AAR 7230.

Trab
ED 2008
G3
V3.

INDICE

Introducción 4

Lectura 1: ¿Qué es la Matemática? ***Luís Santalo*** 6

Lectura 2: La matemática empírica. ***Julio Rey Pastor y José Babini*** 11

Lectura 3: Los babilonios. ***Julio Rey Pastor y José Babini*** 16

Lectura 4: Los egipcios. ***Julio Rey Pastor y José Babini*** 21

Lectura 5: Los griegos. ***Joseph Hoffman*** 24

Lectura 6: La Época Medieval. ***Julio Rey Pastor y José Babini*** 47

Lectura 7: La geometría analítica. ***David Berlinski*** 81

Lectura 8: El cálculo. ***David Berlinski*** 96

Lectura 9:La matemática del siglo XIX. ***Julio Rey Pastor y José Babini*** 113

Bibliografía 135

Introducción

Vamos a recorrer, a través de la selección de lecturas, la historia de uno de los principales logros del hombre: la matemática. Una advertencia a Ud. lector y estudiante de matemática, el curso está pensado para que disfrute y aprenda. Al final, si realiza las actividades propuestas, tendrá una visión panorámica del desarrollo de la matemática y su papel en las distintas culturas presentadas, aunque por supuesto habrá una calificación. No se concentre en ella, vamos a aprender, ese es el único objetivo.

La selección de lecturas establece, en orden cronológico el desarrollo de la matemática en occidente. Hemos evitado desarrollar la matemática en culturas como la maya o japonesa por dos razones. La primera es que la matemática que conocemos y estudiamos es la matemática que proviene de los griegos con influencia de la cultura árabe, china e hindú. Así nuestro curso fluye de manera continua y podemos seguir el hilo de Ariadna desde Babilonia hasta el mundo moderno. La segunda es la ignorancia del autor de la recopilación y la guía instruccional sobre la matemática de estas importantes civilizaciones; en ningún caso nuestra omisión se explica por el menosprecio de los logros matemáticos que estas civilizaciones hayan alcanzado. Una de las primeras cosas que Ud. notará es que la matemática es un elemento básico de cualquier cultura, así como lo son la música y las narraciones.

El material recopilado proviene de distintas fuentes pasando del rigor académico y erudito de la lectura de Hoffman sobre los griegos al estilo más ligero de Berlinski al hablar de Descartes. La mayor parte de las lecturas provienen del excelente libro de Rey Pastor y Babini, señalado en la bibliografía. Hemos encontrado que las lecturas ofrecen un material entretenido e informativo que se complementa con las notas y actividades de la guía instruccional. Trate de leer sobre la historia de las culturas y épocas que vamos a tratar desde el punto de vista matemático. Ubíquelas en un mapamundi, así como a las civilizaciones que se desarrollaban en las regiones vecinas, recuerde que vamos a aprender no solo matemática.

La organización de las lecturas es la siguiente: en primer lugar presentamos una lectura de Santalo titulada *¿Qué es la matemática?*, parece lógico detenernos a pensar sobre el tema que queremos desarrollar desde el punto de vista histórico. Le sigue una lectura sobre la matemática empírica donde demuestran, Rey Pastor y Babini, que la matemática es

un elemento fundamental de la cultura humana y que aparece aún antes que la escritura. De hecho los autores asoman la posibilidad que la creación de la escritura se derive de la notación matemática. Las siguientes lecturas tratan de la matemática prehelénica, analizando Rey Pastor y Babini la matemática de los babilonios y egipcios, así como su posible influencia en el mundo helénico. La matemática de los griegos es analizada con detalle y erudición por Hoffman. En esta lectura Hoffman analiza la matemática de los romanos y nos permite enlazar con la lectura de Rey Pastor y Babini sobre la matemática en el periodo medieval. En ella los autores analizan la matemática de los árabes y su influencia en el mundo europeo. La introducción de los números que usamos actualmente y el 0 constituye un avance notable. Todo ello prepara la aparición de la matemática moderna con la geometría analítica de Descartes, primera gran síntesis matemática entre el álgebra y la geometría, esto lo analiza con un estilo desenfadado Berlinsky, así como los hechos básicos de la vida de Rene Descartes. El cálculo y su origen aparece de nuevo de la mano de Berlinsky, quién centra su análisis histórico biográfico en la figura de Leibniz. Es un período de gran intuición y casi mágico. Sin embargo el concepto formal de límite aparece de la mano de Cauchy acabando con los infinitesimales e inaugura el período de rigor. Esto enlaza la lectura de Berlinsky, sobre la creación del cálculo con la siguiente de Rey Pastor y Babini. El cálculo y sus métodos intuitivos de los infinitesimales debían ser formalizados y esto ocurre en el siglo XIX como lo analiza la lectura siguiente y se estudia la aparición de las geometrías no euclídeas. Por último, el lector encontrará, en su guía instruccional, una visión de la matemática del siglo XX presentada por el prof. José Gascón.

Insistimos, relájese y prepárese a pasear por un campo vasto del conocimiento humano, vamos a ver algunos hitos del largo camino andado por la matemática y su historia.

Prof. José Gascón
UNA

Módulo I: La prehistoria y el nacimiento de la matemática en Occidente (Grecia) y sus antecedentes (Babilonia y Egipto)

Objetivo del Modulo I:
Describir, de manera pertinente, las principales ideas Matemáticas en Grecia y las civilizaciones babilónica y egipcia.

Lecturas Módulo I:

1. **¿QUE ES LA MATEMÁTICA?** Santaló, L.

2. **LA MATEMÁTICA EMPÍRICA.** Rey Pastor, J., Babini, J.

3. **LOS BABILONIOS.** Rey Pastor, J., Babini, J.

4. **LOS EGIPCIOS.** Rey Pastor, J., Babini, J.

5. **LOS GRIEGOS.** Hofmann, J.

Lectura 1

ENFOQUES: HACIA UNA DIDÁCTICA HUMANISTA DE LA MATEMÁTICA.

Santaló, L., et al.

Editorial Troquel. Buenos Aires

¿QUE ES LA MATEMÁTICA?

No es fácil definir lo que se entiende por matemática. Si acudimos al diccionario de la Real Academia Española encontramos: "Matemática es la ciencia que trata de la cantidad". A su vez, cantidad es todo lo que es capaz de aumento y disminución y puede, por consiguiente, medirse o enumerarse. Finalmente, "ciencia" es "el conocimiento cierto de las cosas por sus principios y sus causas". Todas son definiciones imprecisas, de las que difícilmente, quien no tenga ya una idea previamente formada, podrá deducir algo concreto sobre lo que realmente es la matemática. Sin embargo, por costumbre que data de siglos y de acuerdo con la opinión de las personas que en cada momento de la historia se han considerado los conductores de la matemática y sus más visibles exponentes, todos tenemos o creemos tener una idea de lo que queremos decir cuando nos referimos a la matemática. Por lo menos en los aspectos que podríamos llamar "interiores" al dominio de la matemática, esta idea es clara e indiscutida, si bien al acercarnos al contorno o a las fronteras con otras ramas del conocimiento, nos encontramos con terrenos cuya rotulación como "matemática" ya no es tan indiscutible ni tan compartida. Paradójicamente, la matemática, que trabaja siempre con definiciones bien precisas y con entes perfectamente delimitados, al tratarse de sí misma, en su totalidad, no parece que admita una definición exacta, ni que tenga límites bien determinados.

Tal vez esta imprecisión derive de su dualidad entre ciencia natural, que persigue encontrar y entender las leyes de la naturaleza, y filosofía o arte, en el sentido más puro y platónico de estas disciplinas. Practica, o hace matemática, quien a partir de unos datos numéricos "calcula" un área o un volumen o el tiempo necesario para que un proyectil alcance su meta. Pero también hace y practica matemática quien busca propiedades de los números primos, establece teoremas sobre figuras geométricas o aclara la equivalencia entre postulados básicos de la teoría de conjuntos.

Aparentemente, esta dualidad de la matemática, podría pensarse como una consecuencia de su extensión y que, por tanto, sus distintos aspectos son partes alejadas de un mismo cuerpo original, cada día mas distanciadas entre sí. Pero no es este el caso. El distanciamiento y poca conexión entre sus partes son sólo aparentes. La unidad de la matemática es indisoluble y poco se puede avanzar en una dirección si se pierden de vista las otras ramas hermanas. Las aplicaciones son el estímulo y muchas veces la guía de la matemática pura. Pero sin esta, la matemática aplicada se agota rápidamente y se convierte en poco tiempo en cúmulo de recetas rutinarias, sin perspectiva de progreso.

El doble aspecto de la matemática, ciencia y arte, herramienta y filosofía, rutina y fantasía tiene, para ella, sus ventajas y sus peligros. La ventaja principal es su permanencia en el tiempo. Desde las antiguas civilizaciones se ha considerado importante el conocimiento de la matemática y ha figurado como parte fundamental en todo sistema educativo. Los utilitaristas, que ven de las cosas sólo su parte útil para un mejoramiento de la vida material, necesitan la matemática como herramienta, como instrumento indispensable para las transacciones comerciales, para dominar y aprovechar las fuerzas de la naturaleza y para mantener y desarrollar el progreso tecnológico. Los idealistas, cuyo énfasis está en el hombre como espíritu y en la perfección del alma y del conocimiento, también necesitan de la matemática, como el mejor camino para "facilitar al alma los medios de elevarse desde la generación hasta la verdad y la esencia" (Platón, La Republica, VII, 525). En los dos aspectos la matemática es profunda. Sus aplicaciones son esenciales para desenvolvernos en la vida y sus concepciones alimentan lo más puro del espíritu. En palabras de Juan Ramón Jiménez podríamos decir: "sus pies, ¡que hondos en la tierra!; sus alas ¡que altas en el cielo!".

Los peligros inherentes a la doble faz de la matemática son dos: la polarización en un solo aspecto y la extrapolación más allá de sus límites. La polarización es peligrosa,

principalmente en la enseñanza, toda enseñanza polarizada en una de las dos facetas de la matemática será incompleta y dará una formación defectuosa. En cuanto a la extrapolación, es un peligro inherente a toda ciencia y a toda filosofía, que en la matemática es especialmente peligrosa por su falta de "verificación experimental". En el sentido práctico hay quien pide a la matemática mucho más de lo que puede dar. Sobre todo en los momentos actuales, en que la ciencia ha dado al hombre tantos nuevos elementos para hacer la vida más duradera, más intensa y más cómoda, y habiendo sin duda la matemática contribuido eficazmente a este progreso, hay quien espera de la matemática cosas imposibles. Hay que prevenir acerca de este optimismo excesivo: ni la matemática pura, ni la matemática práctica, con todas sus computadoras y sus grandes posibilidades de calculo, podrán resolver los grandes problemas -ni mucho menos las locuras- de la humanidad, si no van acompañadas de una buena voluntad o de un buen sentido que influya y ordene las condiciones de contorno.

También por el lado de la matemática pura hay que guardarse de la pendiente hacia el misticismo que es frecuente en toda creación puramente espiritual. En muchos períodos de la historia se han atribuido a los números y a las figuras geométricas sentidos trascendentes. Cierto que de ello han derivado, a veces, conocimientos positivos para la matemática, pero las más de las veces han sido perjudiciales. La matemática es obra del hombre y nunca de ella, o a través de ella, cabe esperar conocimientos sobrehumanos.

Estos desvíos de la matemática han hecho que haya tenido también sus enemigos, algunos muy ilustres. Mencionaremos como ejemplos a San Agustín (354-43o) que en su *De Genesi ad litteram* (2, XVII, 37) dice: "Los buenos cristianos deben cuidarse de los matemáticos y de todos aquellos que acostumbran hacer profecías vacías, aún cuando estas profecías se cumplan, pues existe el peligro de que los matemáticos hayan pactado con el diablo para oscurecer el espíritu y hundir a los hombres en el infierno", y a Goethe (1749-1832) que en su *Máximas y Reflexiones*, 1279, dice: "Los matemáticos son como los franceses, se habla con ellos, traducen luego las cosas conversadas a su lenguaje, y las transforman en algo muy distinto" y más tarde (1826) en sus conversaciones con Eckermann insiste: "respeto a la matemática como la más eminente y útil de las ciencias mientras se ocupa de sus problemas específicos, pero no puedo aprobar que se utilice en cosas que no tienen nada que ver con ella, en las cuales la noble ciencia se transforma en

disparate", con lo cual teniendo en cuenta que se refería a las aplicaciones hechas por Newton de la matemática a la óptica, rechaza toda la matemática aplicada de un solo saque.

El caso de San Agustín hay que entenderlo como una prevención sobre el desvío de la matemática hacia las ciencias ocultas, frecuente en la Edad Media, pues la verdadera matemática nunca ha intentado profetizar. El caso de Goethe es el de un gran poeta al que su polarización en el arte no le dejaba ver la matemática en su conjunto, como no pudo ver la teoría de los colores de Newton por mirar siempre a lo alto. La matemática no puede entenderse si, junto con las cúpulas, no se conocen y analizan los cimientos.

A través de la historia ha habido períodos en que ha predominado la matemática como filosofía y otros en que han aparecido las aplicaciones. Unos y otros de estos períodos se han complementado mutuamente y el progreso de la matemática se ha debido siempre al empuje alternado de las dos tendencias. Al predominar las especulaciones conceptuales y filosóficas se ha hablado, en cada período, de "matemática moderna" y han aparecido los críticos implacables, denunciándola como mera fantasía. A continuación, sin embargo, se ha visto que las aplicaciones surgían ampliadas y robustecidas por influencia de la nueva matemática.

La primera matemática moderna fue la de Euclides (aproximadamente 300 años a J. C.). En su *Elementos* no hay que buscar aplicaciones distintas de las ya conocidas, sino tan solo axiomática y sistematización de conocimientos previos. Sin embargo, después de Euclides aparece Arquímedes (287-212 a.J.C.), el primer gran ingeniero matemático, cuyas obras difícilmente hubieran podido tener lugar sin la influencia de Euclides. Lo mismo puede decirse de Apolonio (190 a.J.C.) con su libro sobre las *Cónicas*, y de Ptolomeo (siglo II d. J.C) geometrizando la astronomía.

En el siglo XVII, con Newton (1642-1727) y Leibniz (1640-1710) nace el cálculo infinitesimal y con el la segunda "matemática moderna". También ella fue discutida y combatida -basta recordar los ataques de Berkeley a los "incrementos evanescentes"- y, sin embargo, sin las especulaciones filosóficas que están en la base del cálculo, difícilmente se hubiera llegado a las esplendorosas realizaciones prácticas de los siglos XVIII y XIX.

En la época contemporánea, Cantor (1829-1920) inicia con su teoría de conjuntos la actual "matemática moderna", que se complementa con el álgebra de Emmy Noether (1844-1935), E. Artin (1898-1962) y van der Waerden (1905-1996). Desde un principio surgieron los ataques, incluso de grandes matemáticos como Kronecker (1823-1891), pero las tan

reclamadas aplicaciones no tardaron en aparecer. Hoy, toda la matemática, pura y aplicada, se basa en los conjuntos y ha sido sistematizada por las modernas estructuras algebraicas. La teoría de juegos, la teoría de la información y, en general, toda la ciencia de la computación (informática), que son las ramas más aplicadas de la matemática actual, usan las creaciones abstractas de la matemática de las últimas décadas.

FIN DE LA LECTURA 1

Lectura 2

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA
REY PASTOR, J., BABINI, J.
Editorial Gedisa. Barcelona

LA MATEMÁTICA EMPÍRICA

2.1 La prehistoria

La expresión: el mundo está impregnado de matemática, convertida en lugar común en una era tecnológica como la actual, es una expresión válida para todas las épocas humanas, tan consustanciados están el contar y el comparar con las específicas actividades del hombre: pensar, hablar y fabricar instrumentos.

En la mente y en la acción del hombre prehistórico no están ausentes los números más simples, las formas más elementales y la ordenación más visible de las cosas. En el hombre que da nombre a las cosas y a los actos; que conserva el fuego e imagina trampas para cazar animales; que construye viviendas y tumbas; que observa el movimiento de los astros y destaca direcciones especiales; que computa distancias con su cuerpo y sus pasos; que graba escenas de un impresionante realismo; en ese hombre y en esas actividades están prefigurados los conceptos básicos de la matemática: número, medida y orden.

Al pasar de la etapa paleolítica a la neolítica el proceso se afina: las nuevas técnicas agrícolas y pastoriles. la cerámica y la carpintería; la industria textil; la minería y la metalurgia, el trueque de bienes y objetos, la navegación y el transporte, las normas que rigen la naciente organización familiar, social y económica exigen una precisión cada vez mayor en el contar, en el medir y en el ordenar. El hallazgo del proceso deductivo y de la relación causa-efecto y los inagotables recursos de la imaginación humana harán el resto.

Y cuando asoma la escritura, como subproducto de la cultura urbana, ese saber matemático, aún vago y nebuloso, comienza a adquirir consistencia.

Una hipótesis verosímil acerca del origen de la escritura vincula este origen con

prácticas aritméticas. En efecto, según tal hipótesis, la escritura nace a mediados del IV milenio antes de Cristo en la Baja Mesopotamia, en el seno de la cultura urbana de los sumerios, cuyas ciudades estaban construidas alrededor del templo, edificado sobre una colina artificial, como una torre escalonada, que no sólo representaba la unidad espiritual de la comunidad, sino que encerraba además su riqueza económica. Los bienes del templo, acumulados en sus talleres y graneros, eran administrados por los sacerdotes, y es explicable que a medida que esos bienes aumentaban con el crecimiento de la población, se tomaba más difícil retener de memoria las "cuentas del templo", es decir, los datos relativos a los tributos que se debían al dios y la cantidad de semillas y de ganado que se entregaba a los campesinos y pastores; de ahí la necesidad de fijar signos convencionales que permitieran retener esos datos sin confiar en la memoria individual. Que tal fuera el origen de los primeros signos grabados, lo comprobaría el hecho de que las tablillas pictográficas de Erech del 3.500 a. C., que son las más antiguas que se conocen, contienen signos que representan una cabeza de vaca, una espiga de trigo, un pez, acompañados de signos especiales que sin duda representan signos numéricos. Por lo demás, cabe recordar que entre los sumerios existía la costumbre de marcar con sellos individuales los objetos de propiedad personal, y que por ser el dios de la ciudad el único propietario de la tierra y de todos sus frutos, los sellos que marcarían los bienes del templo adquirirían un sentido más convencional y una mayor difusión.

2.2 Letras y números

Esta notación numérica de las "cuentas del templo" pone de relieve ciertas conexiones entre la escritura y los sistemas de numeración que pueden dar pábulo a la tentadora hipótesis de admitir que los sistemas escritos de numeración fueron anteriores a la escritura misma.

Observemos en primer lugar que todos los pueblos sin excepción, sean o no primitivos, tengan o no escritura, disponen de palabras especiales para designar los números y fracciones sencillas, así como disponen de gestos y signos convencionales para indicar números o unidades.

Igualmente, se encuentra en los pueblos primitivos una gran variedad de procedimientos de cómputos, que se presentan siempre como una relación cualitativa de un signo a la cosa significada, y siempre también bajo el imperio de una imagen concreta.

Tal presencia constante de lo concreto en la numeración primitiva se puede presentar

bajo diversos aspectos. Así, un primitivo dirá que ha tomado tantos peces como dedos tiene la mano, y si designa este hecho con una palabra que deriva de la palabra "mano", esa palabra no quiere significar el número 5, sino solamente que los objetos en cuestión son tantos como los dedos de la mano. Por otra parte, el ejemplo abstracto no cabe en la mentalidad primitiva. Así, un indio norteamericano, a quien se trataba de familiarizar con el inglés, no pudo traducir: "Ayer el hombre blanco mató seis osos", pues ese hecho significaba una imposibilidad material.

En otros casos los números 1, 2, 3 se designan con vocablos diferentes según se refieran a personas, días u objetos, y en este último caso según sean ellos esféricos o alargados. Quizás pueda verse un residuo en nuestro léxico actual cuando al referimos a zapatos decimos "un par", mientras que para los bueyes, por ejemplo, decimos "una yunta".

También se han facilitado los cálculos mediante el uso de objetos materiales, como hojas secas o piedrecillas, que actúan a la manera de unidades, en la forma como aún se acostumbra, para el puntaje en los juegos de naipes. Nuestra palabra "cálculo" proviene del latín calculi (guijarros), y los ábacos para contar y sumar que se perfeccionaron en los tiempos históricos, hasta construir rudimentarias máquinas de calcular, no son sino dispositivos mecánicos fundados en el agrupamiento de objetos materiales.

En este campo, como en tantos otros, la variedad preside la actividad humana: así nativos de la isla Fidji indican el número de víctimas logrado en la caza mediante entalladuras en sus mazas, con la característica de que después de nueve entalladuras iguales, la siguiente es algo más larga, de ahí que con un sistema limitado de numeración hablada pueden llegar a contar números relativamente grandes. Por ejemplo, al observar cinco entalladuras largas y cuatro últimas cortas, el nativo tendrá idea del número 54 para el cual seguramente en su lenguaje no dispone de la palabra adecuada. Si este sistema de entalladuras se torna convencional, entre él y un sistema de numeración escrita de tipo decimal aditivo sólo existiría una diferencia de grado, no esencial.

Al pasar a los sistemas escritos de numeración, se advierte igual variedad; ya en la base, es decir en el número simple que sirve de jalón para expresar los números mayores; ya en la lectura, que puede ser de tipo aditivo, con variantes distintas, o posicional. En los sistemas aditivos el valor del número se obtiene sumando (en ocasiones restando) los valores correspondientes a cada signo individual, independientemente de la posición del signo en el contexto; mientras que en los sistemas posicionales el valor de cada signo depende de la

posición de éste en el contexto. Por la base 10 y el tipo de lectura, nuestro sistema actual es decimal y posicional.

En cuanto a la base de los sistemas escritos antiguos, que probablemente provienen de bases ya existentes en los sistemas orales, se advierte igual variedad: puede ser 2, como lo comprueba el hecho de que seguimos hablando de pares y de yuntas, puede ser 3, 4 ó 5 aunque la base más difundida es 10, que ya Aristóteles justificaba en vista del número de dedos de la mano. En el idioma francés actual, quedan rastros de una base 20 de los celtas, base que fue adoptada también por pueblos primitivos descalzos; nuestras docenas son también residuos de una base 12, utilizada ya por el número (aproximado) de lunaciones del año, ya por su comodidad en las medidas, en vista de la facilidad que ofrece el mayor número de sus divisores, frente por ejemplo a los de la base 10.

Casi todos los sistemas antiguos de escritura, disponen de signos especiales para representar los números. Constituyen excepción el griego, el árabe, el hebreo y otros que utilizan para ese fin las letras del alfabeto respectivo. El caso griego tiene un interés especial, ya que se conocen dos sistemas de numeración escrita, ambos aditivos. Un sistema, cuyos signos se llaman herodiánicos (por Herodiano, gramático griego del siglo II que estudió y expuso estos signos), en el cual la unidad y las primeras cuatro potencias de 10 se indican con las iniciales de las palabras respectivas, agregándose un signo especial para el 5; y un segundo sistema en el cual los nueve dígitos, las nueve decenas y las nueve centenas se representan por las 24 letras del alfabeto griego en su orden, intercalando tres letras de un alfabeto arcaico para el 6, el 90 y el 900; y en el cual se indican con ápices y otros signos especiales las fracciones unitarias y los números superiores al millar. Por el empleo de las letras del alfabeto arcaico se supuso que el segundo sistema fuera anterior al primero, pero el hecho es que el primer sistema cayó en desuso hacia el s. IV a. C., quedando en vigencia el segundo. Es interesante destacar que en algunos casos el sistema de numeración escrita presenta, frente a la escritura, cierta prelación, si no cronológica, por lo menos en el sentido de la sencillez y de la abstracción. Un ejemplo lo ofrecen las escrituras cretenses de las que se reconocen tres tipos: uno pictográfico y dos lineales A y B. Son todas del II milenio y la última de ellas: la lineal B, que resultó pertenecer a un idioma griego arcaico, fue descifrada por Michel Ventris en 1952. De tal escritura ya se habían identificado no sólo los signos numéricos pertenecientes a un sistema decimal aditivo, sino también algunas operaciones aritméticas simples: sumas y probablemente

cálculos de porcentajes, y sin duda tal desciframiento previo ayudó al posterior desciframiento de la escritura.

FIN DE LA LECTURA 2

Lectura 3

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA
Rey Pastor, J., Babini, J.
Editorial Gedisa. Barcelona

LOS BABILONIOS

Hasta el primer tercio de este siglo, los conocimientos que se poseían acerca de la matemática de los pueblos que habitaron la Mesopotamia: sumerios, acadios, babilonios, asirios. . . eran escasos y no revelaban mayor contenido científico.

Sin duda, ya se había advertido la característica fundamental, entonces más bien sorprendente, que ofrecían los sistemas de numeración utilizados en los textos cuneiformes. En efecto, hacia el año 3. 000 a. C. los sumerios introdujeron un sistema de numeración posicional de base 60 que en definitiva es el sistema sexagesimal que aún utilizamos nosotros para las medidas de tiempo y angulares.

En ese sistema las cifras de 1 a 59(ver figura 1) se escribían de acuerdo con un arcaico sistema decimal aditivo, sobre la base de dos signos cuneiformes: uno vertical para la unidad y otro horizontal para el 10. Pero a partir de 60 y para las fracciones el sistema se torna posicional, las potencias sucesivas de 60, en orden creciente o decreciente, se representan por la unidad, y cada conjunto numérico hasta 59 debe computarse 60 veces menor que el anterior.

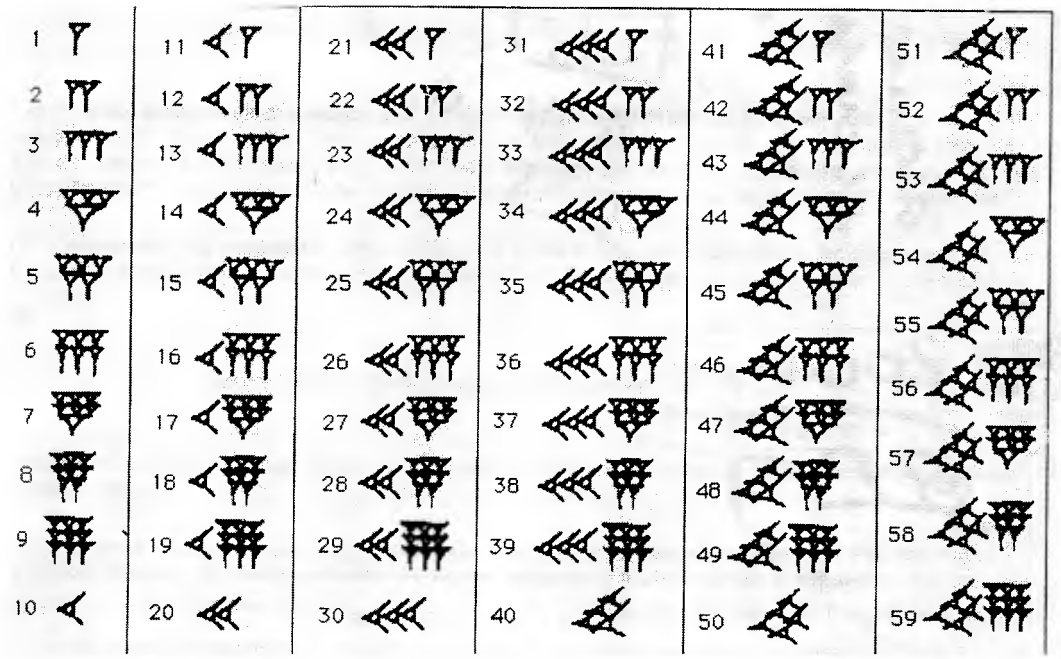


Fig.1 Números del 1 al 59 para los babilonios

La inexistencia de un signo para el cero, que no aparecerá hasta los tiempos helenísticos, así como de un signo que separe la parte entera de la fraccionaria, hace que el sistema no sea coherente para nosotros, aunque el contexto del problema, y a veces ocasionalmente ciertos signos especiales, impedían al calculista sumerio caer en equívocos.

Ya desde comienzos de este siglo (1906) se había revelado el carácter posicional del sistema sumerio al descifrarse textos cuneiformes con tablas de multiplicación, de recíprocos, de cuadrados,...y algunos cálculos; pero fue recientemente con la labor de desciframiento que hicieron conocer Neugebauer (1935) Y Thureau-Dangin (1938) que esta matemática sexagesimal muestra su verdadera faz.

Los textos últimamente descifrados pertenecen al período babilónico (II milenio a. C.) aunque registran conocimientos de los sumerios del milenio anterior; la índole y la solución de las colecciones de problemas que aportan esos textos no sólo justifican la necesidad de un sistema de numeración flexible como el posicional, sin el cual aquella solución hubiera sido imposible, sino que arrojan nueva luz sobre las relaciones entre la matemática prehelénica y la matemática griega, de manera que actualmente nociones y figuras de la matemática antigua adquieren nuevas interpretaciones en la historia de la matemática.

Aunque en algún caso se ha querido ver la expresión de reglas generales, los problemas de los textos babilónicos son problemas numéricos particulares, con datos escogidos al efecto, en especial para que los divisores no contengan sino factores 2, 3 y5; en muchos casos no tienen otra finalidad que el cálculo numérico, .en otros se trata de aplicaciones de distinta índole.

Desde el punto de vista matemático, las novedades más importantes que registran los textos babilónicos se refieren a la solución algebraica de ecuaciones lineales y cuadráticas, y el conocimiento del llamado "teorema de Pitágoras" y de sus consecuencias numéricas.

En los problemas de primer grado con una sola incógnita las tablas de multiplicación o de recíprocos ofrecen de inmediato la solución; en los sistemas lineales, en cambio, a veces con varias incógnitas, ya entra en juego la habilidad algebraica del calculista. (1)

Tal habilidad se pone de relieve más claramente en los problemas, a veces agrupados en colecciones, que exigen la resolución de ecuaciones cuadráticas o reducibles a cuadráticas; resolución que el calculista babilónico lleva a cabo utilizando la actual resolvente, a veces mediante el recurso de reducir el problema a la determinación de dos números de los cuales se conoce el producto y la suma (o la diferencia). (2)

Otros problemas, de interés aritmético o algebraico, traen la suma de términos en progresión aritmética o en progresión geométrica de base 2; la suma de los cuadrados de los diez primeros números mediante una expresión correcta y hasta una ecuación exponencial resuelta en forma aproximada. (3)

Los problemas que se refieren a aplicaciones geométricas revelan el conocimiento de la proporcionalidad entre los lados de triángulos semejantes, de las áreas de triángulos y trapecios así como de volúmenes de prismas y cilindros; en cambio, para la longitud de la circunferencia y el área del círculo se adoptan los valores poco aproximados de dar para la circunferencia el valor de tres diámetros (valores que se conservan en la Biblia) y para el círculo el triple del cuadrado del radio. También son erróneas las expresiones del volumen del tronco de cono y de la pirámide de base cuadrada y del cono.

Pero, sin duda, el conocimiento geométrico más interesante que revelan las tablillas es el del llamado "teorema de Pitágoras", y en especial, como consecuencia, la ley de formación de los "tripletes pitagóricos", es decir, de las temas de números enteros, que, a la

par de representar medidas de los lados de triángulos rectángulos, expresan la posibilidad aritmética de descomponer un número cuadrado en suma de dos cuadrados.

El conocimiento del "teorema de Pitágoras", un milenio largo antes de la existencia de su pretendido autor, se pone de manifiesto en distintos problemas cuya solución correcta no podía lograrse sin ese teorema (4) y, en especial, mediante un texto: el Plimpton 322 (del nombre de la colección que se conserva en la Columbia University) que se hizo conocer en 1945 y que presupone el conocimiento de la ley de formación de los "tripletes pitagóricos", que aparecerá por primera vez en Occidente en los Elementos de Euclides hacia el 300 a. C. (5)

Fig.2 Tableta Plimpton 322

No es ésta la única conexión entre los datos que aportan las tablillas de los babilonios y la clásica matemática griega. Desde el punto de vista técnico, es más importante señalar la atmósfera común de álgebra no lineal, de álgebra cuadrática, que preside ambos campos; atmósfera que en las tablillas de los babilonios se revela en las ecuaciones algebraicas, y en los Elementos en toda la obra, en especial el Libro 11, que el historiador de la matemática Zeuthem bautizó proféticamente: de "álgebra geométrica" hace casi 90 años, cuando ni por asomo podía pensarse en la vinculación que hoy se vislumbra entre la geometría griega y la milenaria "álgebra de los babilonios".

FIN DE LA LECTURA 3

Lectura 4

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA
Rey Pastor, J., Babini, J.
Editorial Gedisa. Barcelona

LOS EGIPCIOS

Comparada con el contenido de las tablillas de los babilonios, la matemática de los egipcios resulta de un nivel muy inferior. Una de las causas reside en el sistema de numeración adoptado por los egipcios: aditivo decimal compuesto de ocho signos jeroglíficos para indicar la unidad y las primeras siete potencias de 10 y que en el contexto numérico se escribían de derecha a izquierda según las potencias decrecientes.

Con ese sistema, el escriba o calculador egipcio realizaba las operaciones aritméticas elementales, con números enteros o fraccionarios, utilizando una técnica operatoria, no exenta de ingeniosidad, de la cual cabe destacar dos notas características: la multiplicación por duplicación y el uso casi exclusivo de fracciones unitarias, es decir, de numerador la unidad.

El conocimiento de los métodos de cálculo de los egipcios y de su aplicación en distintos problemas proviene de algunos papiros no muy numerosos, entre los cuales sigue siendo el más importante el papiro Rhind (del nombre de su propietario que lo legó al Museo Británico) que data de la época de los hicsos (s. XVII a. C.) aunque, como nos lo asegura su autor o compilador, el egipcio Ahmes, su contenido proviene de épocas anteriores, aproximadamente de comienzos del II milenio.

Aunque el papiro declare que contiene "las reglas para lograr un conocimiento de todo lo oscuro y de todos los misterios que residen en las cosas. . ." es en realidad un manual de aritmética, probablemente destinado a la formación de los escribas oficiales que tenían a su cargo el conocimiento y la práctica de los cálculos que exigía la típica organización económica de la sociedad egipcia. (1)

El interés mayor que ofrece la aritmética de los egipcios reside en su característico uso y manejo de las fracciones. Si se exceptúa 2/3 (y ocasionalmente 3/4), fracción para la cual existía un signo especial y de la cual, por lo demás, conocían la descomposición en 1/2 + 1/6, el calculista egipcio utiliza exclusivamente fracciones unitarias y, por tanto, todo cociente o parte de un cociente menor que la unidad debía expresarse como suma de

fracciones unitarias, problema indeterminado desde el punto de vista teórico y que los egipcios resolvieron empíricamente, aunque tratando de dar, ya veces en forma ingeniosa, la descomposición más simple.

Muchas de esas descomposiciones eran conocidas de memoria por el escriba, pero para denominadores no pequeños la cuestión se tornaba difícil, de ahí que sea explicable que el papiro Rhind se abriera con una tabla que facilitaba esa descomposición dando la misma para todos los cocientes de dividendo 2 y divisor impar desde 5 hasta 101. (2)

El conocimiento aritmético de los egipcios no se limita a las operaciones elementales con enteros y fracciones: en los papiros matemáticos aparecen progresiones aritméticas y geométricas y hasta algún ejemplo de raíz cuadrada. En cuanto a las aplicaciones se trata en general de problemas de repartición proporcional o de medidas de capacidad, de superficie o de volumen, así como cuestiones de distinta índole que conducen a problemas de primer grado con una o más incógnitas. (3)

Los conocimientos geométricos de los egipcios son más bien extensos: disponen de reglas exactas para el área de triángulos, rectángulos y trapecios, así como para el volumen de prismas y pirámides. En un ejemplo aparece la determinación de la inclinación del plano oblicuo de una pirámide, aunque entendida más como factor de proporcionalidad que medida angular, mientras que el máximo logro de la geometría egipcia debe verse en la determinación correcta del volumen del tronco de pirámide de base cuadrada, mediante un cálculo de difícil interpretación. Además se debe al calculista egipcio una excelente aproximación para la cuadratura del círculo.

