos son la penetración de la recta m en el sólido,

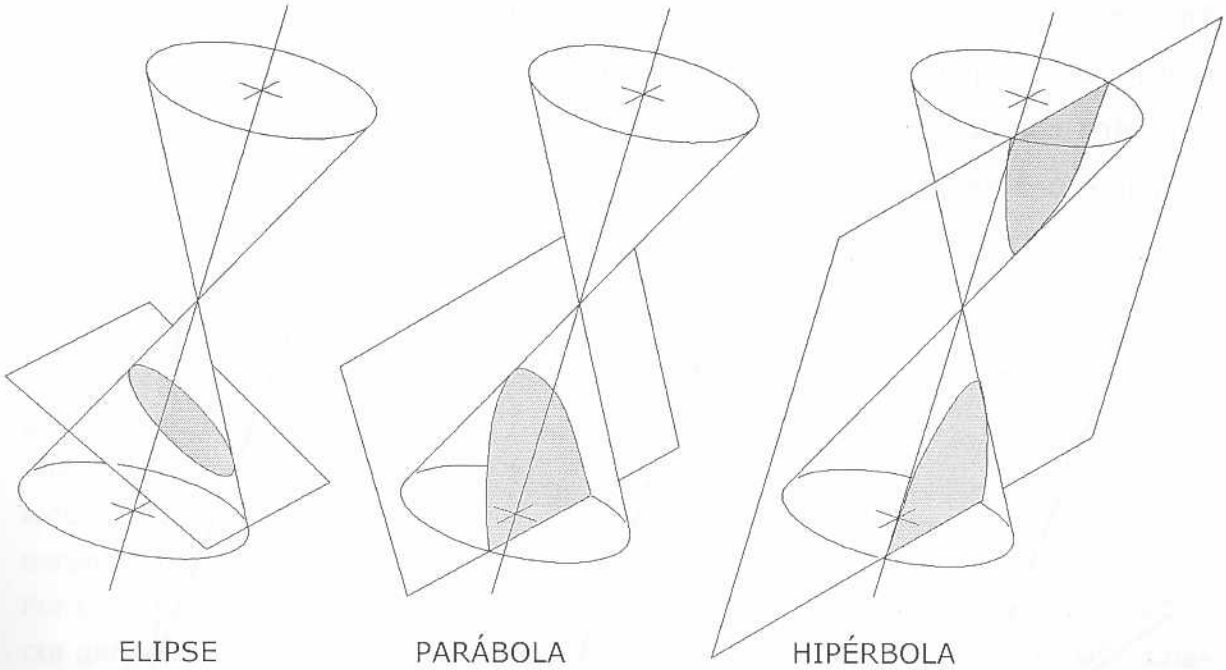
NATURALEZA DE LAS SECCIONES PLANAS DE CONOS CIRCULARES RECTOS

En las superficies cónicas, al igual que en las cilíndricas, todas las secciones planas son curvas de segundo orden. Pero por no ser sus generatrices paralelas y, aunque son simétricas (respecto al vértice), dependiendo de la posición relativa entre el plano secante y el cono, se podrán obtener curvas cerradas o curvas abiertas.

Si el plano secante forma con el eje del cono un ángulo mayor al que forma la generatriz del cono, la curva resultante será una curva cerrada (ELIPSE).

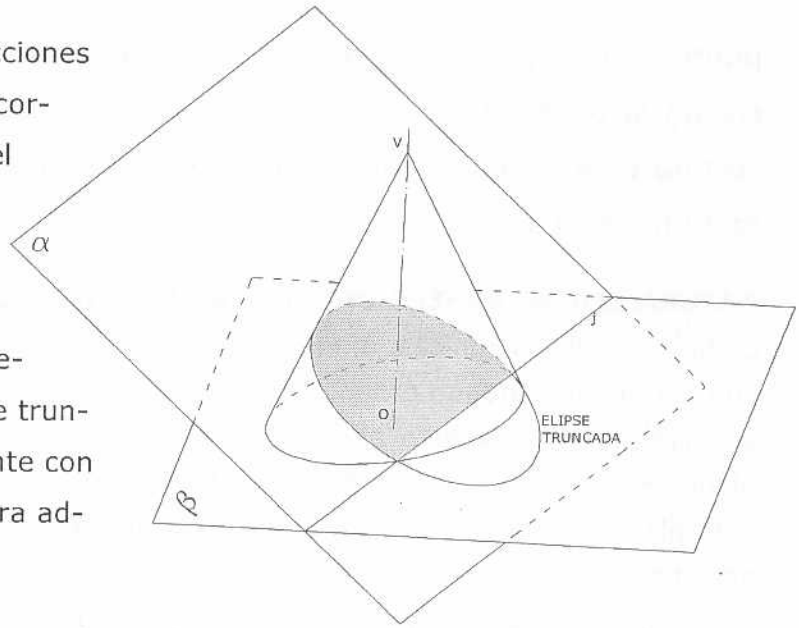
Si el plano secante es paralelo a una generatriz será una curva abierta (PARÁBOLA).

