car 8183

UCAB Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA CENTRAL PADRE CARLOS G. PLAZA S.J.
CENTRO CULTURAL PADRE CARLOS G. PLAZA S.J.
BIBLIOTECA CENTRAL SALA DE REFERENCIA

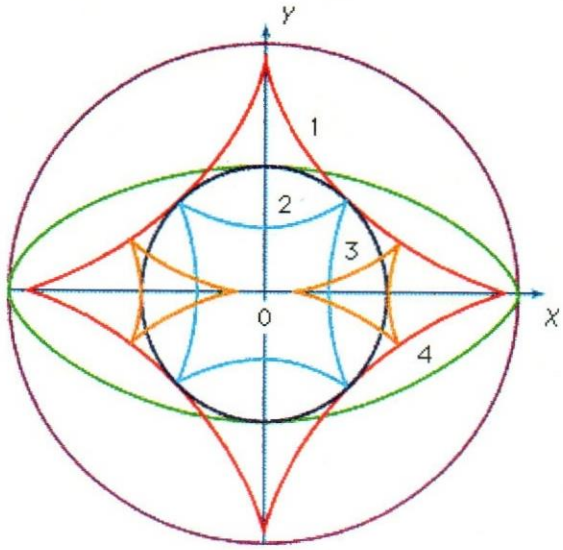
Trab
IC2010
E7

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

Facultad de Ingeniería

LAS CÓNICAS:

ENFOQUE GEOMÉTRICO Y CARTESIANO



©1994 Encyclopaedia Britannica, Inc.

Trabajo de Ascenso presentado ante la ilustre UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO por el Licenciado Roberto Escolar Abejón, para optar por la categoría de Profesor Asociado.

Dios en un arrebato de generosidad y de amor extendió sus manos y creó el Universo con formas caprichosas, en el que la danza de los sistemas formados por las estrellas y los planetas describen curvas hermosas en el espacio, que se repiten insistentemente en estilos parabólicos, elípticos e hiperbólicos

El espectáculo se completa con un sinfín de colores que recrean al ser humano en su aceptación de la existencia de un ser sobrenatural.

Roberto Escolar

Caracas Marzo de 2010

Agradecimientos

- A todos y cada uno de los estudiantes que han pasado por mis aulas y han dejado huella en mi vida y a los que dediqué y dedico toda mi existencia.
- A mi esposa que es mi inspiración en todo lo que me propongo o hago.
- A mis hijos por manifestarme la admiración que sienten por su padre, reflejado en sus logros profesionales y personales.
- A los profesores colegas de la UCAB por ofrecerme en todo momento un ambiente propicio para el trabajo y la amistad
- A todos los que me acompañaron en los inicios de la UCAB-Guayana.
- A mi ahijada, quien me estimuló con fuerza para que este trabajo se realizara.
- A la UCAB, con lo que esa palabra significa, por darme la oportunidad de entregar mi vida a la formación de profesionales.
- A Dios que es el principio y fin de cada uno de nosotros.

Índice General

Agradecimientos ii

Índice General iii

Índice de Figuras iv

Introducción vi

CAPITULO I 1

Evolución histórica de las cónicas y sus protagonistas 1

Menecmo 2
Euclides 5
Apolonio 9
Arquímedes 18
Descartes (René) 24
Fermat (Pierre de) 30
Witt (Jan de) 34
Dandelin (Germinal Pierre) 37
Otros estudiosos de las cónicas 39
Pappus 39
Desargues, Gérard 39
(Lyon, 1591 - Lyon, 1661). 39
Pascal 40
Simson 41
Poncelet 41
Newton 42
Euler 43
Brianchon 44

CAPITULO II 45

Distintos enfoques en el desarrollo de las cónicas 45

¿Cómo lo hizo Menecmo? 46
La generación de las cónicas de Apolonio 53
Arquímedes y su ley de oro aplicada a las cónicas 59
Descartes y Fermat & tamreF y setracseD 66
Dandelin: La conjunción entre lo geométrico y lo analítico 76

Conclusión 83

Bibliografía 84

Índice de Figuras

Figura 1 Ubicación geográfica 1
Figura 2 Oráculo de Delos 2
Figura 3 Cono: rectángulo u ortotoma. Elaboración propia 4
Figura 4 Cono: acutángulo u oxítona Elaboración propia 4
Figura 5 Cono: obtusángulo o amblitoma Elaboración propia 4
Figura 6 Euclides 5
Figura 7 Livro I. Proposição 47 *O Teorema de Pitágoras* séc. IX 8
Figura 8 Apolonio 9
Figura 9Archimeris Opera, Apollonii Perga conicorum libri III Edición de I. Barrow (Londres,1675) 10
Figura 10 Ilustraciones procedentes de la Biblioteca del Real Instituto y observatorio de la Armada de San Fernando (Cádiz) 10
Figura 11 Cónicas de Apolonio. Elaboración propia 12
Figura 12 Gráficas de las cónicas por medio de áreas. Elaboración propia 17
Figura 13 Arquímedes 18
Figura 14 El Palimpsesto 18
Figura 15 Asedio de Siracusa 20
Figura 16 Tornillo de Arquímedes 21
Figura 17 Rueda dentada 21
Figura 18: Parábola de Arquímedes. Elaboración propiaArquímedes 22
Figura 19 22
Figura 20.Método de la balanza. Elaboración propia 22
Figura 21. René Descartes 24
Figura 22. René Descartes en su escritorio 24
Figura 23. Discurso del Método 27
Figura 24. Pierre de Fermat 30
Figura 25. Varia Opera Mathematica de D. P. de Fermat 31
Figura 26. Fermat por R. Lefevre 31
Figura 27. Jan de Witt 34
Figura 28. G. Pierre Dandelin 37
Figura 29. Esferas de Dandelin 38
Figura 30: composición 45
Figura 31: media geométrica. Elaboración propia 47
Figura 32: Duplicación del cubo 1. Elaboración Propia 48
Figura 33: Duplicación del cubo 2. Elaboración propia 49
Figura 34: Duplicación del cubo 3. Elaboración propia 49
Figura 35: fusión 1,2,3. Elaboración propia 49
Figura 36: Parábola de Menecmo 1. Elaboración propia 50
Figura 37: Parábola de Menecmo 2. Elaboración propia 51

Figura 38: Parábola de Apolonio. Elaboración propia 54
Figura 39: Parábola de Apolonia 2. Elaboración propia 55
Figura 40: Relación de Apolonio. Elaboración propia 56
Figura 41: Método de Áreas, Parábola. Elaboración propia 57
Figura 42: Método de Áreas, Elipse. Elaboración propia 58
Figura 43: Método de Áreas, Hipérbola. Elaboración propia 58
Figura 44: Teorema 1 , Arquímedes. Elaboración propia 59
Figura 45: Teorema 2, Arquímedes. Elaboración propia 60
Figura 46: Parábola de Arquímedes. Elaboración propia 61
Figura 47: Método de la Palanca, Arquímedes. Elaboración propia 62
Figura 48:Método de la Palanca, Arquímedes. Elaboración propia 63
Figura 49: Elipse como L.G.. Elaboración propia 67
Figura 50: Hipérbola como L.G.. Elaboración propia 68
Figura 51: Parábola como L.G.. Elaboración propia 69
Figura 52: Elipse : Punto- Circunferencia. Elaboración propia 72
Figura 53: Hipérbola: Punto-Circunferencia. Elaboración propia 73
Figura 54: Esferas de Dandelin, Elipse. Elaboración propia. 77
Figura 55:Esferas de Dandelin, Hipérbola. Elaboración propia 78
Figura 56: Esfera de Dandelin, Parábola. Elaboración propia 79
Figura 57: Esferas de Dandelin, relación angular. Elaboración propia 80
Figura 58: Esferas de Dandelin, relación angular. Elaboración propia 81
Figura 59: Esferas de Dandelin, Secciones. Elaboración propia 82

Introducción

Como docente de matemática y amante de la geometría siempre tuve interés por realizar un estudio de las cónicas desde el punto de vista geométrico, razón por la cual me propuse realizar una investigación con la finalidad de identificar a los matemáticos que de alguna manera contribuyeron en el estudio de las cónicas y poder así recolectar evidencias que me permitieran sustentar la hipótesis de que el estudio de las cónicas desde el punto de vista geométrico resultaba más conveniente y práctico que el estudio analítico de las mismas.

Debo confesar que luego de revisar los trabajos que sobre las cónicas han sido realizados por otros investigadores, he tenido que reconocer que la hipótesis sobre el enfoque geométrico parece no ser verdadera, por una parte debido a la poca precisión que se puede apreciar en la mayoría de los documentos consultados que impide la comprensión total de ciertas conclusiones relativas a las cónicas y por otra parte a la complejidad que tiene el estudio geométrico de las cónicas en comparación con el estudio analítico.

Sin embargo, lejos de perder el interés por el tema decidí reorientar el trabajo de investigación, y fue así como surgió la idea de dividirlo en dos partes.

En la primera parte se presentan en forma breve las biografías de algunos matemáticos que se encuentran de manera casual o intencional vinculados al estudio de las cónicas.

La finalidad de la primera parte del trabajo es identificar no sólo los autores sino el tiempo y espacio donde se dieron origen las cónicas como objetos de estudio y la evolución del estudio de las cónicas desde Menecmo (350 A.C.), hasta Dandelin (1794-1847).

El conocimiento de la historia nos permite puntualizar varios aspectos: en primer lugar que el hombre tuvo un acercamiento al estudio de las cónicas en la etapa de la historia conocida como la edad antigua (hasta el V D.C.) período durante el cual se puede destacar algunos aportes hechos por los griegos, entre ellos Menecmo (350 A.C.), Euclides (325 A.C – 265 A.C), Apolonio (262 A.C. - 190 A.C.), y Anguímedes (287 A.C. – 212 A.C.), quienes en su mayoría llegaron a las mismas de manera casual mientras trataban de dar solución a algunos de los problemas matemáticos que había dejado la geometría de Euclides sin resolver tal como es el sofisma de la duplicación del cubo con regla y compás.

Cabe destacar que al igual que ha ocurrido con otros descubrimientos en el campo de la Matemática las cónicas tal como se conocen en nuestros días han sido el resultado de la búsqueda que el hombre ha hecho de soluciones a problemas de su cotidianidad.

En la segunda parte del trabajo se tiene como propósito reflexionar sobre la forma como los distintos matemáticos llegaron a determinar la secciones cónicas usando los recursos que tenemos hoy día. Algunos aspectos característicos de las cónicas que fueron estudiados por los matemáticos y que fueron parte de la evolución del estudio de las cónicas que según el autor pueden ser incorporados para su análisis y estudio en las asignaturas de geometría y análisis, según sea el tratamiento geométrico o analítico que se pueda dar a los mismos, en la escuela de educación con el propósito de no sólo transmitir a los estudiantes la importancia histórica que tienen las secciones cónicas sino de nutrir de alguna manera el "reduccionismo anémico" en el que se ha convertido el tema del estudio de las cónicas en cursos de análisis matemático.

CAPITULO I

Evolución histórica de las cónicas y sus protagonistas

Figura 1 Ubicación geográfica

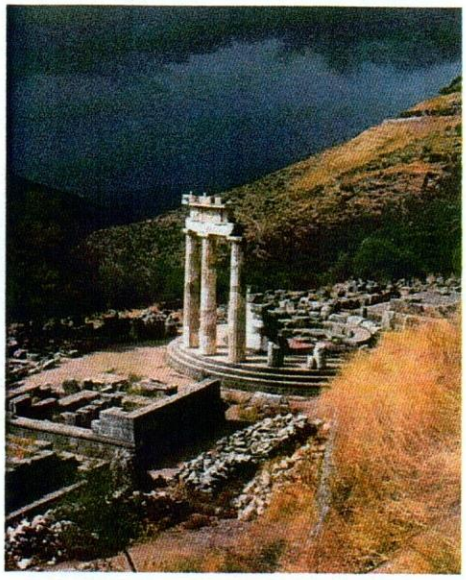


Figura 2 Oráculo de Delos

Menecmo

(350 A.C)

Apeconesso (actualmente Turquía)

Se cree que fue Menaechmus (Menecmo) de Grecia, alumno de Eudoxio, el primero en hacer alusión a las cónicas como consecuencia de su interés en el problema de construir con regla y compás un cubo de volumen doble al de un cierto cubo dado o también llamado problema de Delos[1], que es considerado el segundo de los tres problemas no resueltos de la época (la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo).

Cuenta la leyenda que:

"...la peste se llevó una cuarta parte de la población ateniense y la profunda impresión que produjo esta catástrofe fue probablemente el origen del segundo problema..." (Collete 1986)

"...Se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delos, para preguntar cómo podría conjurarse la peste, a lo que el oráculo contestó que era necesario duplicar el altar cúbico dedicado a Apolo. Al parecer los atenienses duplicaron las dimensiones del altar,

[1] En la ciudad de Delfos había un gran recinto sagrado dedicado principalmente al dios Apolo que tenía en el centro su gran templo, al que acudían los griegos para preguntar a los dioses sobre cuestiones inquietantes. Situado en Grecia, en el emplazamiento de lo que fue la antigua ciudad llamada Delfos (que hoy ya no existe), al pie del monte Parnaso, en medio de las montañas de la Fócida.

pero esto no sirvió para detener la peste, obviamente habían aumentado ocho veces su volumen en lugar de dos..."

Fue Hipocrátes de Chios quien demostró que se podría conseguir la duplicación del cubo siempre que se pudiera encontrar curvas que cumplieran con la relación a/x=x/y=y/2a.

Menecmo halló dichas curvas, llamadas la «*Triada de Menecmo*», como secciones en un cono generadas mediante planos perpendiculares a las generatrices.

En la época sólo se consideraban conos circulares rectos. Si el ángulo en el vértice del cono es recto u ortotoma, la sección producida resulta ser una parábola; si el ángulo en el vértice es agudo u oxitona, la sección producida es una elipse y si el ángulo en el vértice es obtuso o amblitoma, la sección producida es una rama de la hipérbola.

Sin embargo es necesario destacar que los nombres de parábola, elipse e hipérbola fueron creados posteriormente por Apolonio.

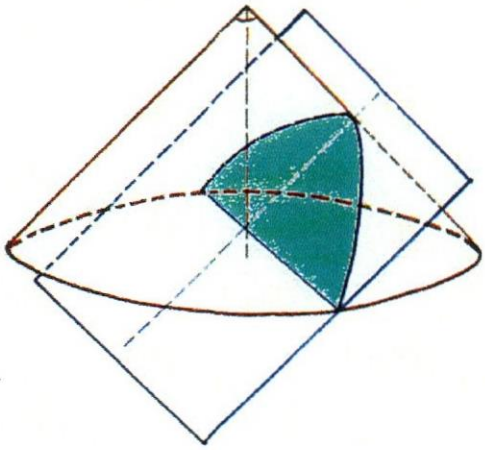
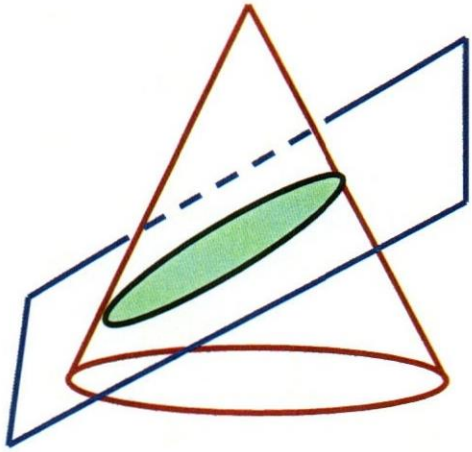


Figura 3 Cono: rectángulo u ortotoma. Elaboración propia

Sección cónica : Parábola

Figura 4 Cono: acutángulo u oxítona Elaboración propia



Sesión cónica: elipse

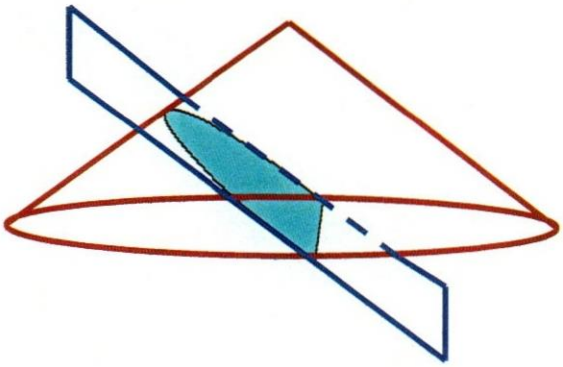


Figura 5 Cono: obtusángulo o amblitoma
Elaboración propia

Sección cónica: una rama de la hipérbola

Euclides

(325 A.C.-265 A.C.)

¿Atenas o Alejandría?

Figura 6 Euclides

Poco se sabe de la vida y obra de Euclides, incluso hay autores que ponen en duda su existencia, sin embargo por Proclo, deducimos que debió nacer en Atenas, Grecia, y se cree que sus primeros estudios los realizó igualmente en Atenas.

A Euclides se le conoce como "El Padre de la Geometría" y esto se debe a la amplia labor que realizó en Alejandría, Egipto. Alejandría que para esa época era el centro del saber y de la cultura estaba regentada por Ptolomeo I y en ella innumerables sabios de la época nos dejaron su huella.

Euclides se piensa que fue el creador de una de las obras más importantes de la antigüedad en la Historia de las Matemáticas, titulada los "Elementos".

Los *Elementos* de Euclides, luego de algunas adaptaciones, siguen siendo una referencia importante para la enseñanza de la geometría .La primera edición impresa de las obras de Euclides apareció en Venecia en 1482, y fue una traducción del árabe al latín.

Euclides también escribió sobre perspectiva, secciones cónicas, geometría esférica y superficies cuádricas posibles. En particular de los cuatro tomos que se le atribuyen sobre las secciones cónicas, no se conserva en la actualidad evidencia física alguna.

Esta obra consta de XIII libros, cuyo contenido está distribuido de la siguiente manera:

LIBROS	Sinopsis de contenido
I.-Los fundamentos de la Geometría. Teoría de los triángulos, paralelas y el área.	El libro I consta de tres partes. La primera trata de las propiedades de los triángulos. La segunda establece la teoría de las paralelas y demuestra que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos. La tercera se aboca al estudio de los paralelogramos, triángulos, cuadrados, el Teorema de Pitágoras y su inverso.
II.- Álgebra geométrica.	En este libro se establecen las equivalencias geométricas de diferentes identidades algebraicas y una generalización del Teorema de Pitágoras conocida como la ley del coseno.
III.-Teoría de la circunferencia.	Este libro contiene Teoremas relativos a la circunferencia, las cuerdas, las tangentes y la medición de ángulos.
IV.- Figuras inscritas y circunscritas.	En el libro IV se contemplan las construcciones pitagóricas, con regla y compás de los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 y 15 lados. Se estudian inscripciones y circunscripciones de Figuras rectilíneas y círculos.
V.- Teoría de las proporciones abstractas.	En este libro se expone la teoría de la proporción aplicable a magnitudes conmensurables y inconmensurables.
VI.- Figuras geométricas semejantes y proporcionales.	Este libro contiene la teoría eudoxiana de la proposición a la geometría plana. Se establecen los Teoremas fundamentales de los triángulos semejantes y las construcciones de la tercera, la cuarta y la media proporcional. Se establece una solución geométrica a las ecuaciones cuádricas y la

LIBROS	Sinopsis de contenido
	proposición de que la bisectriz interna del ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados
VII.- Fundamentos de la teoría de los números.	El libro VII contiene un conjunto de definiciones sobre los números, deducidas a partir investigaciones de carácter teórico.
VIII.- Continuación de proporciones a la teoría de números.	El libro VIII se ocupa de series de números en proporción continuada y en progresión geométrica.
IX.- Teoría de los números.	Este Libro IX pretende resumir lo conocido de aritmética, como la descomposición en factores primos la infinitud de los números primos, origen de números pares, impares y sus relaciones.
X.- Clasificación de los inconmensurables.	En este libro analiza los números irracionales, es decir, de los segmentos que son inconmensurables respecto al segmento rectilíneo dado.
XI.- Geometría de los sólidos.	En el libro XI se enuncian algunas definiciones, se presentan teoremas y proposiciones de la geometría del espacio.
XII.- Medición de Figuras.	En el libro XII se establecen los postulados necesarios para el desarrollo de los contenidos del libro XIII.
XIII.- Sólidos regulares.	Este libro XIII está dedicado al estudio de los 5 sólidos platónicos: tetraedro, hexaedro, octoedro, dodecaedro e icosaedro.

(Ehrenfried Hofmann 1961)

Algunos autores son más atrevidos en su disertación sobre la existencia de Euclides llegando a negar desde ser el autor de algunas o de todos los escritos que se le atribuyen, colocándolo como un colaborador más en la elaboración de las mismas, hasta aquellos que niegan que haya existido físicamente.

Sea como sea, el legado dejado a la humanidad sirvió para el crecimiento intelectual de muchas personas que se han basado en su obra.

