AAR8448

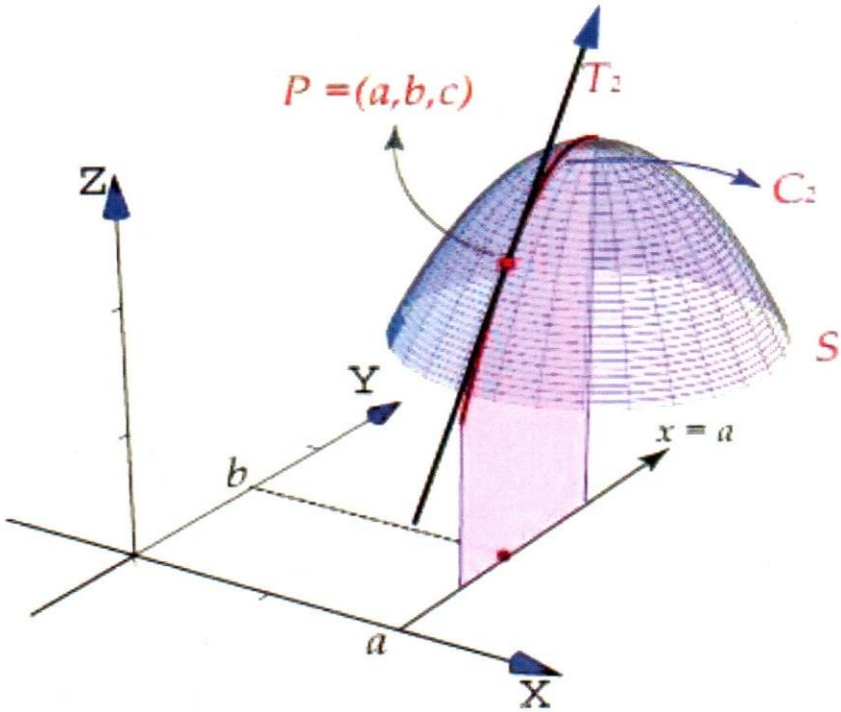
TRAB
IID2010
D7.

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

Facultad de Ingeniería

APLICACIONES DE LA DERIVADA

TANGENTES, OPTIMIZACIÓN, VARIABLES RELACIONADAS



Trabajo de Ascenso presentado ante la ilustre UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO por la Licenciada Alicia Díaz, para optar por la categoría de Profesor Asistente.

DEDICATORIA

A mi esposo Roberto Escolar, a mis hijos Rodrigo y Mariana, al resto de los miembros de mi familia por su colaboración y paciencia durante la realización de este problemario.

INDICE

DEDICATORIA II

INDICE III

INDICE DE FIGURAS IV

INTRODUCCIÓN 5

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA A LA DERIVADA 7

RECTA TANGENTE 10

Estrategias para la resolución de problemas que involucran rectas tangentes: 10

PROBLEMAS DE RECTA TANGENTE 11

MÁXIMOS Y MÍNIMOS 20

Estrategias para la resolución de problemas de optimización: 20

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN 21

VARIABLES RELACIONADAS 31

Estrategias para la resolución de problemas de razón de cambio o variables relacionadas: 31

PROBLEMAS DE VARIABLES RELACIONADAS 32

PROBLEMAS PROPUESTOS DE RECTAS TANGENTES 40

PROBLEMAS PROPUESTOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS 50

PROBLEMAS PROPUESTOS DE VARIABLES RELACIONADAS 60

GLOSARIO DE TÉRMINOS 70

CONCLUSIÓN 75

BIBLIOGRAFÍA 76

INDICE DE FIGURAS

Figura 1: Trayectoria del avión 11
Figura 2: Posición de la recta tangente 12
Figura 3: Movimiento de la bala humana 13
Figura 4: Gráfica de la parábola y la recta tangente 14
Figura 5: Autopistas y empalme 15
Figura 6: Posición de las rectas tangentes 16
Figura 7: Representación de la situación del problema 17
Figura 8: Posición de la recta tangente 18
Figura 9: Gráfico de los corrales y de la cerca 21
Figura 10: Gráfica de la función 22
Figura 11: De izquierda a derecha: Cilindro y Superficie del Cilindro 23
Figura 12: Gráfica de la función 24
Figura 13: Jaula de los animales y corral anexo 25
Figura 14: Gráfica de la función 26
Figura 15: Representación gráfica del vaso cónico de papel 27
Figura 16: Gráfica de la función 28
Figura 17: Representación gráfica del montañista 29
Figura 18: Gráfica de la función 30
Figura 19: Tobogán 32
Figura 20: Proceso de variación de y con respecto a t 33
Figura 21: Trayectoria descrita por la partícula 34
Figura 22: Proceso de variación de x respecto de t 35
Figura 23: Situación en que el bote se acerca al muelle 36
Figura 24: Proceso de variación de x respecto de t 37
Figura 25: Representación gráfica de la bola de nieve 38
Figura 26: Proceso de variación de D respecto de t 39

INTRODUCCIÓN

Resolver problemas viene a ser una de las dificultades con las que tienen que enfrentarse los estudiantes de las distintas ramas del saber, debido fundamentalmente a que se combinan varios procesos. Por una parte, requiere de conceptos bien formados del área en el que se dan los problemas y en segundo lugar, se necesita madurez mental para procesar los textos contenidos en el planteamiento del problema, con los conceptos de la ciencia a los que se refiere el problema. Podríamos enumerar otra serie de factores, pero consideramos que estos dos son los más básicos.

A lo largo de mis años de docencia en el área del Cálculo Diferencial se han intentado varias estrategias para lograr que los estudiantes obtengan mayor éxito a la hora de resolver problemas de aplicación. En este trabajo propongo una serie de problemas resueltos y otros propuestos. No me he limitado al simple enunciado de los mismos con una indicación de la respuesta a la que se debe llegar. En la primera parte se exponen un conjunto de ejercicios de aplicación de la derivada, a saber: problemas de rectas tangentes, optimización y variables relacionadas. En la segunda parte se propone una batería de problemas con los mismos temas para ser desarrollados por el estudiante.

La metodología utilizada consiste en una introducción en la que se señalan los procesos que se propone seguir para atacar los problemas de cada parte; a continuación se desarrollan varios problemas siguiendo los mismos pasos, es decir:

Un gráfico ilustrativo del problema, a continuación se señala la función o funciones que entran a formar parte del desarrollo del problema y con ayuda del "sofware" identificado como "SCIENTIFIC NOTEBOOK" se grafican las mismas funciones para que se pueda visualizar la posible solución por las características de la curva involucrada. Se analiza dicha gráfica y se resuelve numéricamente el problema, para concluir con una comprobación de la respuesta.

En los ejercicios propuestos además de indicar la respuesta se muestra la función o relación que debe utilizarse, así como su grafica, acompañada de la relación derivada a la que se debe llegar.

He comprobado, por medio de los resultados obtenidos en las evaluaciones de mis estudiantes usando distintos métodos que esta forma de atacar los problemas de aplicación ha ayudado en muchos casos a entender mejor las situaciones planteadas. No puedo concluir esta introducción sin señalar que de poco sirve éste ni ningún otro esquema de resolución si en primer lugar no se es capaz de leer con detenimiento el problema y, en segundo lugar, sin entender cada una de las palabras que abarca, este aspecto muchas veces se deja pasar y se empieza a hacer cálculos sin sentido que en la mayoría de las veces se convierte en un hacer, deshacer y volver a hacer.

Espero con este simple problemario contribuir de alguna manera a tomar mayor conciencia en el sentido de que es más importante procesar que hacer.

Profesora Alicia Díaz

Caracas, mayo de 2010

INTRODUCCIÓN HISTÓRICA A LA DERIVADA

"Los problemas típicos que dieron origen al Cálculo Infinitesimal, comenzaron a plantearse en la época clásica de Grecia (siglo III a.C.), pero, no se encontraron métodos sistemáticos de resolución hasta 20 siglos después (en el siglo XVII por obra de Newton y Leibnitz).

En lo que atañe a las derivadas, existen dos conceptos de tipo geométrico: el problema de la tangente a una curva (concepto griego estático en contraste con el concepto cinemático de Arquímedes) y el problema de los extremos (máximos y mínimos) que en su conjunto dieron origen a lo que modernamente se conoce como Cálculo Diferencial.

El problema de la tangente a una curva, fue analizado y resuelto primeramente por Apolonio (200 a.C.). En el libro II de su obra, hace el estudio de los diámetros conjugados y de las tangentes a una cónica Igualmente, en el libro CÓNICAS V.8., Apolonio demuestra un teorema relativo a la normal a una parábola, que podría formar parte actualmente de un curso completo de Cálculo Diferencial.

En cuanto al problema de los extremos relativos de una función, fue Pierre de Fermat (1601 – 1665) quien en el año 1629, hizo dos importantes descubrimientos que están relacionados con sus trabajos sobre lugares geométricos. En el mas importante de ellos, titulado ***Methodus ad disquirendam maximan et miniman*** *("Métodos para hallar máximos y mínimos"), Fermat expone un método muy ingenioso para hallar los puntos en los cuales una función polinómica de la forma $y = f(x)$, toma un valor máximo o mínimo. Fermat comparaba el valor de $f(x)$ en un cierto punto, con el valor de $f(x + E)$ en un punto próximo; en general, estos dos valores son distintos, pero, en una "cumbre" o en el fondo de un "valle" de una curva* ***"lisa"*** *la diferencia es casi imperceptible. Por lo tanto, para hallar los puntos que corresponden a valores máximos o mínimos de una función, Fermat iguala $f(x)$ con*

$f(x + E)$, teniendo en cuenta que estos valores son "casi iguales". Cuanto mas pequeña sea la diferencia E entre los dos puntos, mas cerca está la igualdad de ser verdadera. Así, después de dividir todo por E, hace $E = 0$.

*Esta fue la razón que asistió a **Laplace** al aclamar a **Fermat** como el verdadero descubridor del Cálculo Diferencial. Sin embargo, aunque son muchos y numerosos los precursores, algunos historiadores han considerado que es a **Newton** (sir Isaac Newton. 1642 – 1727. Nacido en Woolstharpe (Inglaterra)) y a **Leibnitz** (Gottgried Wilhelm Leibnitz. 1646 – 1716. Nacido en Leipzig (Alemania)) a quienes se les puede atribuir justificadamente la invención de las derivadas y de las integrales.*

Newton, tardó mucho en dar a conocer sus resultados.

*En el año de 1669, Isaac Barrow (1630 – 1677), recibió de su alumno Isaac Newton, un folleto titulado **De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas**. Contenía, nada menos, que el esbozo casi completo del Cálculo Diferencial e Integral. Aquel mismo año, Barrow decidió que su alumno sabía mucho mas que él, y que tenía por lo tanto mucho mas derecho a la cátedra de matemáticas con mas merecimientos que el propio Barrow; su titular. Con una generosidad y un desinterés difíciles de igualar, Barrow cedió su cátedra a Newton.*

*A los 40 años, siendo profesor de matemáticas de Cambridge, Newton escribió los **Principia Mathematica**, tal vez el tratado científico de mayor influencia jamás publicado. En el aplicó los conceptos del cálculo para explorar el universo, incluyendo los movimientos de la tierra, la luna y los planetas alrededor del sol. Se dice que un estudiante observó: "ahí va el hombre que escribió un libro que ni él ni los demás comprenden".*

Leibnitz, comparte con Isaac Newton el crédito del descubrimiento del cálculo. Fue el primero en publicar los mismos resultados que Newton descubriera diez años antes. La historia ha dictaminado que Newton fue el primero en concebir las principales ideas (1665 – 1666), pero que Leibnitz las descubrió independientemente durante los años de 1673 – 1676.

Leibnitz fue quizá el mayor inventor de símbolos matemáticos. A él se deben los nombres del Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, así como los símbolos $\frac{dy}{dx}$ *y* $\int$ *para la derivada y la integral. Fue el primero en utilizar el término* ***"función"*** *y el uso del símbolo " = " para la igualdad. Por esta razón, debido a la superioridad del simbolismo , el cálculo se desarrolló con mucha mayor rapidez en el continente europeo que en Inglaterra de donde era oriundo Newton."*

http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/9.1.html

Fecha de consulta 26 de abril de 2010

SITIO ELABORADO EN EL
CENTRO DE CAPACITACIÓN INTERNET
cci@quimbaya.udea.edu.co

RECTA TANGENTE

Estrategias para la resolución de problemas que involucran rectas tangentes:

1.- Haga un dibujo que refleje la situación planteada

2.- Defina la o las variables que están involucradas en el problema

3.- Plantee matemáticamente el problema

4.- Halle la ecuación de la recta tangente que resuelve la situación

5.- Analice la función, graficando la situación inicial con la recta tangente en el punto dado

6.- Resuelva el problema.

7.- Interprete el problema.

PROBLEMAS DE RECTA TANGENTE

Problema 1. En un juego de video para niños, aparecen aviones en la pantalla volando de izquierda a derecha sobre la trayectoria $y = 1 + \frac{1}{x}$, los cuales pueden disparar balas en la dirección de la tangente a la trayectoria, para así alcanzar algunos objetivos colocados sobre los puntos de abscisa 1,2,3,4,5, ubicados en el eje X. Si un jugador dispara cuando el avión se encuentra en el punto P(1, 2), entonces ¿Dá en alguno de los blancos?.

1. Dibujo

En la figura 1 se muestra la trayectoria hecha por el avión, el cual se encuentra ubicado en el punto P(1, 2), listo para disparar.

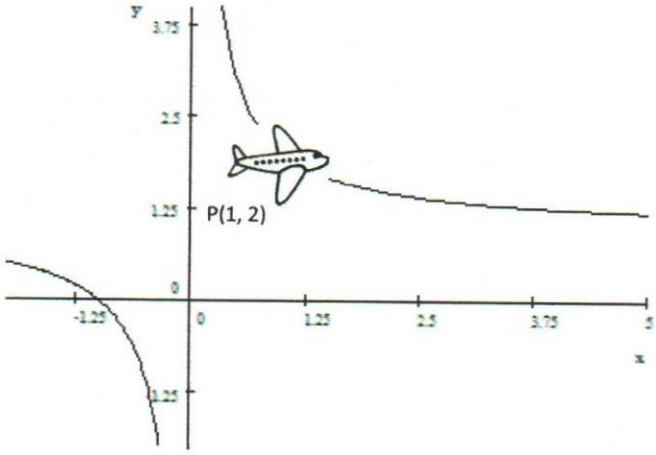


Figura 1: Trayectoria del avión

2. Definición de las variables

x,y , coordenadas de los puntos de la tangente a la trayectoria del avión

3. Planteamiento matemático del problema

Ecuación de la recta tangente: $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

Donde x_1, y_1 son las coordenadas del punto P y m la pendiente de la recta.

4. Ecuación de la recta tangente

$m = y' = -\frac{1}{x^2}$ (1)

P(1, 2) $y - 2 = -1(x - 1)$, por lo que $y = -x + 3$

5. Análisis de la función

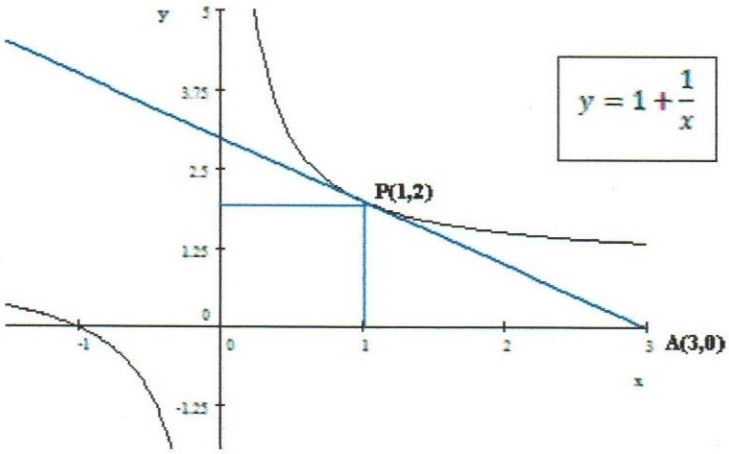


Figura 2: Posición de la recta tangente

Se traza la recta tangente a la curva en el punto P y ésta corta al eje x en el punto A(3,0).

6. Resolución del Problema

$y = -x + 3$

$y = 0$ y $x = 3$

En $x = 3$ si da en uno de los blancos

Problema 2. En los años cuarenta, Emanuel Zacchini en el circo Ringling Brothers and Barnum & Bailey, ejecutaba regularmente el acto de la bala humana. La boca del cañón se elevaba a 15 pies sobre el suelo y apuntaba según un ángulo de 45°. La trayectoria parabólica de Zacchini tenía un alcance horizontal de 175 pies. Encuentre una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$ que especifique la trayectoria parabólica.

