aas 1025

1 Rab
ITC 2010
A6.

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE TELECOMUNICACIONES

ESTUDIO DE FUENTES ACOTADAS CON SIMETRIA CONFORME Y CON ECUACIONES DE ESTADO BAROTRÓPICAS EN RELATIVIDAD GENERAL

Trabajo presentado por el Prof. Eduardo Alomá Chávez ante la Universidad Católica Andrés Bello para ascender a la categoría de ASOCIADO en el Escalafón Universitario.

TESIS
ITC2010
A6

Caracas, Octubre de 2010

RESUMEN

Se realiza un estudio de modelos estelares en el marco de la Relatividad General que consiste en fluidos que presentan anisotropía en las presiones, poseen simetría esférica y admiten un grupo de un parámetro de movimientos conformes. En el Capítulo I se modela un fluido que está acotado por una película delgada, contiene una distribución isótropa de materia y la región exterior está descrita por la métrica de Schwarzschild. Se resuelven las ecuaciones de campo de Einstein imponiendo tres ecuaciones de estado lineales del tipo barotrópicas y se estudian las variables físicas evaluando las condiciones de energía. En el Capítulo II se considera un fluido cargado, con presión nula en la superficie y que se acopla a la solución estática de Reissner-Nordstrom. Para restringir las ecuaciones de campo se consideran dos casos: primero se impone que la presión tangencial es proporcional a la presión radial en un factor anisótropo *C*. En el segundo caso se impone una distribución radial de carga modulado por un parámetro ajustable. Se analiza el efecto de la anisotropía y de la carga sobre las variables físicas obtenidas. En el Capítulo III se estudia el efecto de la presencia o ausencia de cargas en el núcleo y película de un fluido formado por materia tipo quark-extraña. Se estudia el comportamiento de la densidad y las presiones en tres escenarios físicos: i) núcleo cargado rodeado de una película de presión no nula y con carga; ii) núcleo cargado rodeado por una película que produce apantallamiento sobre el núcleo y iii) núcleo sin carga rodeado de una película cargada. Todos los modelos con cargas se describen según la ecuación de estado barotrópica del modelo de la bolsa del MIT. En el Capítulo IV se presentan las conclusiones generales del Trabajo.

INDICE GENERAL

RESUMEN ii
INDICE DE FIGURAS iv
INTRODUCCIÓN 1
REFERENCIAS 7
CAPITULOS
I.FLUIDOS ESTÁTICOS ANISÓTROPOS CON SIMETRIA CONFORME Y ECUACIONES LINEALES DE ESTADO TIPO BAROTRÓPICAS 8
RESUMEN 8
INTRODUCCIÓN 9
ECUACIONES DE CAMPO Y CONDICIONES DE JUNTURA 13
LAS SOLUCIONES 19
RESULTADOS Y CONCLUSIONES 28
REFERENCIAS 44

II._ESFERAS RELATIVISTAS CON FLUIDO ANISÓTROPO CARGADO Y CONFORME CON UNA ECUACIÓN DE ESTADO LINEAL 47
RESUMEN 47
INTRODUCCIÓN 48
ECUACIONES DE CAMPO, SIMETRÍA CONFORME Y CONDICIONES DE JUNTURA 51
CASO I: PRESION TANGENCIAL PROPORCIONAL A LA PRESIÓN RADIAL 55
CASO II: DISTRIBUCIÓN RADIAL DE CARGA 58
CONCLUSIONES 60
REFERENCIAS 70

III._SOLUCIONES ESTATICAS DE FLUIDO ANISÓTROPO CON MATERIA CARGADA Y ACOTADA 73
RESUMEN 73
I.INTRODUCCION 74
II. ECUACIONES DE CAMPO Y SOLUCIONES ESTATICAS 79
III. RESULTADOS 85
IV. CONCLUSIONES 96
REFERENCIAS 97

CONCLUSIONES GENERALES 99

INDICE DE FIGURAS

Figura N° 1 34
Figura N° 2 34
Figura N° 3 35
Figura N° 4 35
Figura N° 5 36
Figura N° 6. 36
Figura N° 7 37
Figura N° 8. 37
Figura N° 9 38
Figura N° 10 38
Figura N° 11 39
Figura N° 12 39
Figura N° 13 40
Figura N° 14 40
Figura N°15 41
Figura N° 16 41
Figura N° 17. 42
Figura N° 18 42
Figura N° 19 43
Figura N° 20. 65
Figura N° 21. 65
Figura N° 22. 66
Figura N° 23 66
Figura N° 24 67
Figura N° 25. 67
Figura N° 26. 68
Figura N° 27 68
Figura N° 28 69
Figura N° 29 88
Figura N° 30 88
Figura N° 31 89
Figura N° 32. 89
Figura N° 33 91
Figura N° 34 92
Figura N° 35. 92
Figura N° 36 94
Figura N° 37 95
Figura N° 38 95

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas ha habido un enorme incremento de conocimientos que permite explicar múltiples fenómenos astrofísicos, contándose con criterios mejor fundamentados para comprender la evolución y estructura del Universo. De esta forma se puede modelar con bases cada vez más sólidas el comportamiento de objetos estelares mediante modelos físicos cada vez más realistas, de modo que se pueda describir y explicar los más diversos fenómenos cosmológicos en el marco de la Relatividad General. Los primeros modelos utilizados para describir objetos masivos correspondientes a las soluciones de las ecuaciones de Einstein con simetría esférica, consideraban generalmente un fluido de materia localmente isótropa. Sin embargo, en investigaciones posteriores [1],[2] se ha sugerido que, para la materia superdensa y por la complejidad de sus interacciones fuertes y en algunos estados de superfluidez, la materia presenta presión anisótropa local. Debido a que la anisotropía puede influir en la estabilidad de una estrella y modificar el corrimiento al rojo gravitacional, es importante considerarlo en los modelos astrofísicos. Por otra parte, en diversas investigaciones se ha considerado que las estrellas poseen material en forma de plasma, y material bariónico tipo plasma quark-gluon [3]. La materia estelar tipo plasma, es transformada a través de reacciones nucleares y expulsa gran parte de su masa.

Las estrellas son, fundamentalmente, producto de la fuerza gravitacional, la atracción entre los átomos en una nube de gas y polvo, o la compresión de la nube por

causas externas (como la onda de choque de una explosión estelar, el paso de la nube por un brazo galáctico), que dan lugar a zonas más densas que a su vez, atraen más material. Tras un período que puede durar entre pocos miles y varios millones de años, la nube colapsa, formando un centro esferoidal (protoestrella) y la masa "cae" hacia el núcleo de la protoestrella, aumentando la presión y la temperatura; estos procesos convierten el gas en plasma y provocan emisión de energía. A temperaturas muy elevadas, los átomos del fluido pasan por un proceso de fusión nuclear, generando elevadas cantidades de energía que, eventualmente compensarán el colapso gravitatorio. En ese momento, la protoestrella pasa a ser estrella, y en adelante las dos tendencias opuestas -contracción gravitatoria y expansión por emisiones de energía- serán los procesos que regirán en el fluido. Algunos autores consideran que la formación de estrellas de quarks ocurre durante el colapso del núcleo de una estrella masiva después de la explosión de una supernova como resultado de diversas transiciones de fase, resultando en materia tipo quark no confinada [3]. Otra posibilidad es que algunas estrellas de neutrones binarias posean suficiente masa de acreción como para convertirse en una estrella de quark tipo extraña.[3]. En algunos casos se viola la condición de energía fuerte y Turner, et al, [4] llamaron a esta forma de energía, como energía oscura, y son numerosos los modelos que se han estudiado, considerando esta condición a través de una ecuación de estado barotrópica, que relaciona las presiones con la densidad de energía.

De acuerdo con los modelos cosmológicos vigentes, en los primeros segundos

después del Big Bang la materia-energía entra en una fase de inflación y cientos de miles de años después se enfría hasta unos 5000 °K manteniendo su expansión. Sin embargo, se sabe que esta expansión no es simétrica en todas direcciones, aparecen tensiones desiguales en el espaciotiempo y los diferentes estados de la evolución estelar se pueden modelar tomando en cuenta tales tensiones desiguales (condición anisótropa) y algunos tipos de simetrías. Uno de los tipos de simetrías más utilizadas en la propuesta de modelos, es la simetría conforme, donde se postula que el fluido evoluciona de forma inflacionaria, de modo que los cambios de la métrica, son proporcionales a la misma métrica. Dado que la integración de las ecuaciones de campo de Einstein para ecuaciones de estado realistas, sin vínculos apropiados entre las variables es muy difícil, el uso de la simetría conforme como modelo de evolución estelar constituye una importante restricción para la resolución de dichas ecuaciones. Este tipo de simetría se utiliza en fenómenos críticos tales como transiciones de fase de segundo orden, en sistemas con interacciones locales que son conformemente invariantes en tales transiciones [5], también ha sido muy estudiada en hidrodinámica clásica, en particular en los fluidos autosimilares y en el análisis de ondas de choque. Bicknell, *et al*,[6] reportaron una onda de descompresión de una partícula en el horizonte de eventos y la existencia de un segundo cambio de fase superficial cerca de un agujero negro, considerando soluciones autosimilares. Herrera, *et al*,[7] obtuvieron esferas anisótropas que se contraen y se expanden y que admiten un grupo de parámetros de movimientos conformes. Recientemente diversos autores han considerado la presencia de simetría conforme en fluidos estáticos con ecuaciones de

estado más realistas. Mak, *et al*, [8] impusieron como restricción la presencia de simetría conforme para un fluido tipo quark, cuyo factor anisótropo es una función escalar que depende solamente de la coordenada radial. Bohmer, *et al*, [9] impusieron la presencia de simetría conforme no estática para obtener soluciones exactas de agujeros de gusanos. Harada, *et al*, [10] señalaron que una variedad de sistemas con soluciones autosimilares pueden describir, comportamientos intermedios o asintóticos de soluciones más generales.

Este trabajo se divide en cuatro capítulos. En el capítulo I se trabaja con un fluido formado por una región acotada por una película delgada que posee una distribución isótropa de materia. La región interior está descrita por la métrica interior de Schwarzschild y consiste en un núcleo con materia que posee simetría esférica y que admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. La región exterior es el vacio y corresponde a la solución exterior de Schwarzschild. Ambas regiones se acoplan a través de una la película delgada, aplicando las condiciones de Israel [11], y se modelan bajo una ecuación de estado del tipo lineal barotrópica. Se resuelven las ecuaciones de campo y se obtiene una familia de soluciones analíticas con parámetros ajustables de modo que se puedan evaluar las condiciones de energía y estudiar la estabilidad de los modelos propuestos.

En el capítulo II se estudia un fluido cargado con simetría esférica, presión nula en la superficie y que admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. Se estudian dos modelos, en el primer modelo se impone una ecuación de estado que relaciona la presión radial con la tangencial por medio de un parámetro

ajustable que mide el grado de anisotropía del fluido y en el segundo modelo se propone una distribución de carga en el fluido. La región exterior se describe por la métrica de Reissner-Nordstrom. Para ambos casos se obtienen nuevas familias de soluciones con parámetros ajustables, incluyendo la carga total.

En el capítulo III se considera un fluido acotado por una película.. Además de tener simetría esférica y la existencia de un grupo de un parámetro de movimientos conformes, se consideran tres casos: a) tanto la región interior como la película delgada están cargadas, b) la región interior posee carga y la exterior es neutra, de modo que la película delgada ejerce un efecto de apantallamiento sobre el fluido y c) la región interior no posee carga y la película delgada se encuentra cargada.

Para los fluidos con carga se proponen modelos considerando un fluido tipo quark que consiste en una ecuación barotrópica que obedece al modelo de hadrones propuesto por el Instituto Tecnológico de Massachusetts, en el cual se considera a los quarks como partículas sin masa que se encuentran confinados dentro de una "bolsa" de dimensión finita. El confinamiento resulta del balance de la presión externa contra la pared de la bolsa y de la presión resultante de la energía cinética de los quarks dentro de la bolsa [12], [13]. En lo sucesivo, tal modelo de identificará como modelo de la bolsa del MIT. Se obtienen nuevas familias de soluciones y se estudian las características físicas (presiones, condiciones de energía, posible presencia de energía oscura) por medio de parámetros ajustables. En el capítulo IV se presentan las conclusiones generales. Este trabajo fue aprobado como Tesis Doctoral y de su estudio se derivó un artículo arbitrado [14]. En ese artículo el autor, adicionalmente,

hizo un análisis de estabilidad de las soluciones obtenidas en el capítulo II mediante la obtención de la ecuación de pulsación y comparó los modelos teóricos con la data observacional obtenida por Li, *et al.* [15]-[16]. Los resultados arrojaron que tanto la presencia de cargas como de anisotropía contribuyen a la estabilidad del fluido, y el radio y la masa del objeto coinciden con los valores estimados por Li, que pudiera corresponder a una estrella tipo quark-extraña.

REFERENCIAS

[1] Cosenza M., Herrera L., Esculpi M. y Witten L. *J. Math. Phys,* **22,** 118 (1981).

[2] Cosenza M., Herrera L., Esculpi M., Witten L., *Phys. Rev. D,* **55**, 2527 (1982)

[3] Dai Z., Peng G y Lu T., *Astrophys. J.* **440,** 815, (1995).

[4] Turner E. , *ApJ,* L**43**, 365, (1990).

[5] Di Francesco, Mathieu and Senéchal, Conformal Field Theory. Graduate texts in contemporary physics. Springer p. 98 (1997).

[6] Bicknell, G. y Henriksen R. *Astrophys. J.* **219**: 1043-1057, (1978).

[7] Herrera, L. y de León, P., *J. Math. Phys.* **26**, 8, 2018-2023, (1985).

[8] Mak M. y Harko T., arXiv: gr-qc/0309069 v2, (2004).

[9] Bohmer C., Harko T., y Lobo F., *Phys. Rev.* D, **76**, 084014 (2007).

[10] Harada T., arXiv: gr-qc/ 0904.4770 v1 (2009).

[11] Israel, W., *Nuovo Cimento B* **44**, 1 (1966).

[12] Witten E., *Phys. Ver. D* **30**, 272, (1984).

[13] Cheng K.S., Dai Z.G. y Lu T., *Int. J. Mod. Phys. D* **7**, 139,(1998)

[14] Alomá, E. *Eur. Phys. J. C* **67,** 521, (2010)

[15] Bombaci I., arXiv:[gr-qc] 0809.4228v1 (2008)

[16] Li X., Bombaci I., Dey M, Dey J. and van den Heuvel, E., *Phys. Rev. Lett.* **83,** 3776 (1999)

CAPITULO I

FLUIDOS ESTÁTICOS ANISÓTROPOS CON SIMETRIA CONFORME Y ECUACIONES LINEALES DE ESTADO TIPO BAROTRÓPICAS

RESUMEN

Se realiza el estudio de un fluido anisótropo descrito por una métrica estática y con simetría esférica que además admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. El fluido está acotado por una película delgada que posee una distribución isótropa de materia y la región exterior del fluido está descrita por la métrica de Schwarzschild. Se resuelven las ecuaciones de campo de Einstein imponiendo ecuaciones de estado tipo barotrópicas para modelar diversos escenarios físicos y se evalúan las condiciones de energía. Estas soluciones acotadas con simetría conforme permiten un potencial gravitacional en la superficie $M/R>1/3$.

INTRODUCCIÓN

La simetría conforme y la clase especial de movimientos conformes y la autosimilaridad, han sido de particular interés debido a sus aplicaciones en astrofísica y la cosmología. Las limitaciones impuestas sobre las funciones métricas por esta simetría permite obtener soluciones analíticas de las ecuaciones de campo de Einstein [1] - [17]. Cahill y Taub [1] encontraron que para una distribución de materia de fluido perfecto en el espaciotiempo y con simetría esférica similar, la ecuación de estado es únicamente determinada por $P=\alpha\rho$, para alguna constante α, donde P y ρ son la presión isótropa y la densidad de energía, respectivamente. Carr *et al* [12] – [16] estudiaron ampliamente las mismas soluciones para fluidos perfectos autosimilares. Estos autores estudiaron el comportamiento asintótico de sus soluciones autosimilares, y encontraron ocho clases de comportamientos asintóticos. Lin, *et al* [2] estudiaron soluciones para un fluido con ecuación de estado "dura" e indicaron que pueden existir autosimilaridades cosmológicas. Bicknell and Henriksen [5] discutieron la posibilidad de crecimiento de forma autosimilar de agujeros negros en un Universo primitivo bajo una ecuación de estado "dura". Bohmer, *et al* [17] obtuvieron soluciones simétricas conformes de agujeros de gusanos transversales. T. Harada, *et al* [21] – [22], estudiaron soluciones autosimilares con fluidos tipo energía oscura y probaron de forma rigurosa la no existencia de agujeros negros autosimilares cosmológicos para el caso de fluidos gobernados por una ecuación de estado "dura" dentro de un campo escalar conocido en el espaciotiempo.

Las soluciones de fluidos anisótropos conformes han sido ampliamente estudiadas en casos estáticos y no estáticos [6] – [11], [23], en la aproximación a una capa fina [10] para el modelado de estrellas de solitones [11]. Herrera, *et al* [6] estudiaron las consecuencias de la existencia de un grupo de un parámetro de movimientos conformes para materia anisótropa. Ellos mostraron cómo las ecuaciones de campo de Einstein se reducen, en el caso estático, a un grupo de ecuaciones con variables físicas donde el factor conforme es una función de la coordenada espacial. De igual forma mostraron que todas las soluciones con simetría conforme tienen un potencial gravitacional $M/R = 1/3$

Por otro lado, recientes observaciones astrofísicas han confirmado que el Universo presenta una expansión cósmica acelerada. Los resultados de esta expansión se han presentado en las medidas de supernovas de tipo Ia y de las radiaciones de fondo cósmico. D. Huterer y M. Turner en 1998 [18] propusieron que este comportamiento cosmológico es causado por una "energía oscura" hipotética actuando como un fluido cósmico parametrizado por una ecuación de estado:

$$P = -\alpha\rho \tag{1}$$

donde P es la presión radial del fluido, ρ la densidad de la energía oscura y α un parámetro arbitrario. Maeda H and T. Harada estudiaron las soluciones autosimilares con energía oscura y probaron de forma rigurosa que no existen agujeros negros cosmológicamente similares para un fluido estático y un campo escalar [21]. Las estrellas de energía oscura anisótropas han sido propuestas como un modelo alternativo a los agujeros negros [32].

A partir de las ecuaciones de campo de Einstein, siguiendo [6], se obtienen modelos de estrellas que poseen presión nula o no nula en su superficie, y que admiten un grupo de un parámetro de movimientos conformes. La función del factor conforme se obtiene en cada caso estudiado imponiendo ecuaciones de estado barotrópicas lineales. Estas ecuaciones serán del tipo $P_r=\alpha\rho$, $P_\perp=\alpha\rho$ o $P_\perp - P_r=\alpha\rho$ y $\wp=\omega\rho$, donde P_r, $P_\perp$ (o también Pt) y $\wp$ son la presión radial, la presión tangencial y la presión de la superficie, respectivamente. α y ω son parámetros a ser fijados por las condiciones de juntura y permitirán modelar diversos escenarios físicos considerando las condiciones de energía. Se estudiará cómo la existencia de una película delgada junto con las condiciones de la energía afecta el potencial gravitacional M/r en la superficie exterior de la esfera (donde M es la masa medida en la superficie externa) de la configuración.

Las condiciones de energía [24], [25] juegan un papel importante en la Relatividad General, ellas imponen restricciones generales sobre el tensor de energía impulso del sistema físico. Estas condiciones son coordenadas invariantes y se establecen en términos de $T_{\alpha\beta}$ y de los campos vectoriales del tipo temporal, espacial o nulo. Buniy, *et al*, [26] demostraron que la violación de la condición de energía nula genera inestabilidad en sus modelos propuestos. Además la violación de esta condición es necesaria para la construcción de agujeros de gusano Lorentzianos [27]. Se supone que la expansión acelerada es posible debido a que la energía oscura viola la condición de energía fuerte $\rho + P_r + 2P_\perp \geq 0$. Para un fluido perfecto esto implica que para $\alpha < 1/3$ la materia está conformada por energía oscura [28].

Las condiciones de energía [29]-[32] se escriben de la siguiente forma:

las condición de energía débil

$$\rho \geq 0 \tag{2}$$

$$qr \equiv \rho + P_r \geq 0 \tag{3}$$

$$qt \equiv \rho + P_\perp \geq 0 \tag{4}$$

las condiciones de energía fuerte se expresan como (3)-(4) y

$$QS = \rho + P_r + 2P_\perp \geq 0 \tag{5}$$

las condiciones de energía dominante son:

$$q1 \equiv \frac{P_r}{\rho} \leq 1 \tag{6}$$

$$q2 \equiv \frac{P_\perp}{\rho} \leq 1 \tag{7}$$

Considerando la simetría conforme y la imposición de la ecuación de estado, se puede obtener el factor conforme ψ y resolver las ecuaciones de campo de Einstein. Tomando en cuenta las condiciones de energía para el fluido en el núcleo y en la película delgada, es posible determinar los límites del potencial gravitacional *M/R* y los parámetros α y ω de las soluciones obtenidas.

Este Capítulo está organizado de la siguiente forma: En la Sección II estudiamos las condiciones de juntura que se aplican al acoplar el núcleo a la métrica exterior estática de Schwarzschild a través de una película delgada [33] – [34], siguiendo el trabajo de Herrera *et al*, [6] se resuelven las ecuaciones de campo. En la Sección III, escribimos las soluciones correspondientes a cada ecuación de estado que se han propuesto para caracterizar el fluido. Se evalúan los parámetros físicos resultantes tomando en cuenta las condiciones de energía y se evalúan los límites del

potencial gravitacional *M/R*. De igual forma, identificamos los valores posibles del parámetro de proporcionalidad para la obtención de soluciones que representan energía oscura. Finalmente, en la sección IV se escriben los resultados y conclusiones.

II. ECUACIONES DE CAMPO Y CONDICIONES DE JUNTURA

Consideremos una hipersuperficie esférica Σ que separa la región interior de la exterior de un fluido en el espaciotiempo. La región interior, una esfera de radio R, además de poseer simetría esférica, admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes:

$$\mathcal{L}_\zeta g_{\mu\nu} = \psi g_{\mu\nu} \tag{8}$$

donde $\mathcal{L}_\zeta$ es la derivada de Lie del tensor métrico en la dirección de ζ^i y ψ, el factor conforme, es una función arbitraria de la coordenada radial. Si las longitudes se incrementan en la misma tasa a lo largo de las órbitas del campo vectorial ζ^i entonces este corresponde con la noción de una solución autosimilar que se encuentra en hidrodinámica. [5].