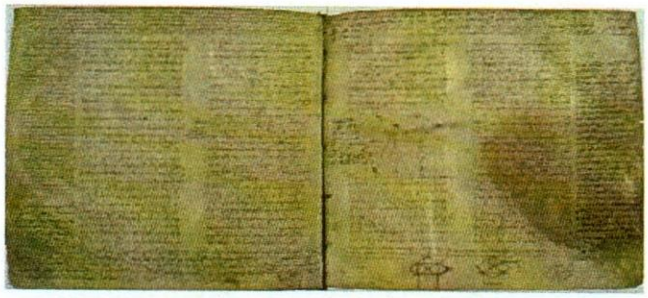


Figura 7 Livro I. Proposição 47 *O Teorema de Pitágoras* séc. IX

:

Apolonio

(262 A.C. -190 A.C.)

Perga,Panfilia,Grecia Jónica

(Ahora Murtina,Natalia Turquía)

Figura 8 Apolonio

Al igual que acontece con otros sabios Griegos de la época, se tiene poca información real sobre su vida. Sin embardo de Apolonio poseemos ciertos datos obtenidos en los prefacios de los diferentes libros de su gran obra "Las Cónicas".

El nombre de Apolonio era bastante común por lo que no se debe confundir con otros que desarrollaron sus conocimientos en distintas áreas del saber.

Tuvo el privilegio de nacer en Perga, ciudad donde se concentraba gran parte del saber cultural de la época; cuando todavía era joven se desplazó hasta Alejandría donde estudió con los discípulos de Euclides y posteriormente impartió clases.

Parte de su obra la elaboró en Pérgamo donde contactó con Eudemo y con Filónidas. Se sabe que tuvo un hijo quien contribuyó en la difusión de su obra.

Dentro de la fecundidad de sus escritos sobresale su obra maestra, conocida como "Las Cónicas", que le ha merecido el título de "El Gran Geómetra". Las Cónicas y los Elementos de Euclides fueron las mejores obras en su género en la matemática antigua, lo que les ha permitido prevalecer y ser referencia para el estudio a lo largo del tiempo hasta nuestros días.

"Las cónicas", es un compendio distribuido en ocho libros que recogen información relacionada con las secciones cónicas, de los cuales cuatro se conservan en griego original, tres más provienen de la versión árabe de Thabit Ben Kurra, y el octavo, perdido totalmente, proviene de una reconstrucción conjetural de Halley.

(González Urbaneja 2010)

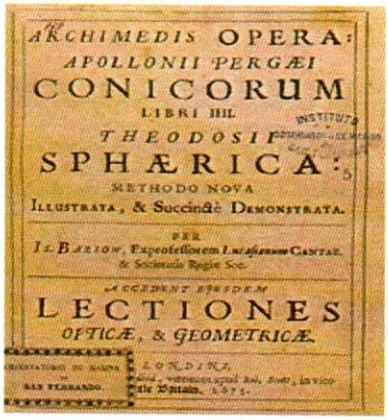


Figura 9Archimeris Opera, Apollonii Perga conicorum libri III Edición de I. Barrow (Londres,1675)

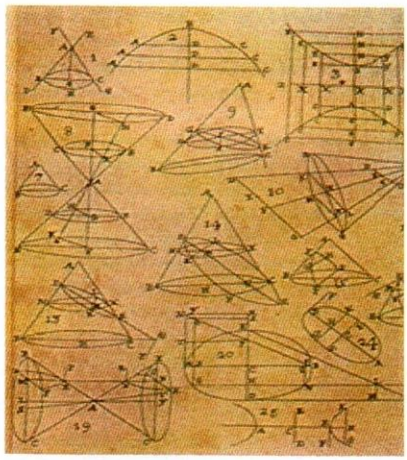
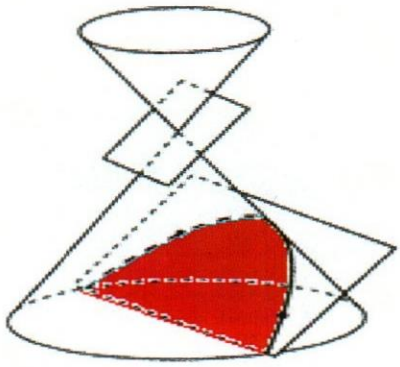


Figura 10 Ilustraciones procedentes de la Biblioteca del Real Instituto y observatorio de la Armada de San Fernando (Cádiz)

El contenido de cada uno de los ocho libros se expone a continuación:

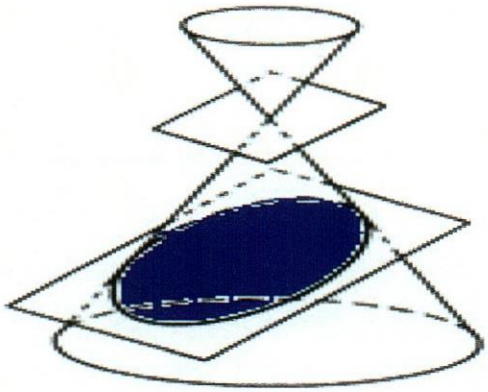
Libro I	Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas. Incluye también teoremas sobre el trazado de tangentes.
Libro II	Teoría de los ejes principales, las asíntotas y los diámetros conjugados.
Libro III	Teoremas sobre las áreas de Figuras formadas por secantes, asíntotas y tangentes. Propiedades de los focos.
Libro IV	División armónica de rectas. Mayor número de puntos de intersección y de contacto de dos secciones cónicas.
Libro V	Se resuelven problemas extremales: segmento de máxima y mínima distancia a las cónicas. Normal, evoluta, centro de curvatura.
Libro VI	Análisis del problema de semejanza de las secciones cónicas y la generalización del problema sobre la construcción de una familia de conos que pasan a través de una sección cónica dada.
Libro VII	Se investigan las cuestiones relacionadas con las funciones de las longitudes de los diámetros conjugados, parámetros, etc.
Libro VIII	Se desconoce su contenido. E Halley trabajando sobre la reconstrucción del texto extraviado, interpretó que contendría problemas próximos al material teórico del libro séptimo.

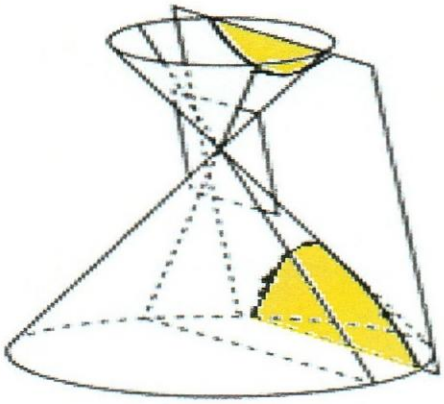
(Vera, 1970.)



La diferencia fundamental en el trabajo sobre las cónicas entre Menecmo y Apolonio radica en la forma de generar las secciones cónicas, ya que para este último no es necesario que cada sección sea generada a partir de conos distintos, sino de un mismo cono variando la inclinación del plano que lo corta.

Adicionalmente tampoco es necesario que los planos sean perpendiculares a las generatrices y el cono sea circular recto, ya que se pueden obtener secciones cónicas a partir de conos oblicuos y rectos.





Finalmente Apolonio sustituye el cono de una sola hoja por un cono de doble hoja.

Figura 11 Cónicas de Apolonio. Elaboración propia

La difusión de la obra de Apolonio en occidente se debe a la contribución de varios ilustrados, el siguiente cuadro resume cronológicamente algunos detalles importantes de este proceso.

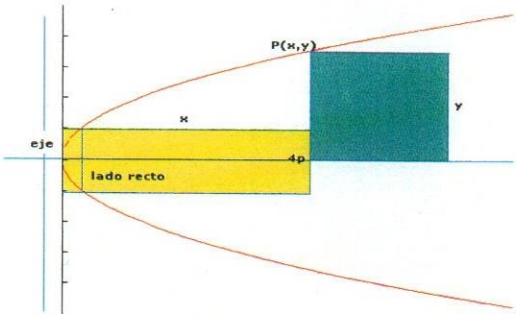
AÑO	DIVULGADOR	CONTRIBUCIÓN
1260	**Vitelio,** (monje polaco establecido en Italia)	Escribió un tratado de óptica que contiene diversas proposiciones geométricas de Apolonio.
1427	**Francisco Filelfo** (nacido en Tolentino 1398)	Trajo el primer texto griego de Las Cónicas, desde Constantinopla a Venecia
1537	**Juan Bautista Memo** y **Juan María Memo** (tío y sobrino)	Juan Bautista hizo la primera versión al latín de llos cuatro primeros libros de Las Cónicas, en Venecia. Juan María editóla obra de Juan Bautista.
1566	**Federico Commandino**	En Bolonia publica una segunda traducción, basada en los textos griegos, de los cuatro primeros libros de Las Cónicas. Segunda edición impresa en París en 1626.
1629	**Golius**	Dio a conocer los primeros manuscritos árabes de la obra de Apolonio en Occidente.
1644	**Padre Mersenne**	Hace referencia en su obra al aporte de Golius, sin mayores aportes personales.
1655	**Padre Claude Richard**	Publica en Amberes un comentario de los cuatro primeros libros de Las Cónicas, basado en los textos de Memo y Commandino, y una reconstrucción

AÑO	DIVULGADOR	CONTRIBUCIÓN
		personal de los otros cuatro libros de Apolonio desconocidos en Occidente.
1675	**Isaac Barrow** (maestro de Newton en Cambridge9	Publicó en Londres un manual de geometría que condensa los cuatro primeros libros de Las Cónicas de Apolonio.
1659	**Viviani**	Publicó la reconstrucción conjetural del contenidos de los cuatro libros desconocidos de Apolonio
1658	**Borelli**	Encontró en la biblioteca de los Mérici en Florencia, un manuscrito árabe de los libros V,VI y VII, retocado y resumido por el matemático persa Abalphat de Ispahán en 994 y atribuida a Golius, Lo hizo traducir al latín y lo publicó en Florencia en 1661.
1669	**Christian Rau** (alemán)	Adquirió en 1641 una versión abreviada de los libros de Las Cónicas comentada por el geómetra persa Abdolmelek de Chiraz en 1250, la tradujo al latín y la publicó
16??	**Codex Aramanchanus** (obispo de Armanch)	Adquiriò la primera versión completa en árabe de los libros V, VI y VII, en Irlanda. Ésta versión se trata de una traducción del griego al árabe efectuada en el siglo IX por Thabit ben Kurra en Bagdad.
1710	**Edmond Halley (1656-1742)**	Después de hacer estudios en árabe para entender la obra de Polonio, la traduce y en una forma impecable publicó los siete libros conservados de Las Cónicas.Bajo las modalidades de 1.- versión griega de los cuatro primeros libros,

AÑO	DIVULGADOR	CONTRIBUCIÓN
		acompañada de sus versiones en latín. 2.- traducción latina de los libros V,VI,VII, basada en la versión Thabit ben Kurra , y una reconstrucción conjetural del libro VIII de su propia autoría. 3.- texto griego y versión en latín de los dos libros de Serenus Antissensis, sobre la sección del cilindro y del cono.
1893	**Heinberg**	Publicó una edición crítica del texto griego de los cuatro primeros libros de Las Cónicas en Copenhague
1923	**Paul Ver Eecke**	Primera versión completa de Las Cónicas en lengua vulgar, francés, en Brujas,.

(Boyer 1991)

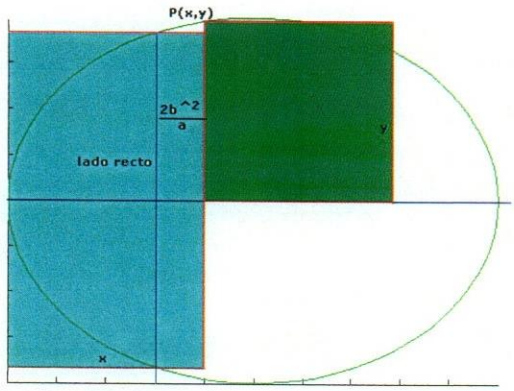
Desde Manecmo hasta Apolonio las cónicas no tenían nombres especiales, como dijimos anteriormente estas secciones estaban asociadas a los nombres de los conos que les servían de base para su formación: secciones de un cono agudo u oxitoma, secciones de un cono recto u ortoma y secciones de un obtuso o amblitoma. Arquímedes parece que usaba la palabra parábola, pero fue Apolonio quien le dio el nombre de parábola, elipse e hipérbola, basadas en las soluciones cuadráticas mediante el método de aplicación de las áreas de los pitagóricos.



La parábola tiene la propiedad de que el área del cuadrado construido con la ordenada de cualquier punto es equivalente al área del rectángulo que tiene por dimensiones la longitud del lado recto y la abscisa del punto.

"Parábola" es sinónimo de "colocar al lado o comparar"

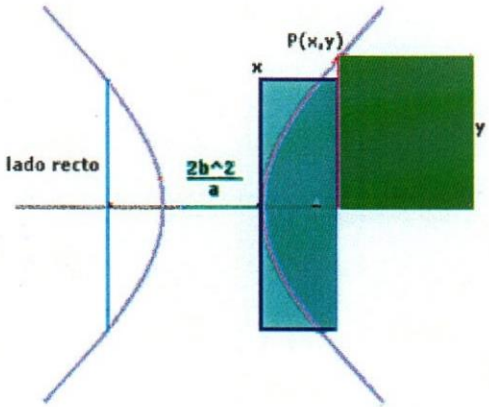
En el caso de la elipse, el área del cuadrado construido con la ordenada de cualquier punto es menor que el área del rectángulo que tiene por dimensiones la longitud de su lado recto y la abscisa del punto.



Ya que $y^2 < \frac{2b^2}{a}x$ **, en efecto de su ecuación**

$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **se deduce que** $y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$

"Elipse" de "Ellipsis" que es sinónimo de "deficiencia"



En la hipérbola se cumple que el área del cuadrado construido con la ordenada de cualquier punto es mayor que el área del rectángulo que tiene por dimensiones la longitud de su lado recto y la abscisa del punto.

Ya que $y^2 > \frac{2b^2}{a}x$,

en efecto de su ecuación $\frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se deduce que $y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$

"Hipérbola" que es sinónimo de "avanzar más allá"

Figura 12 Gráficas de las cónicas por medio de áreas. Elaboración propia

Arquímedes

(287 A.C. - 212 A.C.)

Siracusa - Sicilia

(Ahora Italia)

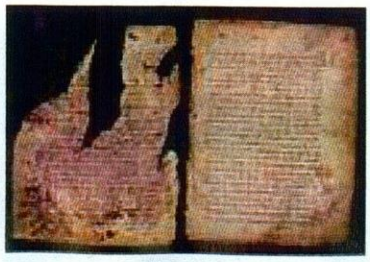
Figura 13 Arquímedes

Las referencias que se tienen sobre la vida y obra de Arquímesdes son debidos fundamentalmente a Plutarco quien le atribuyó una inteligencia sobrehumana. Nacido en Siracusa, Sicilia, fue hijo de Fidias un astrónomo. Parece que se desplazó a Alejandría a realizar estudios, pero al poco tiempo volvió a su Siracusa, lugar en el que realizó su gran obra tanto en el campo de las matemáticas como de la ingeniería, llegando a desarrollar inventos prácticos, muchos de los cuales se usaron en la defensa de su ciudad natal ante el asedio de los romanos, bajo el mando Marcelo hacia el 212 A.C. Según se cuenta su muerte acaeció durante el acoso a Siracusa a manos de un guerrero mientras estaba absorto en sus disertaciones geométricas.

Sus aportes se describen en una amplia cantidad de libros, cuya cronología no está claramente establecida, sin embargo la mayoría de los estudiosos de Arquímedes coinciden en el contenido de los mismos.

Figura 14 El Palimpsesto

Museo Walters de Baltimore



Resumiremos su obra en el siguiente cuadro:

OBRA	ESBOZO DE SU CONTENIDO
Equilibrio de los planos y su centro de gravedad (2 libros)	Parte de los principios fandamentales de la mecánica usando los métodos de la geometría. Descubre Teoremas relacionados con el centro de gravedad de Figuras planas. El segundo está dedicado a encontrar el centro de gravedad de un segmento de una parábola.
Esfera y Cilindro (2 libros)	En el primer libro relaciona la superficie de una esfera con el área del círculo máximo, el volumen de la esfera con el volumen del cilindro circunscrito y la superficie de la esfera con la superficie del cilindro circunscrito. En el segundo libro muestra como cortar una esfera por medio de un plano dado, de tal forma que exista una razón dada entre los volúmenes de los dos segmentos.
Espirales (2 libros)	Define una espiral, da las propiedades que relacionan la longitud del radio vector con los ángulos a través del cual ha revolucionado. Determina las tangentes a la espiral y el áreas de las porciones de la espiral.
Conoides y esferoides (dos libros)	Examina las parábolas de revolución, hipérbolas de revolución y los esferoides que se obtienen a partir de la rotación de una elipse con respecto a su eje mayor o su eje menor.
Cuerpos flotantes	Establece los principios básicos de la hidrostática, siendo su principal aporte el principio de Arquímedes que establece la relación entre el peso de un cuerpo sumergido en un líquido y el líquido desalojado. Igualmente analiza la estabilidad de cuerpos flotantes de diferentes formas y gravedades específicas.

Medición del círculo	Demostró que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro era pi con una aproximación entre 223/71 y 220/70, mediante la comparación con los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos de hasta 96 lados.
El arenario	Es un tratado en el que sugiere un sistema de numeración propio para manejar grandes números. Demuestra en este libro sus conocimientos de astronomía proporcionando un método para calcular el diámetro aparente del Sol.
El método	En esta obra describe la manera como descubrió sus resultados mediante argumentos físicos, fundamentalmente con la "ley de la palanca". Arquímedes no le daba suficiente valor científico a este método, por lo general no se tranquilizaba hasta lograr la demostración mediante el método de exhaución.
Cuadratura de la parábola	Demuestra que: "Una sección de parábola excede en un tercio al área del triángulo de igual base que la sección y cuyo vértice es el de la parábola". Dicho de otra forma, la superficie de la sección de parábola es igual a cuatro tercios de la superficie del triángulo inscrito.

(Álvarez Scherer 2005)

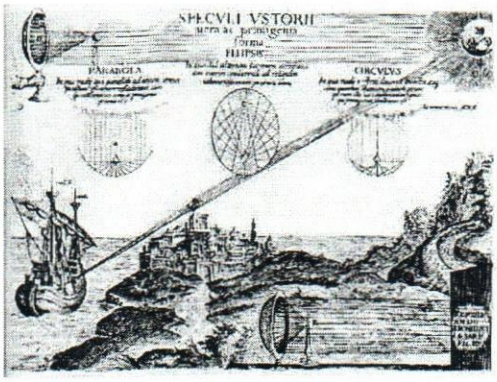


Figura 15 Asedio de Siracusa

La faceta como ingeniero de Arquímedes se ve reflejada en la gran variedad de sus prácticos inventos.

Muchos de ellos se usaron como armas para la defensa de su ciudad natal ante el asedio de los romanos, sin embargo no se quedaron como máquinas de guerra sino que han sido precursoras al desarrollo de máquinas que facilitan el trabajo del hombre.

A Arquímedes se le atribuyen unos cuarenta inventos, basados en las leyes y principios que enunció siendo los más trascendentes:

- **La palanca**: Pieza rígida que puede moverse en torno a un eje fijo, bajo la acción de dos fuerzas antagonistas.

- **El tornillo sin fin**: Tornillo que se hace girar dentro de un cilindro hueco, situado sobre un plano inclinado, y que permite elevar el agua situada por debajo del eje de giro.

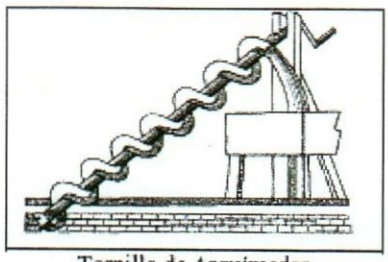


Figura 16 Tornillo de Arquímedes

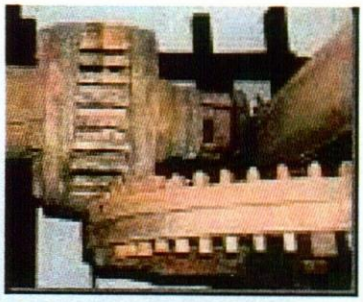


Figura 17 Rueda dentada

- **La rueda dentada**: Es una rueda con el perímetro totalmente cubierto de dientes. El tipo más común de rueda dentada lleva los dientes rectos, curvos y oblicuos.

- **La balanza hidrostática**: Es una balanza que se utiliza para la determinación experimental de la densidad de cuerpos sólidos sumergidos en un líquido.

- **Los espejos ustorios** Conjunto de espejos conjugados con los que se demuestran las leyes de la reflexión del calor y la existencia de focos en los espejos cóncavos. (No está claro que Arquímedes los haya inventado)

De entre todos los aportes realizados por Arquímedes desarrollaremos la **cuadratura de la parábola**[2] por ser la esencia de este trabajo el estudio de las cónicas.