FIN DE LA LECTURA 4

Lectura 5

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA
Hoffman, J.
Limusa. Mexico.

LOS GRIEGOS

(Aprox. 800 a. de C.-600 d. de C.)

5.1 Principios del pensamiento matemático (800-400)

No sabemos casi nada sobre los más antiguos conocimientos de los griegos; es seguro que no se salieron en nada de lo entonces usual. Hasta donde alcanza la influencia de los egipcios (a través de la cultura cretense-micénica) y de los primeros asiáticos (a través de las colonias a orillas del Egeo), está todavía sin aclarar.

El Partenón

Las cifras herodianas (unidades escalonadas en décadas, I, Δ, H, X, M en relación con los haces de cincos $\Gamma, \Gamma^{\Delta}, \Gamma H$, etc.) son las primeras letras de las palabras correspondientes a los números; nos salen al encuentro sobre inscripciones áticas del siglo VI hasta el I, son usadas en línea, y sirven como signo distintivo de las divisiones de la tabla de cálculo. Desde el siglo V son también demostrables los números de letras milesias. Aquí son los 3 X 9 unidades, decenas y centenas las 24 letras usuales del alfabeto griego ordenado con intercalamiento de tres formas viejas de letras (Vau, Koppa, Sampi); más

tarde, se dibujan los millares con una raya más abajo y, más adelante, de la cifra de letras, los quebrados con un acento detrás del denominador, y, además, hay signos individuales para $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$. Sobre el cálculo con estos números estamos informados a través de ejemplos ocasionales de los escritos postclásicos, a través del descubrimiento de papiros, y por representaciones bizantinas de los siglos XIII y XIV.

De acuerdo con la tradición (no de toda confianza y adornada como leyenda) estoica y neopitagórica, Tales de Mileto (624?-548?) y Pitágoras de Samos (580?-500?),

Tales de Mileto

Pitágoras

debieron ya tener un importante conocimiento matemático no sistemático. Dentro de la sociedad esotérica de los viejos pitagóricos -una reunión político-religiosa aristocráticamente enfocada- (apogeo aprox. 500), encontramos junto a especulaciones numéricas llenas de fantasía, también los primeros principios de una teoría científica de los números: los números enteros se diferencian en pares e impares, aparecen números primos y números compuestos, los números cuadrados son reconocidos como suma de números impares consecutivos, y los triangulares como suma de enteros consecutivos. La unidad todavía no vale como número, pero sí como fuente de origen de todos los números, que provienen de la repetición de la unidad.

La matemática como ciencia empieza, en realidad, con Anaxágoras de Clazomene (actual Turquía) (500?-428),

Anaxágoras de Clazomene

quien sentó que, en lo inferior a lo pequeño, no hay un mínimo, sino solamente algo más pequeño, e igualmente en lo grande. En el fragmento de Hipócrates de Chíos sobre la cuadratura de las lúnulas (440?) ya está el método deductivo ampliamente sistematizado. Detrás de estas conclusiones sueltas parece esconderse el axioma que, sin embargo, no se formula abiertamente en ningún trabajo, según el cual una propiedad, aquí la cuadratura de las lúnulas demostrada en casos sueltos, tiene validez general. Esto coincidiría con la opinión de Demócrito de Abdera (460?370?) quien enseñaba el atomismo de la materia y que calculó el volumen de la pirámide y del cono (quizá dividiendo en secciones infinitesimales), aunque sin poder demostrarlo exactamente. Demócrito, a quien la pasión de todos los griegos para la música indujo a hacer estudios teóricos sobre ella, ha sido quizá el que ha puesto en relación la armonía de un intervalo de tono con las longitudes de las cuerdas, que están en una relación sencilla de números enteros, en el monocordio dividido en trastes. Este concepto refleja bien la postura básica fuertemente racionalista de los filósofos naturalistas de aquel tiempo, que ***desemboca en la conclusión de que los números enteros pueden considerarse como medida de todas las cosas.***

Esta teoría se encuentra, por ejemplo, en el *canon*[1] de Policleto de Sikion (440?)

Diadúmeno: obra de Policleto

Y también posteriormente muy clara en el Sistema mundial de Filolao de Tarento (+390?) y en la teoría relacionada con éste sobre las armonías esféricas, y, por fin, en la creencia a la vuelta periódica a la vida de todo lo vivo (transmigración de las almas).

5.2 .La "Aritmethica Universalis" (hacia 400 a. de C)

En el círculo de los pitagóricos del sur de Italia, entre los cuales se puede considerar como el más importante a Arquitas de Tarento (428-365), ***nace una arithmetica***

[1] Establece una teoría que relaciona la belleza con ciertas proporciones matemáticas. Nota del recopilador

universalis que toma como base las teorías de las relaciones racionales[2], en la cual desempeñan el papel más importante las tres medias fundamentales (las medias aritmética, geométrica y armónica): un trabajo no del todo insignificante es la resolución de ecuaciones lineales con varias incógnitas llevada a cabo por Timerides de Paros (s. V); las ecuaciones de segundo grado se resuelven añadiendo un número tal que resulte una ecuación completa de 2do grado, lo que delata seguramente influencias babilónicas. En la planimetría se conocen en lo esencial las propiedades de las rectas paralelas y de los ángulos del triángulo, de la igualdad de superficie de figuras planas, de la transformación de superficies, las propiedades de los ángulos en una circunferencia, y las de la semejanza. Sin embargo, todo esto carece todavía de sistema y de exactitud.

Hipócrates, que recibía honorarios por las clases de matemáticas, fue el primero en reunir todos estos conocimientos en un tratado.

En la construcción geométrica desempeñan gran papel, además del compás y la regla, la introducción de movimientos geométricos que, seguramente, han desempeñado también un gran papel en la construcción primitiva del pentágono estrellado regular – el símbolo de los pitagóricos-. La estereometría está aún en la infancia. Empieza con problemas puramente prácticos de decoración de escenarios (Agatarco de Samos, aprox. 460) y adelanta con los escritos sobre perspectiva de Anaxágoras y Demócrito. Los cuerpos regulares ya se conocen desde la Antigüedad como objetos de adorno y de culto, pero todavía no han sido estudiados teóricamente.

Ya Anaxágoras se había ocupado (hacia 434) de la cuadratura del círculo; Antifon (h. 430) calcula aproximadamente la superficie circular -partiendo del cuadrado- mediante el sistema de polígonos regulares inscritos que tengan 4.2^n ángulos. Brison de Heraclea emplea también los correspondientes polígonos circunscritos; parece que para comprobar la existencia de un cuadrado igual a la superficie de la circunferencia hace uso del teorema del valor medio. El intento de Hipócrates de obtener la cuadratura del círculo mediante las lúnulas no tiene éxito. Para la división general del ángulo usa el sofista Hipias, de Elis (aprox. 420) la curva $x = y\cot(\frac{\pi y}{2a})$

que se puede obtener mecánicamente como sección de una recta que se desplaza paralelamente a sí misma y con velocidad uniforme con un radio vector que gira sobre un

[2] De acuerdo a los Pitagóricos todo es número: música, belleza, astronomía, etc. Por número entienden solo a los naturales o sus cocientes, es decir las fracciones.

extremo con velocidad uniforme; curva empleada después (h. 350) por Dinostrato para la cuadratura del círculo (de ahí el nombre de "cuadratiz"). El empleo de dos medias geométricas se basa, según Hipócrates, en

la ecuación $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$. Lo cual resuelve Arquitas estereométricamente mediante el corte del cilindro $x^2=\xi^2+\eta^2=b\xi$ con el cono $y^2=(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)$ y la protuberancia esférica $\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)^2=b^2(\xi^2+\eta^2)$

5.3 Sobre lo irracional (400-325)

Partiendo del problema de Pitágoras referente al triángulo rectángulo, cuya demostración mediante casos especiales y cuya generalización a triángulos no rectángulos es seguramente obra de la escuela italiana, se descubre y una serie de triángulos rectángulos con lados cuya longitud es de números enteros, es decir, n, $\frac{n^2+1}{2},\frac{n^2-1}{2}$($n$ impar). La esperanza de poder racionalizar de este modo cualquier triángulo rectángulo resulta imposible. Aunque se pueda calcular con una aproximación cada vez mayor, p. ej., la razón de la diagonal y un lado de un cuadrado, es decir, $\sqrt{2}$ mediante las fracciones $\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12}\cdots$ que convergen desde arriba y desde abajo hacia el valor $\sqrt{2}$, cuyos números generadores se pueden calcular mediante la identidad geométrica fácilmente comprobable $2x^2 - y^2 = (2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = \ldots$; se obtendrán, sin embargo, de esta forma números cada vez más aproximados sin alcanzar jamás el valor exacto. Y, por fin, se reconoce -quizá por el procedimiento recíproco- que aquella relación es irracional (hacia el 400). *Este descubrimiento lo hizo probablemente Hipaso de Metaponte*, quien encontró también la construcción del polígono de doce lados.

Platón cuenta que Teodoro de Cirene le había demostrado la irracionalidad de $\sqrt{3}$ hasta $\sqrt{17}$; mediante conclusiones geométricas, en las que juega quizá un papel importante la imposibilidad de representar una fracción de números dados mediante números más pequeños. Lo decisivo ha sido seguramente el descubrimiento de la división en cadena para determinar divisores comunes. Por este tiempo empezaron a usar la demostración indirecta, método que ya había empleado Zenón de Elea (490?-430?) para poner en duda las

opiniones corrientes sobre la esencia del espacio, del tiempo y, sobre todo, del movimiento, mediante conclusiones agudas falsas.

Con la demostración de la existencia de segmentos irracionalmente relacionados, se rompe la arithmetica universalis. Pero el genial Eudoxio de Cnido (408?-355?) sabe (hacia 370) construir una geometría ingeniosa profundizando en las ideas de Anaxágoras; en la cual, la geometría antigua figura como un caso particular. Parte del axioma de las medidas (dos magnitudes no pueden formar una razón si la menor de ellas no puede hacerse más grande que la mayor mediante su multiplicación por números enteros) y define, indirectamente, la igualdad de dos razones $a : b$ y $e : d$ exigiendo que al elegir dos números dados cualesquiera m y n resulte que siendo $m\,a \lesseqgtr n\,b$ sea $me \lesseqgtr nd$.[3]

Un procedimiento semejante usa también Eudoxio allí donde los matemáticos anteriores empleaban solamente un método infinitesimal un tanto vago. Como ejemplo demostrativo, sirve (según Euclides, Elementos XII, 2) la proporcionalidad del área A del círculo al cuadrado de su diámetro, d^2(el número $\frac{\pi}{4}$ es el factor de proporcionalidad). Al inscribir en las circunferencias correspondientes C y C' sus polígonos regulares P_n y P_n' semejantes de manera que $P_n < C$ y $P_n' < C'$, entonces resulta que $P_n : P_n' = d^2 : d'^2$. Siendo C no proporcional a d^2 sino, por ejemplo $P_n : P_n' = (C-e) : C'$ (e es una superficie menor que P_n) se podría entonces mediante una duplicación continuada del número de lados conseguir que $P_n > C-e$, de modo que $P_n' > C'$, lo cual se opone a la construcción primitiva. Análogamente se puede rechazar la suposición $P_n : P'_n = C : (C' - e')$, quedando solamente la posibilidad $P_n : P_n' = d^2 : d'^2 = C : C'$. De igual manera demuestra Eudoxio la proporcionalidad del volumen de la esfera al cubo del diámetro de aquélla y corrobora la exactitud de la determinación del volumen de la pirámide y del cono llevada a cabo por Demócrito. Para el empleo de dos medias geométricas, usa curvas superiores (actualmente no determinadas) y quizá también la construcción de movimientos geométricos mediante dos ángulos rectos, que es conocida como "construcción platónica". El problema del movimiento aparente de los planetas conduce a la curva de intersección de un cilindro

[3] Esta definición de Eudoxio ha sido interpretada modernamente de diversas formas. Algunos matemáticos piensan que contiene la definición de número real. Otros como Zeeman la han traducido dentro del lenguaje de functores y categorías. Existe controversia del verdadero alcance de la definición de Eudoxio.

$x^2 + y^2 = ax$ con una esfera tangente $x^2 + y^2 + z^2 = bx$. Se dice que escribió el primer libro de texto sobre estereometría.

Platón (427-347?) toma parte activa en todo el desarrollo, por lo menos desde su primer viaje a Italia y Sicilia (388-87) que le permite conocer personalmente a Arquitas. Transmite la problemática de los irracionales a Teeteto(Teeteto) (410?-368) quien, en investigaciones aisladas, estudia las irracionalidades compuestas de segundo grado aplicándolas a las relaciones existentes entre los cinco poliedros regulares y los radios de sus esferas circunscritas(hacia 380). Platón no es, en el fondo, matemático, y lo que se le atribuye, como la representación de triángulos rectángulos cuyos lados están valorados en números enteros $2n$, $n^2 - 1$, $n^2 + 1$ (n par), no tiene importancia para el desarrollo matemático general.

Decisiva es, sin embargo, su predilección cada vez mayor por las conclusiones matemáticas de las cuales nace el fomento de una preeducación general matemática antes de la enseñanza puramente filosófica.

Platón conoce lo incompleto del sistema matemático de su tiempo y pretende una sistematización severa y lógica que le lleva, por fin, a la exposición de definiciones y axiomas, de conclusiones de forma directa e indirecta y al postulado de advertir una cuidadosa distinción de casos en las construcciones geométricas. *Según se dice, es él quien ha limitado los instrumentos de construcción al compás y la regla.* Los elementos reunidos por León (h. 370) (perdidos) han nacido bajo su influencia; la nueva edición (también perdida) de Teudio de Magnesia (hacia 340) es conocida como hábil recopilación de numerosas cuestiones aisladas. Entre los platónicos figuran también los hermanos Menaecmo y Dinostrato (h. 350), que son en lo matemático alumnos de Eudoxio. Menaecmo es el descubridor de la hipérbola y la parábola equiláteras, las cuales define como lugares geométricos espaciales (en contraposición a las figuras planas: la recta y la circunferencia) partiendo de las ecuaciones $xy = ab$, y $y^2 = bx$, y las cuales emplea para introducir dos medias geométricas. Como secciones planas de un cono circular (es decir, secciones perpendiculares a una generatriz, tratándose de conos agudos, rectos y obtusos) no aparecen cónicas sino en los trabajos del joven Aristaio (h. 330), autor de un trabajo original sobre lugares geométricos y sobre cuerpos regulares (ambos perdidos).

Aristóteles de Estagira (384-322) se interesa, al igual que Platón, por las cuestiones

Aristóteles de Estagira

matemáticas principales; sin embargo, no está tan al corriente como éste de las investigaciones más recientes. Quizá la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, mediante la contraposición de par e impar, tan frecuentemente mencionada por él, sea invención suya. *Su lógica se basa completamente en conclusiones al modo matemático.* Mucho de lo que actualmente conocemos de la matemática preeuclidiana, hemos de agradecerlo a las numerosas alusiones de Aristóteles sobre la matemática elemental de su tiempo y también a las introducciones correspondientes a esta materia de comentadores posteriores, entre los cuales hemos de nombrar a Alejandro de Afrodisias (hacia 200 d. de C.), Porfirio de Tiro (232? -300?), Temistio (317?-387), Juan Filipono (siglo VI) y Simplicio (hacia 530). La observación aristotélica de que lo recto no se deja fundamentalmente comparar con lo curvilíneo, se desarrolla, entre sus comentadores, -hemos de citar, ante todo, a Averroes (1126-1198) hasta alcanzar las proporciones de un verdadero dogma, que se reconoce como válido hasta el siglo XVII, y que hace aparecer la rectificación de las curvas en general como algo imposible.

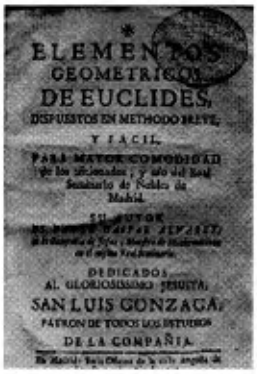
Entre los discípulos de Aristóteles, el interés matemático está por debajo del enciclopédico; sin embargo, hemos de citar la Historia de las Matemáticas, de Eudemo de Rodas (hacia 335), que desgraciadamente se conserva sólo en fragmentos.

5.4 Euclides de Alejandría (365?-300?)

Con Euclides encuentra un final brillante todo el desarrollo anterior, iniciando el

Euclides

alejandrino un período nuevo en el campo de las matemáticas. *Los Elementos* (325?) -que no se deben considerar como introducción elemental, sino como materia de enseñanza para un círculo de oyentes maduros- nos delatan la mano del sistemático educado en la lógica aristotélica, pero que se apoya todavía totalmente sobre la enseñanza ideológica de Platón. ***El contenido aparece dividido en trece libros***, dedicados los seis primeros a la planimetría, los tres siguientes a la teoría elemental de los números, el décimo a la teoría de los irracionales y los restantes tres a la estereometría. ***La materia se trata en una forma puramente teórica***, sin entrar en cálculos o aplicaciones prácticas. ***Al principio hay definiciones, axiomas y postulados***; ***sigue el sistema de principios y construcciones, sin aludir para -nada a la relación existente entre ellos, ni a sus fines***. El texto que ha llegado hasta nosotros se apoya en manuscritos terminados no antes del siglo VII d. de C., y que, con seguridad, han sufrido gran cantidad de modificaciones con respecto al original. Ya Teón de Alejandría (aprox. 370 d. de C.) se vio en la necesidad de redactar de nuevo los ejemplares que tenía a mano, los cuales estaban ya bastante deteriorados. En esta edición se basan todas las copias griegas conservadas hasta una encontrada en 1808 por Peyrard (1760-1822). La redacción preteónica fue también conocida de los árabes.



Los Elementos

Las definiciones de introducción del primer libro (como, por ej.: punto es algo que no tiene partes) son de carácter descriptivo, y comprensibles solamente al relacionarlas con las discusiones filosóficas contemporáneas. Todo lo demás son postulados de existencia y definiciones verbales. Los postulados son probablemente una importante aportación metódica de Euclides. Los tres primeros postulados tratan solamente de construcciones cuando se emplea compás y regla, el cuarto sobre la igualdad de todos los ángulos rectos y el quinto es el famoso postulado de las paralelas. Fueron ya discutidos en la Antigüedad (desde Gémino de Rodas, aprox: 75 a. de C., Ptolomeo, aprox. 150 d. de C., y Proclo, aprox. 450 d. de C.). Entre los axiomas, ha obtenido más tarde particular importancia el de las partes y el todo, al relacionarse con el cálculo infinitesimal. En el sistema de principios, que contiene varios elementos intuitivos sin mencionar su procedencia, se emplea el movimiento lo menos posible (influencia de la crítica de Zenón).

Euclides empieza con la teoría de los triángulos, y pasa después -haciendo uso ahora del postulado de las paralelas -a la teoría de las paralelas, trata a continuación la comparación de superficies y el principio del paralelogramo complementario y concluye con el teorema de Pitágoras y su recíproco. La materia del conjunto de principios pertenecía ya a los pitagóricos; ***corresponde a Euclides la ordenación, la sistematización y el método demostrativo en general***, principalmente la demostración del teorema que lleva su nombre. Lo mejor que los antiguos han dicho respecto a todo esto se encuentra en el comentario de Proclo.

El segundo libro contiene transformaciones algebraicas como el cálculo de $a\,(b + c)$ ó $(a + b)^2$ mediante métodos geométricos. Esto sirve para la resolución de la ecuación cuadrática en general, como nos muestra el ejemplo $x^2 = a\,(a - x)$. Además,

aparece la ampliación del teorema de Pitágoras, y el teorema de la altura. En el tercer libro se trata hábilmente la teoría del círculo, destacando el teorema de los ángulos inscritos en la circunferencia, el teorema de la cuerda, de la secante y de la tangente, formulado y demostrado como teorema de superficie, y la más tarde vivamente discutida tesis de que el ángulo formado por el arco y la tangente sea menor que cualquier ángulo lineal agudo. En el libro cuarto se construyen los más sencillos polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia, a continuación el pentágono refiriéndose a la construcción en el segundo libro, y por fin, la construcción del pentadecágono. Todo esto es conocimiento de Pitágoras y, en parte, pregriego. Es manejado de manera puramente geométrica sin emplear proporciones, las cuales se tratan en el quinto libro. Aquí aparece la teoría de las magnitudes de Eudoxio, probablemente en relación estrecha con el original de Eudoxio (por el estilo basto). El Libro VI contiene aplicaciones de la teoría de semejanza según el estilo antiguo, de la cual se da ahora una versión uniforme e irreprochable. De gran importancia es el tratamiento de las ecuaciones de 2do grado apoyándose en la generalización del teorema de Pitágoras (desarrollo del II, 4/6) que ha introducido Apolonio (aprox. 200), dándole un sentido nuevo. Esto da lugar a que se descubra el paralelogramo máximo entre todos los del mismo perímetro conservando los mismos ángulos (VI; 27).

Los libros VII/IX contienen los elementos de la teoría pitagórica de los números, sobre todo el algoritmo de Euclides, para determinar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. Además, aparece la demostración de la manera única de descomponer en factores primos (IX, 14), la aplicación de los cálculos de 2do grado a potencias y raíces (VIII), la suma de la progresión geométrica con números de términos limitados (IX, 35) y la demostración de la existencia de infinitos números primos (IX, 20) (conocida ya por Platón) . A continuación (IX, 21/ 34) sigue la vieja teoría pitagórica de lo par y lo impar. El Libro IX, 36, contiene la ley de formación de números pares perfectos (como 6 = 1+2 + 3 = suma de sus divisores) dándose el importante resultado que $2^n(2^{n+1}-1)$ es perfecto si $(2^{n+1}-1)$ es primo.

El amplio Libro X se basa en las obras preliminares de Teeteto. Usa signos y símbolos poco prácticos y emplea investigaciones poco comprensibles, proponiéndose como meta determinar el tipo de las irracionalidades que se encuentran en el cálculo de los cuerpos regulares, para determinar las condiciones bajo las cuales se puede prescindir del

uso de raíces de la forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Como se ve, en el comentario de Pappus (aprox. 320 d. de C.) no parece haber adelantado mucho Apolonio investigando en la forma ampliada $\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Entre los teoremas generales de Euclides es importante el X, 2 : las magnitudes son inconmensurables cuando al aplicarles el algoritmo de Euclides, el algoritmo no se detiene, es infinito. En un teorema auxiliar de X, 29 se encuentra la representación general de triángulos rectángulos racionales por medio de $2mn:(m^2-n^2):(m^2+n^2)$. El Libro XI contiene algo sobre la posición recíproca de rectas y planos; a continuación, los principios importantes de los ángulos triedros y, por fin, la teoría de los paralelepípedos. El Libro XII contiene la determinación de volúmenes y áreas; primeramente, la' proporcionalidad del área del círculo al cuadrado de lado igual al diámetro de aquélla, del volumen esférico al cubo de arista igual al diámetro, a continuación la relación del volumen del cilindro y del cono recto inscrito en él, todo demostrado según el procedimiento de Eudoxio, pero sin generalizarlo en ningún caso. Un mérito personal de Euclides es la determinación del volumen de la pirámide, subdividiéndola continuamente en pares de prismas, que forman -bien combinados- una progresión geométrica. El Libro XIII tiene como base las investigaciones de Eudoxio sobre la división en media y extrema razón, y las de Teeteto sobre los cuerpos regulares y las irracionalidades que determinan. *Acaba con la demostración de que hay solamente cinco cuerpos(poliedros) regulares.*

Los Elementos de Euclides son, a pesar de algunas imperfecciones y escabrosidades, una obra maestra de primer orden, la cual ha desplazado totalmente las obras elementales anteriores y solamente ha sido completada decisivamente con las investigaciones modernas de principios[4]. Encuentra su suplemento en los *Data* (principios geométricos suplementarios como introducción de un análisis práctico), en los *Aforismos* (principios perdidos, de contenido, quizá, métrico-proyectivo), en las *Divisiones de figuras* (en parte conservado en árabe), las *Deducciones Falsas* (perdidas) y los *Fenómenos*, geometría esférica que emplea investigaciones similares a las de Eudoxio (perdidas) y de Autólico de Pitana (aprox. 330), una reedición muy empleada, que tiene su origen en Teodosio (aprox. 100 a. de C.).

[4] La negrita y cursiva son del recopilador de la Selección.

Están perdidos los *Lugares geométricos superficiales* (curvas sobre cilindros y conos) y cuatro libros sobre *Secciones Cónicas*, las cuales han tenido su continuación en los trabajo de Aristaio. En la *Óptica* encontramos algo sobre geodesia y perspectiva.

5.5 Arquímedes de Siracusa (287?-212)

Arquímedes(obra de Domenico Fetti)

Arquímedes, que de edad madura estudió en Alejandría con los sucesores de Euclides, no nos ha dejado ninguna obra enciclopédica, sino escritos sueltos de contenido matemático-mecánico, los cuales han llegado hasta nosotros como edición en parte comentada por Eutocio (hacia 520 d. de C.). Las más antiguas están dedicadas al astrónomo alejandrino Conón de Samos (muerto aprox. 240) que escribió sobre secciones cónicas, otras están dedicadas al sucesor de Conón, Dositeo (aprox. 240). Las más modernas a Eratóstenes de Cirene (276?-194?), a quien hicieron, en 235, jefe de la Biblioteca de Alejandría, y quien fue un sabio muy polifacético.

En lo matemático (a Eratóstenes) se le atribuye el método de la criba para la determinación de los números primos, que lleva su nombre, y una construcción mecánica para el uso de las medias geométricas.[5]

Partiendo de estudios (perdidos) sobre la palanca, Arquímedes encuentra un método mecánico y geométrico para la cuadratura de la parábola (el último con ayuda de series geométricas infinitas $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots$ y para la determinación del centro de gravedad del triángulo, de la pirámide, de la parábola y del paraboloide de revolución; encuentra una

[5] También realizo mediciones astronómicas. Nota del recopilador

relación entre el volumen y superficie total de la esfera y sus segmentos, y de las magnitudes correspondientes del cilindro circunscrito. Da la aproximación circular

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{10}{70}$$

mediante polígonos circunscritos e inscritos de 96 lados, y estudia la espiral que lleva su nombre $r=\theta$ basándose en su construcción mecánica.

Demuestra los principios de las superficies y halla la suma, en esta ocasión, de los números cuadrados sucesivos. Construyó la tangente de la espiral poniendo en relación la subtangente con la rectificación del arco de circunferencia. El libro sobre las superficies de revolución de segundo orden contiene muchos principios interesantes sobre secciones cónicas, entre ellos la cuadratura de la elipse. El objetivo principal es la curvatura de las superficies de segundo orden y de sus segmentos. Esta se efectúa por la aplicación del método de Eudoxio, usado en cada caso de una manera nueva y habilidosa, y mediante el cual se pueden demostrar resultados ya conocidos, pero no nuevos.

Arquímedes aclara en su *Teoría de los Métodos* -redescubierta en 1906 por J. L. Heiberg- cómo ha llegado a encontrar sus nuevos teoremas. Se basa en la aplicación de procedimientos mecánicos auxiliares, ***diferenciándose sólo en detalles del cálculo integral moderno.***[6]

Presenta en primer lugar los resultados más importantes ya conocidos; además, la determinación del volumen del cono y del cilindro, y del cuerpo de intersección de dos cilindros inscritos en un cubo. A través de obras árabes sabemos algo sobre Wahlsatzen (Axiomas de elección) , donde se encuentran cuadraturas de figuras limitadas por áreas de circunferencia, y la construcción mediante bandas de papel para obtener la división en tres partes de un ángulo; además, sobre la construcción del heptágono regular, usando un teorema sorprendente de igualdad de áreas. En esta ocasión menciona Arquímedes la fórmula de Herón para determinar el área de un triángulo, y la llamada premisa de Arquímedes -una relación en el círculo que corresponde al teorema de Ptolomeo y nos permite establecer una trigonometría de cuerdas, pero de una manera un poco más pesada que mediante el teorema de Ptolomeo.

[6] Negrita y cursiva del recopilador

El escrito sobre los "cuerpos semirregulares" nos es conocido sólo de nombre; por otro lado, se ha conservado un estudio sobre la indefinidad del sistema numérico (el llamado *Cálculo de arena* o *Arenario*). Punto de partida es la hipótesis heliocéntrica de Aristarco (31O?-230?) que es rechazada por causas físicas. Solamente de pasada vamos a mencionar el original (perdido) de Arquímedes, sobre el *Espejo Ustorio*. Su trabajo (conservado) sobre los cuerpos flotantes, donde se encuentra el principio que lleva su nombre, además, un juego de mosaico que lleva también su nombre, y el problema llamado de las terneras, en el cual se exige la determinación de ocho incógnitas mediante siete ecuaciones con complicadas condiciones secundarias.

En la medición de la circunferencia emplea Arquímedes al principio aproximaciones muy exactas para $\sqrt{3}$ que se pueden explicar fácilmente mediante la inecuación geométricamente fácil de representar:

$$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} < \frac{2a-x}{2a+x}$$

Para un cálculo más exacto emplea la aproximación babilónica $\sqrt{a^2+B} < a + \frac{B}{2a}$. No se saben detalles de cómo ha llegado Herón (aprox. 100 d. de C.) a obtener una aproximación aun mas exacta $\frac{35312}{67441} < \frac{\pi}{6} < \frac{32647}{62351}$ de la medición de Arquímedes. En el primer libro sobre esfera y cilindro aparece como postulado que la recta es la línea de unión más corta entre dos puntos, y que en las figuras convexas, la figura circunscrita es mayor siempre que la inscrita; principio que ha servido de base a todos los trabajos de rectificaciones hasta finales del siglo XIX.

Arquímedes cosechó admiración general y fue tomado, ya en su tiempo, como el mayor matemático de la Antigüedad, sin ninguna duda, y sin tener un sucesor inmediato. Sus métodos fueron recogidos, desarrollados y aplicados por los traductores árabes y convertidos en el moderno análisis por los grandes sistemáticos del barroco.

5.6. Apolonio de Pérgamo (262?-190?)

Apolonio no es mucho más joven que Arquímedes, y alumno como éste de la escuela de Alejandría, donde más tarde fue profesor. Su obra principal, *La Cónica*, fue comenzada en Alejandría, terminándose en Pérgamo, donde vivió siendo ya hombre. Los primeros cuatro libros se han conservado en lengua griega, los tres siguientes en árabe, y

del Libro VIII se conoce el contenido por referencias de Pappus. Los resultados de los cuatro primeros libros sobre los cuales ha hecho Eutocio un comentario, provienen, en su mayor parte, de matemáticos anteriores: Menaicmo (350 aprox.), Aristaio (aprox...330), Euclides (aprox. 320), Conón (t aprox. 240), Arquímedes (aprox. 240), y otros; es nuevo, sin embargo, el método de recopilación. Ahora, por primera vez, se toman las secciones cónicas como secciones de un mismo cono circular (recto o inclinado), discutiéndolas según las propiedades geométricas así obtenidas, las cuales podemos deducir hoy usando un sistema coordenado de paralelas mediante la ecuación del vértice $y^2 = rx(1 \pm \frac{x}{t})$ (r = latus rectum, t = latus transversum). Aparecen en este momento los términos elipse, parábola, e hipérbola (compuesta de dos "secciones complementarias") que están en relación con las construcciones equivalentes de Euclides (*Elementos* VI). Sigue la teoría de los diámetros conjugados, de las tangentes, de las asíntotas hiperbólicas, la relación entre polo y polar y (generalizando el teorema de las cuerdas y de las secantes en la circunferencia) un gran número de teoremas de áreas. Además, aparece la construcción proyectiva partiendo de dos haces de rayos proyectivos, la investigación de las propiedades de los focos en las cónicas reales, y de los puntos de intersección de dos cónicas, tomando en cuenta también los puntos de contacto (numerosos casos diferentes).

El interesante Libro V está dedicado a la teoría de las normales, que no aparecen como perpendiculares a las tangentes[7], sino como distancias mínimas entre un punto fijo y un punto que se mueve a lo largo de la curva. Así resulta la constancia (ya usada por Arquímedes) de la subnormal de la parábola.

Apolonio desarrolló principios que se aproximan ya mucho a la teoría de la evolución de las cónicas. En el Libro VI se tratan secciones cónicas congruentes y semejantes, y son explicadas como secciones de un cono dado; en el Libro VII se estudia gran número de propiedades especiales de los diámetros conjugados. El Libro VIII contenía problemas de construcción mediante datos conocidos (sin excepción del dibujo de la sección cónica) que son llevados a cabo de una manera cuidadosa.

De los demás escritos de Apolonio se han conservado únicamente las S*ecciones proporcionales* (en traducción árabe); nos es conocido únicamente por referencias de

[7] Esto supone un descubrimiento de un método para calcular la tangente si partimos de la normal como elemento primitivo. Tal idea fue empleado por J. Avelin para desarrollar un cálculo diferencial de multifunciones(Nota del recopilador)

Pappus (aprox. 320 d. de C.). La *Sección proporcional*, la *Sección espacial* y la *Sección determinada* se refieren esencialmente a las propiedades de series de puntos proyectivos. Las *Intercalaciones* se refieren a los problemas de este tipo que se pueden lograr con compás y regla, tratándose de curvas directrices que se pueden construir con líneas rectas. En los *Lugares geométricos* planos se tratan lugares geométricos rectilíneos y circulares, apareciendo en el fondo principios de la teoría de las inversiones. Aquí se menciona el llamado círculo de Apolonio, el cual, sin embargo, fue ya mencionado por Aristóteles. En los problemas de contacto se construyen con compás y regla aquellos círculos que son tangentes a tres circunferencias dadas o a sus degeneraciones, es decir, a puntos y rectas. Estos escritos han constituido más tarde el mayor interés de las matemáticas de los tiempos del barroco temprano.

También sabemos por referencias que Apolonio ha tratado también el caso de dos medias geométricas mediante problemas de movimiento geométrico, usando secciones cónicas. En su cálculo rápido menciona el cálculo de arena y la medición del círculo; en la investigación sobre espirales cita su tratado de las espirales. En su *Espejo Ustorio* hace mención al estudio del mismo título de Arquímedes, con cierto tono de rivalidad. Además, se deben a él numerosas contribuciones metódicas de contenido elemental. Por ejemplo., se demuestra en el trabajo sobre los cuerpos regulares que las áreas superficiales del dodecaedro e icosaedro regulares inscritas en la misma esfera son proporcionales a su volumen. Estos detalles han sido introducidos en los Elementos de Euclides por medio de una reelaboración de Hypsides de Alejandría, formando el Libro XIV (aprox. 180 a. de C.).

También como astrónomo es Apolonio significativo. Igual que Arquímedes, rechaza la hipótesis heliocéntrica de Aristarco de Samos (310?-230?), lo cual sólo ha sido aceptado por el caldeo Seleuco de Seleucia (aprox. 150 a. de C.). Obra suya es, sin embargo, la teoría de los epiciclos, desarrollada más tarde por Ptolomeo (aprox. 150 a. de C.).