La región interior se describe por la métrica:

$$ds_I^{\,2} = A^2(r)dt^2 - B^2(r)dr^2 - r^2 d\Omega \tag{9}$$

donde $d\Omega = d\Theta^2 + sin^2\,\Theta\, d\varphi^2$ y la distribución de materia en la región interior está descrita por un tensor de energía impulso de la forma:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + P_\perp)U_\alpha U_\beta - P_\perp g_{\alpha\beta} + (P_r - P_\perp)\,\chi_\alpha \chi_\beta \tag{10}$$

donde ρ, P_r, $P_\perp$ son la densidad de la energía, la presión en la dirección de χ_α y la presión en el bi-espacio ortogonal a χ_α respectivamente y U_α y χ_α son el cuadrivector velocidad del fluido y un vector espacial en la dirección radial. Para un fluido estático tenemos:

$$U^\mu = (U^0, 0, 0, 0); \qquad \chi^\mu = (0, \chi^1, 0, 0)$$

con

$$U^\mu U_\mu = -\chi^\mu \chi_\mu = 1 \text{ y } U^0 = \frac{1}{A(r)}; \chi^1 = \frac{1}{B(r)}$$

el espaciotiempo en la hipersuperficie Σ es descrito por la métrica:

$$ds_\Sigma^2 = d\tau^2 - R_\Sigma^2 d\Omega^2 \tag{11}$$

el tensor de energía en Σ es

$$S_a^b = (\wp + \sigma) u^a u_b - \wp\, \delta_b^a \tag{12}$$

donde σ es la densidad de energía superficial , asociada con la trayectoria U^α y $\wp$ la presión en la superficie.

la región exterior es descrita por la métrica exterior de Schwarzschild

$$ds_E^2 = \left(1 - \frac{2M}{\bar{r}}\right) dT^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{\bar{r}}\right)} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\Omega^2 \tag{13}$$

la ecuación para la superficie en la región interior toma la forma de

$$\phi = r - R\Sigma \tag{14}$$

la métrica inducida sobre la película desde el interior del fluido es:

$$ds_I^{\,2}]_{r=r_\Sigma} = (A^2(r) - B^2(r)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2)dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi)\Big|_{r=r_\Sigma} \tag{15}$$

la ecuación para la superficie expresada en las coordenadas de la región exterior es

$$\Phi(\bar{r}) = \bar{r} - R_\Sigma = 0 \tag{16}$$

la métrica inducida en la hipersuperficie, desde el exterior es:

$$ds_E^2]_{\bar{r}=R} = \left[\left[(1-\frac{2M}{\bar{r}}) - \frac{1}{(1-\frac{2M}{\bar{r}})}\left(\frac{d\bar{r}}{dT}\right)^2\right]dT^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi)\right]_{\bar{r}=\bar{r}_\Sigma} \tag{17}$$

a partir de (11) , (15) y (17):

$$r_\Sigma = R_\Sigma = \bar{r}_\Sigma \equiv R$$

de las ecuaciones (11) y (15) se obtiene, para los casos estáticos

$$A^2dt^2 = d\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{A^2}$$

y a partir de (11) y (17) , obtenemos:

$$\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{1-\frac{2M}{R}}$$

Los vectores normales para la superficie Σ son:

$$n_\alpha^- = B\delta_\alpha^1 \tag{18}$$

$$n_\alpha^+ = \left(1-\frac{2M}{r_\Sigma}\right)^{-\frac{1}{2}}\delta_\alpha^1 \tag{19}$$

Las componentes no nulas de la correspondiente curvatura extrínseca están definidas

por:

$$k_{ij} = -n_\alpha \left\{ \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta \partial x^\gamma}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \right\} \tag{20}$$

para la métrica interior los tensores de la curvatura extrínseca son:

$$k^-_{00} = -\frac{A'}{AB}\ ;\ \ k^-_{22} = \frac{\bar{r}}{B};\ \ k^-_{33} = k_{22}\sin^2\theta \tag{21}$$

y para la métrica exterior

$$k^+_{00} = -\frac{M}{r^2_\Sigma\left(1-\frac{2M}{\bar{r}_\Sigma}\right)^{\frac{1}{2}}}; k^+_{22} = \bar{r}_\Sigma\left(1-\frac{2M}{\bar{r}_\Sigma}\right)^{\frac{1}{2}};\ k^+_{33} = k^+_{22} sen^2\theta \tag{22}$$

Las componentes no nulas de (12) son:

$$S^0_0 = \sigma\ ;\quad S^2_2 = S^3_3 = -\wp \tag{23}$$

siguiendo el formalismo de Israel [33] para películas delgadas, tenemos:

$$-8\pi k S^i_j = \left[k^i_j\right] - \delta^j_i\left[k^l_l\right] \tag{24}$$

donde $[f] = f_+ - f_-$

Las ecuaciones para la densidad superficial de energía σ y la presión de la superficie $\wp$ se obtienen a partir de las expresiones:

$$8\pi S^0_0 = [k^2_2] + [k^3_3] \tag{25}$$

$$8\pi S^2_2 = [k^0_0] + [k^3_3] \tag{26}$$

con

$$k_2^2 = -\frac{1}{R^2} k_{22} = k_3^3 \tag{27}$$

$$4\pi\sigma = -\frac{1}{R^2}[k_{22}] = \frac{1}{R}\left[-\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{B}\right] \tag{28}$$

$$8\pi\wp = -4\pi\sigma + \frac{M}{R^2(1-\frac{2M}{R})^{\frac{1}{2}}} - \frac{A'}{AB} \tag{29}$$

Si $\sigma = 0$, existe un efecto de tensión superficial y $\frac{1}{B^2} = \frac{1}{\left(1-\frac{2M}{R}\right)}$. Si $\sigma \neq 0$ se supone una ecuación de estado que relaciona la presión superficial con la densidad superficial de la forma:

$$\wp = \omega\sigma \tag{30}$$

donde ω es un parámetro ajustable. A partir de las ecuaciones (28) y (29), obtenemos la siguiente ecuación que relaciona las funciones métricas de las regiones interior y exterior en la superficie:

$$\frac{1}{B^2} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1+2\omega-\frac{M}{R}(1+4\omega)}{(1+\omega)}\right\}^2 \frac{1}{\left(1-\frac{2M}{R}\right)} \tag{31}$$

Las ecuaciones de campo de Einstein son:

$$8\pi P_r = \frac{1}{B^2}\left(\frac{2A'}{Ar} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} \tag{32}$$

$$8\pi P_\perp = \frac{1}{B^2}\left\{\frac{A''}{A} - \frac{A'B'}{AB} + \frac{1}{r}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}\right)\right\} \tag{33}$$

$$8\pi\rho = \frac{1}{B^2}\left(\frac{2B'}{Br} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \tag{34}$$

donde las primas denotan diferenciación respecto a r.

Consideramos que el espaciotiempo admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. La ecuación (8) puede ser expresada de manera más explícita, de la forma:

$$\zeta_{\mu;\nu} + \zeta_{\nu;\mu} = \psi g_{\mu\nu}$$

y restrinjamos el campo vectorial, exigiendo que el cuadrivector velocidad de fluido sea ortogonal a la órbita del grupo:

$$\zeta^{\mu} U_{\mu} = 0 \tag{35}$$

Las funciones A y B están restringidas por la condición (8), que implica, según [6]:

$$A(r) = C_1 r \tag{36}$$

$$B(r) = \frac{2C}{\Psi} \tag{37}$$

y a partir de (37):

$$\frac{1}{B^2} = \frac{\psi^2}{4C^2} \tag{38}$$

donde C_1 y C son dos constantes arbitrarias y se han utilizado las ecuaciones (9) y (35).

Introduciendo las ecuaciones (36) y (37) en (32)-(34) , se obtiene:

$$8\pi P_r = \frac{3\psi^2}{4C^2}\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \tag{39}$$

$$8\pi P_{\perp} = \frac{\psi^2}{4C^2}\left\{\frac{2\psi'}{r\psi} + \frac{1}{r^2}\right\} \tag{40}$$

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2} - \frac{\psi^2}{4C^2}\left\{\frac{2\psi'}{\psi r} + \frac{1}{r^2}\right\} \tag{41}$$

III. LAS SOLUCIONES

Determinaremos la función conforme $\psi(r)$ imponiendo la ecuación de estado que satisface el fluido y se sustituye en las ecuaciones (39)-(41). Consideraremos las siguientes ecuaciones de estado:

i) $P_r = \pm\alpha\rho$

ii) $P_{\perp} = \alpha\rho$

iii) $P_{\perp} - P_r = \alpha\rho$

i) $P_r = \pm\alpha\rho$.

Esta ecuación de estado barotrópica lineal ha sido ampliamente estudiada en diversos escenarios físicos [35-37]

$$P_r = \pm\alpha\rho \ (\alpha \geq 0) \tag{42}$$

Introduciendo (42) en las ecuaciones (39) y (41) y resolviendo la ecuación diferencial obtenemos:

$$\frac{\psi(r)^2}{4C^2} = \frac{1+\alpha}{3+\alpha} - \frac{k}{4C^2} r^{-\frac{3+\alpha}{\alpha}} \qquad \text{para} \qquad P_r = \alpha\rho \tag{43}$$

$$\frac{\Psi_{(r)}}{4C^2}^2 = \frac{1-\alpha}{3-\alpha} + \frac{K}{4C^2} r^{\frac{3-\alpha}{\alpha}} \qquad \text{para} \qquad P_r = -\alpha\rho \tag{44}$$

donde k y K son constantes arbitrarias de integración.

Partiendo de que α es positiva, seleccionamos $k=0$ en (43) para evitar la discontinuidad en $r=0$, y tener densidad infinita. Tenemos una solución homotética para ψ. Reinsertando (43) en (39)-(41) tenemos:

$$8\pi P_r = \frac{2\alpha}{3+\alpha}\frac{1}{r^2} \tag{45}$$

$$8\pi\rho = \frac{2}{3+\alpha}\frac{1}{r^2} \tag{46}$$

$$8\pi P_\perp = \left(\frac{1+\alpha}{3+\alpha}\right)\frac{1}{r^2} \tag{47}$$

Considerando que nuestro objetivo es obtener fluidos acotados, acoplamos esta solución a la métrica exterior de Schwarzschild a través de la película delgada. Usando (31), (37) y (43) obtenemos una constante para los valores de α

$$\frac{1+\alpha}{3+\alpha} = \frac{1}{B^2} = \left\{\frac{1+2\omega-\frac{M}{R}(1+4\omega)}{(1+\omega)}\right\}^2 \frac{1}{4(1-2\frac{M}{R})} \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \tag{48}$$

Para valores positivos de α, el potencial gravitacional en la superficie, M/R, debe ser mayor a 1/3. Si M/R=1/3, entonces α=0, independientemente de los valores de ω. Además en este caso, la densidad de energía σ y la presión en la superficie $\wp$ son nulas, tenemos una esfera homotética, sostenida con presión tangencial solamente. A partir de (45)-(47) o debido a la condición impuesta por la simetría del

movimiento conforme del espacio al tensor de energía impulso [6], tenemos, para $\alpha=0$:

$$P_{\perp}=\frac{1}{2}\rho$$

la masa en la región interior es

$$m(r)=\frac{r}{3+\alpha}\rightarrow\ \frac{M_{-}}{R}\equiv\frac{m(r=R)}{R}=\frac{1}{3+\alpha}$$

En esta región, M_{-}/R es menor que 1/3 para $\alpha>0$.

Para $\sigma=0$ tenemos $M_{-}=M$, y para los valores positivos de α, el potencial de la superficie gravitacional toma los siguientes valores:

$$\frac{1}{4}\leq\frac{M}{R}\leq\frac{1}{3}$$

Para estos valores de M/R la presión de la superficie es negativa, o cero en $M/R=1/3$. La condición de energía dominante y la condición de energía fuerte son violadas en la película delgada. No obstante, la condición de energía dominante se mantiene para el tensor de energía-impulso en la región conforme.

La Figura N° 1 muestra la densidad de la energía de la superficie, para diferentes valores de M/R, como función del parámetro ω. La presión en la superficie $\overline{\wp}=M\wp$, como una función de M/R se muestra en la Figura N° 2; para $\sigma=0$, en la Figura izquierda, y para $\sigma\neq0$, en la Figura derecha. En la Figura N° 3, mostramos α como una función de M/R, para diferentes valores de ω y para $\sigma\neq0$, en la Figura derecha y para $\sigma=0$ en la Figura de la izquierda. En la Figura N° 4 las relaciones

$q_1 = Pr/\rho$ y $q_2 = P_\perp/\rho$ se evalúan para r/R=0.5 como una función de ω, para diferentes valores de M/R. Se puede observar como los valores de ω y M/R están restringidos por las condiciones de energía dominante. En la Figura N° 5 se muestra, para el caso σ=0, la condiciónes de energía dominante como una función de M/R, evaluada en r/R=0.5.

Para una ecuación de estado tipo energía oscura, la constante K se obtiene por la aplicación de la condición de juntura; en este caso es posible tener una presión superficial nula. Analizaremos las condiciones de juntura apropiada en diferentes escenarios físicos tomando en cuenta las condiciones de energía. Para la condición energía fuerte, se grafica $\overline{QS} = (\rho + P_r + 2P_\perp)M^2$.

Si la hipersuperficie tiene presión nula en la frontera, i.e., $P_r(r=R)=0$, el potencial gravitacional en la superficie de la esfera, M/R, toma el valor 1/3, como se espera para soluciones con simetría conforme. Como la densidad de energía es nula en la superficie de la esfera, la condición de energía dominante para la presión tangencial no nula en la superficie no se cumple, a menos que la presión tangencial sea negativa. Se considera entonces la presencia de una película delgada para acoplar la solución con la métrica exterior de Schwarzschild.

Introduciendo (44) en (39)-(41), se obtiene una familia de soluciones dependiendo del parámetro α :

$$8\pi P_R = -\frac{2\alpha}{(3-\alpha)r^2} - \frac{3}{r^2}\left[\frac{1-\alpha}{3-\alpha} - \left(1 - \frac{2M_-}{R}\right)\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3-\alpha}{\alpha}} \tag{49}$$

$$8\pi\rho = \frac{2}{(3-\alpha)r^2} + \frac{3}{\alpha r^2}\left[\frac{1-\alpha}{3-\alpha} - \left(1 - \frac{2M_-}{R}\right)\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3-\alpha}{\alpha}} \tag{50}$$

$$8\pi P_\perp = \frac{1-\alpha}{(3-\alpha)r^2} - \frac{3}{r^2}\left[\frac{1-\alpha}{3-\alpha} - \left(1 - \frac{2M_-}{R}\right)\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3-\alpha}{\alpha}} \tag{51}$$

Con $M_- = m_{(r=R)}$

$$M_- = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\left[1+2\omega+\frac{M}{R}(4\omega+1)\right]^2}{(1+\omega)^2\left(1-\frac{2M}{R}\right)}\right\} \tag{52}$$

si σ=0, obtenemos para este caso

$$\left[\frac{\psi^2}{4C^2}\right]_{r=R} = 1 - \frac{2M}{R}$$

$$M_- = M$$

Para que la densidad de energía sea positiva en la región interior, el potencial en la superficie interior *M/R* debe tomar los valores:

$$\frac{M_-}{R} \geq \frac{1}{3}$$

Por esta razón, como se puede ver en la Figura N° 6, los valores de ω y *M/R* deben elegirse de modo que se cumpla la condición de energía débil. No es posible la presencia de una película de polvo (ω=0) para esta solución. Para que se cumpla la condición de energía dominante, α debe tomar valores menores a 0.1 En la Figura N° 7, se presenta la condición de energía dominante en la región interior, para *M/R=0.3636* y α =0.1 y diferentes valores de ω. Note que, esta condición se cumple

sólo para el valor $\omega = 0.9$ en el caso mostrado, debido a que para los otros valores de ω la densidad de energía se hace negativa cerca de la superficie de la esfera.

En la Figura 8 se puede observar que se viola la condición de energía fuerte cerca de la superficie, para ciertos valores de *M/R*. Para *M/R* cercano a 1/3, no se viola la condición de energía fuerte, pero al aumentar el potencial gravitacional, aparecen regiones de energía oscura cercanas a la superficie. Para la película delgada que se considera, con una densidad de energía superficial positiva, no se viola la condición de energía fuerte para el tensor de energía-impulso en le región interior de la esfera, a menos que la densidad de energía se haga negativa, en cuyo caso se viola también la condición de energía débil. En la Figura 8 (derecha) grafica el perfil de la densidad y se observa que no se violan las condiciones de energía dominante.

Para una superficie de presión nula:

$$\frac{M}{R} = \frac{M_-}{R} = \frac{1}{3}$$

En este caso, la condición de energía fuerte se cumple dentro del núcleo, las condiciones de energía dominante no se cumplen en la superficie $r/R = 1$, para algún valor del parámetro α, debido a que la densidad de energía es nula pero la presión tangencial no lo es. Dentro de la esfera, la condición de energía dominante depende de los valores de α, como se puede observar en la Figura N° 9.

(ii) $P_\perp = \alpha\rho$.

En este caso, se encuentra la función ψ a partir de una ecuación de estado para la presión tangencial de la forma:

$$P_\perp = \alpha\rho \tag{53}$$

Introduciendo (53) en (39) - (41), se obtiene:

$$\frac{\psi^2}{4C^2} = \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{K}{4C^2 r} \tag{54}$$

Para que ψ sea regular en el origen tomamos K=0; y se obtiene una solución homotética:

$$8\pi P_r = \frac{2\alpha-1}{(1+\alpha)r^2} \tag{55}$$

$$8\pi\rho = \frac{1}{(1+\alpha)r^2} \tag{56}$$

$$8\pi P_t = \frac{\alpha}{(1+\alpha)r^2} \tag{57}$$

Como en el primer caso, los valores de α quedan restringidos por las condiciones de juntura

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} = \left\{\frac{1+2\omega-\frac{M}{R}(4\omega+1)}{1+\omega}\right\}^2 \frac{1}{4(1-\frac{2M}{R})} \tag{58}$$

para σ=0, el parámetro α toma los valores

$$\alpha = \frac{1-\frac{2M}{R}}{\frac{2M}{R}} \tag{59}$$

para $\sigma = 0$, debido a (59), para $0 < \alpha \leq 1$ tenemos

$$\frac{1}{4} \leq \frac{M}{R} < \frac{1}{2}$$

La Figura N° 10 muestra los valores de α como función de ω, para diferentes valores de M/R, y los valores de α como función de M/R, para ambos casos considerados, una película delgada con $\sigma \neq 0$ y $\sigma = 0$, del lado izquierdo y el lado derecho de la Figura, respectivamente. Se puede observar que para M/R = 1/3, α toma el valor 0.5 para algún valor de ω y la presión radial, la densidad superficial de

energía y la presión superficial se anulan, teniendo entonces una esfera sostenida solamente por una presión tangencial.

Evaluando las condiciones de energía para esta familia de soluciones, se encuentra que en la región interior, para $M/R > 1/3$, ($\sigma > 0$), las condiciones de energía fuerte y dominante se cumplen, dependiendo del potencial gravitacional de la esfera y el valor del parámetro ω, como se muestra en la Figura N° 11.

Las condiciones de energía fuerte y dominante, en la región interior, son evaluadas como función de M/R, para una película delgada con densidad de energía nula. Se puede observar que las condiciones de energía fuerte y dominante se cumplen para el fluido en el núcleo, mientras que en la película delgada, para $M/R<1/3$, estas condiciones de energía no se cumplen. Estos resultados se muestran en la Figura N° 12, para $r/R = 0.4$

(iii) *Pt-Pr= αρ*

De forma análoga a los casos anteriores, se determina la función ψ para el fluido, ahora bajo una ecuación de estado barotrópica donde la diferencia entre la presión radial y tangencial es proporcional a la densidad de la energía, de la forma:

$$P_{\perp} - P_r = \alpha\rho \tag{60}$$

Al introducir (60) en (39)-(41) y resolver la ecuación diferencial resultante para ψ, se obtiene:

$$\frac{\psi^2}{4C^2} = \frac{1-\alpha}{2-\alpha} + \left[\frac{1}{(2-\alpha)} - \frac{2M_-}{R}\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2-\alpha}{1+\alpha}} \tag{61}$$

Sustituyendo (61) en (39)-(41) obtenemos las variables del fluido:

$$8\pi\rho = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{2-\alpha} - \frac{3}{1+\alpha}\left[\frac{1}{2-\alpha} - \frac{2M_-}{R}\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2-\alpha}{1+\alpha}}\right\} \tag{62}$$

$$8\pi P_r = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1-2\alpha}{2-\alpha} + 3\left[\frac{1}{2-\alpha} - \frac{2M_-}{R}\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2-\alpha}{1+\alpha}}\right\} \tag{63}$$

$$8\pi P_\perp = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1-\alpha}{2-\alpha} + \frac{3}{1+\alpha}\left[\frac{1}{2-\alpha} - \frac{2M_-}{R}\right]\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2-\alpha}{1+\alpha}}\right\} \tag{64}$$

$$m(r) = \frac{r}{2}\left[\frac{1}{2-\alpha} - \left(\frac{1}{2-\alpha} - \frac{2M_-}{R}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{2-\alpha}{1+\alpha}}\right] \tag{65}$$

donde M_- representa el valor del total de la masa interior $m(R)$ limitada por la ecuación (58) al aplicar las condiciones de juntura y considerando además la presión superficial proporcional a la densidad de energía en la superficie de la película. Para M/R=1/3, la hipersuperficie es una superficie límite, esto implica $M_-=M$ y $P_r(R)=0$. De igual forma cuando σ=0 $M_-=M$ en (62)-(65). Las condiciones de juntura no limitan los valores de α, pero si la limitan las condiciones de energía.

Como en el caso anterior consideramos la ecuación de estado $\wp=\omega\sigma$ en la película, para acoplarla con el fluido. Evaluamos las condiciones de energía en la región interior y en la película para identificar las restricciones de los parámetros α y ω. Primero, consideramos el tensor de energía superficial con una densidad de energía positiva. Luego se considera una densidad de energía superficial nula y finalmente se estudia la solución para una superficie de presión nula. Para estos casos también se evalúa la condición de la traza de energía, Q $=(P_r + 2P_\perp)/\rho \leq 1$ en la región interior. Todos los resultados se presentan en la Figuras N° 13-19.

IV. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Hemos obtenido un grupo de soluciones analíticas anisótropas de las ecuaciones de campo de Einstein, considerando una distribución de materia consistente en un fluido anisótropo, con la diagonal principal del tensor de materia no nula, que además de la simetría esférica también admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. Para tener fuentes con fronteras, la región interna conforme se ha acoplado a la métrica exterior de Schwarzschild por medio de una hipersuperficie que consiste en un película delgada esférica con un tensor superficial de energía isótropa y una ecuación de estado $\mathcal{p} = \omega\sigma$. Consideramos tres ecuaciones de estado lineales diferentes, incluyendo la ecuación de estado para la energía oscura, para acoplar las regiones interiores, y se analizaron las soluciones obtenidas en cada caso. Las condiciones de juntura así como la imposición de las condiciones de energía limitan los valores de los factores de proporcionalidad α y ω. Además, se puede observar como los posibles valores de M/R de la métrica exterior de Schwarzschild se restringen al imponer las condiciones de energía débil, dominante o fuerte.

En la Figura N° 1 se muestra la densidad de energía de la superficie como una función del parámetro ω, tomando diferentes valores de M/R. Se puede observar el comportamiento de la densidad para valores críticos del potencial gravitacional. En la Figura N° 2, la presión de la superficie depende de cómo se muestre M/R para los

diferentes valores del parámetro ω, cuando $\sigma \neq 0$, y para una superficie de densidad nula. Como consecuencia de las condiciones de energía y juntura, para cualquiera de los EOS considerados, para una energía de superficie no nula, los valores de M/R deben ser mayores a 1/3 para asegurar que la densidad de energía superficial sea positiva. Para $\omega=0$, la película delgada se convierte en una película de polvo para algunos valores negativos de ω, para $\omega < -0.5$ se convierte en una película de energía oscura. Para los valores de $M/R=1/3$ la presión radial en la frontera de la hipersuperficie se anula ($\sigma=p=0$). Para una película delgada con una densidad de energía superficial nula, los valores de $M/R < 1/3$ están prohibidos si se quiere que la condición de energía débil se cumpla en el interior de la esfera. Cuando imponemos $\sigma=0$ y $p \neq 0$, la condición de energía dominante no se cumple para el tensor de energía superficial de la película delgada. Para los valores de $M/R<1/3$, la presión de la superficie se torna negativa. En este caso, la condición de energía débil y la condición de energía fuerte no se cumplen en el tensor superficial de energía, pudiendo existir una película de energía oscura tipo fantasma.

En la Figura N° 3, el parámetro α aparece dependiente de M/R, además de depender de ω para una densidad de energía superficial nula, ($\sigma=0$) y los valores del parámetro α son limitados por los valores de M/R. Para los valores de M/R permitidos en la región interior, la condición de energía débil $(\sigma+2\wp)\geq 0$, y la condición de energía fuerte se violan para el tensor de energía superficial en la película. La frontera puede contener en este caso materia exótica.