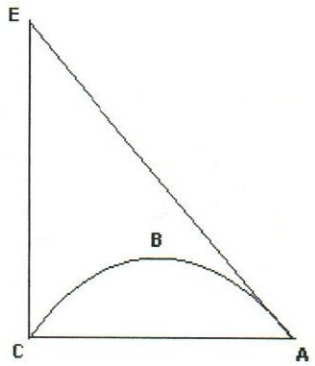


Figura 18: Parábola de Arquímedes. Elaboración propiaArquímedes

El problema consiste en determinar la relación entre el área de un segmento parabólico ABC, de vértice B, y el área del triángulo rectángulo AEC circunscrito al segmento parabólico, tal como se señala en la Figura.

Arquímedes se basó en una combinación de la mecánica con la geometría para demostrar que el área del segmento de la parábola ABC es igual a un tercio del área del triángulo AEC.

$$y^2 = mx$$

Procedimiento:

Por A y B se traza la recta "l" que corta a EC en el punto F y se prolonga en una cantidad FG igual a AF.

Se selecciona un punto P cualquiera sobre la cuerda AC se traza el segmento PQR paralelo al eje de simetría de la parábola DB, siendo Q el punto de corte con la parábola y R el punto de corte con AE.

Inicialmente Arquímedes demostró que F es punto medio del segmento EC, por lo tanto AF es la mediana del triángulo AEC y S punto medio del segmento PR.

En mecánica la ley de oro de las palancas establece que: "potencia por su brazo es igual a la resistencia por el suyo".

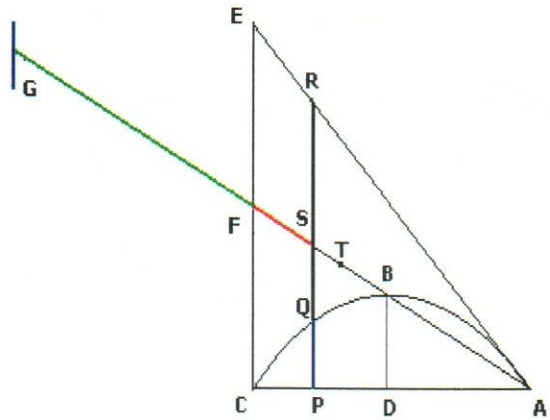


Figura 20.Método de la balanza. Elaboración propia

Si se toma GS como una balanza cuyo punto de apoyo es F y de brazos FG fijo, y FS variable, dependiendo del punto S sobre PR, y colocando sobre los extremos G y S

[2] Cuadratura de la parábola : Proceso relativo a la construcción de un cuadrado de igual área al de un segmento parabólico , mediante regla y compás

la longitud de los segmentos PQ y PR respectivamente como la potencia y la resistencia, se cumple que:

$$\overline{FG} \bullet \overline{PQ} = \overline{FS} \bullet \overline{PR}$$

Suponiendo que la suma de los segmentos de la forma PQ cubren el área del segmento parabólico y la suma de los segmentos PR cubren el área del triángulo CAE y repitiendo el esquema de la fórmula Arquimediana, se deduce que trasladando el segmento de parábola ABC hasta el punto G y dejando en S el triángulo AEC se estable equilibrio con respecto del punto F. (González Urbaneja 2010)

Reemplazando la suma de los productos variables $\overline{FS} \bullet \overline{PR}$ por el producto del área del triángulo AEC por su distancia TF, siendo T el centro geométrico del triángulo o baricentro, se deduce que el momento producido por la suma de los productos $\overline{FS} \bullet \overline{PR}$ es igual al momento producido por el área del triángulo AEC con respecto al punto F.

Como T es el baricentro la relación entre su distancia al punto F y el segmento AF es un tercio, siendo AF igual a FG, se establece que :

Siendo A_p el área del segmento parabólico ABC y A_t el área del triángulo AEC

$$A_p \cdot \overline{FG} = A_t \cdot \overline{FT}$$

como

$$\overline{FT} = \frac{1}{3}\overline{FG}$$

Sustituyendo se obtiene que:

$$A_p = \frac{1}{3}A_t$$

Figura 21. René Descartes

Descartes (René)

31 de marzo de 1596

La Haye - Touraine

(Francia)

11 de febrero de 1650

Estocolmo (Suecia)

René Descartes creador de la Geometría Analítica, nació en La Haye (desde 1967 se le cambió el nombre por el de Descartes, en honor a René), región de Touraine. Fue el tercer hijo de Joaquín Descartes y de Jeanne Brochard , frágil de salud desde su tierna infancia fue retenido en el hogar por su padre hasta la edad de los ocho años aproximadamente, cuando ingresa al Collége Royal de La Flèche, hasta el año 1612.

Durante su estancia en La Fléche, gozó de ciertos privilegios, como el poder levantarse a la hora que le permitiera su salud, y cursó estudios de lógica, ética, metafísica, historia, ciencias y literatura. En forma independiente estudió álgebra y geometría. A los dieciocho años ingresa en la Universidad de Poitiers para estudiar derecho. Adquiridos los títulos de bachiller y licenciado abandona los estudios para dedicarse a la vida mundana y al estudio de sí mismo y de los grandes libros del mundo.

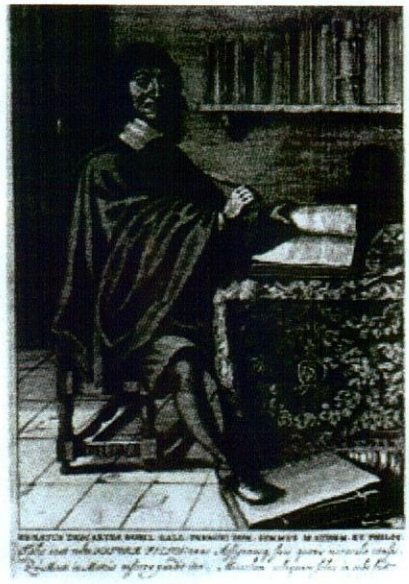


Figura 22. René Descartes en su escritorio

A los 22 años se enroló voluntariamente en el ejército al servicio del príncipe Mauricio de Nassau.

Durante su estancia en Breda, Holanda conoce casualmente al doctor Isaac Beeckman, despertando en Descartes el interés por las ciencias físicas y matemáticas.Un año después, 1619, ingresa al servicio del Duque de Baviera en Alemania. Ese mismo año incentivado por los sueños del 10 de noviembre descubre su verdadera vocación, la filosofía, que lo conduciría a la realización de su gran obra *"El discurso del método"*.

Abandona el ejército y se dispone a viajar por el mundo para descubrir por sí mismo el comportamiento del ser humano entre los años 1620 y 1629. Cansado de viajar se establece en París para a continuación refugiarse en Holanda ciudad de tolerancia por encima del resto de las ciudades de la Europa del momento. Es aquí donde comienza su época creadora.

A partir de este momento se concentró en la aplicación y la divulgación de sus conocimientos en filosofía, ciencias y matemáticas, mantiene contacto con muy pocas personas; sale de Holanda hacia Francia por espacios cortos de tiempo. En ese tiempo recibe una invitación de la Reina Cristina de Suecia, quien quería tener en su corte a la persona más importante de la época, después de innumerables solicitudes accede a viajar a Suecia en 1649, pero debido al riguroso clima y a su débil salud fallece, según la mayoría de los autores, por una pulmonía en febrero de 1650. (Hernández L. 2002)

Sus publicaciones más destacadas son las siguientes:

OBRA	ESBOZO DE SU CONTENIDO
Reglas para la dirección del espíritu 1628	Presenta su concepción de la ciencia y el método para conocerla, que había diseñado durante la década de 1618-1628, fue publicada después de su muerte.
Tratado del mundo 1633	En esta obra se refiere a su concepción sobre la cosmología, debido a sus contenidos no aceptados y ante la condena que sufría Galileo para el momento decide no publicarla. Editado por Michel Bobin y Nicolas Le Gras, junto a una nueva edición del Tratado del hombre en 1667.
Discurso del método 1637	" Discurso del método para bien dirigir la razón y buscar la verdad en las ciencias". Es un prólogo a sus ensayos sobre la "Dióptrica", los "Meteoros" y la "Geometría, que son ejemplos concretos del uso del Método. Publicada en francés y editada en Leyden por Jean Maire.
Meditaciones metafísicas 1641	Compendio de la filosofía cartesiana: La duda mnetódica, el cogito, ergo sum, las dos vías de la demostración de la existencia de Dios, el criterio de la verdad, la naturaleza del error, la rex extensa y la separación cuerpo-mente. Editada por Michel Soly en París.en latín
Principios de filosofía 1644	Trata del conocimiento humano, las cosas materiales, el mundo visible y la tierra. Edición realizada por Louis Elzevier en Amsterdam, obra dedicada a Elisabeth de Bohemia
Las pasiones del alma 1649	En esta obra Descartes expresa su concepción de la realación existente entre la metne y el mecanismo del cuerpo. Publicada en Holanda por Louis Elzevier y en Francia por Henri Le Gras

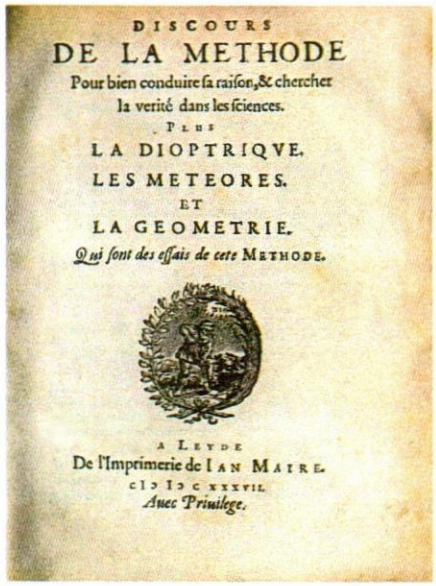
(O'Connor, JJ.& Robertson E.F. 2006)

Charles Adam y Paul Tannery a principios del siglo XX publicaron sus obras completas, que se han convertido en referencia de la bibliografía cartesiana.

Es indiscutible que de la fertilidad de su obra, la que ha hecho recordarlo ha sido su invención de la geometría analítica.

En el siglo XVII, varios estudiosos de la geometría se propusieron crear un método que permitiera resolver los problemas clásicos de la geometría griega, que hasta el momento habían sido resueltos con regla y compás.

Descartes estimulado por el proceso iniciado incorpora a las Figuras geométricas un par de líneas con la finalidad de asignar a los puntos de las Figuras dos números. De esta manera combina la geometría euclidiana y el álgebra, consideradas independientes en la época.


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Figura 23. Discurso del Método

En 1619 Descartes informó a Beeckman del nacimiento de la Geometría Analítica[3] que permitiría resolver todos los problemas relacionados con cantidades continuas y discontinuas, de tal forma que ya la geometría quedaría completamente desarrollada.

Voltaire afirmaría que la Geometría Analítica es el método que "permite asignar ecuaciones algebraicas a las curvas".

En 1637 en el ensayo "Géométrie", incluido en su obra maestra "El discurso del método", Descartes presenta los principios que rigen la Geometría Analítca, adicionado de la demostración de que todas las cónicas de Apolonio pueden ser representadas por ecuaciones cuadráticas.

[3] De Cartesius: nombre latino de Descartes. Se aplica entre otras cosas a coordenadas y sistemas de referencia rectangulares, aunque no fuesen exactamente así los usados por Descartes.

La obra de Descartes es auténticamente revolucionaria. Podemos decir que el método que él proponía se reduce a tres pasos:

1- La expresión de un problema geométrico en forma algebraica.

2- Resolución de las ecuaciones algebraicas que corresponden al problema geométrico.

3- Construir o interpretar geométricamente lo que planteaba la solución.

En el libro I, "De los problemas resolubles por medio de rectas y circunferencias", analiza los problemas que los griegos resolvían sólo con regla y compás. Afirmando que "Cualquier problema resoluble con regla y compás lleva siempre en última instancia a una ecuación de segundo grado". Sin embargo no lo demuestra.

En el epílogo de este primer libro planea el problema de las tres y cuatro rectas de Pappos : "Dadas cuatro rectas, dos de las cuales pueden ser la misma, el lugar geométrico ce los puntos del plano tales que el producto de las distancias a dos de las rectas es proporcional al producto de las distancias a las otras en una proporción dada, es una sección cónica".

Descartes describe este problema en función de dos cantidades desconocidas de un punto cualquiera C, que llama x e y, que representan segmentos lineales, el primero de ellos medido a la derecha desde un punto de referencia sobre un eje horizontal y el segundo localizado sobre el extremo del primero en forma vertical, obteniendo así una ecuación general de segundo grado en x e y.

En el segundo libro estable que toda ecuación de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ es una cónica y su naturaleza depende del signo del discriminante $b^2 - 4ac$

En el tercer libro se dedica a la resolución de problemas sólidos y la resolución de ecuaciones involucradas.

Descartes usó la notación que se emplea hoy día, además designó los parámetros con las primeras letras del alfabeto y las variables con las últimas. (Rey Pastor,J. & Babini, J. 1997)

Descartes no sólo descubre la Geometría Analítica sino que además establece las bases de la Geometría Algebraica, razón por la cual "La Géométrie" fue publicada separadamente de la obra original.

Fermat (Pierre de)

17 de agosto de 1601

Beaumont-de-Lomagne

(Francia)

12 de enero de 1665

Castres (Tarn).

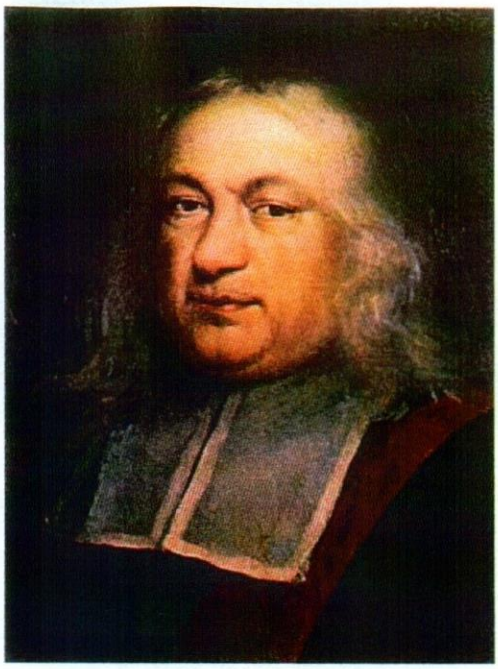


Figura 24. Pierre de Fermat

Hijo de un rico comerciante francés de pieles y cuero, no conoció la carestía de la vida, lo que le permitió tener una educación esmerada desde su infancia, realizada dentro del Monasterio Franciscano, según algunos autores. Compartió el hogar de sus padres con tres hermanos. Ya en la etapa de la adolescencia y juventud acudió a la Universidad de Toulouse donde inició los estudios de derecho civil, posteriormente se trasladó a Bordeaux, ciudad donde realiza sus primeras investigaciones matemáticas, para después pasar a la universidad de Orleáns, donde recibió el grado de abogado en derecho civil en 1631.

Fermat fue hombre afable, tranquilo y dedicado a su desempeño como padre y profesional, se casó con la prima de su madre, y de su matrimonio nacieron cinco hijos de los cuales tres fueron varones y dos hembras.

Como profesional del derecho ocupó diversos cargos gubernamentales, así en 1631 se dedica a la Cámara Baja del Parlamento de Toulouse, en 1634 ocupa el cargo de Consejero del Rey en Toulouse, 1638 fue promovido a una Sala Superior y en el año 1652 es promovido al nivel más alto en la Corte Penal.

En 1653 la peste arrasa con una gran parte de la población de Toulouse, entre los afectados estaba Fermat, del que se creyó incluso que habría muerto, pero no fue así y recuperado vuelve a su quehacer habitual hasta su muerte que acaeció en Castres el 12 de enero de 1665.

Compartía su profesión con la pasión por las matemáticas, aunque dado su carácter retraído no puso empeño en publicar sus hallazgos. Lo que se conoce de sus aportes en el campo de la matemática se debe a la correspondencia epistolar que mantuvo con varios matemáticos de su tiempo, a los escritos encontrados en hojas sueltas de papel y a las notas en los márgenes de documentos que él había leído, razón por la cual se tiene muy poca certeza de las fechas de sus descubrimientos y de la originalidad de los mismos.

Los resultados de Fermat fueros conocidos por otros pensadores europeos gracias a Marin Mersenne, quien los reenvió e hizo una amplia distribución de los mismos.

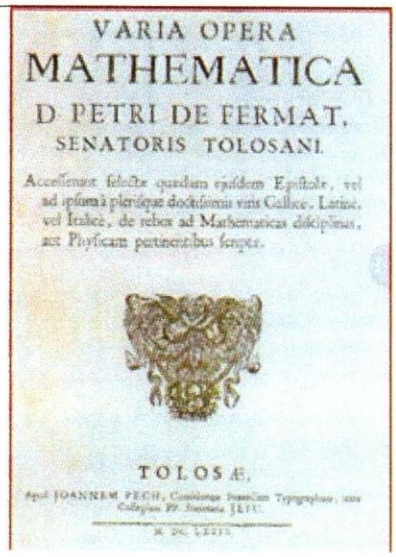

VARIA OPERA
MATHEMATICA
D. PETRI DE FERMAT,
SENATORIS TOLOSANI.
TOLOSÆ,

Figura 26. Fermat por R. Lefevre

Figura 25. Varia Opera Mathematica de D. P. de Fermat

Sus aportes están recogidos en el artículo "De linearum curvarum cum lineis rectis comparationes" y en los libros: "Methodus ad disquirendam maximan et miniman et de tangentibus linearum curvarum", "Varia opera mathematica" e "Introducción a la teoría de los lugares planos y espaciales. Su hijo Samuel en 1670 publicó dentro de la traducción que hizo Bachet de la Aritmética de Diophantus parte de las notas publicados por su padre.

Dentro de sus escritos y de la correspondencia que mantuvo con otros matemáticos se exponen los siguientes aportes a la matemática:

Campo de investigación	Temas analizados
Teoría de números	Pequeño Teorema de Fermat. Último Teorema de Fermat. Números primos. Método del descenso infinito. Método para factorizar grandes números.
Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal	Representación de curvas y superficies mediante ecuaciones. Estudio de máximos y mínimos y tangentes.
Probabilidades	Teoría de las probabilidades.
Física	Leyes de reflexión y refracción de la luz. Caída libre de los cuerpos.

(Boyer 1991)

Fermat en contraposición con Descartes comenzaba con una ecuación algebraica y derivaba de ellas las propiedades geométricas de la curva correspondiente. De la ecuación de segundo grado y usando técnicas de rotación y traslación dedujo que el lugar geométrico se trataba de una cónica.

Sus aportes a la Geometría Analítica derivan de sus estudios sobre las tangentes a una curva, expuestos en el **Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum**.(Método para la investigación de máximos y mínimos).

En la primera parte del Methodus define el procedimiento algebraico para encontrar máximos y mínimos en la que utiliza el concepto de "adigualdad" de Apolonio; es en la segunda parte del Methodus ejemplifica el método para encontrar máximos y mínimos en el trazado de la tangente a una parábola por un punto.

Fermat traza la tangente AD a la parábola ABC por un punto cualquiera A, relaciona la ordenada del punto A y la ordenada de un punto cualquiera de la tangente F, con sus respectivas abscisas basándose en la relación de Apolonio $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{HG}^2} = \frac{\overline{EB}}{\overline{GB}}$, para deducir $\overline{ED} = 2\overline{EB}$

En conclusión se puede decir que Descartes y Fermat se complementaron en el estudio de la Geometría Analítica ya que Descartes estudió las ecuaciones a través del significado de las curvas y Fermat estudió las curvas definidas por ecuaciones.

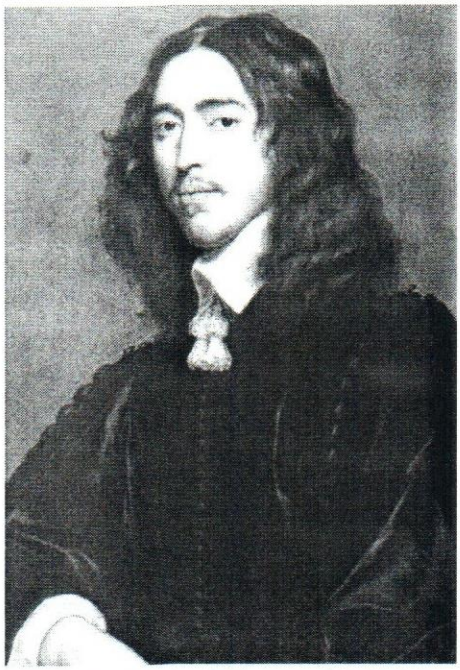


Figura 27. Jan de Witt

Witt (Jan de)

24 de septiembre de 1625

Dordrecht

(Países Bajos)

20 de agosto de 1672

La Haya (Países Bajos)

Hijo de Jacob de Witt, y de Anna Van Den Corput, tuvo el privilegio de recibir una esmerada educación debido al contacto que tenìa su padre con algunos científicos y eruditos de la época, como Isaac Beekman.