En ambos casos el plano sólo cortará a una de las ramas del cono,



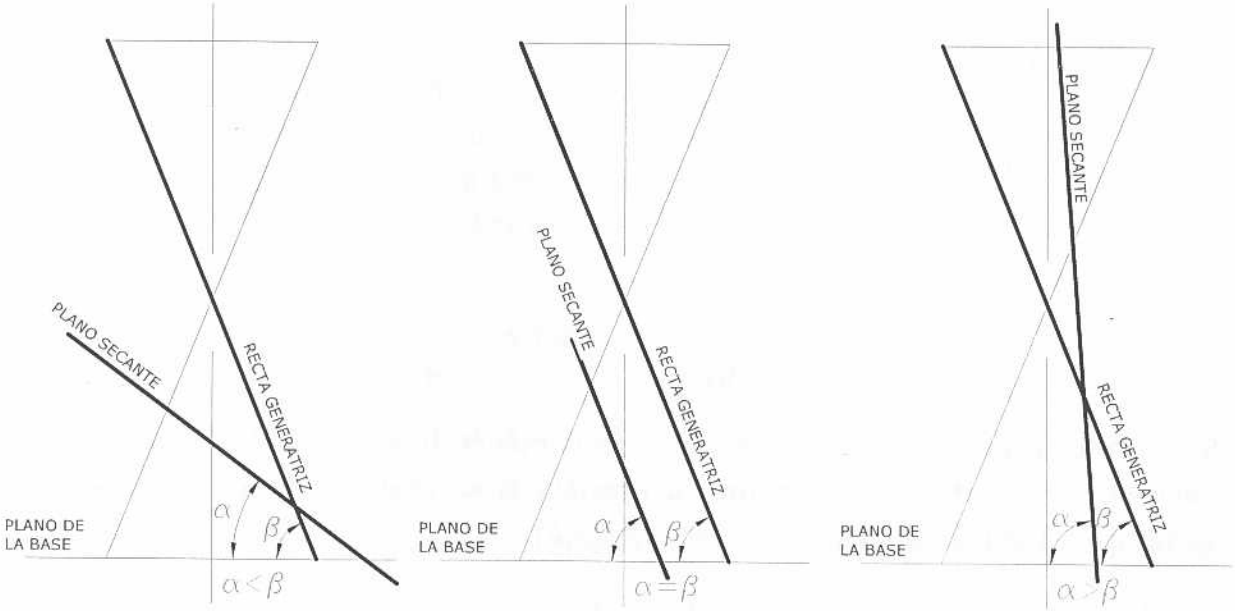
Si el plano secante forma con el eje un ángulo menor al que forma la generatriz del cono el plano cortará ambas ramas del cono y la sección será una curva abierta, simétrica y también de dos ramas (HIPÉRBOLA).

Los planos que originan las secciones parábola e hipérbola, siempre cortarán la directriz del cono. En el caso de la sección elipse, puede que también corte la directriz, pero seguirá siendo una elipse aunque sólo se represente parte de la misma (Elipse truncada), no debe ser erróneamente con una parábola, sin serlo. La figura adjunta ilustra esta situación.



Ahora bien, la visualización de la naturaleza de la sección que produce un determinado plano, resulta más simple considerando los ángulos que forman el plano secante y las generatrices, con el plano de la base.

Sean respectivamente, α y β los ángulos que forman el plano secante y una recta generatriz con el plano de la base. Si $\alpha<\beta$ la sección es una ELIPSE, si $\alpha=\beta$ la sección es una PARÁBOLA y si $\alpha>\beta$ la sección será una HIPÉRBOLA.



SECCIONES PLANAS EN CONOS POR INTERSECCIÓN DE PLANOS. HOMOLOGÍA

En los conos no existen "aristas" definidas que permitan la intersección de las mismas con el plano secante. Habría entonces que escoger algunas generatrices en forma aleatoria para penetrarlas en el plano y determinar así la curva que constituye la sección plana. Sin embargo una vez que se haya determinado el tipo o naturaleza de la sección plana, es conveniente determinar los puntos notables de la curva sección. Como quiera que todas las secciones serán de la familia de las cónicas la determinación de los puntos será similar en los tres casos. No obstante para facilitar la comprensión se expondrán por separado para cada una.

SECCIÓN ELIPSE

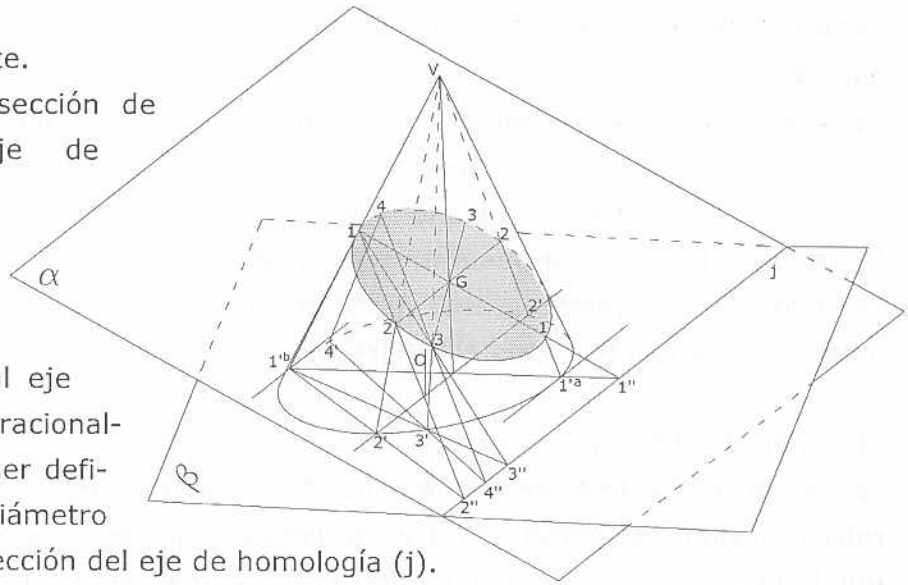
Como se mencionó, la sección ELIPSE se produce cuando el ángulo del plano secante con el plano de la base es menor al ángulo de las generatrices con el mismo plano de la base.