Lo que sabemos sobre los trabajos de sus contemporáneos y de la generación siguiente (aprox. 180) -la cisoide de Diocles, la concoide de Nicomedes (en relación con los problemas de interpolaciones), la cubatura de la protuberancia de Dionisodoro, y las investigaciones de las secciones planas correspondientes de Perseo, el escrito de un desconocido sobre la espiral esférica y la disertación de Zenodoro sobre figuras con igual perímetro--, testimonia la influencia de Arquímedes y Apolonio respecto a la manera general de tratarlos, si bien no alcanzan el mismo nivel en los detalles. En términos

generales, encuentra el de Pérgamo comprensión, por primera vez, por parte de los musulmanes; a principio del siglo XVII se llega hasta la geometría de coordenadas, estudiando según los métodos de Apolonio.

5.7. Ocaso del helenismo

Los romanos (150 a. de C. hasta 150 d. de C.)

De los siglos siguientes, con sus continuos disturbios políticos, ha llegado a nosotros muy poca materia segura. En estos tiempos se ha desarrollado una trigonometría de cuerdas en relación con estudios astronómicos. Ya Aristarco (aprox. 270 a. de C.) sabe que la relación entre cuerda y arco en un mismo círculo aumenta al disminuir el arco (menor que media circunferencia); los teoremas de sumas de funciones angulares pueden obtenerse mediante la premisa de Arquímedes tan fácilmente como con el teorema de Ptolomeo. Esto fue conocido ya probablemente por Hiparco de Nicaia (180?-125?), que se dedicó á observaciones astronómicas en Rodas y Alejandría, entre 161 y 126. Calculó unas tablas de cuerdas (perdidas) desarrollando trabajos babilónicos, pero usando el sistema sexagesimal. Seguramente ya conoció los problemas más sencillos de la trigonometría práctica. Los musulmanes le consideran autor, además, de un escrito sobre álgebra, en el cual se trataron quizá las ecuaciones de 2do grado.

Posterior a Hiparco, es Herón de Alejandría (aprox. 100 d. de C.) un excelente mecánico y técnico, cuyos escritos y enseñanzas circulaban en gran número de ediciones y reelaboraciones. Herón combina hábilmente la ciencia matemática tradicional de los antiguos egipcios con los resultados de Arquímedes, al cual menciona a menudo. Entre sus escritos teóricos parece que se ha encontrado un comentario de Euclides; en sus introducciones para la práctica, se encuentran cálculos de superficies y cuerpos -en parte como fórmulas exactas, en parte como buenas aproximaciones-; entre ellos, la llamada fórmula de Herón, sobre el triángulo, con demostración, una breve descripción del método de Arquímedes haciendo uso ya del llamado principio de Cavalieri (1635), el método de la media aritmética-geométrica para aproximar una raíz cuadrada y análogamente una raíz cúbica. Al tratar ecuaciones cuadráticas menciona por primera vez -quizá debido a la influencia de Hiparco- la existencia de soluciones dobles(admitiendo solamente las positivas). Herón tenía también conocimientos amplios de la Agrimensura; el instrumento usado por él -el dioptra- es un aparato excelente. Los escritos matemáticos (muy escasos)

de los agrimensores romanos (aprox. 100 d. de C.) son casi exclusivamente extractos de los trabajos de Herón.

La trigonometría es desarrollada por Menelao de Alejandría (aprox. 100 d. de C.) que maneja en primer lugar, triángulos esféricos cortados por un círculo máximo, tratándolos mediante la "regla de seis datos" que bautizó él mismo. Claudio Ptolomeo de Alejandría (85?-165?) nos da en su *Almagesto* (así llamado por los árabes) un trabajo sobre el sistema geocéntrico que ha servido de modelo quizá durante quince siglos y que es la teoría de los epiciclos de Apolonio en forma más amplia y mejorada. Lo que enseña en detalles trigonométricos no es cosa nueva, pero está ofrecido muy hábil y metódicamente. La tabla de las cuerdas calculada por él de medio en medio grado se basa en la división sexagesimal del radio y prevé interpolaciones para los minutos.

El *Analemma* contiene la proyección ortográfica ya usada por los antiguos egipcios al tratar problemas astronómicos el *Planisferio*, la proyección estereográfica que quizá tiene su origen en Hiparco; el *Tetrabiblos* astrológico proviene, en el contenido, de Posidonio de Apamea(135?-44?). Precisamente esta obra despierta sobre todo el interés de varios de los traductores indios, árabes y medievales. Los romanos no pueden ofrecemos obras matemáticas originales. Su sistema de cifras con las decenas I, X, C, y los grupos de cinco, resultantes por bipartición V, L. D, son de origen itálico antiguo.

Es también característica en el calendario y en la escritura de números, la notación posicional sustractiva. El cálculo de quebrados, que se ha formado partiendo de la división del *as* (moneda) en 12 *unciae*, se limita a subdivisiones duodecimales, para las cuales se introdujeron denominaciones que muestran la influencia griega del sur de Italia. Todo lo demás se calcula solamente de modo somero. Hasta el cálculo corriente necesita tablas de cálculo y tablas auxiliares y es considerado muy difícil. Este sistema primitivo se mantiene tenazmente y resiste hasta las oleadas de las invasiones bárbaras.

Los romanos, orientados de una manera puramente práctica, se ocupan solamente de asuntos de herencias, de intereses y cálculos económicos[8]. Incluso en los principios de la geometría son ignorantes, hasta tal punto que, con ocasión de las grandes mediciones del Imperio, en tiempo de Augusto (aprox. 30 a. de C.), fue necesaria la ayuda de los alejandrinos.

5.8 Neopitagóricos y neoplatónicos (150-600)

[8] Negrita y cursiva del recopilador.

Por primera vez, en tiempo de los últimos emperadores, cuando el Imperio se les va de las manos a los verdaderos itálicos, y se convierte bajo emperadores excelentes en una unidad cultural bilingüe, empieza a revivir poco a poco la cultura griega, primeramente en los círculos neopitagóricos (100 a. de C. hasta 200 d. de C.) los cuales, sin embargo, están envueltos en supersticiones infundadas, y caen en las redes de presuntos taumaturgos, como Apolonio de Tiana (1 siglo d. de C.). Por primera vez en esta época, se desarrolla la leyenda de Pitágoras, que nos hace difícil ver con claridad los principios de la ciencia griega. Lo que Nicómaco de Gerasa (aprox. 100) nos presenta como teoría pitagórica antigua parece en su mayor parte posterior, como, por ej., la teoría de los números superiores e inferiores (suma de los divisores ~ que el número de partida), de los números asociados (como 220 y 228, un número suma de los divisores del otro) y de los números poligonales (por primera vez con Hipsicles, aprox. 180 a. de C.), además la representación de los números cúbicos como suma de números impares sucesivos. El neoplatónico algo más joven Teón de Smirna (130 d. de C.) añade la fórmula de la suma de los primeros números cúbicos, fácil de obtener partiendo del principio anterior. Al mismo tiempo nos muestra Sexto Empírico (aprox. 150)

la teoría pitagórica de una manera crítica severa (¿ la de Posidonio? hacia 70 a. de C.) en la cual trata prolijamente la obtención genérica de una línea mediante el movimiento de un punto, etc., para después rechazarlo.

Totalmente distinta es la obra aritmética importante de Diofanto de Alejandría

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
LVTETIAE PARISIORVM.
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobea, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS

(aprox. 250 d. de C.), que sigue y desarrolla la tradición egipcio-babilónica, en oposición al método griego. Nos ofrece, en forma muy algebraizada, con introducción de abreviaturas adecuadas, ejemplos interesantes que nos muestran cómo domina perfectamente la resolución de ecuaciones lineales. Al aparecer varias incógnitas, se vale de la introducción de una sola incógnita, elegida adecuadamente; en las ecuaciones de 2do grado (aquí faltan fragmentos importantes), en el caso de dos soluciones positivas sólo reconoce una (es decir, la mayor). Su maestría formal se muestra al tratar las ecuaciones de primer grado con varias incógnitas; en ocasiones incluso abandona el principio de dimensiones generalmente observado con severidad por los griegos. Singular y meritoria es la resolución del problema indeterminado de 2do y mayor grado, sobre todo su manera de convertir expresiones en cuadrados. Las soluciones son siempre números racionales, pero nunca números enteros. Los musulmanes no conocen sino relativamente tarde a Diofanto, y no hacen más que continuar sus principios algebraicos; en el barroco temprano se originan por desarrollo de las ideas diofánticas, el álgebra de letras y la moderna teoría de los números.

En el círculo de los neoplatónicos alejandrinos (250-650) se reúne de nuevo la herencia de los grandes matemáticos griegos, Pappus de Alejandría nos ofrece (aprox. 320) en sus *Collectiones* una importante recopilación, con extractos interesantes, de escritos conservados o perdidos de Euclides, Arquímedes y Apolonio y con unos suplementos excelentes, entre los cuales destacan los principios sobre figuras proyectivas, las observaciones sobre el manejo de los máximos y mínimos, el llamado teorema de Guldon sobre el centro de gravedad en los cuerpos de revolución, y sus investigaciones sobre la cuadratiz, la espiral de Arquímedes y la esférica, y asimismo sobre las superficies helicoidales. La mayor parte de estos problemas se convierten en puntos básicos para los métodos de desarrollo del siglo XVII. Del estudio de Euclides procede la llamada por Pappus "generalización del teorema de Pitágoras". El comentario del *Almagesto* se ha conservado sólo parcialmente. Teón de Alejandría (hacia 370) continúa esta obra, a él se debe sobre todo la reedición de los *Elementos* de Euclides que era urgentemente necesaria, por estar los textos existentes bastante deteriorados; en esta reedición se han introducido trozos imitativos de escaso valor. La hija de Teón, Hipatia (370?-415) ha comentado también a Apolonio y Diofanto, pero no ha llegado nada de ello hasta nosotros. No menos antiguo debe ser Sereno de Antinoe (aprox. 400), del cual conocemos un único escrito sobre secciones planas del cilindro y del cono.

Entre los neoplatónicos de Atenas tenemos que nombrar a Domnino (aprox. 450), con comentarios a Nicómaco, a Proclo Diadoco (410-485) con su amplio comentario sobre Euclides, a Marino (aprox. 500) con una introducción a los *Data* de Euclides, a Simplicio (aprox. 520) con comentarios importantes sobre Aristóteles, y a Damasquio(hasta 520) con un estudio no significativo sobre cuerpos regulares. Además, hay que añadir a Eutocio de Ascalón(480) con sus aclaraciones, matemáticamente sin importancia, pero históricamente interesantes, sobre Arquímedes y Apolonio, editadas por Isidoro de Mileto (aprox. 520), que junto con Antemio de Tralles (aprox. 534) construyó en Constantinopla la *Hagia Sophia* (532-537). Se atribuye a Antemio el método del jardinero para la construcción de la elipse y un trabajo sobre el foco de la parábola.

Con la persecución de los paganos de 415, en la cual cayó Hipatia como víctima, se extingue la escuela matemática alejandrina; con la clausura de la Academia de Justiniano muere la de Atenas, pero en Constantinopla continúa todavía la tradición durante mucho tiempo. Allí trabaja en el siglo IX el filósofo León, que induce a sus alumnos a copiar textos matemáticos. Por el mismo tiempo, se proponen los musulmanes, ansiosos de sabiduría, apropiarse enciclopédicamente toda la ciencia de los antiguos. Así, a pesar de lo desfavorable de las circunstancias, se salvaron muchos más originales del derrumbamiento interior y exterior del antiguo mundo durante la inmigración de los bárbaros. ***De India, Siria y Africa del Norte afluyen a Occidente conocimientos nuevos y antiguos que en el principio del Renacimiento llevan a un resurgir del interés matemático, y en el barroco a una total transformación y renovación de lo conocido: la instauración de la moderna matemática***[9].

FIN DE LA LECTURA 5

[9] Negrita y cursiva del recopilador.

Módulo II: **La edad media, el renacimiento y la fusión entre el álgebra y la geometría: la geometría analítica.**

Objetivo Módulo II:
Describir el nacimiento de la geometría analítica como una síntesis entre el álgebra arabe y la geometría griega.

Lecturas Módulo II:

6. **LA ÉPOCA MEDIEVAL. Rey Pastor, J., Babini, J.**

7. **LA GEOMETRÍA ANALÍTICA. Berlinski, D.**

Lectura 6

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Rey Pastor, J., Babini, J.
Editorial Gedisa. Barcelona

LA ÉPOCA MEDIEVAL

6.1. La temprana Edad Media

En el capítulo anterior reseñamos el desarrollo de la matemática griega, o elaborada por griegos, durante el período grecorromano, período en el cual la matemática en ese sentido no tuvo cabida en el mundo romano.

En las enciclopedias a las que eran afectos los polígrafos romanos, no figuraban sino las nociones matemáticas destinadas a las aplicaciones, ya fueran los conocimientos aritméticos útiles para satisfacer las necesidades de la vida diaria, las exigencias de las transacciones comerciales o, a lo sumo, alguna cuestión tribunalicia; ya fueran los conocimientos geométricos que requería la agrimensura y la agricultura.

Es conocido por las contadas ocasiones en que aún se utiliza, el sistema de numeración de los romanos, de base 10 y no posicional y en el cual en la numeración hablada el 20 ocupa un lugar especial, mientras que en la numeración escrita se intercalan las unidades intermedias 5, 50, 500. Una característica del sistema es el procedimiento sustractivo para abreviar la escritura de ciertos números:
IX = 9, XL = 40 (el IV = 4 parece ser algo posterior), aunque no es original, pues se han encontrado ejemplos entre los babilonios. Los romanos utilizaron fracciones de numerador unitario y denominadores 12 o múltiplos de 12, en conexión con el sistema de medidas y de monedas.

Para operar, utilizaban ya el cálculo digital, ya prontuarios o tablas .de cuentas hechas o el ábaco, instrumento del cual se poseen ejemplares que permitían calcular "con números grandes y fracciones.

En cuanto a los conocimientos geométricos que aparecen en algunas enciclopedias de los romanos se limitan a unas cuantas reglas empíricas.(l)[10]

Cierta reacción en favor de los antiguos textos griegos se advierten los escritores latinos después de la caída del Imperio de Occidente. Así en Marciano Capella, de mediados del siglo V, autor de una obra en prosa y en verso: *De las nupcias de Filología y Mercurio y de las siete artes liberales,* en nueve libros, precursora de las enciclopedias medievales en la que se ocupa de esas artes, es decir, el *trivium*: gramática, dialéctica y retórica, y el *quadrivium*: geometría, aritmética, astronomía y música. En este escrito que, como otros de esta época, gozaron de estima y difusión durante la. Edad Media, la geometría se reduce a las definiciones de los *Elementos* con el enunciado de su primer problema, y la aritmética a unas cuantas nociones de carácter neopitagórico.

Algo, posteriores a Capella, y de comienzos, y mediados del siglo VI, son contemporáneos Boecio y Casiodoro. Severino Boecio, más conocido como filósofo, dedicó parte de su producción a la traducción, recopilación o composición de manuales relacionados con el quadrivium (ya aludimos a su compilación de la Aritmética de Nicómaco): obras que sirvieron para mantener vivas ciertas nociones del saber antiguo durante los tiempos medievales, por la difusión que alcanzaron esos .escritos.
También se ocupó de las artes liberales Casiodoro en un escrito, muy citado en la Edad Media, donde aparece una exposición del saber pagano necesario para la comprensión de la Biblia; aunque el mérito mayor de Casiodoro fue el de haber sido el iniciador de la costumbre de incitar a los monjes de su convento al estudio, imponiéndoles la obligación de copiar antiguos textos, costumbre que, al mantenerse en los tiempos posteriores, permitió conservar buena parte de la literatura antigua.

Ya mencionamos el *Código arceriano* de estos tiempos, con su interesante aporte aritmético, aunque a su lado figura un error grosero, que aparece también en escritos ulteriores, proveniente de confundir el área de un polígono con el número poligonal correspondiente.

[10] Las notas aparecen dentro de la propia lectura.

Otro autor enciclopédico, cuya obra Etimologías sirvió de modelo de las futuras enciclopedias medievales San Isidoro obispo de Sevilla desde 601, en la que considera todas las disciplinas de su época, desde astronomía a medicina con definiciones y clasificaciones.

El próximo nombre ya no pertenece a la cuenca del Mediterráneo, es el del benedictino inglés Beda *el Venerable*, que en su obra enciclopédica *De natura rerum* mejora los conocimientos de Isidoro con las aportaciones de Plinio, que Isidoro no conoce. En especial, cabe mencionar a Beda por un escrito sobre el cálculo digital, aunque más importante ha sido su influencia que a la larga, ejerció sobre Alcuino de York, uno de los maestros a los que acudió Carlomagno para mejorar el nivel cultural de su administración y de su clero. Aunque la labor más importante y valiosa de Beda fue el esfuerzo educativo, se le deben varios escritos entre ellos una colección de problemas aritméticos y geométricos, "para desarrollar el ingenio de los jóvenes". En esa colección figuran los clásicos problemas de matemática recreativa: el de los 100 pájaros, de los móviles, de las canillas que llenan un tanque; etcétera; además cuestiones de números, por ejemplo, habla acerca de los números perfectos, y da formulas aproximadas para las áreas. Entre esos problemas figura el de aquel testador romano que al morir, cuando su esposa esta por dar a luz, disponiendo la distinta manera en que debe repartirse la herencia según el sexo del hijo a nacer. Nace un par de mellizos de distinto sexo ¿como ha de repartirse la herencia?

El escaso valor científico de estos problemas muestra el bajo nivel que había alcanzado la matemática en el "renacimiento carolingio" que se había iniciado con Alcuino. Sin embargo, con la muerte de Carlomagno murió también aquel "renacimiento" y el nivel matemático descendió aun más, tal coma lo revela una correspondencia' entre dos "matemáticos" de comienzos del siglo XI, en la que vanamente se trata de probar que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, sugiriendo finalmente una demostración experimental recortando ángulos de pergamino.

Pero ya asomaba un nuevo despertar favorecido por los vientos que venían del Oriente. El aporte oriental a la matemática, durante el primer milenio de nuestra era, proviene de tres centros culturales distintos: chino, hindú y árabe, y distintos fueron también su valor y su influencia.

Aunque actualmente se esta conociendo cada vez mas y mejor la antigua ciencia china puede decirse que la matemática china es la que ejerció menor influencia sobre la

futura matemática occidental. (2) En cambio, se deben a la matemática hindú aportaciones originales importantes, así como una notable influencia sobre la ciencia árabe y, por intermedio de esta, sobre la occidental.

Una característica de la ciencia hindú es la dificultad que ofrece la ubicación de sus obras en el tiempo, en vista de la carencia de una cronología precisa, de la escasez de la documentación y las discrepancias que esos factores provocan en los historiadores. Ha de agregarse que por el hecho de haber sido en la India siempre muy vigorosa la tradición oral, la escritura se adoptó en forma amplia en fecha tardía, digamos hacia el primer milenio a. C., de ahí que solo desde esta época se tengan datos concretos acerca del saber hindú.

Aunque la influencia de la matemática hindú se ejercerá en especial en los campos de la aritmética, del álgebra y de la trigonometría, sus primeras manifestaciones son de índole geométrica, y han de verse en los rituales brahmánicos, donde aparecen nociones destinadas a la ubicación y forma de los altares de los sacrificios. Pertenecen a una época comprendida entre los siglos VIII Y II a. C. y en ellos figuran reglas para la construcción de los altares y en un complemento: el *Sulvasutra*, se dan las reglas para la construcción de cuadrados y rectángulos, relaciones entre la diagonal y el lado de un cuadrado, y equivalencias entre el rectángulo, el cuadrado y el círculo. (3)

Estas construcciones geométricas ya no figuran en las obras que aparecen en el segundo período hindú de producción matemática: es el período astronómico, que transcurre entre los siglos IV y XII de nuestra era. Las obras mas antiguas de este período son las *Siddhanta*, obras de carácter astronómico, en las que se advierte la influencia griega. Se conocen, por lo menos de nombre, cinco *Siddhanta*, de las cuales se posee el texto de una y comentarios de otra. La importancia matemática, además de su influencia en el mundo islámico, estriba en el hecho de que en las *Siddhanta* aparecen por primera vez las funciones circulares, por lo menos el seno y el coseno (bajo la forma de seno verso): mediante una tabla en la que se advierte la ventaja de medir los arcos no por sus cuerdas, como lo hace Ptolomeo en su Almagesto, sino por la semicuerda del arco doble (seno) y por la flecha del arco doble (seno verso).

Un mayor desarrollo de estos conceptos aparece en algunos matemáticos posteriores, ya en el primero, en orden cronológico, de los grandes matemáticos: Aryabhata, nacido probablemente en 470 y en Varahamihira, del siglo VI, que en una de sus obras resume una de las antiguas *Siddhanta*. Aryabhata es autor de un tratado

astronómico-matemático en versos: Aryabhatiyam, dividido en cuatro capítulos, de los cuales el mas importante, desde el punto de vista matemático, es el segundo que comprende, además de otras cuestiones, una tabla de senos y ejemplos de análisis indeterminado de primer grado, tema este ultimo que constituye su contribución más original. Mientras que en Diofanto el objeto de su análisis indeterminado de primer grado era hallar soluciones racionales positivas, en los hindúes ese análisis adquiere el significado actual, pues se propone buscar soluciones enteras de ecuaciones lineales de la forma $a\,x + b\,y = c$, con a, b, c números enteros.(4)

Un segundo matemático hindú de este periodo es Brahmagupta, del siglo VII, cuyo tratado astronómico *Siddhanta* dedica unos capítulos a la matemática con algunas contribuciones nuevas: valor aproximado de π, ecuaciones indeterminadas de segundo grado, y en especial propiedades de los cuadriláteros inscriptibles, en la que se advierte la influencia griega, pero que constituyen sin duda la contribución mas interesante de Brahmagupta. (5)

Empero, el aporte oriental más notable de estos primeros tiempos medievales provino del mundo árabe del Islam, movimiento que se inicia con la hégira de Mahoma de 622 y que ha desempeñado un papel singular en el desarrollo de la ciencia de este período.

Ese movimiento comprende un primer período de conquistas bélicas y de expansión política que culmina a mediados del siglo VIII, cuando los árabes están en posesión de una extensión territorial mayor que la del imperio romano en sus mejores tiempos, que abarca desde Asia Central hasta los Pirineos a través de África del Norte y gran parte de Asia occidental.

A partir del siglo VIII la fisonomía del Islam cambia. Por un lado, el levantamiento del. sitio de Constantinopla, la batalla de Poitiers, que frena la expansión árabe en Europa, y la batalla de Talas que no obstante ser una victoria para los árabes, estos no prosiguen su avance, detienen las conquistas bélicas; por el otro,

La Alambra(España)

la creación del califato de Córdoba y la división del califato oriental en los de Bagdad y del Cairo, acentúan las disensiones políticas y religiosas internas. A estas circunstancias, en cierto modo extrínsecas, se agregan factores intrínsecos:

a) el hecho de que el islamismo puso a los árabes, en contacto con pueblos y regiones que habían sido centros de antiguas culturas, como Mesopotamia, o que lo eran en la época de la conquista árabe, como Persia, Siria, India, o que conservaban restos de la cultura helénica o romana, como España, Cirenaica, Egipto;

b) la tolerancia que en general los conquistadores mostraron hacia los habitantes de las regiones sometidas, en especial hacia aquellos que tenían "libros": cristianos, judíos, persas;

c) la atmósfera de libre discusión y libertad de opinión que había nacido con las polémicas religiosas y teológicas surgidas en el seno del Islam, que indirectamente venían a favorecer el intercambio y desarrollo científico; y

d) la existencia de cortes árabes que, a la manera de las persas, protegían y fomentaban el arte y las ciencias.

Se comprenderá así cómo a fines del siglo VIII el mundo árabe esta en posesión de todos los elementos necesarios para un desarrolla científico que proseguirá durante varios siglos y que, desde el punto de vista de la matemática, reseñaremos a continuación.

La primera manifestación de la actividad científica de los árabes se pone de relieve en las traducciones al árabe de obras hindúes y griegas. La traducción de obras griegas había sido precedida por las versiones al siríaco, realizadas en Siria y Mesopotamia. Entre los escritores sirios cabe mencionar al obispo Severo Seboth, defines del siglo VII, que tradujo las *Analíticas* de Aristóteles y escribió sobre temas astronómicos, siendo el primer escritor que, fuera de la India, menciona las cifras hindúes. Este hecho nos lleva a hablar de esas cifras y por tanto del sistema de numeración decimal y posicional actualmente en uso en Occidente.

Su historia es bastante complicada y aun no muy clara, aun que el origen hindú parece indudable. Esa fantasía exuberante que revelan las construcciones y relieves hindúes y que en los problemas aritméticos se pone de manifiesto en la presencia de grandes números, pudo ser una causa, consciente o no, que condujo a buscar un sistema de numeración que hiciera factible su manipulación. Siguiendo a Van. der Waerden, su historia puede resumirse así: Hacia la época del rey Asoka (siglo III a. C.) estaba en, uso un

sistema llamado Brahmi, no posicional y por tanto sin el cero, con nueve signos, que mostraban cierta semejanza con las futuras "cifras arábigas", junto con signos especiales para las decenas, centenas y millares. Mientras el nombre de estas cifras se mantiene en el lenguaje escrito sus símbolos se modifican en la escritura numérica, y en las mas antiguas tablas de senos (s. VI) y en las inscripciones epigráficas ya aparece el sistema posicional decimal con el cero. Hay que agregar que al principio este sistema fue adoptado dentro del tono poético de la matemática hindú, utilizando palabras en lugar .de signos, y escribiendo el numero en orden inverso del actual. La posible influencia aportada por el conocimiento del sistema sexagesimal de los astrónomos griegos, que ya habían introducido el cero y escribiendo los números de mayor a menor, facilito probablemente esta modificación también en el sistema hindú, y hacia el 500 el sistema es el actual.

El sistema hindú penetro en Occidente por caminos distintos y en diferentes épocas, con el cero y sin el cero, pero será por intermedio de los árabes que se conocerá en Occidente en la forma actual, de ahí el nombre de cifras arábigas que se ha dado a los signos hindúes.

Es probable que los árabes se pusieran en contacto con estas cifras en el siglo VIII cuando tradujeron las *Siddhanta*, que figuran entre las primeras obras vinculadas con la matemática que se tradujeron al árabe. Cabe advertir que antes de Mahoma los árabes no tenían cifras. Mas tarde, adoptaron los sistemas de numeración de algunos de los pueblos conquistados, mientras gradualmente fundaban un sistema propio a la manera griega y hebrea fundado sobre el uso de las letras del alfabeto.

Este sistema, a su vez, fue reemplazado por el de las cifras hindúes, que mostraron su superioridad, tanto en las transacciones comerciales cuanto en las operaciones aritméticas. Solo en obras astronómicas, en especial en las traducidas del griego, se continúo usando el sistema alfabético, al traducir también los números en griego, hecho caso en el cual la desventaja del sistema alfabético no era muy pronunciada.

A partir del siglo IX comienzan a aparecer las traducciones al árabe de las obras griegas y poco después con comentarios. Las primeras versiones árabes de obras matemáticas griegas fueron las de Al-Haggag, que vivió en Bagdad entre 78o y 813, a quien se debe la traducción de los primeros seis libros de los *Elementos* y una retraducción del *Almagesto* del siríaco. Las traducciones de los *Elementos* por AL-Haggag, pues hizo

dos, fueron comentadas en forma interesante por Al-Nayrizi (el Anaritius de los latinos), que murió en 922.

Más importante, aunque menos difundida, fue la versión de los *Elementos* de Ishaq b. Hunayn (muerto en 910/11), miembro de una importante escuela de traductores que floreció en el siglo IX y de la cual el jefe fue su padre Hunayn b. Ishaq (el Johannitius de los latinos), a su vez prolífico escritor y traductor del griego y del siríaco. Ishaq b. Hunayn tradujo además escritos de Arquímedes, Menelao, Ptolomeo, Hipsicles y Autolico.

Su versión de los *Elementos* fue a su vez revisada por Tabit b. Qurra (827-901), que además de ser uno de los gran des traductores, fue también un investigador original. Se le deben traducciones de Apolonio, Arquímedes, Eutocio, Teodosio y otros. Es importante su versión de los libros quinto a séptimo de *Cónicas* de Apolonio, pues solo por medio de esa versión se conocen esos libros. Los cuatro primeros habían sido traducidos por Hilal Al-Himsi (muerto en 883) y la traducción de los siete libros fue revisada por Abu-Al-Fath de fines del siglo X.

Cabe agregar que tanto Iohannitius como Tabit b. Qurra estaban al servicio de una de esas familias que, a la par de los califas, protegían a la ciencia y a los sabios: la familia de los tres hermanos Banu Musa, dos de los cuales se dedicaron a la matemática y el tercero a la mecánica.

Otro traductor de este período es Qusta b. Luqa (muerto hacia 912), que tradujo a Diofanto, Teodosio, Autolico y Herón, de este la *Mecánica.* Al siglo X pertenecen Abu Uthman, a quien se debe la traducción del libro décimo de los *Elementos* y de los comentarios de Pappus a este libro, comentarios éstos de los cuales se posee esta versión árabe; y Abu AL-Waffa, astrónomo y matemático a quien, además de traducciones, se deben comentarios de Euclides, Diofanto y Ptolomeo.

Con sus traducciones los árabes entraron en posesión de una gran parte de la matemática griega e hindú, que a comienzos del siglo IX comenzó a dar sus frutos.

La primera figura cronológicamente, pero muy importante, de la matemática árabe es el geógrafo, astrónomo y matemático Al-Khuwarizmi, de cuya vida poco se sabe,

Al-Khuwarizmi

si se exceptúa que fue bibliotecario del califa Al-Mamun, que reino entre 813 a 833. En su obra matemática hay influencias griegas e hindúes y tanto en el sentido de Euclides como en el de Diofanto habiéndose advertido últimamente también influencias de la matemática de los
babilonios. A su vez, la obra de Al-Khuwarizmi ha ejercido una notable influencia no solo en la ciencia del Islam, sino también y muy importante, en la ciencia cristiana occidental.

Se le debe una *Aritmética*, que no se ha conservado en su texto árabe pero si en su versión latina *Algoritmi de numero indorum* reelaborada como *Liber algorismi de practica arithmetica* por Juan de Sevilla en el siglo XII. También es probable que sea de Al-Khuwarizmi un escrito en cinco libros sobre cuestiones de aritmética y de matemática aplicada a la astronomía, cuya versión latina es *Liber ysagogarum Alchorismi in artem astronomicam a magistro A.* (¿Adelardo de Bath?) *compositus*.

En todos estos títulos aparece traducido y deformado el nombre del autor; deformación de la que mas tarde surgió el termino "algoritmo" con la acepción técnica actual. La Aritmética de AlKhuwarizmi, contribuyo a la difusión en el mundo árabe de las cifras hindúes y del uso del cero; como en textos posteriores contiene las reglas de las cuatro operaciones con enteros y fracciones y una serie de problemas resueltos con la regla de falsa posición.

Pero, sin duda, el libro mas importante de Al-Khuwarizmi, y que ha dado el nombre a una rama de la matemática es *HisabAl-jabar wa-Al-muqabala* de traducción no fácil, pero cuyo término *Al-jabar* dio luego nacimiento a nuestro vocablo álgebra.

Para comprender el significado de los términos que aparecen en el titulo de esa obra hay que tener presente que los árabes operaron siempre con ecuaciones de coeficientes enteros y positivos de manera que, después de planteada la ecuación de acuerdo con los

datos del problema, la primera transformación era "restablecer o restaurar el orden" llamamos: pasaje de un miembro a otro mediante la operación que actualmente correspondería al Al-jabar árabe (en castellano antiguo, por ejemplo, en el Quijote se llama "algebrista" a quien recompone los huesos descoyuntados). También aquella restauración significa suprimir los denominadores en el caso de aparecer coeficientes fraccionarios. Pero aun la ecuación puede necesitar otras operaciones: eliminación de factores comunes en los coeficientes (operación que llamaban *Al-hatt* o eliminación en ambos miembros de términos iguales, nuestra reducción de términos semejantes), que sería la *wa-Al-muqabala*. La exigencia de los coeficientes positivos aumenta el número de casos de ecuaciones de segundo grado: Así Al-Khuwarizmi considera seis casos posibles de ecuaciones cuadráticas completas o incompletas, apareciendo como ejemplos de las ecuaciones completas

$$x^2 + 10\,x = 39;\ x^2 + 21 = 10\,x;\ x^2 = 3\,x + 4.$$

ejemplos que aparecerán durante siglos en la literatura algebraica posterior. A la resolución algebraica, según la regla actual Al-Khuwarizmi agrega comprobaciones geométricas.(6) El libro contiene además una parte puramente geométrica bastante floja (teorema de Pitágoras en el caso particular del triangulo isósceles, valores aproximados de π ya conocidos) y finalmente una colección de problemas que, según el prefacio constituían el objeto del libro, relativos en general a problemas de herencia, legados, particiones,.problemas de aritmética comercial y de geometría, práctica, etcétera.

El álgebra de Al-Khuwarizmi es retórica, designa a la incógnita con la palabra "cosa", nombre que mas tarde paso a Occidente. Se debe por ultimo a Al-Khuwarizmi una geometría y tablas astronómicas, donde aparece por primera vez en árabe la función seno, Esas tablas fueron publicadas y corregidas por Maslama, hispanoárabe muerto en 1007. Es posible que las restantes funciones circulares que en ellas aparecen fueran introducidas par Maslama.

Contemporáneo de-Al-Khuwarizmi fue Tabit B.Qurra, ya citado como traductor aunque fue también un investigador cuyos trabajos se relacionan especialmente con la matemática de los griegos: se ocupó del escrito de Arquímedes *De Los esferoides y de los conoides*, de los teoremas de Menelao que pasaron por esta vía a la latinidad con. el nombre de "regula sex quantitatum" aunque sin duda su contribución mas original es en teoría de

números, pues se debe a Tabit un método para hallar números amigos, es decir, pares de números cada uno de los cuales es suma de los divisores del otro; método que hasta ahora es el único que se conoce para tal determinación.(7)

Algo posterior a los dos matemáticos anteriores es Abu Kamil de los siglos IX y X algebrista que perfecciono la obra de Al-Khuwarizmi y ejerció influencia en matemáticos árabes y latinos, en especial en Leonardo Pisano. Se le debe, además de su *Álgebra*: un escrito sobre problemas de análisis indeterminado; un escrito donde trata algebraicamente problemas geométricos de inscripción y circunscripción. de pentágonos y decágonos;y finalmente se le atribuye una obra; que mas tarde habría sido vertida al hebreo por el judío español Aben Ezra del siglo XII y luego al latín como *Sobre los aumentos y disminuciones* que trata del procedimiento de falsa posición para resolver las ecuaciones lineales con una incógnita mediante uno o dos ensayos. De ahí los nombres de *regula falsi* o de regula duo rum falsorum con que las designaron los escritores latinos, reglas que no son sino la solución de la ecuación lineal por el método de interpolación lineal, exacto en este caso.(8)

En el Islam los astrónomos contribuyeron en gran medida al progreso de la matemática. En cierto sentido puede decirse que entre los árabes no hay matemáticos puros, ante todo son astrónomos. Ya desde la época de la expansión árabe las prescripciones religiosas plantearon una serie de cuestiones astronómicas: problemas de orientación y de determinación de fechas y de horas que exigieron la instalación de observatorios y el perfeccionamiento de tablas e instrumentos, así como el estudio e investigación de las cuestiones astronómicas y matemáticas conexas.

Entre los astrónomos árabes que influyeron en el progreso de la matemática citemos a Al-Mahani muerto hacia 874, que además de traducir obras de Euclides y de Arquímedes, fue el primero en poner en ecuación (de tercer grado) el problema arquimediano de dividir una esfera en dos segmentos de razón dada.