Se encontró que los valores de α son determinados únicamente por las

condiciones de juntura para las soluciones homotéticas. Para las soluciones conformes, α permanece como un parámetro libre que puede ser ajustado para satisfacer las condiciones de energía.

En la Figura N° 4, para $P_r=\alpha\rho$ la condición de energía dominante depende del potencial gravitacional M/R y del parámetro ω. Para una densidad de superficie nula, la condición de energía dominante depende de los valores M/R que se muestran en la Figura N° 5.

Para las soluciones $P_r= - \alpha \rho$, $(\alpha>0)$, se encontró que para una superficie de densidad de energía no nula, es posible ajustar los valores de α y ω, dando a M/R valores mayores a 1/3, para que de esta manera la solución complete la condición de energía dominante. La presencia de una película delgada permite obtener un corrimiento al rojo gravitacional mucho mayor, para estas soluciones, M/R debe ser mayor al valor típico de 1/3 para soluciones simétricas conformes. No es posible que exista una película de polvo si la condición de energía débil no se cumple para esta solución. La Figura N° 6 muestra los valores de M/R como una función de ω para M/R=1/3, 1/2.75 y 1/2.5.

Para una solución que se encuentra en un escenario de energía oscura, se violan las condiciones de energía (3) – (5). De manera más especifica si solamente se viola la ecuación (5), estamos entonces en un escenario de energía oscura. Si se violan las condiciones (3) y (4), además de la ecuación (5) estamos en presencia de la denominada energía fantasma repulsiva, mientras que en el caso en que solamente las condiciones (3) o (4) son violadas tenemos energía fantasma atractiva [12]. En la

Figura N° 7 mostramos, para la ecuación de estado de la energía oscura, algunos valores de α, ω, M/R para que se cumplan las condiciones de energía dominante. Con la ecuación de estado "dura" en la película, al ser menores los valores de α en el núcleo, es más probable que se satisfagan las condiciones de energía dominante.

En la Figura N° 8 mostramos para σ=0, un perfil de $\overline{QS} = (\rho + P_r + 2P_t)/\rho$ en la región interna, para los diferentes valores de M/R, 1/2.95, 1/2.75 y 1/2.25 y para un valor ajustado del parámetro α=0.05. Además, el perfil de la densidad de energía $\overline{\rho} \equiv M^2\rho$, se muestra para los mismos valores de α y M/R. Es evidente que la condición de energía fuerte no se cumple en la capa externa cerca de la superficie, para r/R hasta 0.9 para los valores mayores de M/R. Sin embargo, la presión superficial en la hipersuperficie es positiva, y crece en la medida que crece M/R. La condición de energía fuerte no se cumple para la capa externa de la región interna, pero si se cumple para el tensor de energía superficial de la frontera. En la Figura N° 9, cuando la hipersuperficie es de presión nula, se muestra que se cumple la condición de energía dominante en la región interna para $r/R<1$. En este caso, la condición de energía fuerte se cumple para el fluido provisto de valores apropiados de M/R y α, asegurando que la presión tangencial sea positiva dentro del fluido.

La Figura N° 10 muestra la dependencia del parámetro α con M/R, para σ=0 y la dependencia de α con ω, con $\sigma \neq 0$ respectivamente, para la EOS $P_\perp = \alpha\rho$.

En la Figura N° 11 se muestran q_1 y q_2 evaluados en la región interna de la esfera para dos valores del parámetro ω, ω=0.5 y 0.7, y para M/R=0.4, y también se muestra la dependencia de M/R. La condición de energía dominante se cumple para el

fluido interno con valores de α en el intervalo $0 \leq \alpha \leq 1$, y para el tensor de energía superficial con $M/R>1/3$.

Para un película con una densidad de energía de superficie nula, la condición de energía dominante se cumple para el fluido interior solamente, para los valores de M/R, $1/4 \leq M/R < 1/2$, tal como se puede ver en la Figura N° 12. La condición de energía fuerte se cumple para la distribución de materia en la región interior. En la hipersuperficie la condición de energía fuerte no se cumple para valores de $M/R<1/3$, la presión superficial es negativa y la película es del tipo energía oscura.

Para la última ecuación de estado que hemos considerado, podemos observar en la Figura N° 13, la condición de traza de energía. La misma se satisface cuando consideramos una hipersuperficie de presión nula ($M/R=1/3$) o un película delgada, escogiendo los valores apropiados de ω y M/R para $M_{_} \geq 1/3$, para $\alpha=0.5$, es decir, presión radial nula.

La condición de energía fuerte $\overline{QS}$ se muestra en la Figura N° 14. Se evaluó $r/R=0.3$, como una función de ω, para $M/R=1/2.75$ y $\alpha=0.3$. Esta condición de energía se cumple tanto para el tensor de energía impulso en la región interior como para el tensor de energía impulso en la región exterior. En la Figura N° 15, q_1, q_2 y la condición de energía fuerte son evaluadas en $r/R=0.3$ como una función de M/R, para $\omega=0.7$ y $\alpha=0.3$. No existen restricciones en los valores de ω para que se satisfagan las condiciones de energía dominante en la región interior.

En la Figura N° 16, para una densidad de energía superficial nula, evaluamos las condiciones de energía dominante q_1 y q_2 como una función de α, para el valor de

r/R=0.3 y M/R=0.4, para ver las restricciones de α impuestas por las condiciones de energía. En la Figura N° 17, se muestran las condiciones de energía como función de M/R, para α=1/3 y r/R=0.3.

En la Figura N° 18 se muestra el perfil de la condición de traza de energía Q para una esfera con una densidad superficial nula, con M/R=1/2.8, para los diferentes valores del parámetro α. Se observa que para α = 0.45, la condición de la traza tiende a no satisfacerse en las capas interiores del fluido (r/R < 0.3). Finalmente, en la Figura N° 19, se evalúa la condición de energía fuerte para una hipersuperficie de presión nula, como una función del parámetro α. Estas soluciones presentan buen comportamiento y se satisfacen las condiciones de energía para la región interior y para el película delgada.

Hemos obtenido soluciones homotéticas y soluciones conformes de las ecuaciones de campo de Einstein, factibles para modelar objetos muy compactos, que consiste en un núcleo de fluido anisótropo rodeado por un fluido isótropo. Para que se cumplan las condiciones de energía en el tensor de energía impulso del núcleo y en la película delgada, el potencial gravitacional M/R debe tomar valores mayores a 1/3, cerca de 0.46, para la solución (iii), mayores al límite Buchdahl [38-39], debido a esto la presencia de una película delgada incrementa el corrimiento al rojo. Así mismo, los valores de los parámetros α y ω están restringidos por el potencial gravitacional en la superficie. Estos parámetros y los valores de M/R pueden ser ajustados para modelar estados de evolución de estrellas constituidos de materia exótica o de estrellas muy compactas tipo estrellas de neutrones o estrellas tipo quark.

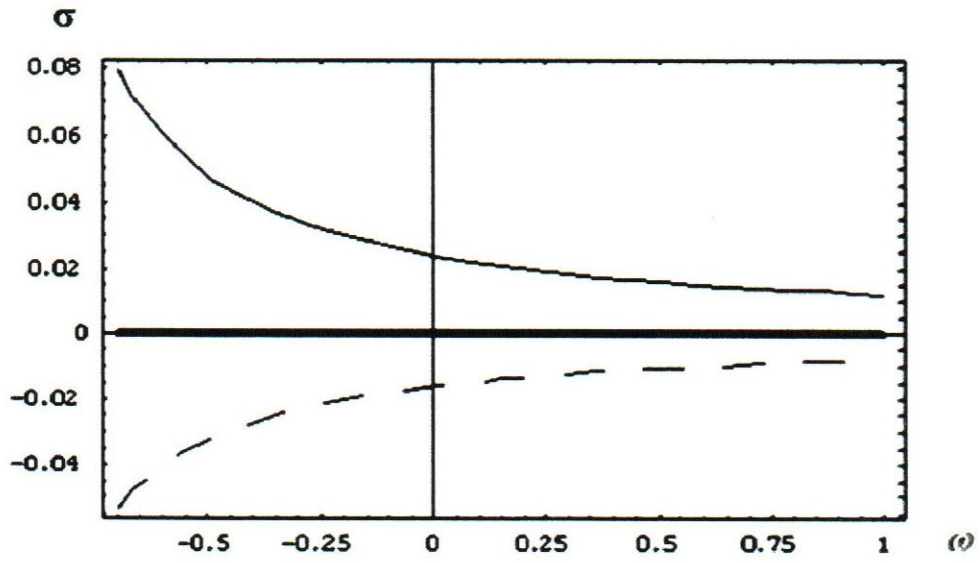

Figura N° 1: La densidad de energía superficial como función del parámetro ω. La línea continua delgada es para M/R=1/2.8, la línea continua gruesa es para M/R=1/3 y la línea discontinua es para M/R=1/3.2

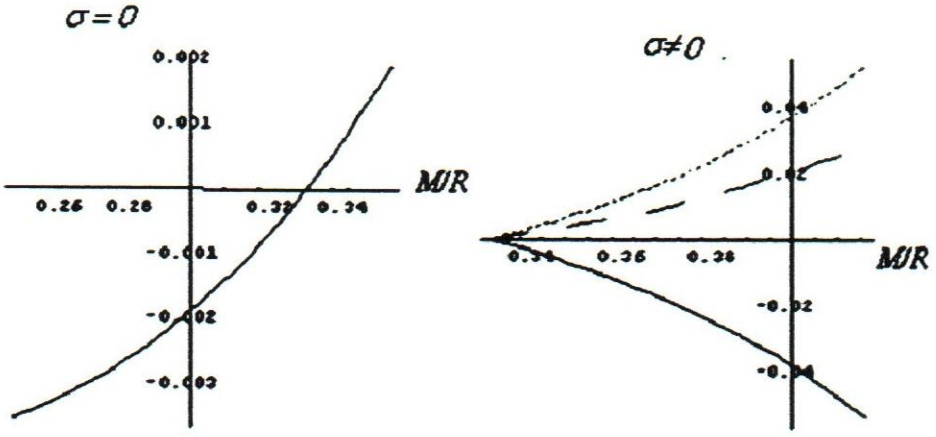

Figura N° 2: La presión superficial como función de M/R, para σ =0 (izquierda) y para $\sigma \neq 0$ (derecha), para ω = -0.3, 0.3 y 0.7, línea gruesa continua, línea punteada y línea discontinua, respectivamente.

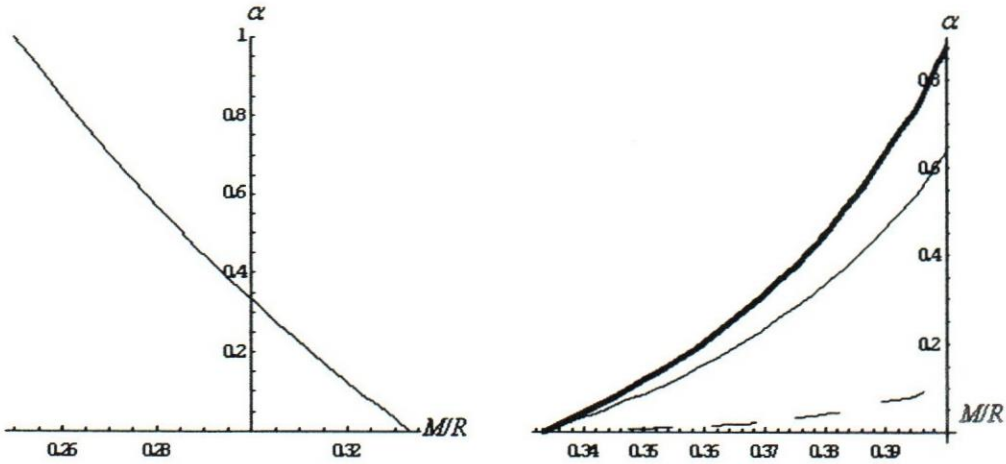

Figura N° 3: α como función de M/R para σ=0 (izquierda) y $\sigma \neq 0$ (derecha), para ω=-0.1, 0.0 y 0.5, línea delgada, línea gruesa y línea discontinua respectivamente

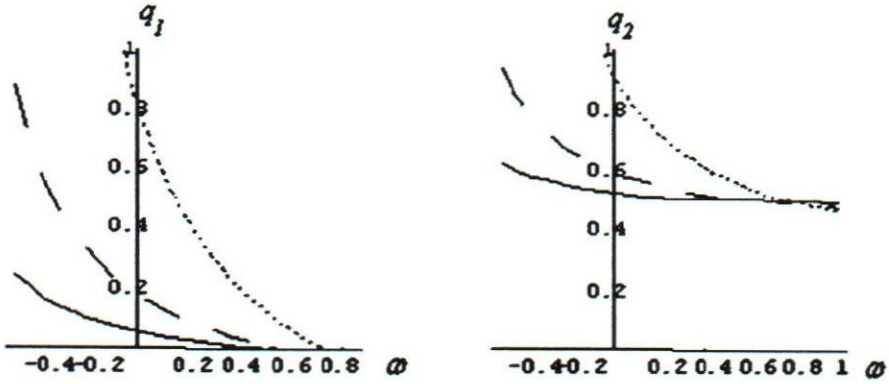

Figura N° 4: Las relaciones $q_1 = Pr/\rho$ (izquierda) y $q_2 = P_\perp/\rho$ (derecha), evaluadas en r/R =0.5, para $\sigma \neq 0$, se presentan como función de ω, valores de M/R=1/2.9, 1/2.75 y 1/2.45, línea continua, línea discontinua y línea punteada, respectivamente

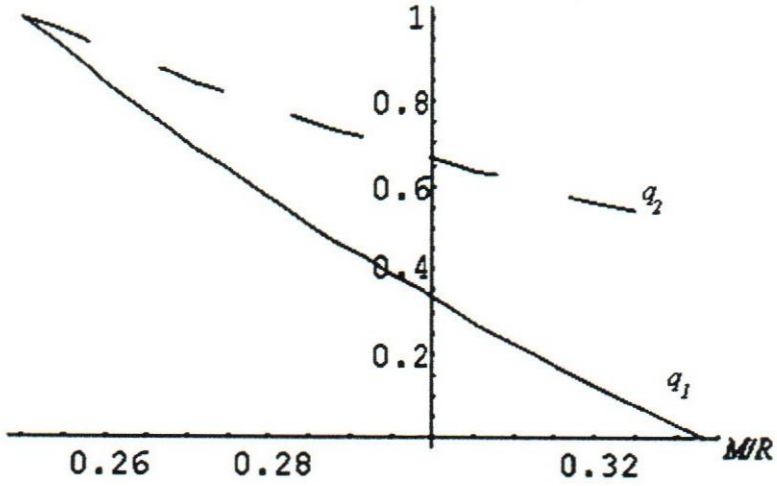

Figura N° 5: Las relaciones $q_1 = Pr/\rho$ y $q_2 = P_\perp/\rho$, para $\sigma=0$, evaluadas en $r/R = 0.5$, se presentan como función de M/R.

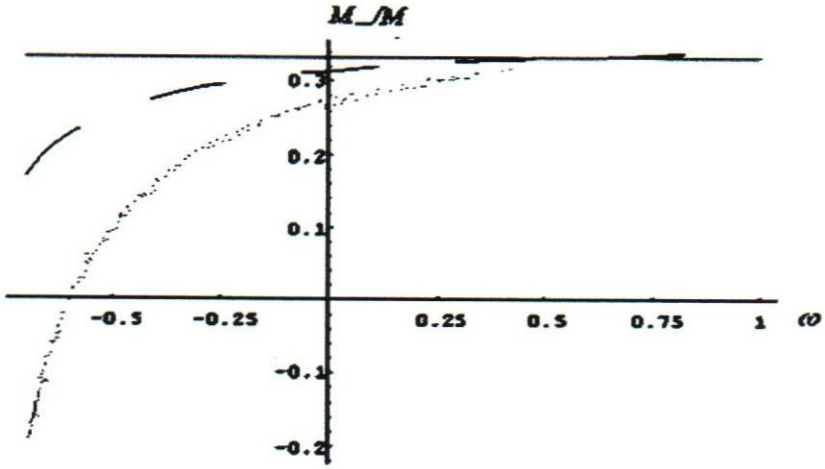

Figura N° 6: Los valores de $M_/M$ como función de ω, para diferentes valores de M/R. M/R=1/3, 1/2.75 y 1/2.5 están representados por la línea continua, la línea discontinua y la línea punteada, respectivamente.

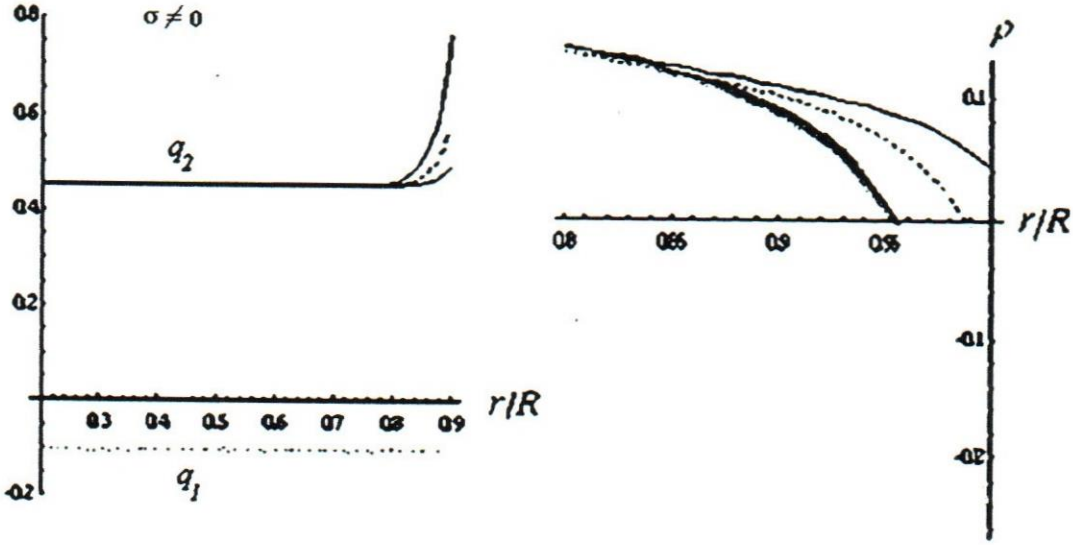

Figura N° 7: Condiciones de energía dominante como función de *r/R*, para EOS $Pr=-\alpha\rho$ (núcleo) y $\wp = \omega\rho$ (película), para *M/R* =0.3636, α =0.1 y diferentes valores de ω. En el lado izquierdo, q_1 es la línea punteada y q_2 es la línea gruesa continua (ω =-0.2), la línea discontinua (ω =0.3), la línea delgada continua (ω =0.9). En el lado derecho, se presenta ρ como función de r/R para los mismos valores de *M/R*, α y ω, línea gruesa continua (ω =-0.2), línea discontinua (ω =0.3) y línea delgada continua (ω =0.9).

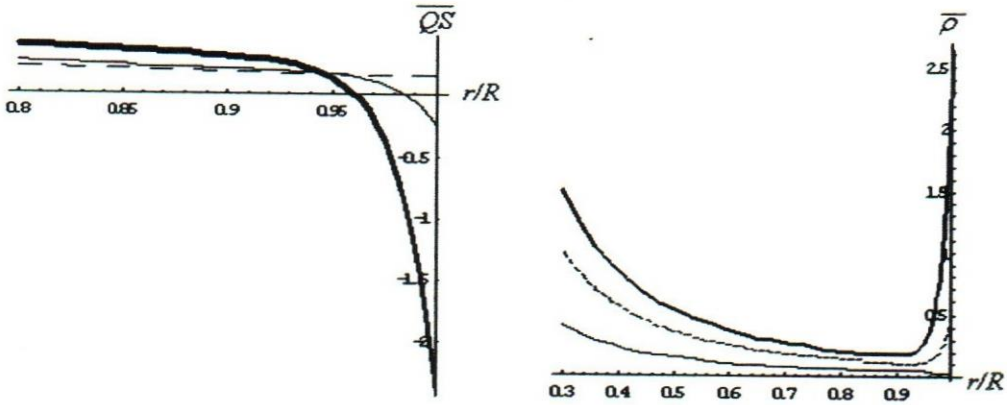

Figura N° 8: Condición de energía fuerte, $\overline{QS}$ y densidad de energía $\overline{\rho}$ como función de *r/R* para $P_r = -\alpha\rho$, para α =0.05 y para diferentes valores de *M/R*. La línea discontinua corresponde a *M/R*=1/2.95, la línea delgada corresponde a *M/R*=1/2.75 y la línea gruesa continua corresponde a *M/R* =1/2.25.

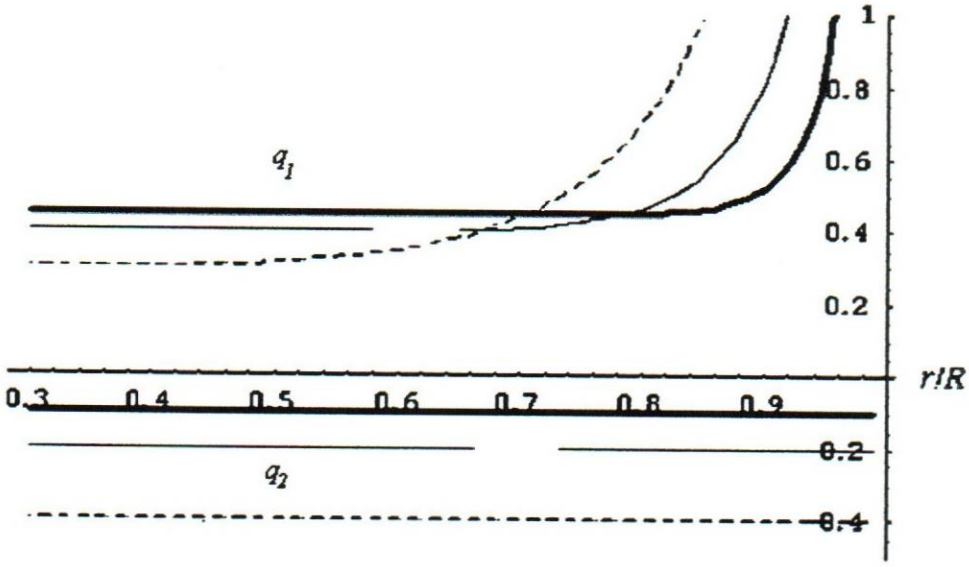

Figura N° 9: Condiciones de energía dominante, q_1 y q_2, para $P_r = -\alpha\rho$ para $r/R<1$. Se muestra $M/R=1/3$ (superficie de presión nula) para α =0.1 (línea gruesa continua), α =0.2 (línea larga discontinua) y α =0.4 (línea discontinua)

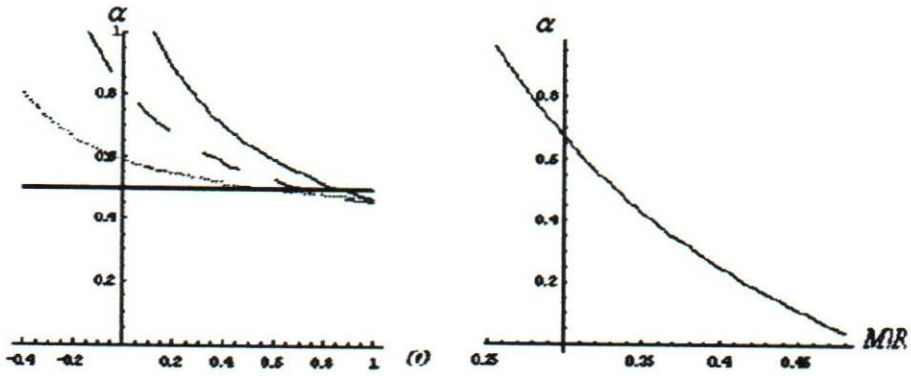

Figura N° 10: α como función de M/R, para σ =0 (derecha) y como función de ω para $\sigma \neq 0$ (izquierda), con M/R =1/3, 1/2.75, 1/2.5 y 1/2.35, línea gruesa continua, línea punteada, línea discontinua y continua respectivamente.