En la figura anexa: Sea β el plano que contiene la base o una sección cualquiera del sólido.

Sea α un plano secante.

Sea j la recta intersección de ambos planos. (Eje de homología).

Se determinan los puntos 1', el más alejado ($1'^b$) y el más cercano ($1'^a$) al eje de homología. Operacionalmente éstos podrán ser definidos trazando el diámetro perpendicular a la dirección del eje de homología (j).



Por uno cualquiera de éstos puntos ($1'^b$) se traza una recta generatriz intersecándola el plano α por medio de los procedimientos ordinarios (penetración directa). Se determina así uno de los puntos marcados como 1. Se prolonga el diámetro 1'-1' hasta cortar al eje de homología (j) en 1". La recta 1"-G, pasará por los puntos 1 pudiendo así determinar el segundo de éstos.

Se determina el diámetro conjugado al 1'-1' y sobre el mismo los puntos 2'. Por uno de éstos se traza la recta 1'-2' la cual se prolonga hasta cortar al eje de

homología (j) en 2", se traza además la generatriz 2"-V. La recta 2"-1 se cortará con esta generatriz en uno de los puntos 2. Por este punto (2) pasa la recta 2-G que es el diámetro conjugado de 1-1, luego se cortará con la otra generatriz 2"-V determinando el otro punto 2. Conocidos estos cuatro puntos se podrá determinar la elipse que constituye la sección. Esta determinación podrá ser hecha por cualquiera de los procedimientos adecuados para el trazado de elipses (Ver 03-03 / Curvas cónicas).

Sin embargo se recomienda seguir utilizando el procedimiento descrito de homología para encontrar otros puntos de la sección. En la figura se muestra la determinación de los puntos 3 y del punto 4, encontrados por homología, los dos primeros (3) apoyándose en los puntos 1 y 1' y el tercero (4) apoyándose en los 3 y 3'. Como la elipse es una curva simétrica cada punto determinado originará su simétrico respecto al centro (G) de la curva. Se debe hacer notar que en ningún caso, diferente a una sección paralela a la base, el eje del cono pasa por los centros de la base y la sección.

Discusión del método:

Se analizará sólo uno de los procedimientos trazados, siendo la justificación similar para el resto.

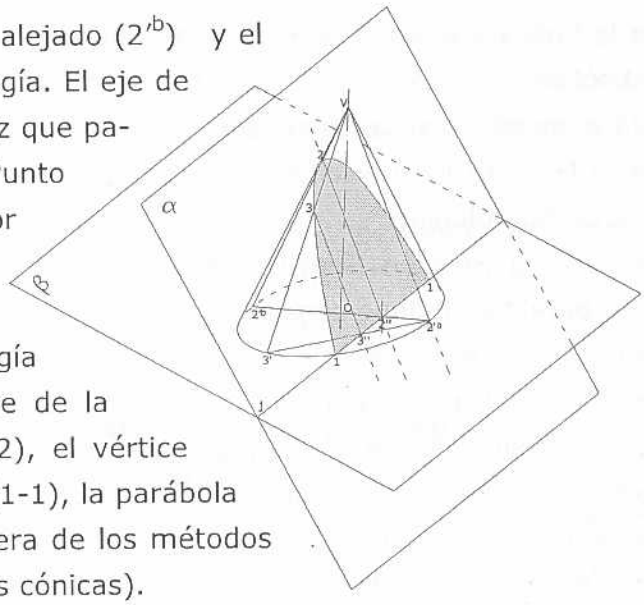
La recta 1'-3" y la generatriz 1'-V, forman un plano secante al cono. El punto 3', pertenece a dicho plano por pertenecer a 1'-3". La generatriz 3'-V y la recta 3"-1 también pertenece a dicho plano y al plano α, por tener dos puntos sobre éstos. Luego la recta 3"-1 y la generatriz por 3'-V se cortarán definiendo el punto 3. Este procedimiento se puede repetir hasta encontrar todos los puntos que puedan ser requeridos para el trazado de la elipse.

SECCIÓN PARÁBOLA

La sección PARÁBOLA se obtiene cuando el plano secante es paralelo a una generatriz. En rigor es "paralelo" a tres de las generatrices, una externa al plano y dos que le pertenecen. El ángulo que forma el plano secante con el plano de la base es igual al que forman las generatrices con dicho plano de la base.

Los puntos 1, sobre el eje de homología, pertenecen a la curva sección (Parábola).

El punto medio de la cuerda 1-1, punto 2" pertenece al eje de la parábola.