Pero la contribución mas importante de los astrónomos fue la introducción y ampliación de las funciones circulares, así como el perfeccionamiento de sus tablas; entre los astrónomos que se ocuparon del tema cabe recordar a Habash contemporáneo del anterior, AL-Battani, el Albategnius de los latinos, de los siglos IX y X y Abu-Al-Wafa del siglo X. Es a estos astrónomos a quienes se debe la ampliación de las funciones circulares a las seis actualmente en uso y el conocimiento de sus primeras relaciones.

Nuestra palabra seno, del latín sinus, proviene de una curiosa traducción: los hindúes designaban a ese segmento con la palabra exacta "semicuerda" o abreviadamente "cuerda", que en sánscrito, en la forma de grupo de consonantes sin vocales, no tenían ningún sentido para los árabes, quines por razones fonéticas la sustituyeron por la palabra que en su propio idioma significaba seno (pecho) o en forma figurada golfo o ensenada. Las funciones "tangente" y "cotangente" surgieron al tabularse las sombras (umbra versa y umbra recta en latín), proyectadas por el sol en sus distintas alturas, de un gnomon horizontal o vertical, respectivamente. En cuanto a la "secante" y "cosecante", medidas de las distancias entre el extremo del gnomon y su sombra, fueron llamadas transversales de la sombra.

En particular se debe a Al-Battani el teorema del coseno para los triángulos esféricos que no figuraba en el *Almagesto*; por su parte, se debe a Abu AL-Wafa un perfeccionamiento del método de Ptolomeo para la construcción de su tabla de cuerdas, ahora de senos, llegando a dar sen 30' con 9 decimales exactos. (9) Se debe además a Abu Al- Wafa un libro sobre construcciones geométricas con una serie de problemas resueltos con una sola abertura de compás, tipo de cuestiones que estarán de moda en Europa varios siglos después.

Las contribuciones matemáticas de los sabios árabes más renombrados: Al-Biruni, Avicena y Alhazen, pertenecen al siguiente período medieval.

Notas complementarias

(1) ***La geometría de los romanos.*** En las enciclopedias romanas, además de las reglas para la determinación exacta del área del cuadrado, del rectángulo y del triangulo rectángulo se encuentra una fórmula aproximada para el área del triangulo equilátero que supone tomar para $\sqrt{3}$ el valor bastante aproximado 26/15; otra para los cuadriláteros no rectángulos, que no es sino la antigua fórmula egipcia que adopta como área el producto de las dos semisumas de los lados opuestos y una para el área del circulo tomando para π el valor de Arquímedes 22/7. Agreguemos que los agrimensores romanos admitían como bastante exacta la determinación del área de una ciudad de forma irregular, sin mas que medir su perímetro.

(2) ***La matemática china.*** En verdad, la historia de China comienza a fines del siglo III a. C., cuando se unifica y nace el imperio chino, cuyo primer emperador ordena la quema de los libros", con excepción de los de agricultura, de medicina y de adivinación.

Aunque tal destrucción no fue completa hace de todos modos muy difícil la investigación del saber chino anterior a esa época. Por lo demás, China no estuvo totalmente aislada de otros pueblos orientales y hasta de Occidente. El comercio de la seda con países occidentales es muy antiguo y las relaciones con la India, y más tarde con los árabes, fueron continuas: el budismo es introducido por lo menos oficialmente, en China en el siglo I y las relaciones económicas y políticas con los árabes datan del siglo VII.

Por otra parte, los mas antiguos documentos existentes revelan que la matemática china no difiere esencialmente en lo que se refiere al nivel de los conocimientos de la matemática de los pueblos orientales: un sistema de numeración aditivo mediante rayas horizontales y verticales, proveniente de un antiguo círculo con varillas de bambú; y el empleo del ábaco, cuya mención mas antigua aparece en un tratado aritmético de fines del siglo II: fórmulas empíricas y aproximadas para áreas y volúmenes de figuras simples, y colección de problemas, algunos típicos, y como dato interesante la presencia, que parece de origen inmemorial de cuadrados mágicos.

A partir de los primeros siglos cristianos se tienen algunos datos mas concretos: en el siglo III Liu Hui compone un escrito aritmético con problemas; algunos de los cuales implican cierta noción algebraica; se le debe además un comentario al tratado clásico *Las reglas de cálculo en nueve partes*, compuesto según es tradicional; en el siglo II a. C. sobre la base de escritos mas antiguos.

Debemos llegar a fines de la alta Edad Media para encontrar el nombre de un matemático chino, importante: Ch'in Chiu-Shao, autor de *Las nueve secciones de matemática*, que contiene 81 problemas de análisis indeterminado y ecuaciones algebraicas de grado superior. Dos características algebraicas distinguen este tratado: por un lado la notación distinguiendo con el color rojo y negro los coeficientes positivos y negativos respectivamente y el cero con un circulo (otro matemático independiente de Ch'in , en lugar de colores diferenció los coeficientes cruzando una diagonal los coeficientes negativo); y por el otro lado , el método numérico de resolución de ecuaciones que en esencia coincide con el método hoy llamado de Ruffini – Horne.

También del siglo XIII es Yang Hui, quien en un *Análisis de las reglas aritméticas* hace conocer, por primera vez en la literatura matemática, la expresión de la suma de los primeros n números que los pitagóricos llamaron triangulares, es decir, con nuestros símbolos:

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{1}{2} n (n + 1) = \frac{n (n+1) (n+2)}{6}$$

mientras que del siglo siguiente es Chu Shih-Chieh, considerado uno de los grandes matemáticos chinos, en cuyo tratado *El precioso espejo de los cuatro elementos* expone, como algo no original, un diagrama numérico, que no es sino nuestro " triangulo aritmético", hasta la novena línea. Agreguemos que mediante el tratado de Chu Shih-Chieh se introdujo el álgebra china en Japón.

Para terminar con-la matemática en China, recordemos que en el siglo XVI los misioneros jesuitas introducen la matemática occidental en extremo Oriente.

(3) ***Las construcciones del Sulvasutra.*** Además de algunas aplicaciones del teorema de Pitágoras para transformar un rectángulo en un cuadrado equivalente, aparece en el Sulvasutra una expresión racional de la diagonal del cuadrado en función del lado que equivale a la igualdad aproximada $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3*4} - \frac{1}{3*4*34}$ que proporciona un valor exacto hasta el quinto decimal. Se utiliza luego este valor aproximadamente el problema inverso de la cuadratura del círculo: obtener el diámetro de un círculo equivalente a un cuadrado dado. La solución hindú consiste en tomar como diámetro el lado del cuadrado mas el tercio de la diferencia entre la diagonal y el lado, solución que daría para π el valor poco aproximado de 3,0888. Mas aproximado es el valor 3 1/8 que aparece en otro problema (valor que por lo demás era conocido por los babilonios), al tomar como diámetro del círculo 4/5 de la diagonal del cuadrado equivalente. Menos aproximadas aún son las reglas que dan, para el lado del cuadrado, fracciones como 7/8 o 13/15, del diámetro del círculo equivalente.

(4) ***Las contribuciones de Aryabhata.*** En cuanto al análisis indeterminado de Aryabhatil.; he aquí la reconstrucción, de acuerdo con un comentarista hindú, del proceso seguido para resolver el sistema de dos, ecuaciones lineales con tres incógnitas: $8x - 29y = 4$; $17x - 45z = 7$ con números enteros. El método que llamaban de "pulverización", no es sino nuestro método de cambios de variable; a fin de lograr ecuaciones con coeficientes cómodos como para que una primera solución "salte a la vista."; tal es el camino que revelan las operaciones que se van efectuando. Mediante ese proceso se llega a una primera solución (mínima) $x = 15$, $y = 4$, para la primera ecuación y $x = 11$, $y = 4$ para la segunda. De

acuerdo con nuestro simbolismo, esas soluciones señalan como solución, general de cada ecuación, tomada aisladamente, para la variable común x : $x = 15 + 29u$; $x =, 11 + 45v$ de donde por igualación resulta una nueva ecuación lineal $45v - 29u = 4$ que, vuelta a "pulverizar", da como nueva solución mínima $u = .34$; $v = 22$ Y de ahí en definitiva la solución mínima del sistema: $x = 1001$; $y = 276$; $z = 378$, que aparece en el comentario citado.

Respecto de la construcción de la tabla de senos, Aryabhata adopta para π el valor $3\ ^{177}/_{1250}$ (= 3,1416), conocido por Ptolomeo, y como unidad de longitud el minuto de arco, de manera que resulta para su circunferencia un radio de 3438 unidades (el número de minutos de la vuelta dividido por π). Divide ahora el cuadrante en 24 arcos, cada uno de los cuales será entonces de 225 unidades y supone que este arco mínimo es igual a su seno, suposición que implica un error menor que una unidad. Partiendo del seno de este arco mínimo, que llamaremos a, los siguientes se calculan por recurrencia mediante una fórmula aproximada que mediante, nuestros símbolos sería

$$sen(n+1)\alpha = 2sen(n\alpha) - sen(n-1)\alpha - \frac{sen(n\alpha)}{rsen\alpha}$$

siendo r el radio, expresión que presupone $1 - \cos\alpha = {}^{1}/_{400}$ expresión exacta hasta el cuarto decimal, hecho que explica que redondeando las unidades y utilizando los valores conocidos de senos de arcos notables, Aryabhata llegue a encontrar para el sen 90^0 un valor igual al radio.

(5) Las contribuciones de Brahmagupta. Una contribución geométrica de la matemática hindú es la generalización de la llamada "formula de Herón", aplicable a los cuadriláteros inscriptibles, que aparece en los escritos de Brahmagupta y que expresada con nuestros símbolos de cómo área S de un cuadrilátero inscriptible de lados a, b, c, d y semiperímetro p

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Brahmagupta reconoce además que esa fórmula puede aplicarse a los triángulos anulando uno de los lados del cuadrilátero. Aunque el texto no es muy claro, parece que Brahmagupta no ignoraba que esta fórmula era aplicable solo a los cuadriláteros inscriptibles; Baskhara cinco siglos después no advierte esta limitación.

También revela Brahmagupta el conocimiento de las expresiones que permiten obtener las diagonales de un cuadrilátero inscriptibles conociendo los lados y que hoy escribiríamos si esas diagonales son x e y :

$$x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}; \quad y^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$$

Más interesante, aunque menos original, es la construcción de un cuadrilátero inscriptible de lados diagonales y área conmensurables y además de diagonales perpendiculares entre si. Para ello acude a Diofanto, con el mismo ejemplo numérico, en el problema que hemos mencionado (de los cuatro números, cada uno de los cuales, sumado al cuadrado de su suma, dan cuadrados); obtiene así cuatro triángulos rectángulos de lados enteros, semejantes dos a dos y con catetos iguales también dos a dos, que al reunirlos haciendo coincidir el vértice del ángulo recto y los catetos iguales, configuran un cuadrilátero inscriptible en las condiciones dadas. (Si se adoptaran los triángulos de lados 3, 4, 5 y 5, 12, 13, los lados del cuadrilátero serían 25, 52, 60, 39 las diagonales perpendiculares entre si 63 y 56 y el área 1764.)

(6) La ecuación de segundo grado en Al-Khuwarizmi. En su escrito dice Al-Khuwarizmi: "Los números que se presentan en el cálculo mediante la restauración y la reducción son de tres clases, a decir : raíces, cuadrados y números simples, que no se refieren ni a las raíces ni a los cuadrados... Un número que pertenece a una de esas tres clases puede ser igual a uno de los números de las otras dos, por ejemplo, cuadrados igual a raíces; cuadrados igual a números, raíces igual a números". Se hace así referencia a los tres casos de ecuaciones incompletas $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$ casos que se reducen simplemente a la extracción de una raíz o a una ecuación de primer grado.

Pasa luego a los tres casos posibles de ecuaciones completas de segundo grado de coeficientes positivos, agregando: "Encuentro que esas tres especies de números pueden combinarse entre si y dar lugar a tres tipos compuestos que son: cuadrados y raíces igual a números; cuadrados y números igual a raíces; cuadrados igual a raíces y números", o lo que es lo mismo, distingue los tres casos de ecuaciones

$$x^2 + px = q; x^2 + q = px; x^2 = px + q.$$

Para resolver el primer caso, ateniéndose al ejemplo numérico: ¿Cual es el cuadrado que sumado a diez raíces da el número 39? Dice: "Debes tomar la mitad del número de las raíces, en este caso 5, y multiplicarlo por si mismo y obtienes 25 al que le sumas el número 39, con el resultado 64. Tomas la raíz cuadrada de este número que es 8 y le restas la mitad de las raíces 5 y obtienes 3, que es el valor buscado". *Se advierte que la regla no es sino nuestra resolvente expuesta en forma retórica.* Cabe agregar que en un segundo ejemplo de este caso, donde el coeficiente de los cuadrados no es la unidad, señala que para aplicar la regla anterior debe hacerse, ese coeficiente la unidad, dividiendo por el todo los coeficientes.

El segundo caso es interesante, pues la ecuación tiene dos raíces positivas. Con el ejemplo $x^2 + 21 = 10\,x$, dice Al-Khuwarizmi: "Debes tomar la mitad del número de las raíces, en este caso 5, multiplicarlo por si mismo, obtienes 25 al que debes restar los números, en este caso 21, obteniendo 4. Extraes la raíz cuadrada que es 2 y lo restas del numero de la mitad de las raíces que era 5 y obtienes 3 que es la solución. Si deseas, puedes también sumar ese valor 2 a la mitad de las raíces que es 5 y obtienes 7, que también es solución. Cuando un problema está dado en esta forma, puedes ensayar con la adición. Si no resulta, es indudable que resultara con la sustracción. Este es el único caso, en que hay que tomar la mitad de las raíces, y que puede ofrecer solución por adición o por sustracción. Además hay que observar que si en este caso el cuadrado de la mitad de las raíces es menor que los números, no hay solución. Si es igual a esos números, la solución es la mitad de las raíces sin aumentos o disminuciones".

El tercer caso de ecuación completa no agrega ninguna novedad. A continuación da las comprobaciones geométricas de las reglas aritméticas, pero solo de los casos "en los que es necesario tomar la mitad de las raíces", es decir, de las ecuaciones completas.

Para el primer caso, de forma general $x^2 + px = q$ y en el ejemplo $x^2 + 10x = 39$ da dos comprobaciones geométricas. En la primera, supone un cuadrado de lado x y, por tanto, de valor x^2 a cada uno de cuyos lados adosa un rectángulo de base x y altura $^1/_4\, p\ (^5/_2)$; el dodecágono así formado tendrá por área $x^2 + 4.\ ^1/_4\, px = x^2 + px = q$ (39); de ahí que si a esa figura se le agregan los cuatro cuadrados de los vértices de área total $4.\ (^1/_4\, p)^2 = 25$ se obtiene un cuadrado de área $^1/_4\, p^2 + q$ (25 + 39 = 64) y de lado su raíz.(8) Como ese lado es

$x + 2(^1/_4\ p) = x + {}^1/_2\ p\ (x+5)$ se obtiene finalmente el valor de $x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} - \frac{1}{2}p$ expresión que justifica la regla aritmética y que en este caso da la solución $x = 3$. Cuyo cuadrado 9 más 10 veces su valor, 30 da el valor de los números: 39.

La segunda comprobación geométrica de este caso es más euclidiana. Ahora adosa a dos lados contiguos del cuadrado de lado x rectángulos de base x y altura $^1/_2\,p$ con lo cual el "gnomon" de vértice G será $x^2 + 2(^1/_2\,px) = x^2 + px = q$. Al agregarle el cuadrado de lado $^1/_2\,p$, es decir, $^1/_4\,p^2$ se obtiene un cuadrado de lado $x + {}^1/_2\,p$, y de ahí x. Si a continuación de uno de los rectángulos adosados se agrega (punteado en la figura) ese mismo rectángulo se ve claramente la reducción del problema a una aplicación de áreas por exceso: sobre el segmento p prolongado construir un rectángulo de valor q tal que la figura sobrante sea un cuadrado.

La comprobación geométrica de los otros casos es algo más rebuscada, presentándose también problemas de aplicación de áreas.

(7) ***Las contribuciones de Tabit b. Qurra***. Podemos mencionar en este sentido que es en los escritos de Tabit, donde aparece la demostración del teorema de Pitágoras mediante desplazamientos de triángulos que citamos al referirnos a los babilonios. Pero, sin duda, es más original la regla que ofrece para la determinación de números amigos. Esa regla, expuesta, con símbolos actuales es la siguiente: Si para $n > 1$ los números $a = 3.2^{n-1} - 1$; $b = 3.2^n - 1$; $c = 3^2 .2^{2n-1} - 1$ son primos, los números $A = 2^2\ a\ b$ y $B = 2^n\ c$ son amigos. Basta comprobar que si S_A y S_B representan las sumas de los divisores de A y B respectivamente se cumple $S_A + A = S_B + B = A + B$ de donde $S_A = B$ y $S_B = A$. Para n=2 se tiene a=5; b= 11; c=71 y, por tanto, A=.4:5.11 = 220; $B = 4.71 = 284$ ofrecen la pareja más antigua de números antiguos. Para n=3, c no es primo, para n=4 se obtiene como nueva pareja A= 17296 , B = 18416.

(8) ***Los métodos de falsa posición***. El método de simple falsa posición se aplicaba a los problemas cuya ecuación lineal se escribiría con nuestra notación en la forma $ax = b$ obteniendo su solución partiendo de un valor arbitrario x_1 para la incógnita que llevaría a un valor falso $ax_1 = b_1$ .... b, pero que una simple regla de tres $x::x_1 = b: b_1$ permite obtener el valor exacto x. Tomemos un ejemplo de un texto árabe: ¿cual es el número cuyos $^2/_3$ es 5? Se parte de un valor arbitrario para ese número, en general cómodo para los cálculos, en

este caso 3, cuyos $^2/_3$ es 2 diferente de 5, pero la regla de tres x:3 =5:2 da para x el valor exacto 7 $^1/_2$.

El caso de doble falsa posición se aplicaba en cambio a las ecuaciones de la forma $ax=b$; $ax + b=c$; $ax + bx = c$ y $ax + bx +c = d$. Para resolver la ecuación se parte de dos valores arbitrarios de la incógnita: x_1 y x_2 calculando los errores respectivos y_1 e y_2 como las diferencias de los valores de ambos miembros de las ecuaciones anteriores; operando con esos cuatro números de acuerdo con esquemas empíricos diferentes según el sentido de los errores se llega al valor exacto $x = (x_1 y_2 - x_2 y_1) : (y_2 - y_1)$.

Por ejemplo: cuál es el número que, sumado a sus $^2/_3$ y agregándole la unidad, el resultado es 10? El aritmético árabe parte de los valores $x_1= 9$; $x_2= 6$ obteniendo $y_1 = 6$; $y_2= 1$, y aplicando la regla correspondiente a este caso (los errores de igual signo) obtiene $x = 5\ ^2/_5$, que es la solución.

(9) La tabla de Abu AL-Waffa. Simplemente para mostrar la pericia de este astrónomo, digamos que para la construcción de su tabla procede a la manera de Ptolomeo, partiendo de los lados del pentágono y triángulo regulares para obtener sen 36° y sen 60^0, de donde por sucesivas bisecciones llega a sen 28' 7 $^1/_2$ " y sen 33'45", valores con los cuales obtiene el sen 22'30", ángulo que es cuádruplo de la diferencia de los dos anteriores. Mediante un engorroso juego de desigualdades llega a la igualdad aproximada para ángulos pequeños

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha + \frac{1}{6}[sen(\alpha+3\beta) - sen(\alpha-3\beta)]$$

evidente sin más que sustituir los senos por los arcos.

Con esa igualdad, y dando los valores α = 28'7 $^1/_2$"; β= 1'52 $^1/_2$" obtiene el seno de 30', valor mínimo de su tabla, mediante la expresión

$$sen\ 30' = sen\ 28'7\ ^1/_2" + {}^1/_6\ (sen\ 33'45" - sen\ 22'30").$$

6.2. La alta Edad Media

Ya aludimos al carácter enciclopédico de los científicos árabes, de manera que en todos ellos, en medida mayor o menor, tiene cabida la matemática. En tal sentido cabe mencionar las cuatro grandes figuras de la ciencia árabe, que florecen entre los siglos X y XI: Al-Razi (el Rhazes de los latinos), medico y alquimista a quien se atribuyen escritos matemáticos sin mayor relevancia; Ibn Sina (el Avicena de los latinos), considerado el sabio más famoso

del Islam, que se ocupó de alguna cuestión aritmética, como nuestra "regla del 9" que, enuncia "según el método hindú" como "la expulsión de los 9", con algunos ejemplos y consecuencias, dice así: Todo número que, dividido por 9 da por resto 1, 4 ó 7, su cubo, dividido por 9, da siempre por resto 1; Al-Biruni (no tiene nombre latinizado, pues no fue traducido) en cuya obra astronómica se incluyen cuestiones matemáticas: construcción de poliedros regulares y tratamiento algebraico de los problemas de tercero y cuarto grado, novedad que aparece con los árabes; (1) y el ultimo de los "cuatro grandes". Ibn AL-Haytham (el Alhazen de los latinos), importante por su obra en el campo de la óptica a quien se debe, entre otras cuestiones, la determinación del volumen del sólido engendrado por la rotación de un arco de parábola alrededor de un diámetro o de una de sus. cuerdas perpendiculares, a la manera griega, lo que lo llevo a utilizar la formula de la suma de las cuartas potencias de los números naturales, que no figura en ningún texto griego; además se conoce con el nombre de "problema de Alhazen", una cuestión de óptica, (2) que lleva a una ecuación de cuarto grado que Alhazen resuelve geométricamente.

Entre los matemáticos árabes de Oriente que florecen entre los siglos X a XII cabe mencionar a Ibn AL-Husayn que se ocupó del problema de la duplicación del cubo y de los "tripletes pitagóricos", por ejemplo, demuestra que el número mayor es siempre supuesto prima con los otros dos (múltiplo de 12) más 1 ó más 5; aunque más importantes son las contribuciones de AlKarhi y Omar Khayyam. Al-Karhi es un algebrista en quien no se advierte la influencia hindú, si se exceptúa" la regla del 9", pues se funda en Euclides y en especial en Diofanto, hecho que aparece también en otros matemáticos árabes y que se ha atribuido a rivalidades de escuela.

Con Al-Karhi hace su aparición en la matemática árabe análisis indeterminado a la manera de Diofanto, algo mejorado; además se le debe la demostración, al estilo pitagórico, de la suma de los cubos.(3).

Con Omar Khayyam, el celebrado poeta de los *Rubaiyat,* puede decirse que el álgebra árabe

Tumba de Omar Khayyam

llega a su culminación. Como algebrista se le de be una clasificación completa de las ecuaciones de primero, segundo y tercer grado, en la que especifica 25 casos distintos, según el tipo de ecuación completa o incompleta" de coeficientes positivos. Mientras resuelve aritméticamente las ecuaciones de primero y de segundo grado, resuelve geométricamente, por medio de intersección de cónicas, las de tercer grado, y es probable que él, o algún discípulo, haya extendido el procedimiento a las ecuaciones de cuarto grado, por lo menos en algún caso particular. Al referirse a los casos de las cúbicas no reducibles a cuadráticas dice: "excepto uno de ellos (el ejemplo dado por Al-Mahani) ninguno ha sido tratado por los algebristas, mas yo los discutiré y los demostrare geométricamente, no numéricamente". Esta conexión de los problemas de tercero y de cuarto grado, que los árabes no supieron resolver aritméticamente con los problemas geométricos, es un progreso importante de la matemática árabe. Así como algunos matemáticos árabes "pusieron en ecuación", mediante su traducción algebraica," ciertos problemas de índole geométrica, otros como Omar, trataron el caso inverso: la traducción y solución geométrica de ecuaciones algebraicas.(4)

El siglo XII ve el principio de la decadencia de la ciencia árabe del Oriente, pero en cambio es el siglo en que esta ciencia alcanza su apogeo en la España musulmana. No abundaron en ella los matemáticos; entre los más notables mencionemos al judío Abraham Bar Hiyya, apodado Sarrasorda, traductor sistemático de obras, en especial astronómicas, del árabe al hebreo, y de ahí uno de los creadores del lenguaje científico hebreo. Se le debe una obra original en hebreo traducida al latín por el autor en colaboración con Platón de Tivoli con el titulo de *Liber embadorum*, tratado de agrimensura y de geometría prácticas; obra que ejerció influencia tanto entre los hebreos como entre los cristianos. Su versión latina es una de las primeras obras que aporta la resolución de la ecuación de segundo grado en este idioma. Otro matemático importante hispanoárabe es el astrónomo Jaber b. Aflah, el Geber de los latinos, a veces confundido con el célebre Geber de los alquimistas cuando se utilizó la semejanza de su nombre con la palabra "álgebra" para atribuirle el invento y denominación de esa rama de la matemática. La contribución de Geber a la matemática corresponde al campo de la trigonometría esférica en la que demostró una propiedad de los triángulos rectángulos a veces llamada "teorema de Geber".(5)

En este período, siglo XI a XIII la ciencia oriental, hindú y árabe, deja de tener influencia directa sobre el saber occidental y, éste inicia un despertar que adquirirá impulso los tiempos renacentistas para empalmar con los albores de la ciencia moderna.

No obstante, tal declinación de la influencia de la ciencia oriental en Occidente, conviene para terminar con esa ciencia, resumir en líneas generales esa influencia, así como recordar algunas de sus manifestaciones tardías que revelen interés.

El ultimo, cronológicamente de los matemáticos hindúes de importancia es Baskhara del siglo XII, en cuya obra astronómica dedica dos capitulos: *Lilavati* (la hermosa o la noble ciencia) y *Vija-Ganita* a la aritmética y al álgebra. Es probablemente la obra mas importante de la matemática hindú, en la que se advierten influencias de la matemática griega, como de la árabe y china; por lo demás, el autor reconoce haber utilizado obras de autores anteriores, entre ellos de Brahmagupta.

Como contribuciones originales pueden mencionarse cuestiones de análisis indeterminado de segundo grado;(6) algunas formulas aproximadas, por ejemplo para $\sqrt{2}$ da el valor $^{24}/_{17}$ (que se obtendría restando los numeradores y denominadores de las reducidas $^{41}/_{29}$ y $^{17}/_{12}$ del desarrollo en fracción continua de 2; y unas lacónicas demostraciones de teoremas, como el de Pitágoras y de equivalencias, mediante figuras con ciertas descomposiciones y recomposiciones, y como única explicación un imperativo: ¡Mira! Por ejemplo, descompone un círculo en doce sectores y un rectángulo de base la semicircunferencia rectificada y altura el radio en ocho triángulos rectángulos iguales, para demostrar la equivalencia entre el círculo y el rectángulo.

Ya hablamos de las contribuciones originales de la matemática hindú: la introducción de las funciones circulares y el sistema de numeración. Podemos agregar que más adelante aparece cierto simbolismo precursor del álgebra sincopada, así como del uso del cero como símbolo; vieron además los hindúes claramente la diferencia entre números positivos y negativos que interpretaban como créditos y débitos que distinguían simbólicamente, hecho que les permitió unificar las ecuaciones de segundo grado en un solo tipo, cualesquiera fueran los coeficientes y hasta de admitir las soluciones negativas, aunque sin tomarlas en consideración, pues, como dice Baskhara, "la gente no aprueba las raíces negativas".

Otro, rasgo que caracteriza el período histórico de la matemática, que tiene por escenario la India de los siglos V a XII: es la época que el historiador Smith califico de

"época de la poesía", pues esa ciencia se muestra revestida de un ropaje poético; todas las obras se escribieron en verso, y en ellas se utilizo un lenguaje metafórico que en especial. se pone de relieve en el folklore matemático, donde se eligieron con preferencia aquellos temas que mas se prestaban a ser expresados en forma poética.

Veamos algunos ejemplos: "Hermosa niña de ojos radiantes, dime, si has comprendido el método de inversión: ¿cual es el numero que multiplicado por 3, agregándole los $^3/_4$ del producto, dividiendo por 7 y disminuyendo en $^1/_3$ el cociente multiplicándolo por si mismo, disminuyéndolo de 52, extrayendo la raíz cuadrada, sumándole 8 y dividiéndolo por 10, da el numero *a*?" El resultado es 28, que se obtiene recorriendo todas las operaciones en orden inverso: 2, 20, 12, 144, 196, 14, 21, 147, 84, 28.

He aquí un par de problemas hindúes que exigen el conocimiento del teorema de Pitágoras. El primero que también podría ser chino, es una variante del "problema de la caña": ¿cual es la longitud de la rama más alta de un árbol de bambú que el viento ha quebrado, conociendo la altura del árbol y la distancia en el suelo desde la cima hasta la raíz?

El segundo es mas hindú: dos ascetas viven, en la cima de una montaña de altura conocida, cuya base esta a una distancia conocida de la aldea próxima, Para ir a esa aldea uno de ellos desciende y se dirige a ella caminando; el otro, que es mago, prefiere volar; asciende una cierta altura, y luego se dirige directamente, siempre en vuelo, a la aldea. ¿Cual debe ser esa altura para que ambos ascetas recorran la misma distancia?

Veamos por ultimo un problema típico que aparece en Baskhara: "La raíz cuadrada de la mitad de un enjambre de abejas se esconde en la espesura de un jardín. Una abeja hembra con un macho quedan encerrados en una flor de loto, que los sedujo por su dulce perfume. Los $^8/_9$ del enjambre quedaron atrás. Dime el numero de abejas". El problema exige la resolución de una ecuación de segundo grado, que tiene dos raíces positivas, pero de las cuales: solo la entera 72 (la otra es $^9/_2$) satisface las poéticas exigencias del problema.

En cuanto a la matemática árabe, tanto en Oriente como en Occidente, continuó progresando con ritmo decreciente,(7) mientras declinaba su influencia en el mundo cristiano. Esa influencia había sido notable tanto en el sentido de aportar contribuciones originales pues en realidad la ciencia árabe bebió en fuentes griegas, hindúes quizá chinas y hasta en algún resto de la antigua ciencia de los babilonios, sino por haber sido esa ciencia

árabe el conducto mediante el cual el antiguo saber griego conservado y reelaborado se traspaso a Occidente.

Sin duda, ese antiguo saber griego se había, conservado en el mundo bizantino, pero en ese mundo aquel saber quedo como fosilizado, petrificado; lo aprueba el escaso aporte científico de los bizantinos; aun a partir del año 1000, época del llamado "renacimiento bizantino", en el cual, desde el punto de vista matemático, solo podemos mencionar a un Máximo Planude del siglo XIII que es el primer griego que conoce las cifras "árabes" y a un Manuel Manscopulo, de comienzos del siglo XIV, que introduce, probablemente por primera vez en griego, las reglas para la construcción de cuadrados mágicos.

En cambio, el contacto entre. árabes; y cristianos, ya en forma esporádica, ya en forma mas permanente produjo su fruto que, en el campo matemático, significo una adquisición mas completa del saber griego con el agregado del saber hindú y árabe, lograda a través de las traducciones al latín de los principales escritos de autores griegos y árabes.

Los primeros signos de la influencia árabe en Occidente se han visto en Gerberto de Aurillac, papa Silvestre II en 999, que hacia 970 residió en el condado de Barcelona y que por las obras matemáticas que se le atribuyen, fue el primer científico que divulgo en Occidente las cifras árabes sin el cero. En efecto, Gerberto habría introducido en Occidente el "ábaco" de los árabes, diferente del ábaco con bolillas, pues con el se opera con fichas que llevaban grabadas las nueve cifras o letras equivalentes (la ficha del cero no era necesaria), de una manera tal que condujo naturalmente a nuestra manera habitual de operar (el "algoritmo" de los medievales), cuando en lugar del instrumento y de la fichas se comenzó a operar escribiendo las cifras en cuadros con arenillas, de ahí el nombre de "cifras gubar" (de gubar = polvo, en árabe), que se dio a las nueve cifras sin el cero. Pero la mayor influencia de la matemática árabe se debió a los, contactos mas directos: el comercio mediterráneo, las contiendas bélicas y, en especial, las Cruzadas y sobre todo la permanencia de árabes en tierras cristianas: Sicilia y España.

A mediados del siglo XII se inicia una era de traducciones, en gran parte del árabe al latín, aunque también del hebreo al latín, como del árabe al hebreo y más adelante también directamente del griego al latín.

De los traductores que estuvieron en Oriente citemos a Adelardo de Bath, que tradujo del árabe los *Elementos* de Euclides y escritos de Al-Khuwarizmi: las tablas astronómicas y probablemente la *Aritmética*.

En Sicilia, donde bajo el impulso de los reyes normandos, hubo un intenso intercambio entre las culturas griega, árabe y latina, también se realizaron traducciones del árabe al latín, y hasta del griego al latín. En este ultimo caso, están *Datos* y la *Óptica* de Euclides, y el *Almagesto* de Ptolomeo, y no deja de ser interesante destacar que esta traducción directa de la obra. de Ptolomeo no tuvo mayor difusión, pues fue desplazada por la traducción indirecta del árabe, que poco después realizo Gerardo de Cremona.

Pero el centro mas activo de traducciones fue España. Entre los traductores mas antiguos figura la pareja de mediados del siglo XII: Domingo Gundisalvo y Juan de Sevilla, que traducían en colaboración: Juan, del árabe al castellano, y Gundisalvo del castellano al latín. Entre sus traducciones figura una aritmética donde ya, se mencionan las cifras hindúes con el cero, no se habla del ábaco, y aparece el término "algoritmo".

Contemporáneo de los anteriores es Roberto de Chester que residió en España a mediados de siglo y a quien se debe la importante traducción latina del álgebra de Al-Khuwarizmi.

Pero los más fecundos traductores de obras científicas fueron Platón de Tívoli y Gerardo de Cremona. Ya mencionamos a Platón, quien, entre otras obras, tradujo la *Esférica* de Teodosio, con motivo de su colaboración con Bar Hiyya. En cuanto a Gerardo de Cremona que residió y murió en Toledo, y a quien se debe la traducción de mas de 80 obras, figurando entre los autores matemáticos que tradujo, los griegos Euclides, Arquímedes, Apolonio, Autolico, Hipsicles, , Teodosio, Gemino. y Ptolomeo, y los árabes Al-Khuwarizmi, Al-Nayrizi, Tabit b. Qurra, Abu Kamil, Jabir b.Aflah y Al-Zarqali. De este ultimo, el Arzachel de los latinos, conocido astrónomo y constructor de instrumentos del siglo XI tradujo las *Tablas toledanas*, compilación de las observaciones realizadas por Al-Zarqali y sus colegas que mas tarde sirvieron de .base para la preparación de las *Tablas alfonsinas* que ordeno compilar Alfonso el Sabio.

Entre las traducciones directamente del griego al latín citemos la versión del escrito de Arquímedes *De Los cuerpos flotantes*, realizada por el dominico flamenco Guillermo de Moerbecke, del siglo XIII versión importante, pues es la que hizo conocer esa obra al mundo cristiano que no entro en posesión de un manuscrito original en griego hasta comienzos de este siglo.

La obra de los traductores puso a disposición de los científicos occidentales gran parte del saber griego y del saber árabe, circunstancia que, unida a la atmósfera cultural de

la época escolástica, universidades, explica el renacimiento que en el siglo XIII experimentara la matemática en Occidente.

Ese renacimiento inicia con una figura notable: Leonardo Pisano, llamado Fibonacci (contracción de la expresión" "hijo de Bonaccio", apellido del padre), sin duda el más grande de los matemáticos medievales.