1. Dibujo

En la figura 3 se muestra la trayectoria descrita por Zacchini, el cual se encuentra ubicado en la boca del cañón, a 15 pies sobre el pavimento.

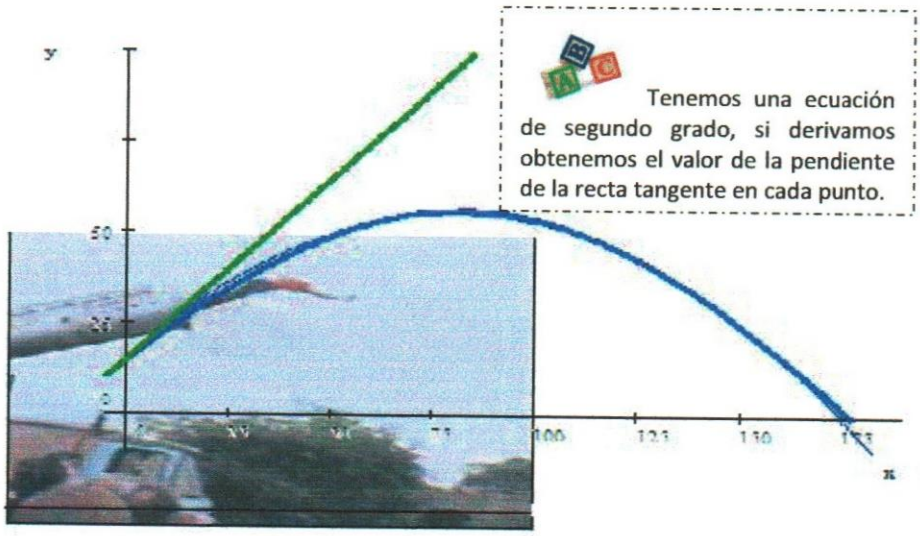


Figura 3: Movimiento de la bala humana

2. Definición de las variables

x: posición horizontal y: altura correspondiente a cada posición de x

3. Planteamiento matemático del problema

Ecuación de la recta tangente: $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

Donde x_1, y_1 son las coordenadas del punto P y m la pendiente de la recta.

4. Ecuación de la recta tangente

Como el cañón apuntaba en un ángulo de 45°, y la ecuación buscada es de la forma $y = ax^2 + bx + c$ se deduce:

Para x=0 , y=15 se infiere que c=15. Por tanto $y = ax^2 + bx + 15$.

Por otra parte, se sabe que la pendiente de la recta tangente, en el punto P(0,15) es $m = tag\ 45° = 1$.

Es decir que $y' = 2ax + b = 1$, y como $x = 0$ entonces $1 = 2a.0 + b$, por lo que $b = 1$.

5. Análisis de la función

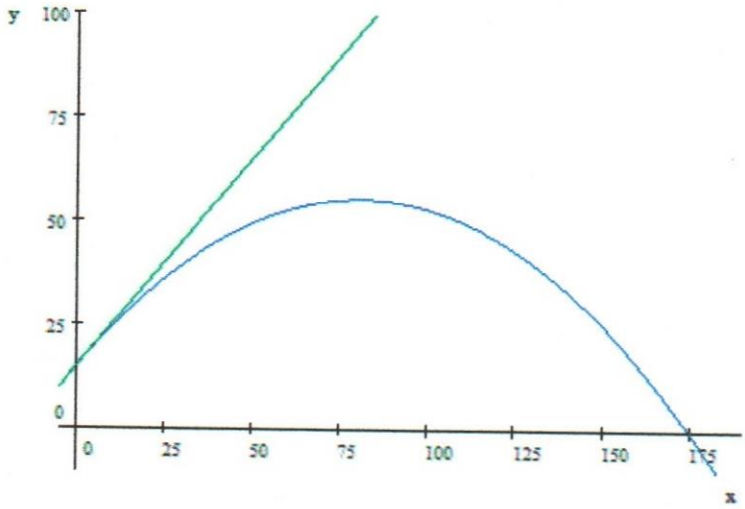


Figura 4: Gráfica de la parábola y la recta tangente

Se traza la recta tangente a la curva en el punto P (0,15).

6. Resolución del Problema

Por lo tanto la ecuación es de la forma: $y = ax^2 + x + 15$

Como el alcance horizontal es de 175 pies, en el punto final $y = 0$ y $x = 175$, por lo que se puede obtener a:

$0 = a(175)^2 + 175 + 15$ $\qquad 0 = 30625a + 190$

$-190 = 30625a$ $\qquad a = \frac{-190}{30625} = -6{,}2.10^{-3}$

Finalmente, nos queda : $\quad y = \frac{-38}{6125}x^2 + x + 15$

Problema 3. Un grupo de ingenieros civiles diseña un tramo AB de carretera, que debe conectar una autopista horizontal con otra que tiene una inclinación "α" tal que $\left(tag\alpha = {}^{1}/_{5}\right)$ en el punto B, como se ilustra en la figura 5. El enlace AB debe realizarse sobre una distancia horizontal de 800 pies usando una curva parabólica para unir los puntos A y B. Obtenga una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$ para la parábola y determine las coordenadas de B.

1. **Dibujo**

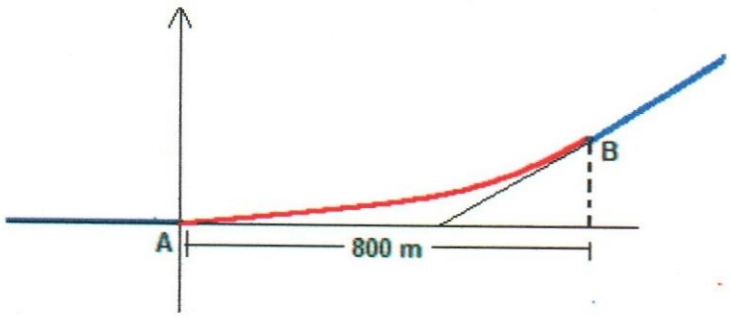


Figura 5: Autopistas y empalme

2. **Definición de las variables**

x: las abscisas de la curva AB y: las ordenadas de la curva AB

3. **Planteamiento matemático del problema**

$y = ax^2 + bx + c$

$\widehat{AB}$ es el trozo de parábola definido entre x=0 y $x = 800$

4. **Ecuación de la recta tangente**

La ecuación de la parábola buscada debe tener la misma inclinación que las autopistas tanto en el punto A, como en el punto B, por lo tanto la pendiente en A es m=0 y en B es m=1/5.

Es decir: $l_A: y = 0$; $l_B: y - y_B = \frac{1}{5}(x - 80)$

5

5. Análisis de la función

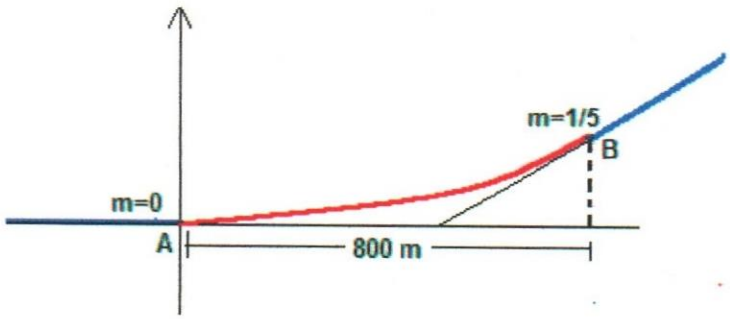


Figura 6: Posición de las rectas tangentes

6. Resolución del Problema

La pendiente de las tangentes a la parábola $y = ax^2 + bx$+c, coincide con el valor de la derivada a la parábola, evaluada en cualquier punto de la misma.

Asi : de $y` = 2ax + b$ se deduce que

$$m = 0 \ , \ x = 0 \longrightarrow 0 = 2a(0) + b \rightarrow b = 0$$

$$m = {}^{1}/_{5} \ , \ x = 800 \text{ y } b = 0 \longrightarrow {}^{1}/_{5} = 2a(800)$$

$$a = \frac{1}{5.2.800} = \frac{1}{8.10^3} \text{ y como } x = 0, \ y = 0 \rightarrow \text{c=0}$$

Entonces la ecuación de la curva que permite empalmar las autopistas en A y B será:

$$y = \frac{1}{8.10^3}x^2$$

Las coordenadas de B serán: $\left(800, \frac{1}{8.10^3}.64.10^4\right) = (800,80)$

$$B(800,80)$$

Problema 4. Un lanzador de martillos practica en un lugar pequeño. Cuando el lanzador gire en sentido positivo o anti horario, el martillo recorre una circunferencia de 5 pies de radio. Una vez lanzado el martillo, choca contra una reja de alambre que se encuentra a 50 pies del centro de la zona de lanzamiento. Suponga que los ejes de coordenadas se colocan como se muestra en la Figura 7.

a) Si el martillo se suelta en (-4,-3) y se mueve a lo largo de la tangente a la trayectoria descrita por el lanzador del martillo, ¿en qué punto golpeará la reja?

b) Si el martillo debe chocar contra la citada reja en (0,-50), ¿en qué punto de la circunferencia debe soltarse?

1. Dibujo

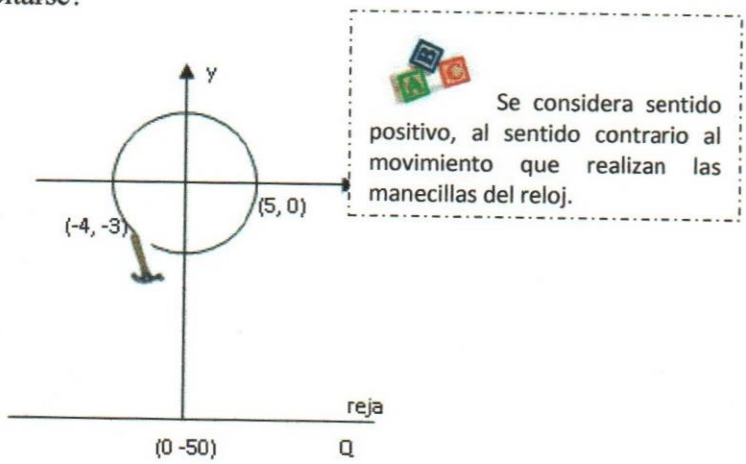


Figura 7: Representación de la situación del problema

2. Definición de las variables

Para la parte a: x: la abscisa sobre la reja y: la ordenada sobre la reja

Para la parte b: P(x,y), cuyas coordenadas pertenecen a la circunferencia

3. Planteamiento matemático del problema

Intersecar la trayectoria del martillo con la ecuación de la reja $\begin{cases} y = -50 \\ y + 3 = m(x+4) \end{cases}$

4. Ecuación de la recta tangente

La trayectoria descrita por el martillo se encuentra sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, y por tanto la pendiente de la recta tangente a la misma y en cualquier punto es:

$$2x = -2y.y' \longrightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}$$

Por lo que la pendiente de la tangente en (-4, -3) es: $m(-4, -3) = -\frac{-4}{-3} = -\frac{4}{3}$

Por tanto la ecuación de la recta tangente, para $m = -\frac{4}{3}$ y P(-4, -3) es:

$$y + 3 = -\frac{4}{3}(x+4)$$

5. Análisis de la función

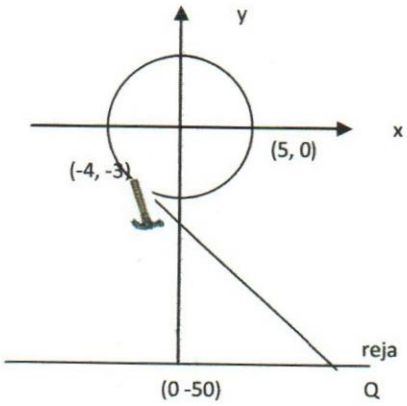


Figura 8: Posición de la recta tangente

6. Resolución del problema

Veremos la solución en sus dos partes:

a) Si el martillo se suelta en (-4, -3) y se mueve a lo largo de la tangente, ¿en qué punto golpeará a la reja?.

Tenemos que igualar a $y = -50$ para hallar el valor de x que será el punto donde chocará con la reja

$-50 + 3 = -\frac{4}{3}(x + 4)$

$(-47).3 = -4x - 16$

$-141 + 16 = -4x$

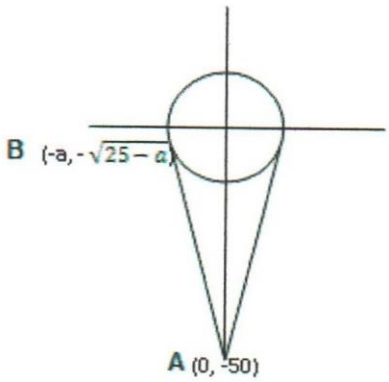
$-125 = -4x$

$x = \frac{125}{4}$

Q(31,25; -50)

En la página siguiente, la resolución de la parte b

b) Si el martillo debe chocar contra la reja en el punto (0, -50), ¿en qué punto de la circunferencia debe soltarse?



Como el martillo gira en sentido positivo entonces la recta que define el punto sobre la circunferencia es el señalado por B. Hallamos la pendiente de la nueva recta tangente, utilizando para su cálculo las coordenadas de los puntos A y B.

$$m = \frac{-\sqrt{25-a^2}+50}{-a-0} = -\frac{a}{\sqrt{25-a^2}}$$

$$-(25-a^2)+50\sqrt{25-a^2} = a^2$$

$$-25+a^2+50\sqrt{25-a^2} = a^2$$

Por lo que:

$$50\sqrt{25-a^2} = 25\left(\sqrt{25-a^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad 25-a^2 = \frac{1}{4} \qquad 25-\frac{1}{4} = a^2$$

$$a^2 = \frac{99}{4} \qquad a = \pm\frac{3\sqrt{11}}{2} \approx \pm 4{,}97 \qquad \frac{99}{4}-25 = -y^2 \qquad -y^2 = -\frac{1}{4}$$

En conclusión: $y = -\frac{1}{2}$

Si el martillo choca contra la reja en el punto (0, -50), entonces el martillo se soltó en el punto:

$$\text{B}\left(-4{,}97;\ -\frac{1}{2}\right).$$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Estrategias para la resolución de problemas de optimización:

1.- Haga un dibujo que refleje la situación planteada.

2.- Defina las variables que están involucradas en el problema.

3.- Plantee matemáticamente el problema: escribiendo la función a optimizar.

4.- Establezca la ecuación auxiliar o condicionante.

5.- Exprese la función a optimizar junto con la ecuación auxiliar planteando su dominio.

6.- Analice la función resultante, siempre que sea cómodo.

7.- Resuelva el problema.

8.- Compruebe que el valor obtenido satisface al problema.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Problema 1. Un granjero dispone de 200 metros de cerca para cerrar dos corrales rectangulares adyacentes e iguales, ¿Qué dimensiones harán que el área encerrada por los corrales sea máxima?.

1. Dibujo

En la Figura 9 se muestran los rectángulos adyacentes y la cerca, los que representan a los corrales a ejecutar por parte del granjero.

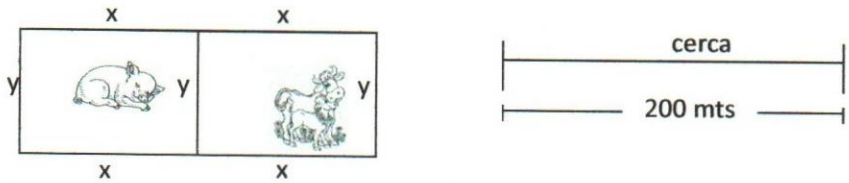


Figura 9: Gráfico de los corrales y de la cerca

2. Definición de Variable

"x" y "y" dimensiones de cada corral.

Adyacente: uno al lado del otro.
Perímetro: suma de las longitudes de los lados de la figura

3. Planteamiento del Problema

Función a optimizar: $A = 2x.y$ (1)

4. Ecuación auxiliar

Perímetro: $4x + 3y = 200$

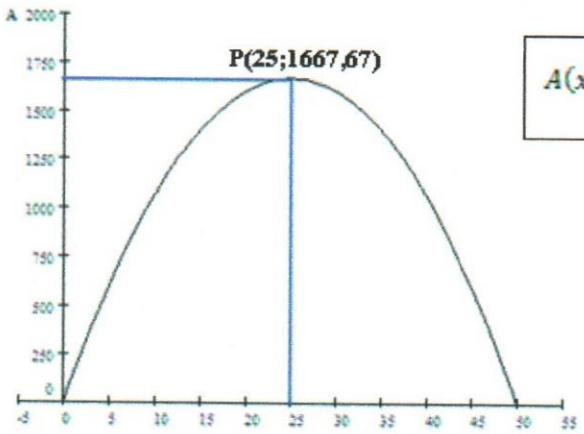
Despejando y, nos queda $y = \frac{200-4x}{3}$ (2)

5. Relación entre la función a optimizar y la función auxiliar

Sustituyendo (2) en (1), nos queda que: $\boldsymbol{A = 2x.\frac{(200-4x)}{3}}$

$$\boldsymbol{A = \frac{400}{3}x - \frac{8x^2}{3}} \qquad \text{Dom: } x \in [0,50], \text{ Rgo: } A \geq 0$$

6. Análisis gráfico de la función resultante



$$A(x) = -\frac{8}{3}x(x-50)$$

Figura 10: Gráfica de la función

Se obtuvo una parábola cóncava hacia abajo, cuyo vértice está en (25; 1666,67) y el valor máximo del área en el intervalo de [0, 50] es 1666,67.