Se determinan los puntos 2', el más alejado ($2'^{b}$) y el más cercano ($2'^{a}$) al eje de homología. El eje de la parábola es paralelo a la generatriz que pasa por el punto más cercano a j (Punto $2'^{a}$). Este eje como se indicó pasa por el punto 2" y se cortará con la generatriz que pasa por el punto más alejado ($2'^{b}$) del eje de homología (j) en el punto 2, que es el vértice de la parábola. Determinados el eje (2"-2), el vértice (2) y dos de los puntos de la curva (1-1), la parábola sección se podrá definir por cualquiera de los métodos usuales al efecto (Ver 03-03 / Curvas cónicas).

Sin embargo se recomienda seguir utilizando el procedimiento descrito de homología para encontrar otros puntos de la sección. En la figura se muestra la determinación del punto 3, así: se escogió un punto cualquiera sobre el eje de homología (3"), se trazó la recta $2'^{b}$-3" la cual se prolongó hasta cortar la curva base en el punto 3'. La generatriz 3'-V y la recta paralela al eje de la parábola por 3" se cortan en el punto 3. Así se podrán determinar todos los puntos que puedan ser requeridos para el trazado de la curva.

Discusión del método:

La recta 3"-3 pertenece al plano secante α. La directriz 3'-V pertenece a la superficie del cono y el punto 3 pertenece a dicha directriz. Luego el punto 3 es un punto de la sección producida en la superficie por el plano α.

SECCIÓN HIPÉRBOLA

Cuando el plano secante forma con el plano de la base un ángulo mayor al que forman las generatrices con dicha base, la sección plana obtenida es una HIPÉRBOLA.

En forma similar a las empleadas en las secciones elipse y parábola, se determinarán los elementos notables que permitan su definición y representación. En una hipérbola la definición de su eje real y de sus asíntotas, permitirán su definición y trazado.

En la figura anexa: Sea β el plano que contiene la base o una sección cualquiera del sólido.

Sea α un plano secante al cono.

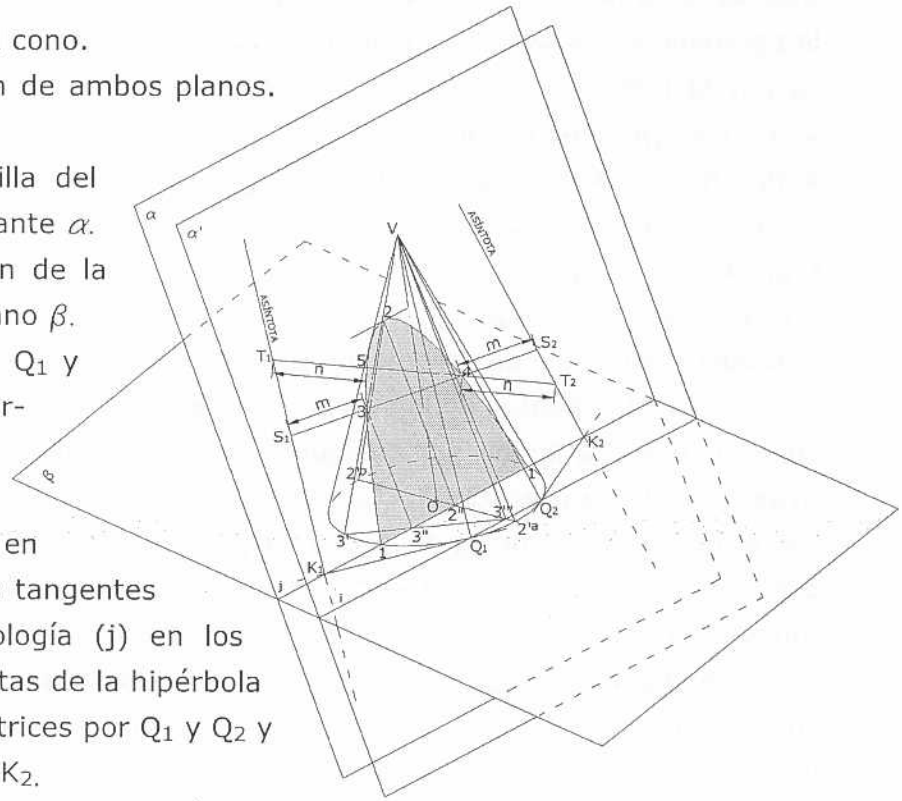
Sea j la recta intersección de ambos planos. (Eje de homología).

Sea α' la Sección Sencilla del cono paralela al plano secante α.

Sea i la recta intersección de la sección sencilla α' y el plano β.

Se determinan los puntos Q_1 y Q_2 sobre la recta i y la curva directriz del cono.

Se determinan las tangentes a la curva directriz en los puntos Q_1 y Q_2. Estas tangentes cortarán al eje de homología (j) en los puntos K_1 y K_2. Las asíntotas de la hipérbola son paralelas a las generatrices por Q_1 y Q_2 y pasan por los puntos K_1 y K_2.



Los puntos 1, sobre el eje de homología y sobre la directriz son puntos de la hipérbola. Por el punto 2", punto medio de la cuerda 1-1, pasa el eje real de la hipérbola. Por este punto medio (2") se traza una perpendicular a la dirección del eje de homología, esta perpendicular definirá a su vez, sobre la directriz, los puntos más cercano ($2'^{a}$) y más lejano ($2'^{b}$) del eje de homología (j). La generatriz $2'^{b}$-V se cortará con el eje real de la hipérbola en el punto 2 que es el vértice de la curva.