Acudió a la escuela latina de Dordrecht junto a su hermano Cornelius, En 1641 estudió en la Universidad de Leiden, destacándose en las áreas de matemáticas y derecho, en 1645 recibe el doctorado en Derecho en la universidad de Angers.

De Witt dedicó gran parte de su vida a la defensa de los intereses mercantiles propiciando el desarrollo de la industria y el comercio de Holanda; en 1650 es nombrado pensionario de Dordrecht y tres años más tarde, en 1653, es nombrado Procurador del Estado Holandés, convirtiéndose en el gran líder político de Holanda.

En 1654 dio término a la primera guerra anglo-holandesa con la firma del Tratado de Westminster. Sin embargo este tratado dejó muchos aspectos fundamentales que definir, razón por la cual se reanudó la guerra anglo-holandesa en 1665 que finaliza con la firma del Tratado de Breda en 1667.

Entre 1667 y 1672 la prosperidad llegó a los Países Bajos , pero en 1672 Francia e Inglaterra invaden Holanda, generándose la tercera guerra anglo-neerlandesa, haciéndose fuertes los orangistas quienes expulsando a De Witt del poder. En el proceso de convalecencia de un atentado que tuvo en el mes de junio acude a visitar a su hermano Cornelius en la prisión de Gevangenpoort, lugar donde ambos fueron asesinados por una turba descontrolada el 20 de agosto de ese mismo año.

La obra escrita de Jan de Witt se reduce a dos publicaciones.

OBRA	ESBOZO DE SU CONTENIDO
Elementa Curvarum Linearum **1659**	De Witt traduce "La Géométrie" de René Descartes y como un apéndice escribe su " Elementa Curvarum Linearum" . Elementa Curvarum Linearum , consta de dos libros, el primer libro es una introducción al segundo libro, está escrito en un lenguaje verbal sin usar símbolos matemáticos conocidos, y en él hace una introducción geométrica de las cónicas sin el uso de sólido alguno. Es decir en vez de buscar las cónicas en los sólidos mediante secciones por planos, va directamente al estudio de las mismas en el plano. En el segundo libro utiliza la notación que Descartes usó en "La Géométrie", es decir las primeras letras del alfabeto para representar constantes y las últimas para los parámetros desconocidos o variables., además de los símbolos +,-,.,:. Cabe destacar que en vez del signo = utilizaba $\propto$ y $\propto$ en lugar de $\pm$. En el segúndo libro aplica los métodos analíticos de Descartes en el estudio de las cónicas, descubriendo importantes propiedades de las formas cuadráticas .

Elementa Curvarum Linearum **1659**	Jan de Witt es el primero en utilizar los términos foco y directriz para el estudio de las cónicas y reduce todas las ecuaciones de segundo grado en x e y a formas canónicas mediante rotaciones y traslaciones; además de emplear un discriminante para determinar si la ecuación representa una elipse una hipérbola o una parábola.
El valor de las Rentas Vitalicias comparadas con los Bonos de Rescate **1671**	En esta obra De Witt calculó, usando probabilidades, el rendimiento de las Rentas Vitalicias en comparación con el rendimiento de los Bonos. De Witt expone su teoría analizando el rendimiento de las Rentas Vitalicias que el gobierno Neerlandés otorgaba a las viudas, en comparación con los Bonos de rescate, que eran préstamos que el estado otorgaba, descubriendo que un bono de 4% equivalía a una renta vitalicia del 6%. A raíz de este estudio se descubre que el Estado estaba otorgando un rendimiento mayor por estos títulos de valores, lo cual le trajo antipatías por parte de las viudas.

(González Urbaneja 2010)

Dandelin (Germinal Pierre)

12 de abril de 1794

Le Bourget

(Francia)

15 de febrero de 1847

Bruselas(Bélgica)

Figura 28. G. Pierre Dandelin

Hijo de un administrador de origen francés y madre belga, realizó sus estudios en Gante, posteriormente se trasladó a París donde siguió sus estudios en la École Polytechnique. No pudo evitar verse involucrado en la situación política que dominaba la Europa del siglo XVIII. De hecho en 1813 Dandelin se alista en el ejército de Napoleón para luchar contra los británicos.

El año siguiente 1814 Austria, Rusia, Prusia y Gran Bretaña firman el tratado de Chaumont con el fin de derrotar a Napoleón; el 30 de marzo de 1814 durante el asedio a la ciudad de París Dandelin resultó herido. Mientras Napoleón controló Francia Dandelin ocupó un cargo administrativo en el Ministerio del Interior. En 1815 se desarrollò la guerra de los 100 días y Napoleón vuelve a ser derrotado en la batalla de Waterloo, después de lo cual Dandelin regresa a Bélgica y se convierte en ciudadano de los Países Bajos en 1817, donde continua su carrera militar como ingeniero. En 1825 y durante cinco años se desempeñó como profesor de Ingeniería de Minas en la universidad de Lieja. No pudo olvidar su pasión por la política, de tal manera que en 1830 se reincorpora a la Revolución, desde 1835 se dedica a la construcciòn de fortificaciones en las ciudades de Namur, Lieja y Bruselas.

Los pocos momentos que le dejaba la política los dedicó a las matemáticas, llegando a mostrar gran interés por la geometría. De este interés surge como aporte principal el llamado Teorema De Dandelìn, en él se definen por primera vez los conceptos de focos y directriz, además de visualizar las secciones cónicas a través de una representación espacial. (Gil Saurí 1994)

Enunciado del Teorema:

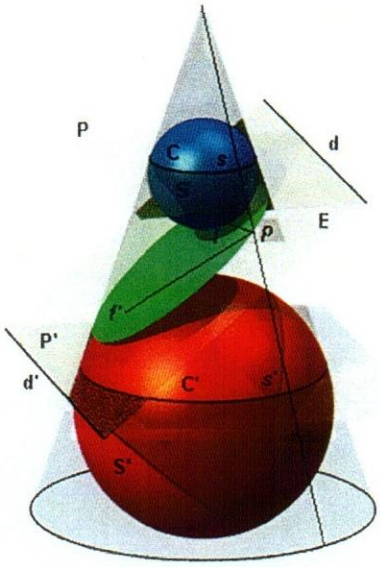


Figura 29. Esferas de Dandelin

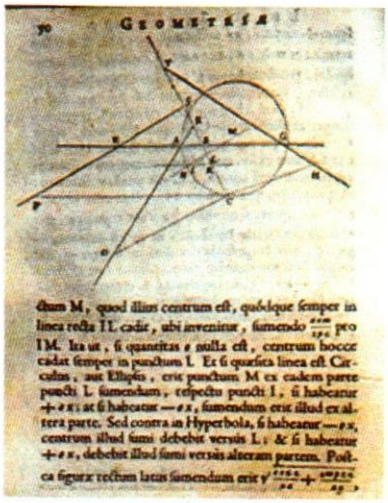
Dada una superficie cónica y un plano que la corta formando una cónica, siempre es posible trazar una (en el caso de la parábola) o dos esferas tangentes interiores a la superficie cónica y al plano de corte. Los puntos de tangencia de la esfera (en el caso de la parábola) o las esferas con el plano de corte determinan el foco (en el caso de la parábola) o los focos de la cónica. Siendo la directriz (en el caso de la parábola) o las directrices la intersección del plano o planos que contienen la circunferencia o circunferencias de intersección de la esfera o esferas con el plano de corte de corte con la superficie cónica.

En 1826 generaliza su teorema en un hiperboloide de revolución en lugar de una superficie cónica, relacionándolo con el hexágono de Pascal, el hexágono de Brianchon y el hexágono formado por los generadores del hiperboloide.

Adicionalmente Dandelín creó un método, hoy llamado Dandelin-Graffe, para aproximar raíces de una ecuación algebraica, también trabajó en temas como estática, algebra y probabilidades.

En 1825 fue elegido miembro de la Real Academia de Ciencias en Bruselas.

Otros estudiosos de las cónicas



Pappus

Pappus de Alejandria (IV siglo d. C.)

Es el último gran geómetra de la Antigüedad. Su obra principal *Collections Mathématiques*, publicada en Alejandría hacia el año 320 de nuestra era pero fue necesario esperar más de mil años para mejorar los resultados geométricos de la *Collections* Se le atribuye la definición de cónicas mediante el concepto de excentricidad, introduce el concepto de Foco par la parábola y de directriz para cualquier cónica, aunque algunos autores dudan de su originalidad y se lo atribuyen a Ecuclides (Babini 1952)

Desargues, Gérard

(Lyon, 1591 - Lyon, 1661).

Arquitecto e ingeniero militar. Su interés por las "investigaciones que condujesen al conocimiento de las cosas y a la práctica de algún arte", le llevó a estudiar las secciones cónicas y los problemas de la perspectiva (proyección central), en los que una cónica (elipse, parábola, hipérbola) aparece como la perspectiva de una circunferencia, definiendo así las bases de la geometría proyectiva. Las principales obras de Desargues son *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'une cône avec un plan* (1639). Y una serie de proposiciones geométricas, publicadas como apéndice de la

Perspective (1648) de su discípulo y grabador Bosse, entre las que se encuentra su famoso Teorema de Desargues.

Teorema de Desargues: Una cónica es el lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homologas respecto a una transformación proyectiva entre dos haces de rectas' (Collete 1986)

Pascal

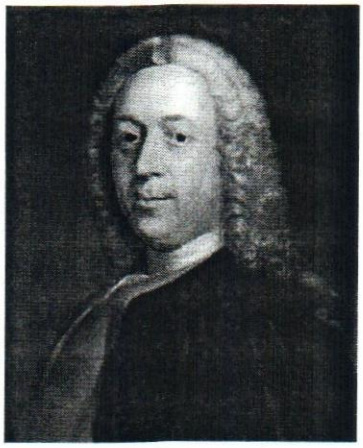
Blaise (Clermont - Ferrand, 1623 - Paris, 1662).

Nació el 19 de junio y falleció el 19 de agosto. Matemático, físico y filósofo francés

En contra de la posición de su padre, quien quería impedir que su hijo estudiada matemáticas, desde los doce años empezó a estudiar la geometría. Demostró por su propia cuenta que la suma de los ángulos internos de un triángulo es dos rectos, momento a partir del cual ya su padre le permitió seguir con su afición por la matemática.

Fue muy influyente y aportó grandes ideas a distintas áreas de las matemáticas. Trabajó en las secciones cónicas y en la geometría proyectiva. Tuvo contacto epistolar con Fermat y junto con él sentó las bases de la teoría de la probabilidad.

Teorema de Pascal: Los seis vértices de un hexágono yacen en una cónica sí y sólo sí el punto de intersección de los tres pares de lados opuestos yacen en una recta. (VERA 1970)



Simson

Simson, Robert (Kirktonhall 1687 - Glasgow 1768).

Se graduó de médico profesión que complementó con su afición a la geometría y a los estudios de los griegos en el campo de las matemáticas. Uno de sus matemáticos preferidos fue Euclides a quién estudió y lo plasmó en su obra *Elements of Euclides* que fue publicada en veinticuatro ocasiones entre 1756 y 1834 en su versión inglesa y traducida a diferentes idiomas. (Boyer 1991)

Poncelet

Poncelet, Jean Víctor (Moselle, 1788 - París 1867).

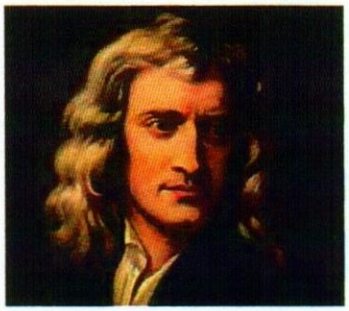
Militar que llegó al grado de general a las órdenes de Napoleón, participó en la invasión a Rusia, como muchos grandes de la época combinó su amor por las vida militar con las matemáticas y estudió en la Escuela Politécnica, donde fue discípulo de Monge

En Rusia fue hecho prisionero y fue en la cárcel donde se dedicó a hacer una profunda reforma en el campo de la geometría. Desde su regreso a Francia en 1814 se incorporó al ejército como ingeniero, y fue en 1822 cuando escribió su obra mas importante, titulada *Tratado de las propiedades proyectivas de las Figuras.*

Poncelet estudió las propiedades de las Figuras que no resultan alteradas por un número finito de proyecciones y secciones (proyectividad). Con ello, lograba reducir el

estudio de las Figuras planas al de algún caso particular notable; por ejemplo, el estudio de las cónicas al del círculo. Creó la geometría proyectiva, que es totalmente gráfica, como complemento de la geometría métrica. (O'Connor, JJ.& Robertson E.F. 2006)

Newton



Newton, Isaac (Woolsthorpe, 1642 - Londres, 1727).

Todo lo que se escriba o diga de Newton siempre será poco. Incluso se podría decir que Newton es a la Mecánica Clásica lo que Arquímedes fue a la Mecánica Griega

Para Lagrange, Newton fue el más afortunado de los hombres porque "el sistema del mundo sólo puede descubrirse una vez" Dados sus escasos recursos económicos en 1661 ingresó en el Trinity Collage de Cambridge como *sirviente*. En Trinity Collage estudió las obras Euclides, Descartes, Oughtred, Kepler, Viéte, Wallis, Galileo, Fermat, Huygens,... ("si he llegado a ver tan lejos -decía Newton- es porque me he incorporado sobre los hombros de gigantes"). En 1669 sucedió a su maestro y mentor Isaac Barrow en la cátedra *Lucasiana* de la Universidad de Cambridge. Y en 1703 fue nombrado presidente de la Sociedad Real de Londres y falleció, en 1727, fue enterrado en la Abadía de Westminster, junto a los reyes de Inglaterra. Sobre su tumba está grabado el desarrollo del binomio, uno de sus principales descubrimientos.

Newton realizó grandes aportaciones al desarrollo de la ciencia. Entre ellos, del cálculo diferencial e integral que él mismo había descubierto, a la par y de forma independiente que Leibniz. (Boyer 1991)

Euler

Euler, Leonhard (Basilea, 1707 - San Petersburgo, 1783).

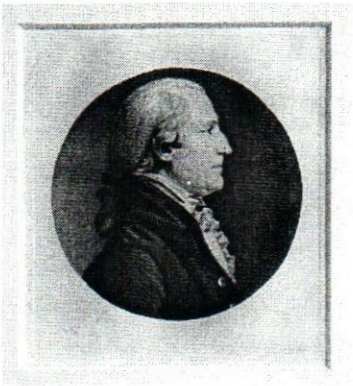
El ámbito de influencia de Euler se extiende a la física, la astronomía y la matemática en todos sus aspectos. Sus escritos, además de numerosos e importantes, son muy claros. A él se deben la mayoría de los símbolos y notaciones que usamos en la actualidad: e (base de los logaritmos neperianos), π, i (para la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$), las funciones circulares sen, cos, tang, cot,...), la generalización del concepto de función,..

Euler se quedó ciego los últimos 17 años de su vida, pero aún así pudo continuar con sus investigaciones. Y a su muerte en 1783, dejó inéditos tal cantidad de artículos que la Academia de San Petersburgo continuó publicándolos durante 50 años. (Fernàndez, Santiago & Pérez Sanz, Antonio 2009).

En el campo de las matemáticas en su Introducción al Análisis de los Infinitos, en el año 1748, hace una estudio completo del álgebra y de la teoría de las ecuaciones. Al analizar las superficies tridimensionales también demostróa que las secciones cónicas se represntan mediante la ecuación general de segundo grado en dos dimensiones.

Se desempeñó como dcoente en la Academia de Ciencias de Berlín.

Murió el 7 de septiembre de 1783 en la San Petesburgo a la edad de 76 años.



Brianchon

Brianchon, Charles Julien (Sèvres, 1785 - Versailles, 1864).

Tiene en común con Poncelet el ser Matemático y militar francés. Tmabién fue alumno de Monge en la Escuela Politécnica.

Se especializó en Geometría Proyectiva a la que aportó su teorema, llamado teorema de Brianchon (publicado en 1806) que, junto con el teorema de Pascal, son fundamentales en el estudio proyectivo de las cónicas. Con Poncelet en 1821 publicó con una demostración de la existencia de la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo. (Rey Pastor,J. & Babini, J. 1997)

Teorema de Brianchon: Las diagonales que unen los vértices opuestos de un hexágono son tres rectas concurrentes sí y sólo sí el hexágono circunscribe una cónica

CAPITULO II

Distintos enfoques en el desarrollo de las cónicas

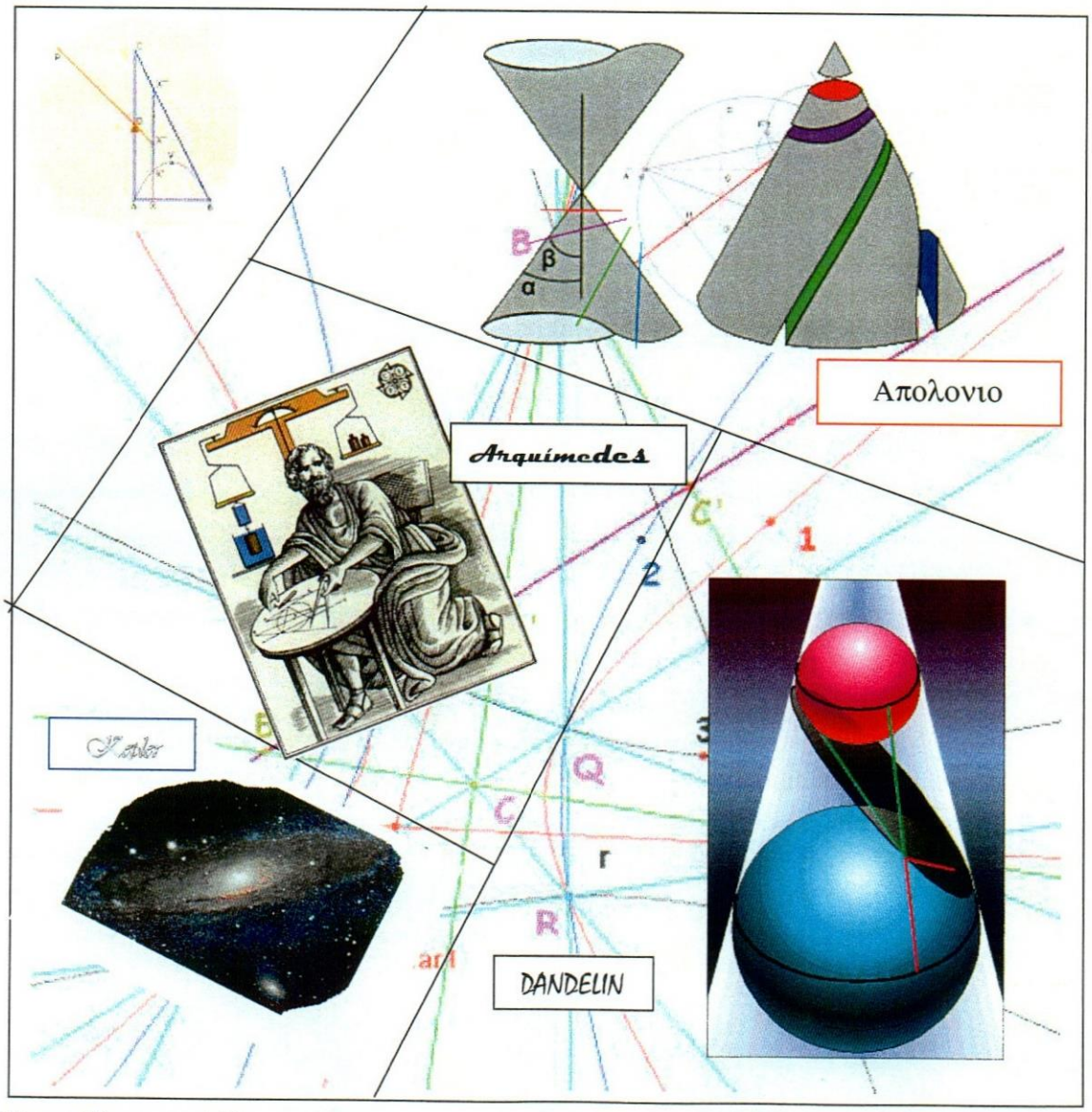


Figura 30: composición

¿Cómo lo hizo Menecmo?

Para los griegos, Delfos era el centro del mundo. Marcando este punto exacto en el templo por una piedra, el omphatos (ombligo).

Difícil de responder a este cuestionamiento, sin embargo procuraremos ser lo más fieles posibles a las investigaciones realizadas y al contexto de la época en que se ubica el autor.

Parece ser que Menecmo detectó que para resolver el problema de la duplicación del cubo, había unas curvas adecuadas, llamadas triada de Menecmo, que se obtienen mediante la intersección de un plano perpendicular a la generatriz de tres conos rectos, según que el ángulo en el vértice fuera recto, agudo u obtuso.

Hacia el 400 a.c. ya Hipócrates de Quios estableció que para encontrar la longitud del lado del cubo que duplicaba su volumen tenían que basarse en la doble interpolación geométrica de dos medias proporcionales entre "a" y "2a"

Veamos esto un poco más en detalle:

Todo surge cuando en el 370 a.c. un oráculo solicitó a los habitantes de Delia que hicieran más grande el altar del su templo, con el fin de vencer la calamidad que invadía a su población. Fue Platón quien sugirió que se duplicada el tamaño del altar, el cual tenía la forma de cubo.