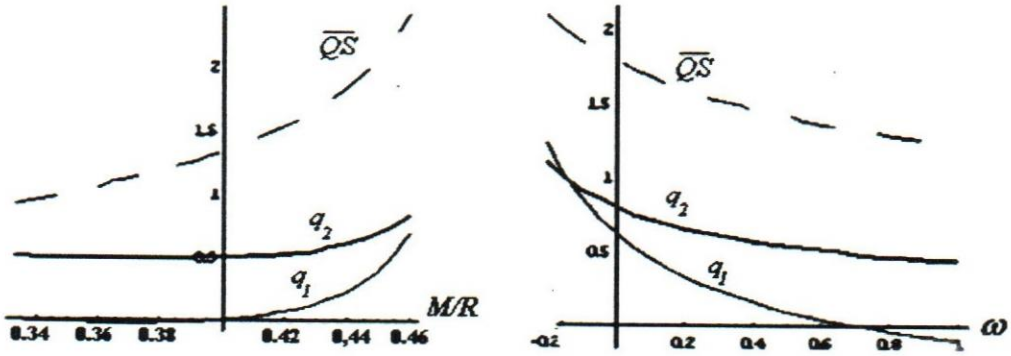

Figura N° 11: Condiciones de energía para $P_\perp = \alpha\rho$. Condición de energía fuerte, $\overline{QS}$, y condiciones de energía dominante, q_1 y q_2, para la región interior, r/R=0.4, como función de M/R, para ω=0.7 (Figura de la izquierda) y como función de ω para M/R=0.4 (figura de la derecha)

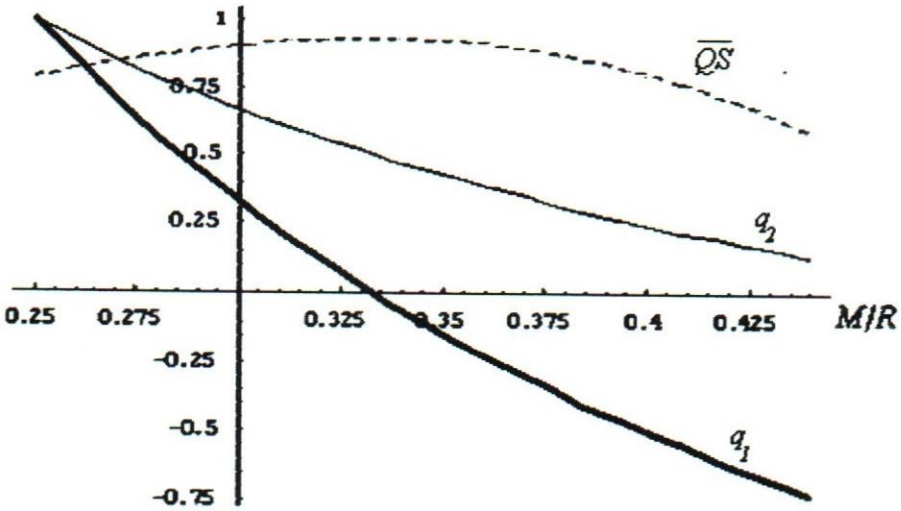

Figura N° 12: Condiciones de energía para $P_\perp = \alpha\rho$, considerando densidad de energía nula, $\sigma = 0$ La condición de energía fuerte, $\overline{QS}$, y la condiciones de energía dominante, q_1 y q_2, para la región interior, r/R=0.4, como función de M/R.

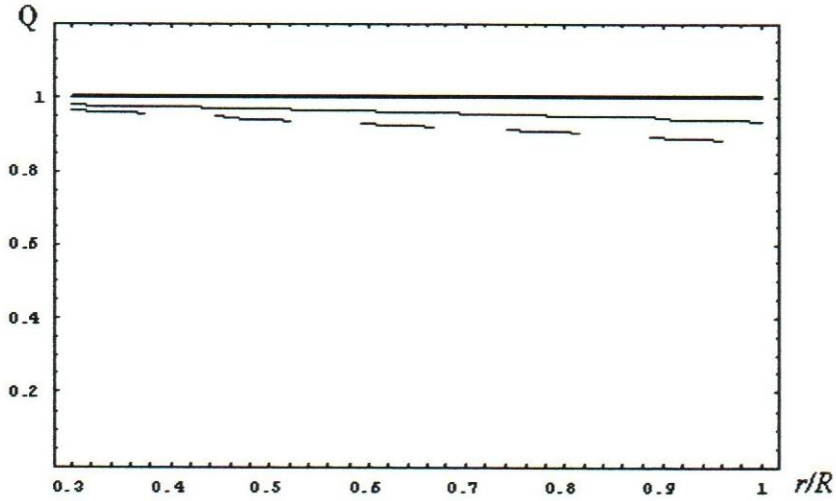

Figura N° 13: Condiciones de energía para $P_{\perp} - P_r = \alpha\rho$, para una esfera con densidad superficial de energía no nula. Se muestra la condición de la traza de energía, Q como función de *r/R*, para $\alpha = 0.5$, $\omega = 0.9$, *M/R*=1/3, *M/R*=1/2.75 y 1/2.5, línea gruesa continua, línea delgada continua y línea discontinua, respectivamente.

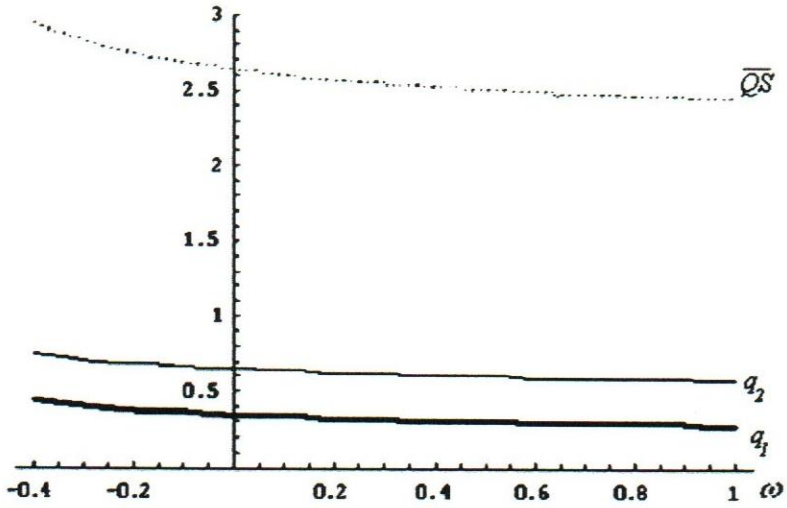

Figura N° 14: Condiciones de energía para $P_{\perp} - P_r = \alpha\rho$, para una esfera con densidad de energía superficial no nula. Condiciones de energía dominante q_1 y q_2 y condición de energía fuerte $\overline{QS}$ como función de ω, para *r/R*=0.3, *M/R*=1/2.75, $\alpha = 0.3$.

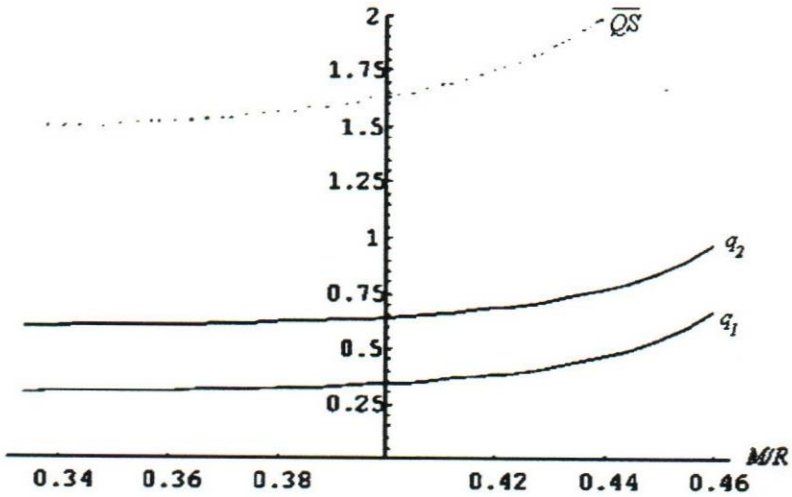

Figura N° 15: Condiciones de energía para $P_\perp - P_r = \alpha\rho$, para una esfera con densidad de energía superficial no nula. Condiciones de energía dominante q_1 y q_2 y condición de energía fuerte $\overline{QS}$ como función de *M/R*, para *r/R*=0.3, $\omega = 0.7$ $\alpha = 0.3$.

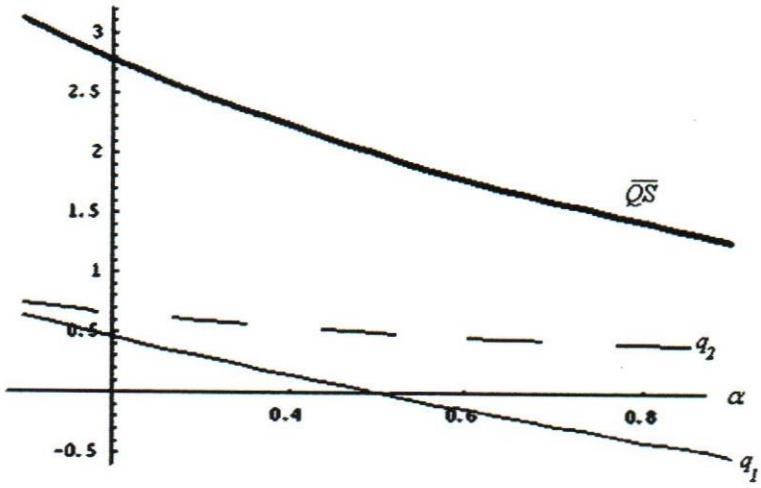

Figura N° 16: Condiciones de energía para $P_\perp - P_r = \alpha\rho$, para una esfera con densidad de energía superficial nula. Condición de energía dominante q_1 y q_2 y condición de energía fuerte $\overline{QS}$ como función de α, para *r/R*=0.3, *M/R*=0.4.

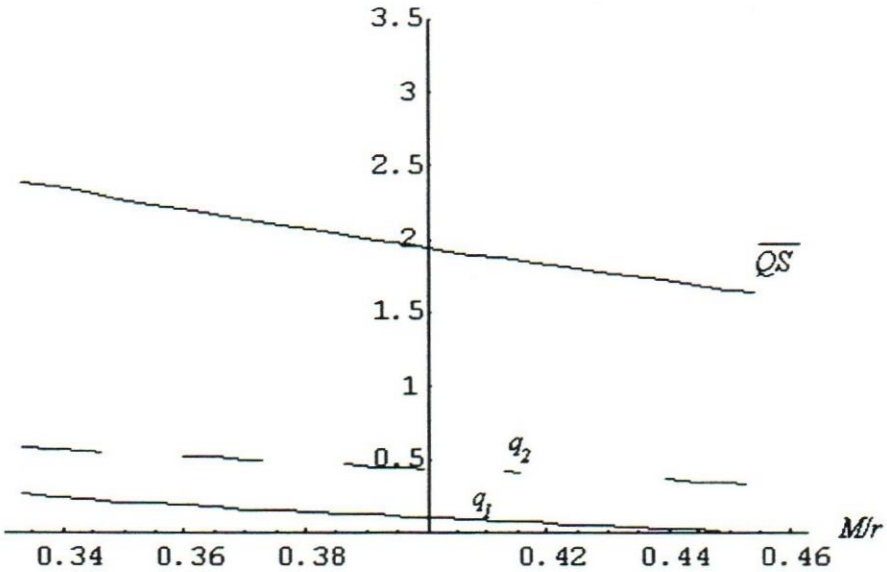

Figura N° 17: Condiciones de energía para $P_\perp - P_r = \alpha\rho$, para una esfera con densidad de energía superficial nula. Condiciones de energía dominante q_1 y q_2 y condición de energía fuerte $\overline{QS}$ como función de *M/R*, para *r/R*=0.3, $\alpha = 1/3$.

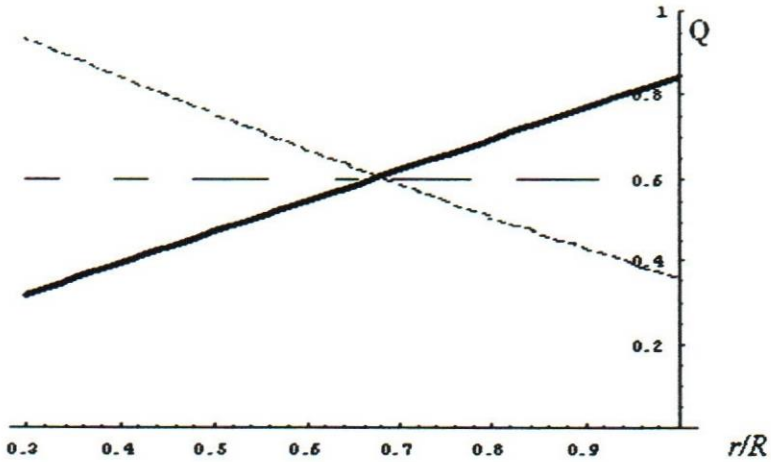

Figura N° 18: Condiciones de energía para $P_\perp - P_r = \alpha\rho$, para una esfera con densidad de energía superficial nula. Condición de la traza de energía Q como función de *r/R*, para *M/R* = 1/2.8, para diferentes valores de α. La línea punteada corresponde a $\alpha = 0.45$, la línea discontinua corresponde a $\alpha = 0.6$ y la línea continua gruesa corresponde a $\alpha = 0.75$.

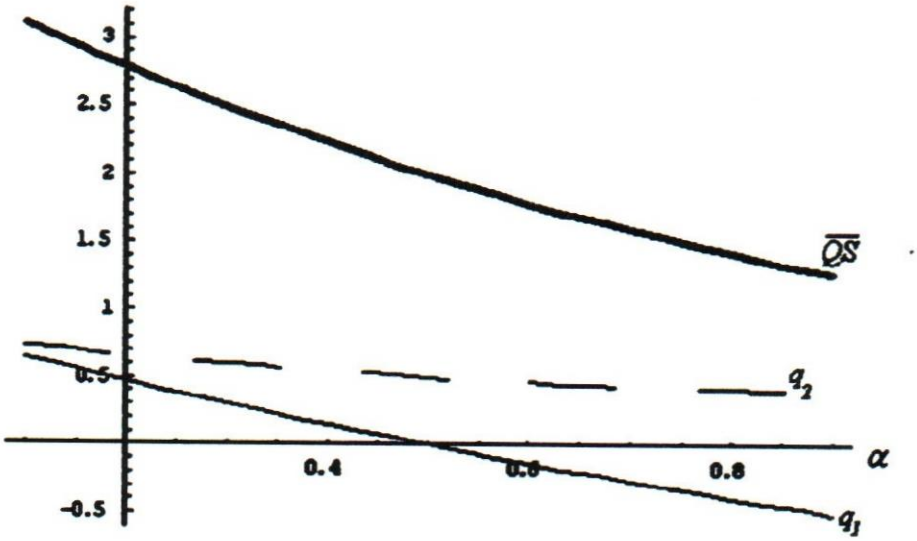

Figura N° 19: Condiciones de energía para $P_{\perp} - P_r = \alpha\rho$, considerando una superficie de presión nula (*M/R*=1/3). Condición de energía fuerte $\overline{QS}$ y condiciones de energía dominante q_1 y q_2 como función del parámetro α.

REFERENCIAS

[1] Cahil, M. E. and Taub, A. H., *Commun. Math. Phys.* **21**, 1 (1971).

[2] Lin, D. Carr, B.J. and Fall, S.M. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 177, 51 (1976).

[3] Henriksen, R. N. and Wesson, P. S., *Ap. Space Sci.* **53**, 429 (1978).

[4] Bicknell G. and Henriksen, *R. Astrophys. J.* **219**, 1043 (1978).

[5] Bicknell G. and Henriksen, *R. Astrophys. J.* **225**, 237 (1978).

[6] Herrera, L., Jiménez, J., Leal, L., Esculpi, M., Ponce de León, J., and Galina, V. *J. Math.Phys.* **25**, 3274 (1984).

[7] Esculpi, M. and Herrera L. *J. Math. Phys.* **27**, 2087 (1986).

[8] Herrera, L., Ponce de León, J. *J. Math. Phys.* **26,** 778 (1985).

[9] Herrera, L., Ponce de León J. *J. Math. Phys.* **26,** 2018 (1985).

[10] Herrera, L., Ibañez, J., Di Prisco, A., *Astrophys J*, 353, 579 (1990).

[11] Esculpi, M. and Herrera L. *Phys. Rev.* D**45**, 3341, (1992).

[12] Carr, B.J. and Hawking, S. *M.N.R.A.S.,* **168,** 399. (1974).

[13] Carr, B.J. and Coley, A. A. *Class. Quant. Grav.* **16**, R31 (1999).

[14] Carr, B.J., Coley, A. A., Goliath, M., Nilsson, U.S., and Uggla C. *Phys. Rev.* D **61**, 08152 (2000).

[15] Carr, B.J.and Gundlach C. *Phys. Rev.* D **67**, 024035 (2003).

[16] Carr, B.J. and Coley, A. A. *Gen. Rel. Grav.* **37**, 2165 (2005).

[17] Bohmer, C., Harko, T. and Lobo, F. *Phys. Rev.* D **76**, 084014 (2007).

[18] Huterer, D. and Turner, M., *Phys. Rev.* D **60,** 081301 (1999).

[19] Yilmaz, I., Aygun, M. and Aygun, S. *Gen. Rel. Grav.* **37**, 2093 (2005).

[20] Maharaj, S., Leach, P. and Martins R. *Gen. Rel. Grav.* **23,** (1991).

[21] Maeda, H. and Harada, T. *Phys. Rev.* D **77**, 024022 (2008).

[22] Maeda, H., Harada, T. and Carr, B. J. *Phys. Rev.* D **77**, 024023 (2008).

[23] Maharaj, S. D., Maartens, R. and Maharaj, M. S., *Int J Theor Phys*, **34**, 2285 (1995).

[24] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R. The large scale structure of space-time, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[25] Carroll, S. Space Time and Geometry. An Introduction to General Relativity, Addison Wesley, New York, 2004.

[26] Buniy, R.and Hsu, S. *Phys. Lett.* B **632**, 53 (2006).

[27] Morris, M. S. and Thorne, K. S. *Am. J. Phys* **56**, 395 (1988).

[28] Cai R., and Wang, A. *Phys. Rev.* D **73**, 063005 (2006).

[29] Hernández, H. and Núñez, L. *Can. J. Phys.* **82**, 29-51 (2004).

[30] Visser, M. and Wiltshire, D. *Class.Quant.Grav.* **21**, 1135 (2004).

[31] Santos, J., Alcaniz, J. S. and Reboucas, M. J. *Phys. Rev.* D 74, 067301 (2006).

[32] Chan , R., da Silva, M. and da Rocha, J. gr-qc/arxiv 0803.2508 (2008).

[33] Israel, W. *Nuovo Cimento* B **44**, 1 (1966).

[34] Lake, K. *Phys. Rev.* D **19**, 2847 (1979).

[35] Nilsson, U. S., Ugla C. *Annals Phys.* **286**, 270 (2001).

[36] Zloshchastiev, K. G. *Int. J. Mod. Phys.* D**8**, 549 (1999).

[37] Giambó, R., Giannoni F.,Magli G. and Piccione, P. *Gen. Rel. Grav.* **36**, 1279

(2004).

[38] Buchdahl, H. A. *Phys. Rev.*, **116**, 1027 (1959).

[39] Guven J. and Murchadha, N. O. *Phys. Rev.*D **60**, 084020 (1999).

CAPITULO II

ESFERAS RELATIVISTAS CON FLUIDO ANISÓTROPO CARGADO Y CONFORME CON UNA ECUACIÓN DE ESTADO LINEAL

RESUMEN

Se obtienen dos nuevas familias de soluciones compactas para una distribución esférica de materia que consiste en un fluido cargado acoplado a la solución estática de Reissner-Nordstrom y con presión nula en la superficie. La región interior admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. Primero, para estudiar el efecto de la anisotropía en las presiones del fluido cargado, además de considerar una ecuación de estado lineal del fluido, se considera que la presión tangencial es proporcional a la presión radial, y el factor de proporcionalidad C mide el grado de anisotropía. Analizamos la distribución de carga resultante y las características de la familia de soluciones obtenidas. Esta familia de soluciones reproduce la solución isótropa conforme de estrellas de quarks para C=1, previamente obtenidas por Mak y Harko. La segunda familia de soluciones se obtiene asumiendo que la carga en el interior de la esfera es una función conocida de la coordenada radial. Los valores permitidos de los parámetros están limitados por las condiciones físicas impuestas.

Estudiamos el efecto de la anisotropía en objetos compactos y el valor de la carga que asegura la estabilidad de las soluciones. Estas soluciones pueden modelar algunos estados de la evolución de estrellas con materia extraña tipo quark.

I. INTRODUCCIÓN

Recientes observaciones experimentales de la relación masa-radio de algunos objetos compactos y de las ráfagas de rayos gamma sugieren la existencia de estrellas tipo quarks extrañas. La materia quark extraña, aceptada como el campo de estados de la materia bariónica [1] consiste en quarks desconfinados *u, d* y *s*. La posible existencia de estrellas de quarks fue propuesta por N. Itoh [2]. En ese trabajo el autor explica que si los bariones consisten en un conjunto de partículas fundamentales, es posible que tales partículas se encuentren en el interior de estrellas superdensas. Haensel, *et al*, [3] determinaron que estrellas masivas de neutrones podrían existir en forma de estrellas de quarks extrañas para modelos considerados por ellos de material tipo quarks. Witten [4] propuso que la materia extraña puede estar formada por una transición de fase quark - hadron en el universo primitivo o por la conversión de estrellas de neutrón en estrellas extrañas a densidades ultra altas. Bodmer [5] propuso que una transición de fase entre hadrones y materia quark extraña puede ocurrir en el universo, a densidades tan altas como la densidad nuclear, cuando una estrella masiva explota como una supernova, debido a esto, la materia quark extraña es susceptible de existir en los núcleos internos de las estrellas de neutrones o las estrellas de quark

para formarse después de la explosión [6], [7]. Las estrellas extrañas han sido ampliamente estudiadas dentro del marco de trabajo del modelo de bolsa MIT [8]. En este modelo, la ecuación de estado de la materia quark $P=(\rho-4B)/3$ tiene una forma lineal. La presión constante B de la bolsa, está relacionada con el radio de equilibrio de la bolsa.

El estudio de los objetos cargados en el marco de la Relatividad General, resolviendo las ecuaciones de campo de Maxwell – Einstein, se ha relacionado con las estrellas de neutrones y la formación de los agujeros negros [9]-[12]. Estos objetos pueden estar vinculados con algunos estadios de los colapsos gravitacionales o a un proceso de acreción dentro de un objeto compacto donde la materia puede adquirir una gran cantidad de carga [13]. Este tipo de configuraciones fue propuesto inicialmente por Bekenstein [14]. Las fuentes para la métrica de Reissner Nordstorm fueron propuestas en los trabajos pioneros de Cooperstock y De la Cruz [15] y Tikekar [16], ver también el trabajo de Singh, *et al*, [17]. Algunos criterios para admitir las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein -Maxwell han sido propuestos por Ivanov [18]. Recientemente, nuevas soluciones estáticas han sido presentadas por Thirukkanes y Maharaj [19]. Los esfuerzos se han encaminado a establecer un límite de estabilidad absoluta para las esferas cargadas [20], [21], [22], [23], como el límite del radio de la masa de Buchdahl [24] para esferas sin carga. Recientemente el estudio de la presencia del campo electromagnético en estrellas extrañas tipo quarks ha sido otro aspecto relacionado con las ecuaciones de Einstein - Maxwell, vinculado a varios modelos de estrellas extrañas [25]-[28], partículas de

quarks extrañas [29], estrellas de protoneutrones híbridos [30] y estrellas quark desnudas [31], [32]. El estudio de esferas cargadas también ha sido asociado al modelo de masa electromagnética [33], donde sólo la masa originada a partir del campo electromagnético da lugar a una relación entre los campos gravitacionales y electromagnéticos [34], [35]. Algunos autores [39]-[43] han estudiado las implicaciones de la existencia de un grupo de un parámetro de movimientos conformes en el espaciotiempo de Einstein – Maxwell.