7. Resolución matemática del Problema

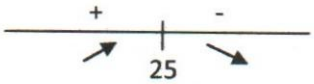
Derivando nos queda que: $A' = \frac{400}{3} - \frac{16}{3}x$

$A' = 0, \rightarrow \quad \frac{400}{3} = \frac{16}{3}x$, por lo que para $x = 25$ puede haber máximo

Estudiando los intervalos de monotonía[1]:

$A' > 0 \rightarrow \frac{16}{3}(25 - x) > 0 \rightarrow$ x <25

$A' < 0 \rightarrow \frac{16}{3}(25 - x) < 0 \rightarrow$ x >25



Luego para $x = 25$ el área es máxima.

Por tanto los valores de las dimensiones son:

$x = 25$ y $y = \frac{200-4(25)}{3} = \frac{100}{3}$

8. Comprobación

Sustituimos en la función condicionante los valores obtenidos para comprobar que se cumple la condición. En efecto:

$$4x + 3y = 4(25) + \cancel{3}\frac{100}{\cancel{3}} = 200$$

[1]Para el estudio de la naturaleza de los puntos críticos se utilizará el criterio de la primera derivada

Problema 2. Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal, que contendrá jugos de fruta, y que tenga una capacidad de $1m^3$. Encuentre las dimensiones que debe tener este recipiente para que la cantidad de material utilizada en su fabricación sea mínima, suponiendo que no se desperdicia nada de la material en su construcción.

1. Dibujo

En la Figura 11 se pueden ver el cilindro y la superficie del mismo, los que representan el envase de jugo.

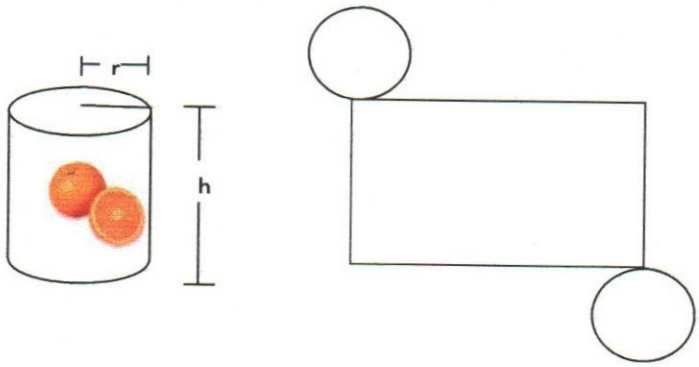


Figura 11: De izquierda a derecha: Cilindro y Superficie del Cilindro

2. Definición de Variables

r: radio del cilindro h: altura del cilindro

Capacidad: es el volumen del cilindro

Cantidad de material: es la superficie total del cilindro

3. Planteamiento del problema

Función a optimizar es la superficie del cilindro: $S = 2(\pi r^2) + 2\pi r h$ (1)

4. Ecuación auxiliar

Función auxiliar: $V = \pi r^2 h$ Sí $V = 1$, entonces $1 = \pi r^2 h$.

Relación de las variables con la condición dada:

Despejando h, nos queda $h = \frac{1}{\pi r^2}$ (2)

5. Relación entre la función a optimizar y la función auxiliar

Sustituyendo (2) en (1), nos queda que: $S = 2(\pi r^2) + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2}$

$S = 2(\pi r^2) + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} = S = 2(\pi r^2) + \frac{2}{r}$ Dom: $r > 0$ Rgo: $S \geq 0$

6. Análisis gráfico de la función resultante

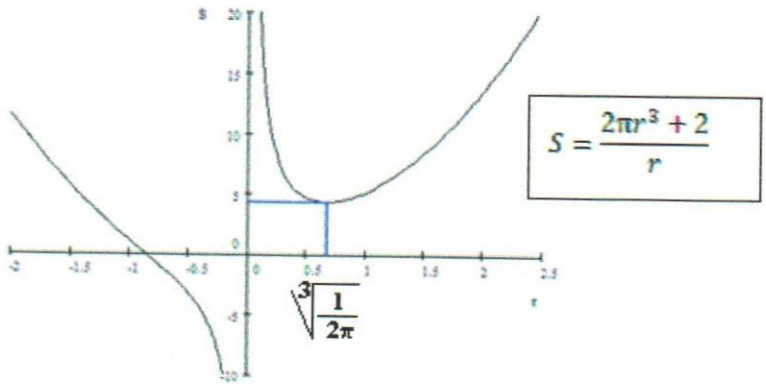


Figura 12: Gráfica de la función

Se obtuvo una curva cóncava hacia arriba, con un mínimo local en el punto donde $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

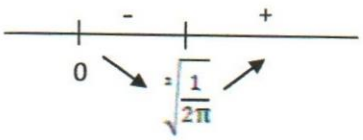
7. Resolución matemática del Problema

$S' = \frac{4\pi\left(r^3 - \frac{1}{2\pi}\right)}{r^2}$ si $S' = 0$, entonces $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ (Candidato a mínimo).

Estableciendo los intervalos de monotonía, se obtiene

$S' > 0 \rightarrow \frac{4\pi\left(r^3 - \frac{1}{2\pi}\right)}{r^2} > 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} > 0$

$S' < 0 \rightarrow \frac{4\pi\left(r^3 - \frac{1}{2\pi}\right)}{r^2} < 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} < 0$



Para $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ la superficie es mínima y $h = \frac{1}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2}} = \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$

$S = 2\pi\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}} + 2\pi\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{\pi}}$, y simplificando :

$$S = 2\pi\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}} + 2\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{2\pi}} = 2\left(\pi\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}} + \sqrt[3]{2\pi}\right)$$

8. Comprobación

$$1 = \pi\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right)^2\left(\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}\right) = \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{\sqrt[3]{4\pi^2}}}\left(\frac{\cancel{\sqrt[3]{4\pi^2}}}{\cancel{\pi}}\right)$$

Problema 3. Una jaula de animales tiene un entrante en una esquina, de dimensiones 5m y 10m. El administrador de la jaula necesita agregar un corral exterior a la jaula, de forma rectangular, como se muestra en la Figura 13. Si dispone de 85m de cerca nueva. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del corral para maximizar su área?.

1. Dibujo

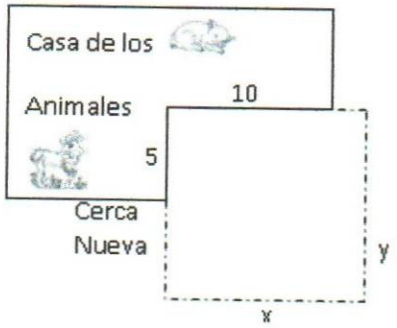


Figura 13: Jaula de los animales y corral anexo

2. Definición de variables

x: longitud del corral y: anchura del corral.

3. Planteamiento del problema

Área del rectángulo: $A = x.y$

4. Ecuación auxiliar

$P = x + y + (y - 5) + (x - 10)$

$P = x + x - 10 + y + y - 5$

$85 = 2x + 2y - 15$

$100 = 2(x + y)$

$x + y = 50$, por lo que $y = 50 - x$

5. Relación entre la función a optimizar y la ecuación auxiliar

$A(x) = (50 - x).x = 50x - x^2$ Dom: $x \in [0,50]$ Rgo: A≥0

6. Análisis de la función resultante

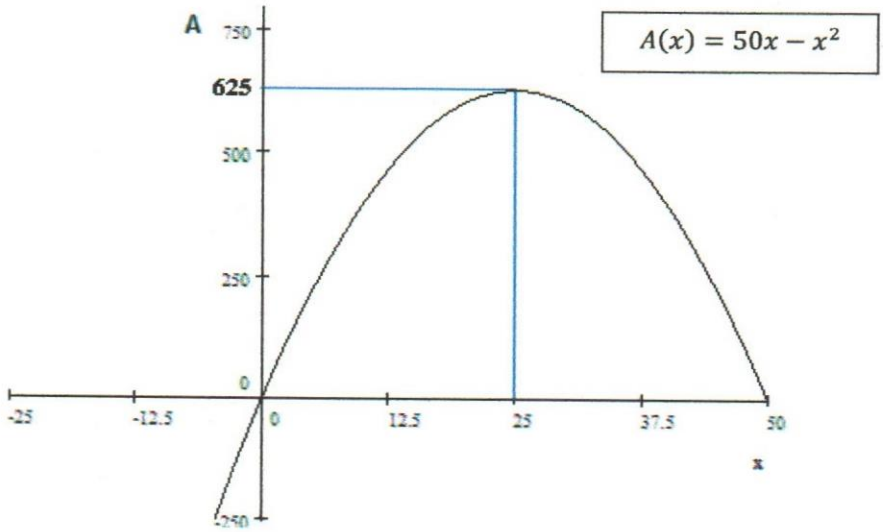


Figura 14: Gráfica de la función

Se obtuvo una parábola cóncava hacia abajo con un máximo en (25,625)

7. Resolución Matemática del problema

$A'(x) = 50 - 2x = -2(x - 25)$

$A'(x) = 0 \qquad x = 25$ Candidato a máximo

Estableciendo los intervalos de monotonía

$A'(x) > 0 \rightarrow \quad x - 25 < 0 \quad \rightarrow x < 25$

$A'(x) < 0 \rightarrow \quad x - 25 > 0 \quad \rightarrow x > 25$

--- 25 +++

Por lo que para $x = 25$ el área es máxima; $y = 50 - 25 = 25$.

$A(x) = 25m(25m) = 625m^2$

8. Comprobación

85=25+25 +20+15

Problema 4. Se elabora un cono para beber a partir de un trozo circular de papel de radio 12 cm, al recortar un sector y unir los bordes CA y CB. Encuentre la capacidad máxima del cono.

1. **Dibujo**
2.

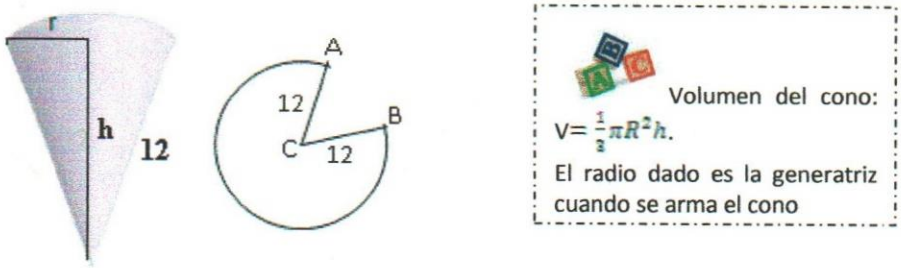


Figura 15: Representación gráfica del vaso cónico de papel

3. **Definición de las variables**

h: altura del cono r: radio del cono

4. **Planteamiento del problema**

Volumen del cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

5. **Ecuación auxiliar**

R=12, siendo R el radio del círculo de papel del cuál se fabricará el cono

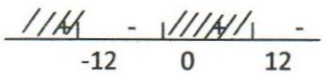
$12^2 = r^2 + h^2$ $\qquad$ $r^2 = 12^2 - h^2$

6. **Relación entre la función a optimizar y la ecuación auxiliar**

$V = \frac{1}{3}\pi(144 - h^2)h$

$V = \frac{1}{3}\pi(144h - h^3)$

Dominio: $0 \leq h \leq 12 \cap V \geq 0$



$-h(h^2 - 144) \geq 0$

$-h(h - 12)(h + 12) \geq 0$

7. Análisis de la función resultante

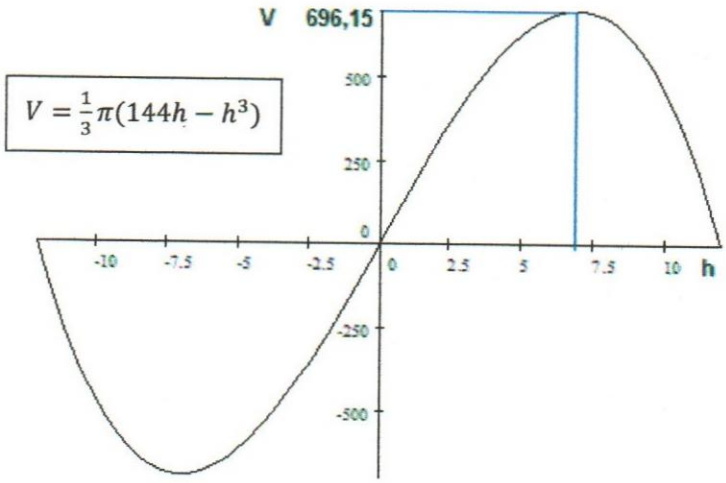


Figura 16: Gráfica de la función

Se obtuvo una parábola cúbica con un máximo en $\frac{12}{\sqrt{3}}$

8. Resolución matemática del problema

Derivando nos queda que:

$$V' = \frac{1}{3}\pi(144 - 3h^2)$$

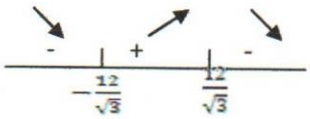
$$V' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi(144 - 3h^2) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{144}{3} - h^2 = 0 \quad \rightarrow \quad h = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

(candidato a máximo)

Estableciendo los intervalos de monotonía

V'>0 $\rightarrow \left(\frac{12}{\sqrt{3}} - h\right)\left(\frac{12}{\sqrt{3}} + h\right) > 0 \rightarrow -\frac{12}{\sqrt{3}} < h < \frac{12}{\sqrt{3}}$

V'<0 $\rightarrow \left(\frac{12}{\sqrt{3}} - h\right)\left(\frac{12}{\sqrt{3}} + h\right) < 0 \rightarrow h < -\frac{12}{\sqrt{3}} \vee h < \frac{12}{\sqrt{3}}$



Para que la capacidad del cono sea máxima $h = \frac{12}{\sqrt{3}}$

$$r^2 = 144 - \frac{144}{3} = \frac{3.144 - 144}{3} = \frac{144.2}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}.\frac{144.2}{3}.\frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{144.8}{3\sqrt{3}} = 696{,}15 \ cm^3$$

Problema 5. Una montañista comienza a caminar en un punto P de un camino recto de la cota mil. Tres km después y sobre el mismo camino se encuentra un punto O, exactamente a 2km por debajo de un punto A, donde se encuentra un puesto de guarda parques. El montañista puede caminar a 8 Km/h por el camino, pero sólo a 3 Km/h por el Ávila. Si quiere minimizar el tiempo del recorrido para llegar al puesto del guarda parques, ¿en qué punto M del camino PO debe iniciar su subida hacia el puesto del guarda parques?.

1. Dibujo

En la figura se puede ver el montanista en el punto P.

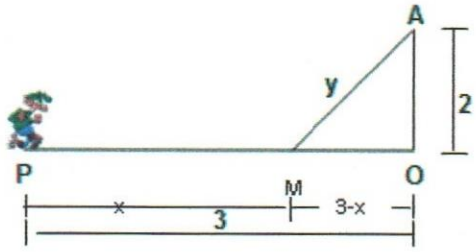


Figura 17: Representación gráfica del montañista.

2. Definición de variables

x: es la longitud de $\overline{PM}$. y: es la longitud de $\overline{MA}$. T: tiempo

3. Planteamiento del problema

Función a optimizar: $T = T_1 + T_2$ (1)

4. Ecuación auxiliar

Función auxiliar: $T = \frac{d}{v}$ (2)

Movimiento uniforme: V=d/t. Donde V es la velocidad, d es la distancia recorrida y t el tiempo empleado en recorrer d a la velocidad V.