Por el punto donde la perpendicular al eje de homología y el mismo se cortan (Punto 3"'), se traza una secante cualquiera a la directriz (Recta 3"'-3'), esta secante cortará al eje j en el punto 3". Una paralela al eje real de la hipérbola por 3" y la generatriz por 3', se cortarán en el punto 3, que es un punto de la curva. Así se pueden determinar los puntos que puedan ser requeridos para su trazado. Igualmente se puede utilizar cualquiera de los métodos usuales para ese fin (Ver 03-03 / Curvas cónicas). Puede resultar muy conveniente utilizar la propiedad de las hipérbolas en las cuales la distancia a las asíntotas de puntos sobre una misma secante es la misma. En el ejemplo mostrado, una secante cualquiera (S_1-S_2) trazada por punto 3, previamente definido de la curva, define la distancia

m (S_1-3), midiendo esa misma distancia (m) sobre la secante desde el punto S_2, se definirá el punto 4 que es de la curva. Utilizando ahora este punto 4, con la secante T_1-T_2, se determina el punto 5, y así hasta definir los puntos que se requieran.

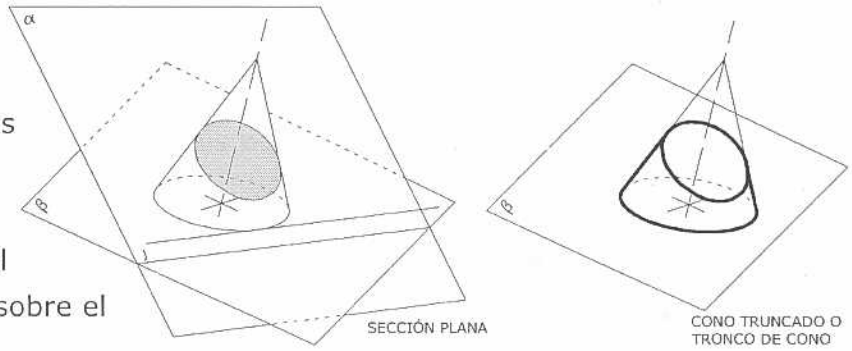
Discusión del método:

La recta 3"-3 pertenece al plano secante α. La directriz 3'-V pertenece a la superficie de la hipérbola y el punto 3 pertenece a dicha directriz. Luego el punto 3 es un punto de la sección producida en la superficie por el plano α.

VISIBILIDAD Y REPRESENTACIÓN DE PARTE DEL SÓLIDO (TRONCO)

En los conos, sólo se representarán las proyecciones de los puntos de la base y el vértice. En cada proyección serán visibles los puntos que estén más cerca del observador. En DPO, por ejemplo, para lograr la proyección horizontal (PH) el observador está ubicado en el infinito y por encima del PHP, sólo serán visibles los puntos de mayor cota, por ser éstos los que están más cerca del observador. Para la proyección sobre el PVP, el observador se ubicará en el infinito pero viendo hacia el PVP. Serán visibles los puntos que estén más cerca a él, o sea los de mayor vuelo.

Se denomina TRONCO a la parte de un sólido limitada por su base y un plano secante. Las figuras anexas ilustran un cono seccionado por un plano y la representación del Tronco de Cono con base sobre el plano β.



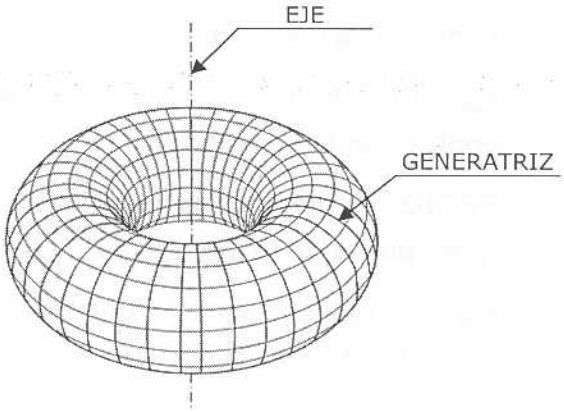
PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ESPECÍFICOS
Sólidos de revolución. La esfera	• Definición y ejemplos • La esfera. Definición y elementos • Proyecciones. DPO • Penetración de una recta • Secciones planas

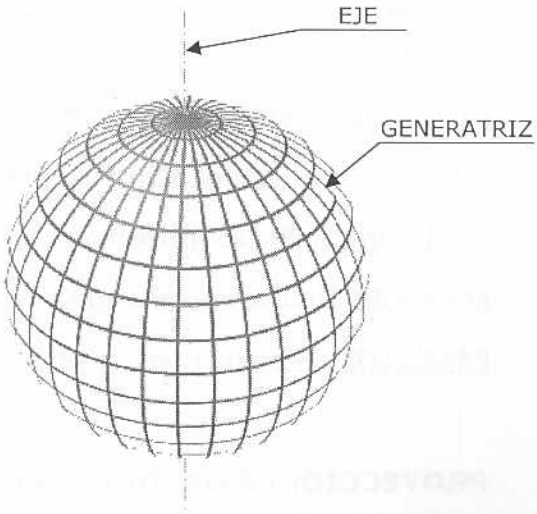
DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

Se define como sólido de revolución al originado por una figura geométrica que rota alrededor de un eje. Un segmento girando alrededor de una recta (eje) a una distancia fija generará un cilindro que es un sólido de revolución.