Mak y Karko [44] estudiaron las implicaciones físicas de la existencia de un grupo de parámetro de movimientos conformes en la estructura y propiedades de una estrella extraña tipo quark isótropa, descrita por el modelo de bolsa MIT. De igual forma S. Ray *et al*, [36]-[38] propusieron un modelo de masa electromagnética admitiendo un vector conforme de Killing.

Consideramos una distribución de materia anisótropa cargada y de igual forma se considera que el espacio admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. Se supone una ecuación de estado lineal que relaciona la densidad de la energía con la presión radial de un fluido. Al incrementarse el número de variables, para resolver las ecuaciones de campo se debe proveer de más información al sistema. Primero, con la finalidad de estudiar el efecto de la anisotropía suponemos que la presión tangencial es proporcional a la presión radial, la constante de proporcionalidad es el parámetro C que mide la anisotropía. La distribución de la carga dentro de la esfera se obtiene al resolver las ecuaciones de campo. Segundo, de acuerdo a Ray y Das [36]-[38] proponemos la distribución de la carga como una

función de la coordenada radial y se obtiene las variables físicas a partir de las ecuaciones de campo. Comparamos nuestros resultados con los de las soluciones de Mak y Harko [44] especificando los parámetros de la ecuación lineal de estado del modelo de la bolsa MIT. De igual forma, presentamos las características de estas nuevas soluciones y se comparan con otras similares. Finalmente, evaluamos la masa gravitacional de los modelos obtenidos.

Este capítulo está organizado como sigue: En la Sección II obtenemos las ecuaciones de campo en la región interior, la cual admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes, además se considera que la órbita del grupo es ortogonal a la velocidad de campo del fluido. De igual manera se presentan la métrica exterior y las condiciones de juntura. En la Sección III obtenemos la primera familia de soluciones asumiendo la ecuación lineal de estado (ELDE) para el fluido anisótropo cargado y la relación proporcional entre las presiones. En la Sección IV, además de la ELDE y la simetría conforme, la carga dentro de la esfera está dada como una función de la coordenada radial y se resuelven las ecuaciones de campo. En la Sección V establecemos las conclusiones.

II. ECUACIONES DE CAMPO, SIMETRÍA CONFORME Y CONDICIONES DE JUNTURA

Consideremos una distribución de materia formada por un fluido localmente anisótropo cargado. El tensor de energía-impulso es de la forma:

$$T_{\mu\nu}^{(g)} = (\rho + P_{\perp})u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}p_\perp + (p_r - p_\perp)\chi_\mu\chi_\nu \qquad (1)$$

donde ρ, $p_r, p_\perp$, u_μ, χ_μ son la densidad de energía de la materia, la presión radial en la dirección de χ_μ, la presión en el espacio bidimensional ortogonal a χ_μ , el cuadrivector velocidad del fluido y un vector espacial en la dirección radial ortogonal a u_μ respectivamente.

El tensor energía-impulso del campo electromagnético es:

$$T_{\mu\nu}^{em} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{4}g_{\mu\nu}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}f_{\mu\alpha}f_{\nu\beta}\right\} \qquad (2)$$

donde el tensor del campo electromagnético $f_{\mu\nu}$ es dado en los términos de potencial electromagnético A_μ como

$$f_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$$

las ecuaciones de campo electromagnético de Maxwell son:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,f^{\mu\nu})}{\partial x^\nu} = 4\pi J^\mu \qquad (3)$$

con J^μ , el cuadrivector corriente se define como $J^\mu = \sigma\, u^\mu$, donde σ es la densidad de la carga.

el tensor energía-impulso dentro de la esfera se puede escribir como:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(g)} + T_{\mu\nu}^{(em)} \qquad (4)$$

la región interior estática se describe por una métrica tipo Schwarzschild:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2) \qquad (5)$$

donde ν y λ son funciones desconocidas de la coordenada radial r.

consideremos el potencial vector:

$$A_\mu = (A_0, 0,0,0)$$

entonces ,

$$f_{01} = -f_{10} = A_{0;1}$$

para este caso $u^{\mu} = (u^0, 0,0,0)$, entonces $\chi^{\mu} = (0, \chi^1, 0,0)$, luego la ecuación de campo electromagnético (3) se convierte en

$$-\left\{e^{-\frac{\lambda+\nu}{2}} r^2 f_{01}\right\}_{,r} = 4\pi r^2 e^{\frac{\lambda+\nu}{2}} J^0$$

y se obtiene:

$$f_{01} = -\frac{Q(r)}{r^2} e^{\frac{\lambda+\nu}{2}} \tag{6}$$

donde *Q(r)* se define como:

$$Q(r) \equiv \int_0^r 4\pi\tau^2 \sigma e^{\frac{\lambda}{2}} d\tau$$

la densidad de carga puede ser obtenida a partir de la ecuación anterior de la forma:

$$\sigma = \frac{Q'(r)}{4\pi r^2} e^{-\frac{\lambda}{2}} \tag{7}$$

las componentes no nulas del tensor de energía son

$$T_0^0 = \rho + \frac{f_{01}^2}{8\pi} e^{-(\nu+\lambda)}; \quad T_1^1 = -p_r + \frac{f_{01}^2}{8\pi} e^{-(\nu+\lambda)}; \quad T_2^2 = T_3^3 = -p_{\perp} - \frac{f_{01}^2}{8\pi} e^{-(\nu+\lambda)}$$

las ecuaciones de campo de Einstein son

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right] + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho + \frac{Q^2}{r^4} \tag{8}$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right] + \frac{1}{r^2} = -8\pi p_r + \frac{Q^2}{r^4} \tag{9}$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{(\nu'-\lambda')}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right] = -8\pi p_{\perp} - \frac{Q^2}{r^4} \tag{10}$$

Suponemos ahora que el espaciotiempo admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. La derivada de Lie de la métrica es:

$$\mathcal{L}_{\xi} g_{\mu\nu} = \varphi g_{\mu\nu} \tag{11}$$

donde φ, el factor conforme, es una función sólo de la coordenada radial, y ξ es la órbita del grupo. La métrica g es un mapeo conforme dentro de si misma a lo largo de ξ. Considerando que la órbita del grupo es ortogonal al cuadrivector velocidad del campo del fluido, tenemos:

$$\xi^{\mu} u_{\mu} = 0 \tag{12}$$

Al resolver estas ecuaciones se obtienen los siguientes valores para las funciones métricas

$$e^{\nu} = c_1 r^2 \tag{13}$$

$$e^{-\lambda} = \frac{\varphi}{4k^2} \tag{14}$$

introduciendo estos valores de las funciones métricas en las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell (8)-(10), se obtiene:

$$\frac{1}{r^2} - \frac{\varphi^2}{4k^2}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{2\varphi'}{r\varphi}\right\} = 8\pi\rho + \frac{Q^2}{r^4} \tag{8a}$$

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{3\varphi^2}{4k^2} = 8\pi p_r - \frac{Q^2}{r^4} \tag{9a}$$

$$\frac{\varphi^2}{4k^2}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{2\varphi'}{\varphi r}\right\} = 8\pi p_{\perp} + \frac{Q^2}{r^4} \tag{10a}$$

A partir de (8a) podemos escribir la función φ de la siguiente manera

$$\frac{\varphi^2}{4k^2} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m_g}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \tag{15}$$

donde hemos definido la masa gravitacional interna [44] como

$$m_g = \int_0^r 4\pi\rho\tau^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^r \frac{Q^2}{\tau^2} d\tau + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{r} \tag{16}$$

la región exterior se describe por la métrica de Reissner Nordstorm

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_0^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_0^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{17}$$

donde Q_0 es la carga total y M es la masa total de la esfera. La región interior se acopla a la región exterior por medio de una hipersuperficie de presión nula de radio R.

las condiciones de juntura de Darmois-Lichnerowitz se expresan de la forma:

$$\left[\frac{\varphi^2}{4k^2}\right]_{r=R} = 1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q_0^2}{R^2} \tag{18}$$

$$[p_r]_R = 0 \;\; y \; [Q(r)]_R = Q_0 \tag{19}$$

III. CASO I: PRESION TANGENCIAL PROPORCIONAL A LA PRESIÓN RADIAL

Para resolver las ecuaciones de campo de Einstein (8a)-(10a), se considera una ecuación lineal de estado (ELDE) barotrópica del tipo:

$$\rho = np_r + b \tag{20}$$

se tienen cinco funciones desconocidas de la coordenada radial r, φ, ρ , p_r, $p_\perp$ y Q, debido a esto necesitamos una ecuación adicional para cerrar el sistema. A fin de evaluar el efecto de la anisotropía, se establece que la presión tangencial sea proporcional a la presión radial de la forma:

$$p_\perp = C\, p_r \tag{21}$$

donde C es el factor de proporcionalidad.

resolviendo (8a)-(10a), (20) y (21) obtenemos φ :

$$\frac{\varphi^2}{4k^2} = \frac{(1+n)}{2(1+2n-C)} - \frac{8\pi b(1+C)r^2}{6(n+1)} + \delta r^{-\frac{2(1+2n-C)}{2+n+C}} \tag{22}$$

seleccionamos δ=0 para evitar densidad infinita en el origen. Para las variables físicas obtenidas después de las condiciones de juntura impuestas en las ecuaciones (18)-(19), se obtiene:

$$p_r = \frac{1}{8\pi(1+2n-C)r^2}\left\{1 - \frac{r^2}{R^2}\right\} \tag{23}$$

$$\rho = \frac{1}{8\pi(1+2n-C)r^2}\left\{n + \frac{r^2}{R^2}\right\} \tag{24}$$

$$Q^2 = \frac{r^2}{2(1+2n-C)}\left\{1 + n - 2C - \frac{r^2}{R^2}(1-C)\right\} \tag{25}$$

la relación carga-radio total de la esfera puede obtenerse a partir de (25)

$$\frac{{Q_0}^2}{R^2} = \frac{n-C}{2(1+2n-C)} \tag{26}$$

la constante b de la ELDE es una función de los parámetros n y C y se obtiene a partir de la condición $P_r(r=R)=0$:

$$b = \frac{n+1}{8\pi(1+2n-C)R^2} \tag{27}$$

el potencial gravitacional para $r=R$ se obtiene a partir de (18):

$$\frac{M}{R} = \frac{1}{3} + \frac{2{Q_0}^2}{3R^2} \tag{28}$$

a partir de (28), la carga total puede ser expresada en función de M/R

$$Q_0 \equiv Q(a) = a\left[\sqrt{\frac{3\frac{M}{R}-1}{2}}\right] \tag{29}$$

para ajustar los valores de los parámetros n y C, y tener soluciones físicamente

aceptables, imponemos las condiciones de causalidad a las variables de los fluidos:

$$\frac{dp_r}{d\rho} = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \rightarrow n \geq 1$$

$$\frac{dp_\perp}{d\rho} = \frac{C}{n} \leq 1 \quad \rightarrow C < n$$

de igual forma, la condición $R>R_+$, se debe cumplir, donde R_+, es el horizonte exterior del agujero negro de Reissner-Nordstrom (RN) :

$$R_+ = M + \sqrt{M^2 - Q_0^2}$$

la condición anterior se puede escribir como:

$$\Delta \equiv \frac{M}{R} + \sqrt{\left(\frac{M}{R}\right)^2 - \left(\frac{Q_0}{R}\right)^2} < 1$$

siguiendo a Bondi [45], exigimos que la traza del tensor (4) sea positiva,

$$\Theta \equiv \frac{p_r + 2p_\perp}{\rho} \leq 1 \tag{30}$$

y tenemos la siguiente relación expresión para C.:

$$C \leq \frac{n-1}{2} \tag{31}$$

para la masa gravitacional dentro de la esfera obtenemos:

$$m_g = \frac{r}{2(1+2n-C)}\left[1 + 2(n-C) - \frac{1}{3}\frac{r^2}{R^2}(1-2C)\right] \tag{32}$$

a partir de (7) y (26) la densidad de la carga puede ser obtenida como

$$\sigma = \frac{\left[3(1+n)-(1+C)\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[1+n-2C-2(1-C)\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}{8\pi\sqrt{3}\left[1+n-2C-(1-C)\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}[1+2n-C]r^2} \tag{33}$$

En las Figuras N° 20 y 21 se muestran los valores del factor Θ dentro de la esfera para diferentes valores de n y para los diferentes valores de C. En la Figura N° 22 se muestra la relación M/R como función del factor anisótropo C para diferentes valores del parámetro n. En la Figura N° 23, se muestra el cociente Q_0/M como función del factor anisótropo para valores diferentes del parámetro n. En la Figura N°24 se muestra Δ como función del factor de anisotropía C para diferentes valores del parámetro n.

IV. CASO II: DISTRIBUCIÓN RADIAL DE CARGA

En este caso se resuelven las ecuaciones de campo de Einstein, con la ecuación de estado de la forma (20) y se propone la presencia de una distribución radial de carga en la región interior del fluido de la forma:

$$Q(r) = Q_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}, \tag{34}$$

donde Q_0 es la carga total de de la esfera. Introduciendo este valor Q en las ecuaciones de campo (8a)-(10a) y usando (20) se obtiene φ como

$$\frac{\varphi^2}{4k^2} = \frac{n+1}{3n+1} - \frac{8\pi b r^2}{3(n+1)} - \frac{(n+1)Q_0^2}{3n+2\alpha-1}\left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha} + \gamma r^{-(3n+1)} \tag{35}$$

Se toma $\gamma=0$ para evitar densidad infinita en el origen. Evaluando las condiciones de juntura (18), (19) en la ecuación (35) y sustituyendo en las ecuaciones (8a)-(10a), se obtiene:

$$p_r = \frac{1}{4\pi(3n+1)r^2}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] + \frac{Q_0^2}{4\pi r^4}\frac{(\alpha-2)}{(3n+2\alpha-1)}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha} - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right] \tag{36}$$

$$\rho = \frac{n}{4\pi(3n+1)r^2}\left[1+\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] + \frac{Q_0^2}{4\pi r^4}\frac{(\alpha-2)}{(3n+2\alpha-1)}\left[n\left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha} + \left(\frac{r}{R}\right)^4\right] \tag{37}$$

$$p_\perp = \frac{1}{8\pi(3n+1)r^2}\left[n+1-2\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] - \frac{Q_0^2}{4\pi r^4(3n+2\alpha-1)}$$

$$\times\left\{[(2\alpha-1)+n(\alpha+1)]\left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha} - (\alpha-2)\left(\frac{r}{R}\right)^4\right\} \tag{38}$$

donde el parámetro b obtiene imponiendo la condición (19) :

$$b = \frac{(n+1)}{4\pi}\left\{\frac{1}{(3n+1)R^2} + \frac{Q_0^2}{R^4}\left(\frac{\alpha-2}{3n+2\alpha-1}\right)\right\} \tag{39}$$

la masa gravitacional dentro de la esfera es:

$$m_g = \left[\frac{1}{3(3n+1)R^2} + \frac{1}{3}\frac{Q_0^2(\alpha-2)}{R^4(3n+2\alpha-1)}\right]r^3 + \frac{nr}{(3n+1)} + \frac{Q_0^2}{r}\left(\frac{r}{R}\right)^{2\alpha}\frac{(2n+\alpha)}{(3n+2\alpha-1)} \tag{40}$$

Para que m_g sea cero en el origen, $\alpha > \frac{1}{2}$. A partir de la condición de juntura (19), la relación entre la masa total gravitacional y la carga total es

$$\frac{Q_0^2}{R^2} = \frac{\left(3\frac{M}{R}-1\right)}{2} \tag{41}$$

donde $M/R \geq 1/3$ para obtener valores reales. En el caso de M/R=1/3 tenemos un fluido neutro.

En este modelo el potencial gravitacional M/R es un parámetro junto con α y n.

La Figura N° 25 muestra el valor del factor Θ como función de r/R, para valores diferentes del parámetro α y los valores ajustados de n y M/R, 8 y 1/2.15 respectivamente. En la Figura N° 26, se muestra el comportamiento del factor Θ dentro de la esfera, para α =1, M/R = 0.465 y distintos valores de n. En la Figura N° 27 se muestra el factor Θ para distintos valores de M/R y se observa que para valores

cercanos a 0.5 la condición de la traza tiende a no satisfacerse. Finalmente, en la Figura N° 28 se muestra el cociente Δ dentro de una estrella para diferentes valores de n y valores de α y M/R de 1.0 y 8 respectivamente.

V. CONCLUSIONES

Hemos obtenido dos familias de soluciones para una distribución de materia en el espaciotiempo con simetría esférica y que además admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. Se propone una ecuación de estado lineal relacionando la densidad de la energía con la presión radial del fluido cargado.

En el primer caso estudiado encontramos soluciones que dependen de dos parámetros ajustables n y C. Los valores de estos parámetros se restringen a soluciones físicamente aceptables. Para asegurar la causalidad, n debe ser mayor a uno y mayor que el parámetro C. Para un fluido lumínico, $n=C=1$ tenemos un fluido con carga nula e isótropo. Siguiendo a Bondi [45], se requiere que la traza del tensor de energía sea positiva y que $\Theta<1$, como condición de restricción del corrimiento al rojo superficial. Se puede observar que para estas soluciones el potencial gravitacional M/R siempre es mayor que el valor $M/R=1/3$, característico del fluido conforme y con carga nula. En la Figura N°20 se muestran los valores de Θ como función de r/R para un valor ajustado del factor anisótropo y diferentes valores de n. Se observa que al incrementarse los valores de n decrecen los valores de Θ en el centro de la esfera, favoreciendo incrementos del corrimiento al rojo. A partir de la

ecuación (27), del máximo valor de C de la ecuación (31) y considerando el término c^2/G=1.35× 10^{30}g/m el radio de la estrella para este modelo es $R = c/\sqrt{12\pi G b}$ = 9.46 Km, donde $b = 4B$, y B= 10^{14} g/cm^3 es la constante del modelo de la bolsa [44]. La masa se obtiene a partir de la ecuación (32): $M = 4/9\ (c^2/G)R = 5.63 \times 10^{33}$g o $2.81 M\odot$. Estos resultados son similares a los obtenidos por Mak y Harko, [44].

Si se toman los valores de n =3 y C=1, se recupera el modelo de estrella tipo quark isótropa conforme de Mak y Harko [44]. El radio de la esfera conforme anisótropa en términos de la contante B de la bolsa es:

$$R = \frac{1}{\sqrt{B(7-C)}}$$

Como se puede ver, al incluir la anisotropía se pueden obtener esferas cargadas aun más pequeñas que en los casos de isotropía (C=1). A partir de (31), para este valor de n, $0<C<1$, la presión radial siempre será mayor que la presión tangencial.

La Figura N° 21 muestra los valores de Θ, como función de r/R para n=3 y los valores permitidos del factor de anisotropía. Se puede observar el efecto de la anisotropía, mientras mayor es la diferencia entre las presiones radial y tangencial, menores son los valores de Q, favoreciendo mayores corrimientos al rojo. El valor del corrimiento al rojo, $z = (1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q_0^2}{R^2})^{-1/2} - 1$, a partir de (26) y del máximo valor de C dado por la ecuación (31), es $z = (0.27)^{-1/2}$ -1 = 0.897.

La dependencia de M/R en los parámetros n y C se pueden ver en la Figura N° 22. Allí , las pequeñas líneas punteadas corresponden al modelo de bolsa MIT. Como se esperaba, el fluido se hace más anisótropo en la medida en que es mayor el

cociente M/R. Cuando el fluido se hace más anisótropo, el potencial gravitacional se incrementa. Para un mismo valor de C, un incremento de la carga resulta en un incremento del potencial gravitacional M/R, resultado que concuerda con el obtenido por R. Negreiros, *et al* [47], en el cual el potencial gravitacional se incrementa cuando se incrementa la carga de la estrella, para modelos de material tipo quark extraña. Sin embargo, el valor del potencial gravitacional no llega a 0.5 y la masa está limitada por (31). Las soluciones anisótropas son las más adecuadas para modelos de estrellas de quarks debido a que puede reproducir las condiciones físicas extremas necesarias para un desconfinamiento dentro de la estrella. En la Figura N° 23 se muestra el cociente Q/M menor que uno, condición requerida para que el espaciotiempo tenga un comportamiento asintótico [46]. A medida de que n y C se incrementan y el fluido es fuertemente anisótropo, la carga total se aproxima al valor de la masa gravitacional correspondiente al límite de un agujero negro. En la Figura N° 24 se muestra los valores de Δ como función de C, para diferentes valores de n. Se puede observar que Δ siempre es menor que uno, tal como se requiere para que la solución esté fuera del horizonte RN. Para las dos familias de soluciones presentadas, esta condición restringe los valores de Q_0/a entre (0,1/2), y los valores de M/R para el intervalo abierto (1/3, 1/2).

Para el segundo caso, se ajusta primero el parámetro para el modelo de estrella tipo quark conforme y anisótropa. Estableciendo n=3 y $8\pi b=4B$, tenemos una familia de soluciones para el modelo de bolsa MIT, dependiendo de los parámetros α y de M/R. Esta familia de soluciones, que admiten simetría conforme, no reproducen ni la

solución isotrópica de Mak and Harko [44] ni la solución para n=3 propuesta anteriormente; sin embargo, para Q_0=0, se obtiene la solución para un fluido conforme y anisótropo. El radio de una estrella quark con anisotropía y simetría conforme, en función de la constante del modelo de bolsa es:

$$R = \frac{1}{\sqrt{B}}\left[\frac{1}{5} + \frac{\left(\frac{3M}{R} - 1\right)(\alpha - 2)}{8 + 2\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Un caso particular corresponde al valor α=2, el radio toma el valor $R=1/(5B)^{1/2}$, independientemente del potencial gravitacional de la esfera (lo mismo ocurre para los valores de n). Para otros posibles valores del parámetro α , el radio de la esfera además de la dependencia de la constante del modelo de la bolsa, también dependerá del potencial gravitacional superficial. Para $\alpha=1$, se obtiene una dependencia radial similar para $Q(r)$ como el obtenido en el primer caso estudiado; los valores del radio se restringen por los valores admitidos de M/R en el intervalo $(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5B}}, \sqrt{\frac{1}{5B}})$. Para esta familia de soluciones se satisface la condición de energía fuerte dentro de la esfera, y todos los valores de los parámetros α y n corresponden a soluciones físicas aceptables.

Es importante notar que si la condición Δ<1 se exige para esta familia de soluciones, entonces α debe tomar los valores mayores o iguales a 1.

En la Figura N° 25 se muestra que para n=8 la condición Θ<1 se obtiene dentro de la esfera para valores de α cercanos a uno y un valor grande de M/R, el cual es 0.465 en este caso. En la Figura N° 26, para el mismo valor de M/R, se muestra el

comportamiento de Θ dentro de la esfera, para el valor de α=1, y para diferentes valores de n. Se muestra que la condición Θ<1 tiende a no satisfacerse a incrementarse el parámetro n. Los valores de M/R que satisfacen la condición Θ<1 se ilustra en la Figura N° 27. En la Figura N° 28 se muestra la condición de Δ<1 con un potencial gravitacional en la superficie M/R=0.454, un valor de α=1 y diferentes valores del parámetro n, el caso correspondiente a la ecuación de estado del modelo de la bolsa MIT, n=3, corresponde a la línea sólida delgada. Vemos que esta familia de soluciones cumple las condiciones físicas requeridas.