5. Relación entre la función a optimizar y la ecuación auxiliar

Sustituyendo (2) en (1), nos queda que: $T = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} = \frac{x}{8} + \frac{y}{3}$

Expresando y en función de x y sustituyendo en T:

$$T = \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{2^2+(3-x)^2}}{3}$$

6. Análisis gráfico de la función resultante

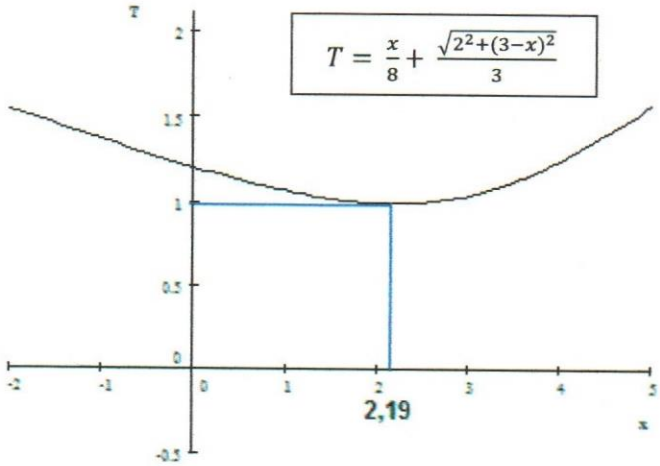


Figura 18: Gráfica de la función

7. Resolución matemática del problema

Derivando : $T' = \frac{1}{8} + \frac{(1).2(3-x).(-1)}{2(3)\sqrt{4+(3-x)^2}} = \frac{1}{8} - \frac{3-x}{3\sqrt{4+(3-x)^2}}$

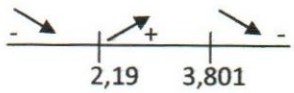
si $T' = 0 \rightarrow \frac{1}{8} = \frac{3-x}{3\sqrt{13-6x+x^2}} \rightarrow -(x-3{,}801)(x-2{,}19) = 0$

es decir: $x = 3.801 \quad o \quad x = 2.19$ (candidatos a máximo o mínimo)

Estableciendo los intervalos de monotonía

$T' < 0 \rightarrow -(x-3{,}801)(x-2{,}19) < 0 \rightarrow$ x < 2.19 V x >3,801

$T' > 0 \rightarrow -(x-3{,}801)(x-2{,}19) > 0 \rightarrow$ 2.19 < x < 3,801



Cuando $x = 2{,}19$ se debe iniciar la subida para que el tiempo empleado en llegar al puesto de guarda parques sea mínimo.

PM= 2,19 km

VARIABLES RELACIONADAS

Estrategias para la resolución de problemas de razón de cambio o variables relacionadas:

1.- Haga un dibujo que refleje la situación planteada.

2.- Defina los datos.

3.- Defina las variables.

4.- Establezca la ecuación que relacione las variables. Pueden requerirse dos o más ecuaciones para obtener una sola ecuación que relacione la variable cuya razón de cambio se busca y la variable cuya razón de cambio se conoce.

5.- Resuelva matemáticamente el problema.

6.- Analice la ecuación obtenida.

7.- Aplique la ecuación obtenida usando los datos conocidos para hallar la razón desconocida.

PROBLEMAS DE VARIABLES RELACIONADAS

Problema 1. Un tobogán tiene la forma de la curva $y = \frac{1500}{30+x} - 13$ ***para*** $0 \leq x \leq 75$***, en un plano x y con distancias medidas en pies. Cuando una caja se encuentra sobre el tobogán en un punto para el cual x=20, la velocidad con que se mueve horizontalmente crece a razón de*** $10^{pies}/_{s}$ ***¿A qué velocidad decrece la altura ?.***

1. **Dibujo**

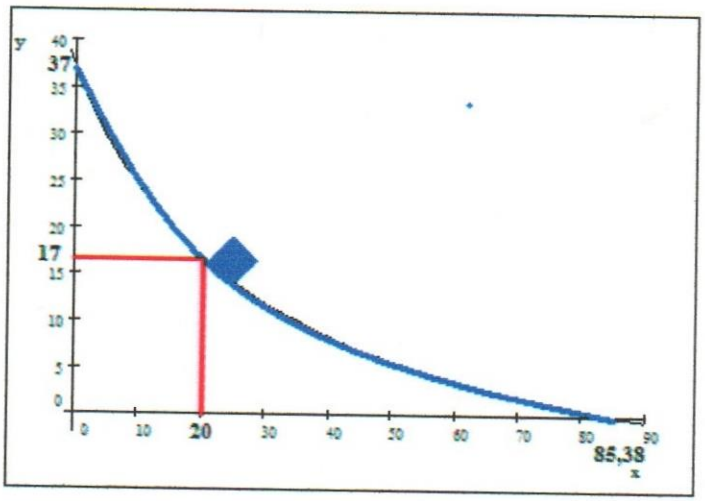


Figura 19: Tobogán

2. **Datos**

$y = \frac{1500}{30+x} - 13$; $\frac{dx}{dt} = 10\ pies/seg.$ x=20 pies

3. **Definición de Variables**

$\frac{dy}{dt}$ siendo

x: es la distancia horizontal recorrida por el cajón y: es la distancia vertical y t: el tiempo.

4. **Ecuación o ecuaciones que relacionan los datos y las variables**

$y = \frac{1500}{30+x} - 13$

5. **Resolución matemática del problema**

$\frac{dy}{dt} = -\frac{1500}{(30+x)^2}\frac{dx}{dt}$

6. Análisis de la ecuación obtenida

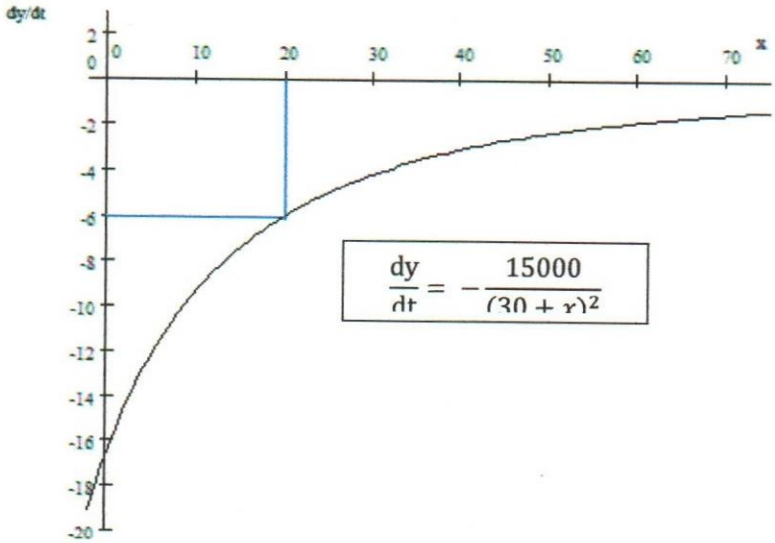


Figura 20: Proceso de variación de y con respecto a t

La razón de cambio de la ordenada con respecto al tiempo es opuesta con respecto a la razón de cambio de x con respecto al tiempo e inversa al cuadrado de la posición de la caja.

7. Aplicación al caso particular

Cálculo de $\frac{dy}{dt}$ sí $x = 20$ y $\frac{dx}{dt} = 10$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1500}{(50)^2}.10$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{15000}{2500} = -6\,{}^{pies}/_{s}$$

La ordenada decrece a razón de $6\,{}^{pies}/_{s}$

Problema 2. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = \sqrt{1+x^3}$. Cuando llega al punto P (2, 3) la ordenada aumenta a razón de $4\,cm/s$. ¿Con qué rapidez cambia la abscisa del punto P en ese instante?.

1. Dibujo

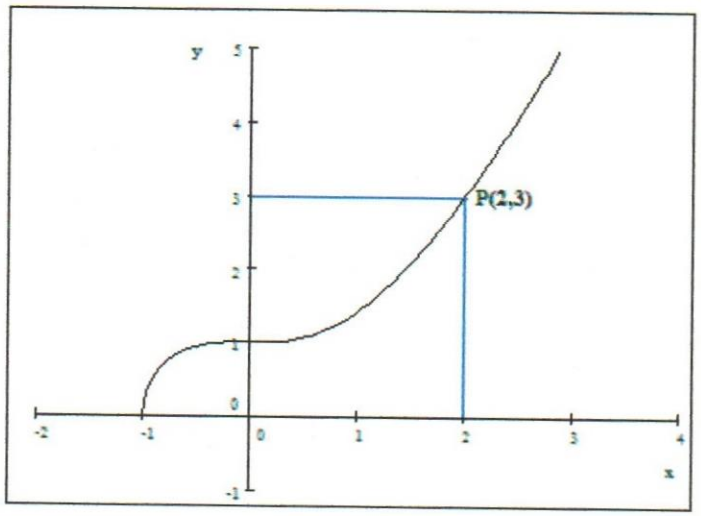


Figura 21: Trayectoria descrita por la partícula

2. Datos

$y = \sqrt{1+x^3}$; P(2,3) ; $\frac{dx}{dt}$

3. Definición de las variables

$\frac{dx}{dt}$ siendo (x,y) la posición de la partícula ; y t: el tiempo

4. Ecuación o ecuaciones que relacionan los datos y las variables

$y = \sqrt{1+x^3}$

5. Resolución matemática del problema

$$\frac{2\sqrt{1+x^3}}{3x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

6. Análisis de la ecuación obtenida

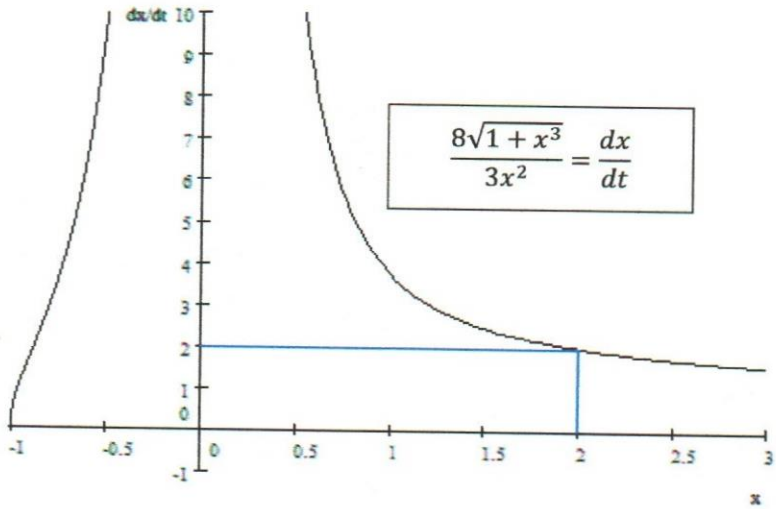


Figura 22: Proceso de variación de x respecto de t

La razón de cambio de la abscisa con respecto al tiempo es positiva y decreciente

7. Aplicación al caso particular

Cálculo de $\frac{dx}{dt}$ para el punto (2,3) y $\frac{dy}{dt} = 4\ cm/s$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}} = \frac{2\sqrt{1+2^3}}{3.2^2}.4\ cm/s = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\sqrt{1+8}}{3.4}.4\ cm/s = 2\ cm/s$$

Por lo que se puede decir que la abscisa x cambia a razón de $2\ cm/s$.

Problema 3. ***Se remolca un bote hacia un muelle por medio de una cuerda atada a la proa que pasa por una polea que está sobre el muelle 1 m más arriba que la proa. Si se tira de la cuerda a razón de 1 m/s. Con qué rapidez se aproxima el bote al muelle cuando se encuentra a 8m de éste?***

1. Dibujo

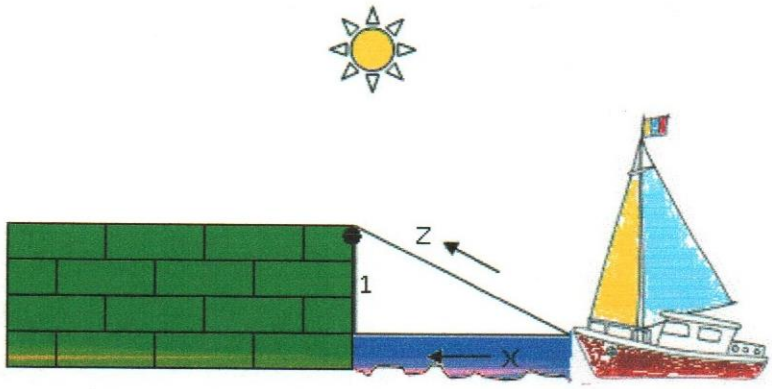


Figura 23: Situación en que el bote se acerca al muelle

2. Datos

y=1 ; x=8 ; $\frac{dz}{dt} = -1\, {}^{m}/_{s}$

Utilizaremos como ecuación auxiliar Pitágoras ya que tenemos un triángulo rectángulo.

3. Definición de las variables

$\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$ siendo:

x: la separación de proa con respecto al muelle

z: es la distancia entre proa y la polea, y t: el tiempo.

4. Ecuación o ecuaciones que relacionan los datos y las variables

$z^2 = 1 + x^2$ (1)

5. Resolución matemática del problema

$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$ → $\frac{dx}{dt} = \frac{Z}{x}.\frac{dZ}{dt}$ (2)

Sustituyendo (1) en (2) , $\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.\frac{dZ}{dt}$

6. Análisis de la ecuación obtenida

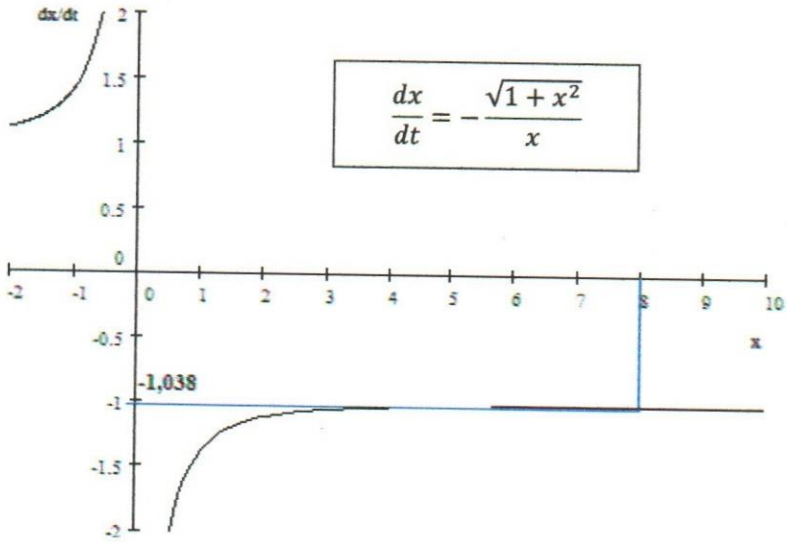


Figura 24: Proceso de variación de x respecto de t

La razón de cambio de la abscisa con respecto al tiempo es negativa y creciente

7. Aplicación al caso particular

Para x=8 y $\frac{dZ}{dt} = -1\,m/s$

$$\frac{dx}{dt}_{x=8} = \frac{\sqrt{69}m}{8m}.-1\,m/s = -\frac{\sqrt{69}}{8}m/s = -1{,}038\,m/s$$

El bote se aproxima al muelle a razón de $1{,}038\,m/s$.

Problema 4. ***Si una bola de nieve se funde de modo que su área superficial disminuye a razón*** $1\,cm^2/min$***, ¿con qué rapidez disminuye su diámetro, cuando éste alcanza los 10cm?***

1. Dibujo

Figura geométrica: esfera
Superficie de la esfera: $S = 4\pi R^2$.

Figura 25: Representación gráfica de la bola de nieve

2. Datos

Se trata de una esfera de la que se sabe que $\frac{dS}{dt} = -1\, {cm^2}/{min}$

3. Definición de las variables

$\frac{dD}{dt}$ siendo

S :la superficie de la esfera D: diámetro de la esfera y t: el tiempo.

4. Ecuación o ecuaciones que relacionan los datos y las variables

$D = 2R$ por lo tanto $R = \frac{D}{2}$

$S = 4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = 4\pi\frac{D^2}{4} = \pi D^2$

5. Resolución matemática del problema

$\frac{dS}{dt} = \pi.2D\frac{dD}{dt}$

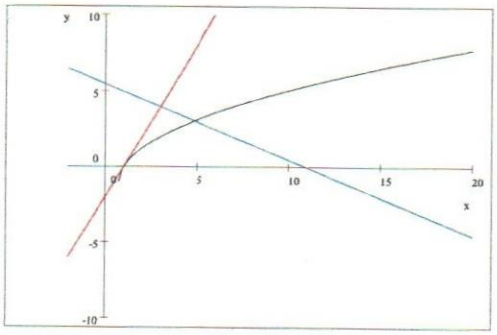
$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2\pi D}\frac{ds}{dt}$

PROBLEMAS PROPUESTOS DE RECTAS TANGENTES

1.- Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{4x-3} - 1$ que es perpendicular a la recta $x + 2y - 11 = 0$

Función: $y = \sqrt{4x-3} - 1$

Gráfica de la función:



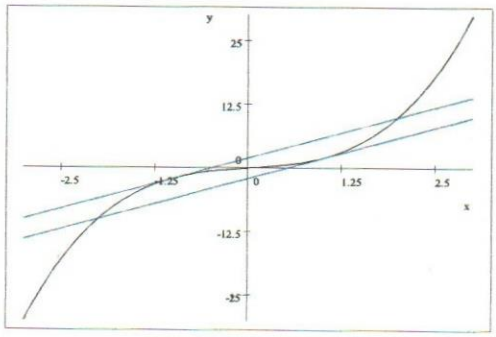
[2]

Respuesta: $y = 2x - 2$.