Una circunferencia (generatriz) girando alrededor de una recta externa (eje) genera un sólido de revolución llamado TORO



Si la circunferencia gira sobre uno de sus diámetros, el sólido obtenido será tal vez el sólido de revolución más simple originado por una línea curva, la ESFERA.



Estrictamente, se debe llamar *superficie esférica* a la generada por la rotación de una circunferencia (curva) y *esfera* al espacio contenido dentro de la superficie, el cual se genera por la rotación un círculo (área).

En esta oportunidad sólo se estudiará un poco más en detalle este sólido y, se utilizará indistintamente el término esfera y/o superficie esférica para referirse a ambos, la superficie o el sólido.

LA ESFERA. DEFINICIÓN

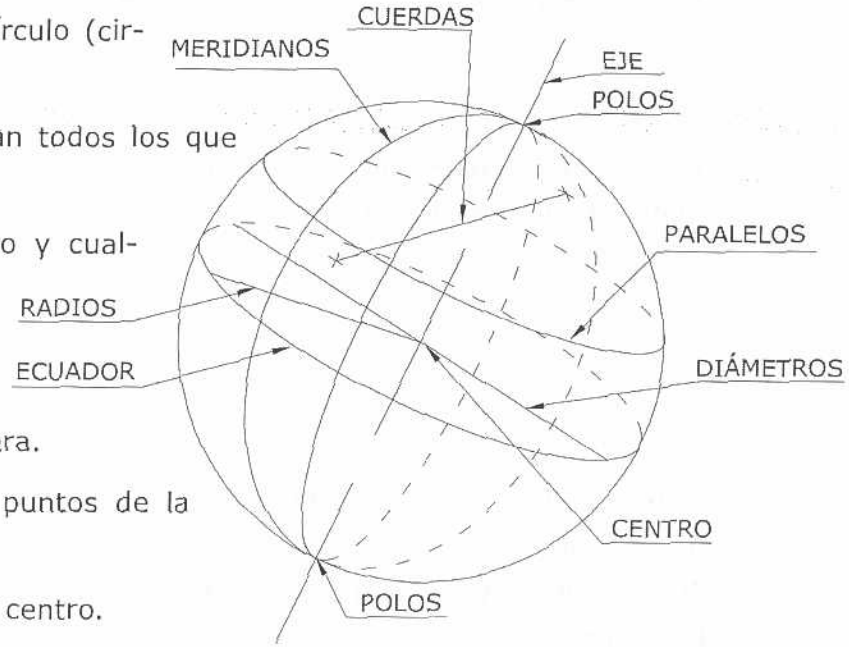
Del griego σφαῖρα *(sphaîra)*, que significa pelota para jugar.

Es el LG de los puntos que equidistan de otro llamado centro. Nótese que en esta definición se omite la condición de puntos coplanares, existente en la definición de circunferencia.

Es un sólido de revolución generado por la rotación de una circunferencia, estrictamente de una semi-circunferencia, alrededor de uno de sus diámetros.

La esfera queda definida por su CENTRO y su RADIO.

ELEMENTOS



EJE: Recta sobre la cual rota el círculo (circunferencia) generatriz.

CENTRO: Punto del cual equidistan todos los que conforman la superficie.

RADIO: Segmento entre el centro y cualquier punto de la superficie.

GENERATRIZ: Círculo (Circunferencia) que rota alrededor de uno de sus diámetros para generar la esfera.

CUERDA: Segmento que une dos puntos de la superficie esférica.

DIÁMETRO: Cuerda que pasa por el centro.

POLOS: Extremos del diámetro que coincide con el eje.

MERIDIANOS: Círculos máximos contenidos en planos secantes que contienen al eje.

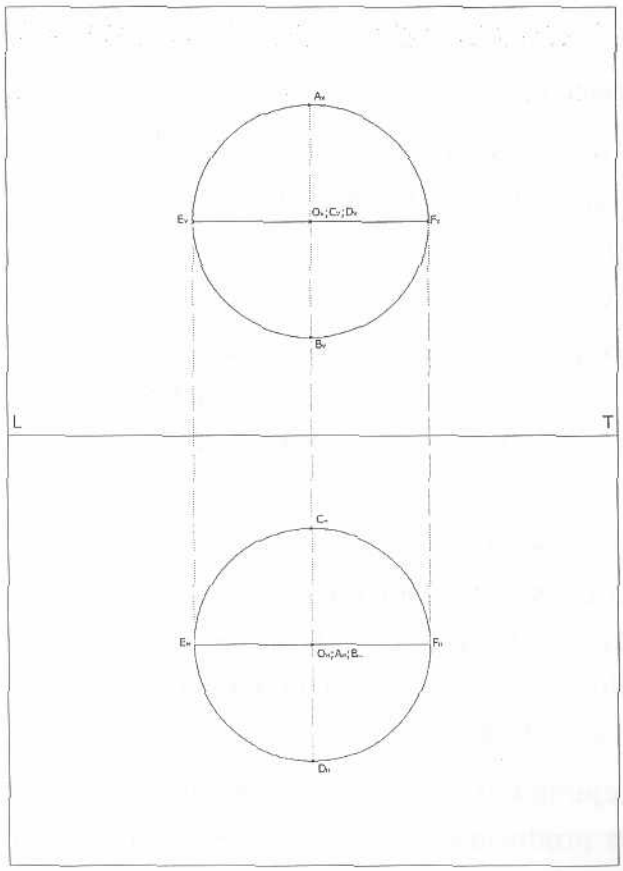
ECUADOR: Círculo máximo, perpendicular al eje, por el centro.