Con motivo de una misión oficial encomendada al padre, Leonardo estuvo en África del Norte y recorrió mas tarde varios países musulmanes, donde se puso en contacto con los árabes y adquirió su saber matemático. Al regresar Pisa publico en 1202 y reedito en 1228 un *Liber abaci* o *Libro de los ábacos* que, no obstante el título, combate el uso de los ábacos, para mostrar en cambio las ventajas del sistema decimal y de las cifras hindúes sobre el sistema romano y los números romanos. En realidad, no fue Leonardo quien introdujo en la Europa cristiana las cifras hindúes, pero si fue quien divulgo su uso mostrando sus ventajas (por ejemplo, el numero 4321 exige en números romanos diez letras), aunque no por eso quedaron desterradas los antiguos números romanos y el ábaco que continuaron en uso en especial en la vida comercial durante mucho tiempo, mientras en el campo más científico se entablaba una lucha entre abacistas y algorítmicos que se prolongaría hasta comienzos del siglo XVI.

Además del *Liber abaci* se deben a Leonardo una *Practica geometriae* de 1220, donde introduce en Occidente la resolución de problemas geométricos mediante el álgebra, uno de estos problemas, que muestra además su pericia de calculista aparece en una *Epístola* al maestro Teodoro (un matemático del emperador no mejor especificado); además en *Practica geometriae* aparecen procedimientos para medir alturas y depresiones con un cuadrante. Pero los escritos mas originales de Fibonacci son: el de titulo abreviado ... *super solutionibus quaestionum*. .. y *Liber quadratorum* ambos de 1225, que tratan distintas cuestiones de aritmética y de álgebra entre las cuales tres problemas que a modo de desafío le lanzo Juan de Palermo de la corte de Federico II y que Leonardo resolvió. (8)

Algo posterior a Leonardo es Giovanni Campano de Novara, que tradujo los *Elementos* de Euclides, incluyendo los llamados Libros XIV y XV, para lo cual utilizo la versión de Adelardo, pero recurrió también directamente a las fuentes árabes. Con esa traducción, que por lo demás constituyo el **primer texto impreso** de los ***Elementos*** (Venecia, 1482), Campano demostró ser algo mas que un traductor. Por ejemplo, se le debe el intento, sin duda el primero, de fundar la aritmética de los números naturales sobre

un sistema de cuatro axiomas postulados. Los tres primeros afirman que la sucesión de los números naturales es ilimitada, mientras que el cuarto establece la existencia de un mínimo en todo grupo de números al fijar "que un número no puede disminuir indefinidamente". Utiliza estos postulados en la determinación del máximo común divisor, así como en la demostración de la inconmensurabilidad de un segmento con los segmentos que lo dividen en media y extrema razón. Agreguemos que en sus comentarios Campano señala el carácter especial del ángulo formado por dos circunferencias tangentes, reabriendo la cuestión del "ángulo de contingencia" que ocupó y preocupó a los matemáticos hasta el siglo XVIII. El nombre de "ángulo de contingencia", para referirse al ángulo formado por la circunferencia con su recta tangente en su punto de tangencia, aparece en una obra de este siglo, perteneciente a un autor (o autores) de identidad discutida: Jordanus Nemorarius, a quien (o a quienes) se deben varios escritos mecánicos y matemáticos. (9)

También al siglo XIII pertenece John de Holywood, mas conocido por su nombre latinizado Sacrobosco, que en 1230 era maestro en Paris. Por la fama que gozaron y la influencia que ejercieron, mas que por su valor intrínseco, cabe recordar su *Sphera mundi*, compilación de las partes mas elementales del *Almagesto,* que sirvió de texto en toda Europa hasta después de Copérnico, y su *Algoritmus vulgaris* o *Tractatus de arte numerandi*, tratado elemental de aritmética que trata de la numeración, adición, sustracción, división por 2, duplicación, multiplicación, división, suma de números naturales y de impares, y extracción de raíces. Con todo, este texto elemental contribuyo a la difusión de las cifras arábigas y de la numeración decimal.

Notas complementarias

(1) ***Los problemas de tercer grado***. Ya vimos como los geómetras griegos resolvían los problemas, que hoy llamamos de tercero o de cuarto grado por la índole de la ecuación algebraica que los resuelve, mediante construcciones que trascendían el uso de rectas y circunferencias, en especial utilizando cónicas. Los matemáticos árabes conocían, por supuesto, tales construcciones, pero sus conocimientos de álgebra les permitieron "poner en ecuación" esos problemas, aunque no podían resolver aritméticamente la ecuación, sino en forma aproximada. Un ejemplo lo ofrecen las ecuaciones a las que conduciría la construcción del eneágono regular. Para ello un discípulo de Al-Biruni parte del lado del polígono regular de 18 lados: $x = 2 \text{ sen } 10^0$ y lleva la ecuación: $x^3 + 1 = 3x$ que resuelve el problema. Por su parte, Al-Biruni había llegado a una ecuación semejante: $x^3 = 1 + 3x$ para

$x = 2 \cos 20^0$, que resolvió aproximadamente sin indicar el procedimiento dando el valor de x en el sistema sexagesimal hasta las unidades de cuarto orden, que corresponde a un valor exacto hasta nuestro sexto decimal.

Fig. 23(ojo)

6.3. La baja Edad Media

Al finalizar el siglo XIII Occidente penetra en una era de transición hacia el Renacimiento, ya que ese siglo fue la culminación cultural de los tiempos medievales, siglo en el que se destacan las figuras de Alberto Magno y Santo Tomas, de Bacon, el fraile, de Ramón Lull y Dante; figuras que, desde el punto de vista matemático, de esas figuras sobresalen Bacon por la importancia que asigno a esa ciencia, aun sin ocuparse de ella, y Ramón Lull, cuyas investigaciones, o mejor lucubraciones lógicas, no dejaron de ser un primer esbozo, por grosero que fuere, de la futura lógica matemática y un anticipo de la característica universal leibniziana.

A la primera mitad del siglo XIV pertenece el teólogo ingles Thomas Bradwardine, que se ocupó de mecánica y de matemática. El más original de sus escritos matemáticos es una *Geometría especulativa*, donde considera los polígonos estrellados que no figuran en los *Elementos*, pero que hicieron su presencia en los comentarios de Boecio y en las versiones de Adelardo de Bath y de Campano. Bradwardine los engendra sistemáticamente, mediante prolongación de los lados de los polígonos regulares de orden inferior (los polígonos de primer orden son los convexos) y da correctamente la formula para la suma de los ángulos internos de los polígonos estrellados de orden inferior (Campano la había dado para el pentágono estrellado.) En otro tratado de Bradwardine (inédito): *Tractatus de continuo* aparecen algunas consideraciones acerca del ángulo de contingencia, del continuo y del infinito.

Durante el siglo XIV aparece en Inglaterra el primer tratado occidental, escrito en latín, en el que se exponen los principales teoremas de trigonometría a la manera euclidea: *Quadripartitum de sinibus demonstratis* del benedictino Richard de Wallingford de Oxford, aunque unos años antes de su muerte aparece en Francia una obra semejante, pero en hebreo, del judío provenzal Levi ben Gerson, matemático y astrónomo, entre cuyos escritos matemáticos figura una *Aritmética*; una memoria sobre los números de la forma 2^m y 3^n,

demostrando que, con pocas excepciones, su diferencia es siempre mayor que uno; comentarios a los *Elementos* en los que intenta reducir el número de postulados y demostrar el postulado de las paralelas; y, como labor más original, un tratado de trigonometría donde considera al mismo tiempo la manera griega de medir los ángulos por medio de las cuerdas y las flechas, y la manera hindú mediante los senos y cosenos, dando las relaciones mutuas entre los cuatro elementos. Entre sus aportes a la trigonometría figura el actual "teorema del seno" para triángulos rectilíneos y una tabla de senos, construida a la manera de Ptolomeo.

Pero la novedad más interesante del siglo es la aparición de cuestiones de índole infinitesimal, diferentes de aquellas de esa índole enlarvadas en la geometría griega. Se ocuparon de estas cuestiones en Inglaterra los maestros del colegio de Merton de Oxford: Richard (o Roger) Swineshead o Suisset y William Heytesbury. El primero fue un teólogo, matemático y mecánico que, en virtud del titulo de su *Liber calculationum* (publicación póstuma de 1477), se le apodo "Calculator". En ese tratado, como en otro semejante de Heytesbury, se demuestra en forma retórica comparando movimientos uniformes y uniformemente variados, la siguiente regla que algunos autores ingleses denominan actualmente "regla de Merton": el espacio recorrido en un movimiento uniformemente variado es igual al espacio recorrido en el mismo tiempo por un movimiento uniforme, cuya velocidad es la velocidad media entre las velocidades inicial y final del movimiento variado.

A este importante resultado de índole cinemática agrega "Calculator" un resultado no menos interesante de índole infinitesimal, al considerar movimientos arbitrarios de ley artificial y tales que el cálculo de los espacios recorridos **presupone la determinación de la suma de una serie convergente.**

Un paso más adelante en el tratamiento de estas cuestiones la da el maestro de Paris Nicolas Oresme, en cuyos trabajos matemáticos aparece como novedad la representación gráfica de las "intensidades de las cualidades". Por supuesto que las representaciones graficas en si no significaban una novedad pues las figuras geométricas y los mapas son ejemplos antiguos de representaciones graficas, pero la novedad que introduce Oresme, con su *Tractatus de latitudinibus*, es que ahora desaparece la homogeneidad entre la representación, que es un segmento, y la magnitud representada que es: tiempo o intensidad. Tomando como longitudo (nuestra abscisa) el tiempo, y como latitudo(nuestra ordenada) una intensidad: velocidad, calor u otras intensidades, que no siempre significan

magnitudes, Oresme representa la cualidad o propiedad de acuerdo con la variación de la intensidad respecto del tiempo, aunque tal variación no se refleja, como en las coordenadas cartesianas; por la curva dibujada por los puntos de coordenadas dadas, sino por la figura total, por el área encerrada, en entre aquella curva, el eje de los tiempos y las intensidades inicial y final.

Cuando esa intensidad es la velocidad, dando por sabido que esa área (mensura) representa el espacio recorrido, la gráfica revelará en efecto, la naturaleza del movimiento. Si el movimiento es uniforme (*latitudo uniformis*) la gráfica es una paralela al eje; si el movimiento es uniformemente variado (*latitudo uniformiter difformis*). La grafica es una recta inclinada de pendiente distinta, según sea el movimiento acelerado o retardado; de igual manera otras gráficas representaran movimientos no uniformemente variados (*latitudo difformiter diffonnis).*

En el caso del movimiento uniforme variado, Oresme demuestra geométricamente, por comparación de figuras equivalentes, la regla que los maestros de Merton habían encontrado retóricamente. También Oresme considera, como "Calculator" movimientos aparentemente aun mas complicados que implican el cálculo, de sumas de series convergentes como valor de los espacios recorridos.(l)

No menos original es Oresme en otra de sus obras: *Algorismus proportionum* donde con el nombre de "proporciones dobles, mitad, una vez y media indica nuestras potencias de expopente 2, $^1/_2$, $^3/_2$, ...; en una palabra expone una teoría de las operaciones con exponentes fraccionarios, para los que adopta un simbolismo especial.

También algunos atisbos **del concepto infinitesimal de limite** pueden advertirse en la figura científica de Nicolás de Cusa o el Cusano del siglo XV que en sus,.escritos matemáticos se ocupó un par de veces de la cuadratura del circulo aunque partió del supuesto erróneo de ser en los polígonos isoperimétricos proporcional la diferencia entre el área del circulo y la del polígono con la diferencia entre el radio y la apotema del polígono. En otras investigaciones el Cusano se ocupó de la rectificación de la circunferencia dando expresiones bastante aproximadas.(2)

Desde el punto de vista técnico una obra matemática importante del siglo XV se debe a los astrónomos Georg Peurbach y su discípulo y colaborador Johannes Muller llamado, el Regiomontano por su ciudad de origen Konigsberg. Peurbach había iniciado una versión directa del *Almagesto* que continuó Regiomontano sustituyendo la tabla de

cuerdas por tablas de senos tomando el radio de 600.000 partes y los arcos de 10' en 10'. Regiomontano mejoro esas tablas tomando los arcos de minuto en minuto y el radio de 10^8 partes, y agrego, una tabla de tangentes, que llama "números" para arcos de grado en grado con un radio de 100.000 partes.

Se debe a Regiomontano el primer tratado de trigonometría de influencia duradera. Es el *De triangulis omnimodis* en cinco libros compuesto hacia 1464 e impreso en 1533. En ellos aparece una nueva demostración del teorema del seno de la trigonometría rectilínea, el teorema del coseno para los triángulos esféricos; una tabla como apéndice junto con la tabla de tangentes, de "doble entrada" para el calculo de los valores de una formula de triángulos esféricos rectángulos, y una serie de problemas relativos a triángulos planos con la innovación de resolverse mediante el álgebra retórica, aun en los casos en que la solución geométrica podría haber sido mas simple. También introduce la innovación de dar métodos generales, prescindiendo de los valores numéricos que no elige previamente como sus antecesores.

Se debe además a Regiomontano un *Apéndice* a los *Elementos* donde considera los polígonos estrellados con el estudio relativo a los ángulos exteriores. En su correspondencia aparecen problemas de análisis indeterminado semejantes a los de Leonardo Pisano; un problema de máximo, el primero después de Apolonio; y un problema geométrico, que cuyo planteo lleva a una ecuación cúbica que Regiomontano no resuelve, aunque reconoce en ella un problema de trisección.

Un acontecimiento cultural del siglo XV que **tendrá notable repercusión científica es el invento de la imprenta** con tipos móviles de mediados de siglo que facilito extraordinariamente la trasmisión y difusión de los escritos científicos. Ya dijimos que la versión latina de Campano fue la primera edición impresa de los *Elementos* de Euclides en 1484, aunque fue especialmente durante el siglo XVI cuando se dieron a la imprenta las obras matemáticas clásicas de manera que a fines de ese siglo ya en idioma original, ya en versión latina los estudiosos estaban en posesión de los escritos más importantes de Arquímedes, Apolonio, Diofanto, . . .

Con todo conviene recordar algunos incunables, es decir, impresos del siglo XV, de interés matemático. Fuera de algunas aritméticas practicas publicadas desde 1478 en Italia y Alemania, (3) el incunable mas importante es probablemente la aritmética de Johann Widmann, aparecida en Leipzig en 1489. Comprende tres partes, la primera de las cuales,

sin mayores novedades, se dedica a las operaciones aritméticas con números enteros y a las progresiones aritméticas y geométricas; la segunda parte trata de las fracciones, de las proporciones y problemas de tres y comerciales; mientras que la tercera parte es geométrica.

La novedad que aporta la segunda parte es que en ella aparecen por primera vez los signos " +" y "-", aunque no en la forma puramente simbólica con que hoy se utilizan. El signo "+" no es solo signo de la suma, sino mas bien sustituye a la copula "y", mientras que el signo " -" no es usado exclusivamente en la sustracción, pues en ocasiones aparece la acostumbrada palabra "minus". De todos modos, el autor no indica el origen de estos signos, de manera que acerca de tal origen pueden tejerse y se han tejido toda clase de conjeturas.

La parte geométrica del libro de Widmann es irregular: al lado de reglas, erróneas para las áreas de figuras rectilíneas, aparece el cálculo correcto del radio del circulo circunscrito a un triangulo del cual se conoce un lado, su altura y la proyección de otro lado sobre el. Pero estos problemas geométricos, como en Regiomontano, no son sino pretextos para aplicar las reglas aritméticas.

Otro acontecimiento cultural del siglo XV, que tuvo influencia en el desarrollo de la geometría fue la feliz conjunción que se realizo entonces entre la ciencia, el arte y la técnica. Así es como especialmente por obra de artistas las antiguas consideraciones griegas y árabes sobre la óptica geométrica dieron origen a una rama de la geometría: la perspectiva. Las primeras obras europeas con ese título: la *Perspectiva communis*, de John Peckam, y la De perspectiva, de Witelo, ambos del siglo XIII, no eran sino reelaboraciones de la óptica de Alhazen que, sobre la de Euclides, tenia entre otras la ventaja de considerar los rayos visuales partiendo de los objetos y no del ojo como lo hacia el geómetra griego.

Pero durante los siglos XIV y XV la perspectiva va perdiendo su antiguo significado para convertirse en una rama de la geometría, cuyo problema capital es la intersección con un plano (el cuadro) de las rectas que, partiendo de los distintos puntos del espacio, llegan hasta el ojo o en términos mas geométricos, la intersección de un plano con un haz de rayos. Es explicable que este problema geométrico haya surgido en el seno del arte pictórico y en una época en que muchos pintores trataban de investigar los fundamentos científicos de su propio arte. A esos pintores y a tal tendencia pertenecen Filippo Brunelleschi, Lorenzo Ghiberti y, en especial, Leon Battista Alberti a quien se debe, entre

otras obras, una *De pictura* que escribió en latín y en vulgar, en la que resume las consideraciones de la época sobre la geometría aplicada al dibujo y a la pintura.

Estas consideraciones dieron lugar, algo mas tarde, a un tratado especial: el primero en su genero, que escribió en latín, pero también en vulgar el pintor Piero della Francesca a fines del siglo XV: *De perspectiva pingendi* "proyección central", donde aun en forma embrionaria aparecen las primeras nociones de la rama de la actual geometría descriptiva. En ese tratado, que no se publico hasta fines del siglo pasado, se exponen: en la primera parte los principios generales, en la segunda la proyección de cuerpos regulares y en la tercera de cuerpos irregulares. Otra obra de Piero della Francesca en latín sobre los poliedros regulares, que Pacioli hizo conocer mas tarde en vulgar.

Dos artistas egregios se ocuparon de perspectiva: Leonardo y Durer, quienes, por lo demás, también contribuyeron en otras ramas de la matemática(4). Las consideraciones sobre perspectiva de Leonardo figuran en la compilación que, en 1651, apareció con el nombre de *Tratado de la pintura*. Es posible que tales consideraciones fueran tratadas por Leonardo en forma especial pues se tiene noticias de que a mediados del siglo XVI, un par de decenios después de su muerte, circulaban manuscritos con tales consideraciones.

En cuanto a Durer es interesante destacar que en sus escritos introdujo el uso de las proyecciones horizontal y vertical, que tres siglos después sistematizaría Monge; sin embargo, no encontraron entonces igual apoyo que los métodos de proyección central de la perspectiva.

Discípulo de Piero della Francesca y vinculado con el mundo de artistas y técnicos del Renacimiento italiano, fue Luca Pacioli, a quien se debe, entre otras obras, una *Summa de Arithmetica, Geometría, Proporlioni et Proportionalitá*, impresa en 1494, de carácter enciclopédico y resumen de todo el saber matemático de la época, cuyo objeto fue poner ese conocimiento a disposición de los técnicos, artistas y comerciantes, por lo cual la escribió en lengua vulgar, aunque con más precisión habría que decir en una mezcla de latín, de italiano y de todos los dialectos de las numerosas regiones que Pacioli visito o en las que enseño. Sin contar el entusiasmo que. Pacioli muestra por la matemática en todos sus escritos (5) su merito principal consiste en haber ofrecido en especial en su *Summa* un arqueo del saber matemático. de su tiempo, que sirve muy bien de jalón para apreciar los progresos realizados desde Leonardo Pisano y para medir también los avances que se harán en los siglos sucesivos.

Aunque en la obra de Pacioli ya hay importantes atisbos en materia de simbolismo algebraico, en este campo son más originales las aportaciones de un francés, Nicolás Chuquet, que por haber permanecido inéditas, ejercieron menor influencia: Aparecen en una obra compuesta en 1484; en tres partes, de ahí su nombre *Le Triparty en la science des nombres*. La primera parte comprende las operaciones con enteros y fracciones; dando explícitamente la regla de los signos para la multiplicación y división, en la segunda parte se estudian las raíces y sus operaciones que maneja con gran desenvoltura, utilizando la multiplicación por la expresión conjugada para racionalizar denominadores, mientras que la tercera parte se ocupa de la resolución de ecuaciones que Chuquet denomina "equipolencia entre números" cuadráticas o reducibles a cuadráticas. Como apéndice, el manuscrito del *Triparty* trae una colección de 166 problemas, probablemente del mismo autor.

Es posible que la mayor originalidad de Chuquet resida en el simbolismo: aparece como signo de raíz la letra R con un exponente 2 ó 3 según sea cuadrada o cúbica; todas las potencias de las incógnitas se indican mediante el exponente aplicado al coeficiente, apareciendo en algún caso el exponente cero y el -1; la suma y la resta se indican con las sincopas p y m, ... (6)

FIN DE LA LECTURA 6

Lectura 7

ASCENSO INFINITO

Berlinski, D
Debates. Barcelona

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Todos los méritos para los griegos. Todos los méritos, y después solo silencio. Los impasibles romanos, que habían conquistado a los griegos para luego conquistar el mundo, apenas eran unos militares brillantes. Tenían talento para la política y la propaganda; y estaban dotados para el derecho, la medicina y la ingeniería sanitaria, tres disciplinas que, sospecho, han hecho más por la felicidad del hombre que cualquier otra empresa humana. Pero los romanos no poseían el don de las matemáticas, su incompetencia resulta tan sorprendente que es como si la cultura clásica griega hubiera evolucionado directamente hasta los actuales Ruanda o Sudán. La curiosidad matemática murió en el Imperio romano, y permaneció inerte en el Occidente cristiano durante más de mil años. Por supuesto, hubo grandes teólogos y filósofos: los Padres de la Iglesia, Beda el Venerable, Anselmo, Abelardo, Alberto Magno, Tomás de Aquino, Juan Duns Escoto, Guillermo de Occam, pero ninguno quedó atrapado en el fuego del rapto pitagórico, insensibles y apenas capaces de remover las cenizas. No ocurrió lo mismo en el gran Imperio musulmán, que desde el

siglo VIII hasta mediados del siglo *X*III d.C. se extendía desde España por el oeste hasta las fronteras de la India por el este. El árabe era la lengua de las mujeres y los hombres cultos, el sofisticado y flexible intermediario entre la antigüedad griega y latina y la Europa medieval, y la perfumada ciudad de Bagdad era su lugar de recreo, el centro del archipiélago árabe. En el primer tercio del siglo I*X*, después de haberse afianzado en el poder matando a su hermano en combate, el califa al-Ma'mun creó la Casa de la Sabiduría; fortalecido por la conquista, invitó a matemáticos, astrónomos, astrólogos, poetas y traductores a mezclarse entre el frío mármol de sus pasillos. Los matemáticos árabes inventaron un flexible sistema de notación para los números naturales —el sistema decimal todavía en uso—, y aprendieron a resolver ecuaciónes cuadráticas. Coquetearon con los números negativos y las magnitudes inconmensurables, una de esas parejas desamparadas, en la penumbra, en las que la gran cantidad de ropajes superfluos hace que ninguno de los componentes sepa cómo es en verdad el otro. Eran audaces. Al-Jwarizmi que trabajó durante el siglo I*X* mientras el Renacimiento musulmán cubría todo Bagdad con su resplandor dorado y ocre, manejaba raíces cuadradas y potencias con facilidad; su discípulo Abu Kamil tenía un método para potencias mayores; usando ideas bastante modernas (sustracción en ambos lados, factores, búsqueda del mejor), fue capaz de resolver varias ecuaciónes cuadráticas. Sabiduría preclara la de Abu.

Y también el Omar Jayyam de los Rubaiyyat, un persa entre árabes y un pájaro cantor entre gorriones, un matemático notable ocupado en la solución de las ecuaciones cúbicas, ya que su poética mente encontraba en el álgebra un antídoto contra el tiempo que el propio tiempo le negaba.

Y todavía hay algo que añadir: la gran mayoría de los escritos científicos árabes permanecen inéditos, sin estudiar. Es posible que dentro de unos siglos los estudiosos hablen con respeto del Newton árabe, una asombrosa inteligencia adelantada a su tiempo, cuyo vejado espíritu permaneció ciego de rabia durante los largos siglos en los que su obra maestra habría permanecido enterrada en las polvorientas estanterías de alguna librería de anticuario.

Sean cuales sean las joyas que los estudiosos desconocen aún, el hecho es que para estudiar hoy la historia de las matemáticas, los historiadores pueden saltar desde el final de la época griega hasta el principio de la era moderna sin que su conciencia científica se inmute.

Sobra decir que, estando ellos prestos a saltar, ¿por que habríamos de dudar nosotros?

Estamos en 1600. Adiós a los escolásticos, los campanarios y los escribas. Está a punto de comenzar la gran era de las matemáticas. A comienzos del siglo *X*VII, el matemático Mersenne podía observar todas las matemáticas reunidas en un único estante, una colección que recogía algunos periodos brillantes del pasado, como los de Euclides, Apolonio y Arquímedes, y algunas estrellas del naciente Renacimiento, como Cardano, Torricelli y Bombelli. El propio Mersenne tenía mano para tratar con los números y el estante contenía uno o dos tratados sobre números naturales. Después de una discreta pausa, Mersenne mencionaba el número cero, invento de un matemático indio, y los números negativos -1, -2, -3, -4,..., los puntos suspensivos matemáticos para abreviar otra progresión, esta vez marcha atrás hacia las oscuras regiones del infinito. Los matemáticos del Renacimiento eran bastante medrosos, Mersenne tenía confianza, pero tanto Nicolás Chuquet como Michael Stifel observaban a los números negativos como si fueran un juguete diabólico.

Mersenne tenía bien poco que decir sobre los números reales. Se limitaban a farfullar cuando salían a relucir. Los griegos sabían que la raíz cuadrada de dos no podía relacionarse con los números naturales ni con el cociente de ninguno de ellos. Un hombre había fallecido para probarlo. Mis de quince siglos después, el polvo y la herrumbre todavía ocultaban el tema, el primero para oscurecer la visión, la segunda para dificultar el movimiento. Están los números naturales; está el cero y los números negativos, y también están las fracciones. Las fracciones dan lugar a los decimales periódicos, como cuando 1/7 se representa como 0,142857... sin que haya mis cambios en la cola del decimal. Y luego está el asunto de la raíz cuadrada de dos. No se puede representar como una fracción ordinaria. Pero ese número, cualquiera que sea, puede ser aproximado por un número que arrastre decimales sin fin. Esto ya lo sabían los babilónicos. Después de todo, la raíz cuadrada de dos es mayor a 1 y menor que 2, y también mayor que 1,1 y menor que 1,9... la aproximación puede mejorarse más y más si se continua el proceso y se añaden mas puntos. Si se pregunta por la raíz cuadrada de dos, las calculadoras modernas dan 1,4142135... Los ordenadores lo hacen todavía mejor. Pero da igual lo lejos que lleguen en la aproximación, nunca desembocan en un patrón. La expansión decimal es irregular. Da la impresión de ser aleatoria. Es demasiado confusa. Como otros matemáticos de su época, Mersenne no tenía nada interesante que decir sobre estos números.

Y, de pronto, aparecen otras cosas curiosas, como para rematar la impresión de que los números son muy raros; junto a los familiares números de Mersenne están los que

corresponden a ecuaciones como $x^2 = -1$. Raffaele Bombelli puesto sus manos sobre los números que ahora llamamos complejos; solo vio el modo en que podrían ser manipulados. Había hallado oro puro, pero en el descuido de un luminoso día italiano se le escapó la oportunidad.

Mañana.[11]

Rene Descartes nació en 1596 y murió cincuenta y cuatro años después. El mayor de los

Rene Descartes

filósofos modernos y el mayor de los primeros matemáticos modernos, Descartes resulta extraordinario por el grado en que dejó que su plan, una forma determinada de mirar a las cosas, guiara sus pensamientos. Es un programa que nace del inconformismo. «Cuando era joven —señalaba Descartes—, estudie lógica... y análisis geométrico y álgebra.» Aparentemente le sirvió de poco. Los silogismos de la lógica, observaba con tristeza, «sirven para explicarle a otro algo que uno ya sabe». La geometría y el álgebra no son mucho mejores. La geometría «está tan restringida a tratar con formas que no puede ejercitar el razonamiento sin producir gran fatiga en la imaginación». Y por el mismo motivo, «el algebra está tan limitada a determinadas reglas y números que se ha convertido

[11] En español en el original

en un arte oscuro que lleva a la mente a la perplejidad en lugar de ser una ciencia que la eduque». Descartes era claramente un hombre con mala disposición para aceptar concesiones intelectuales.

El método al que se entregaba Descartes se llama con frecuencia el método de la duda; tiene las virtudes de cualquier programa de autoayuda. *Gestiona los problemas*; *se cuidadoso*; *no aceptes nada como un articulo de fe, busca las ideas claras y distintas, confía en ti mismo*. Descartes no era en absoluto un escéptico, un hombre preparado para vaciar sus pensamientos y poner su contenido en peligro, pero reconocía que el mundo material que nos es tan familiar, de árboles y enrejados, de claridad y sombra, se encuentra al final de un camino inferencial complicado y frágil hasta la desesperación, en el que hasta el hecho físico más obvio —la rosa es roja— despierta la corrosión epistemológica. ¿La rosa? ¿Roja? ¿De verdad? ¿Y como sabe —si, usted— que no esta soñando, sufriendo un error de percepción, errando el juicio o, simplemente, siendo victima de una cruel conjura cósmica, en la que sus sentidos han sido trastornados por un demonio? Estas cuestiones han pasado al acervo universal de la humanidad y, como cualquier profesor de filosofía sabe bien, de vez en cuando son todavía capaces de llevar al borde de la locura a los alumnos más sensibles.

Mientras que el mundo exterior retrocede, la mente vuelve sobre si misma. Pienso, luego existo. Ocupada en y consigo misma, la mente es una prueba más allá de toda duda, la distinción entre la apariencia y la realidad última de las cosas se desvanece, convirtiéndose en mera apariencia y siendo, por fortuna, atemperada. Y después, Descartes tradujo estas observaciones a un sistema metafísico. El universo está escindido en su propia naturaleza. Hay un mundo natural y un mundo mental. Es el individuo, solo y desnudo con sus pensamientos, el que debe aprender como representarse el mundo exterior. Una de las claves para esa representación, sintió Descartes, se puede encontrar en las matemáticas, ya que las matemáticas elementales representan un aspecto de la conversación de la mente consigo misma y, por tanto, son algo que forma parte de la prueba general de la mente contra la duda.

Descartes recibió su primera educación con los jesuitas en el colegio de La Fleche, y parece que consiguió persuadir a sus profesores de que tenía una constitución frágil. Se le

permitía dormir hasta tarde y en el futuro se convertiría en un enfermo crónico y en un consumado quejicoso. Se mudó a Paris en 1612, donde se encontró con su compañero de escuela Mersenne, y los dos jóvenes mantuvieron largas conversaciones hasta muy tarde en la noche sin fin, los tacones de madera de sus botas repicando en las calles de Paris (no lejos de donde vivo yo ahora). Descartes se unió al ejército holandés bajo Guillermo de Orange y después se presentó voluntario para servir en el ejército del conde bávaro de Bucquoy al inicio de la guerra de los Treinta Años. Descartes no nos cuenta si sus comandantes eran indulgentes con sus deseos de dormir hasta tarde, cada mañana, y de no ser molestado en general. En la noche del 19 de noviembre de 1619, acampados en algún campo cenagoso del Danubio, con los estandartes militares ondeando en el frio viento y las paredes de las tiendas sacudiéndose sombríamente, le sobrevino un sueño en el que se le revelaron tanto los secretos de la filosofía como los de las matemáticas.

El libro que mejor muestra el programa de Descartes y que desvela su sueno se titula *Discours de la methode pour bien conduire sa raison et chercher la verite dans les sciences* (*Discurso del método*; la geometría analítica aparece en un apéndice titulado *La Geometrie*). Es un libro que sugiere más de lo que contiene y que esta escrito por un matemático inconsciente de los tesoros que está a punto de revelar; se da la curiosa circunstancia de que las principales ideas de la geometría analítica no están expresadas explícitamente en el trabajo que creó la geometría analítica, de modo que los matemáticos suelen preguntarse como es posible que su autor pudiera ver tanto y decir tan poco.

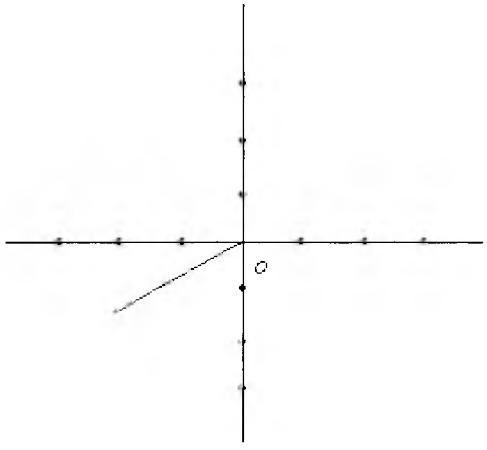
En el siglo *X*III Gervasio de Tilbury, un noble inglés ilustrado, tuvo la idea de crear un mapa del mundo. Gervasio era académico e historiador. Había viajado, llegando hasta Bolonia para completar su educación y hasta Sicilia, donde formó parte de la corte de Guillermo II. Más tarde, lo encontramos en Borgoña, como consejero de Otón IV, justo antes de la derrota de Otón en la batalla de Bouvines. Con ella, las cosas se le complicaron a Otón, dijo adios a sus sueños de conquistar el mundo y se asentó en la Baja Sajonia, con el servicial Gervasio siempre a su lado. Se conserva un libro —*Otia imperialia*— al parecer escrito por Gervasio para entretener al rey.

Y en una copia bien conservada sobrevive también el gran mapa, el mapamundi de Ebstorf.

Orientado al este (desde la perspectiva de Hannover, donde se encontraba en origen), el mapa dibuja el mundo como si estuviese envuelto con ternura por Cristo, cuya cabeza (asombrosamente pequeña) se halla en el Jardín del Edén, que los autores situaron en la India. El resto del mundo sigue los contornos del cuerpo de Cristo, su mano derecha cubre como por descuido el norte de Albania y la izquierda, el sur de África. En el centro exacto del mapa y, por tanto, en el lugar donde convergen todos los caminos, está la ciudad de Jerusalén. Las tumbas de todos los apóstoles están dibujadas en el mapa junto con las principales iglesias romanas. No hay distancias; ni ruinas o runas; ni accidentes geográficos. Aparecen algunos animales en el mapa, así como algunos hombres cuyos torsos de cachalote terminan en afiladas cabezas de perro y diversos gigantes rubicundos que se elevan como chimeneas en las fronteras de varios imperios salvajes.

Durante el siglo *X*VII, los mapas de los caminos, los mapas militares y los mapas de las costas se amontonaron en los arcones y cajones de Europa. En Praga, el intenso y exuberante Tycho Brahe, con su nariz de metal cubriendo con elegancia una cicatriz causada en un duelo, había empezado a crear un mapa de los cielos; y en los Países Bajos, Hieronymus Bosch, el Bosco, había completado su pintura del Infierno, tan detallada que también incluía un mapa de especies, una guía de todos los monstruos pestálentes de Europa. Es en este mundo de dibujantes y cartógrafos donde entra Rene Descartes y, como cualquier otro, tiene un mapa entre sus manos, una representación del mundo.

El mapa cartesiano no está escrito en un pergamino o en un papel, tampoco está grabado en metal. Era y sigue siendo un mapa mental, y estaba inscrito en el plano euclidiano. Solo se le puede ver con ese ojo que es capaz de ver puntos sin dimensión, líneas rectas sin anchura y triángulos que no se doblan, ni se hunden, ni se pliegan. El plan básico es sencillo. Lo primero es seccionar el plano con dos líneas rectas. El punto de intersección se denomina 0. Es el origen del mapa del mundo y, por tanto, la nueva Jerusalén.