2.- Calcular las tangentes a la curva $y = x^3 + x$ en los puntos donde la pendiente sea igual a 4; así como el valor mínimo que pueda alcanzar la pendiente y el punto donde toma este valor mínimo.

Función: $y = x^3 + x$

Gráfica de la función:



Respuesta: $y = 4x + 2$; $y = 4x - 2$; $m = 1; P(0,0)$

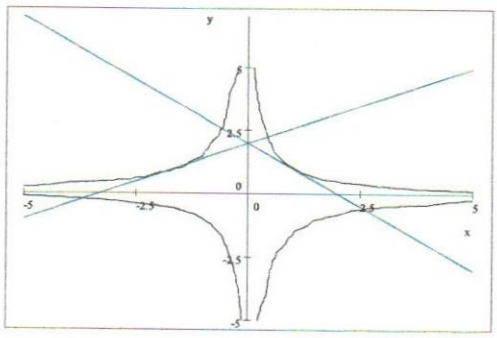
.

[2] En la gráfica aparece en negro la función original y azul la o las rectas tangentes

3.- Obtener las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $3x^2y^2 + 2xy - 5 = 0$ ***trazadas por el punto A(0,2).***

Función: $3x^2y^2 + 2xy - 5 = 0$

Gráfica de la función:

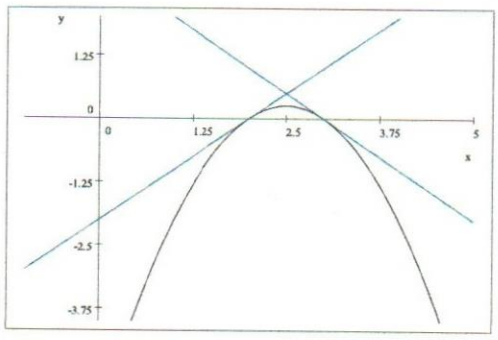


Respuesta: $y = -x + 2$; $y = \frac{3}{5}x + 2$

4.- Hallar las pendientes de las tangentes a la parábola $y = -x^2 + 5x - 6$ ***en sus puntos de intersección con el eje X.***

Función: $y = -x^2 + 5x - 6$

Gráfica de la función:

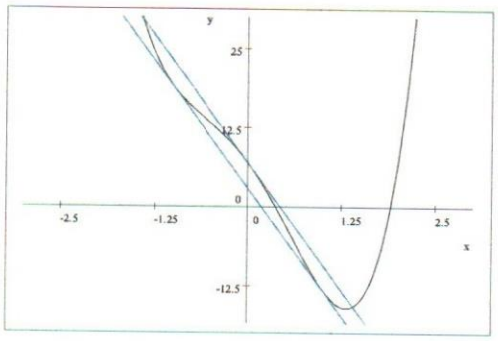


Respuesta: $m = 1$; $m = -1$

5.- Hallar todos los puntos sobre la curva $y = 4x^4 - 8x^2 - 16x + 7$ tales que la recta tangente a la curva en dichos puntos sea paralela a la recta $16x + y + 5 = 0$.

Función: $y = 4x^4 - 8x^2 - 16x + 7$

Gráfica de la función:

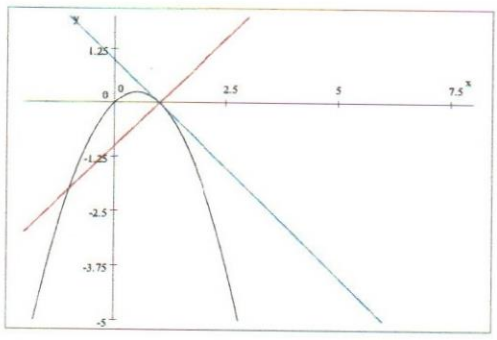


Respuesta: $P_1(0,7)$; $P_2(1,-13)$; $P_3(-1,19)$

6.- Se traza la normal a la curva $y = x - x^2$ en el punto P(1,0) y compruebe que corta a la curva en otro punto.

Función: $y = x - x^2$

Gráfica de la función:

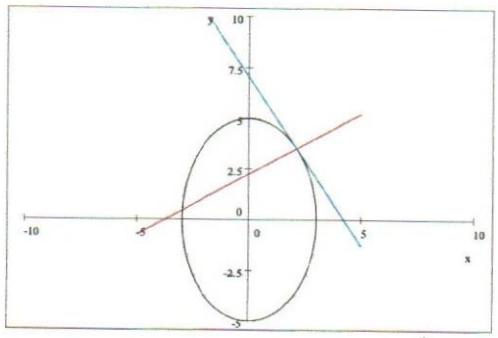


Respuesta: $y = x - 1$; $P(-1,-2)$

9.- Halle la ecuación de la recta tangente y normal a la curva definida por sus ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 3cost \\ y = 5sent \end{cases}$ ***cuando t=*** $\frac{\pi}{4}$

Función: $\begin{cases} x = 3cost \\ y = 5sent \end{cases}$

Gráfica de la función:

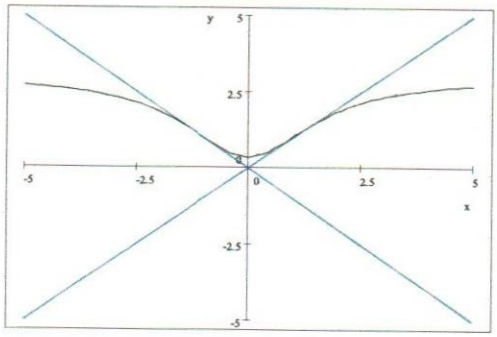


Respuesta: $y = -\frac{5}{3}x + 5\sqrt{2}$; $\quad y = \frac{3}{5}x + \frac{8\sqrt{2}}{5}$

10.- Demostrar que las tangentes a la curva $(3 + x^2)y = 1 + 3x^2$ ***en los puntos de ordenada 1, se cortan en el origen de coordenadas.***

Función: $(3 + x^2)y = 1 + 3x^2$

Gráfica de la función:

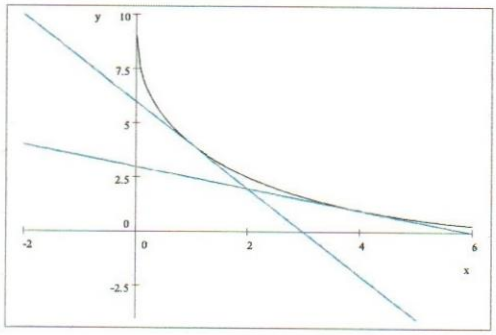


Respuesta: $y = x$; $\quad y = -x$

11.- Demostrar que la suma de las intersecciones con los ejes de coordenadas de la tangente a la curva $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ en cualquier punto de la misma es igual a "a".

Función: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

Gráfica de la función:

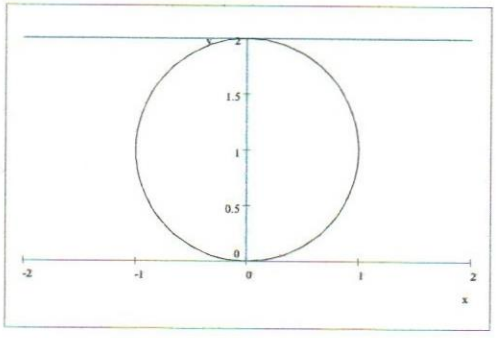


Respuesta: $\begin{cases} x=\sqrt{a}\sqrt{x_0} \\ y=-\sqrt{a}\sqrt{x_0}+a \\ x+y=a \end{cases}$

12.- Obtener las ecuaciones de la recta tangente y recta normal a la curva $\begin{cases} x=sin4t \\ y=2sin^2 2t \end{cases}$ en el punto para el cual $\frac{d^2y}{dx^2}=-1$

Función: $\begin{cases} x=sin4t \\ y=2sin^2 2t \end{cases}$

Gráfica de la función:

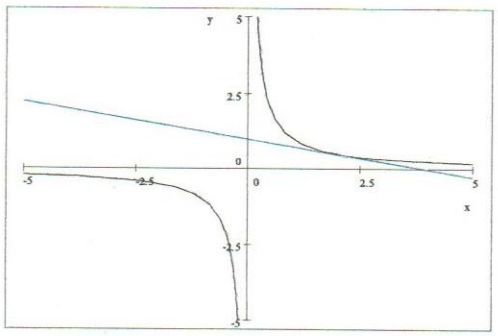


Respuesta: $y=2\,;x=0$

13.- Demostrar que el segmento de tangente a la hipérbola $xy = 1$ limitado por los ejes de coordenadas, queda dividido en partes iguales por el punto de tangencia.

Función: $xy = 1$

Gráfica de la función:

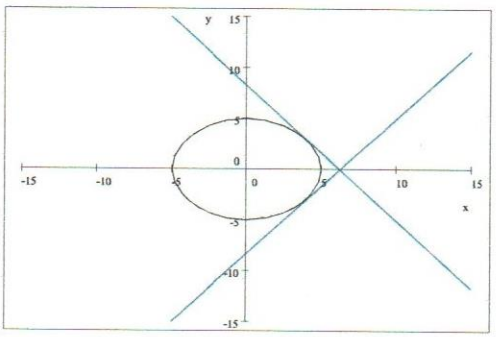


Respuesta: $y = -\frac{x}{{x_0}^2} + \frac{2}{x_0}$; $P_1\left(0, \frac{2}{x_0}\right)$; $P_2(2x_0, 0)$; $M(x_0, \frac{1}{x_0})$

14.- Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y las tangentes a la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto de abscisa 3.

Función: $x^2 + y^2 = 25$

Gráfica de la función:

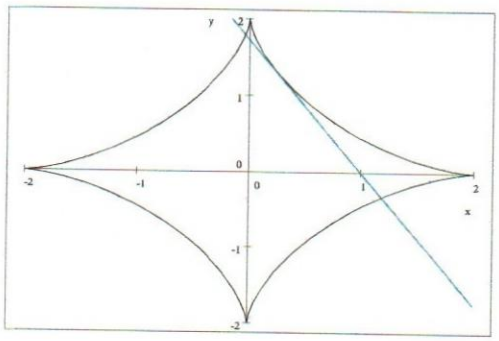


Respuesta: $A = \frac{625}{24}$

15.- Probar que el segmento de la tangente a la curva definida por $x = 2\cos^3 t$; $y = 2\sin^3 t$ limitado por los ejes de coordenados posee longitud constante.

Función: $x = 2\cos^3 t\,;\ y = 2\sin^3 t$

Gráfica de la función:

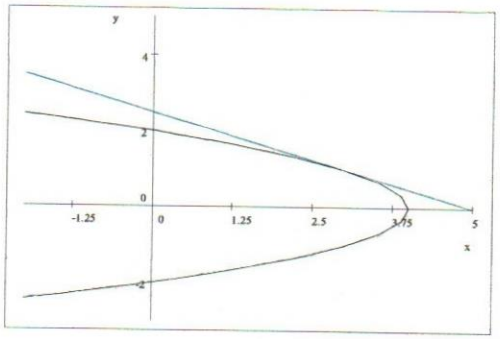


Respuesta: $L = 2$

16.- Calcular el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la curva $y^2 = 4 - x$ en el punto de abscisa 3, que se encuentra en el primer cuadrante.

Función: $y^2 = 4 - x$

Gráfica de la función:

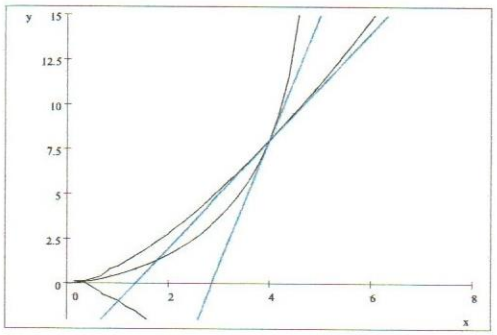


Respuesta: $A = \frac{25}{4}$

17.- Calcule el ángulo que forman las curvas $y^2 = x^3$ y $y^2 = \frac{x^3}{5-x}$ en el punto de intersección de ambas.

Función: $y^2 = x^3$ y $y^2 = \frac{x^3}{5-x}$

Gráfica de la función:

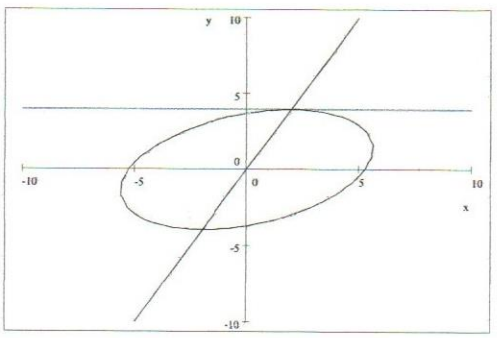


Respuesta: $\theta = \tan^{-1}\frac{2}{11}$

18.- Hallar el ángulo que forma la recta $y = 2x$ con la curva de ecuación $x^2 - xy + 2y^2 = 28$ en su punto de intersección con el primer cuadrante.

Función: $x^2 - xy + 2y^2 = 28$; $y = 2x$

Gráfica de la función:

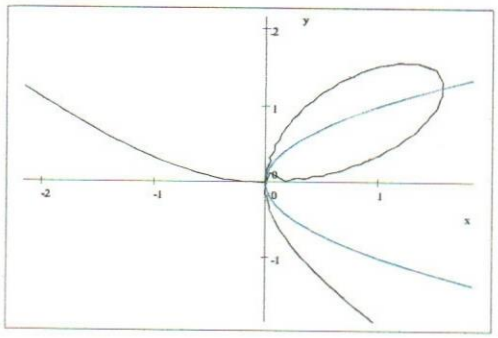


Respuesta: $\theta = \tan^{-1} 2$

19.- Demostrar que las tangentes a la curva $x^3 + y^3 = 3axy$ en sus puntos de intersección con la parábola $y^2 = ax$ son paralelas al eje Y.

Función: $x^3 + y^3 = 3axy$; $y^2 = ax$

Gráfica de la función:

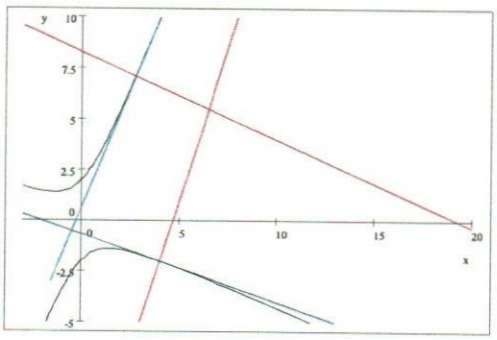


Respuesta: $x = 0$; $x = 2a\sqrt{a}$

20.-Hallar el área del triángulo formado por la recta tangente y la recta normal a la curva $x^2 + 2xy - y^2 + 4 = 0$, en los puntos para los cuales x=4 y el eje X.

Función: $x^2 + 2xy - y^2 + 4 = 0$

Gráfica de la función:



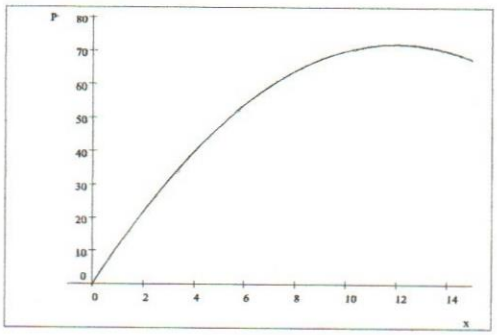
Respuesta: $A_1 = \frac{20}{3}$ $A_2 = \frac{14111}{203}$

PROBLEMAS PROPUESTOS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1.- La suma de un número con dos veces un segundo número es igual a 24. ¿Qué números habría que elegir para que su producto sea máximo?

Función a optimizar[3] $\begin{cases} P = xy \\ x + 2y = 24 \end{cases}$

Gráfica de la función[4]

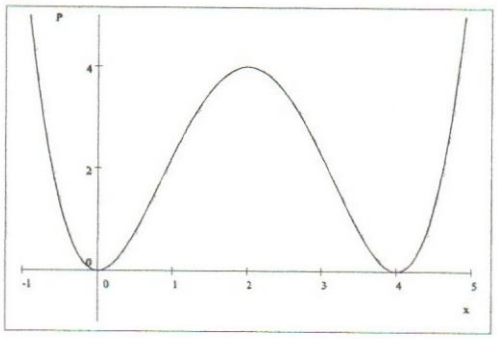


Respuesta: x=12 ; y=6

2.- Hallar dos números tales que el producto de sus cuadrados sea máximo y la suma de uno de ellos con el doble del segundo sea 4.