El problema se convirtió en una paradoja, pues por métodos estrictamente de construcciones geométricas no tiene solución, ya que sólo se admite en su solución una regla sin marcas y un compás.

Los atenienses desesperados por su incapacidad de resolver el problema acudieron a Platón, quien les hizo ver que si el primer cubo tenía aristas de longitud "y", el nuevo cubo debería tener por aristas "x", tal que $x^3 = 2y^3$.

Como señalamos anteriormente, ochenta años antes, Hipócrates de Quios, observó que las duplicaciones de longitudes y áreas estaban basadas en medias aritméticas y geométricas respectivamente.

Así para las longitudes la media aritmética b-a=c-b permite justificar la duplicación de las líneas y es el resultado de agregar nuevas líneas.

Igualmente observó que la duplicación de un área obedece a la media geométrica $a : b :: b : c$

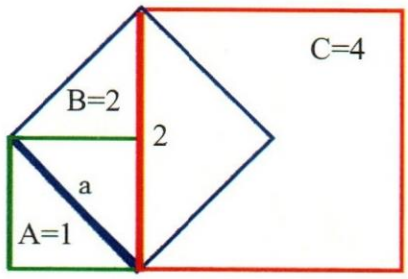


Figura 31: media geométrica.
Elaboración propia

Y que se obtiene al agregar áreas.

Sin embargo este proceso no se puede generalizar a las Figuras sólidas, la relación cambia para transformarse en una doble media geométrica , cuya estructura es de la forma $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

De esta doble media se deduce que:

$$ac = b^2$$

$$bd = c^2$$

$$bc = ad$$

$$\boxed{ac^3 = db^3 \Longrightarrow c^3 = \frac{d}{a} b^3}$$

Y de acuerdo con la condición de Platón $\frac{d}{a} = 2$

La intersección de las tres curvas $\begin{cases} ay = x^2 \\ 2ax = y^2 \forall a \\ xy = 2a^2 \end{cases}$

satisface los datos necesarios para obtener la duplicación del cubo. (Bruce 2004)

En los siguientes gráficos se visualizan la generación de las curvas que se derivan de la doble media geométrica.

El esquema seguido por los estudiosos de la duplicación del cubo, sin duda alguna, está basado en el método de las áreas que tan brillantemente los pitagóricos habían impuesto.

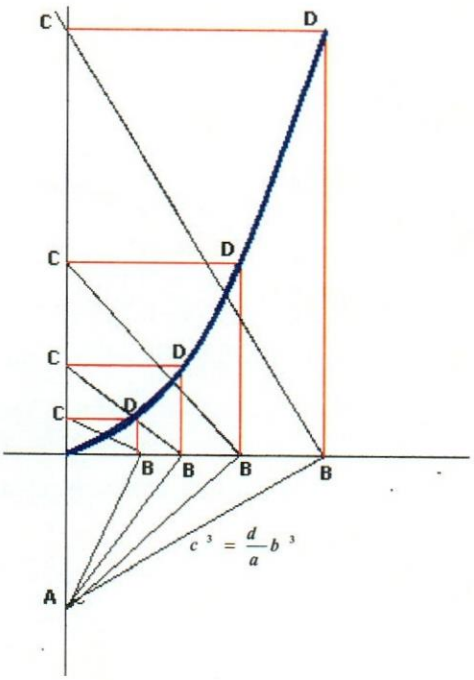


Figura 32: Duplicación del cubo 1. Elaboración Propia

De esa manera la ecuación $ay = x^2$, iguala el área de un cuadrado de lado x con el de un rectángulo de lados una constante a y una variable y. Sobre un sistema de referencia en la dirección del eje vertical se selecciona un segmento de longitud "a" y desde uno de sus extremos, A, se traza una recta hasta cualquier punto B de la horizontal que contiene al otro extremo del segmento seleccionado. A, la distancia sobre la horizontal la llamaremos x, desde B se trazan perpendiculares BC a cada segmento AB hasta cortar a la vertical en C, para formar triángulos rectángulos ABC.

Siguiendo la escuela Pitagórica se tiene que la altura correspondiente a la hipotenusa AC, es media proporcional de los segmentos en que divide a la hipotenusa "a" e "y". Por tanto Los puntos D tienen como coordenadas (x, y) tales que satisfacen la relación.

Igualmente se procede para la ecuación $2ax = y^2$; ahora la hipotenusa AC está formada con los segmentos "2a" y "x" y los puntos D tiene como coordenadas los pares (x, y), que satisfacen la relación dada.

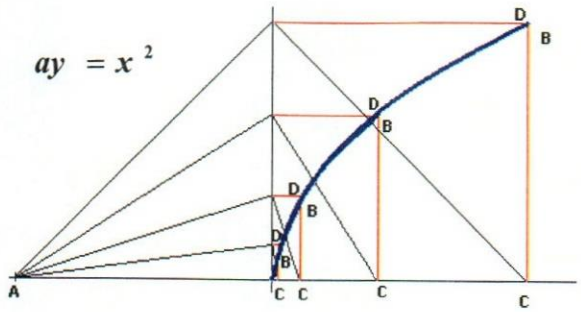


Figura 33: Duplicación del cubo 2. Elaboración propia

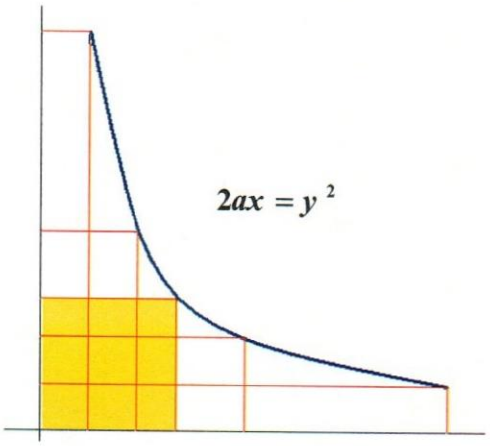


Figura 34: Duplicación del cubo 3. Elaboración propia

En el caso de la hipérbola $xy = 2a^2$

El objetivo es construir rectángulos cuyos lados "x" e "y" cuya área sea el doble del cuadrado que tiene por lado la constante "a".

Al superponer las curvas anteriores en un mismo par de ejes y para la misma constante "a" se obtiene el punto "P" cuyas coordenadas corresponden a las medidas de los lados de los cubos que guardan la relación 1:2.

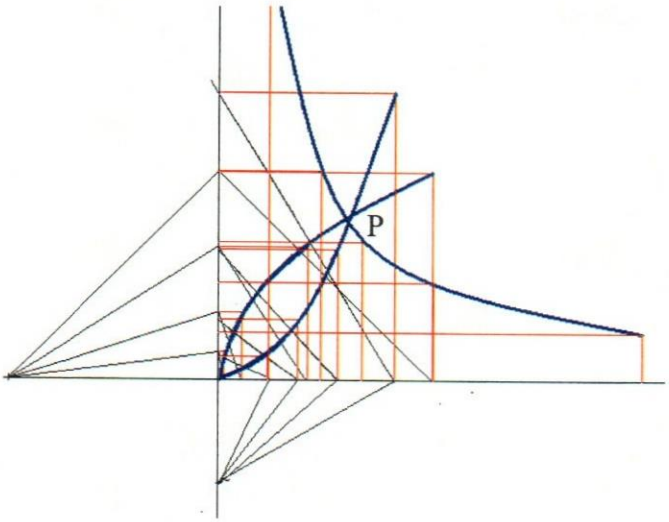


Figura 35: fusión 1,2,3. Elaboración propia

Valores que fueron imposibles de encontrar gráficamente para resolver el problema de la duplicación del cubo por métodos exclusivamente geométricos. (Bruce 2004)

Basado en este estudio previo, es muy probable que Menecmo asociara las curvas obtenidas por métodos de áreas, con las obtenidas por las intersecciones de planos perpendiculares a las generatrices de tres conos rectos, con ángulo en el vértice recto, agudo u obtuso respectivamente.

Menecmo, partiendo de un cono circular recto de una sola hoja y con ángulo recto en su vértice, al trazar un plano perpendicular a su generatriz por un punto cualquiera de ella obtuvo una curva, que en términos de Apolonio es la "parábola", y que usando la terminología de la geometría analítica actual responde a la ecuación "$y^2 = mx$", donde "m" es una constante relacionada con la distancia del vértice al plano de intersección.

Analicemos la forma como posiblemente Menecmo llegó a la parábola, siempre usando anacronismos entre la geometría analítica actual y la forma como lo desarrollaron los geómetras de la época

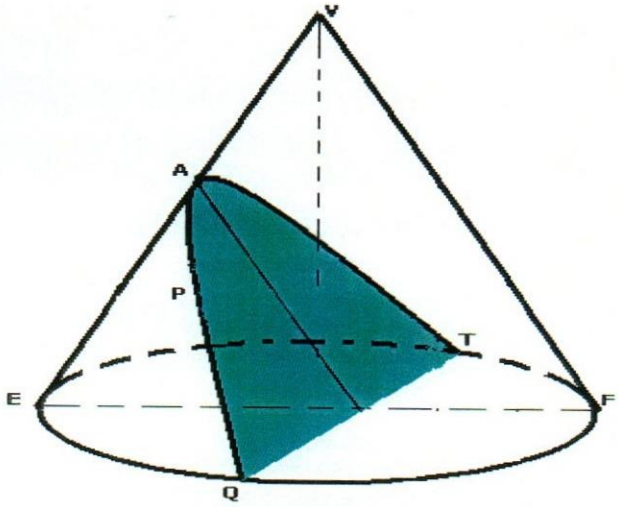


Figura 36: Parábola de Menecmo 1. Elaboración propia

Dado el cono **VRS** , con ángulo recto en el vértice V, y sea **AST** la sección formada por un plano perpendicular a una de las generatrices[4] y **P** un punto cualquiera sobre la sección cónica como se muestra en la Figura 1.1

[4] Esta sección cónica sería llamada posteriormente parábola por Apolonio

La sección generada por un plano perpendicular al eje del cono que pasa por **P** es la circunferencia **BPC** en la cual el diámetro **BC** es perpendicular a la cuerda que contiene a **PN**, tal como se señala en la Figura 1.2

Por el concepto de potencia de un punto con respecto a la circunferencia se deduce que $\overline{PN}^2 = \overline{BN} \cdot \overline{NC}$ (I)

La sección generada por un plano perpendicular al eje del cono que pasa por D es una circunferencia **DA** en la cual el diámetro $\overline{DA}$ es paralelo a $\overline{BC}$, y forman con $\overline{AN}$ y $\overline{DC}$ el paralelogramo **ADNC** en el que $\overline{AD} = \overline{NC}$. (II)

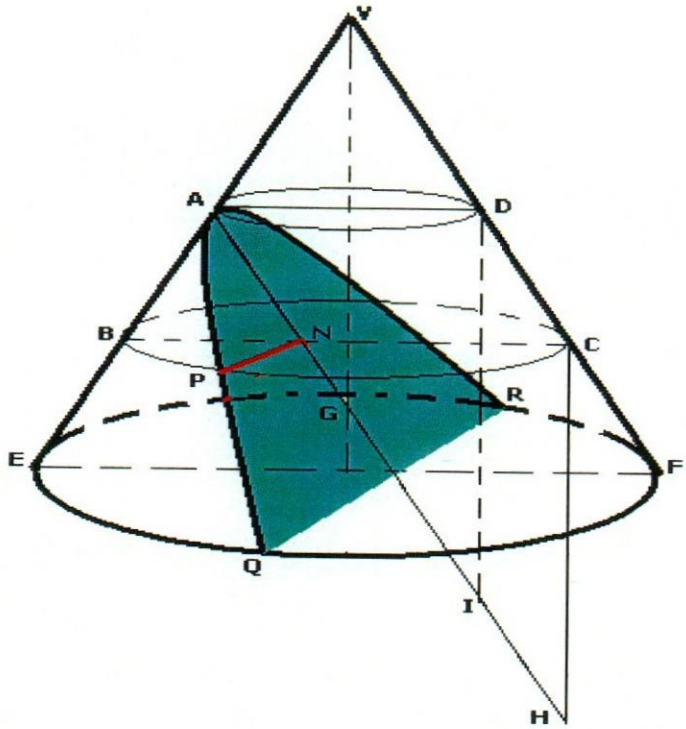


Figura 37: Parábola de Menecmo 2. Elaboración propia

Por los puntos **D** y **C** se trazan paralelas al eje del cono hasta cortar al eje de la parábola en los puntos **I** y **H** respectivamente

Los triángulos rectángulos **ABN** y **NCH** son semejantes por lo que,

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{NH}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} \Rightarrow \overline{BN}.\overline{NC} = \overline{NH}.\overline{AN} \quad \text{(III)}$$

Sustituyendo (III) en (I)

$$\overline{PN}^2 = \overline{BN} \cdot \overline{NC} = \overline{NH}.\overline{AN} \quad \text{(IV)}$$

Adicionalmente los triángulos **AIC** y **NCH** son iguales por (II) y ser ambos rectángulos, luego:

$$\overline{AI} = \overline{NH} = 2\overline{AG} \text{ (V)}$$

Por último sustituyendo (IV) en (V), se concluye que

$$\overline{PN}^2 = 2\overline{AG} \cdot \overline{AN}$$

Usando nomenclatura de la geometría analítica, tomando $\overline{AN} = x$ y $\overline{PN} = y$ como las coordenadas del punto "P" cualquiera de la sección cónica y siendo $\overline{AG}$ constante se tiene que,

La generación de las cónicas de Apolonio

"Si estás saludable y las cosas están en otros asuntos como deseas, todo está bien; yo también me siento moderadamente bien. Durante la época que estuve contigo en Pérgamo observé tu impaciencia por pasar a limpio mi trabajo 'Las cónicas'.

Sin duda el más grande de los sabios en el desarrollo de las cónicas fue Apolonio y aunque sus ocho libros sobre las cónicas no nos llegaron en forma íntegra, podemos perfectamente prever lo que él escribió.

Hasta Apolonio, las curvas descritas por Menecmo se expresaban en forma muy elemental por la sección que determinaba el plano perpendicular a la generatriz de un cono rectángulo (u ortoma), acutángulo(u oxitoma) u obtusángulo (u amblitoma), para designar a la parábola, la elipse y la hipérbola

Pasaron cerca de ciento cincuenta años, antes de que Apolonio descubriera que las cónicas provienen de un solo cono recto y selló su definición dándole los nombres que se conservan hasta hoy en día. Y eso no es casual, parece que ya los pitagóricos utilizaron estos nombres en la resolución de las ecuaciones cuadráticas por el método de las áreas.

Así la Elipse, cuyo nombre deriva del griego Elleipsis, significa "deficiencia o falta", Parábola, del griego παραβολή, significa "igualdad o equiparación" e Hipérbola, su nombre original viene del griego ὑπερβολή y significa "exceso". Esta forma de denominar las cónicas significó un cambio total de paradigma pues en vez de ser consideradas en forma constructiva, su análisis se fundamenta en relaciones con áreas y longitudes, para encontrar las características propias de cada curva, así como sus propiedades.

En el libro I de Apolonio encontramos en las propiedades 11 y 12 , en forma muy engorrosa, las definiciones de las cónicas basadas en áreas. (González Urbaneja 2010)

Podemos traducirlas, con gran atrevimiento de nuestra parte de la siguiente manera:

Los puntos de la parábola cumplen con la propiedad de que el cuadrado construido sobre su ordenada es igual al área del rectángulo que tiene por lados el lado recto y la abscisa del punto.

Por su parte en la elipse se cumple que el cuadrado construido sobre la ordenada de cualquier punto de la misma, equivale al área del rectángulo de base la abscisa del punto y altura el lado recto, disminuida del área del cuadrado que tiene por lado la razón entre los ejes por la abscisa del punto.

Por último en la hipérbola se cumple que el cuadrado construido sobre la ordenada de cualquier punto de la misma equivale al área del rectángulo de base la abscisa del punto y altura el lado recto, aumentada del cuadrado que tiene por lado la abscisa del punto multiplicada por la razón entre el eje no transverso y el transverso.

Pero veamos como posiblemente se llegó a estas conclusiones, utilizando como se ha hecho hasta este momento la poderosa herramienta de la geometría analítica..

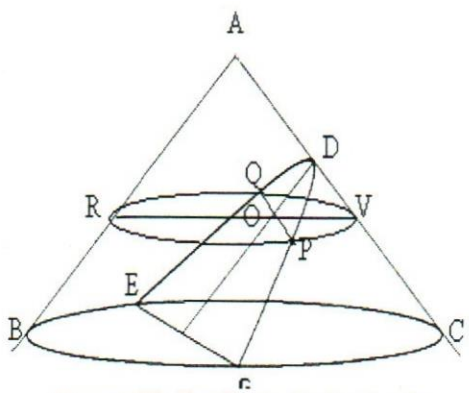


Figura 38: Parábola de Apolonio. Elaboración propia

Analicemos el caso de un plano paralelo a la generatriz del cono, para demostrar que se forma la parábola.

La sección generada por un plano perpendicular al eje del cono que pasa por **P** es la circunferencia **RPVQ** en la cual el diámetro **RV** es perpendicular a la cuerda **PQ**,

Por el concepto de potencia de un punto con respecto a la circunferencia se deduce que $\overline{OP}^2 = \overline{RO} \cdot \overline{OV}$ (I)

La sección generada por un plano perpendicular al eje del cono que pasa por D es una circunferencia **DS** en la cual el diámetro $\overline{SD}$ es paralelo a $\overline{SR}$ y formándose el paralelogramo **SDOR** en el que $\overline{SD} = \overline{RO}$ (II) .

Los triángulos **ABC**, **SAD** y **DOV** son semejantes por lo que,

$$\frac{\overline{SD}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{SD} = \overline{AS}\,\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

(III)

$$\frac{\overline{OV}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{OV} = \overline{DO}\,\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

(IV)

Haremos $\overline{OD} = x$ y $\overline{OP} = y$ como las coordenadas del punto "P" cualquiera de la sección cónica se tiene que,

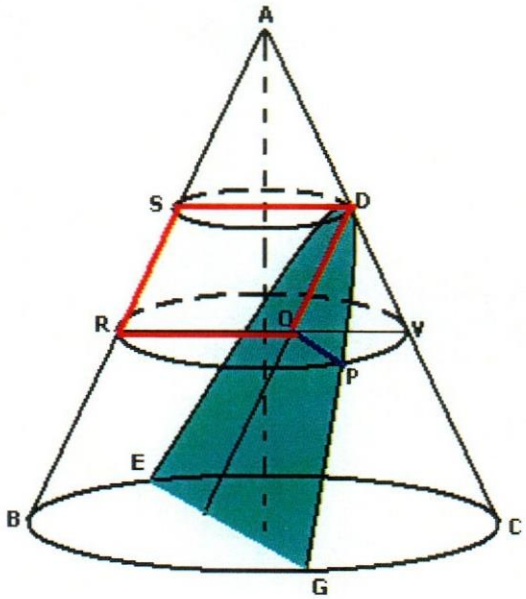


Figura 39: Parábola de Apolonia 2. Elaboración propia

$$y^2 = \overline{OP}^2 = \overline{RO}\cdot\overline{OV} \quad \text{por} \quad (I)$$

$$y^2 = \overline{SD}\cdot\overline{OV} \quad \text{por} \quad (II)$$

$$y^2 = \overline{AS}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\cdot\overline{DO}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \overline{AS}\cdot\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}\cdot\overline{DO} \quad \text{por} \quad (III)$$

Y como $\overline{AS}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ son constantes para todo punto "P" se concluye que

.

$$\boxed{xy = 2a^2}$$

Apolonio, de lo único que adoleció en la práctica fue de la Geometría Analítica para haber sellado con broche de oro su estudio sobre las cónicas. El procedimiento descrito por Apolonio tenía dos grandes inconvenientes si se compara con la flexibilidad del tratamiento moderno que tienen los sistemas de coordenadas. El primero de ellos es que en el álgebra geométrica griega no existían magnitudes negativas y ensegundo lugar, las curvas se obtenían de forma estereométrica, es decir, como una sección de un sólido por un plano.

Apolonio, y como veremos en el tema siguiente, también Arquímedes, demostraron ciertas relaciones que se mantienen constantes entre los puntos de la parábola y la elipse.

Aquí vamos a analizar la forma como Apolonio demuestra que en toda elipse la razón entre el cuadrado de la perpendicular trazada desde cualquier punto de la elipse al eje mayor y el rectángulo construido con los segmentos en que divide a dicho eje es igual a la razón entre los cuadrados de sus semiejes menor y mayor respectivamente. (Hernández L. 2002)

El procedimiento un tanto engorroso que utilizó Apolonio lo salvaremos basándonos en los principios de la Geometría Anaíitica.