Los números parten de Jerusalén en las cuatro direcciones a lo largo de cuatro líneas rectas; a la derecha, incrementándose de modo positivo 1, 2, 3,...; y a la izquierda, aumentando de modo negativo -1, -2, -3,...; y, del mismo modo, hacia arriba y hacia abajo. Al plano organizado de esta manera se le conoce como sistema de coordenadas cartesiano (véase la figura anterior), aunque el propio Descartes nunca habló de sistemas de coordenadas en *La Geometrie*. Ni, a decir verdad, en ningún otro lugar.

A simple vista es difícil ver la profunda semejanza que hay entre el mapa del mundo de Ebstorf y el sistema de coordenadas cartesiano, pero los mapas, dondequiera que estén, comparten una característica común: expresan mucho más de lo que contienen y, por tanto, comparten (y muestran) la paradoja esencial de la representación. Un mandarín seguidor de Confucio que viese el mapamundi de Ebstorf no podría ver más que una extraña figura de pequeña cabeza, con los brazos yaciendo sobre coloreadas regiones del espacio, con animales pastando aquí y allá, y hombres con cabeza de perro holgazaneando. Sin embargo, Gervasio de Tilbury vio una representación del mundo más allá del mundo, los países y los continentes subordinados al drama cristiano del pecado, el sufrimiento y la redención. Nosotros, aún inocentes, al mirar los martirizados brazos en cruz del sistema de coordenadas cartesiano, en principio, también vemos lo que está dibujado, sin ver lo que representa. Descartes vio más allá de lo que podía ver, y por esa razón es considerado como un gran matemático.

Rene Descartes es quien está codo con codo con usted; con toda la fuerza de su poderosa aunque lúgubre inteligencia, le ofrece las llaves de su reino.

Los puntos aparecen primero.

Al inscribir los números en los ejes del sistema de coordenadas, cualquier punto del plano euclidiano puede representarse por dos números. Llamémoslos x e y. Son las coordenadas del punto. Cada uno indica una distancia determinada a lo largo de los ejes x e y. El propio punto se sitúa en la intersección de dos rectas, una que se mueve en la vertical desde x y la otra que se desplaza en la horizontal a partir de y.

Despues viene la distancia.

Si A y B son dos puntos cualesquiera del plano, con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, la distancia D entre ellos es:

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Digamos, de paso, que en esta formula es necesario elevar al cuadrado para quitarse del medio los números negativos y los subíndices de x e y son meros artificios de bibliotecario, un modo de diferenciar las cosas.

Con la introducción de los números, los puntos y la formula de la distancia, comienza el primer gran drama de la identificación. Si los puntos corresponden a pares de números, no hay razón para que figuras geométricas mas complejas que los puntos –líneas y curvas- no correspondan a objetos matemáticos más complejos que pares de números; con ello, el matemático ascendiendo paso a paso, el mundo geométrico se coordina con el mundo de los números.

Ahora vienen las líneas rectas.

Una recta dentro del plano euclidiano es una sencilla línea recta, sin patria ni modo de diferenciarse del resto de las rectas. Hay miles de ellas por ahí. Pero con el soporte de un sistema de coordenadas cartesiano, esas rectas indolentes se estiran y adquieren la dignidad de una entidad fija. De nuevo, son precisos dos números. El primero expresa el modo en que la línea cruza los ejes del sistema de coordenadas, su ángulo de inclinación o pendiente. Se puede representar como el cociente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. El segundo –una flamante b en la mayoría de los libros- marca el lugar en el que la línea cruza el eje y, es decir, el punto de intersección. Los símbolos se combinan en una única ecuación con dos variables, $y = mx + b$. Según los matemáticos recorren los valores de x, aparecen, obedientes, los valores de y

en el otro lado de la ecuación, la línea –esta línea, nuestra línea– formada por todos esos puntos x e y que satisfacen $y = mx + b$. La línea esta ahora definida, con una identidad inexpugnable. Es esa línea y ninguna otra.

Las ecuaciones de dos variables -dos incógnitas en el lenguaje del siglo *X*VI- toman el lugar de los puntos que construían la curva. Esta es la idea principal de la geometría analítica, y si Descartes fue capaz de percibirlo, desde luego, ocultó muy bien su entusiasmo. ¿Las curvas en el plano? , ¿Su lugar? "En cada uno de los casos –escribió- se puede obtener una ecuación que contenga dos cantidades desconocidas". Frunciendo el ceño, paso a ocuparse con otras cosas, sobre todo con un complicado problema que había planteado el geómetra griego Pappus. Aun así, la relación entre las curvas del plano y las ecuaciones es un logro sutil e intrincado, y Descartes si se dio cuenta de eso, aunque fuera de un modo imperfecto.

En el siglo *X*VI, los matemáticos ya habían diferenciado los parámetros y las variables. Los parámetros están fijos, las variables son variables. Las letras m y b de la ecuación de la recta denotan, por tanto, números específicos. No varían. Se mantienen firmes. Los números concretos que representan no tienen mayor relevancia. Las variables x e y, por otro lado, toman valores numéricos diferentes sobre esa misma ecuación y así funcionan como los pronombres del lenguaje.

Descartes se dio cuenta, quizá de manera inconsciente, de que la correspondencia entre ecuaciones y curvas del plano euclidiano despliega un juego intrincado entre la forma de la ecuación, sus variables y sus ecuaciones. Esto es algo nuevo. Algunas de las muy familiares formas euclidianas se encuentran ahora controladas desde fuera del plano por un alambique algebraico, la clave del sistema de coordenadas (asi como los evangelios proporcionan la clave para el mapamundi de Ebstorf). Una ecuación de primer grado general tiene la forma $Ax + By + C = 0$. La ecuación tiene en x e y las dos variables; en A, B y C, tres parámetros, trabajadores temporales, contratados hasta la finalización de la obra. En la suma y la multiplicación, la ecuación especifica dos operaciones matemáticas. Tras realizar estas operaciones en la parte izquierda de la ecuación, el resultado, según afirma la propia ecuación, es igual a cero, contundente prueba de que en matemáticas, como en la vida misma, con frecuencia lo mucho se vuelve nada. Esta ecuación particular es conocida entre los matemáticos como la ecuación general de una línea; también se conoce como

ecuación lineal, la misma palabra lineal tan usada ahora con poca fortuna por políticos, científicos, sociólogos y consejeros sentimentales preocupados en alejar a sus clientes del pensamiento lineal. Aquí está el significado autentico de la palabra, un significado ligado con precisión a un conjunto concreto de símbolos. Las líneas rectas son rectas y las ecuaciones que las describen son lineales. Los asuntos amorosos no tienen nada que ver aquí.

Cualquiera que sea la recta, la fórmula de la distancia puede usarse casi al instante para derivar la ecuación que describe el círculo, ya que un círculo en el plano está constituido por el conjunto de puntos que están a una misma distancia R del centro del circulo C. Si las coordenadas de C son a y b, entonces, por la simple aplicación de la formula de la distancia, el radio del circulo R es sin mas la raíz cuadrada de $(x - a)^2 + (y - b)^2$, y el círculo está por fin confinado en una jaula de símbolos.

Si una ecuación de primer grado controla la línea recta en el plano, una ecuación de segundo grado -un exponente saliendo al ruedo- maneja un puñado de curvas mucho más sensuales. Tenemos la ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$; de la elipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; y de la hipérbola, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Podemos amalgamar estas ecuaciones en una única ecuación de segundo grado: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. En esta ecuación tenemos dos variables, x e y, así como seis parámetros, a, b, c, d, e y f. La ecuación es cuadrática en x e y.

Se despliega ahora una importante visión cartográfica. Dentro de la geometría, un cono es justo aquello que parece ser: esa familiar forma de tres dimensiones. Al seccionar el cono de formas diferentes, los griegos descubrieron con satisfacción que podían extraer del cono todo un muestrario de puntos, líneas y curvas euclidianos. Esas secciones cónicas tan presentes en la geometría de la escuela secundaria.

Descartes determinó que la ecuación de segundo grado general corresponde a una sección cónica. Aún más, que $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ describe:

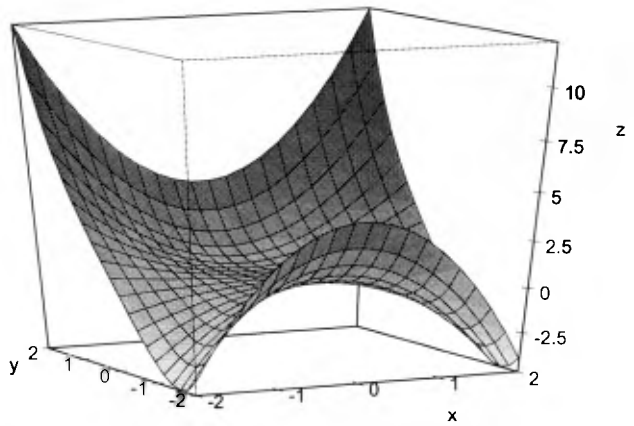
1. una parábola si $b^2 - 4ac = 0$;
2. una elipse si $b^2 - 4ac$ es menor que 0; y
3. una hipérbola si $b^2 - 4ac$ es mayor que 0.

La expresión b^2 -4ac es el discriminante de estas ecuaciones; es idéntico en cualquier sistema de coordenadas cartesianas obtenido por rotación de los ejes; y, por tanto, es el primer gran invariante de las *matemáticas* modernas.

La ecuación $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ recuerda más al logotipo de Everyman que aparecía estampado en ciertos libros publicados hace años en la Europa central, aquellas indiferenciadas, igual vestimenta y paso cansino. Quizá no sea sorprendente ver en este Everyman una conexión general con las curvas del plano. Para ver en este revoltijo de variables y parámetros una conexión con curvas del plano especificas, con clara individualidad, tales como la parábola, la hipérbola y la elipse, eso requiere un ojo matemático. El discriminante de la ecuación b^2 -4ac, controla la relación, no está presente en la propia ecuación, y, así como Picasso al pintar a Gertrude Stein veía la imponente mujer en la que se convertiría y no que era, el matemático puede ver en lo que no son más que símbolos sin sentido particular las condiciones y contingencias que no surgirán hasta más tarde. El teorema de Descartes es, en este sentido, un logro del refinamiento intelectual; invita al ojo a demorarse y sugiere, quizá por primera vez, que lo que podemos decir sobre los objetos matemáticos puede llegar a ser más interesante que los objetos mismos. Frente a una obra de arte, el principiante aprecia el motivo, pero el autentico conocedor advierte la pintura.

La geometría analítica del siglo XVII estaba destinada a hacerse grande algunas líneas de desarrollo están inmanentes en *La Geometrie,* otras en los trabajos de Girard Desarges, y Blaise Pascal. La geometría analítica bidimensional puede ascender con facilidad a geometría analítica tridimensional, con su tercer eje de coordenadas surgiendo de la página como un tallo priápico.

La relación entre ciertas ecuaciones y ciertas estructuras del espacio permanece sin cambios al subir en la cadena dimensional. La ecuación de cuarto orden $V = x^2y + y^4/4$, por ejemplo, describe una superficie ondulante en un espacio tridimensional.



La geometría analítica puede ser llevada a dimensión cuatro si es preciso y, aunque los resultados no pueden visualizarse con facilidad -seamos honestos: no pueden visualizarse en absoluto-, el análisis es básicamente idéntico.

Cuando Andrew Wiles ofreció su prueba de la conjetura de Fermat, usó una ingente cantidad de herramientas, pero en el corazón mismo de su demostración un sendero de hormigas volvía a Descartes, ya que lo que consiguió demostrar fue la conjetura de Taniyama-Shimura, una tesis acerca de las ecuaciones elípticas y las formas modulares, que en la complejidad de su formulación escondía el viejo camino cubierto de arbustos que lleva desde la forma del discriminante a las diversas curvas del plano.

Engrandeciéndose en una dirección, asimismo la geometría analítica crecía en otra. Los oficiales de la artillería bávara sabían con seguridad lo que ocurría cuando uno de sus pesados cañones enviaba una bala al aire: la pieza primero subía y luego bajaba, y el arco parabólico descrito terminaba en un atroz agujero. El usó de las tablas de artillería les proporcionaba sencillas reglas para calcular las orbitas. Una bala de cañón en movimiento es un punto móvil *¿no*?, y su trayectoria es una curva, *de nuevo, ¿no?* Y en particular, es una parábola, *por tercera vez, ¿no*? Si, lo son. Pero una parábola tiene una forma definida. Esta constituida por los puntos que satisfacen una ecuación especifica. Por medio de la ecuación, la trayectoria de la bala puede ser especificada por completo, la ecuación proporciona los puntos, uno detrás de otro, y por acumulación la curva, la curva que

describe la trayectoria. Una forma en el espacio ha dado lugar a una formula analítica, a una innovación verbal. Y con esa comprensión, se había dado el primer paso en el vasto y fructífero proyecto que dejaría a todas las formas de movimiento continuo, las balas y la rotación de los planetas en el cielo nocturno bajo el control de aparato numérico.

¿Era Pitágoras el que insistía en que el número era la esencia de todas las cosas?

¿Acaso no era obvio ya desde el principio?

Nadie consignó nunca que Descartes fuera cariñoso; no fue afectuoso con los animales ni tenia cariño por los niños, lo que, dirían muchos matemáticos, habla a favor suyo. Una hija ilegítima, esta si bienamada, murió siendo joven. Una curiosa historia sugiere que Descartes construyó un autómata semejante a ella y cargo con el por toda Europa, instalándolo en las habitaciones de las posadas, abriendo su corazón a una cosa tan horrible. Se cuenta casi la misma historia sobre Alberto Magno, siendo Tomas de Aquino quien terminó por destruir su autómata en un ataque de honda indignación. Aunque afectado por la pena, Descartes permaneció soltero, parece que indiferente a las mujeres, hombre de maneras distantes y naturaleza fría.

En 1628, Descartes se mudó a Holanda, un centro animado y tolerante de la ciencia y el arte. Al saber que la Inquisición había tenido sus buenas razones para mantener a Galileo bajo arresto domiciliario -el buen hombre era incapaz de mantener la boca cerrada y guardar sus pensamientos para si-, Descartes decidió mantener como privadas aquellas opiniones que pudieran provocar la hostilidad o incluso el desacuerdo filosófico del clero. Descartes publicó sus *Meditaciones Metafísicas* en 1641, y casi de inmediato el libro se asignó a los estudiantes de filosofía. Tiene la gran virtud de ser un texto fácil de leer y difícil de entender, con lo que satisface por igual las necesidades de alumnos y profesores. Los *Principia Philosophiae* de Descartes, publicado tres años después, expresa de modo más completo su filosofía de madurez. Los *Principia Philosophiae*, un trabajo profético, representan un ambicioso proyecto que intenta explicar el universo solo mediante fuerzas que se transmiten a través de la materia. Descartes creía que la acción requiere un contacto, como cuando un objeto golpea a otro, y al restringirse a reglas de contacto eliminaba la acción a distancia. Si esto fuera así, el universo debería estar lleno de estructuras o de objetos matemáticos capaces de permitir el contacto entre unos objetos materiales y otros. Estos son los vórtices cartesianos. En la visión de Descartes, son estos múltiples vórtices, cuyos efectos se asemejan a gran escala a los de un remolino de agua que se llevara una

pastilla de jabón desagüe abajo, los que proporcionaban el solicitado contacto. Isaac Newton demolió la física cartesiana con todo el poder de su genio. No hizo nada para dulcificar los escrúpulos cartesianos respecto a la acción a distancia, y después de desechar los vórtices cartesianos con un gesto de burla, los reemplazó por la fuerza de gravitación universal, que actúa a distancia a lo largo de todo el espacio.

En 1649, Descartes tenía cincuenta y tres años; estaba en la cima de sus potencialidades. Informada de sus cualidades, la reina Cristina de Suecia le persuadió para que pusiera su intelecto a su servicio y aceptara el puesto de tutor real. En apariencia, la reina convenció a Descartes del mismo modo que la mayoría de las mujeres convencen a cualquier hombre, es decir, con la más impúdica adulación. Descartes se trasladó a Estocolmo, donde descubrió con consternación que la reina, una joven y rechoncha amazona, solicitaba su instrucción muy temprano por la mañana. Descartes se vio obligado a complacerla y tuvo que abandonar el acogedor lecho de madrugada, caminando penosamente en el amanecer sueco, día tras día, hasta que, alteradas por mandato real sus precavidas costumbres, contrajo un resfriado y murió.

FIN DE LA LECTURA 7

Módulo III: El Cálculo Diferencial y la matemática en la época moderna

Objetivo Módulo III:
Describir la evolución del Cálculo desde su nacimiento hasta su formalización y la influencia de este proceso en la matemática del siglo XX.

Lecturas Módulo III:

8. EL CÁLCULO. Berlinski, D.

9. **LA MATEMÁTICA DEL SIGLO XIX. Rey Pastor, J. , Babini, J.**

Lectura 8

ASCENSO INFINITO

Berlinski, D
Debates. Barcelona

CÁLCULO

Y ahora viene un sonoro y reverberante ¡*boom*! en la historia del pensamiento. Antes del descubrimiento del cálculo, las matemáticas habían sido una disciplina de gran interés, pero después pasaron a ser una disciplina de gran poder. Solo la llegada del algoritmo en el siglo XX representa una idea matemática de influencia comparable. El cálculo y el algoritmo son las dos ideas principales de la ciencia occidental.

Dentro de los más estrictos confines de las definiciones, teoremas y demostraciones de las matemáticas, el cálculo alcanza su apogeo en su teorema fundamental. Este hace lo mismo

que todos los grandes teoremas: muestra que dos cosas que parecían distintas están profundamente conectadas. Pero el cálculo es también un instrumento indispensable para las ciencias físicas, y las ciencias físicas han seguido sin excepción el modelo intelectual establecido por el cálculo. Es el alma y el corazón del método. Esto sugiere -¿no?- que rara vez las matemáticas son cosa de las matemáticas y que sus teoremas no son simples afirmaciones sobre la mente de los matemáticos. Son reflejos de la propia verdad.

El cálculo es una teoría sobre el cambio continuo, sobre procesos que se mueven con suavidad y que no se detienen, no se sacuden ni se interrumpen, o que no se arrojan sobre huecos del tiempo o el espacio. El mejor ejemplo de un proceso continuo en la naturaleza esta en el movimiento de los planetas en el cielo nocturno, en el que se arrastran sin pausa alrededor del Sol en órbitas elípticas; pero también la conciencia humana es continua, la división de la experiencia en aspectos diferenciados está siempre coordinada por una forma subyacente de unidad, esa que apenas podemos identificar y que solo podemos describir diciendo que es continua.

Muchos matemáticos colaboraron en el desarrollo del cálculo –Gilles Personne de Roberval, Pierre de Fermat, Isaac Barrow, Bonaventura Cavalieri, John Wallis– y cada uno ha merecido en la actualidad su propio investigador que insiste en que su hombre ya lo había intuido todo; pero son Gottfried Leibniz e Isaac Newton los que mas íntimamente se pueden asociar a esa pausa entre latidos del corazón en la que se produce el cambio. Estamos en la segunda mitad del siglo XVII. ¿Digamos que aproximadamente hacia 1680?

G. Leibniz

I. Newton

Hace ya tiempo que tanto Newton como Leibniz han alcanzado el panteón de los grandes expedicionarios. Como dos inmensos osos polares, permanecen congelados para siempre en la tundra del tiempo. «Está antes de nosotros —remarcó Einstein en una conmemoración de Newton–, fuerte, certero y solitario.» Palabras bellamente elegidas y muy acertadas en su captura del mito de Newton y del recuerdo histórico de Newton. Es bastante mas difícil imaginar a Leibniz en soledad, o incluso en silencio, aunque solo sea porque era una persona en extremo sociable, presta a transitar en su carruaje a lo largo y ancho de los caminos de la Europa del siglo XVII y a intercambiar cartas con mas de seiscientas personas, algunas desde lugares tan alejados como China. Era una persona locuaz por naturaleza, y su personalidad estaba controlada por una necesidad imperiosa de comunicar los pensamientos que, sin fin, desbordaban su mente. Constituía un hombre multitudinario, pero todos los componentes de esa multitud eran personas sobresalientes y la luz de ese brillo acumulado puede perfectamente compararse con el solitario, monstruoso y pulsante sol de Newton.

Un objeto -una pelota, una bala o una bailarina- esta en movimiento. Se eleva en el aire, alcanza su cenit y luego desciende. Pongamos ahora a trabajar la abstracción y la idealización. Lo primero es desnudar ese objeto en movimiento, descartamos su peso, envergadura, masa, color y esas quejas de que su compañera está siempre »queriendo llamar la atención», de modo que esa bailarina que surca el aire es reemplazada por su esencia, por su cambio de posición.

Por medio de una meiosis matemática, el cambio de posición se divide en cambio en la distancia y en cambio en el tiempo. Esta división sitúa al arco en movimiento de la bailarina dentro de conceptos matemáticos familiares, ya que tanto la distancia como el tiempo pueden ser representados por números, y por lo tanto, ser dibujados en los ejes de un sistema de coordenadas cartesiano. El tiempo se mueve hacia la derecha, la distancia hacia arriba. La descripción puramente verbal de la trayectoria de la bailarina -agacharse, elevarse, gruñido, arriba, abajo- da lugar ahora a una descripción matemática en la que la distancia es representada por una función del tiempo. Esto ya lo había dejado claro Galileo en su *Dos Nuevas Ciencias* de 1638, cuando observó que la distancia cubierta por un objeto en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido, esto es, $16t^2$. La relación entre distancia y tiempo está expresada de modo natural por una curva inscrita en un sistema de coordenadas. El tiempo corre en un eje y la distancia asciende en el otro. Al

dibujar el segundo frente al primero, se obtiene una curva, aquella que ahora desplaza esa bailarina del mundo real por una que solo contiene su esencia.

Si la distancia y el tiempo son conocidos también lo es la velocidad, si, *obviamente* la velocidad, ya que la velocidad es la proporción entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido —cuán lejos ha llegado algo y cuanto tiempo le ha llevado llegar hasta allí. Abandonando las manos de su compañero, nuestra bailarina despega; ralentizada según va alcanzando el cenit de su salto y, después de girar en el aire, se acelera de nuevo hasta que, con una incontenible exhalación, aterriza sobre las punteras de su compañero. Su velocidad está cambiando durante el salto. Pero una definición de velocidad como la proporción entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido revela su velocidad media. No llega más allá.

El cálculo comienza cuando se pregunta por la velocidad de la bailarina en un momento determinado, su velocidad instantánea, su velocidad justo ahora. La pregunta puede, como ocurre con frecuencia, desatar una ráfaga que nubla la visión, como cuando se golpea con energía una mesa cubierta de polvo. En cualquier momento dado -en este preciso momento- la bailarina no ha ido a ningún sitio y no ha usado ningún tiempo en hacerlo. La proporción entre distancia y tiempo debe ser entonces 0/0, una expresión carente por completo de sentido en matemáticas. Esto sugiere que no se está moviendo en absoluto, manifestación que nosotros los matemáticos debemos rechazar, aunque solo sea porque si no se está moviendo en ningún momento dado, ¿como puede terminar en tan espantoso aterrizaje?

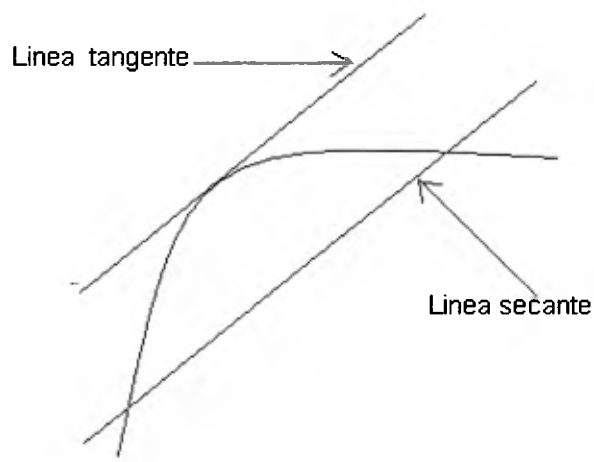
En la sección de los *Principia Mathematica* titulada «De los métodos de las razones primeras y últimas», Newton trato esa objeción. Su argumentación tiene toda la fuerza de su genio implacable. Si un objeto no tiene velocidad discernible en ninguno de los momentos de un tiempo dado, entonces, «por el mismo argumento —observa Newton—, se puede alegar que un cuerpo que llega a un determinado lugar y luego se para, no tiene una velocidad final; ya que la velocidad antes de que el objeto llegue a su lugar no es su velocidad final; y una vez que ha llegado, no tiene velocidad ninguna». Y, remarcó Newton, esto es absurdo.

Y, de hecho, lo es.

En 1684, dos años antes de que Isaac Newton enviara por fin sus *Principia* a la imprenta, Gottfried Leibniz publicó un articulo titulado «*Nova Methodus pro maxima et minimus*»

(«*Nuevos métodos para encontrar máximos y mínimos*») en el tercer volumen del Acta Eruditorum. Leibniz tenía entonces cuarenta y dos años y ya era un intelectual reconocido en Europa. Un niño prodigio que había llegado a ser un erudito, manejaba la filosofía y las matemáticas y otra decena de disciplinas con enorme familiaridad. En Europa, durante mis de cincuenta años, algunos aspectos del cálculo flotaban en el ambiente aunque apenas como una serie de haces dispersos, obstinados en una negativa a condensar en una nube. Leibniz había percibido esos haces a principios de la década de 1670, sus númerosos artículos sin publicar muestran un hombre de enorme habilidad matemática que siente con frustración un patrón que no es capaz de desvelar. En 1674, Leibniz contaba en una Carta dirigida al matemático Amos Detonville (pseudónimo de Blaise Pascal) que provocó la unión de estos haces en una tormenta mental. Después, fue necesario un tiempo para la reflexión; en los Nuevos Metodos», por fin, la nube se rompió.

El Leibniz de los Nuevos Métodos no se ocupaba directamente de distancias o velocidades; era la curvatura lo que atraía su atención. Suprimamos, por el momento, el tiempo. Dejemos a la bailarina jadeando entre bambalinas. La curvatura es una medida de cuan radicalmente esta doblada una línea; y el hecho de estar doblada es una propiedad de las curvas que se describe con algo tan simple como la pendiente de una línea recta, una que corta a la curva en dos, formando un puente suspendido entre los puntos. Estas son las líneas secantes de la geometría plana. Su pendiente mide el cambio a lo largo de un eje del sistema de coordenadas yuxtapuesto al cambio a lo largo del otro eje



Pero la pendiente de la línea secante puede también usarse para describir la velocidad media de una partícula que se mueve a lo largo de la misma curva; es, de hecho, la propia definición de la velocidad media y el modo de reducirla a un número.

Velocidad -agacharse, elevarse, gruñido, arriba, abajo- y curvatura -estar doblada- son una y la misma cosa.

¿Ve la relación? Bien, debería hacerlo.

Y también debería ver que el enigma de la velocidad es asimismo el enigma de la curvatura. Si el puente suspendido de la línea secante construye una improvisada afirmación sobre la curvatura entre los dos puntos pero no dice nada -¿cómo podría?- de la curvatura en un punto, del modo en que la forma sinuosa se deforma justo ahí. Todavía, las líneas secantes, dado que son rectas, sugieren con utilidad la importancia de estar rectos dentro del orden de las cosas. La cuestión, por supuesto, es ¿que línea recta puede, permaneciendo recta, decir algo sobre el hecho de estar torcida? La candidata con todas las conexiones apropiadas es la línea recta que encuentra a la curva justo en el punto en cuestión, justo ahí; esto es, su línea tangente.

Al encontrar la curva en un punto concreto, la línea tangente comparte las coordenadas de la curva, la curva y la tangente borran sus respectivas identidades al tocarse una a la otra. Leibniz había leído a Descartes; sabia que las líneas rectas están gobernadas por la ecuación $y = mx + b$. Tenia en su poder dos de las tres variables (x e y) necesarias para fijar por completo la identidad de la línea tangente en un ámbar analítico. Pero no tenía la tercera, la pendiente de la propia línea tangente.

Cuando la tuvo, explotó el ¡*boom*!, y el cálculo comenzó su existencia.

Hay un lugar en las matemáticas en el que se agrupan las ideas dudosas y desviadas. Podría tomar prestado el nombre de la teoría queer. Están los infinitesimales, por ejemplo. Son números menores que cualquier número pero sin llegar a ser cero. Si un número infinitesimal se suma a si mismo, no importa cuantas veces, se queda siempre por debajo de cualquier número dado. El gran matemático griego Arquímedes, dos mil años antes de la llegada del cálculo, había proscrito los infinitesimales, llegando a ser conocida su prohibición como el axioma de Arquímedes. Aunque no es fácil decir por que, un número menor que cualquier número pero diferente de cero atenta contra el sentido común, aunque

sin llegar a la indignación. De cualquier forma, es a la teoría queer y a los infinitesimales a los que recurrió Leibniz para su explicación sobre la propiedad de estar torcido.

La pendiente de una línea recta —y las líneas secantes son con certeza rectas— representa una proporción entre distancias finitas. Leibniz se apropio de la idea de proporción pero con esta diferencia. La pendiente de una línea tangente en un punto, argumentó, debe ser representada como la proporción entre distancias infinitesimales a lo largo de los ejes de un sistema de coordenadas. Estas distancias fantasmales las denotó con los símbolos *dx, dv, dy*, donde *d* indica la acción de reducir una variable hasta un tamaño infinitesimal, y siendo *x*, v e y las variables a reducir. La proporción entre un infinitesimal y otro, y por tanto la buscada pendiente de la línea tangente, es exactamente *dy/dx*, una fórmula que se ha hecho famosa en todos los campos de las matemáticas. «Solo hemos de recordar —escribió Leibniz que encontrar una tangente significa dibujar una línea que conecte dos puntos de la curva a una distancia infinitamente pequeña»

Nous considerâmes, como Leibniz podría haber escrito a sus esnobs amigos franceses, la espaciosa curva parabólica $y = x^2$. Que desciende a lo largo del eje de coordenadas negativo de las *x*, toca el origen en $x = 0$ y asciende por el lado en que *x* es positivo. En el punto $x = 2$, $y = 4$, la parábola que ha cambiado en todo el plano también está cambiando aquí.

Ah, pero *¿cómo*? ¿Cuánto *exactamente*?

Con su suntuosa peluca castaña cayendo sobre sus hombros y su delicado rostro, nariz larga, avivada por la inteligencia, Leibniz nos recuerda que pretende determinar la pendiente de la línea tangente a la curva en el punto $x = 2$ e $y = 4$. Su actuación es mitad demente, mitad mágica. Esta es su actuación.

Una proporción tiene dos partes, una arriba y otra abajo.

Abajo. Empezar en 2 y avanzar una distancia infinitesimal d*x* a lo largo del eje *x*. El cambio infinitesimal en *x* es

$(2 + dx) - 2$.

Arriba. Elevar al cuadrado la parte de abajo, por separado, obteniendo $(2 + dx)^2 - 2^2$.

Nótese. $(2 + dx)(2 + dx) = 4 + 4dx + dx^2$.

Dejemos que *se acumulen unos cuantos puntos*...

De nuevo abajo. $(4dx + dx^2)/dx$.

Dividir. $4 + dx$.

La magia. Eliminar dx de la última línea ya que, despues de todo, es infinitesimal, dejando el número 4.

Las matemáticas. El número 4 es, efectivamente, la respuesta correcta el número corresponde a la pendiente de la línea tangente, la curvatura de la curva justo ahí, su forma y velocidad reducidas a un número.

Aplausos.

Cualquiera que sea su estatus lógico como cosas demasiado pequeñas para ser vistas pero no tanto como para no ser contadas, la invocación a los infinitesimales permitió a Leibniz pegar la nariz a la curva y así obtener sus secretos en un punto especifico. Su éxito fue local, un acto cubría un punto. Pero los «*Nuevos métodos*» son, entre otras cosas, la culminación de sus intentos por convertir un cálculo particular en un cálculo general, casi un esquema mecánico de razonamiento. Leibniz comprendió que sin este esquema los cálculos tenderían a multiplicarse; en Descartes ya se habían vuelto tediosos. Leibniz puntualizó con satisfacción que, para alguien que conociera su cálculo, «estos cálculos eran fáciles de investigar».

Pero si bien eran fáciles de investigar, estos cálculos eran mucho mas dificiles de explicar. Leibniz, en el año 1684, carecía de un concepto que el mismo no traería a la conciencia hasta 1695. Se trata del concepto de función matemática. Junto con los propios números, las funciónes son los objetos matemáticos más importantes y, como es de esperar del hecho de que Leibniz tuviera dificultades para verlas con claridad como un todo, son intelectualmente esquivos. Los gestos verbales necesarios para explicar las cosas son bastante claros. Una función es una relación, un esquema de correspondencia, un desplazamiento de atención desde un número hacia otro, una regla, una regularidad o un plan. Es, por ejemplo, la operación doble de *tomar* un número y elevarlo al cuadrado. El número uno pasa a ser el mismo, el número dos se convierte en el cuatro, el número tres en el nueve, y nada impide que la energía responsable de estos actos mentales continúe indefinidamente. La convención alcanzada para expresar esta función matemática la escribe como $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9$, con la letra latina f cayendo sobre un numeral y enviándolo al numeral que representa su cuadrado. Además $f(1) = 1, f(2) = 4, f(3) = 9$, está también $f(x) = x^2$, una prescripción para elevar al cuadrado en general, la propia expresión en símbolos de la actividad de elevar al cuadrado números.

La notación abarca todos los actos matemáticos elementales.

Pero ni mis propios gestos verbales ni cualquier tabla de ejemplos son suficientes frente a lo que de verdad se necesita, y ese es el momento de absoluta claridad mental en el que, seamos conscientes de las circunstancias de finales del siglo XVII, Leibniz usó un concepto que no podía definir con precisión para explorar otros conceptos que tampoco podía ver con precisión. Habían de pasar dos siglos antes de que Georg Cantor descubriera las palabras que le faltaban a Leibniz en 1684; durante todo ese tiempo, los matemáticos continuaron usando una enorme variedad de funciones, indiferentes a su propia incapacidad de comprender el concepto en su totalidad. Por tanto, ahora sigue un ejercicio de anacronismo. Explicaremos lo que Leibniz pensó como hubiera querido pensarlo; de este modo, los cálculos que imaginó que serian fáciles de explicar se vuelven, en contra de lo esperado, fáciles de explicar.