Función a optimizar $\begin{cases} x^2y^2 = p \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Gráfica de la función



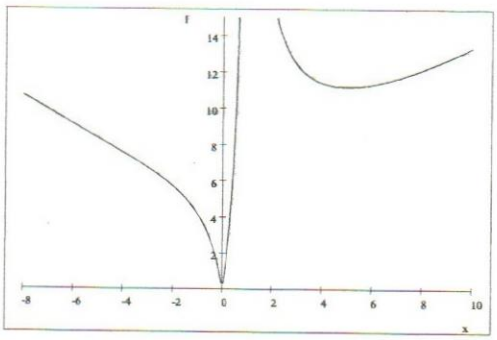
Respuesta: $x = 2; y = 1$

[3] En la función a optimizar se incluye la función principal y su condicionante.
[4] La gráfica incluye la relación entre la variable a optimizar y una de las variables independientes.

3.- Se desea hacer un trazado desde el eje X hasta el eje Y pasando por el punto A(1,8). ¿Cuál es la trayectoria más corta?.

Función a optimizar $\begin{cases} x^2 + y^2 = l^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{x-1}{8} \end{cases}$

Gráfica de la función

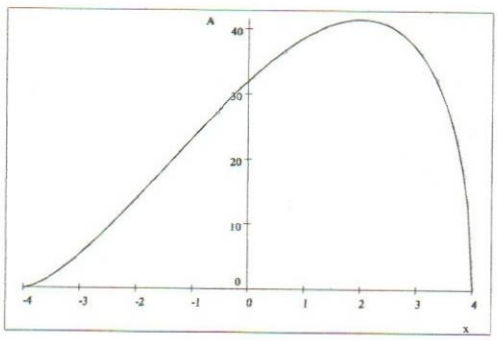


Respuesta: $l = 5\sqrt{5}$

4.- Se inscribe en un círculo de radio 4 un triángulo isósceles de área mínima. Calcule las dimensiones del triángulo.

Función a optimizar $\begin{cases} A = 2y(x+4) \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$

Gráfica de la función

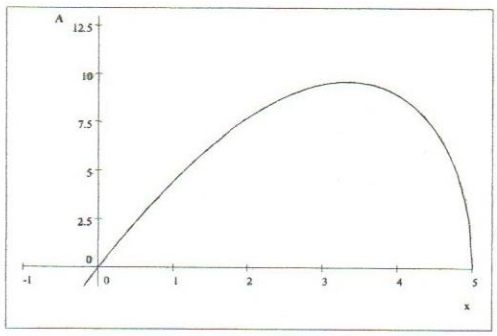


Respuesta: $base\ 2y = 4\sqrt{3}\ \ altura\ h = x + 4 = 6$

5.-De entre todos los triángulos isósceles de perímetro dado 10 ¿cuál es el que tiene área máxima?.

Función a optimizar $\begin{cases} A = y\sqrt{x^2 - \frac{y^2}{4}} \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

Gráfica de la función

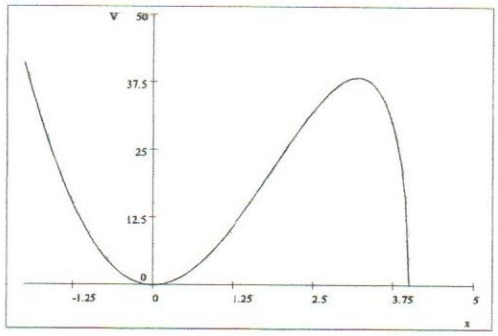


Respuesta: $triángulo\ equilátero\ de\ lado\ x = \frac{10}{3}\ y\ su\ área\ es\ A = \frac{25\sqrt{3}}{9}$

6.- Se rota un triángulo isósceles alrededor de su altura engendrando un cono de volumen máximo, si el perímetro del triángulo es 16, ¿cuáles deben ser las medidas de los lados del triángulo?.

Función a optimizar $\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{y^2 - x^2} \\ 2x + 2y = 16 \end{cases}$

Gráfica de la función

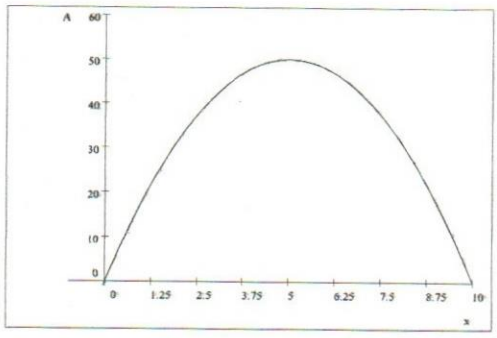


Respuesta: $triángulo\ equilátero\ de\ lado\ 2x = \frac{16}{3}$

7.- Se inscribe un cuadrilátero rectángulo en un triángulo rectángulo de catetos 10 y 20, de tal forma que dos de sus lados descansan sobre los catetos, determine las dimensiones del cuadrilátero para que su área sea máxima.

Función a optimizar $\begin{cases} A = xy \\ y = 2(10 - x) \end{cases}$

Gráfica de la función

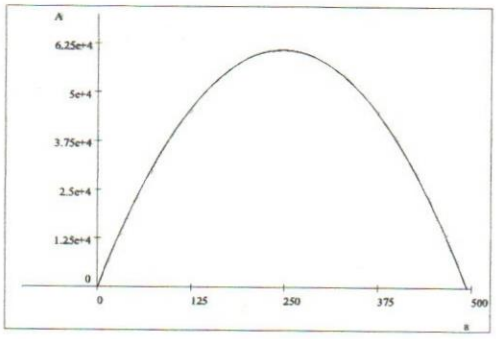


Respuesta: $x = 5\,;\, y = 10$

8.- Se quiere construir un galpón utilizando una esquina de dimensiones a=8m y b=4m. Si el perímetro del galpón es de 1000 m. ¿cuáles son las dimensiones de sus lados para que el área aprovechable sea máxima?.

Función a optimizar $\begin{cases} A = ab - 32 \\ a + b = 494 \end{cases}$

Gráfica de la función

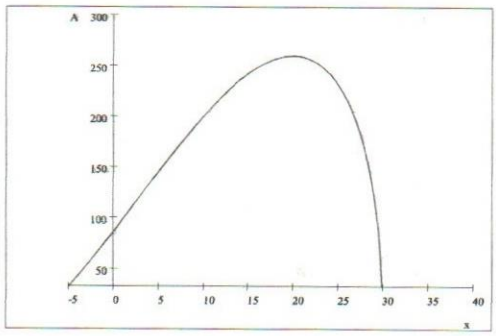


Respuesta: $x = 247\,;\, y = 247$

9.- De entre todos los trapecios que tienen tres lados iguales a 10 cm, ¿cuál es el que tiene área máxima?

Función a optimizar $\begin{cases} A = \frac{x+10}{2} y \\ y = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x-10}{2}\right)^2} \end{cases}$

Gráfica de la función

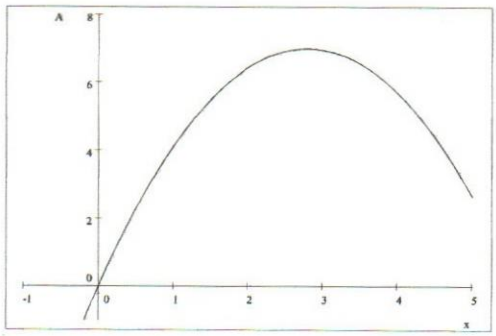


Respuesta: Base mayor x=20 y Área: $A = 75\sqrt{3}$

10.- Una ventana está formada por tres lados de un rectángulo y el cuarto lado ha sido sustituido por un semicírculo. El perímetro de la ventana es P, determine la longitud de los lados y el radio del semicírculo para que la cantidad de luz que atraviesa la ventana sea máxima.

Función a optimizar $\begin{cases} A = xy - \pi \frac{x^2}{8} \\ 2y + x + \pi \frac{x}{2} = p \end{cases}$

Gráfica de la función

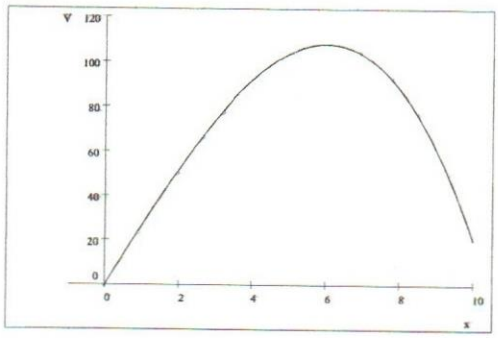


Respuesta: $x = \frac{20}{\pi+4}; y = \frac{10}{(\pi+4)}$

11.- Se construye una caja de base cuadrada y abierta con 108 m² de material. Halle las dimensiones de la caja que proporciona el mayor volumen.

Función a optimizar $\begin{cases} V = x^2y \\ 4xy + x^2 = 108 \end{cases}$

Gráfica de la función



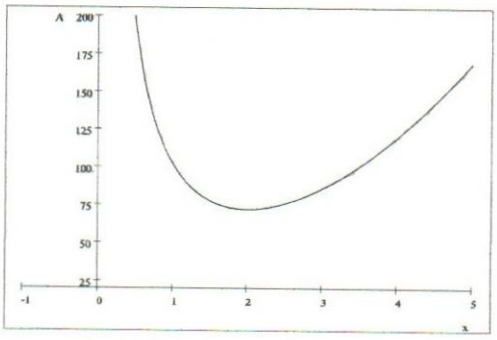
Respuesta: $x = 6; y = 3$

12.- Se necesita fabricar cajas para contener un volumen 36. Las dimensiones de la base deben ser de tal manera que su longitud sea el triple de su anchura. Encontrar las dimensiones de la caja que usa la menor cantidad de material para su fabricación.

Solución:

Función a optimizar $\begin{cases} A = 8xy + 6x^2 \\ 36 = 3x^2y \end{cases}$

Gráfica de la función

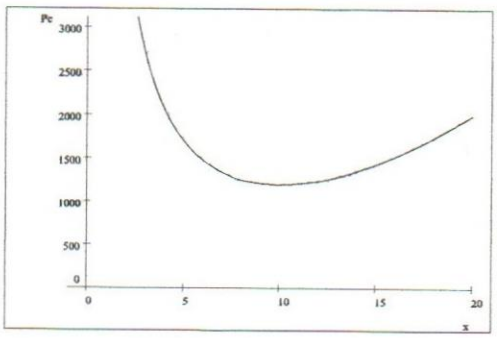


Respuesta: $x = 2; y = 3$

13.- En una cava de base cuadrada la disipación calórica por metro cuadrado es triple por la tapa que por las paredes laterales y la base. Si el volumen de la cava es de 2000 dm³, cuáles son las dimensiones que hacen que la pérdida de calor sea mínima?

Función a optimizar $\begin{cases} Pérdida\ calórica\ por\ m^2 = a;\ P_{c=}a(4x^2 + 4xy) \\ 2000 = x^2y \end{cases}$

Gráfica de la función

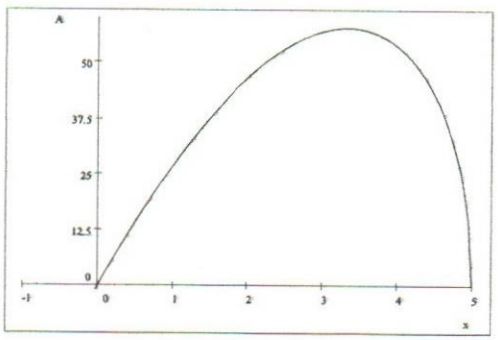


Respuesta: $x = 10; y = 20$

14.- Al construir un canal de forma de trapecio isósceles con la base superior abierta de longitud doble que la base menor y de perímetro 20m. ¿Cuáles deben ser las longitudes de los lados para que la que tenga la mayor sección posible?.

Función a optimizar $\begin{cases} A = \frac{4x+2x}{2}h \\ 20 = 2x + 2y \end{cases}$

Gráfica de la función

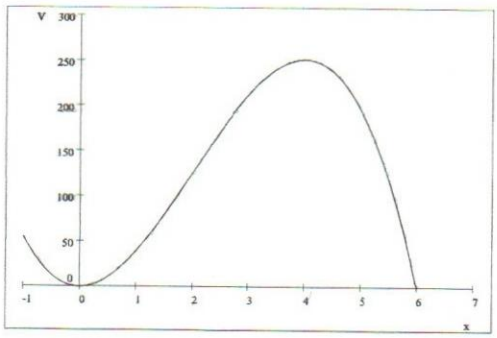


Respuesta: $2x = \frac{20}{3}; y = \frac{20}{3}$

15.- De un cono recto de radio 6 y altura 15 se extrae un cilindro circular recto de volumen máximo, halle las dimensiones del cilindro.

Función a optimizar $\begin{cases} V = \pi x^2 y \\ \frac{6}{6-x} = \frac{15}{y} \end{cases}$

Gráfica de la función

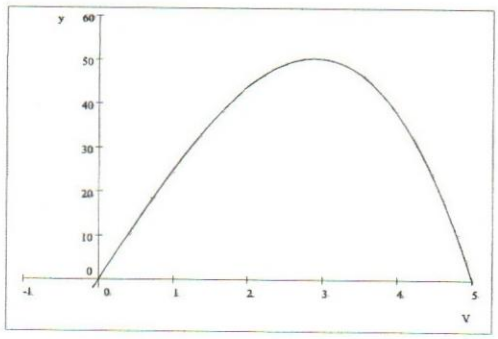


Respuesta: $x = 4; y = 5$

16.- Se van a fabricar vasos cónicos con papeles de forma circular de 5 cm de radio. Determine la altura del vaso que contendrá el mayor volumen posible.

Función a optimizar $\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi x^2 y \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

Gráfica de la función

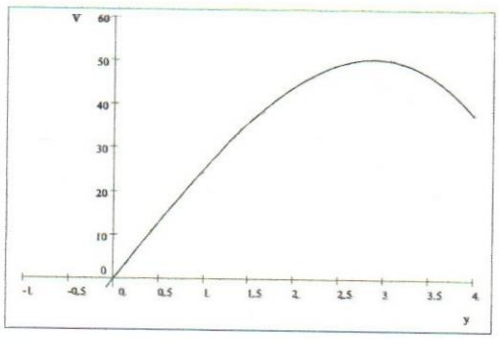


Respuesta: $x = \frac{5\sqrt{6}}{3} y = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

17.- Se inscribe un cono en una esfera de radio 10, ¿cuáles son las dimensiones del cono que hace máximo el volumen del cono?

Función a optimizar $\begin{cases} V = \frac{1}{3}\pi x^2 y \\ x^2 + (y-10)^2 = 100 \end{cases}$

Gráfica de la función

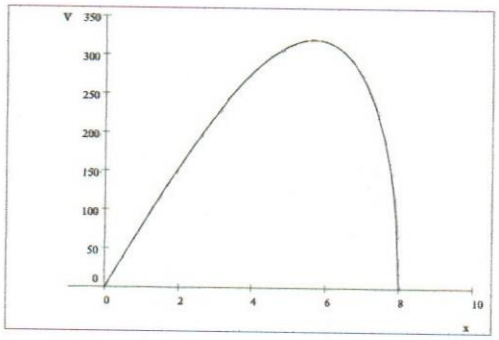


Respuesta: $x = \sqrt{\frac{100\sqrt{3}-25}{3}}; y = \frac{5}{\sqrt{3}}$

18.- Con troncos de árbol de forma cilíndrica se hacen columnas prismáticas paralepipédicas, con el mayor volumen posible. Si la longitud de los troncos de árbol es 10 y el radio 4, ¿cuáles serán las dimensiones de cada columna?.

Función a optimizar $\begin{cases} V = 10xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Gráfica de la función

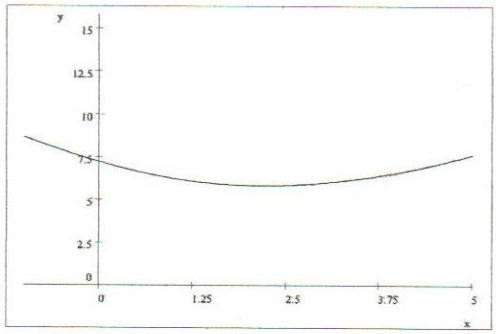


Respuesta: $x = 4\sqrt{2}; y = 4\sqrt{2}$

19.- Hallar un punto sobre el eje X, tal que la suma de las distancias a los puntos A(1,2) y B(4,3), sea mínima.