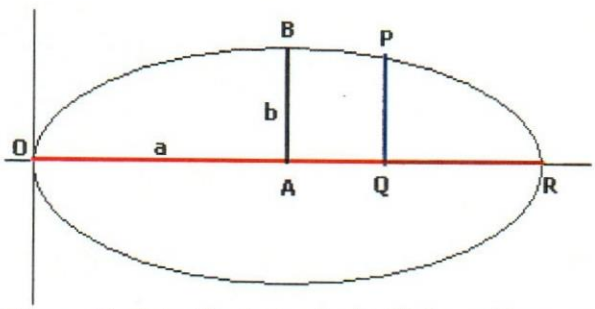


Figura 40: Relación de Apolonio. Elaboración propia

Sea el punto P un punto de la elipse de coordenadas (x, y), entonces $\overline{OA} = a$; $\overline{AB} = b$ $\overline{OQ} = x$; $\overline{PQ} = y$; y $\overline{QR} = 2a - x$.

De las hipótesis anteriores se deduce que $\overline{OQ} \cdot \overline{QR} = x(2a - x)$ o lo que es los mismo que

$$\overline{OQ} \cdot \overline{QR} = x(2a - x) = a^2 - (x - a)^2 \text{ (I)}$$

Por otra parte $\overline{OA} \cdot \overline{AR} = a^2$ (II)

De (I) y (II) se obtiene $\dfrac{\overline{OQ}\cdot\overline{QR}}{\overline{OA}\cdot\overline{AR}}=\dfrac{a^2-(x-a)^2}{a^2}=1-\dfrac{(x-a)^2}{a^2}$

Y de la ecuación de la elipse $\dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ se concluye que

$$\frac{\overline{OQ}\cdot\overline{QR}}{\overline{PQ}^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

Siguiendo en este mismo orden de ideas, y utilizando el mismo lenguaje retórico establece en las proposiciones I.11 y I.12 la relación entre las áreas de los cuadrados construidos con lado la ordenada del punto de la curva y el rectángulo obtenido con lados la abscisa del punto y el lado recto.

Así para la parábola afirma que: " La parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa y el lado recto"

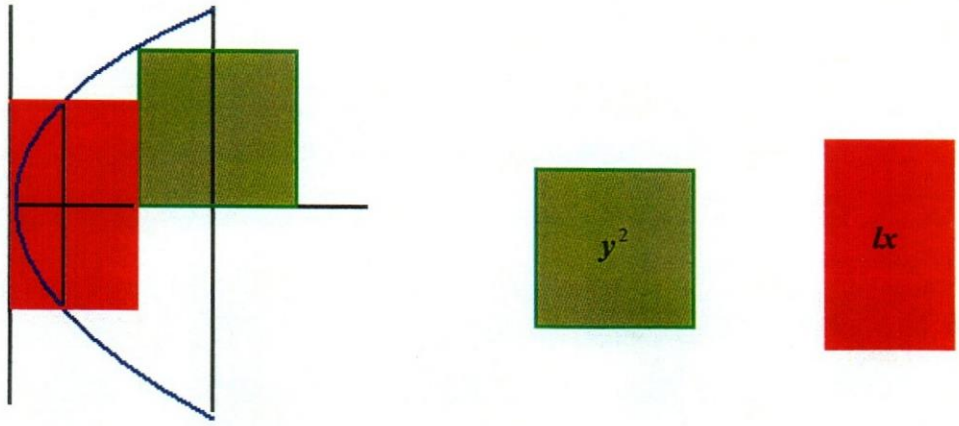


Figura 41: Método de Áreas, Parábola. Elaboración propia

Para la elipse: "El cuadrado construido con la ordenada como lado equivale a un área rectangular aplicada siguiendo el lado recto como altura y la abscisa como base, aumentada de otra área semejante a la que tenga un cuadrado de base el cociente del semiejes menor y mayor multiplicados por la longitud de la abscisa del punto"

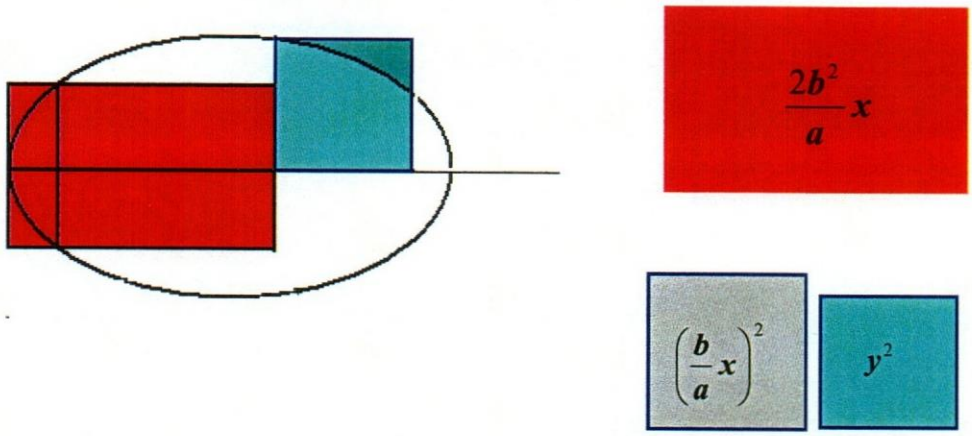


Figura 42: Método de Áreas, Elipse. Elaboración propia

Para la hipérbola: "El cuadrado construido sobre la ordenada equivale a un área rectangular aplicada siguiendo el lado recto como altura y la abscisa como base, disminuida de otra área semejante a la que tenga el eje transverso (diámetro de la base) y la mitad del eje no transverso como altura"

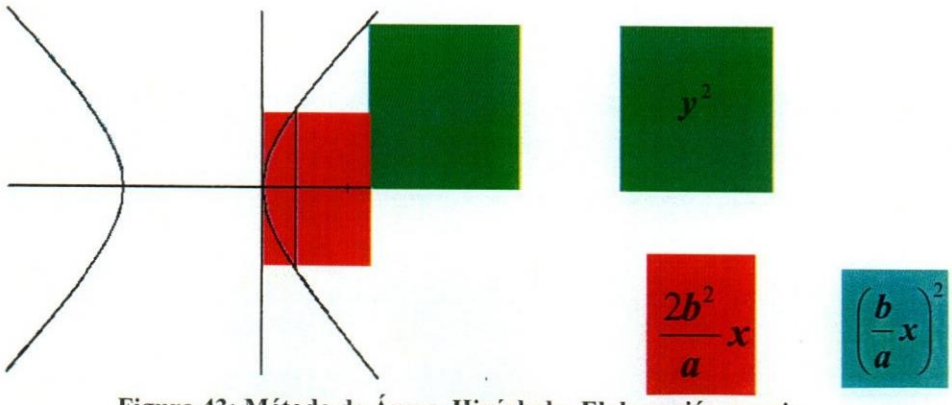


Figura 43: Método de Áreas, Hipérbola. Elaboración propia

Arquímedes y su ley de oro aplicada a las cónicas

"Es imposible encontrar en toda la geometría cuestiones más difíciles y más importantes explicadas con términos más sencillos ni más comprensibles que los teoremas de la inteligencia sobrehumana de Arquímedes"
Plutarco. Vidas Paralelas

Arquímedes en todo momento supo conjugar en forma armoniosa la Geometría con la Ingeniería, sus dos grandes pasiones. Es así como mediante la mecánica pesaba en forma imaginaria áreas y volúmenes para determinar su valor.

Su aporte más significativo en este sentido está asentado en su tratado de la Cuadratura de la parábola.

Demuestra que: "Una sección de parábola excede en un tercio al área del triángulo de igual base que la sección y cuyo vértice es el de la parábola". Dicho de otra forma, la superficie de la sección de parábola es igual a cuatro tercios de la superficie del triángulo inscrito. (Pérez, M. Teresa & Arratia, Óscar 2009)

Veamos la forma genial desarrollada por Arquímedes:

Para el entendimiento del esquema seguido es necesario precisar algunos aspectos que necesitaremos y de los cuales haremos su demostración.

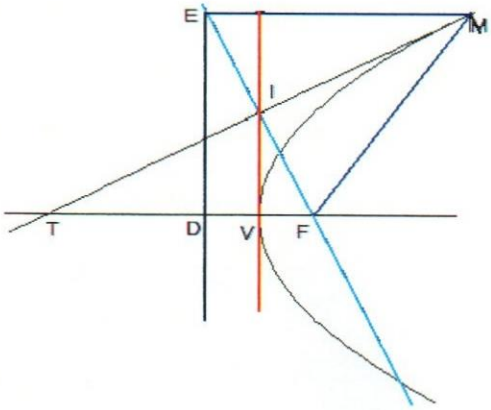


Figura 44: Teorema 1 , Arquímedes. Elaboración propia

Teorema 1. "El lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas a las tangentes a una parábola desde el foco es una recta tangente a la parábola por su vértice"

Sea M un punto cualquiera de la parábola MV y MT la tangente por M.

Desde F tracemos FI, perpendicular a MT y llamemos E al simétrico de F respecto del punto I de contacto entre la tangente MT y la perpendicular FE.

Por lo tanto como FI=IE. Uniendo M con E se forman los triángulos FMI y IME, que son iguales por tener MI común IE=IF por construcción y los ángulos en I iguales por lo que ME=MF; de acuerdo con la propiedad de los puntos de la parábola resulta que el punto E pertenece a la directriz de la parábola; como FV=VD por ser V el vértice de la parábola, resulta que ED es la directriz de la parábola e IV es paralela a ED por ser los triángulos FED y FIV semejantes.

En conclusión IV es el lugar geométrico buscado.

Teorema 2 "La subtangente[5] queda dividida en partes iguales por el vértice de la parábola".

Sea PT la proyección de MT sobre el eje y PN la subnormal[6]. FE la perpendicular a MT por el foco F hasta la directriz.

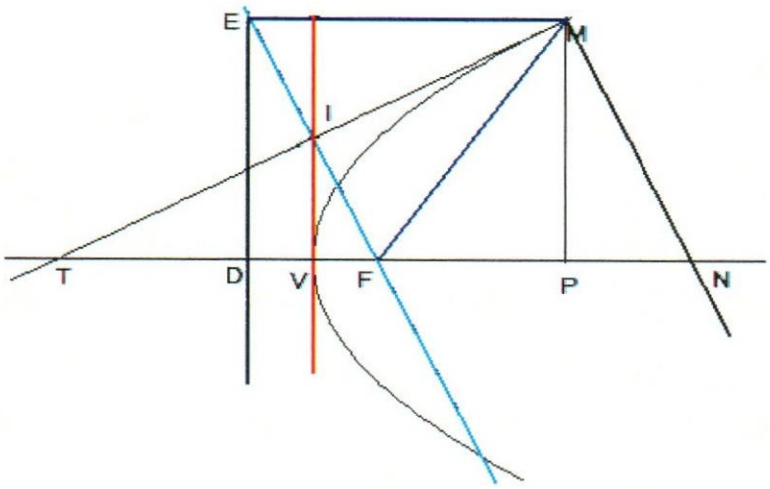


Figura 45: Teorema 2, Arquímedes. Elaboración propia

Por lo tanto tenemos que NM es paralela a FE; del teorema 1, VI paralela a PM y FI=IE.

[5] Subtangente; segmento limitado por el pie de la proyección del punto de tangencia sobre el eje de la parábola y el punto de corte de la tangente con el mismo eje.
[6] Subnormal : segmento limitado por el pie de la proyección del punto de tangencia sobre el eje de la parábola y el punto de corte de la normal con el mismo eje.

Por otra parte los triángulos EIM y TIF son iguales por tener un lado igual y los ángulos adyacentes iguales, luego ME=TF y TI=IM.

Por ser los triángulos TIV y TMP semejantes de razón un medio resulta TV=VP.

Arquímedes demuestra en la proposición número V de la "cuadratura de la parábola" que en todo segmento de parábola limitada por una cuerda perpendicular a su eje, y la tangente a la parábola por uno de los extremos del segmento de la parábola, si por un punto cualquiera del segmento de la parábola se traza una paralela al eje, los segmentos limitados por la tangente, la parábola y la cuerda son proporcionales a los segmentos que determina dicha recta sobre la cuerda de la parábola.

Veamos la proposición anterior demostrada usando la geometría analítica.

Sea el segmento de parábola ABC de vértice B, CZ la tangente a la parábola por C, O un punto cualquiera del segmento de la parábola, DE eje de la parábola y MQ paralela al eje por O.

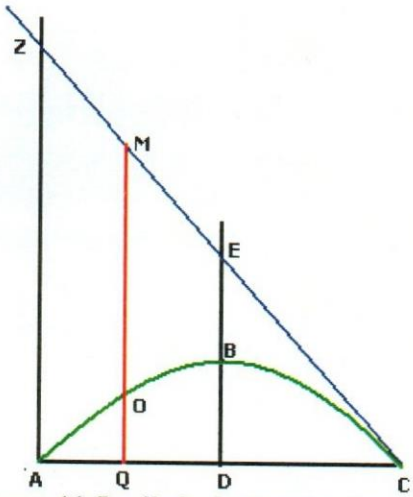


Figura 46: Parábola de Arquímedes. Elaboración propia

Sin perder generalidad y por sencillez de la demostración supondremos que la parábola responde a la ecuación $x^2 = h - y$, por lo que los puntos a considerar tienen por coordenadas $C(\sqrt{h},0)$, $A(-\sqrt{h},0)$, $D(0,0)$, $B(0,h)$, $E(0,2h)$ (teorema 2), $O(x, h - x^2)$ y $Q(x,0)$.

Los triángulos CDE y CQM resultan semejantes por lo que $\overline{QM} = \overline{QC}\,\dfrac{\overline{ED}}{\overline{DC}} = \dfrac{(\sqrt{h} - x)2h}{\sqrt{h}}$, por lo que las coordenadas del punto M son $M\left(x, (\sqrt{h} - x)\sqrt{h}\right)$

De todo lo anterior se deduce que

$$\overline{AC} = 2\sqrt{h}\ ; \overline{AQ} = \sqrt{h} + x\ ;\ \overline{MQ} = \left(\sqrt{h} - x\right)\sqrt{h}\ \text{ y } \overline{OQ} = h - x^2 .$$

Es decir

$$\overline{AC} \cdot \overline{OQ} = 2\sqrt{h}\left(h - x^2\right)$$

Y

$$\overline{MQ} \cdot \overline{AQ} = 2\sqrt{h}\left(\sqrt{h} - x\right)\left(\sqrt{h} + x\right) = 2\sqrt{h}\left(h - x^2\right)$$

En conclusión

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}$$

Ya estamos en condiciones de demostrar la proposición número V, en la que se conjugan en forma armoniosa la mecánica y la geometría. Completemos la Figura anterior, por A tracemos la recta AZ que corta a la tangente CE en Z, igualmente hagamos pasar una recta por los puntos C y B, que corten a CE en K y prolonguemos CK en un segmento KT de longitud igual a CK. Se forman los triángulos semejantes CKZ con CNM y CBE, y los triángulos ACZ. CQM y CDE.

Como DB es igual a BE, se deduce que MN=NM y AK=KZ

De estos triángulos se concluye que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{KN}}$ (I)

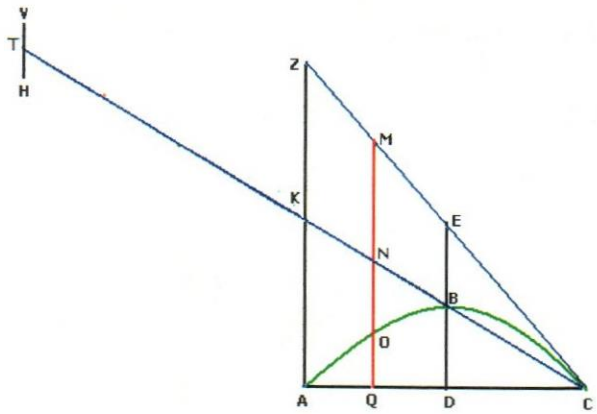


Figura 47: Método de la Palanca, Arquímedes. Elaboración propia

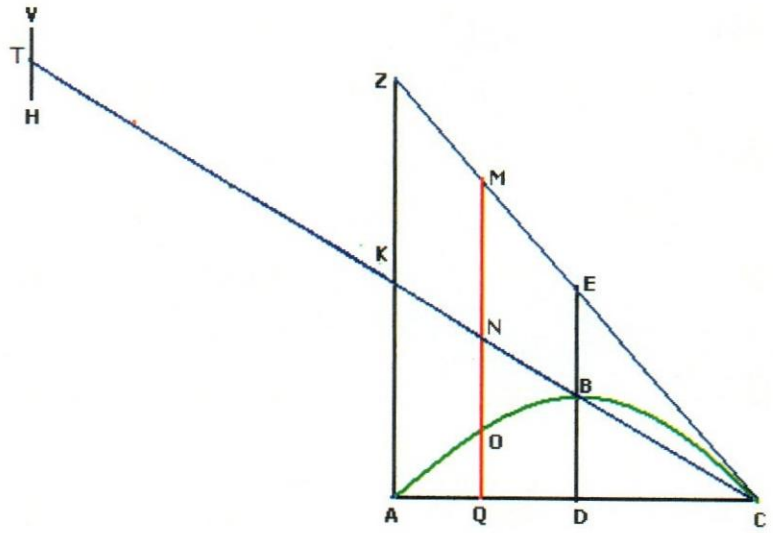


Figura 48:Método de la Palanca, Arquímedes. Elaboración propia

De la proposición demostrada anteriormente se tiene que

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} \quad \text{(II)},$$

de (I) y (II) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} = \dfrac{\overline{KC}}{\overline{KN}}$

y dado que KC=KT,

se obtiene

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{KT}}{\overline{KN}} \quad \text{(III)}$$

Sobre el punto T ubiquemos un segmento VH de longitud igual a OQ, de tal forma que el punto medio del segmento coincida con el punto T.

Sustituyendo en (III) resulta

$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{VH}} = \frac{\overline{KT}}{\overline{KN}}$$

Si ahora suponemos que MQ y VH son masas con N y T centros de gravedad[7] y suponiendo que TN es una balanza con punto de apoyo en K, y aplicando el principio de la palanca[8], se tiene que:

$$\overline{MQ} \cdot \overline{KN} = \overline{VH} \cdot \overline{KT} \quad \text{(IV)}$$

De tal manera que K resulta ser el centro de gravedad del sistema formado por los elementos involucrados en (IV)

Si repetimos el proceso a los infinitos segmentos MQ que se pueden formar en el segmento de parábola escogido y sumando todos ellos, podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{MQ}_i \, \overline{KN}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{VH}_i \, \overline{KT}$$

El conjunto de todos los $\overline{VH}_i$ constituyen el área (la masa) del segmento parabólico ABC y el conjunto de los segmentos $\overline{MQ}_i$ constituyen el área (la masa) del triángulo CZA.

De esta manera $\sum_{i=1}^{n} \overline{MQ}_i \, \overline{KN}_i$ es el momento[9] total producido con respecto al punto K por cada uno de los segmentos $\overline{MQ}_i$.

Sabemos que el centro de gravedad de un triángulo se encuentra en el baricentro, centro de corte de las medianas, y que dicho punto se encuentra a los dos tercios de cada vértice. Llamaremos G a dicho punto. Combinando el principio de equilibrio de los cuerpos con este punto tenemos que el momento total producido por el triángulo con respecto a K es igual a la distancia desde el centro del triángulo hasta el punto K, multiplicado por la masa (área S_2) del triángulo.

[7] Centro de gravedad es el punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas de gravedad que actúan sobre las distintas porciones materiales de un cuerpo centro de fuerzas. El centro geométrico equivale al centro de gravedad cuando el cuerpo es homogéneo.

[8] Ley de las palancas: Para el equilibro de los cuerpos, se cumple que Potencia (P) por su brazo (d) es igual a Resistencia (R) por el suyo (d´)

[9] Momento de primer orden definido por el producto de la masa por sus distancias a un punto de referencia

Es decir $\sum_{i=1}^{n} \overline{MQ}_i \overline{KN}_i = \overline{GK} \cdot S_2$ (V)

siendo $\overline{GK} = \frac{1}{3}\overline{KC} = \frac{1}{3}\overline{KT}$

Igualmente llamando S_1 al área del segmento parabólico tendremos que :

$\frac{1}{3}\overline{KT} \cdot S_2 = \overline{KT} \cdot S_1$ (VI)

De (IV) , (V) y (VI) concluimos que

$\frac{1}{3}\overline{KT} \cdot S_2 = \overline{KT} \cdot S_1$

y simplificando adecuadamente, se obtiene la proposición de Arquímedes:

$$\frac{1}{3}S_2 = S_1$$

Descartes y Fermat & tamreF y setracseD

Es imposible encontrar la forma de convertir un cubo en la suma de dos cubos, una potencia cuarta en la suma de dos potencias cuartas, o en general cualquier potencia más alta que el cuadrado en la suma de dos potencias de la misma clase; para este hecho he encontrado una demostración excelente. El margen es demasiado pequeño para que la demostración quepa en él.