Hemos obtenido dos nuevas familias de soluciones para esfera de fluido anisótropo cargados, admitiendo también un grupo de un parámetro de movimientos conformes.. La primera familia de soluciones, contiene la solución Mak y Harko [44] cuando el caso isotrópico se recupera estableciendo el factor anisótropo C=1. Estas soluciones, a pesar de que la presión y la densidad de la energía divergen en el origen, tienen carga y masa finita. El máximo potencial gravitacional admitido para la solución es M/R=1/2, además el valor para la carga total es menor a 1/2, y para este valor podemos tener una condición extrema M=Q, para tener un agujero negro RN. Estas soluciones que proponemos aquí pueden ser útiles para el modelo de estrellas de quark o estrellas extrañas u otros objetos astrofísicos compactos que contengan películas delgadas [20]. Para futuras investigaciones, la singularidad en el origen se puede evitar, tal como lo expresa Herrera *et al*, [37], acoplando una solución regular a esta solución para un radio r<R.

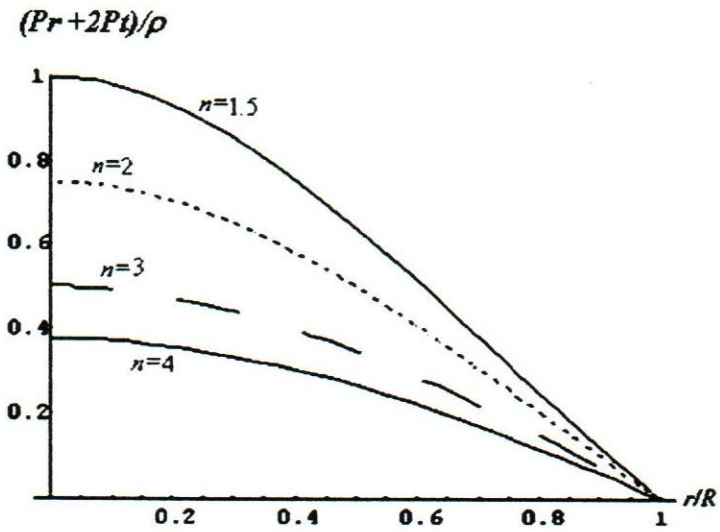

Figura 20. El cociente $(Pr+2Pt)/\rho$ como función de r/R para diferentes valores de n y un valor ajustado de C=0.25.

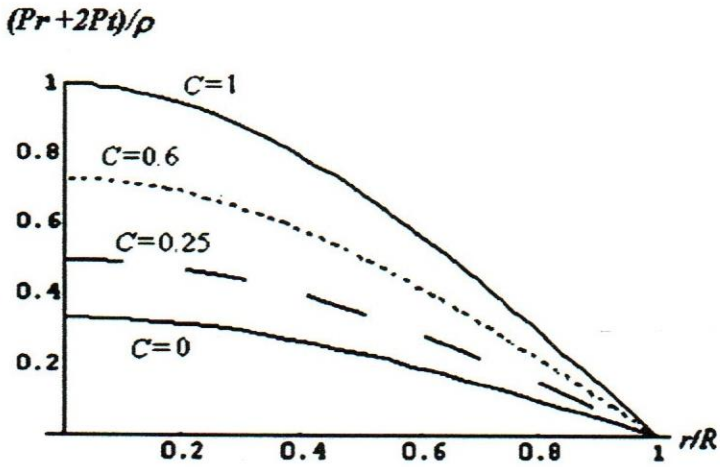

Figura N° 21. El cociente $(Pr+2Pt)/\rho$ como función de r/R para diferentes valores del factor C anisótropo y un valor ajustado de n=3 .

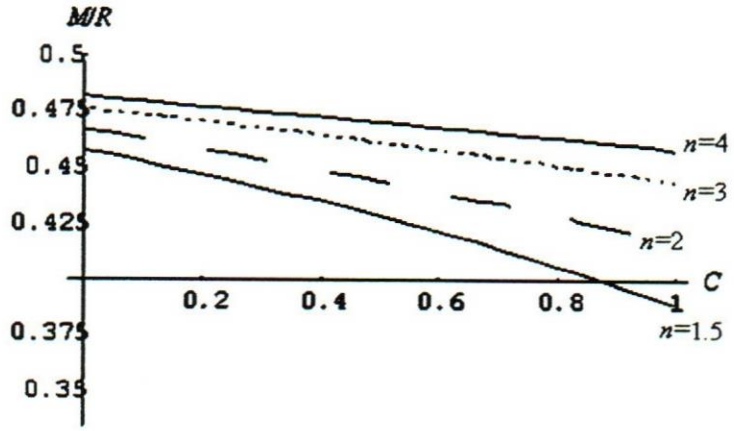

Figura N° 22. El potencial gravitacional M/R como función del factor anisótropo C para diferentes valores del parámetro n.

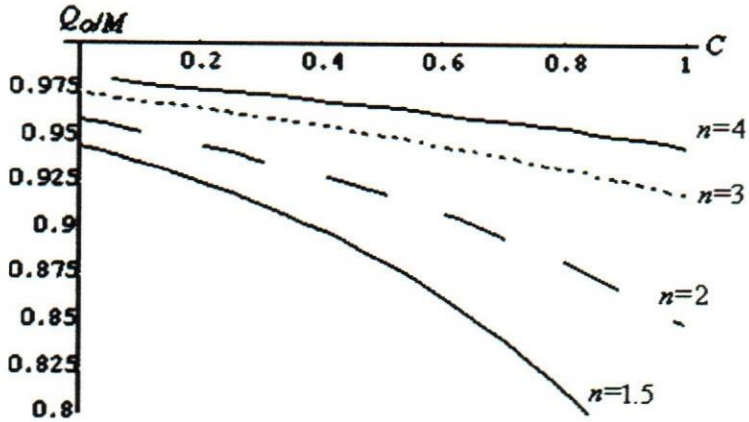

Figura N° 23. El cociente Q_0/M como función del factor anisótropo para diferentes valores del parámetro n.

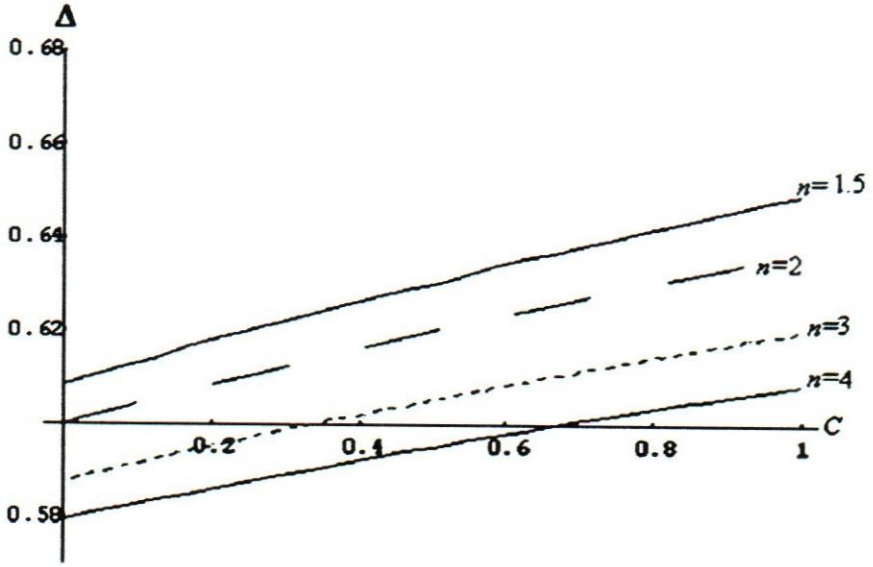

Figura N° 24. Δ como función del factor anisótropo *C* para diferentes valores del parámetro *n*. La línea sólida delgada corresponde a *n*=1.5, la línea larga punteada a *n*=2, la línea corta punteada a *n*=3 y la línea delgada sólida a *n*=4

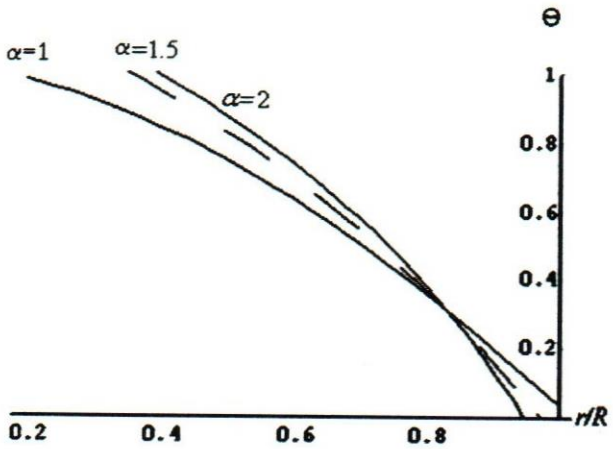

Figura 25. Θ como función de *r/R*, para *n*=8, *M/R*=0.465, y diferentes valores del parámetro α.

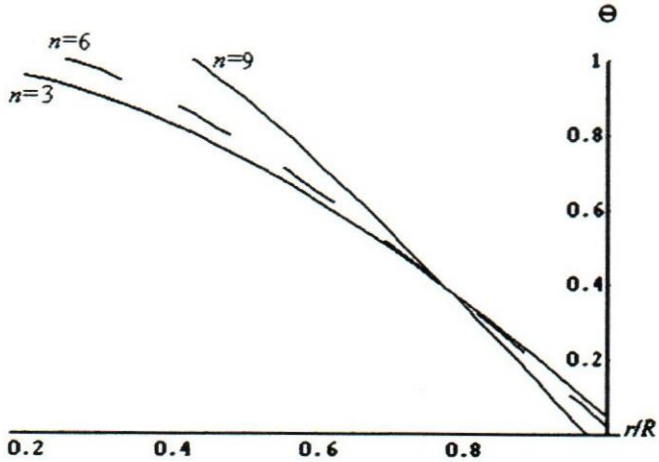

Figura N° 26. Θ como función de *r/R*, para α=1 y *M/R*=0.465, para diferentes valores del parámetro *n*.

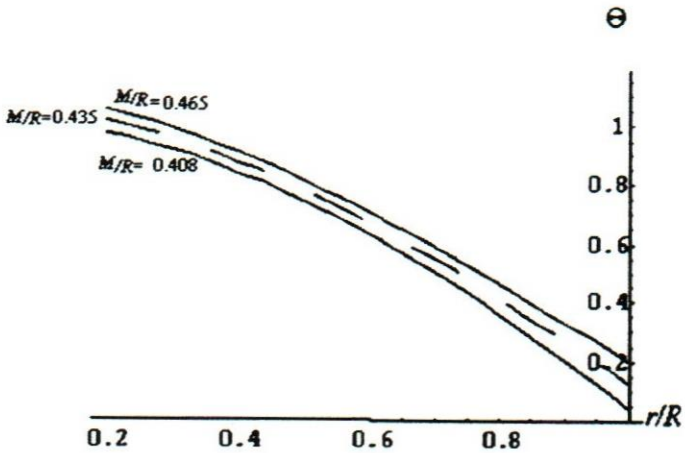

Figura N° 27. Θ como función de *r/R*, para un valor ajustado del parámetro α y *n*, α=1 y *n*=8, para diferentes valores de *M/R*. La línea sólida delgada corresponde a *M/R*=0.465, la punteada corresponde a *M/R*=0.435 y la línea delgada sólida corresponde a *M/R*=0.408

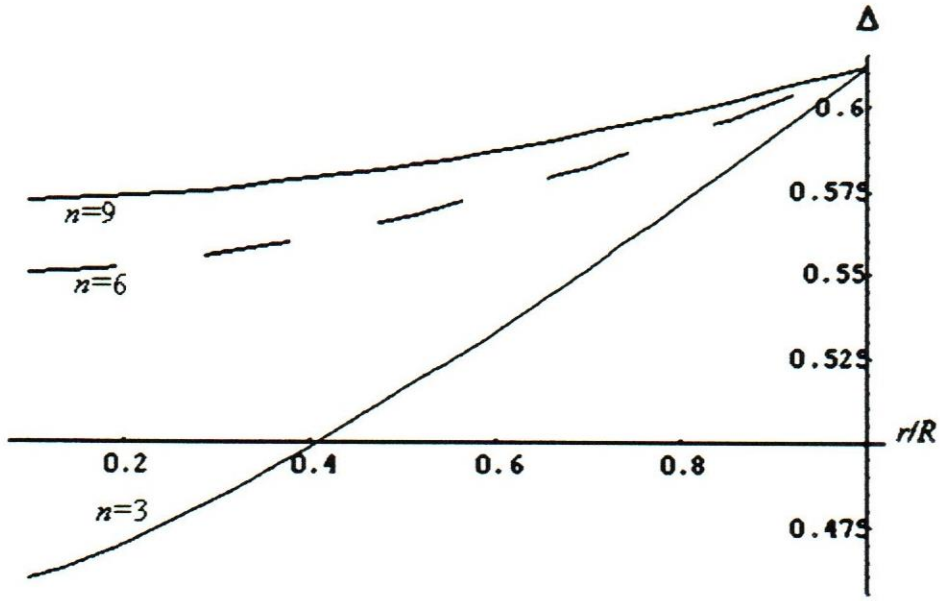

Figura 28. Δ como función de *r/R* para diferentes valores del parámetro *n* y valores ajustados del potencial gravitacional en la superficie, *M/R*=0.454 y el parámetro α=1. La línea sólida delgada corresponde a *n*=9, la punteada corresponde a *n*=6, y la línea delgada sólida a *n*=3

REFERENCIAS

[1] Farhi E. and Jaffe R, *Phys. Rev.* D, **30**, 2379 (1984).

[2] Itoh N, *Prog. Theor. Phys.* **44**,1 (1970).

[3] Haensel P, Zdunik J., Schaeffer R. *Astron. Astrophys.* **160**, 121-128 (1986).

[4] Witten E., *Phys. Rev.* D, **30**, 272 (1984).

[5] Bodmer A. *Phys. Rev.* D **4**, 1601 (1971).

[6] Hatsuda T., *Mod. Phys.* Lett. A **2,** 805 (1987).

[7] Sato K. and Suzuki H., *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2722 (1987).

[8] Meneses D. y Melrose D., arXiv:astro-ph/0506158v1, (2005).

[9] Subharthi R., Aquinino L. Espíndola , Malheiro M., *Phys. Rev.* D **68**, 084004 (2003).

[10] Zhang, J., Chau W., and Deng T., *Astrophys. Space Sci.* **88**, 81 (1982).

[11] De Felice F., Yu Y., and Fang Z., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 277, L**17** (1995).

[12]De Felice, F, Siming L and Yunqiang Y., *Class. Quant. Grav.* **16** 2669-2680 (1999).

[13] Ghezzi R., *Phys. Rev.* D**72** 104017 (2005).

[14] Bekenstein J., *Phys. Rev.* D **4,** 2185 (1971).

[15] Cooperstock F., de La Cruz V., *Gen. Rel. Grav.*, **9** 835 (1978).

[16] Tikekar R.,*J. Astr. Astron.*, **5** 273-276 (1984).

[17] Singh T., Singh G., and Helmi A., *Astrophysics and Space Science*, **199**, No. 1 113-123 (1993).

[18] Ivanov B, *Phys. Rev.* D **65** 104001(2002).

[19] Thirukkanesh S. and Maharaj S., *Class.Quant.Grav.***25**:235001, (2008).

[20] Mak M., Dobson P.and Harko T., *Europhys. Lett.* **55**, 310 (2001).

[21] Giuliani A. and Rothman T., *Gen.Rel.Grav.***40**:1427-1447(2008).

[22] Andreasson H., arXiv:gr-qc 08041882 (2008).

[23] Bohmer C. and Harko T., *Gen. Rel. Grav* **39**, 757-775 (2007).

[24] Buchdahl H., *Phys. Rev.* **116**, 1027-1034 (1959).

[25] Mak M. and Harko T., *Chin. J. Astro. Astrophys..* **2**, N° 3, 248-259 (2002).

[26] Bombaci I., *Phys.Rev.*D,**30**,2379 (1984).

[27] Komathiraj K. and Maharaj S., *Int.J.Mod.Phys.*D**16**:1803-1811 (2007).

[28] Thirukkanesh S. and Maharaj S. *Class.Quant.Grav.***25** 235001 (2008)

[29] Discus D., Repko W., and Teplitz V., *Phys.Rev.* D**78**:094006, (2008).

[30] Nicotra O.,Baldo M., Burgio G. y Schulze H. *Phys. Rev.* D **74,** 123001 (2006).

[31] Xu R., *Astrophys.J.* **570** L65-L68 (2002).

[32] Usov V., Harko, K., Cheng S., *Astrophys.J.* **620** 915-921 (2005).

[33]Feynman R., Leighton B. and Sands M., The Feyman Lectures on Physics. Addison Wesley, Palo Alto, Vol. II, Chap.28, 1964

[34] Dionysiou D., Astrophysics and Space Science (ISSN 0004-640X), vol. 111, no. 1, April 1985, p. 207-209

[35] Tiwari R, Rao J., Kanakamedala R., *Phys. Rev.* D **34**, 1205-1207 (1986).

[36] Ray S. *Gen.Rel.Grav.* **36** 1451-1459 (2004).

[37] Ray S. and Das B., *Grav. Cosmol.* **13**: 224-230 (2007).

[38] Ray S., Usmani A., Rahaman F., Chakraborty K. *Indian J. Phys.* **82** 1191 - 1204 (2008).

[39] Herrera L. y Ponce de Leon J., *J. Math. Phys.* **26,**2302, (1985).

[40] Herrera L y Ponce de Leon J., *J. Math. Phys.* **26** (2018), (1985)

[41] K. D. Krori, P. Borgohain, K. Das, A.Sarma, *Can. J. Phys.* **64**, 887 (1986).

[42] K. D. Krori, P. Borgohain, K. Das, A.Sarma, *Canadian J. Phys.* **64**, 882 (1986).

[43] Maartens R. and Maharaj M., *J. Math. Phys.* **31**, No. 1, 151-155, (1990).

[44] Mak M. and Harko T., *Int. J. Mod. Phys.* **D** 13, 149 (2004).

[45] Bondi H., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **302** 337-340 (1999).

[46] Hawking S. and Ellis G., The large –Scale Structure of Space-Time. Cambridge University Press, Cambridge, 1973, pp. 150-160.

[47] Negreiros R, Weber F, Malheiro M. and Usov V., arXiv:0907.5537 (2009).

CAPÍTULO III

SOLUCIONES ESTATICAS DE FLUIDO ANISÓTROPO CON MATERIA CARGADA Y ACOTADA.

RESUMEN

En este capítulo se estudia el efecto de la presencia de cargas en un fluido anisótropo en las presiones, formado por materia tipo quark-extraña, gobernada por el modelo de bolsa del MIT que posee simetría esférica y conforme y está rodeada por una película de presión no nula. Se consideran los siguientes casos: (a) núcleo cargado y película cargada; (b) núcleo cargado y película con carga igual a la del núcleo, de manera que la carga total, vista en la región exterior sea nula y (c) núcleo sin carga y película cargada. Encontramos que la presión tangencial se modifica ante cambios radiales de carga en el núcleo, sin embargo la presión radial no cambia significativamente y se mantiene negativa a lo largo del radio de la esfera. El hecho de obtener presión negativa se debe probablemente a la naturaleza de las cargas. Si la carga se encuentra solamente en la película, las variables físicas no se modifican, probablemente por la ausencia de campos eléctricos en el núcleo.

PALABRAS CLAVES: Presión anisótropa, simetría conforme, materia quark.

I. INTRODUCCION

El efecto del las cargas y campos eléctricos sobre el potencial gravitacional de las estrellas ha sido estudiado por gran cantidad de autores. Rosseland [1] estudió la posibilidad de que las estrellas cargadas autogravitantes que se modelan como una bola ionizada de gas poseen carga neta. En estos objetos, los electrones tenderían a alcanzar la superficie por efecto de la diferencia entre la presión parcial de los electrones comparado con la de los iones. En el caso de las estrellas conformadas por materia tipo quark-extraña, la presencia de electrones juega un papel importante en la formación de dipolos eléctricos en la superficie de tales estrellas cuyos campos eléctricos están por el orden de 10^{18} V/cm [2]-[3]. La existencia de estrellas de quark en equilibrio hidrostático fue en principio sugerido por Itoh [4]. El estudio de estrellas extrañas conformadas por materia tipo quark, estimuló mucho el interés en décadas recientes a partir del hecho de que podría representar el estado energéticamente más favorable de la materia bariónica. Materia conformada por quarks y pequeñas cargas pueden utilizarse como modelos para explicar el colapso nuclear de estrellas [5]. Se espera que estrellas extrañas se formen a partir del colapso del núcleo de una estrella masiva luego de la explosión de una supernova. En regiones de baja temperatura y densidad suficientemente alta, los hadrones son comprimidos contra la materia quark en núcleos densos de estrellas de neutrones.

Consecuentemente los núcleos de estrellas de neutrones proveen el ambiente apropiado para convertir materia ordinaria en materia tipo quark extraña. Otra posibilidad es que el incremento de la densidad de una estrella pueda acrecentar la masa lo suficiente como para a partir de allí generar una transición de fase a una estrella extraña. La materia tipo quark es descrita usando el modelo fenomenológico de la bolsa del MIT, [6] para la cual la ecuación de estado de la materia extraña tiene una forma lineal dada por:

$$\rho = \alpha P + \rho_0 \tag{1}$$

donde ρ es la densidad de energía, P la presión radial, α un parámetro de proporcionalidad y ρ_0 una constante. Es nuestro interés estudiar el comportamiento de estrellas extrañas tipo quark descrito por el modelo de bolsa del MIT [7] y que además de poseer simetría conforme, tanto el núcleo como la película que la envuelve pueden poseer cargas eléctricas no sólo en el núcleo sino en la película.

La simetría conforme ha sido de particular interés en los estudios de soluciones de fluidos estáticos y con simetría esférica, debido a que representa una forma más realista para el modelado de los parámetros físicos. Carr, *et al* [8] introdujeron el uso de soluciones autosimilares de las ecuaciones de campo de Einstein y estas soluciones pueden describir agujeros negros de cuya expansión de su horizonte de eventos ocurre a una tasa comparable a la del horizonte particular del universo. Ellos mostraron que no hay soluciones autosimilares las cuales contengan un agujero negro

acoplado al modelo tipo Friedmann para un agujero negro formado por procesos causales [9]. Carr extendió estos resultados para un fluido perfecto con una ecuación de estado, $p = (\gamma - 1)\mu$ para $1 \leq \gamma < 2$. Lin, *et al* [10] estudiaron soluciones para un fluido con ecuación de estado "dura" y estableció que podrían existir similitudes cosmológicas. Bicknell y Henriksen discutieron la posibilidad de crecimientos similares de agujeros negros primarios en un Universo temprano [11]. Herrera *et. al.*[12] estudiaron las consecuencias de la existencia de un grupo de un parámetro de movimientos conformes para materia anisótropa. Ellos demostraron cómo la ecuación de estado "dura" está relacionada a su autosimilaridad. Carr *et al.* [13] estudiaron las soluciones similares asociadas con el comportamiento crítico observado en los colapsos gravitacionales de fluidos esféricamente simétricos. Bohmer *et al.* [14] encontraron recientemente soluciones conformes y simétricas de agujeros de gusano transversales. Recientemente H. Maeda y T. Harada [15] estudiaron soluciones similares con energía oscura y probaron de forma rigurosa la inexistencia de agujeros negros cosmológicamente similares para fluidos con ecuación de estado "dura" y campos escalares en el espaciotiempo [16].