PARALELOS: Círculos menores paralelos al ecuador.

PROYECCIONES ORTOGONALES. DOBLE PROYECCIÓN ORTOGONAL (DPO)

Las proyecciones ortogonales de las esferas siempre serán círculos los cuales se observarán en su verdadero tamaño. Luego en DPO, se observarán ambas proyecciones como círculos en VT. Entonces las proyecciones quedan definidas por el cen-

tro de la esfera y su radio. Generalmente los problemas de la determinación de las proyecciones de una esfera se resuelven con el análisis y determinación de los LG donde puede ubicarse el centro. Como ejemplo se puede plantear el problema de determinar las proyecciones de una esfera que pasa por cuatro (4) puntos no alineados. El centro de dicha esfera deberá ser equidistante de los cuatro puntos dados. Considerando tres de éstos, el LG de los puntos que equidistante de los tres será la recta normal al plano que definen dichos puntos, trazada por el circuncentro del triángulo que forman. Si se consideran dos de dichos puntos conjuntamente con el dejado fuera antes, se podrá hacer la misma consideración. Ambas rectas normales así definidas se cortarán en un punto que equidista de los cuatro puntos, o sea será el centro de la esfera y el radio será la distancia desde éste a uno cualquiera de los puntos dados.



En la figura anexa s muestran las proyecciones (DPO) de una esfera con centro en el punto O. Ambas proyecciones se presentan como un círculo de radio el de la esfera.

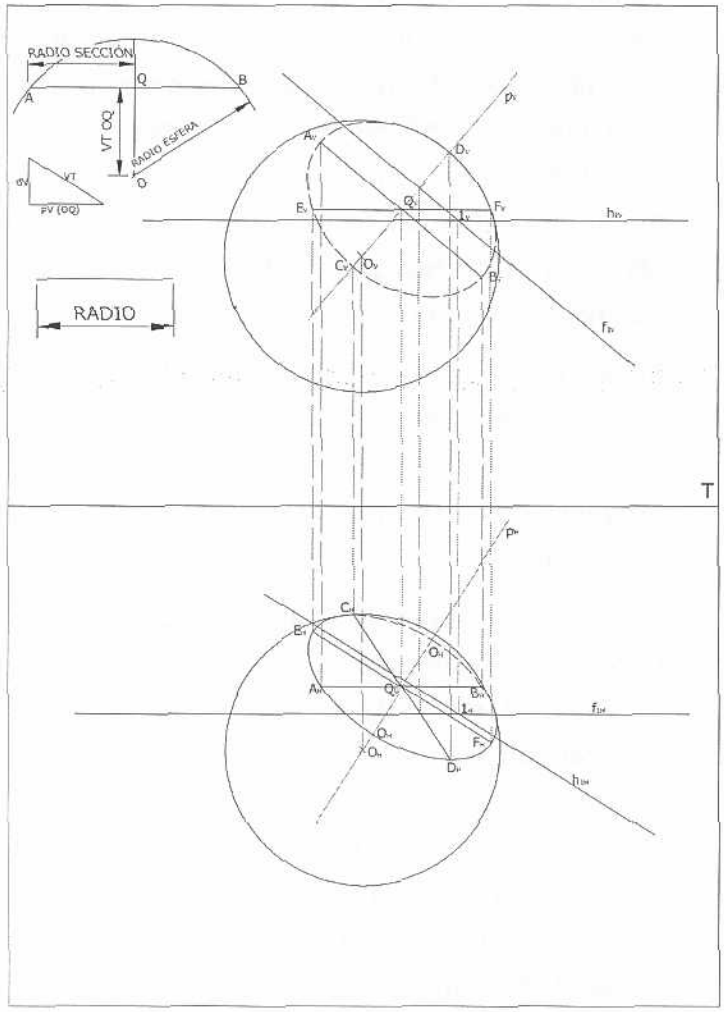
La PV corresponderá a un círculo máximo correspondiente a los meridianos. El eje (AB) es una recta vertical (de pié), luego se proyectará como un punto, coincidiendo con el centro (O) en la PH. Por ser paralelo al PVP, su PH se verá como un segmento paralelo a LT (Vuelo constante).

La PH corresponderá a un círculo máximo perpendicular al eje, o sea será el ecuador de la esfera. Uno de sus diámetros será una recta de punta y se presentará en PV como un punto coincidente con el centro (O). La PV, por ser paralelo al PHP, se verá como un segmento paralelo a LT (Cota constante).

SECCIONES PLANAS DE LA ESFERA

Todas las secciones planas de una esfera son círculos. Por consiguiente sus proyecciones serán unas elipses.