Fermat

"Cogito Ergo sum"

"Daría todo lo que sé, por la mitad de lo que ignoro"

"La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles"

René Descartes

Las puertas a la Geometría Analítica fueron abiertas, ya en el siglo XVII por Descartes y Fermat, pero sólo incluían problemas planos

El oscurantismo sobre los resultados obtenidos por Apolonio sobrevivieron sin cambios hasta que Fermat y Descartes, en una de las primeras aplicaciones de la Geometría Analítica (Fermat y Descartes se pueden considerar los fundadores de la Geometría Analítica). Lo verdaderamente interesante es que ambos reconocen que una ecuación dada con dos incógnitas está asociada a una curva plana con respecto a un sistema de coordenadas. En el segundo libro establece que toda ecuación de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ es una cónica y su naturaleza depende del signo del discriminante $b^2 - 4ac$. Descartes sólo examina con detalle un lugar geométrico, y es en conexión con el problema del lugar de las tres y cuatro rectas de Pappus

Por otro lado, Fermat deduce las ecuaciones de la recta, la circunferencia y todas las secciones cónicas. (Hernández L. 2002)

El hecho de que se llame Geometría Cartesiana en vez de Fermatiana, obedece exclusivamente a la divulgación de la obra de ambos, ya que Fermat, que sin ser ajeno a los halagos que recibía de sus contemporáneos, no le gustaba publicar. Mientras tanto Descartes recibió gran divulgación debido fundamentalmente a su obra La Introducción y la Geometría.

En las siguientes páginas expondré varias formas de expresar las ecuaciones de las cónicas vistas como Lugares Geométricos[10] y siempre bajo el tutelaje de la Geometría Analìtica.

- Primera forma: Relación distancia a los focos o al foco.

La elipse como lugar geométrico:

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano para los que la suma de las distancia a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

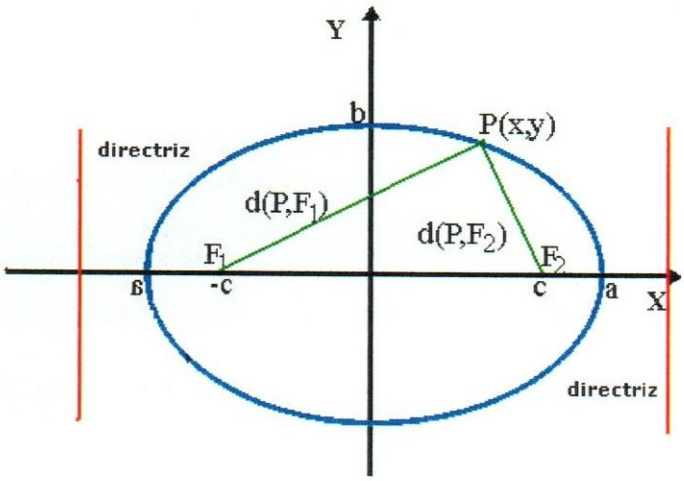


Figura 49: Elipse como L.G.. Elaboración propia

Supongamos que los focos son $F_1=(c,0)$ y $F_2=(-c,0)$ y llamemos $2a$ a la suma de las distancias, entonces los puntos $P(x,y)$ de la elipse verifican

$$\sqrt{(x+c)^{2.}}+\sqrt{(x-c)^2}=2a$$

simplificando esta ecuación se llega a : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \quad \text{donde} \qquad b^2=a^2-c^2$$

[10] Lugar Geométrico es el conjunto de puntos que cumplen cierta propiedad geométrica de tal modo que todos los puntos que la cumplen pertenecen al lugar y lo que no lo cumplen no están en el lugar geométrico

Esta es la ecuación reducida de la elipse en la que los ejes coordenados son los ejes de simetría de la elipse y el origen de coordenadas es su centro.

La ecuación focal de la elipse

Eliminando denominadores y agrupando términos convenientemente obtenemos:

$$(x-c)^2+y^2-\frac{c^2}{a^2}(x-\frac{a^2}{c})^2=0$$

Esta es la llamada ecuación focal en la que el foco es el punto **(c,0)** y la recta paralela al eje **Y**, dada por la relación $x=\frac{a^2}{c}$ constituye la directriz de la elipse.

La razón $\frac{c}{a}=e$ se define como excentricidad, que como podemos observar es estrictamente menor que 1. Ya que $c=\sqrt{a^2-b^2}<a$

La hipérbola como lugar geométrico

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Supongamos que los focos son F_1=(c,0) y F_2=(-c,0) y llamemos *2a* a la diferencia de las distancias, entonces los puntos P(*x,y*) de la hipérbola verifican (*c*>*a*) :

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Simplificando se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ donde}$$

$$b=\sqrt{c^2-a^2}$$

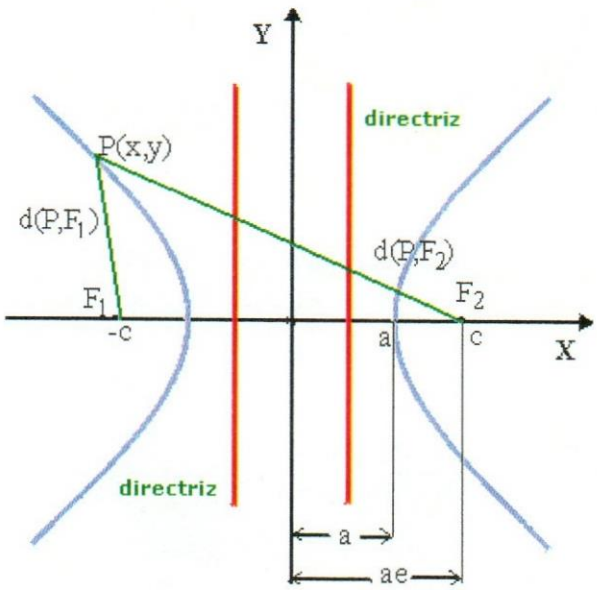


Figura 50: Hipérbola como L.G.. Elaboración propia

La ecuación focal de la hipérbola

Eliminando denominadores y agrupando términos convenientemente obtenemos:

$$(x-c)^2+y^2-\frac{c^2}{a^2}(x-\frac{a^2}{c})^2=0$$

Esta es la llamada ecuación focal, en la que el foco es el punto **(c,0)** y la recta paralela al eje **Y**, dada por la relación $x=\frac{a^2}{c}$ constituye la directriz de la elipse.

La razón $\frac{c}{a}=e$ se define como excentricidad, que como podemos observar es estrictamente mayor que 1. Ya que $c=\sqrt{a^2+b^2}>a$

La parábola como lugar geométrico

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (el foco) y una recta dada (la directriz).

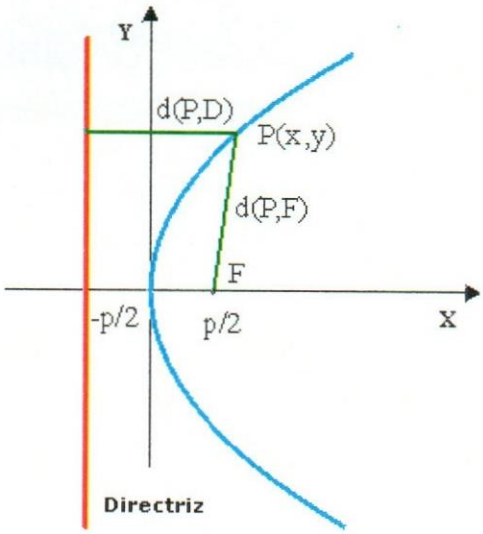


Figura 51: Parábola como L.G.. Elaboración propia

Supongamos que el foco es F=*(p/2,0)* con *p>0* y la recta directriz es *x=-p/2,* entonces los puntos P(*x,y*) de la parábola verifican la ecuación: $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$

Simplificando se obtiene:

$$y^2=2px$$

La ecuación focal de la parábola viene dada por la ecuación:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2-\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0$$

La directriz es la recta $x=-\frac{p}{2}$ y la excentricidad $\frac{c}{a}=1$

Segunda forma: Razón de distancia a un punto y a una recta.

Definición: Se llama cónica al lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de las distancias a un punto fijo y una recta fija es constante.

El punto fijo recibe el nombre de Foco, y lo designaremos $F(c,0)$.

La recta fija Directriz, la que representaremos con la letra $l = \frac{a^2}{c}$.

La razón entre las distancias se denomina excentricidad y se expresará con $e = \frac{c}{a}$.

Al punto del lugar lo expresaremos $P(x,y)$

Aplicando la definición se tiene que para cualquier $P(x,y)$ del lugar se cumple que:

$$\frac{\overline{PF}}{d(p,l)} = e \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|} = \frac{c}{a}$$

Transponiendo términos y operando se obtiene:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{c}{a}\left|x-\frac{a^2}{c}\right| \qquad \Leftrightarrow a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right) = c^2x^2-2ca^2x+a^4c^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2 = a^2\left(a^2-c^2\right)$$

Que es la ecuación general de las cónicas.

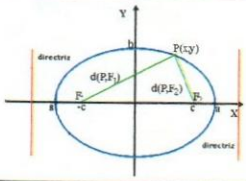
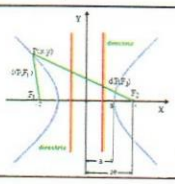
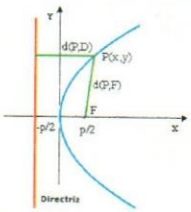
Dependiendo de la relación entre a y c se obtienen las ecuaciones particulares de cada una de ellas.

Si e<1, la cónica resultante es la Elipse

Si e=1 , la cónica resultantes es la Parábola

Si e>1, la cónica resultante es la Hipérbola

En efecto, haciendo $a^2-c^2=b^2$, se concluye que :

Relación a,c	excentricidad	Ecuación	Nombre	Gráfica
$a > c$	$e = \frac{c}{a} < 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse	
$a < c$	$e = \frac{c}{a} > 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hipérbola	
$a = c$ La directriz pasa por el foco y se convierte en una recta doble	Haciendo $F(\frac{p}{2},0)$ y la directriz $x = -\frac{p}{2}$	$y^2 = 2px$	Parábola	

(O'Connor, JJ.& Robertson E.F. 2006)

- Tercera forma: Relación distancia desde un punto a un punto fijo y una circunferencia:

Definición: Se llama cónica al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo y de una circunferencia.

El punto fijo recibe el nombre de Foco, y lo designaremos F .

La circunferencia fija Directriz, de centro F'

La distancia a la circunferencia es la tomada en la dirección de la normal

Al punto del lugar lo expresaremos P

Los puntos F y F' se denominan focos.

La recta que contiene a F y F', se denomina eje focal.

La mediatriz de $\overline{FF'}$ se llama eje no focal.

El pie de la mediatriz es el centro de la cónica.

El radio de la circunferencia lo llamaremos R

En la parábola sólo se considera un foco, ya que el centro de la circunferencia es un punto impropio.

Si el punto P es interior a la circunferencia se engendra una elipse.

Si el punto P es exterior se forma una hipérbola.

Y si el radio R de la circunferencia se hace crecer indefinidamente se transforma ésta en una recta y el lugar engendrado por P es una parábola.

Analicemos cada caso:

Elipse.

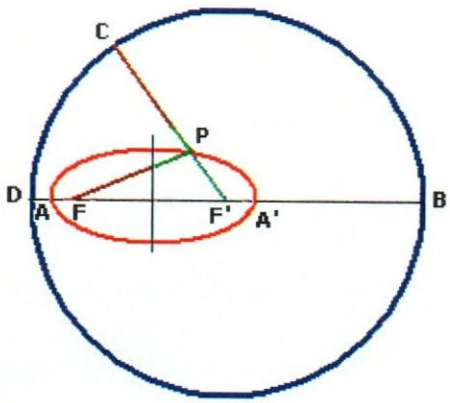


Figura 52: Elipse : Punto- Circunferencia. Elaboración propia

Sea $\overline{F'C}$ un radio cualquiera de la circunferencia F' y P un punto de $\overline{F'C}$, tal que la distancia de P a F, sea igual a la distancia de P a C.

Entonces

$$\overline{PC} = \overline{PF} \text{ y } \overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{PC} + \overline{PF'} = R$$

Sobre el diámetro $\overline{BD}$, se encuentran los puntos A y A' que pertenecen al lugar, por lo que $\overline{FA} = \overline{DA}$ y $\overline{FA'} = \overline{A'B}$, de donde $2\overline{AF} + 2\overline{FA'} = 2R$ $\Leftrightarrow \overline{AF} + \overline{FA'} = 2R = \overline{AA'} = 2a$

Siendo $\overline{AA'}$ la longitud del eje focal y designado por 2^a.

En conclusión la curva engendrada por P es una elipse. (Bruño 1971)

Hipérbola:

Sea $\overline{F'C}$ un radio cualquiera de la circunferencia F' y P un punto de $\overline{F'C}$, tal que la distancia de P a F, sea igual a la distancia de P a C.

Entonces $\overline{PC} = \overline{PF}$ y $\overline{PF'} - \overline{PF} = \overline{PF'} - \overline{PC'} = R$

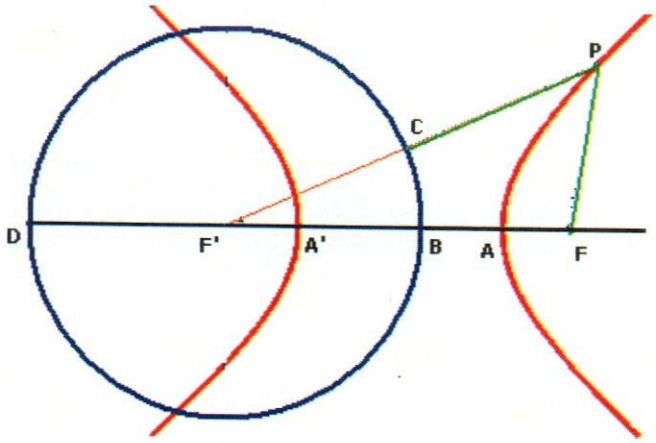


Figura 53: Hipérbola: Punto-Circunferencia. Elaboración propia

Sobre la recta que contiene a $\overline{BD}$, se encuentran los puntos A y A' que pertenecen al lugar, por lo que $\overline{FA} = \overline{BA}$ y $\overline{FA'} = \overline{A'D}$, de donde $2\overline{AF'} - 2\overline{FA} = 2R \Leftrightarrow \overline{AF} + \overline{FA'} = 2R = \overline{AA'} = 2a$

Siendo $\overline{AA'}$ la longitud del eje focal y designado por $2a$. (Bruño 1971)

Parábola:

En el caso de la parábola, al igual que en el caso de la tercera forma, su estudio se reduce a analizar la distancia desde P al foco con respecto a la distancia desde P a la directriz, por lo tanto no entraremos más en detalle.

- Cuarta forma: Curvas cuadráticas

Descartes establece que toda ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ es una cónica y su naturaleza depende del signo del discriminante $b^2 - 4ac$.

Debeaune en Notae Beves demuestra que las ecuaciones $y^2=xy+bx$, $y^2=-2dy+bx$ e $y^2=bx-x^2$, representan respectivamente hipérbolas, parábolas y elipses. Pero es en 1658 cuando uno de los miembros del grupo de Van Schooten, Jan de Witt reduce todas las ecuaciones de segundo grado en x e y a formas canónicas, por medio de rotaciones y traslaciones de los

ejes. De Witt sabía cómo reconocer cuándo tal ecuación representaba una elipse, cuándo una parábola y cuándo una hipérbola, según que el llamado discriminante fuera negativo, nulo o positivo.

Definición: Una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano (x,y) que satisfacen una ecuación completa de segundo grado:

Partiendo de esta definición y utilizando procedimientos matriciales expondremos las condiciones que deben cumplirse con los coeficientes **a,b y c** , para que la curva sea considerada como Elipse, Hipérbola o Parábola.

La ecuación de una cónica se puede escribir en forma matricial como

$$(1\,x\,y)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

con

$$a_{00} = f,\ a_{11} = a,\ a_{22} = c, a_{12} = a_{21} = \frac{b}{2}, a_{01} = a_{10} = \frac{d}{2}, a_{02} = a_{20} = \frac{e}{2}$$

Una cónica queda pues definida por una matriz simétrica $A = (a_{ij})^{(2,2)}{}_{i=0,j=0}$

Clasificación de las cónicas

Existen ciertas cantidades asociadas a la matriz de la cónica que son invariantes respecto a los movimientos del plano (rotaciones y traslaciones).

Si $A' = (a'_{ij})^{2,2}{}_{i=0,j=0}$ y $A'' = (a''_{ij})^{2,2}{}_{i=0,j=0}$ son las matrices asociadas a la cónica después de que ésta ha sufrido una rotación y una traslación, respectivamente, entonces

1) det A=det A'=det A",

2) $a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22} = a''_{11} + a''_{22}$,

3) Se define A_{ij} como la matriz adjunta de A del elemento a_{ii}

3) det A_{00} = det A'_{00} = det A''_{00}.

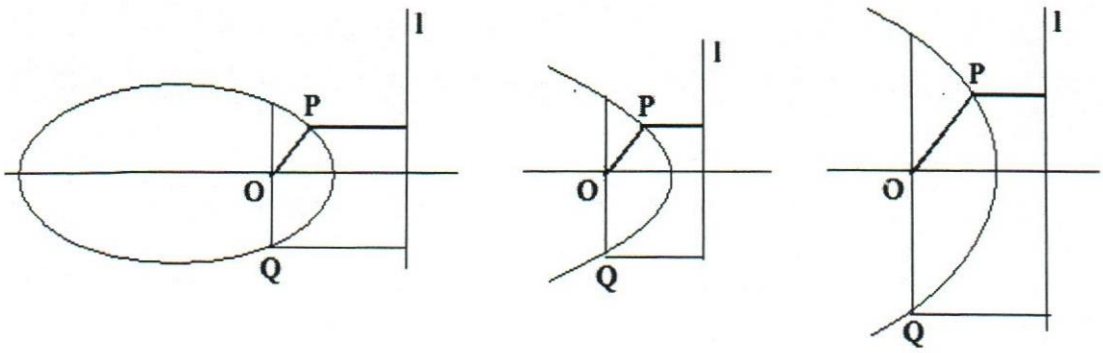
Tabla de clasificación

Dependiendo del signo y valor del determinante de A y la adjunta A_{00} la curva es una elipse, una parábola, una hipérbola o bien se devienen en rectas. (Pérez, M. Teresa & Arratia, Óscar 2009)

$$\det.A \neq 0 \begin{cases} \det A_{00} \neq 0 \begin{cases} \det A_{00} > 0 \begin{cases} signo(\det A) = signo(a_{11} + a_{22}) \text{Elipse imaginaria} \\ signo(\det A) \neq signo(a_{11} + a_{22}) \text{Elipse real} \end{cases} \\ \det A_{00} < 0 \text{ Hipérbola} \end{cases} \\ \det A_{00} = 0 \text{ Parábola} \end{cases},$$

- Las cónicas en coordenadas polares:

  En coordenadas polares: Si O es el foco, l la directriz, e la excentricidad, Q extremo del lado recto y P un punto de la curva, se define cónica como el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la $\dfrac{\overline{PO}}{d(p,l)} = e$.



$$\overline{OP} = e\,\mathrm{d(P,l)} = \mathrm{e}\left[\mathrm{d(Q,l)} - \mathrm{r}\cos\theta\right] = \overline{\mathrm{OQ}} - e \cdot r\cos\theta$$

Dandelin: La conjunción entre lo geométrico y lo analítico

"Dada una superficie cónica y un plano que la secciona formando una cónica, siempre se puede dibujar una o dos esferas tangentes interiores a la superficie cónica y al plano de corte".

Germinal Pierre Dandelin

El desarrollo de la Geometría Anlítica se convirtió en un instrumento de evolución y desarrollo para las distintas ciencias. Dandelìn haciendo gala de su inteligencia y mediante la combinación de la Geometría Helénica y la Geometría de Descartes y Fermat desarrolló su famoso teorema que lleva su nombre, Las Esferas de Dandelín.

Según algunos expertos fue el primero en definir los conceptos de focos y directriz para las cónicas, siempre desde un punto de vista espacial, aunque según consta en *Elementa curvarum linearum* la palabra directriz se utilizó por primera vez por de Witt

Dandelín se basa en un cono y una o dos esferas convenientemente ubicadas junto a un plano tangente a la esfera o a las esferas y que corta a las generatrices.

Expondré en el siguiente espacio la forma como lo hizo Dandelìn, para concluir la presente investigación sobre el desarrollo de las cónicas y sus protagonistas. (Alonso Borrego 2004)

En primer lugar utilizaré el concepto de lugar geométrico y en una segunda parte el desarrollo se hará comparando los ángulos formados por las generatrices y el eje del cono con el ángulo formado por el plano que secciona al cono y su eje

En ambos casos analizaré las tres cónicas formalmente.

Teorema 1:

a) "Dada una superficie cónica y dos esferas tangentes interiores, el plano que secciona a todas las generatrices de una hoja de la superficie cónica y tangente a las dos esferas forma una elipse con la superficie cónica".