Las esferas relativistas cargadas han sido estudiadas por diversos autores. Varela [17] describe un núcleo de fluido perfecto rodeado por una carga. Aninos [18] investigó las propiedades de tales esferas desde un punto de vista clásico. En particular estudió la estabilidad para las pulsaciones radiales y análisis de la energía y encontró que, contrario a la intuición newtoniana, en general la presencia de cargas no tiende a estabilizar la densidad de la energía interior del fluido. Eiroa, *et al* [19]

estudiaron la estabilidad de agujeros de gusanos cargados y con película delgada en su superficie a través de perturbaciones radiales linealizadas. Ellos dividieron la estabilidad en cinco regiones, tomando en cuenta la relación Q/M. Encontraron que la presencia de cargas incrementa significativamente la posibilidad de obtener agujeros de gusanos estables en el espaciotiempo. Negreiros, *et al* [20] postularon que para que las estrellas tipo quark-extraña posean equilibrio químico, se requiere que posean electrones en su interior. Ellos estudiaron estrellas cargadas compactas tipo quarks y mostraron que la masa y el radio se incrementan en un 15% y 5% respectivamente cuando la densidad de energía asociada al campo eléctrico es del mismo orden de magnitud que la densidad de energía asociada a la materia extraña existente dentro del fluido. Tales resultados podrían explicar el comportamiento masivo de estos objetos.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: En la sección II se escriben las ecuaciones de campo y condiciones de juntura. En la sección III se muestran los resultados y en la sección IV se presentan las conclusiones.

En este trabajo se propone un modelo de estrella tipo quark-extraña, que consiste en una distribución de materia conformada por un fluido estático, que puede estar cargado, y que presenta anisotropía en las presiones, rodeado de una película delgada de materia que puede contener carga, a través de la cual se acopla con el espacio exterior descrito por la métrica de Reissner-Nordstrom. Se considerará que las presiones radiales o tangenciales y la densidad de energía están relacionadas por medio de una ecuación de estado del tipo modelo de la bolsa de MIT (1). El

fluido, además de la simetría esférica, admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes, es decir

$$L_{\xi} g_{\mu\nu} = \psi g_{\mu\nu} \tag{2}$$

donde L es la derivada de Lie del tensor métrico en la dirección de ξ^i y ψ el factor conforme, una función arbitraria de la coordenada radial. Su longitud se incrementa en el mismo rango a lo largo de la órbita del campo vectorial ξ^i y se corresponde a la noción de similaridad que se encuentra en hidrodinámica [21]

Consideramos el fluido con presión anisótropa $P_{\perp}$ de manera que las condiciones de energía son [7],[22]:

Condiciones de energía débil:

$$\rho \geq 0 \tag{3}$$

$$\rho + P \geq 0 \tag{4}$$

$$\rho + P_{\perp} \geq 0 \tag{5}$$

Condiciones de energía fuerte se obtienen por (4) – (5) y

$$\rho + P + 2P_{\perp} \geq 0 \tag{6}$$

Condiciones de energía dominante se obtienen por (3) – (5) y

$$\rho - P \geq 0 \tag{7}$$

$$\rho - P_{\perp} \geq 0 \tag{8}$$

II. ECUACIONES DE CAMPO Y SOLUCIONES ESTATICAS

Consideramos una hipersuperficie esférica Σ que separa al fluido en una región interior y otra exterior en el espaciotiempo. La región interior, una esfera con radio R, además de la simetría esférica, admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes.

El elemento de línea para una métrica esféricamente simétrica que describe la región interior se escribe de la forma:

$$ds^2 = e^{\nu}dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2) \tag{9}$$

y para la distribución de la materia considerada en esta región, el tensor de energía impulso es de la forma trabajada en el capítulo anterior:

$$T^{(g)}{}_{\alpha\beta} = (\rho + P_{\perp})\, U_{\alpha} U_{\beta} - P_{\perp} g_{\alpha\beta} + (P_r - P_{\perp})\, \chi_{\alpha} \chi_{\beta} \tag{10}$$

$$T^{em}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{4} g_{\mu\nu} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot} f_{\mu\alpha} f_{\nu\beta}\right\}$$

donde ρ, $p_r, p_{\perp}$, u_{μ}, χ_{μ} son la densidad de energía de la materia, la presión radial en la dirección de χ_{μ}, la presión en el espacio bidimensional ortogonal a χ_{μ} , el cuadrivector velocidad del fluido y un vector espacial en la dirección radial ortogonal a u_{μ} respectivamente. El tensor del campo electromagnético $f_{\mu\nu}$ es dado en los términos de potencial electromagnético A_{μ} como

$$f_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$$

el espaciotiempo en la hipersuperficie es descrito por la métrica:

$$ds^2_{\Sigma} = d\tau^2 - R^2 d\Omega^2 \tag{11}$$

donde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + sin^2\,\theta d\varphi^2$.

La región exterior es descrita por la métrica de Reissner-Nordstrom:

$$ds_E{}^2 = \left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right]dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{12}$$

donde Q es la carga total del fluido. Se puede observar que si Q=0 obtenemos la métrica de Schwarzschild.

La ecuación para la superficie en la región interna toma la siguiente forma:

$$\phi = r - R_\Sigma = 0 \tag{13}$$

Entonces la métrica inducida en superficie, desde el interior es

$$ds_I{}^2\Big|_{r=R_\Sigma} = \left(A^2{}_{(r)} - B^2{}_{(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)dt^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi\right) \tag{14}$$

La ecuación para la superficie expresada en las coordenadas de la región exterior es:

$$\Phi = \bar{r} - R_\Sigma = 0 \tag{15}$$

y la métrica inducida en la hipersuperficie desde el exterior es:

$$ds_E^2\Big|_{\bar{r}=R} = \left[\left[\left(1 - \frac{2M}{\bar{r}} + \frac{Q^2}{r^2}\right) - \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{\bar{r}} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}\left(\frac{d\bar{r}}{dT}\right)^2\right]dT^2 - \bar{r}^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi\right)\right]_{\bar{r}=\bar{r}_\Sigma} \tag{16}$$

de (15) se obtiene :

$$r_\Sigma = R_\Sigma = \bar{r}_\Sigma \equiv R \tag{17}$$

de (11) y (14) se obtiene:

$$A^2 dt^2 = d\tau^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{A^2} \tag{18}$$

y de (11) y (16) obtenemos:

$$\left(\frac{dT}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2M}{R} + \frac{Q^2}{R^2}} \tag{19}$$

Los vectores normales para la hipersuperficie Σ son:

$$n_\alpha^- = B\delta_\alpha^1 \tag{20}$$

Las componentes no nulas de la correspondiente curvatura extrínseca, definidas por

$$k_{ij} = -n_\alpha \left\{ \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta \partial x^\gamma}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \right\} \tag{21}$$

son, en la región interior:

$$k_{\tau\tau}^- = -\frac{A'}{AB} \; ; \quad k_{\phi\phi}^- = \frac{\bar{r}}{B} ; \quad k_{\varphi\varphi}^- = k_{\phi\phi} \, sin^2 \phi \tag{22}$$

La métrica en la hipersuperficie Σ (exterior) es:

$$ds_+^2 = \left\{ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \right\} dt^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{23}$$

de (11) y (23) tenemos:

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 = d\tau^2 \Rightarrow \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r_\Sigma} + \frac{Q^2}{r_\Sigma^2}} \tag{24}$$

$$r^2 = R^2(\tau) \tag{25}$$

El vector normal a la superficie es:

$$n_\alpha = \left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma} + \frac{Q^2}{r_\Sigma^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \delta_\alpha^1 \tag{26}$$

Las componentes no nulas de la correspondiente curvatura extrínseca definidos en (21), son, en la región exterior:

$$k_{\tau\tau}^+ = -\frac{M}{r_\Sigma^2\left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma} + \frac{Q^2}{r_\Sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \;;\; k_{\theta\theta}^+ = r\left(1 - \frac{2M}{r_\Sigma} + \frac{Q^2}{r_\Sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}};\; k_{\varphi\varphi}^+ = k_{\theta\theta}^+ sen^2\theta \tag{27}$$

el tensor de energía de Σ es:

$$S_a^b = (\wp + \sigma)u^a u_b - \wp\, \delta_b^a \tag{28}$$

donde σ es la densidad de la superficie de energía asociada con la trayectoria u^α

las componentes no nulas de (26) son:

$$S_0^0 = \sigma \,;\; S_2^2 = S_3^3 = -\wp \tag{29}$$

Aplicando el formalismo de Israel para películas delgadas se tiene:

$$-8\pi k S_j^i = [k_j^i] - \delta_i^j [k_l^l] \tag{30}$$

A partir de (30) las ecuaciones para la densidad de energía σ, y la presión en la superficie, son:

$$8\pi S_0^0 \quad = [k_2^2] + [k_3^3] \tag{31}$$

$$8\pi S_2^2 \quad = [k_0^0] + [k_3^3] \tag{32}$$

se obtiene:

$$k_2^2 = -\frac{1}{R^2} k_{22} \tag{33}$$

$$4\pi\sigma = -\frac{1}{R^2}\left[k_{22}^{+}\right] = \frac{1}{R}\left[-\left(1-\frac{2M}{R}+\frac{Q^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{B}\right] \tag{34}$$

$$8\pi P = \gamma_{00} - \frac{1}{R^2}\gamma_{22} = \gamma_{00} + 4\pi\sigma \tag{35}$$

al sustituir (34) en (35), se obtiene:

$$8\pi\wp = -4\pi\sigma + \frac{M}{R^2\left(1-\frac{2M}{R}+\frac{Q^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{A'}{AB} \tag{36}$$

Se propone una ecuación lineal de estado para la presión superficial de la forma:

$$\wp = \omega\sigma$$

Las ecuaciones de campo, escritas en función de e^{ν} y e^{λ}, son:

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right]+\frac{1}{r^2} = 8\pi\rho + \frac{Q^2}{r^4} \tag{37}$$

$$-e^{-\lambda}\left[\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right]+\frac{1}{r^2} = -8\pi p_r + \frac{Q^2}{r^4} \tag{38}$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{2}\left[\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{(\nu'-\lambda')}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right] = -8\pi p_{\perp} - \frac{Q^2}{r^4} \tag{39}$$

(Las primas indican diferenciación respecto a r)

La ecuación (2) puede ser reescrita de manera explícita:

$$g_{\mu\nu,\alpha}\xi^{\alpha} + g_{\alpha\mu}\xi^{\alpha}_{,\mu} + g_{\mu\alpha}\xi^{\alpha}_{,\mu} = \psi g_{\mu\nu}$$

Debido a la simetría esférica y a la independencia del tensor métrico del tiempo, la forma más general de ξ^{μ} es:

$$\xi^{\mu} = \lambda X^{\mu} \tag{40}$$

donde λ es una función arbitraria de r.

Las funciones e^{ν} y $e^{-\lambda}$ se restringen por la condición (2), la cual implica:

$$e^{\nu} = C_1 r^2 \tag{41}$$

$$e^{-\lambda} = \frac{\psi^2}{4k^2} \tag{42}$$

$$\lambda = Cr \tag{43}$$

donde C_1 y C son dos constantes arbitrarias.

introduciendo las ecuaciones (41) - (43) en (37) - (39), obtenemos:

$$\frac{1}{r^2} - \frac{\psi^2}{4k^2}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{2\psi'}{r\psi}\right\} = 8\pi\rho + \frac{Q^2}{r^4} \tag{44}$$

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{3\psi^2}{4k^2} = 8\pi p_r - \frac{Q^2}{r^4} \tag{45}$$

$$\frac{\psi^2}{4k^2}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{2\psi'}{\psi r}\right\} = 8\pi p_{\perp} + \frac{Q^2}{r^4} \tag{46}$$

Se puede encontrar una función $\psi_{(r)}$ que satisface la ecuación de estado del modelo de bolsa MIT, considerando una distribución de carga Q_i: [23]

$$Q_i = Q_0\left(\frac{r}{R}\right)^n \tag{47}$$

donde Q_i es la carga en el interior de la esfera en función de la coordenada radial, Q_0 es la carga total dentro de la esfera conforme, y n un parámetro ajustable.

Al sustituir (1) en (44) y (46), se obtiene:

$$\frac{\psi^2}{4C^2}=\frac{1+\alpha}{3\alpha+1}-\frac{8\pi\rho_0}{3(1+\alpha)}r^2+\frac{\delta}{r^{3\alpha+1}}-\frac{Q_0^2}{R^{2n}}\frac{(\alpha+1)r^{2(n-1)}}{3\alpha+2n-1} \tag{48}$$

donde δ es una constante arbitraria. A partir de (36) y (42), tenemos:

$$\left.\frac{1}{B^2}\right|_{r=R}=\frac{1}{4}\left\{\frac{M/R+Q^2/R^2}{\left(1-2M/R+Q^2/R^2\right)(2\omega+1)}+1\right\}^2\left(\frac{2\omega+1}{(\omega)}\right)^2\left(1-2M/R+Q^2/R^2\right)=\left.\frac{\psi^2}{4C^2}\right|_{r=R} \tag{49}$$

y a partir de (48) y (49) tenemos:

$$\delta=\frac{Q_0^2(\alpha+1)}{3\alpha+2n-1}R^{3\alpha-1}-\left(\frac{1+\alpha}{3\alpha+1}\right)R^{3\alpha+1}+\frac{8\pi\rho_0}{3(1+\alpha)}R^{3\alpha+3}+R^{3\alpha+1}\frac{1}{4}\left\{\frac{M/R+Q^2/R^2}{\left(1-2M/R+Q^2/R^2\right)(2\omega+1)}+1\right\}^2$$

$$\times\left(\frac{2\omega+1}{(\omega)}\right)^2\left(1-2M/R+Q^2/R^2\right) \tag{50}$$

II. RESULTADOS

Se considerarán los siguientes casos:

- Fluido con carga interna $Q_i= Q_0(r/R)^n$ y carga total Q
- Fluido con carga interna $Q_i = Q_0(r/R)^n$ y carga total nula.
- Fluido con carga interna nula y carga total Q

Caso I : $Q_i= Q_0(r/R)^n$ y carga total Q: En este modelo se considera que el núcleo de la estrella posee una distribución de carga de la forma (47) y la carga total es Q.

Sustituyendo las condiciones de juntura y de frontera, ecuaciones (48)-(50) en las ecuaciones de campo (44)-(46) se obtiene:

$$8\pi\rho = \frac{8\pi\rho_0}{1+\alpha} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{2\alpha}{3\alpha+1}\right) + \frac{3\delta\alpha}{r^{3(\alpha+1)}} + \frac{Q_0^2\left(r/R\right)^{2n}}{r^4}\left[\frac{(\alpha+1)(2n-1)}{3\alpha+2n-1} - 1\right] \tag{51}$$

$$8\pi P = -\frac{8\pi\rho_0}{1+\alpha} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{2\alpha}{3\alpha+1}\right) + \frac{3\delta}{r^{3(\alpha+1)}} + \frac{Q_0^2\left(r/R\right)^{2n}}{r^4}\left[1 - \frac{3(\alpha+1)}{3\alpha+2n-1}\right] \tag{52}$$

$$8\pi P_\perp = -\frac{8\pi\rho_0}{1+\alpha} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1+\alpha}{3\alpha+1}\right) - \frac{3\delta\alpha}{r^{3(\alpha+1)}} - \frac{Q_0^2\left(r/R\right)^{2n}}{r^4}\left[\frac{(\alpha+1)(2n-1)}{3\alpha+2n-1} - 1\right] \tag{53}$$

Sustituyendo (50) en (51) - (53) y tomando $\overline{P} = M^2 P$; $\overline{P}_\perp = M^2 P_\perp$, $\overline{\rho} = M^2 \rho$, $\overline{\delta} = M^2 \delta$

se obtiene:

$$8\pi\overline{\rho} = \frac{8\pi\overline{\rho}_0}{1+\alpha} + \frac{\left(M/a\right)^2}{\left(r/R\right)^2}\left(\frac{2\alpha}{3\alpha+1}\right) + 3\alpha\delta^* + (Q_0/R)^2(M/R)^2\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-4}\left[\frac{(\alpha+1)(2n-1)}{3\alpha+2n-1} - 1\right] \tag{54}$$

$$8\pi\overline{P} = -\frac{8\pi\overline{\rho}_0}{1+\alpha} + \frac{\left(M/R\right)^2}{\left(r/R\right)^2}\left(\frac{2\alpha}{3\alpha+1}\right) + 3\delta^* + (Q_0/R)^2(M/R)^2\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-4}\left[1 - \frac{3(\alpha+1)}{3\alpha+2n-1}\right] \tag{55}$$

$$8\pi\overline{P}_\perp = \frac{8\pi\overline{\rho}_0}{1+\alpha} + \frac{\left(M/R\right)^2}{\left(r/R\right)^2}\left(\frac{1+\alpha}{3\alpha+1}\right) - 3\alpha\delta^* - (Q_0/R)^2(M/R)^2\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-4}\left[\frac{(\alpha+1)(2n-1)}{3\alpha+2n-1} - 1\right] \tag{56}$$

$$\delta^{*}=\frac{\bar{\delta}}{r^{3(\alpha+1)}}=\left(\frac{r}{R}\right)^{-3\alpha-3}\frac{\alpha+1}{3\alpha+2n-1}(Q_0/R)^2(M/R)^2-\left(\frac{r}{R}\right)^{-3\alpha-3}\left(\frac{1+\alpha}{3\alpha-1}\right)\left(\frac{M}{R}\right)^2+\frac{8\pi\bar{\rho}_0}{3(1+\alpha)}\left(\frac{r}{R}\right)^{-3\alpha-3}+\ldots$$

$$+\frac{1}{4}\left\{\frac{M/R+Q^2/R^2}{\left(1-2M/R+Q^2/R^2\right)(2\omega+1)}+1\right\}^2\left(\frac{2\omega+1}{(\omega)}\right)^2\left(1-2M/R+Q^2/R^2\right) \qquad (57)$$

En las Figuras N° 29-32 se muestran los perfiles de presión radial, presión tangencial y la densidad de energía. Se observa que la presión tangencial disminuye al incrementarse la carga total, pero la presión radial y la densidad de energía no sufren mayores cambios. Es plausible considerar, sin llegar al caso extremo de la repulsión de Coulomb, que este comportamiento de la presión en la dirección radial obedece al hecho de que las contribuciones de fuerza y presión producidas por la aparición de más partículas cargadas ayuden a "sostener" la nueva contribución gravitatoria asociada a tales partículas, de forma similar a los resultados obtenidos por Ray, *et al.*[24]. Sin embargo, para el caso tangencial, las fuerzas originadas por los campos electrostáticos originan presiones que tienden a modificar a la presión tangencial, en un escenario en donde no hay balance entre la fuerza de Coulomb y las fuerzas gravitacionales.

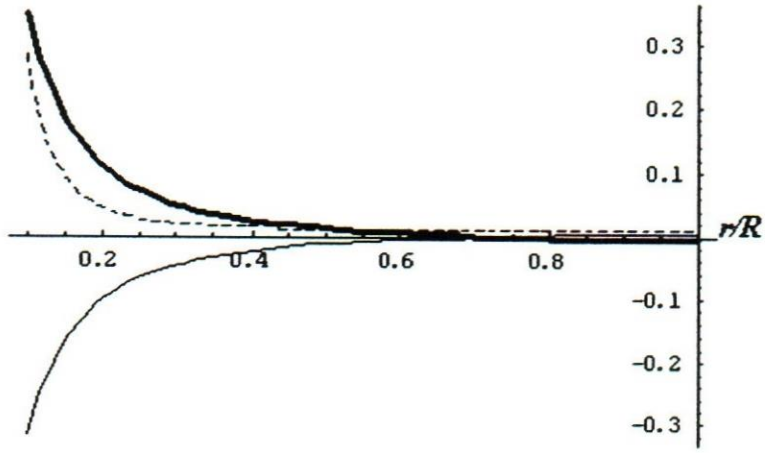

Figura N° 29. Densidad (curva sólida), presión radial(curva delgada) y presión tangencial (curva punteada) como función de r/R para $M/R = 1/2.5$, n=0.5, $\omega = 0.3$, $\rho_0 = 0.00001$, $\alpha = -1.1$, $Q_0 = 0.2$, $Q = -0.6$

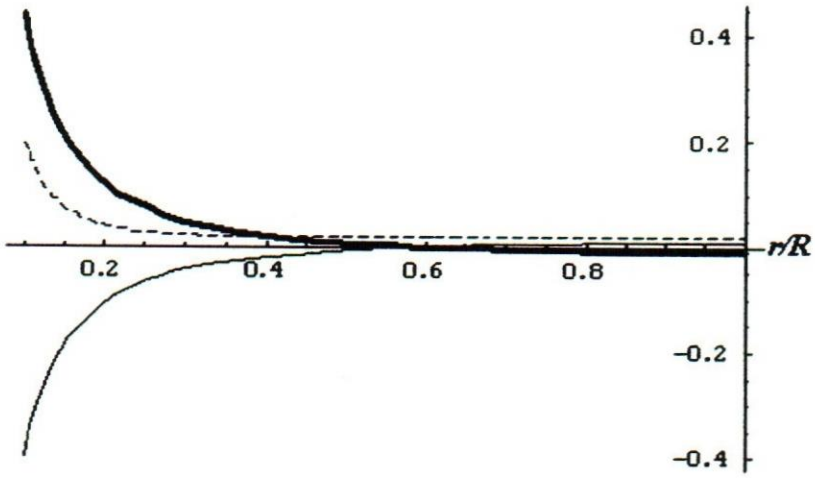

Figura N° 30. Densidad (curva sólida), presión radial(curva delgada) y presión tangencial (curva punteada) como función de r/R para $M/R = 1/2.5$, n=0.6, $\omega = 0.3$, $\rho_0 = 0.00001$, $\alpha = -1.1$, $Q_0 = 0.2$, $Q = -0.8$

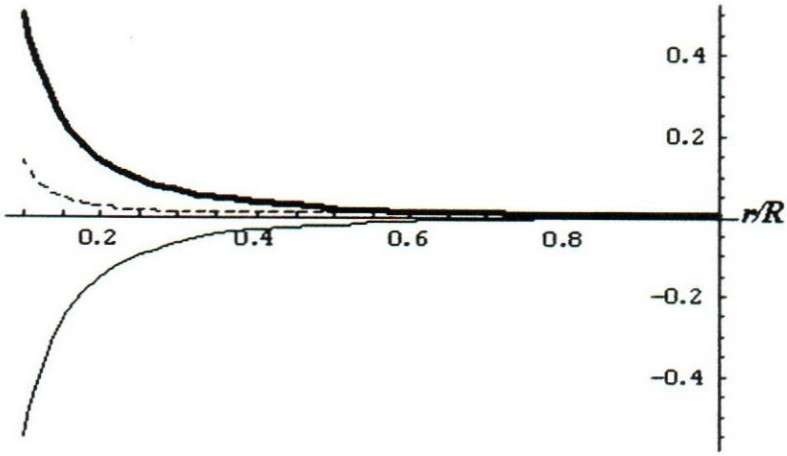

Figura N° 31. Densidad (curva sólida), presión radial(curva delgada) y presión tangencial (curva punteada) como una función de r/R para $M/R = 1/2.5$, n=0.6, $\omega = 0.3$, $\rho_0 = 0.00001$, $\alpha = -1.1$, $Q_0 = 0.2$, $Q = 0.16$