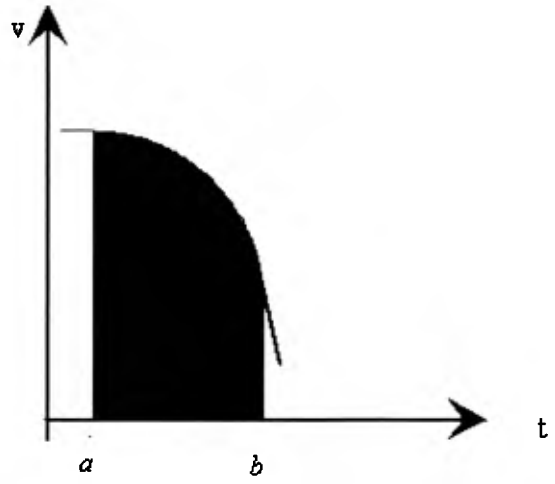
Y ahora vienen las famosas fórmulas, fórmulas porque son como pequeños ordenadores, y famosas porque todavía se usan. La función $f(x) = x^2$, recordemos, observada en $x = 2$, donde Leibniz ejercitó su abracadabra para determinar que su curvatura[12] justo allí podía ser descrita con el número cuatro. Este número describe la pendiente de la línea tangente a la curva, ese punto exactamente. Leibniz formuló entonces la pregunta sobre la curvatura para cada punto de la curva parabólica, no solo para uno de ellos. Comenzando por la función $f(x) = x^2$, determinó que no importa la x, su curvatura (o velocidad) en cada punto puede ser descrita por otra función, y así estableció una conexión de orden superior entre las propias curvas y no solo entre los números. Esa otra función es $g(x) = 2x$, y justo como uno podía esperar en $x = 2$, $g(x)$ es cuatro. No se trata de un mero truco computacional. Más de cincuenta años atrás, Galileo había demostrado que la distancia cubierta por un objeto en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo durante el que ha estado cayendo. Ya lo hemos mencionado antes. Ahora resulta claro que es una función la que hace el trabajo, que para cada instante hasta el último de los tiempos registrados devuelve un número que mide la distancia. La función es $f(t) = 16t^2$. Se ha retirado la variable x de esta formula para reemplazarla por la variable t que le da un significado tipográfico relacionado con el tiempo. Pero después de ver la identidad entre curvatura y velocidad, podemos apropiarnos ahora de la formula de Galileo y recuperar la velocidad a partir de la distancia por medio de la función $g(t) = 32t$. Esta es la función que describe la velocidad en cada momento particular. Como la función original que media la

[12] En mi opinión Berlinski comfunde aquí el concepto de tangente con el cambio de la misma (curvatura). Una línea recta con pendiente 4 tiene curvatura 0, así que la tangente no mide la curvatura en ningún caso.

distancia, esta función, que mide la velocidad, puede ser inscrita en el eje de un sistema de coordenadas, de modo que tanto la distancia como la velocidad pueden tener una identidad visual, un lugar en el mundo de las curvas y, por tanto, un lugar en el mundo de las cosas.

Aunque pueden parecer una bagatela, las operaciones matemáticas recién utilizadas permanecieron inaccesibles a la humanidad hasta la segunda mitad del siglo XVII. Se requería el ojo de un genio para verlas. Esta parte del cálculo -sus famosas formulas, sus trucos computacionales y su penetrante ojo profético- se denomina cálculo diferencial. El intercambio entre las funciones y sus derivadas se reduce a una lista, la que encontramos en la cubierta interior de todos los textos de cálculo, el lugar donde el noble genio de Leibniz quedó grabado.

En la diferenciación intervienen las dos antiguas operaciones matemáticas de la resta y la división junto con el arte de la prestidigitación propio de finales del siglo XVII. Pero la resta y la división no son más que dos de las cuatro grandes operaciones primitivas de las *matemáticas*. Tenemos también la suma y la multiplicación. Un elemental sentido de la simetría, si no algo más, sugiere que.así como la diferenciación relaciona una función con su derivada, algún otro proceso, junto con ese rapidó movimiento de barajar las cartas, podría llevar de vuelta desde la derivada a la función original. Muchos matemáticos del siglo XVII vieron o percibieron que la diferenciación debía tener una inversa, una operación que la invirtiera con suavidad, pero fueron incapaces de concretar sus intuiciones en un teorema. Apelando al futuro, Descartes había instado a los matemáticos aún por nacer a resolver lo que llamó el problema de la inversa de la tangente y, con una irascible visión de su propia incapacidad, había sugerido que ningún matemático podría resolver el problema, ni en todas las mareas del tiempo.



«Descartes», observó cáusticamente Leibniz, tenia el habito de «hablar con un pequeño exceso de presunción acerca de la posteridad».

Así fue de hecho, ya que después de haber llegado tan lejos, Leibniz encontró la manera de recorrer el camino de vuelta.

Necesitamos de nuevo un sistema de coordenadas cartesiano. Tenemos una función $f(t)$, tan pulcra a la hora de establecer relaciones, y también la curva que la representa. Las rectas delimitadas por a y b y la curva forman un entoldado (\Tease la figura 4.2).

Es útil imaginar que $f(t)$ representa la velocidad de un objeto en movimiento, pero, como todas las muletas, puede llegar a estorbar tanta ayuda, aunque tan solo sea por que ata la imaginación a un ejemplo particular cuando vamos a tratar algo maravillosamente general que abarca casi todos los procesos continuos de la naturaleza. Utilice la muleta si es preciso, pero en cuanto pueda abandónela, cojee si es necesario.

Galileo, mientras escribía las *Dos Nuevas Ciencias* y se centraba en problemas de dinámica, argumentaba que si $f(t)$ mide la velocidad, entonces el área por debajo de la curva corresponde a la distancia que un objeto ha recorrido. El área representa, después de todo, algo así como el producto de la base de una figura por su altura —*algo así, ¿no?*— y el producto de la velocidad por el tiempo, ¿qué es más que una distancia? A esto le sigue un confuso titubeo, los avances a tientas en los que Galileo trabajó con gran esfuerzo en sus propios e infernales infinitesimales. Sin duda iba en la dirección adecuada, pero no por el camino correcto.

Leibniz afirmó cincuenta años mas tarde que el área por debajo de una curva puede ser aproximada en términos muy familiares de antemano, tras lo cual procedía a demostrar como. El área de un rectángulo euclidiano común es el producto de su base por su altura, y un rectángulo que fuera empujado debajo de una curva, casi como un elefante podría ser empujado dentro de una caseta, seria una muy loable primera aproximación lineal al área exacta por debajo de la curva. Una aproximación significa que el valor esta cerca, y lineal quiere decir que sus lados y su cubierta son rectos (véase la figura abajo).

Podemos mejorar la aproximación subdividiendo el rectángulo en rectángulos menores, dejando así fuera me-nos parte del engorroso elefante. Una vez que Leibniz

hubo comprendido que cortar el elefante en pedazos consistía simplemente en reducir el ancho de las diversas aproximaciones en rectángulos, el camino para otra invocación de sus infinitamente adaptables infinitesimales estaba libre, como si con un estricto salto conceptual exprimiera los rectángulos para hacerlos cada vez mas pequeños, hasta que llegaran a una anchura infinitesimal. Después proponía examinar la suma de infinitos rectángulos cuyas alturas era incapaz de especificar con precisión y cuyas bases era incapaz de calcular. Sin inmutarse, Leibniz argumentó en favor de la existencia de esta suma y, con una sonrisa de complacencia, la bautizo como el area por debajo de la curva.

Un área y, por tanto, una suma, una suma y, por tanto, un número.

La suma es conocida como la integral definida de una función dada entre los puntos *a* y *b*.

Leibniz eligió una S alargada para representar su suma, escribiendo

$$\int_a^b f(t)dt$$

para representar que el ordinario y anticuado ejercicio de multiplicar la base dt por la altura $f(t)$ de un rectángulo se había reencarnado infinitesimalmente.

Si la derivada exprime el cambio a la punta de un punto, la integral definida abarca el cambio sobre la extensión de un área. Un parpadeo ha dado lugar a una pausa.

Pero tanto si las cosas están parpadeando o están en pausa, ambas, la derivada en un punto y la integral definida entre dos puntos, devuelven al matemático a los propios meros. Los pitagóricos toman nota.

Esta parte del cálculo es conocida como cálculo integral. Es más difícil técnicamente que el cálculo diferencial. Si bien la idea de área es tan simple como aparenta, es sorprendente como las técnicas requeridas para calcular el área por debajo de una curva pueden ser tan desagradables. Generaciones de estudiantes han odiado la simple visión de la integral definida. Y su disposición no tiende a mejorar cuando tropiezan con la integración por sustitución o la integración por partes.

El área por debajo de una curva es un número y, por tanto, algo especifico. Ofrece una visión congelada de una situación en flujo. Pero, en principio, también la derivada esta implicada en una transacción de un número hacia otro número, la que proporciona la tasa de cambio de una función en un punto concreto. Más adelante, esta transacción entre números fue desplazada por otra que llevaba de funciones hacia funciones. Llevado por la misma motivación de trascender lo particular, Leibniz –y también Newton– estaba preparado para una de esas intuiciones que cambiarían la faz del pensamiento para siempre, a la par revelando la geometría euclidiana como una disciplina estática y liberándola de las hieráticas limitaciones a un tiempo fijo. Si el área por debajo de una curva cambia a cada momento, entonces también esta debe ser representada por una función. Eso es precisamente lo que hacen las funciones. Representan el cambio. Y ha llegado el momento de que una de ellas lo haga.

La integral definida que hasta ahora media un área fija se expande para albergar un área cambiante. Los matemáticos indican esta operación escribiendo la integral con una

variable t allí donde antes solo había un número fijo. El resultado es una integral indefinida entre un punto fijo y un blanco móvil:

$$\int_a^t f(t)dt .$$

Está a punto de establecerse una correspondencia de mayor nivel entre estos conceptos, asociando de modo directo la integración con la derivación y mostrando que son operaciones inversas. La derivada de una función tiene que ver con la resta y la división; la integral, con la suma y la multiplicación. De un modo que nadie habría sido capaz de prever, ambas operaciones están unidas al mis profundo nivel. La segunda deshace lo que hace la primera. Es un resultado que precisa de la belleza y la perfección de la notación matemática:

$$\frac{d}{dt}\int_a^t f(t)dt = f(t)$$

Esta exposición simbólica, elegante y poderosa en extremo, afirma que dos cosas son una. A la derecha hay una función, la que describe algún proceso continuo. Esta es una de las cosas. A la izquierda está la derivada de su integral indefinida. Esta es la segunda cosa. Y una vez que la integración y la diferenciación han hecho su trabajo, resulta que las dos cosas son lo mismo.

Estas ideas se aplican de modo directo a la bailarina en movimiento de unas cuantas páginas atrás. Hay tres funciones implicadas: la primera expresa la distancia; la segunda, la velocidad, y la tercera, el área. Ahora las funciones y las operaciones están de tal modo unidas que los diversos fragmentos de este fresco, que hasta ahora se resistían a integrarse, asumen la forma de una única figura. El área por debajo de la curva cambiante que mide la velocidad viene dada por la integral indefinida. Pero la integral indefinida de la velocidad es la distancia, la derivada de la distancia es de nuevo la velocidad, y la integral de la velocidad es de nuevo la distancia. Cuando se entienden como relaciones y, por tanto, como formas de cambio, son todas estas cosas.

Este es el teorema fundamental del cálculo.

Isaac Newton usa el cálculo para construir el sistema del mundo en sus *Principia Mathematica*, y pocos años después de su descubrimiento de finales del siglo XVII ya era de uso corriente en la fisica matemática. Newton introdujo dos leyes de la naturaleza en el

mundo. Ambas son leyes sobre la fuerza. La primera establece la identidad entre fuerza de un lado y el producto de la masa y la aceleración, por otro. La segunda establece la ley universal de la gravitación. Los objetos en el espacio, con independencia de la distancia que los separe, se atraen unos a otros con una fuerza que es proporcional a su masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Estas ecuaciones llevan de inmediato a un sistema de ecuaciones diferenciales y las ecuaciones diferenciales son los instrumentos predilectos de las ciencias físicas.

Con el tutú caído y los pies cansados, la bailarina merece su despedida final. Supongamos que acaba de ser elevada en el aire y que está a punto de empezar su descenso. En cada instante del tiempo, ¿cuán lejos habrá llegado? Pregunta que puede ser captada por completo por un método matemático. La bailarina habrá llegado hasta cierta altura, que simbolizaremos con el número ξ sean cuales sean el número y las unidades de medida. La función $g(t)$, recuérdese, denota la velocidad con la que cambia de posición en el espacio a cada momento y, por tanto, su velocidad instantánea. Ahora buscamos la función desconocida x en la que el cambio de posición esté directamente correlacionado con el cambio en el tiempo.

Este deseo engendra el símbolo:

$$\frac{dx}{dt} = f(t)$$

una ecuación en la que lo ignorado de x es una función, una relación continua de sucesos que tienen lugar en el mundo real.

La solución es inmediata:

$$x = \xi + \int_a^t f(t)dt$$

Y, con ella, asimismo, la identidad de x, que resulta ser la función $g(t) = 16\ t^2$.

Y todo esto concuerda con el sentido común. La distancia cubierta por la bailarina que cae está dada por la suma de su altura inicial y la distancia que recorrerá a continuación, cualquiera que sea el tiempo empleado, una relación que es ahora perfectamente general e infinitamente flexible.

Este es el instrumento que ha hecho posible la mecánica de Newton, la teoría de los campos electromagnéticos de Clerk Maxwell, la teoría general de la relatividad de Einstein

y la mecánica cuántica, los movimientos de los planetas en la noche estrellada y las explosiones atómicas sobre Trinidad englobados por un mismo método matemático.

En su trato con el cálculo y la teoría de ecuaciones diferenciales, los matemáticos y los físicos no eran muy conscientes de que esos instrumentos tan útiles estaban en cierto modo comprometidos por la circunstancia de que su principal concepto carecía de sentido; este aspecto fue expuesto con bastante vigor por el filosofo y obispo Berkeley, que se burlaba del cálculo y llamaba a los infinitesimales los <<fantasmas de cantidades ausentes». Como un autentico filosofo, a Berkeley no le interesaba la pregunta de por que aquellos fantasmas parecían estar tan vivos. Habrían de pasar más de doscientos años antes de que los matemáticos pudieran decir con honestidad que le habían proporcionado al cálculo un análisis lógico comparable con el trabajo que se le exigía.

Este análisis fue iniciado por Augustin Cauchy y completado por Karl Weierstrass en el siglo XIX; los infinitesimales desaparecieron en favor de los límites. La definición requerida es muy compleja y es necesaria una buena cantidad de reflexión y práctica antes de poder asimilarla, tras lo cual se olvida con rapidez, al menos así ocurre entre los matemáticos. Ofreceré ahora a los lectores una oportunidad de participar también de ese olvido.

Sin duda, la serie de números S = 1/n se va haciendo cada vez mas pequeña según n se va haciendo mas grande. El destino final es cero. Allí es donde S alcanza un límite L. La comprensión analítica procede en tres pasos. Primero, tómese cualquier número positivo ε. De momento, manténgase ese número fijo. Después, considérese algún otro número positivo δ, uno que dependa de ε de modo que los dos números formen un equipo. El segundo paso. Considérese ahora el acordeón formado entre cero y S = 1/n conforme n se hace mas y mas grande. Este es el tercer paso. A continuación vienen los resultados.

La definición. L es un límite de S si para cualquier elección de ε hay alguna elección de δ, tal que para todos los valores de n mayores que δ el acordeón es menor que ε.

Los resultados prometidos. Con la definición de límite, tanto la derivada como la integral de una función pueden ser expresadas en términos aritméticos puros. Los infinitesimales desaparecen. En su lugar, la derivada se dibuja como el límite de una serie de cocientes reales y finitos, los forma-dos por las líneas secantes al acercarse más y mas a la línea

tangente. La integral, en cambio, se define como el límite de una serie de sumas reales y finitas, las formadas por aquellos rectángulos que la aproximan. La definición en términos de delta y epsilon de un límite se ha convertido en la base de un gran número de demostraciones, una herramienta sutil aunque no llegue, ni siquiera entre los matemáticos, a despertar mucha simpatía.

Resultados colaterales. La definición de límite es difícil. Y lo es de un modo muy peculiar. Implica mantener cuatro números en la memoria (ε, δ, n y L) y que el resultado de una operación matemática sea comparado con una desigualdad, mientras que dos cuantificadores acechan por detrás. La idea de un número mayor que cero pero menor que cualquier otra cosa, signifique lo que signifique, es mucho más intuitiva. ¿Por qué es necesaria una definición tan compleja para explicar con propiedad algo que parece ser tan sencillo?

De hecho, ¿por que?

Leibniz y Newton, de modo independiente pero con la sensación de que otro gigante furioso se les estaba adelantando, delinearon a la par los principales conceptos del cálculo y establecieron y probaron su teorema fundamental. Sus manos, como gigantescas zarpas peludas, todavía se ciernen sobre las matemáticas. Dada la formidable importancia de sus descubrimientos de finales del siglo XVII y primeros del XVIII, es comprensible que ambos personajes ansiaran atribuirse el merito absoluto de sus descubrimientos y, cual candidatos a premio Nobel, tardaran bien poco en azuzar a sus sicofantes en campañas para empañar la reputación de su oponente. Newton fue implacable, llegando a aburrir a sus amigos con su obsesión por la prioridad, quejándose a voces en sus aposentos y dejándose llevar con frecuencia por la furia. Aunque la muerte de Leibniz en 1716 eliminó la fuente de su obsesión, no diluyó en absoluto la intensidad de su indignación. Está claro que Leibniz era más bondadoso que Newton y que se sentía mucho más cómodo con la situación. Era consciente de que tenía en Newton un oponente intelectual formidable y de que, si no fuera porque tenia razones para considerarse igual y rival de Newton, podría haber ignorado tales cuestiones.

Pero ahora este asunto está zanjado, y sabemos que nunca debió existir. Ambos eran grandiosos.

FIN LECTURA 8

Lectura 9

HISTORIA DE LA MATEMÁTICA
Rey Pastor, J., Babini, J.
Editorial Gedisa. Barcelona

EL SIGLO XIX

9.1. La matemática y el siglo XIX

En líneas muy generales, tres rasgos caracterizan la matemática del siglo XIX. En primer lugar, al compás del gran desarrollo científico y tecnológico del siglo, preludio de la explosión del siglo actual, la matemática, como las demás ciencias, muestra una fecundidad asombrosa que se revela en el gran incremento del número de científicos y de trabajos, en la creación de sociedades y revistas especializadas, en la celebración de reuniones nacionales e internacionales: La segunda mitad del siglo asiste a la iniciación de las reuniones internacionales en casi todos los campos del saber científico: los matemáticos no fueron de los primeros en reunirse; con todo el primer congreso internacional de los matemáticos pertenece al siglo: Zurich, 1897.

El siguiente dato puede dar idea de la fecundidad científica, en materia de matemática, del siglo XIX: la historia de la matemática más detallada y extensa es aun la de M. Cantor, cuyos cuatro gruesos volúmenes abarcan la historia de esta ciencia desde sus comienzos hasta todo el siglo XVIII; sobre la base de ese tratado se ha calculado que el desarrollo de la matemática del siglo XIX, con igual detalle y extensión, insumiría catorce volúmenes del grosor de los de Cantor, lo que equivale a decir que los progresos realizados durante el siglo XIX triplican con exceso los progresos realizados durante, digamos, los 40 siglos anteriores.

Estos progresos explican e implican el notable cambio que desde el primer tercio del siglo experimenta la matemática en su estructura intima al conferirle, como segundo rasgo

característico, una unidad y una autonomía que en cierto sentido había perdido desde los tiempos helénicos. En efecto, a comienzos del siglo XIX la matemática se presenta como un vasto conjunto de conocimientos distribuido en varias ramas aparentemente distintas: aritmética y teoría de números; geometría elemental, geometría analítica y geometría descriptiva, álgebra y cálculo infinitesimal, circunstancia que justifica que se siga empleando el término, hoy anticuado, de "matemáticas". Esas diferentes ramas mostraban a su vez distintas modalidades. La aritmética ofrecía un conjunto de reglas supuestas intangibles: en el habla popular la expresión: "el orden de los factores no altera el producto" y otras semejantes, eran los paradigmas de las verdades absolutas. Por su parte la teoría de números que desde el siglo XVII había encontrado excelentes cultores, no consistía sino en problemas particulares, cuya generalización conducía con frecuencia a complicaciones; piénsese en el "teorema de Fermat". En cuanto al álgebra, fuera de algunas cuestiones de índole algorítmica, a comienzos del siglo XIX su problema central, la solución de las ecuaciones algebraicas, se encontraba frente al escollo aparentemente infranqueable de las ecuaciones de quinto grado o superior.

Modalidades distintas presentaban las propiedades geométricas. Aunque algo contaminadas por los procesos y recursos algebraicos, seguían impregnadas de la atmósfera de la geometría griega. Pero esa atmósfera ya no tenía vigencia en el siglo XIX de ahí que esas propiedades adquirieran un aire de seres anfibios; por un lado se estudiaban a la manera griega "con la inteligencia pura" como entes abstractos habitantes de un mundo platónico de ideas pero por el otro a los ojos de los hombres habituados al método experimental esas figuras geométricas y esas propiedades eran como seres naturales, vinculados con el mundo exterior, no meras imágenes de entes ideales, sino seres reales, visibles y palpables, encadenados a los fenómenos naturales.

Puede llamar la atención esta permanencia, en el campo de la geometría, de la atmósfera griega y el estancamiento, durante siglos, de las notas que esa atmósfera implicaba, sobre todo si se compara este hecho con los avances experimentados por las otras ramas de la matemática. Mas hay que tener en cuenta, por una parte, que la obra de los geómetras griegos se presentaba con una perfección difícil de superar y, por la otra, que a partir del Renacimiento los gustos y las tendencias de los matemáticos se orientaron casi exclusivamente hacia los métodos analíticos, que, mediante las coordenadas o los recursos infinitesimales, ofrecían reglas mas cómodas, casi mecánicas, que permitían resolver no

solo los problemas de la geometría tradicional sino otros que trascendían las posibilidades de los griegos. Si se agrega que el Euclides, seguía siendo el texto fundamental en la enseñanza de la matemática elemental, cabe concluir que a comienzos del siglo XIX las propiedades de las figuras geométricas, que enseñaba la geometría griega, y la vinculación de esas figuras con el mundo exterior se habían convertido en un hábito mental.

En cambio seguían rozagantes, a comienzos del siglo XIX los métodos infinitesimales sistematizados por Euler y aplicados con éxito por Lagrange y Laplace en el siglo XVIII. Sin embargo, desde el punto de vista estrictamente matemático, esos métodos continuaban 'en el aire': sin fundamentos sólidos, no obstante los esfuerzos que se habían hecho para sustituir por conceptos mas precisos aquellos vagos infinitamente pequeños que eran cero y no eran cero, aquellos incrementos evanescentes que actuaban ya como cantidades finitas, ya como valores nulos.

Nuevamente podría llamar la atención que en la ciencia deductiva por antonomasia se aceptara durante casi dos siglos que una rama tan importante como el cálculo infinitesimal descansara sobre bases tan débiles y discutibles. La explicación de esta aparente paradoja ha de verse en la atmósfera científica que predominaba al organizarse los métodos infinitesimales en el siglo XVII. Tales métodos no habían surgido entonces en virtud de exigencias internas, como, había ocurrido, en la antigüedad cuando Arquímedes aplica esos métodos en forma rigurosa al proseguir el estudio de las cuadraturas y curvaturas de las figuras geométricas, sino que habían nacido apremiados por circunstancias externas: el dinamismo general de la época y, en particular, la conciencia de la utilidad y el poder que confería el conocimiento de las leyes naturales y la comprobación de que los métodos infinitesimales, por endebles que fueran sus fundamentos: facilitaban aquel conocimiento logrando resonantes triunfos, de ahí que ante el éxito de sus aplicaciones se descuidara el análisis de aquellos fundamentos y se cerrara un ojo ante su endeblez.

Ese éxito no solo dejaba en la penumbra el valor del cálculo infinitesimal por si mismo, sino que traía a primer plano un lazo mas que ataba la matemática con el mundo exterior. El siglo de las luces con su "naturalismo" consolidará esos, lazos, que la filosofía kantiana remachará al relacionar las verdades matemáticas con los conceptos metafísicos de tiempo y de espacio.

De ahí la configuración de este rasgo de la matemática de comienzos del siglo XIX: su sometimiento a las formas del mundo exterior y su carácter de "doncella de la ciencia natural".

Un tercer rasgo que puede señalarse en la matemática del siglo XIX es el cambio que experimentará en sus fundamentos durante la centuria. Acentuada su autonomía, hacia el ultimo cuarto del siglo comienza a prevalecer conceptos, en parte nacidos durante su transcurso, que prefiguran una nueva matemática que ha de estructurarse en este siglo, pudiendo señalarse la década del 8o como fecha fronteriza según expresión de Rey Pastor entre una matemática clásica y una matemática moderna o, mas simplemente, entre dos maneras de fundamentar la matemática, típicas del siglo XIX y del siglo XX.

9.2. Las geometrías no euclidianas

El advenimiento, de las llamadas geometrías no euclidianas, ocurrido en la primera mitad del siglo, representa el grito inicial de independencia de la matemática y de la proclamación de su autonomía frente al mundo exterior. Con estas nuevas geometrías se vincula la figura de uno de los grandes científicos de la primera mitad, del siglo: el alemán Gauss, astrónomo, físico, geodesta, pero sobre todo matemático, con quien se inicia también la pléyade de matemáticos alemanes que ha de llenar todo el siglo.

De los matemáticos alemanes anteriores a Gauss, cabe citar a Johann Friedrich Pfaff, que se ocupó de ecuaciones con derivadas parciales y de determinantes y la llamada escuela combinatoria cuyo adalid fue Carl Friedrich Hindenburg que hacía de los polinomios finitos e infinitos la piedra angular del análisis matemático, tomándolos empero, formalmente, "sin preocuparse en absoluto, de su convergencia o divergencia.

De manera distinta actuará **Gauss que introduce, o reintroduce, en la matemática lo que desde entonces se ha dado en llamar el rigor, vale decir la estricta obediencia a las reglas de la deducción.**

La labor matemática de Gauss, extendió a casi todas las ramas, en especial se dedico a la teoría de números y a la geometría diferencial.

Muchos de los descubrimientos de Gauss fueron realizados por él mucho antes de su publicación, y quedaron registrados y fechados en una "Libreta de apuntes" que llevó desde 1796 hasta 1814, y que se encontró entre sus papeles póstumos. El primer descubrimiento que anota es la construcción del heptadecágono con regla y compás.

Ya en su tesis de doctorado de 1799 Gauss aporta una contribución básica a la matemática, con una primera demostración del "teorema fundamental del álgebra": todo polinomio algebraico de una variable se anula por lo menos una vez para un valor real o imaginario de la variable. En esa memoria, afirma sin demostración que no es posible resolver algebraicamente la ecuación de quinto grado.

Dos años después Gauss publica sus *Disquisitiones Arithmeticae* que hace época en la teoría de números, rama a la que Gauss se dedico desde muy joven. En las *Disquisitiones*, Gauss estructura sistemáticamente, el estudio de las "congruencias" y de la teoría de los restos cuadráticos; estudia asimismo la resolución algebraica de las ecuaciones binomias y llega al notable resultado anexo de la posibilidad de construir con regla y compás los polígonos regulares cuyo numero de lados es primo y de la forma $2^{2^n} + 1$.

Entre otras cuestiones aritméticas tratadas por Gauss figuran las hoy llamadas "sumas de Gauss" y la extensión de la teoría de los restos a los bicuadráticos, en conexión con la cual introduce los "números complejos enteros". Se inicia así la introducción sistemática de los números complejos en matemática y su representación gráfica, hoy en uso, que Gauss publica en 1831, aunque parece que estaba en posesión de ella desde 1799. Esa representación fue encontrada independientemente por el danés Carl Wessel, quien la publico en 1797, y por el suizo Jean Robert Argand que la hizo conocer en 1806.

Gauss fue un calculista extremadamente hábil y rápido; realizaba divisiones para descubrir períodos de centenar de cifras y se le debe la primera tabla, en 1812, de "logaritmos de adición", cuya idea inicial fue sugerida en 1803 por el físico italiano Giuseppe Zecchini Leonelli.

En 1827 aparecen las *Disquisitiones generales circa superficie curvas*, en las que se funda el estudio de la geometría diferencial de las superficies, encaradas éstas "no como el límite de un sólido, sino como un sólido flexible e inextensible, una de cuyas dimensiones está obligada a desvanecer". En sus estas *Disquisitiones,* Gauss introduce los conceptos de representación esférica, de coordenadas curvilíneas sobre una superficie, de elemento lineal de aquella mediante una forma cuadrática de sus diferenciales, de líneas geodésicas de curvatura total, etcétera.

Con Gauss se inicia el estudio estrictamente riguroso de las series, en conexión con la serie "hiper-geométrica", que lleva su nombre, y proporciona, como casos particulares, el

desarrollo en serie de numerosas funciones. En el estudio de esta serie, aparecido en 1811, Gauss introduce sistemáticamente el concepto de convergencia y generaliza al campo complejo la función $\Gamma(z) = z!$, ya extendida al campo real por Euler. El concepto de límite infinito potencial, como único admisible en matemática, lo formula claramente Gauss al decir: "Me opongo al uso de las magnitudes infinitas como de algo completo que en matemática jamás se permite. El infinito no es sino una *facon de parler.*

Entre otras contribuciones analíticas de Gauss, pueden mencionarse el descubrimiento, independientemente de Abel y Jacobi, de la doble periodicidad de las funciones elípticas, el método de los mínimos cuadrados y la ley de distribución de los errores de observación, un método de integración aproximada que logra la máxima aproximación con el mismo número de coeficientes, etcétera.

Por ultimo, Gauss fue uno de los descubridores de las geometrías no euclidianas, nombre que le pertenece.

En realidad, los primeros intentos en este sentido provenían del siglo anterior. Gerolamo Saccheri en 1733, año de su muerte, hace conocer un *Euclides. . . vindicatus*; cuyo objeto era demostrar la verdad del Quinto postulado de los *Elementos*, y sus consideraciones lo hubieran llevado al descubrimiento de las nuevas geometrías si aquel objeto preconcebido no se lo hubiera impedido. En esas consideraciones Saccheri parte de un cuadrilátero birrectángulo isósceles", es decir un cuadrilátero *ABCD* tal que *AB* y *DC* son iguales y perpendiculares a BC. Demuestra, sin recurrir al postulado de las paralelas, que los ángulos en A y en D son iguales, y encara la triple posibilidad de ser esos ángulos, ambos rectos, obtusos o agudos. Pero como Saccheri se propone "reivindicar" a Euclides, se esfuerza en demostrar, y según ello logra, que las hipótesis de los ángulos obtuso y agudo conducen a absurdos con lo que, resultando que el cuadrilátero *ABCD* ha de ser un rectángulo, queda demostrado el Quinto postulado. Mientras que la demostración de ser absurda la hipótesis del ángulo obtuso la logra Saccheri con relativa facilidad, la cuestión se complica al tratar la hipótesis del ángulo agudo, aunque en sus ultimas proposiciones llega a la conclusión de que esa hipótesis "es absolutamente falsa porque repugna a la naturaleza de la línea recta" pues en tal caso "una oblicua. . . y una perpendicular a AB tendrían una perpendicular común en un punto común en el infinito. . . ". Sólo el preconcepto de demostrar que el postulado de Euclides era verdadero pudo hacerle aceptar teorema tan poco geométrico.

Las consideraciones de Lambert, escritas en 1766 pero aparecidas más de medio siglo después en *Zur Theorie der Parallellinien*, son muy semejantes a las anteriores. Lambert parte de, un cuadrilátero trirrectángulo isósceles y considera las tres hipótesis posibles respecto del cuarto ángulo del cuadrilátero; sin embargo, los resultados a los que arriba son más interesantes que los de Saccheri. En efecto, según Lambert si ese cuarto ángulo es recto se llega a la geometría de Euclides (con lo que un, postulado es sustituido por otro), Si ese cuarto ángulo es obtuso, tal hipótesis lleva a una contradicción con el postulado de, Arquímedes, por lo que se supone falsa tal segunda hipótesis, sin dejar de hacer la interesante, observación que, de ser válida esa hipótesis, en el plano la geometría respectiva seria como la geometría esférica. En cambio Lambert no llega a ninguna contradicción lógica con la hipótesis del ángulo agudo, sino a nuevas propiedades que el área de los triángulos (y de los polígonos en general) era proporcional a la "diferencia", es decir a la diferencia entre dos rectas y la suma de sus ángulos internos; que la medida de los segmentos ya no seria relativa a una unidad elegida arbitrariamente, sino que seria absoluta y existiría una unidad natural de longitud, como existe una unidad natural, el ángulo recto para los ángulos. Fue la existencia de tal segmento absoluto, el hecho que hizo rechazar a Lambert también la hipótesis del ángulo agudo, pero sin dejar, de hacer, también en esta oportunidad, la observación profética en este caso de que de ser válida la hipótesis la geometría plana respectiva seria como una geometría sobre una, esfera de radio imaginario.

Legendre, que fue uno de los matemáticos franceses de la época que se ocupó de la cuestión, también llegó a resultados semejantes al partir de las tres hipótesis posibles respecto de la diferencia entre dos rectas y la suma de los ángulos de un triángulo.

Gauss no publicó casi nada acerca de la cuestión de las paralelas, pero de su correspondencia y de algunos apuntes encontrados entre sus papeles, se deduce, que el asunto le había preocupado desde la adolescencia, y que si no publicó nada fue,
como le escribe a Bessel el 1829, por el temor a "das Geschrei der Bootier" (la gritería, de los beocios). Pero, escribe en 1831; "He comenzado a escribir algunos resultados de mis meditaciones sobre este asunto, que se remontan en parte a cuarenta años.", aunque el año siguiente, enterado del trabajo de Bolyai, abandona ese propósito. Los apuntes encontrados entre sus papeles comprueban que proyectaba escribir una Geometría no euclidiana, convencido de que la prescindencia del postulado de las paralelas no conducía a ninguna

contradicción, "aunque a primera vista muchos de sus resultados ofrezcan un aspecto paradójico". Entre esos resultados figura la existencia en esa geometría de una unidad absoluta para los segmentos, razón por la cual tanto Lambert como Legendre habían rechazado tal geometría. Con esa unidad estaba vinculada una constante indeterminada que al crecer infinitamente convertía al sistema geométrico en el sistema euclídeo.

Semejantes conclusiones, pero independientes de las de Gauss, fueron algunas noticias que en 1818 el jurista Ferdinad Karl Schweikart remitió a Gauss, así como las de un sobrino de este, Franz Adolfo Taurinus, que en 1824 se había ocupado de la cuestión, inspirado en las observaciones de Schweikart y de Gauss, y había desarrollado las fórmulas que correspondían a la geometría fundada en la hipótesis del ángulo agudo de Lambert, que obtenía con solo sustituir, en las fórmulas de la trigonometría esférica, el valor del radio por un número imaginario puro. En esa geometría, que Taurinus llamó "geometría logaritmo-esférica"(al pasar del radio real al imaginario las funciones circulares se transforman en hiperbólicas que, a su vez, son combinaciones de exponenciales, inversas de la logarítmica), aparecía la constante de Gauss que, al variar de valores reales a imaginarios pasando por el infinito, permitía pasar de la geometría esférica a la nueva geometría pasando por la euclidiana. Pero Taurinus, aun reconociendo la compatibilidad lógica de las proposiciones de esta geometría logaritmo-esférica, no admitía su validez en el plano pues, impregnado de la verdad absoluta de la geometría de Euclides y de las ideas entonces dominantes de la filosofía de Kant, que hacía del espacio euclidiano una intuición pura a priori, veía precisamente en la indeterminación de esa constante un argumento en contra de una geometría que reputaba única y absoluta.

En cambio llegaron, como Gauss pero independientemente de él, a la conclusión de que podía erigirse un sistema geométrico, prescindente del postulado de las paralelas, dos matemáticos de países que hasta entonces no habían contribuido al progreso de la matemática: Janos Bolyai, húngaro, y Nicolaus Ivanovich Lobachevski, ruso.

J. Bolyai fué hijo de Wolfgang Bolyai, también matemático y condiscípulo de Gauss, y es precisamente como apéndice del primer volumen de una obra didáctica del padre que aparece en 1832 la *Ciencia absoluta del espacio* de J. Bolyai, quien en apenas 16 paginas expone "un universo creado de la nada", como él mismo se expresa. Bolyai da el nombre de "geometría absoluta" a sus consideraciones porque se refieren a propiedades geométricas independientes del postulado de las paralelas que son entonces teoremas o

verdades absolutas, válidas tanto para la geometría ordinaria como para la geometría mas general que el ha construido. Así, por ejemplo, las fórmulas de la trigonometría esférica son fórmulas absolutas, pues pueden deducirse independientemente del postulado de las paralelas.