Solución:

Función a optimizar $y = \sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{(4-x)^2+9}$

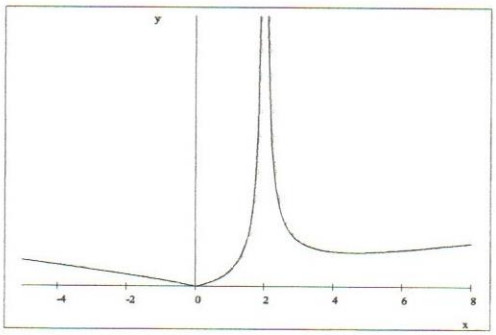
Gráfica de la 

función

Respuesta: $x = \frac{11}{5}; y = 0$

20.- Una pared debe ser apuntalada con una viga que partiendo del nivel del piso pase, apoyándose, sobre una pared que se encuentra a 2 metros de distancia de la primera y que tiene 3 metros de altura. ¿ Cuál será la longitud de la viga más corta posible?.

Función a optimizar $\begin{cases} L^2 = x^2 + y^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{x-2}{3} \end{cases}$

Gráfica de la función 

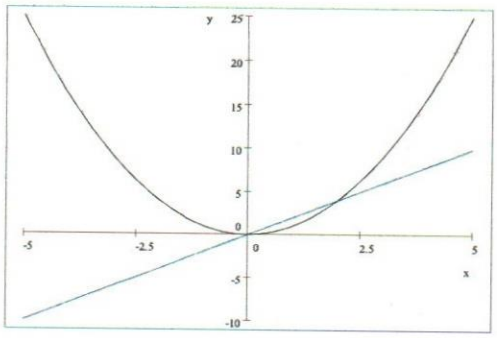
Respuesta: $l = \sqrt{\frac{\left(9+\sqrt[3]{18^2}\right)\left(2+\sqrt[3]{18}\right)^2}{\sqrt[3]{18^2}}}$

PROBLEMAS PROPUESTOS DE VARIABLES RELACIONADAS

1.- Un cuadrado tiene un perímetro de 4cm, la longitud de cada lado crece a razón de 1cm/minuto. Calcular la rapidez de cambio de su área, en dicho instante

Función a relacionar: $A = x^2$

Gráfica de la función:[5]

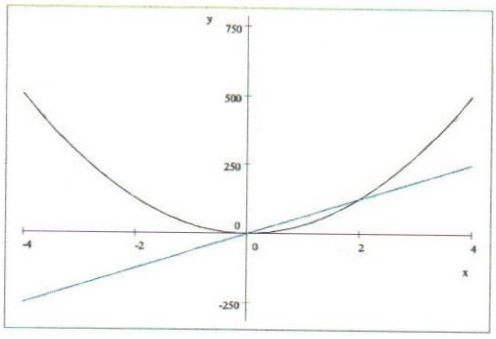


Respuesta: $\frac{dA}{dt} = 2cm^2/minuto$

2.- Un cilindro flexible de altura fija e igual a 10 cm, incrementa su radio a razón de 1cm/minuto, ¿con qué rapidez crece su volumen, en el instante en que su radio es 3cm?

Función a relacionar: $V = 10\pi x^2$

Gráfica de la función:



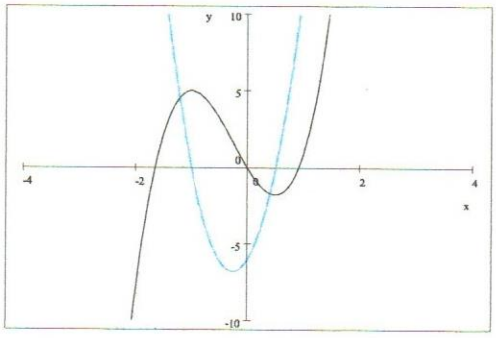
Respuesta: $\frac{dV}{dt} = 60\pi\ cm^3/minuto$

[5] En la gráfica, en negro la función a relacionar y en azul la función a encontrar, para los valores dados

3.- ¿En qué puntos de la curva $y = x^4 + x^3 - 3x^2$***, la razón de cambio de la pendiente de la recta tangente es nula?***

Función a relacionar: $m = \frac{dy}{dt} = 4x^3 + 3x^2 - 6x$

Gráfica de la función:



Respuesta: $A\left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{16}\right)$; B(-1,-3)

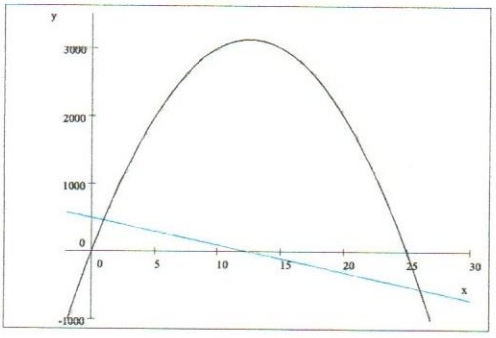
4.- Un fuego artificial se lanza verticalmente hacia arriba y su posición viene dada por $h = 500t - 20t^2$***. Encontrar:***

a) la velocidad del fuego a los 5 segundos de haber sido lanzado

b) el tiempo necesario para alcanzar la altura máxima.

Función a relacionar: $h = 500t - 20t^2$

Gráfica de la función:



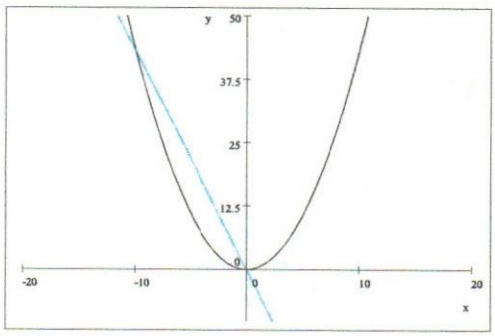
Respuesta: $a)\ \frac{dh}{dt} = 300\ {}^{cm}/_{s}$;

b) t=12,5 s.

5.-El lado de un triángulo equilátero decrece a razón de 5cm/min. ¿A qué razón crece su área cuando el lado del triángulo mide 20cm ?

Función a relacionar: $A = \frac{\sqrt{3}l^2}{4}$

Gráfica de la función:

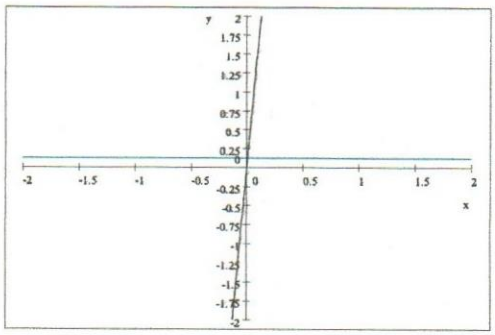


Respuesta: $\frac{dA}{dt} = -50\sqrt{3}\ cm^2/_s$.

6.- Se llena un depósito de forma prismática a razón de 2m³/min. Las dimensiones del tanque son 8m de largo por 2m de ancho y 4m de profundidad. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua en el depósito, cuando está lleno hasta los 3m?

Función a relacionar: $V = lah$

Gráfica de la función:

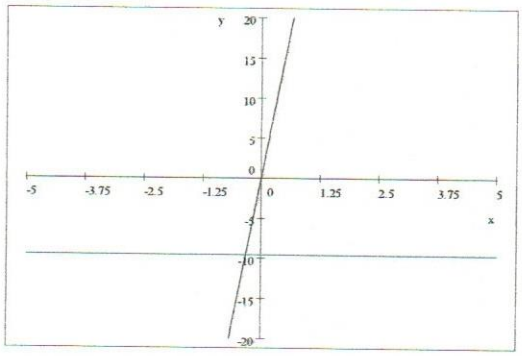


Respuesta: $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{8}\ m/_s$.

7.- Con una plancha de cartón de dimensiones 80 cm de largo por 60 cm de ancho, se hace una caja sin tapa. ¿Cómo varía el volumen de la caja con respecto al área de su base, cuando dicha área es de 3500 cm^2?

Función a relacionar: $V = Ah$

Gráfica de la función:

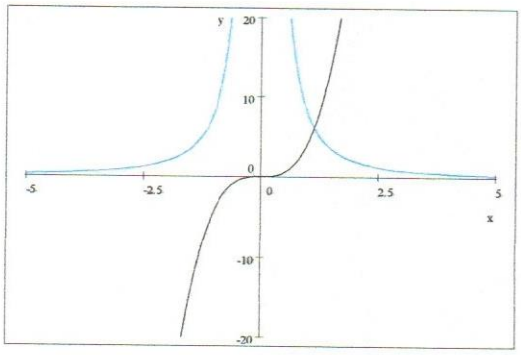


Respuesta: $\frac{dV}{dA} = -\frac{115}{12} cm^3/_{cm^2}$.

8.- Un globo se llena con helio a razón de 100litros/min; suponiendo que la presión del gas en el interior es constante, ¿cómo varía el radio del globo, cuándo éste llega a medir 3 dm?.

Función a relacionar: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Gráfica de la función:



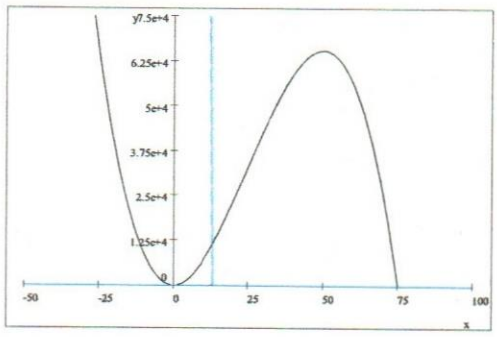
Respuesta: $\frac{dr}{dt} = \frac{25}{9\pi} dm/_{min}$.

9.- Un estanque tiene la forma de semiesfera de 50 cm de diámetro y entra agua a razón de 10 cm³/s. ¿A qué ritmo crece el nivel del agua en el instante en que está completamente lleno?

Se sabe que el volumen de un segmento esférico viene dado por $V = r\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$***, siendo r el radio de la esfera y h la altura del segmento esférico que está ocupado.***

Función a relacionar: $V = r\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$

Gráfica de la función:



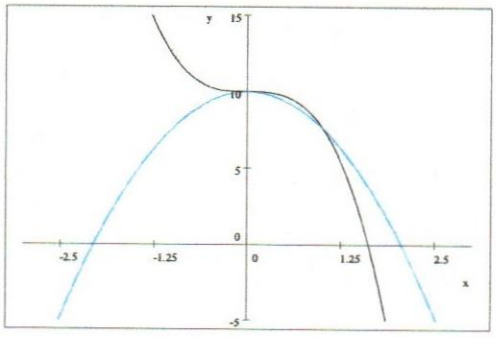
Respuesta: $\frac{dh}{dt} = \frac{2}{125\pi} cm/_s$.

10.- Una tolva cónica invertida, de 8 m de radio y 16 m de altura se llena de cemento a razón de 10m³/min. Por su vértice inferior está saliendo cemento y se determina que cuando la profundidad es de 3m el nivel del cemento presente se eleva a razón de 1/3 m/min. Calcular la cantidad de cemento que abandona la tolva por minuto.

Nota: Volumen presente = Volumen entrante – Volumen saliente

Función a relacionar: $\begin{cases} V_p = V_e - V_s \\ V_s = V_e - \frac{1}{12}\pi h^3 \end{cases}$

Gráfica de la función:

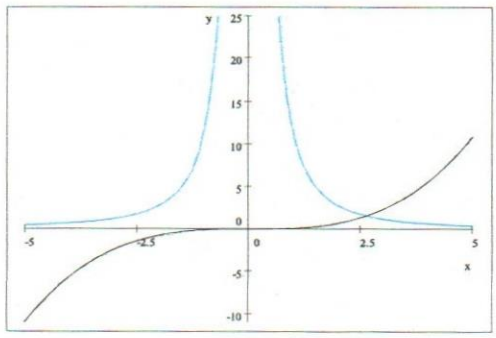


Respuesta: $\frac{dV_s}{dt} = \frac{40-3\pi}{4} cm^3/_{min}$.

11.- Se acumula arena a razón de $3m^3/min$ formando una pila cónica cuyo diámetro de la base es siempre el triple de su altura. ¿Con qué rapidez crece la altura de la pila cuando éste alcanza a los 4 m?.

Función a relacionar: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Gráfica de la función:

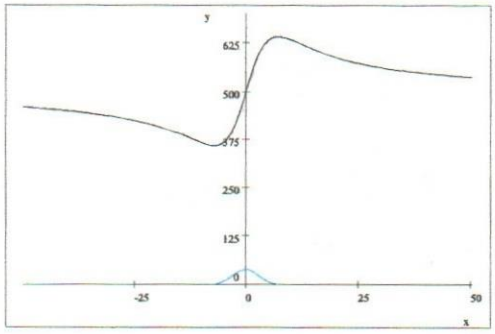


Respuesta: $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{12\pi} {}^{m}/_{min}$.

12.-En un caldo de cultivo se introduce una población de 500 bacterias, las cuales crecen en número de acuerdo a la ecuación $P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50+t^2}\right)$, donde t se mide en horas. ¿A qué velocidad crece la población de las bacterias después de 5 horas?

Función a relacionar: $P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50+t^2}\right)$

Gráfica de la función:

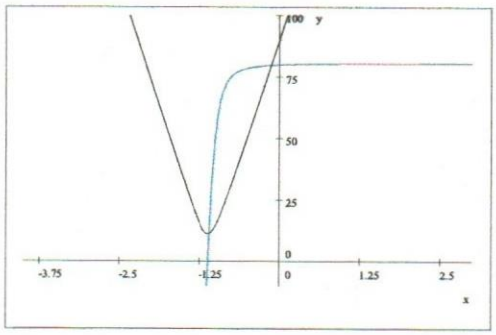


Respuesta: $\frac{dP}{dt} = \frac{80}{9} {}^{bacterias}/_{h}$.

13.- Dos carros se mueven por dos carreteras perpendiculares a velocidades de 80km/h y 100km/h. En un instante determinado uno de los carros llega a la intersección de las vías y el otro carro se encuentra a 90 km. ¿A qué velocidad crece la distancia entre ellos, pasada una hora?

Función a relacionar: $L^2 = (90 + 80t)^2 + 100t^2$

Gráfica de la función:

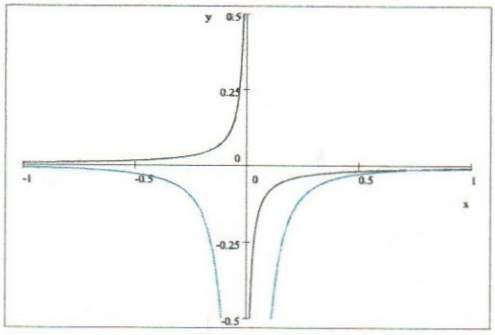


Respuesta: $\frac{dL}{dt} = \frac{1370}{\sqrt{290}} km/_h$.

14.- Un avión que se encuentra a 5 km de altura con respecto a un observador observa que el ángulo de elevación de sus ojos con respecto a la posición del avión cambia en función de la velocidad del avión. Si la velocidad del avión es 600km/h. A qué velocidad cambia el ángulo de elevación cuando el mismo es de 30º.

Función a relacionar: $\tan\alpha = \frac{5}{vt}$

Gráfica de la función:

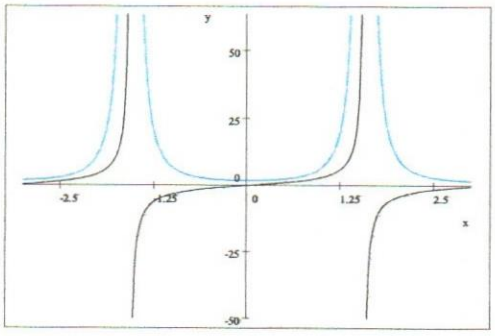


Respuesta: $\frac{d\alpha}{dt} = 30\,^{0}/_{h}$.

15.- Un faro se localiza en una pequeña isla a 2km de una costa recta. El haz luminoso del faro gira a una velocidad constante de π/30 rad/s. Cuando la luz ilumina un punto a 3 km de la horizontal con respecto al punto más cercano al faro sobre la costa, ¿con qué rapidez se mueve el haz de luz en ese momento?

Función a relacionar: $x = 2\tan\alpha$

Gráfica de la función:

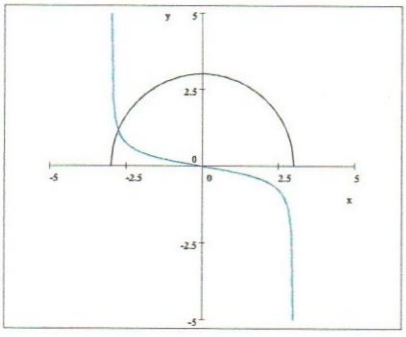


Respuesta: $\frac{dx}{dt} = 13\pi\frac{km}{min}$.