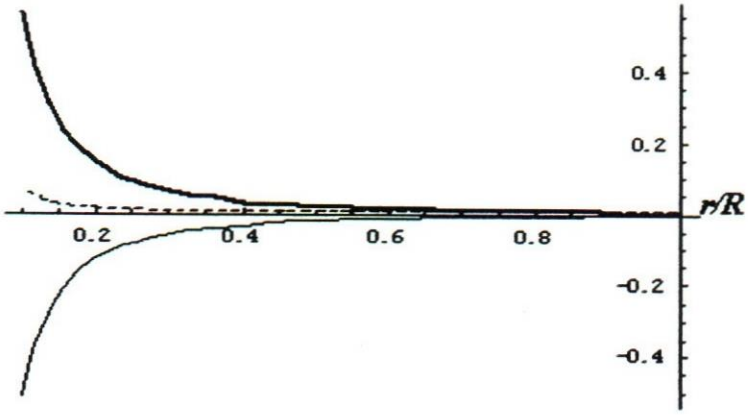

Figura N° 32. Densidad (curva sólida), presión radial(curva delgada) y presión tangencial (curva punteada) como una función de r/R para $M/R = 1/2.5$, n=0.6, $\omega = 0.3$, $\rho_0 = 0.00001$, $\alpha = -1.1$, $Q_0 = 0.4$, $Q = -0.6$

Caso II: $Q_i = Q_0(r/R)^n$ y carga total nula: En este modelo se impone que la película posee carga igual a la del núcleo y de naturaleza opuesta, de modo que la carga total es Q=0 y $Q_{película} = -Q_i$. Evaluando estas condiciones en (49)-(50) y tomando $\bar{\delta} = M^2\delta$ se obtiene:

$$\delta = \frac{\bar{\delta}}{r^{3(\alpha+1)}} = \left(\frac{r}{R}\right)^{-3\alpha-3} \frac{\alpha+1}{3\alpha+2n-1}(Q_0/R)^2(M/R)^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^{-3\alpha-3}\left(\frac{1+\alpha}{3\alpha-1}\right)\left(\frac{M}{R}\right)^2 + \frac{8\pi\bar{\rho}_0}{3(1+\alpha)}\left(\frac{r}{R}\right)^{-3\alpha-3} + \frac{1}{4}\left\{\frac{M/R}{(1-2M/R)(2\omega+1)}+1\right\}^2\left(\frac{2\omega+1}{(\omega)}\right)^2\left(1-2M/R\right) \tag{58}$$

$$\left.\frac{1}{B^2}\right|_{r=a} = \frac{1}{4}\left\{\frac{M/R}{(1-2M/R)(2\omega+1)}+1\right\}^2\left(\frac{2\omega+1}{(\omega)}\right)^2\left(1-2M/R\right) = \left.\frac{\psi^2}{4C^2}\right|_{r=R} \tag{59}$$

Como el núcleo de la estrella posee una distribución de carga de la forma (47), las expresiones de la presión radial, densidad de energía y presión tangencial poseen la forma (54)-(56):

$$8\pi\bar{\rho} = \frac{8\pi\bar{\rho}_0}{1+\alpha} + \frac{(M/a)^2}{(r/R)^2}\left(\frac{2\alpha}{3\alpha+1}\right) + 3\alpha\delta^* + (Q_0/R)^2(M/R)^2\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-4}\left[\frac{(\alpha+1)(2n-1)}{3\alpha+2n-1}-1\right]$$

$$8\pi\bar{P} = -\frac{8\pi\bar{\rho}_0}{1+\alpha} + \frac{(M/R)^2}{(r/R)^2}\left(\frac{2\alpha}{3\alpha+1}\right) + 3\delta^* + (Q_0/R)^2(M/R)^2\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-4}\left[1-\frac{3(\alpha+1)}{3\alpha+2n-1}\right]$$

$$8\pi\bar{P}_\perp = \frac{8\pi\bar{\rho}_0}{1+\alpha} + \frac{(M/R)^2}{(r/R)^2}\left(\frac{1+\alpha}{3\alpha+1}\right) - 3\alpha\delta^* - (Q_0/R)^2(M/R)^2\left(\frac{r}{R}\right)^{2n-4}\left[\frac{(\alpha+1)(2n-1)}{3\alpha+2n-1}-1\right]$$

En las Figuras N° 33-35 se muestran las variaciones de la presión radial, la presión tangencial y la densidad de energía en función de r/R para distintos valores del parámetro n que modifica la carga interior de la esfera e imponiendo la carga total

nula (Q=0). Se observa que la presencia de cargas en la película, afecta aun más a la presión tangencial, comparado con el modelo anterior, pero la presión radial y la densidad de energía no presentan mayores cambios frente a contribuciones de carga. Al incrementarse la carga en la película, existirá entonces, además de la superficie de material bariónico que caracteriza las estrellas de quarks, una superficie de densidad de energía eléctrica, cuya contribución adicional de presión puede afectar de manera importante a la presión tangencial.

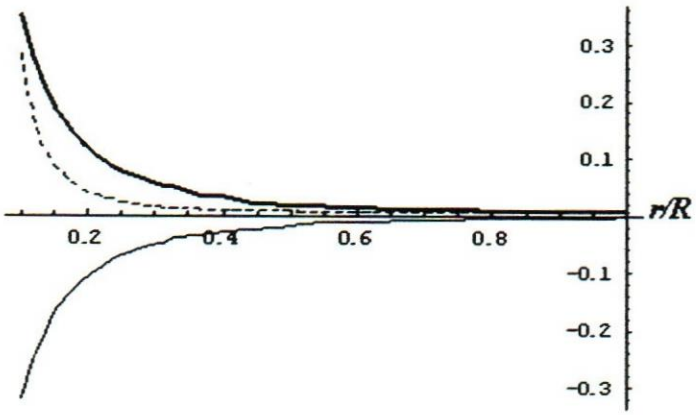

Figura N° 33. **Densidad (curva sólida), presión radial (curva delgada) y presión tangencial (curva punteada) como una función de r/R para M/R = 1/2.5, n=0.5, ω = 0.3, $\rho_0 = 0.00001$, $\alpha = -1.1$, $Q_0 = 0.2$**

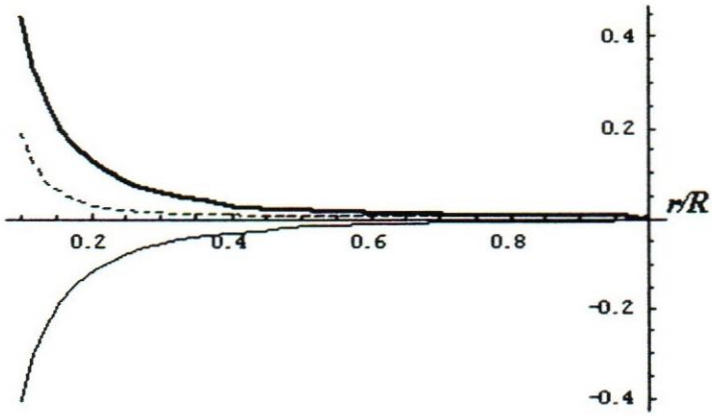

Figura N° 34. Densidad (curva sólida), presión radial(curva delgada) y presión tangencial (curva punteada) como una función de r/R para $M/R = 1/2.5$, n=0.8, $\omega = 0.3$, $\rho_0 = 0.00001$, $\alpha = -1.1$, $Q_0 = 0.2$,

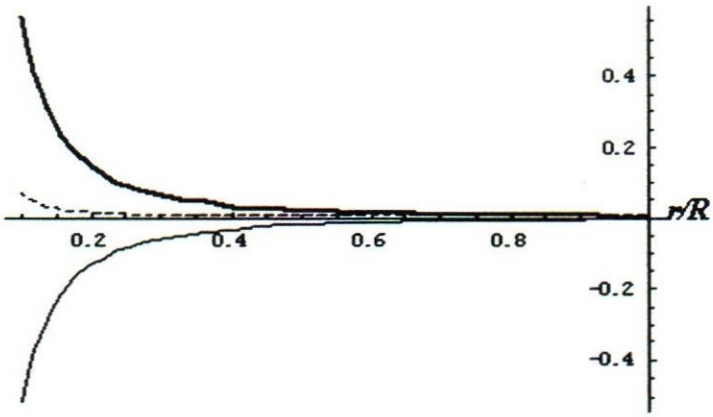

Figura N° 35. Densidad (curva sólida), presión radial(curva delgada) y presión tangencial (curva punteada) como una función de r/R para $M/R = 1/2.5$, n=1.5, $\omega = 0.3$, $\rho_0 = 0.00001$, $\alpha = -1.1$, $Q_0 = 0.2$.

Caso III: $Q_i = 0$ y carga total Q: En este caso, se considera la presencia de cargas sólo en la película de la estrella. Imponiendo $Q_i = 0$ en (50) y tomando $\overline{\delta} = M^2\delta$, se obtiene:

$$\delta^* = \frac{\overline{\delta}}{r^{3(\alpha+1)}} = -\left(\frac{r}{R}\right)^{-3\alpha-3}\left(\frac{1+\alpha}{3\alpha-1}\right)\left(\frac{M}{R}\right)^2 + \frac{8\pi\overline{\rho}_0}{3(1+\alpha)}\left(\frac{r}{R}\right)^{-3\alpha-3} + \frac{1}{4}\left\{\frac{M/R + Q^2/R^2}{\left(1-2M/R+Q^2/R^2\right)(2\omega+1)} + 1\right\}^2\left(\frac{2\omega+1}{(\omega)}\right)^2\left(1-2M/R+Q^2/R^2\right) \tag{60}$$

y el factor conforme que satisface las condiciones de juntura queda de la forma (48). Evaluando (48) y (60) en las ecuaciones de campo (44)-(46) y tomando $\overline{P} = M^2 P$; $\overline{P}_\perp = M^2 P_\perp$, $\overline{\rho} = M^2\rho$, obtenemos:

$$8\pi\overline{\rho} = \frac{8\pi\overline{\rho}_0}{1+\alpha} + \frac{\left(M/a\right)^2}{\left(r/R\right)^2}\left(\frac{2\alpha}{3\alpha+1}\right) + 3\alpha\delta^* \tag{61}$$

$$8\pi\overline{P} = -\frac{8\pi\overline{\rho}_0}{1+\alpha} + \frac{\left(M/R\right)^2}{\left(r/R\right)^2}\left(\frac{2\alpha}{3\alpha+1}\right) + 3\delta^* \tag{62}$$

$$8\pi\overline{P}_\perp = \frac{8\pi\overline{\rho}_0}{1+\alpha} + \frac{\left(M/R\right)^2}{\left(r/R\right)^2}\left(\frac{1+\alpha}{3\alpha+1}\right) - 3\alpha\delta^* \tag{63}$$

En las Figuras N° 36-38 se muestra el comportamiento de la presión radial, la presión tangencial y la densidad de energía en función de *r/A* para distintos valores de la carga total. Se puede observar que para este caso (carga sólo en la película), la presión tangencial es prácticamente nula. También se observa que la ausencia de cargas en el núcleo hace que la presión radial, tangencial y la densidad de energía

prácticamente no cambien, aunque se modifique la carga de la película. Esto pudiera sugerir que solo las distribuciones de carga en el interior afectan la estructura estelar, tal como lo señala Negreiros, *et al* [23], donde muestran que las distribuciones de carga tienen un impacto en la estructura de las estrellas tipo quarks, afectando la presión e incrementando la masa, en particular si se trata de objetos con materia tipo quark-regular que poseen carga neta positiva en la región interior y en la frontera, y carga negativa en la región exterior de la estrella.

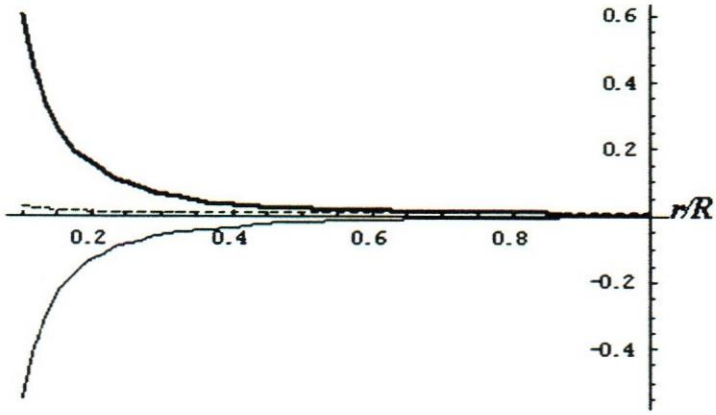

Figura N°36. **Densidad (curva sólida), presión radial(curva delgada) y presión tangencial (curva punteada) como una función de** r/R **para** $M/R = 1/2.5$, $\omega = 0.3$, $\rho_0 = 0.00001$, $\alpha = -1.1$, $Q = 0.3$

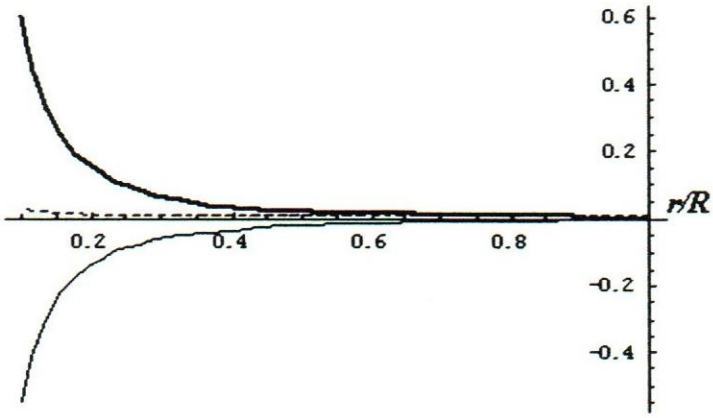

Figura N° 37 Densidad (curva sólida), presión radial(curva delgada) y presión tangencial (curva punteada) como una función de r/R para $M/R = 1/2.5$, $\omega = 0.3$, $\rho_0 = 0.00001$, $\alpha = -1.1$, $Q = 0.1$

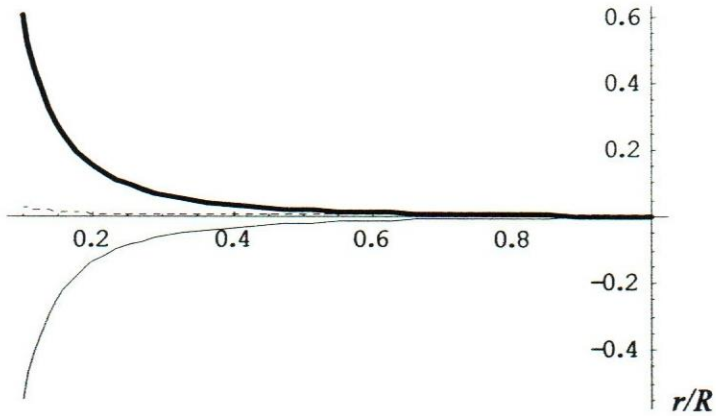

Figura N° 38. Densidad (curva sólida), presión radial(curva delgada) y presión tangencial (curva punteada) como una función de r/R para $M/R = 1/2.5$, $\omega = 0.3$, $\rho_0 = 0.00001$, $\alpha = -1.1$, $Q = 0.2$

IV. CONCLUSIONES

Hemos obtenido una serie de soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein para un fluido anisótropo que posee una película en su superficie, cargada y sin carga, en un fluido, que además de la simetría esférica también admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. Encontramos para todos los casos que el fluido tiene una presión radial negativa y este factor podría indicar la posibilidad de inestabilidad del fluido.

Es importante resaltar que todas las condiciones de la energía se satisfacen, por lo que no hay presencia de energía oscura en nuestro modelo tipo quark del MIT. El modelo propuesto constituye una nueva familia de soluciones analíticas para una estrella quark con materia cargada cuyo perfil de densidad de energía ρ es positiva en el interior y tiende a ser muy pequeña en el centro del fluido. La presencia de partículas cargadas adicionales no originan mayores cambios en la presión radial ni en la densidad de energía en el núcleo de la esfera; la contribución radial de presión que supone la presencia de estas cargas afecta a la presión tangencial, probablemente por el aumento en las interacciones que supone la presencia de tales cargas. Con la inclusión del modelo de bolsa MIT y fluidos que admiten un grupo de un parámetro de movimientos conformes con carga y presiones anisótropas, se abre la posibilidad de construir modelos analíticos que representen las condiciones más realistas de la estructura de objetos compactos y explicar la relación entre la anisotropía presente en los modelos propuestos con la presencia de cargas.

REFERENCIAS

[1] Rosseland S., *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **84**, 720 (1924).

[2] Alcock C., Farhi E., y Olinto V., *Astrophys. J.* **310**, 261 (1986).

[3] Alcock C., Olinto V. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **38**, 161 (1988).

[4] Itoh N., *Prog. Theor. Phys.* **44,** 291 (1970).

[5] Bodmer A., *Phys. Rev.* D **4**, 1601 (1971).

[6] Witten E, *Phys.Rev.*D **30**, 272 (1984).

[7] Chan R., Da Silva M. and Da Rocha J. arXiv [gr-qc]: 0803.2508 (2008).

[8] Carr B. and Coley A., *Class. Quant. Grav.* **16**, R31 (1999).

[9] Carr B. and Coley A., *Gen. Rel..Grav.* **37**, 2165 (2005).

[10] Lin D., Carr B. and Fall S., *Mon.Not.R.Astron.Soc.* **177**, 51 (1976).

[11] Bicknell G. and Henriksen R., *Astrophys. J.* **219**, 1043- 1057 (1978).

[12] Herrera L., Jimenez J., Leal L., Ponce de Leon J., Esculpi M. and Galina V, *J. Math. Phys.* **25**, 3274 (1984).

[13] Carr B., Coley A., Goliath M., Nilsson U., Uggla C. *Phys.Rev* D **61**, 08152 (2000).

[14] Bohmer C., Harko T. and Lobo F., *Phys Rev* D **76**, 084014 (2007).

[15] Maeda H. and Harada T., *Phys.Rev.*D **77**, 024023 (2008).

[16] Huterer D. and Turner M.,*Phys.Rev.*D **60,** 081301 (1999).

[17] Varela V., *Gen. Rel. Grav.* **37**, 1769 (2005).

[18] Anninos P. and Rothman T., *Phys Rev* D **65**,024003 (2001).

[19] Eiroa E.and Romero G., arXiv: [gr-qc]/0303093v2 (2003).

[20] Negreiros R, Weber F, Malheiro M. and Usov V., arXiv:0907.5537 (2009).

[21] Cai R. and Wang A., *Phys. Rev.* D 73, 063005 (2006).

[22] Hernández H. and Núñez L. *Can. J. Phys* **82,** 29-51 (2004).

[23] De Felice F., Siming P. and Yunqiang Y., arXiv :[gr-qc] 9905099v1 (1999).

[24] Ray S., Espíndola A. y Malheiro M. *Phys.Rev.*D **68**, 084004 (2003).

CONCLUSIONES GENERALES

En este trabajo se han propuesto nuevas familias de soluciones de esferas anisótropas en el marco de la Relatividad General, que poseen simetría esférica y admiten un grupo de un parámetro de movimientos conformes.

En el Capítulo I hemos obtenido soluciones considerando tres ecuaciones de estado, incluyendo la ecuación para la energía oscura y se estudiaron las soluciones para los tres casos. Estas nuevas soluciones dependen de dos parámetros ajustables α y ω que relacionan las presiones con la densidad de energía, tanto en el núcleo como en la película superficial y el factor conforme adquiere una estructura funcional que depende de uno de los parámetros. En los modelos con películas de presión no nula el potencial gravitacional y por consiguiente, el corrimiento al rojo, se incrementan en regiones cercanas a la superficie, y este incremento es aun mayor al incrementarse la presión radial. Sin embargo, para valores mayores del parámetro ω, las relaciones presión radial/densidad y presión tangencial/densidad disminuyen en r/R =0.5. Ajustando los parámetros e imponiendo las condiciones de energía débil, fuerte y dominante, se determinó que la relación M/R debe ser mayor a 1/3 para asegurar densidad positiva en la superficie. Adicionalmente se encontró que para α=0.05 se viola la condición de energía fuerte en regiones cercanas a la superficie modelada por la ecuación de estado $P_r = -\alpha\rho$, pudiendo aparecer un escenario de energía oscura. Para valores de M/R mayores a 1/3 encontramos objetos compactos, tipo materia de neutrones, que pudieran luego expandirse, siguiendo el

comportamiento usual de una supernova, pero con presencia de energía oscura o fantasma. La existencia de una película delgada incrementa el potencial gravitacional y por consiguiente incrementa el corrimiento al rojo. Para el caso de películas con presiones superficiales no nulas, aparecen regiones de energía oscura en la superficie del fluido. Estos modelos permiten obtener modelos muy compactos sin que se violen las condiciones de energía, para determinado intervalos de los parámetros ajustables.

En el Capítulo II se obtuvieron dos nuevas familias de soluciones, considerando, al igual que en el capítulo anterior, que el fluido posee simetría esférica y admite un grupo de un parámetro de movimientos conformes. El fluido considerado posee carga, y presión nula en la superficie, realizando el acoplamiento con la métrica exterior de Reissner-Nordstrom. Para el primer caso, donde se considera la presión radial proporcional a la presión tangencial se puede observar el incremento del potencial gravitacional al aumentar el parámetro n. Esto pudiera significar que un aumento de la densidad en el modelo de la bolsa implica un incremento de interacciones fuertes, originando así un incremento del potencial gravitacional. Para el caso extremo de la masa igual a la carga, originando un agujero negro de RN, el máximo valor del potencial gravitacional es ½ y la relación Q/R tiene que ser menor a ½. Estos modelos pueden ser útiles para estudiar otros objetos compactos o fluidos con materia tipo quark. Para el segundo caso se observa como la presencia de una distribución de cargas afecta la estructura del fluido, modificando el valor del potencial gravitacional e incrementando de esta forma el corrimiento al rojo.

En el Capítulo III, se obtienen nuevos modelos que admiten un grupo de un

parámetro de movimientos conformes y simetría esférica, y además posee una película de materia, y se estudiaron los siguientes casos: I) núcleo con carga interna Q_i y la estrella con carga total Q; II) núcleo con carga interna Q_i y estrella con carga total nula y III) núcleo con carga nula y estrella con carga total Q. Para las tres configuraciones se considera un fluido tipo quark gobernado por una ecuación barotrópica para fluidos tipo quark del modelo MIT. En todos los casos se obtuvieron presiones radiales negativas, con un fuerte incremento en su valor en las capas interiores. Se observó la influencia que tiene la presencia de carga en el fluido en los valores de las presiones tangenciales, sin embargo no parece afectar la presión radial ni a la densidad de energía en ninguno de los casos. Estos cambios de presión tangencial podrían ser el resultado de la aparición de campos eléctricos en el núcleo y por la contribución adicional de campos eléctricos originados por las cargas presentes en la película.

Debido a que los parámetros físicos observables o detectables de los fluidos estelares, tales como la luminosidad estelar, el color del astro o la masa estelar dependen de parámetros no observables como la presión y la densidad, se hace imprescindible que estos últimos se estudien bajo condiciones físicas cada vez más realistas. Durante mucho tiempo se ha modelado el material estelar como un fluido perfecto, de modo que se puede obtener información astrofísica a partir de perfiles de densidad y presión radial. Sin embargo, para el caso de estrellas con muy altas densidades, es necesario considerar la presencia de cargas y presiones anisótropas para producir modelos aun más realistas. Para objetos muy compactos, cuyo fluido

pasa a un estado degenerado, se puede modelar considerando al fluido como material tipo quark. En los modelos que se han propuesto en este trabajo se consideran estas variables físicas, de modo que las soluciones permitan obtener información astrofísica relevante y más realista, tales como la posibilidad de colapso de estrellas muy masivas con elevadas distribuciones de carga, la influencia de los campos eléctricos sobre las fuerzas gravitacionales de objetos ultra-densos y degenerados o la conducción de calor en las enanas blancas debido a la movilidad de los electrones en el material tipo quark. Todos los modelos obtenidos son propuestas para el avance en las investigaciones en el estudio descriptivo de fluidos estelares, de modo que constituya un aporte para la astrofísica relativista y la ciencia en general.