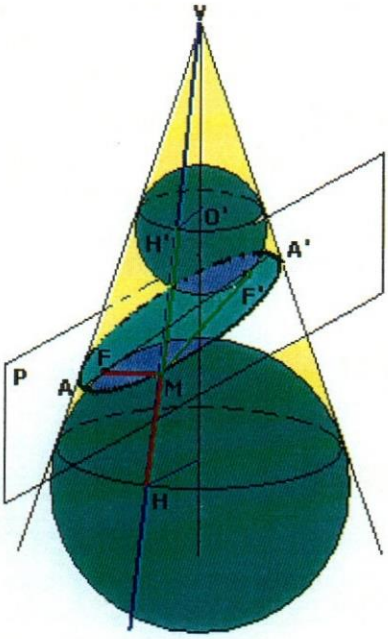


Figura 54: Esferas de Dandelin, Elipse. Elaboración propia.

Sea la superficie V y las esferas O y O', tangentes interiores a la superficie V. Se traza el plano P tangente interior a las esferas en los puntos F y F', que corte a todas las generatrices de la superficie cónica, determinando con ésta la curva FMF'.

Sea M un punto cualquiera de la curva y hagamos pasar por M la generatriz VM que toca a las superficies esféricas en los puntos H y H'.

Se cumple que los triángulos VH'O' y VHO son semejantes por lo que $\frac{\overline{VH'}}{\overline{HH'}} = \frac{\overline{VO'}}{\overline{HO}}$., y como $\overline{VH'}$, $\overline{VO'}$ y $\overline{VO}$ son constantes, entonces $\overline{HH'}$ es constante.

Adicionalmente por potencia de un punto con respecto a una esfera se cumple que:

$$\overline{MF} = \overline{MH} \quad (1) \quad \text{y} \quad \overline{MF'} = \overline{MH'} \quad (2)$$

Y sumando (1) con (2) se obtiene que:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{MH} + \overline{MH'} = \overline{HH'}$$

Como A es un punto de la curva satisface la relación anterior, por lo que

$$\overline{HH'} = \overline{AA'} = 2a$$

En conclusión la curva formada es una elipse.

b) "La curva engendrada por un plano que corte a las dos hojas de una superficie cónica y sea tangente a dos esferas tangentes interiores, una en cada una de las hojas de la superficie cónica es una hipérbola".

Sea la superficie V y las esferas O y O', tangentes interiores a la superficie V. Se traza el plano P tangente externo a las esferas en los puntos F y F', que corte a las dos ramas de la superficie cónica, determinando con ésta la curva FMF'.

Sea M un punto cualquiera de la curva y hagamos pasar por M la generatriz VM que toca a las superficies esféricas en los puntos H y H'.

Se cumple que los triángulos VH'O' y VHO son semejantes por lo que $\frac{\overline{VH'}}{\overline{HH'}} = \frac{\overline{VO'}}{\overline{HO}}$., y como $\overline{VH'}$, $\overline{VO'}$ y $\overline{VO}$ son constantes, entonces $\overline{HH'}$ es constante.

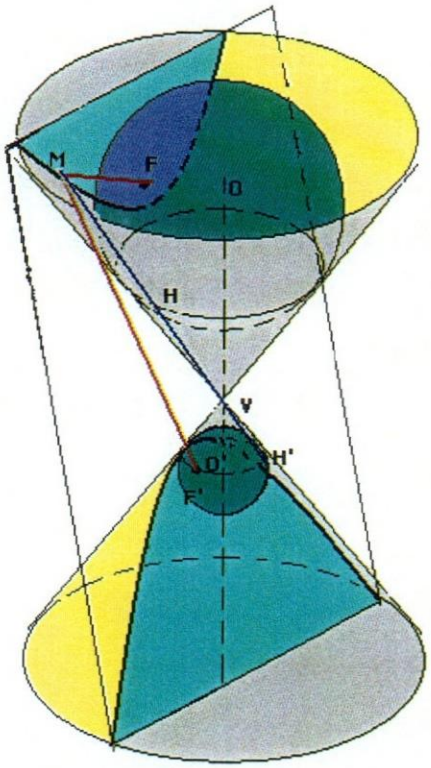


Figura 55:Esferas de Dandelin, Hipérbola. Elaboración propia

Adicionalmente por potencia de un punto con respecto a una esfera se cumple que:

$$\overline{MF} = \overline{MH} \quad (1) \quad \text{y} \quad \overline{MF'} = \overline{MH'} \quad (2)$$

Y sumando (1) con (2) se obtiene que:

$$\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{MH} + \overline{MH'} = \overline{HH'} = 2a$$

En conclusión la curva formada es una hipérbola.

c) "La curva engendrada por un plano que corte paralelamente a la generatriz de una rama de una superficie cónica y sea tangente a una esfera tangente interior, es una parábola".

Sea la superficie V y la esfera O, tangente interiores a la superficie V. Se traza el plano P tangente a la esfera en el punto F, que corte a la superficie cónica y sea paralela a la generatriz VH', determinando con ésta la curva FMP.

Sea M un punto cualquiera de la curva y hagamos pasar por M la generatriz VM que toca a la superficie esférica en el punto H.

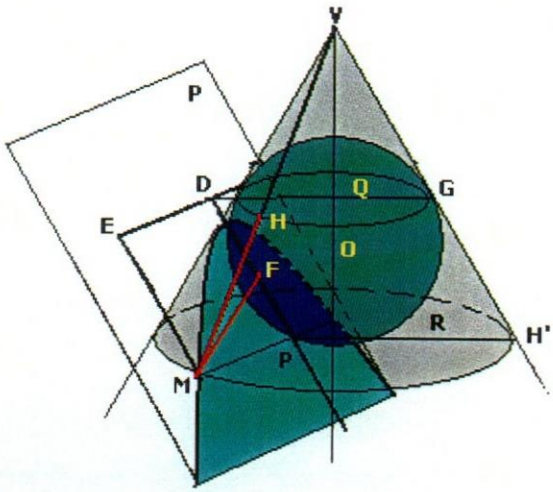


Figura 56: Esfera de Dandelin, Parábola. Elaboración propia

Tracemos los planos Q y R perpendiculares al eje y que contienen a las circunferencias que pasan por H y M respectivamente, formando con el plano P las rectas ED y MP respectivamente.

Sean G y H' los puntos de intersección de la generatriz paralela al plano P con los planos Q y R.

Se forman los paralelogramos GDPH' y DEMP en los cuales se cumple que: $\overline{GH'} = \overline{DP} = \overline{EM}$.(I)

Por otra parte $\overline{MH} = \overline{GH'}$ (II)

por ser segmentos de generatrices comprendidos entre planos paralelos.

Y $\overline{MH} = \overline{MF}$ (III)

por ser segmentos de tangente trazados desde M a la esfera O

En conclusión de (I) , (II) y (III)

$$\overline{MF} = \overline{ME}$$

Es decir que la curva formada es una parábola.

Teorema 2

"La curva engendrada por una plano que sea tangente a una esfera inscrita en un cono determina con la superficie cónica una elipse, una parábola o una hipérbola según que el ángulo determinado por el eje de la superficie y el plano sea mayor, igual o menor, respectivamente que el ángulo formado por el eje del cono y sus generatrices".

La demostración es válida para las tres cónicas incluida la circunferencia como caso particular. (Gil Saurí 1994)

Sea V un cono de ángulo en su vértice α.

S una esfera tangente a la superficie cónica.

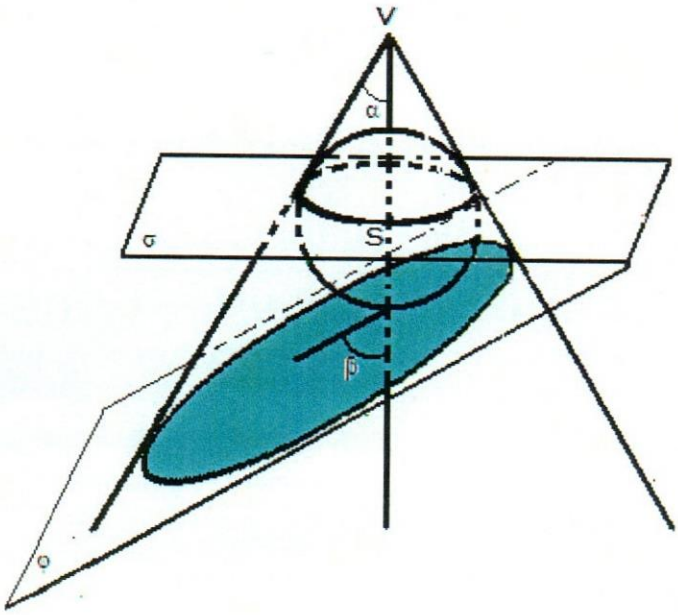


Figura 57: Esferas de Dandelin, relación angular. Elaboración propia

Sea σ el plano que contiene a la circunferencia de intersección de la esfera S con la superficie V.

Tracemos un plano φ que forme un ángulo β con el eje de la superficie V, de tal forma que determine con la superficie V una curva.

Sea l la recta de intersección de los planos σ y φ

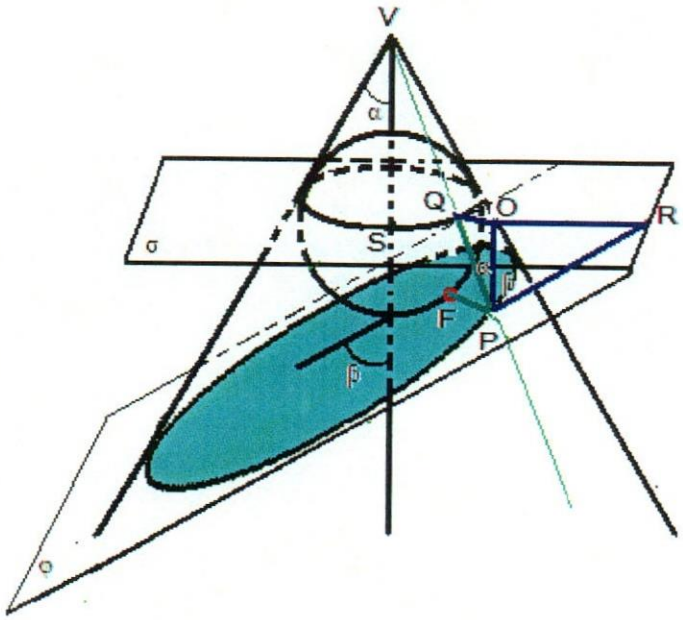


Figura 58: Esferas de Dandelin, relación angular. Elaboración propia

Por un punto cualquiera P de la curva de intersección tracemos una perpendicular a σ, cuyo pie es O.

Desde V tracemos la generatriz que pasa por P y tenga en común con la circunferencia de intersección de la esfera S en el plano σ el punto Q

Unamos P con F y tracemos la perpendicular PR a l.

Unamos O con Q y O con R, formándose los triángulos POQ y POR.

Con las hipótesis planteadas tenemos: $\overline{PF} = \overline{PQ}$ (I) por ser tangentes a la esfera desde un punto externo P.

El ángulo formado por $\overline{OP}$ y la generatriz VP es α, por ser el ángulo de la superficie cónica. El ángulo formado por $\overline{OP}$ y PR es β, por ser PR segmento de φ perpendicular a l y OP paralelo al eje de V,(definición de ángulo entre una recta y un plano).

Por lo tanto en el triángulo POQ se cumple que $\overline{PO} = \overline{PQ}\cos\alpha$ (II)

En el triángulo POR se cumple que $\overline{PO} = \overline{PR}\cos\beta$ (III)

Igualando (II) y (III) $\Rightarrow \overline{PQ}\cos\alpha = \overline{PR}\cos\beta$ y por (I) $\overline{PF}\cos\alpha = \overline{PR}\cos\beta$

Es decir:

$$\overline{PF} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\overline{PR}$$

Y de acuerdo a la definición de cónica por la razón entre la distancia desde un punto P variable y el foco F con respecto a la distancia desde P hasta la directriz l, resulta que $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ coincide con la excentricidad.

Por consiguiente el resultado de la cónica depende del ángulo formado por el plano φ con el eje del cono, ya que α es constante.

Analicemos la situación:

B es un ángulo cuya variación está en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Relación β y α	***Relación cosenos***	***Cociente***	***Excentricidad***	***Nombre de la cónica***
$\beta = \pi/2$	$\cos B = 0$	$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 0$	$e = 0$	Circunferencia
$\alpha < \beta$	$\cos\alpha > \cos\beta$	$0 < \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} < 1$	$0 < e < 1$	Elipse
$\alpha = \beta$	$\cos\alpha = \cos\beta$	$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1$	$e = 1$	Parábola
$\alpha > \beta$	$\cos\alpha < \cos\beta$	$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1$	$e > 1$	Hipérbola

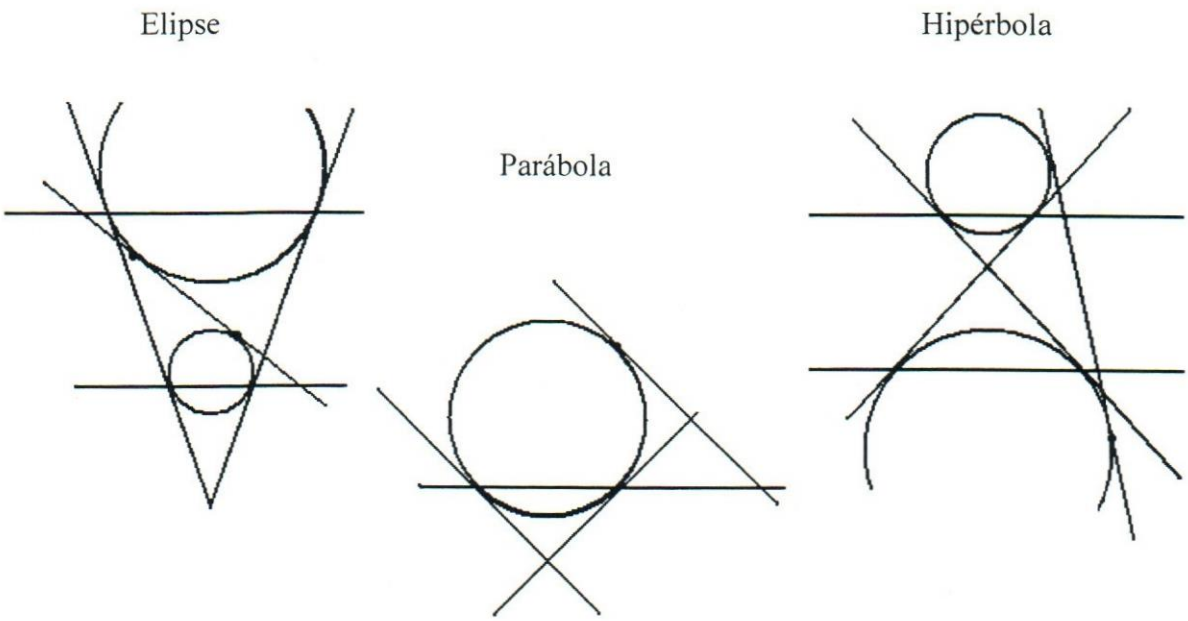


Figura 59: Esferas de Dandelin, Secciones. Elaboración propia

Conclusión

A lo largo de toda esta investigación hemos recorrido autores y aportes a los estudios de las cónicas a través del tiempo, pareciera que ya se saturó el tema, sin embargo podemos afirmar sin menor temor a equivocarnos que no es sino una introducción al estudio de estas curvas maravillosas.

Se necesitarían varios volúmenes para seguir escudriñando en su estructura, sus elementos, sus características, sus construcciones, y sobretodo sus aplicaciones en los distintos campos de las ciencias y de la ingeniería. Son curvas tan maravillosas que están presentes en infinidad de situaciones naturales y artificiales.

Ojalá que alguno de los que lean este trabajo se sientan estimulados a seguir adentrándose en su estudio para que sirvan sus aportes al ser humano en la construcción de un mundo mejor para todos.

Es fascinante saber que del descubrimiento casual de su existencia, se llegara a relacionarlo con el movimiento de los cuerpos en el espacio.

Me quedan un sin fin de preguntas, sin tener todavía respuesta para ellas, referentes a la manera como surgió el estudio de las cónicas. ¿Quién y porqué se seccionaron varios conos y las curvas encontradas se asociaron con el problema de la duplicación del cubo?. ¿Por qué Apolonio dedicó tanto tiempo de su vida al estudio de estas curvas . ¿Qué ocurrió verdaderamente para dedicarle tantos esfuerzos en su análisis?. En fin, podría seguir haciéndome preguntas y generando cada vez más expectativas.

De lo que no me queda duda es de lo agradecido que estoy a todos los que se dedicaron a entregarnos sus aportes para nuestro deleite y nuestro crecimiento intelectual.

Bibliografía

Alonso Borrego, J. L. (2004). *Las cónicas, Una visión tridimensional:Esferas de Dandelin.* Recuperado el 12 de junio de 2009, de Descartes 3D : http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/conicas_dandelin_d3/index.html

Álvarez Scherer, M. d. (mayo de 2005). *Arquímedes.* Recuperado el 23 de septiembre de 2009, de Temas de Geometría: http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/TemasGeometría/V1n1-may-2005/index.html

Babini, J. (1952). *Historia sucinta de la amtemática.* Buenos Aires: Espasa Calpe.

Boyer, C. B. (1991). *A History of Mathematics.* New York: John Wiley&Sons.

Bruce, D. (2004). *Funciones Hiperbólicas: una fuga de 25 siglos.* Recuperado el 15 de febrero de 2010, de Instituto Schiller: http://www.schillerinstitute.org/newspanish/institute schiller/ciencia/funcHiperbolicas.html

Bruño. (1971). *Geometría Curso Superior.* Madrid: Bruño.

Collete, J. P. (1986). *Historia de las matemáticas.* Mexico D.F.: Siglo XXI.

Ehrenfried Hofmann, J. (1961). *Historia de la Matemáticas.* Mexico D.F.: Uteha.

Fernàndez, Santiago & Pérez Sanz, Antonio. (2009). *Leonhard Euler.* Recuperado el 23 de octubre de 2009, de Historia de las Matemáticas: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Euler.asp

Gil Saurí, M. A. (mayo de 1994). *G.P. Dandelin y la Geometría Sintética.* Recuperado el 17 de noviembre de 2009, de Historia y Cultura de la Ingeniería Civil: http://ropdigital.ciccp.es/pdf/publico/1994/1994_mayo:3332_07.pdf

González Urbaneja, P. M. (2010). *Matemáticos:Apolonio.* Recuperado el 4 de marzo de 2009, de Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Apolonio3.asp

Hernández L., V. M. (Enero de 2002). *La Geometría Analítica de Descartes y Fermat:¿ Y Apolonio?* Recuperado el 27 de julio de 2009, de Apuntes de Historia de las Matemáticas: http://euler.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-4-analítica.pdf

Lehmann, C. H. (1959). *Geometría Analítica.* Mexico D.F.: Uteha.

Mora, J. P. (2006). *Duplicación del cubo.* Recuperado el 23 de enero de 2010, de Problema de la duplicación del cubo: http://matematicas.uclm/ita-cr/web_matematicas/trabajos/257/Duplicacion_cubo.pdf

O'Connor, JJ.& Robertson E.F. (1 de diciembre de 2006). *Pierre de Fermat.* Recuperado el 25 de Julio de 2009, de Scholl of Mathematics and Statistics University of St Andrews,Scotland: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fermat.html

Pascual Albarracín, M. E. (2008). *Cónicas de Pappus: Una generalización de las circunferencias ortogonales.* Recuperado el 20 de marzo de 2009, de Departamento

de Infraestructura, Sistemas de Aeroespaciales y Aeropuertos. Universidad Politécnica de Madrid: http://adg.infra.upm.es/documentos/pappus.pdf

Pérez Beato, M. & Sánchez Mármol, L. (1961). *Geometría: Métrica,Proyectiva y Sistemas de Representación.* Madrid: S.A.E.T.A.

Pérez, M. Teresa & Arratia, Óscar. (febrero de 2009). *Cónicas*. Recuperado el 28 de octubre de 2009, de Invitación a las Matemáticas: http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONENIDOS/conicas/conicas.htm

Rey Pastor,J. & Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática.* Barcelona: Gedisa.

Santiere, J. (1976). Diccionario Enciclopédico Quillet. En J. Santiere, *Apolonio, Cónicas, Parábola.* Mexico D.F. 6ª Ed.: Cumbre S.A.

Sections, J. A. (marzo de 2006). *krellinst.org/uces/archive/resources/conics/newconics.html*. Recuperado el 17 de julio de 2009

Tapia Moreno, F. J. (enero de 2002). *Apolonio,el geómetra de la antiguedad.* Recuperado el 13 de agosto de 2009, de Apuntes de historia de las matemáticas: http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-3-apolonio.pdf

Vera, F. (1970.). *Científicos griegos.* Madrid: Aguilar.

Walter Mora, F. (2009). *Cálculo Superior-Cónicas*. Recuperado el 3 de febrero de 2010, de Revista digital Matemática.Educación e internet: http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/Superior/curso/libro/cap1-cónicas.pdf