La exposición de Lobachevski es muy semejante, aunque mas constructiva. Su primer trabajo es de 1829, pero se ha perdido, mientras que en 1836 aparecen en ruso sus *Nuevos elementos de geometría con una teoría completa sobre las paralelas*, obra que pasa inadvertida y de la cual da en 1840 un resumen en alemán, mientras que en 1855, año anterior a su muerte y casi ciego, dicta la exposición mas completa de su teoría en ruso y en francés: *Pangeometrie ou Précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des paralléles*. En esa *Pangéometrie* Lobachevski parte del punto, de la circunferencia y de la esfera como entes fundamentales, de los cuales deduce la recta y el plano; define luego como "paralela a una recta dada por un punto dado a la recta límite que entre las situadas en el mismo plano que pasan por el punto y del mismo lado de la perpendicular bajada del punto a la recta, separa las rectas que cortan a la dada de las que no la cortan". Luego, en forma puramente analítica (en la Pangéometrie no hay figuras) desarrolla toda la trigonometría de esta geometría imaginaria.

La identidad de los resultados logrados por Schweikart, Taurinus, Gauss, Lobachevski y Bolyai puede comprobarse si se considera que en todos ellos el núcleo central de los desarrollos analíticos es la expresión $\cosh\frac{a}{k} sen\pi(a) = 1$, dónde a es un segmento cualquiera y $\pi(a)$ es el llamado "ángulo de paralelismo" correspondiente al segmento a, es decir, si $AB = a$ y BC una perpendicular, el ángulo $\pi(a)$ es el ángulo que forma la paralela a BC por A y k es la constante de Gauss, que en sus desarrollos Lobachevski toma igual a la unidad. Para $\pi(a) = 45°$, a es la constante de Schweikart, que Taurinus calculo; para $k \to \infty$ y $\pi(a) = 90°$ estamos en el caso de la geometría euclidiana de paralela única y de ángulo de paralelismo independiente de a. Si k pasa de real a imaginario, las fórmulas de la geometría no euclidiana que vinculan los ángulos de paralelismo con los lados se convierten en las fórmulas de la trigonometría esférica.

Es importante agregar que en todos estos intentos de nuevas geometrías seguía aún subyacente la concepción de la geometría como rama de la ciencia natural, como ciencia del espacio físico, concepción que si bien no acepta la tesis kantiana del espacio como

forma de nuestra subjetividad cuyo molde es la geometría euclidiana, continúa concediéndole **un significado real y haciendo de la geometría una ciencia deductiva racional fundada sobre postulados empíricos, de manera que solo la experiencia decidiría cuál es la geometría válida**.

Gauss mismo, en quien la idea de una matemática abstracta y de entes matemáticos fruto de la libre creación de la mente no podía dejar de serle simpática, no pudo sustraerse al prestigio geométrico del mundo exterior y trató de comprobar, mediante experiencias geodésicas, la posibilidad de detectar triángulos cuyos ángulos no sumaran dos rectas.

Hacia mediados de siglo se cierra la primera etapa en el advenimiento de las geometrías no euclidianas, que había visto el nacimiento de un primer grupo de ellas: las llamadas, por Klein, geometrías hiperbólicas, que corresponden a las hipótesis del ángulo agudo de Saccheri y Lambert y a la existencia de dos paralelas desde un punto a una recta situada a la distancia a, que forman a ambos lados de la perpendicular, bajada desde ese punto, el ángulo de paralelismo $\pi(a)$.

En la segunda etapa en el desarrollo de la geometrías no euclidianas, se completa el cuadro de esas geometrías y se las estudia según las nuevas direcciones, métrico-diferencial y métrico-proyectiva.

Esa etapa se desarrolla en la segunda mitad del siglo.

La dirección, métrico-diferencial se inicia con Georg Friedrich Bernhard Riemann, discípulo y continuador de Gauss, cuyas ideas fundamentales, que permitieron encarar el problema de las nuevas geometrías desde un punto de vista muy superior, figuran en la disertación, hoy célebre, pronunciada en 1854 (aunque publicada en 1867), *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría*, donde se analiza, en la forma más general posible, el comportamiento infinitesimal de una multiplicidad de un número cualquiera de, dimensiones. En esa disertación aparece la importante distinción entre "infinito"e "ilimitado", que debía desempeñar en el presente siglo singular papel en la teoría física de la relatividad, teoría por lo demás en que es visible la influencia de las ideas de Riemann. Dice este en su disertación: "Cuando se extienden las construcciones del espacio a lo infinitamente grande ha de distinguirse lo ilimitado de lo infinito, Lo primero pertenece a las .relaciones de la extensión, lo segundo a las relaciones métricas. Que el espacio es una, variedad ilimitada de tres dimensiones es una hipótesis que se aplica en todas las concepciones relativas del mundo exterior, que nos sirve para completar en todo momento

el campo de nuestras percepciones y que constantemente se encuentra verificada en todas sus aplicaciones. De ahí que la propiedad del espacio de ser ilimitado posea una certeza empírica que ningún otro dato empírico posee. Pero de ella no sigue de ningún modo la infinitud del espacio, al contrario si se suponen los cuerpos independientes de sus posiciones y se atribuye al espacio una curvatura constante, el espacio seria necesariamente finito, en cuanto la medida de la curvatura fuera positiva, por pequeña que fuera"

Una consecuencia de las consideraciones de Riemann fue la ampliación del cuadro de las geometrías no euclidianas y la introducción de la geometría elíptica (y esférica), que corresponde a la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri y Lambert, en la que desde un punto exterior a una recta no existen paralelas a ella. Queda así, para completar el cuadro, la geometría parabólica, nuestra geometría euclidiana, en la que la paralela desde un punto exterior a una recta es única.

Con el estudio de las geometrías generales Riemannianas en la dirección métrico-diferencial, que hoy se llaman "espacios de Riemann", tienen importancia las superficies de curvatura constante, cuyos ejemplos mas simples son el plano (curvatura nula) y la esfera (curvatura positiva). Una superficie de curvatura constante negativa fue dada en 1868 por Eugenio Beltrami: es la superficie engendrada por rotación de la tractriz, curva plana cuya propiedad característica es la de ser constante la longitud de la tangente. Así como nuestra geometría plana es un tipo de geometría parabólica y la geometría sobre la esfera (con alguna variante) es un tipo de geometría elíptica, la geometría sobre esa superficie de Beltrami (de la cual éste construyó también un modelo, la seudo esfera) es un tipo de geometría hiperbólica.

La existencia de esta superficie,así como otras interpretaciones de geometrías no euclidianas sobre el plano euclídeo que se dieron posteriormente, puso fin a toda discusión acerca de la validez lógica de las nuevas geometrías, pues la supuesta contradicción que se había querido ver en ellas llevaría consigo igual contradicción en el seno de la geometría euclidiana, jamás puesta en duda hasta entonces.

Para terminar con las geometrías no euclidianas recordemos que la dirección métrico-proyectiva aparece en 1859 cuando Cayley logra la subordinación de las propiedades métricas (distancia entre dos puntos, ángulo entre dos rectas, etcétera) a las propiedades gráficas, mediante la demostración de que tales propiedades métricas se traducen en propiedades proyectivas de sus elementos, si se relacionan estos con los

elementos de una cónica (o de una cuádrica si se trata del espacio), que denomina *la cónica, o la cuádrica, absoluta o simplemente lo absoluto del plano o del espacio*. Una consecuencia notable de esta demostración es que, según se elija este absoluto (real o imaginario, propio o impropio), se obtienen distintas geometrías y se vuelven a encontrar por este camino las geometrías no euclidianas, que pueden estudiarse siguiendo esta dirección métrico-proyectiva. De ahí también la frase de Cayley: "La geometría proyectiva es toda la geometría".

9.3. La aritmetización del análisis.

Como vimos, el cálculo infinitesimal en sus tres ramas: cálculo diferencial, cálculo integral y cálculo de variaciones, había adquirido en el siglo XVIII, en manos de Euler y Lagrange, un desarrollo extraordinario. Pero **ese desarrollo, puramente formal y algorítmico, no estaba fundado sobre sistema conceptual riguroso alguno**. Cuando se aludía a los fundamentos se hablaba de la "metafísica del cálculo infinitesimal"; cuando se hablaba de series, el uso de las series divergentes estaba rodeado de misterios y oscuridades.

Tal estado de cosas cambia en el siglo XIX cuando el estudio de los métodos infinitesimales, que ahora se convierten cabalmente en un análisis infinitesimal, sin dejar de progresar en su desarrollo y hasta en forma más rica y variada ahonda en sus propios principios y encuentra una base firme en la aritmética, eliminando de su seno toda vaga e inútil "metafísica". Tal es el proceso que se denomino **"aritmetización del análisis"**, cuyo precursor fue Bernard Bolzano y sus constructores Cauchy, Abel, Jacobi, ...

Bolzano

En numerosas cuestiones se adelantó Bolzano a los analistas rigurosos del siglo XIX: en el concepto de función continua, en el criterio de convergencia de series, en la existencia de funciones continuas sin derivada; pero por haber publicado sus escritos de análisis en Praga, ciudad entonces alejada de los centros científicos, o por permanecer

inéditos, como su *Teoría de funciones*, que se publicó en 1930 la influencia de sus ideas fue escasa.

Por su parte, Augustin-Louis Cauchy, en su *Analyse algébrique* de 1822, escribe: "He tratado de dar a los métodos todo el rigor que se exige en geometría, sin acudir jamás a los argumentos tomados de la generalidad del álgebra. Tales argumentos, aunque bastante admitidos comúnmente, sobre todo en el pasaje de las series convergentes a las divergentes y en el de las cantidades reales a las imaginarias, se me ocurre que no debe ser considerados sino como inducciones, adecuadas a veces para hacer presentir la exactitud y la verdad pero que no están de acuerdo con la exactitud tan reputada de las ciencias matemáticas. Además debe observarse que ellas tienden a atribuir a las fórmulas algebraicas una extensión ilimitada, mientras que en la realidad la mayor parte de esas fórmulas subsisten únicamente bajo ciertas condiciones y para determinados valores de las cantidades que ellas encierran. Determinando esas condiciones y esos valores, fijando de manera precisa el sentido de las notaciones que utilizo, toda vaguedad desaparece".

Es decir, vuelta al clásico rigor geométrico, **precisión en las definiciones, delimitación del campo de validez de las fórmulas, eliminación de toda extensión ilegítima**, he ahí el programa trazado por Cauchy y cumplido en sus numerosos libros y memorias.

Auguste Cauchy

Con estas condiciones rigurosas y mediante **adecuadas definiciones de función, de continuidad, de límite, Cauchy funda, el análisis sobre bases más firmes que sus antecesores**. Retoma el concepto de integral como suma y no solamente como operación inversa de la diferencial y aunque no va mucho más lejos en el concepto de integral y de función, es más riguroso que Euler. En las series fija claramente su **convergencia** y elimina, algo a pesar suyo, las series divergentes del análisis. "Me he visto obligado- dice – a admitir diversas proposiciones que parecerán algo duras; por ejemplo, que una serie divergente carece de suma." Hay en este escrupulo un atisbo del devenir de la "teoría de las

series divergentes" que se organizan en el siglo XX: retomando, ahora con rigor, la idea euleriana.

La contribución más importante de Cauchy es sin duda la que se refiere a la teoría de las funciones analíticas; que elabora utilizando los resultados de Euler, Clairaut, D'Alembert Poisson, Lagrange...En sus estudios extiende la serie de Taylor a las funciones de variable compleja, apareciendo así la llamada "integral de Cauchy", que permite obtener el valor de una función cada punto interior de un recinto, conociendo el valor de la función en su contorno. En conexión con esos resultados Cauchy desarrollo su teoría de los polos, de los residuos, de la serie de Taylor, cuya generalización, hoy conocida como "serie de Laurent", realizo un discípulo de Cauchy, Pierre-Alphonse Laurent.

Se deben además a Cauchy, estudios e investigaciones acerca de los determinantes, de teoría de números y teoría de grupos de sustituciones, acerca de investigaciones de índole algebraica sobre eliminación y separación de raíces complejas, así como de temas de física matemática (teoría de la elasticidad).

Con la expulsión de las series divergentes del análisis, Cauchy completóla obra iniciada por Niels Henrik Abel, para quien "las series divergentes son en general una invención diabólica y es vergonzoso que se pretenda fundar sobre ellas demostración alguna; la parte mas esencial de la matemática carece de base. Es cierto que la mayor parte de los resultados son exactos, pero esto es algo verdaderamente extraño . . . En el análisis superior solo pocas proposiciones están demostradas de manera indiscutiblemente rigurosa. Constantemente se encuentra la deplorable costumbre de deducir lo general de lo particular y es sin duda muy notable que con tal manera de proceder no se llegue con mas frecuencia a lo que se denominan paradojas".

Niels Henrik Abel

En el campo del análisis Abel se ocupó de series y de teoría de funciones. Con Jacobi forma la pareja de creadores de las funciones elípticas, obtenidas como funciones inversas de las integrales elípticas. Esta idea clave de la inversión de las dos variables había

escapado a Legendre en su estudio de las integrales elípticas, a las que consagró muchos años. Realizada la inversión y consideradas las funciones elípticas como funciones de variable compleja, apareció su doble periodicidad. Abel, además, generalizó las funciones elípticas, incluyéndolas en una "classe tres-étendue de fonctions transcendantes", hoy denominadas, funciones abelianas, cuyas propiedades estudia en una memoria que presentó a la Academia de Ciencias de Paris en 1826, pero que no se publicó sino después de la muerte de su autor.

Por último, con su solución del problema de la tautócrona, Abel inaugura una nueva rama del análisis infinitesimal: las ecuaciones integrales.

El sistematizador del estudio de las funciones elípticas mediante el algoritmo de las series es Carl Gustav Jacob Jacobi, que expuso en su *Fundamento Nova Theoria Functionum Ellipticarum* de 1829. Con la labor de Abel y Jacobi acerca de las funciones elípticas, se vincula un significativo incidente que muestra la evolución que estaba experimentando el concepto de la matemática frente a la ciencia natural.

En el mismo año de su muerte (1829) Abel, en un trabajo publicado en el "Journal de Crelle", había hecho mención de la memoria enviada a la Academia de Paris. A este respecto Jacobi interrogó a Legendre, quien manifestó que la memoria de Abel era ilegible y que se había solicitado inútilmente al autor un manuscrito mejor.

Sin embargo se sospechó que lo ocurrido se debía a que los matemáticos franceses, muy ocupados en cuestiones de física matemática -calor, elasticidad, electricidad- descuidaban las cuestiones de matemática pura. Lo cierto es que, al comentar la obra de Jacobi sobre las funciones elípticas, Poisson recordó un reproche de Fourier a Abel y Jacobi por no ocuparse de cuestiones de física matemática. La contestación de Jacobi (en carta dirigida a Legendre) expresa: "Poisson no debía haber reproducido una desgraciada frase de Fourier que nos reprocha, a Abel y a mi, por no ocuparnos del movimiento del calor. Es cierto que Fourier estima que la finalidad principal de la matemática es la utilidad pública y la explicación del os fenómenos naturales, pero un filósofo como él debería saber que la única finalidad de la ciencia es el honor del espíritu humano y que, en consecuencia, una cuestión de la teoría de los números tienen un valor tan grande como una cuestión de los sistemas de los mundos".

Dejemos de lado el tono de esta frase, que por lo demás concuerda perfectamente con la época en que fue lanzada: 1830 es la fecha oficial del nacimiento del movimiento

romántico. Para nuestro objeto es mas interesante señalar como esta valoración y esta proclamación de independencia del análisis y de la matemática con respecto a la ciencia natural son contemporáneas con el advenimiento de las geometrías no euclidianas, que proclamaban igual independencia de la geometría y de la matemática frente al yugo del mundo exterior; de ahí que pueda fecharse hacia 1830 el grito inicial de la autonomía de la matemática.

Jacobi, que además fue un maestro inspirado, se ocupó de casi todas las ramas de la matemática. En teoría de números continuó las investigaciones de Gauss especialmente en restos cúbicos; se le deben estudios sobre determinantes funcionales, a uno de los cuales Sylvester denominó jacobiano; se ocupó de cálculo de las variaciones y de integración de ecuaciones diferenciales. Uno de sus métodos, llamado del último multiplicador, fue aplicado por él en la integración de las ecuaciones de la dinámica.

Se ocupó también de análisis el sucesor de Gauss en la cátedra de Gottingen: Peter Gustav Lejeune Dirichlet, quien expuso, con Riemann, la formulación más general de **función como correspondencia entre dos conjuntos de números, cualquiera sea el modo de establecer esa correspondencia**. Se le debe también la formulación precisa de las condiciones para que una función pueda desarrollarse en serie de Fourier; introdujo el concepto de series absolutamente convergentes (cuando converge la serie de los valores absolutos de sus términos), etcétera. En teoría de funciones existe un llamado "problema de Dirichlet" que consiste en determinar en un recinto una función finita y continua de dos variables reales que satisfaga la ecuación de Laplace, conocidos los valores que toma la función en el con torno. La existencia de esta función, problema importante en física, está vinculada con el llamado (por Riemann) "principio de Dirichlet", que éste estableció a modo de postulado en sus estudios sobre la teoría del potencial.

Además de su contribución a los fundamentos de la geometría, se deben a Riemann notables aportes a distintas ramas del análisis matemático. Así se le debe un concepto de integral definida más general que el de Cauchy, pues incluye el caso en que la función admita infinitas discontinuidades, siempre que se mantenga acotada. Inversamente, en su estudio acerca de las series trigonométricas, alude a la existencia de funciones continuas sin derivadas.

B. Riemann

También se deben a Riemann los fundamentos del *Analysis situs* o *Topología* y el estudio de las funciones de variable compleja mediante la ecuación de Laplace, que concede jerarquía matemática a este recurso, importante para la física. Con las funciones de variable compleja se vincula la llamada" superficie de Riemann", que éste ideó para hacer uniformes las correspondencias multiformes entre las variables complejas.

Riemann se ocupó con éxito de las funciones elípticas, de las sedes trigonométricas y de la integración de ecuaciones diferenciales. Se le debe, por último, la función ζ (función zeta de Riemann)que lleva su nombre, importante en la teoría de los números primos y de la cual dio seis propiedades sin demostración (de esas propiedades queda aun por demostrar que los ceros de la función tienen por parte real 1/2).

El continuador de la obra de Abel y de Jacobi sobre las funciones elípticas, es otro de los notables analistas del siglo: Karl Weierstrass, creador de una nueva dirección en el estudio de las funciones analíticas de variable compleja. Mientras que Cauchy y Riemann estudian, como tales, aquellas funciones que tienen derivada única en cada punto, es decir, cuyas componentes real e imaginaria satisfacen la ecuación diferencial de Laplace, Weierstrass llama función analítica a toda función definida mediante una serie de potencias convergente en cierto recinto que, mediante determinadas condiciones, es posible "prolongar" por círculos sucesivos. Cuando el recinto es todo el plano, la función es una "trascendente entera". En conexión con esa teoría Weierstrass utilizó, sistemáticamente el concepto de convergencia uniforme que Cauchy no poseyó y fue investigado por primera vez por Stokes en 1847, y dio, entre muchos otros resultados, la expresión de las trascendentes enteras mediante productos infinitos de "factores primarios", coma los llamo Weierstrass.

Se debe también a Weierstrass la, introducción del rigor aritmético en el cálculo de variaciones y un ejemplo, que impresiono a los matemáticos de su tiempo, de función continua sin derivada en ninguno de sus puntos (un ejemplo de Bolzano permaneció en general desconocido).

En 1863 Weierstrass expuso la demostración del "teorema final de la aritmética", según el cual no existe ningún sistema de números complejos de mas de dos unidades, es decir distintos de los números complejos ordinarios, que satisfaga todas las "propiedades formales de las operaciones aritméticas fundamentales. En 1872 retomo el problema de la fundamentación de los números reales, que en verdad no había experimentado modificación esencial desde Eudoxo, quien coma vimos dio tal fundamentación pero fundada sobre magnitudes geométricas.

Continuador de Cauchy y destacado matemático francés fue el ya mencionado Liouville, a quien se debe un teorema fundamental para las funciones analíticas; en 1844 creó un método para la construcción de números trascendentes. Expuso con Sturm un capitulo importante de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con dos valores iniciales dados (en vez de las condiciones de Cauchy en un solo punto) e inició en 1837 la teoría de las ecuaciones integrales con su método de aproximaciones sucesivas.

El último, cronológicamente, de los analistas franceses que actuó en el siglo XIX, es Charles Hermite (fallecido el primer año del presente siglo), que se ocupó de funciones elípticas, de álgebra, de teoría de números y, en general, de análisis. Con su nombre se vincula la resolución del problema de la cuadratura del circulo. (1)

En cuanto a la introducción del, nuevo análisis en Italia, cabe mencionar unos párrafos de una conferencia de Volterra de 1900: "En el otoño de 1858 tres jóvenes matemáticos italianos emprendían juntos un viaje científico con el objeto de visitar las universidades extranjeras y ponerse en contacto con los mas célebres científicos de los demás países, a fin de conocer sus ideas y al mismo tiempo hacer conocer los propios trabajos científicos. En gran parte se debe al esfuerzo de estos tres matemáticos, a sus enseñanzas y al celo incansable que ejercieron para impulsar a los jóvenes matemáticos italianos hacia las investigaciones científicas. . . que en Italia naciera una escuela moderna de cultores del análisis".

Esos tres jóvenes eran Brioschi, Betti y Casorati. Francesco Brioschi se ocupó de numerosas cuestiones de análisis y de geometría diferencial. Enrico Betti, el más importante de los tres, además de ocuparse de cuestiones de álgebra, creo en 1871 la rama combinatoria del *Analysis situs o topología*, según el nombre que acuño Johann Benedict Listing en 1847 para esa rama; matemática; y en esta topología combinatoria es dónde aparecen los llamados "números de Betti". Además uno de sus discípulos Ulisse Dini,

publicó en 1878 una obra importante sobre los fundamentos de las funciones de variable real. Por su parte, Felice Casorati se ocupó de funciones analíticas y de geometría diferencial.

La aritmetización del análisis fue un proceso que se realizo de arriba abajo, comenzando con el cálculo infinitesimal, mientras el número irracional, también personaje infinitesimal, seguía llamándose "inconmensurable", dentro de la concepción geométrica de Eudoxo de 23 siglos de edad. Este contrasentido fue salvado en los cursos universitarios de Weierstrass, Méray, Cantor. . . mediante sucesiones monótonas de números racionales o mediante series convergentes. No deja de ser sintomática que en el mismo año 1872 aparezcan impresas las teorías de los tres profesores mencionados (aunque Charles Méray había iniciado esas publicaciones ya tres años antes). Es también en 1872 cuando aparece otra fundamentación rigurosa del número irracional, pero de índole diversa de las anteriores, por obra de Richard Dedekind, matemático que se ocupó también con éxito de teoría de números, que en ese año de rara coincidencia publica su *Stetigkeit und lrrationale Zahlen*, donde expone sus conocidas "cortaduras", que en realidad venia enseñando desde el año 1858.

Hacia estos años de la década de 1870, la aritmetización del análisis se ha completado. Ese proceso no solo asentó sobre bases aritméticas, claras y firmes, los fundamentos del análisis y aventó con ello las brumas metafísicas que durante todo el siglo XVIII habían oscurecido aquellos fundamentos, sino que mostró también que, en su esencia, todo había consistido en añadir a las operaciones aritméticas una nueva operación, el paso al límite, operación de índole peculiar, ya que estaba oculta en los umbrales de la matemática -sucesión de los números, magnitudes irracionales- pero que mediante una definición adecuada se convirtió en el instrumento que consolidó y otorgó rigor al conjunto de conceptos y métodos infinitesimales, iniciado por Newton y Leibnitz y continuado por los Bernoulli. Euler y Lagrange. Por otra parte, aquella aritmetización aclaro y desbrozó el camino que debía conducir a nuevos desarrollos, al aplicar el paso al límite a las funciones de variable real o compleja. En efecto, tal aplicación sistemática de la nueva operación, ya mediante el infinito numerable, ya mediante el infinito continuo, a las operaciones aritméticas había dado lugar en el análisis clásico a nuevos algoritmos: las series y las integrales son combinaciones del paso al límite con la suma, el producto infinito lo es con

la multiplicación, la derivada con la división; de ahí que su aplicación a todo proceso algebraico o funcional podía dar lugar a nuevos algoritmos.

Profundizar la investigación de los algoritmos clásicos y crear estos nuevos algoritmos, será la tarea: del análisis durante la segunda mitad del siglo en un proceso que reseñaremos en líneas generales.

La obra de Weierstrass fue continuada por su discípulo Hermann Amandus Schwarz, que se ocupó de cálculo de variaciones, en especial de superficies de área mínima. Se le deben investigaciones en teoría de grupos y en teorías de funciones; se conoce una "desigualdad de Schwarz", generalización de la elemental propiedad del cálculo vectorial, que el producto escalar de dos vectores no puede superar el producto de sus módulos.

También siguió las huellas de Weierstrass, Costa Magnus Mittag-Leffier, promotor de los estudios matemáticos en los países escandinavos "mediante la fundación en 1882 del periódico "Acta Matemática", que dirigió hasta su muerte, y del "Instituto Matemático" de Estocolmo en 1916.

De series, en especial de divergentes y condicionalmente divergentes, se ocupó el holandés Thomas-Jean Stieltjes, que en 1894 dio una extensión de la integral definida en la dirección que mas tarde (1902) seguirá Lebesgue.

En el campo de las ecuaciones diferenciales fueron sus propulsores a fines de siglo Immanuel Lazarus Fuchs, que crea la teoría de las ecuaciones lineales fundada en las funciones analíticas, y el noruego Sophus Lie, quien abre una nueva vía en ese campo al introducir, desde 1872, la teoría de grupos continuos de transformaciones, en especial las transformaciones de contacto, uno de cuyos ejemplos de 1870 es la llamada "transformación de Lie", que transforma rectas del espacio ordinario en esferas.

En el estudio de las ecuaciones con derivadas parciales debe mencionarse a otro analista francés, Jacques Hadamard, quien en su larga vida (murió casi centenario) se ocupó de numerosas cuestiones de matemática: distribución de los números primos, análisis funcional (este nombre le pertenece), etcétera, amén de temas conexos como su conocida *Psicología de la invención en el campo matemático* (existe traducción en español) de 1944.

El cálculo de variaciones, del cual aparece un esbozo histórico en la obra de Leonida Tonelli *Fondamenti di Calcolo delle Variazióni* (dos volúmenes) de 1922-1923, fue en verdad absorbido por una nueva rama del análisis que nace a fines de siglo: el análisis

funcional, que introduce nuevos algoritmos. Ya desde 1887 el italiano VitoVolterra organiza la "teoría de funciones de línea" que sistematiza en 1913; mientras que en 1896 introduce las llamadas "ecuaciones integrales", nuevo algoritmo que, con las ecuaciones integro-diferenciales, encuentran una amplia exposición en la obra del sueco Eric Ivar Fredholm en 1903.

A esta altura de los tiempos, a la vuelta del siglo, es notable en el campo del análisis, como en toda la matemática, la influencia de las dos grandes figuras de la época: Henri Poincaré y David Hilbert.

Se deben a Poincaré numerosos libros y un millar y medio de memorias acerca de todas las ramas de la matemática, así como de física matemática, astronomía y epistemología. En el campo del análisis destaquemos sus investigaciones de las funciones llamadas "auto morfas" (1881), sus estudios acerca de la uniformación-de funciones, de la topología combinatoria, de teorías integrales de ecuaciones diferenciales, de determinantes infinitos,... Acerca de Poincaré ha escrito Gastón Julia en 1954: "Dentro de una actividad incesante y siempre renovadora, ha recorrido todos los dominios de la matemática y de la física de su tiempo, extrae de ellos los principios filosóficos y descubre tantos campos nuevos de investigación que es posible que no exista dominio matemático actual que no haya fecundado o no haya dejado en él su sello".

Lo mismo puede decirse de Hilbert, cuya influencia en la matemática se ejerció durante casi toda la primera mitad de este siglo. Ha impreso su sello y dejado huella en todas las cuestiones vitales de la matemática, desde el análisis de sus fundamentos y los capítulos mas elevados hasta el tratamiento de problemas particulares.

Es famoso el discurso pronunciado por Hilbert en el Congreso de Paris de I900, sobre los "problemas de la matemática", en el que enumere 23 problemas matemáticos que entonces esperaban solución (2). En gran medida la matemática del siglo actual ha surgido del estudio de esos problemas en su mayor parte resueltos pero, lo que es mas importarte, dejando tras de si nuevos problemas.

Al referirse a la producción matemática de Hilbert dice Jean Dieudonné: "Lo que asombra a primera vista en los trabajos de Hibert es la belleza pura de grandiosa arquitectura. No se trata de una impresión de elegancia superficial que resulta de cálculos hábilmente conducidos, sino de una satisfacción estética mucho mas profunda, que se desprende de la perfecta armonía entre el fin perseguido y los medios puestos en juego para

alcanzarlos. Estos últimos son a menudo de desconcertante simplicidad. Por lo general no fue un perfeccionamiento más o menos ingenioso de los métodos de sus antecesores lo que permitió a Hilbert hacer sus grandes descubrimientos sino, por el contrario, un retorno voluntario al origen del problema tratado; de este modo separaba de la ganga, dónde nadie habrá sabido verlos, los principio los que permitían trazar, hacia la solución, el camino real en vano buscado hasta entonces".

Fueron ideas cardinales del pensamiento de Hilbert la unidad de la matemática y la importancia de los problemas en la investigación matemática. Entresacamos así entre sus frases: "En mi opinión la matemática es un todo indivisible, un organismo cuya vitalidad está condicionada por la conexión de sus partes. Con la extensión de la matemática su carácter orgánico no se pierde, sino que se manifiesta con mayor claridad. Los símbolos matemáticos son diagramas escritos, las figuras geométricas son fórmulas gráficas. . . En la medida en que una rama de la ciencia ofrece abundancia de problemas está viva; la carencia de problemas presagia la extinción o el cese de un desarrollo independiente. . . Quien persigue métodos sin tener en mente un problema definido, investiga en vano. La convicción de la resolubilidad de un problema matemático cualquiera es un poderoso incentivo para el investigador. Resuena en nosotros un llamado constante: Hay un problema, busca la solución, la encontraras razonando, pues en matemática no hay ignorabimus".

Con Hilbert ya se penetra en la matemática de este siglo, cuyo espíritu se refleja en las frases anteriores. Su nombre ha de figurar en el desarrollo de todas las ramas de la matemática del siglo actual. En el campo del análisis mencionemos solo la introducción, entre 1900 y 1910, de los llamados "espacios de Hilbert", que permiten geometrizar el análisis y abren el camino al análisis funcional, moderno.

En teoría de funciones, en especial en conexión con la teoría de conjuntos, se destacan a comienzos de este siglo los matemáticos franceses Émile Borel, que ya desde 1898 había introducido una definición de la "medida" que se conoce como "medida B", a la que Henri Lebesgue agregó otra de igual validez: la "medida L", a partir de la cual define en 1902 la integral que lleva su nombre. Por su parte Rene Baire en 1904 se ocupó con éxito de las funciones discontinuas mientras, que Maurice Frechet introduce, con su tesis de 1906, la importante noción de "espacio abstracto" que en unión con la obra de Hilbert y del estadounidense Eliakim Hastings Moore inicia la marcha del llamado análisis general" (el

nombre es de Moore). Dejando de lado muchas otras innovaciones en el campo del análisis, mencionemos que en 1945 aparece, por obra de Laurent Schwartz, un estudio detallado de nuevos entes, las funciones generalizadas o distribuciones.

FIN DE LA LECTURA 9

Bibliografía

Berlinski, D. (2006). *Ascenso Infinito*. Barcelona, España: Debate

Hoffman J(2002). *Historia de la Matemática*. México: Limusa-Noriega Editores

Rey Pastor, J., Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática*. Vol. I y II. España: Gedisa.

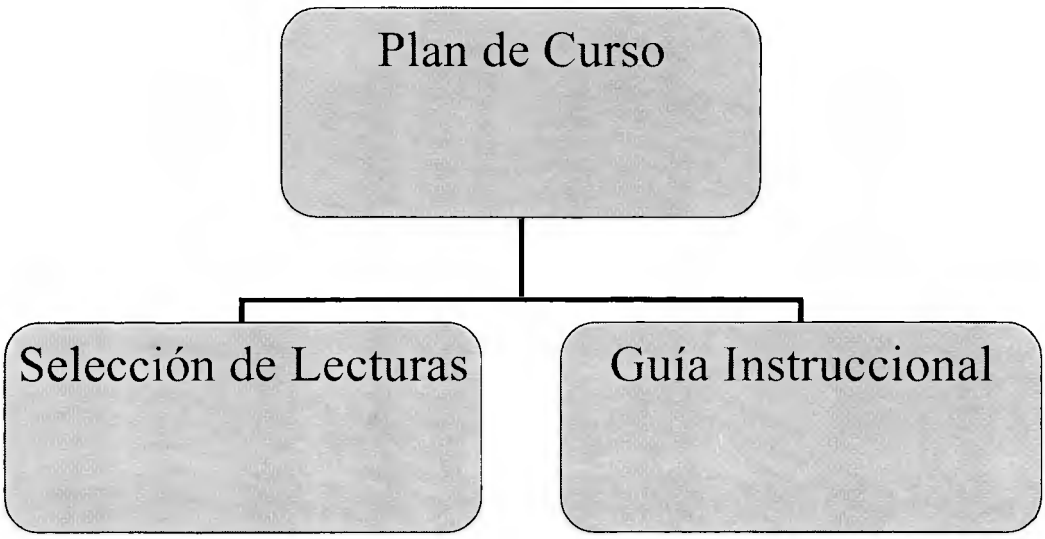
Santalo, L., Et al(1994). *Enfoques: Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires : Editorial Troquel.

Curso a distancia de Historia de la Matemática

Introducción:

El presente trabajo de ascenso consiste en el curso de Historia de la Matemática elaborado para la nueva carrera de Matemática de la Universidad Nacional Abierta(UNA). Debido a la modalidad de la UNA es un curso bajo la metodología de la educación a distancia. El curso está disponible en línea para los estudiantes y asesores del país bajo la plataforma Moodle (http:academico.una.edu.ve/foro). El curso está compuesto por:

1. Una selección de lecturas
2. Una guía instruccional donde se detalla como usar la selección de lecturas y con diversas actividades, ejercicios matemáticos, etc.
3. El montaje en línea bajo Moodle donde el estudiante tiene acceso a videos, páginas web de interés, uso de foro, chat, etc.
4. El Plan de Curso donde se fundamenta la asignatura dentro del diseño curricular, se dan los objetivos de aprendizaje, se detallan los contenidos y se explica la estructura general de la materia.



Hacemos entrega de cada uno de los documentos(Plan de Curso, Selección de Lecturas y Guía Instruccional) al jurado del Trabajo de Ascenso ya que no puede fraccionarse el mismo sin romper la integridad de la asignatura o comprometer la comprensión de la relación entre los diferentes materiales. Mi papel en cada uno de estos documentos fue la siguiente:

- Elaboración completa del Plan de Curso
- Elaboración completa de la Guía Instruccional
- Recopilador de la selección de lecturas.

También, me encargue del montaje completo del curso en línea y establecí el contacto con el Prof. Pérez Sanz que facilito los videos de la asignatura. Cualquier miembro del jurado puede acceder al Moodle de la asignatura, solicitándome la clave de acceso.

Prof. José Ramón Gascón Márquez
Universidad Católica Andrés Bello