16.- Una escalera se encuentra apoyada en una pared. La parte inferior se aleja de la pared a razón de 50cm/min. Si la escalera tiene una longitud de 3 m y su pie se encuentra a 1m de la parte inferior de la pared. ¿A qué velocidad se desplaza su parte superior cuando el pie de la escalera se encuentra a 1,5 m de la pared?.

Función a relacionar: $x^2 + y^2 = 9$

Gráfica de la función:

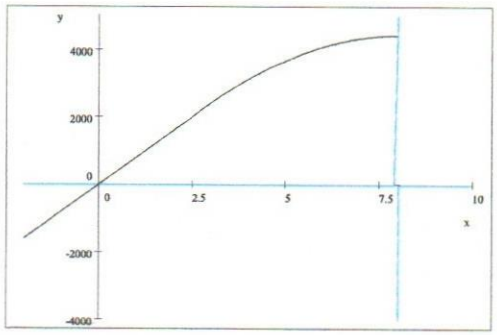


Respuesta: $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}{}^{m}/_{min}$.

17.- Una piscina tiene por dimensiones 40 m de largo por 20 de ancho, 8 m de alto en uno de los extremos y va descendiendo en forma constante hasta el otro extremo que tiene 3 m. Se llena por medio de una bomba que arroja 40m³/h. Calcular con rapidez crece el nivel del agua cuando está llena hasta los 5 m.

Función a relacionar: $V_p = \begin{cases} 800y \text{ si } y \leq 3 \\ 2400 + 10(104 - 8y)(y - 3) \text{si } y > 3 \end{cases}$

Gráfica de la función:



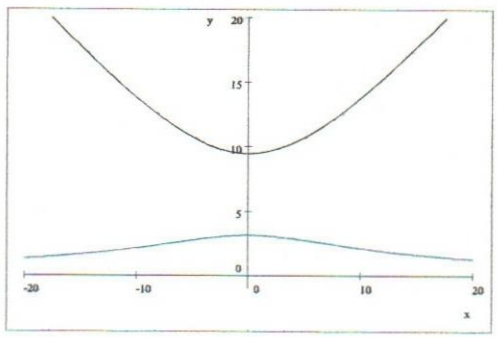
Respuesta: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{12} {}^{m}/_{h}$.

18.- En un juego de beisbol, un jugador se encuentra corriendo de la primera a la segunda base a razón de 30 pies/s. ¿con qué velocidad cambia su distancia al home cuando se encuentra a 40 pies de la segunda base?

El cuadro de las bases es un cuadrado de 90 pies de lado.

Función a relacionar: $d = \sqrt{90^2 + x^2}$

Gráfica de la función:

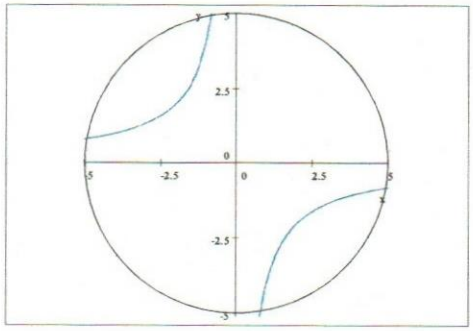


Respuesta: $\frac{dd}{dt} = \frac{150}{\sqrt{106}} {}^{pies}/_{s}$.

19.- Un móvil se desplaza por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, cuando se encuentra en el punto A(3,4), la velocidad con que aumenta la abscisa es de 4 u/s. ¿ Con qué rapidez varía su ordenada y cuál es la ecuación de la recta tangente en ese instante?

Función a relacionar: $25 = y^2 + x^2$

Gráfica de la función:

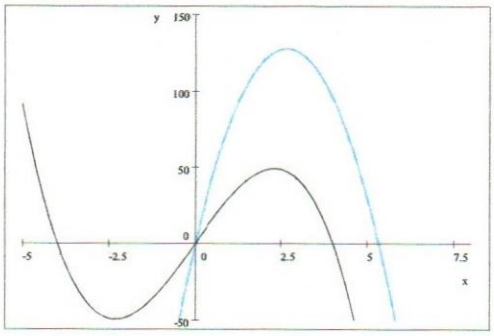


Respuesta: $\frac{dy}{dt} = -3\,{}^{u}/_{s}$. recta tangente: $3x + 4y = 25$

20.- Un rectángulo tiene su base inferior sobre el eje x y sus otros dos vértices sobre la curva $y = 16 - x^2$. Si en un instante determinado la base es igual a 4cm y aumenta a razón de 3cm/min, ¿cómo varía su área?.

Función a relacionar: $A = 2x(16 - x^2)$

Gráfica de la función:



Respuesta: $\frac{dA}{dt} = 24cm^2 \,/\, s$.

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Altura: Segmento de perpendicular trazado desde un punto, llamado vértice, a una recta, llamada base

Ángulo: Parte del plano limitado por dos semirectas de origen común.

Bisectriz: Semirecta que divide al ángulo en ángulos iguales.

Polígono: Parte del plano limitado por una línea poligonal cerrada. Cada uno de los segmentos de la línea poligonal se denomina lado del polígono. La intersección de cada dos segmentos se define como vértice.

Triángulo: Polígono de tres lados.

Clasificación de los triángulos:

a) **Por sus lados**: Equilátero, tres lados iguales. Isósceles: dos lados iguales. Escaleno, triángulo en general
b) **Por sus ángulos**: Acutángulo, tres ángulos agudos. Rectángulo, un ángulo recto. Obtusángulo, un ángulo obtuso.

Triángulos congruentes o iguales: Triángulos que tienen los tres lados y los tres ángulos de uno de los triángulos con los tres lados y los tres ángulos correspondientes de otro triángulo, iguales.

Criterios de congruencia: Dos triángulos son congruentes si:

a) Los tres lados de uno son iguales a sus correspondientes en el otro.
b) Dos lados de uno son iguales a dos lados del otro triángulo y los ángulos comprendidos por dichos lados son también iguales.
c) Si tienen un lado igual e iguales los ángulos adyacentes a dicho lado.

Semejanza: Dos triángulos se dicen semejantes si los ángulos de uno de los triángulos son iguales a los ángulos del otro triángulo y los lados correspondientes proporcionales.

Razón: Cociente entre dos cantidades referidas a la misma unidad.

Proporción: Igualdad entre dos razones.

Criterios de semejanza: Dos triángulos son semejantes si:

a) Los tres lados de uno son proporcionales a sus correspondientes en el otro.
b) Dos lados de uno guardan proporción a dos lados del otro triángulo y los ángulos comprendidos por dichos lados son iguales.
c) Si tienen sus tres ángulos iguales.

Cuadrilátero: Polígono de cuatro lados.

Clasificación de los cuadriláteros:

1) **Paralelogramos:** Cuadriláteros con sus lados opuestos paralelos.
   Clasificación de los paralelogramos:
   a) **Cuadrado:** lados y ángulos iguales
   b) **Rectángulo:** Ángulos iguales. (rectos)
   c) **Rombo:** Lados iguales
   d) **Romboide:** paralelogramo en general.
2) **Trapecios:** Un par de lados paralelos, llamados bases.
   Clasificación de los trapecios:
   a) **Rectángulo:** Dos ángulos rectos.
   b) **Isósceles:** Dos lados iguales.
   c) **Escaleno:** Trapecio en general.
3) **Trapezoide:** Cuadrilátero en general

Circunferencia: Curva cerrada y plana, cuyos puntos equidistan de un punto interior. La distancia se denomina radio y el punto interior centro.

Arco: Parte de la circunferencia limitada por dos puntos.

Cuerda: Segmento limitado por dos puntos de la circunferencia. El diámetro es la mayor de las cuerdas y equivale a dos radios.

Círculo: Parte del plano limitada por una circunferencia.

Sector circular: Parte del círculo limitado por dos radios.

Segmento circular: Parte del círculo limitado por una cuerda y su arco.

Perímetro: Suma de las longitudes de los lados de un polígono.

Perímetro de la circunferencia: longitud de una circunferencia. $L = 2\pi r$.

Área: Medida de la superficie ocupada por una figura plana.

Área del triángulo: Es igual a un medio del producto de un lado cualquiera, tomado como base, por su altura correspondiente. $A = \frac{bh}{2}$.

Área del paralelogramo: Resultado de multiplicar la base por su altura. $A = bh$.

Área del cuadrado: Resultado obtenido al elevar al cuadrado su lado. $A = a^2$

Área del rombo: Equivale al semiproducto de sus dos diagonales. $A = \frac{dd'}{2}$.

Área de un trapecio: Es igual al producto de la semisuma de sus bases por la distancia entre las bases, (altura).$\boldsymbol{A = \frac{B+b}{2}h}$.

Área del círculo: Se obtiene al multiplicar el cuadrado de su radio por π. $\boldsymbol{A = \pi r^2}$.

Área de un sector circular: Equivale al semiproducto de la amplitud del ángulo del sector por el cuadrado del radio.$A = \frac{\alpha r^2}{2}$.

Área de un sector circular: semiproducto de la longitud del arco que abarca por el radio.$\boldsymbol{A = \frac{lr}{2}}$.

Teorema de Thales: Si dos rectas cualesquiera son cortadas por varias paralelas, los segmentos determinados en una de ella son proporcionales a los segmentos determinados sobre la otra.

Teorema de Euclides:

1) En todo triángulo rectángulo la altura es media proporcional entre los segmentos determinados sobre la hipotenusa.
2) En todo triángulo rectángulo un cateto cualquiera es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.

Superficie prismática: Superficie engendrada por una recta llamada generatriz, que se mueve permaneciendo paralela a sí misma y apoyándose sobre una línea poligonal llamada directriz

Prisma: Región del espacio situada dentro de una superficie prismática cerrada.

Área lateral de un prisma: Es la medida de la superficie lateral del prisma. Se obtiene al sumar las áreas de cada una de sus caras.

Área total del prisma: Es la medida del área lateral, y de las áreas de sus bases. Resultado que se obtiene de sumar el área lateral con las áreas de las bases.

Volumen de un prisma: Es la medida del espacio ocupado por un prisma. Se obtiene como resultado de multiplicar el área de la base del prisma, por la altura del mismo. $\boldsymbol{V = A_B H}$

Cilindro circular recto: Es el sólido obtenido por la rotación o revolución de uno de un rectángulo en torno a uno de sus lados.

Área lateral de un cilindro: Es la medida de su superficie lateral. Se obtiene al multiplicar la longitud de la circunferencia de su base por la altura del cilindro. $\boldsymbol{A_l = 2\pi r h}$

Área total: Resultado que se obtiene al sumar al área lateral las áreas de sus bases. $\boldsymbol{A_t = 2\pi r(r + h)}$.

Volumen de un cilindro: Es la medida del espacio ocupado por el cilindro. Se obtiene al multiplicar el área de su base por su altura correspondiente. $\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$

Cono de revolución: Es el sólido que se obtiene al girar un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos.

Área lateral del cono: Equivale al área de un sector circular de arco la longitud de su base y de radio la generatriz del cono. $\boldsymbol{A_l = \pi r g}$.

Área total del cono: Resultado que se obtiene al sumar al área lateral el área de la base del cono. $\boldsymbol{A_t = \pi r(r + g)}$

Volumen de un cono: Es la medida del espacio ocupado por el cono. Su valor es igual al producto de la tercera parte del área del círculo de su base por la altura del cono. $\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

Esfera: Es el sólido que se obtiene por la rotación o revolución de un semicírculo en torno a su diámetro.

Área de la esfera: Equivale a cuatro veces su círculo máximo. $\boldsymbol{A = 4\pi r^2}$.

Volumen de una esfera: Es igual a la tercera parte de la superficie esférica por su radio. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Función: Es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D, exactamente un elemento y de un conjunto E. $\boldsymbol{y = f(x)}$

Dominio de la función: Es el conjunto de los elementos x de D.

Rango de la función: Es el conjunto de elementos y de E que son imagen de los x de D.

Recta tangente a una curva: Se define como recta tangente a una curva en un punto P, a la recta que tiene por pendiente la derivada de y con respecto a x en dicho punto y contiene al punto P. $\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$.

Valores máximos y mínimos absolutos: Se define como máximo absoluto de una función continua en un dominio D al punto $P(x_0, y_0)$para el cual se cumple que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x en D. Y se define como mínimo absoluto al punto $P(x_0, y_0)$ para el cual se cumple que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x en D.

Valores máximos y mínimos locales: Se dice que f(x) tiene máximo local en un punto $P(x_0, y_0)$ en el dominio D si $f(x) \leq f(x_0)$ para un intervalo abierto que contenga a x_0 . Se dice que f(x) tiene mínimo local en un punto $P(x_0, y_0)$ en el dominio D si $f(x) \geq f(x_0)$ para un intervalo abierto que contenga a x_0..

Razón de cambio: Se define como razón de cambio de una variable y, con respecto de otra variable x, en un punto P, a la rapidez con que varía y con respecto a x, en dicho punto. $\boldsymbol{r} = \frac{dy}{dx}$ en P.

CONCLUSIÓN

Como se habrá dado cuenta el lector los ejercicios o problemas aquí expuestos no difieren de los que se encuentran en cualquier otro texto de cálculo, lo que varió fue la estrategia utilizada. No creo que sea la panacea que de una vez por todas haga de la resolución de problemas de aplicación un tema liviano. Lo que es complicado por sí mismo no se puede hacer no complicado, lo que se puede hacer es facilitar su entendimiento. Adicionalmente es imposible poder resolver ejercicios o problemas sin primeramente tener conceptos claros. Tuve la suerte de conocer en mis estudios a un docente que una vez nos dijo: "*Con conceptos bien claros y asimilados es posible que no podamos resolver algunos problemas, pero lo que es seguro es que sin ellos, es imposible*".

Nuestros estudiantes en la mayoría de las veces se limitan en clase a seguir la exposición del profesor y tomar apuntes de la clase, creyendo que si entendieron lo que hizo el profesor es suficiente para empezar a resolver ejercicios o problemas. Hay que hacer entender que el aprendizaje es totalmente personal y que no puede ser suplido por ninguna otra estrategia.

Adicionalmente los docentes debemos involucrarnos más en enseñar a que el estudiante sea el hacedor de su propio aprendizaje que en ser los expositores exitosos de lo que sabemos.

Seguro que si llegamos a crear espacios para que el estudiante aprenda y convencemos a los alumnos que ellos son sus propios profesores, dejará de ser un tabú el slogan de que pasar cálculo a la primera es prácticamente imposible.

Murray H. Protter, C. B. (1980). Cálculo con geometría analítica. En C. B. Murray H. Protter, & c. l. versión en español por Hugo Pereyra, *Cálculo con geometría analítica* (3ra ed., pág. 872). Bogotá: Fondo Educativo Interamericano.

Pizano, M. C. (1995). Problemas resueltos de cálculo diferencial. En M. C. Pizano, *Problemas resueltos de cálculo diferencial* (pág. 400). Santafé de Bogotá: Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería.

Plana, J. L. (19?). Mil problemas de cálculo infinitesimal : resueltos y aplicados. En J. L. Plana, *Mil problemas de cálculo infinitesimal : resueltos y aplicados.* Madrid: Dossat.

Romás, J. d. (2007). Cálculo infinitesimal de una variable. En J. d. Romás, *Cálculo infinitesimal de una variable* (pág. 612). Madrid: McGraw Hill.

Ron Larson, R. P. (2006). Cálculo con geometría analítica. En R. P. Ron Larson, t. S. al.], & J. J. revisores técnicos María del Carmen Hano Roa, *Cálculo con geometría analítica.* México: McGraw-Hill.

Ruiz, C. P. (1998). Cálculo de una variable . En C. P. Ruiz, *Cálculo de una variable* . México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Sayehg, J. A. (2004). Problemario de geometría analítica y cálculo diferencial. En J. A. Sayehg, *Problemario de geometría analítica y cálculo diferencial* (pág. 723). Caracas.

Spivak, M. (1970). Cáculo infinitesimal . En M. Spivak, *Cálculo infinitesimal.* Barcelona: Reverté.

Stewart, J. (1998). Cálculo : transcendentes tempranas. En a. Stewart, t. a. GonzálezPozo, & r. t. Güerrero, *Cálculo : transcendentes tempranas.* México: International Thomson Editores.

Swokowski, E. W. (1989). Cálculo con geometría analítica . En E. W. Swokowski, M. O. traductores José Luis Abreu, r. t. al.], & r. e. Bocanegra, *Cálculo con geometría analítica* . México: Grupo Editorial Iberoamericana.