El figura adjunta, se ilustra en forma general, la determinación y representación en DPO de la sección que produce en una esfera un plano secante.



Sea la esfera de centro O y radio conocido.

Sea el plano definido por las rectas f y h que se cortan en el punto 1.

Se traza una recta normal (p) al plano secante (fh).

Se determina el punto Q, intersección de la normal (p) en el plano secante (fh).

El punto Q es el centro del círculo sección, y el radio del mismo se podrá determinar, con la distancia QO y el radio de la esfera, (Ver dibujo auxiliar en la esquina superior izquierda de la figura).

Conocidos el centro y el radio de la sección, se procederá a representar sus proyecciones por cualquiera de los métodos conocidos para representar un circunferencia.

El ejemplo mostrado corresponde a una sección de un plano cualquiera. Las secciones producidas en la esfera. Por planos en posiciones particulares, también se resolverán proyectando la circunferencia sección, de acuerdo a las características del plano secante.

PENETRACIÓN DE UNA RECTA EN UNA ESFERA

La determinación de los puntos de penetración de una recta en una esfera, no se podrá determinar en forma directa, como se puede hacer en los casos de poliedros, donde al existir caras planas, sólo basta con encontrar directamente, los puntos de penetración en los planos de las caras.

En el caso de las esferas hay que proceder en forma indirecta. Existe varios procedimientos pero tal vez el más sencillo es el siguiente.

Sea la esfera de centro O y radio conocido.

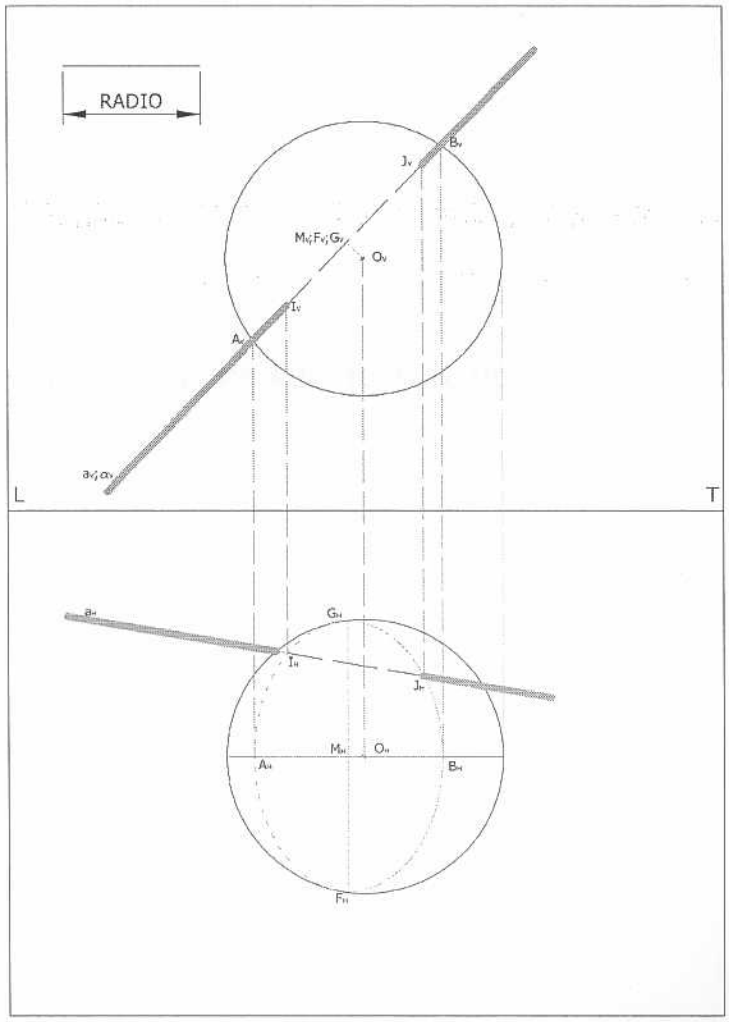
Sea a, una recta que interseca (penetra) al sólido.

Utilizando un plano proyectante, vertical o de canto que contenga la recta que penetra en la esfera.

En este ejemplo se definió el plano α.

Se determina la sección plana que produce en la esfera el plano auxiliar α.

Los puntos de corte (J e I) de la recta (a) con la sección determinada, serán los puntos donde la recta penetra a la esfera.



PÁGINA DEJADA EN BLANCO INTENCIONALMENTE

BIBLIOGRAFÍA

Baldor, J.A. – Geometría Plana y del Espacio. CODICE S.A. Madrid 1981

Barreiro V., María - Geometría Descriptiva. Editorial Texto, Caracas. Octubre 2001

Ediciones Bruño – Curso Superior de Geometría. 14ª Edición. Madrid

Granville, William A. – Trigonometría Plana y Esférica. UTEHA. México 1966

Izquierdo Asensi, F – Geometría Descriptiva. 24ª Edición. Madrid

Osers, Harry – Estudio de Geometría Descriptiva. Aldus , S.A.-Artes Gráficas, Madrid. Mayo 1977

Pérez G., Alberto M. - Sistemas de Representación. http://webdelprofesor.ula.ve

Roubaudi, C. - Traitè de geómétrie descriptive. 10e éd. -- Paris : Masson, 1961.