AAR 7230

Trab
ED 2008
G3
V.2

INTRODUCCIÓN

El curso Historia de la Matemática (760) de la carrera Matemática (128) de la Universidad Nacional Abierta pretende darle un panorama al estudiante UNA del desarrollo de la matemática en occidente. El estudiante puede leer en la Fundamentación del Plan de Curso la importancia del curso dentro de la especialidad y su relación con el perfil del egresado.

El propósito de la Guía Instruccional es organizar el aprendizaje del estudiante UNA relacionando entre sí los diferentes materiales instruccionales y haciendo explícitos los enunciados de las estrategias instruccionales del Plan de Curso. También señala las diferentes actividades que el estudiante debe realizar para lograr los objetivos de aprendizaje que hemos propuesto.

Vamos a explicar brevemente en qué consiste cada una de las secciones que aparecen en la Guía Instruccional en cada Unidad de aprendizaje y cuál es su utilidad dentro de este material. En la Guía Instruccional correspondiente a cada unidad encontramos:

1. **El objetivo de aprendizaje de la unidad:** señalamos al estudiante, de una forma compacta, lo que debe aprender.

2. **Tiempo estimado de estudio de la unidad:** una aproximación del tiempo que el estudiante debería dedicarle al tema propuesto, a la lectura y a las actividades de la Unidad. Como Ud. sabe dentro del marco de la educación abierta esto es variable y dependerá finalmente de cada estudiante, así que sólo es una guía.

3. **Introducción a la unidad:** se explica de forma resumida el material contenido en la lectura y se enlaza, en lo posible, con el material que la precede.

4. **Plan de instrucción:** es muy importante ya que se indican, de forma ordenada, las actividades a realizar para lograr el objetivo de aprendizaje.

5. **El rincón del asesor:** proponemos un tema a debatir con los profesores de los centros locales y los demás estudiantes del curso. Estos temas van a ser incluidos dentro del Foro en la plataforma en línea del curso.

6. **Los autores de la lectura:** breve sinopsis biográfica en honor a los autores que escribieron el material de estudio.

7. **Notas matemáticas complementarias:** comentarios que ahondan en lo estrictamente matemático dentro de la lectura. Explicaremos, con ejemplos, la matemática de las civilizaciones estudiadas en una serie de notas. La idea es no sólo presentar una historia verbal de la matemática sino mostrar cómo enfrentó el hombre el conocimiento matemático en distintas épocas. Si la notas provienen de los autores de la lectura van a escribió el autor de la Guía Instruccional va ir precedida de los numerales aparecer numeradas de la manera siguiente: 1,2,....[a] si la nota la romanos I, II, Estas notas son importantes ya que nos ponen en contacto con la matemática de cada civilización, sus ideas y limitaciones.

8. **Actividades y ejercicios matemáticos:** proponemos al estudiante ejercicios y actividades donde, usando las técnicas matemáticas del pasado, el estudiante UNA resuelva un problema determinado.

9. **Autoevaluación:** serie de preguntas matemáticas, de selección simple, etc. para comprobar cuánto hemos aprendido.

Como ya Ud. sabe la evaluación sumativa del curso consiste en dos tareas: la elaboración de una línea de tiempo del desarrollo de la matemática y un trabajo de investigación sobre un tema específico. Sabemos que Ud. es un estudiante comprometido con el conocimiento, si no fuese así no estudiaría matemática. *Luego estamos seguros que Ud. trabajará completamente los ejercicios, actividades y pruebas de autoevaluación propuestas. Considero todo esto como parte de su preparación y de la evaluación formativa, ¡no los omita!.* Recuerde que su asesor y el autor de este material estamos dispuestos a ayudarle en cualquier problema que surja en su estudio.

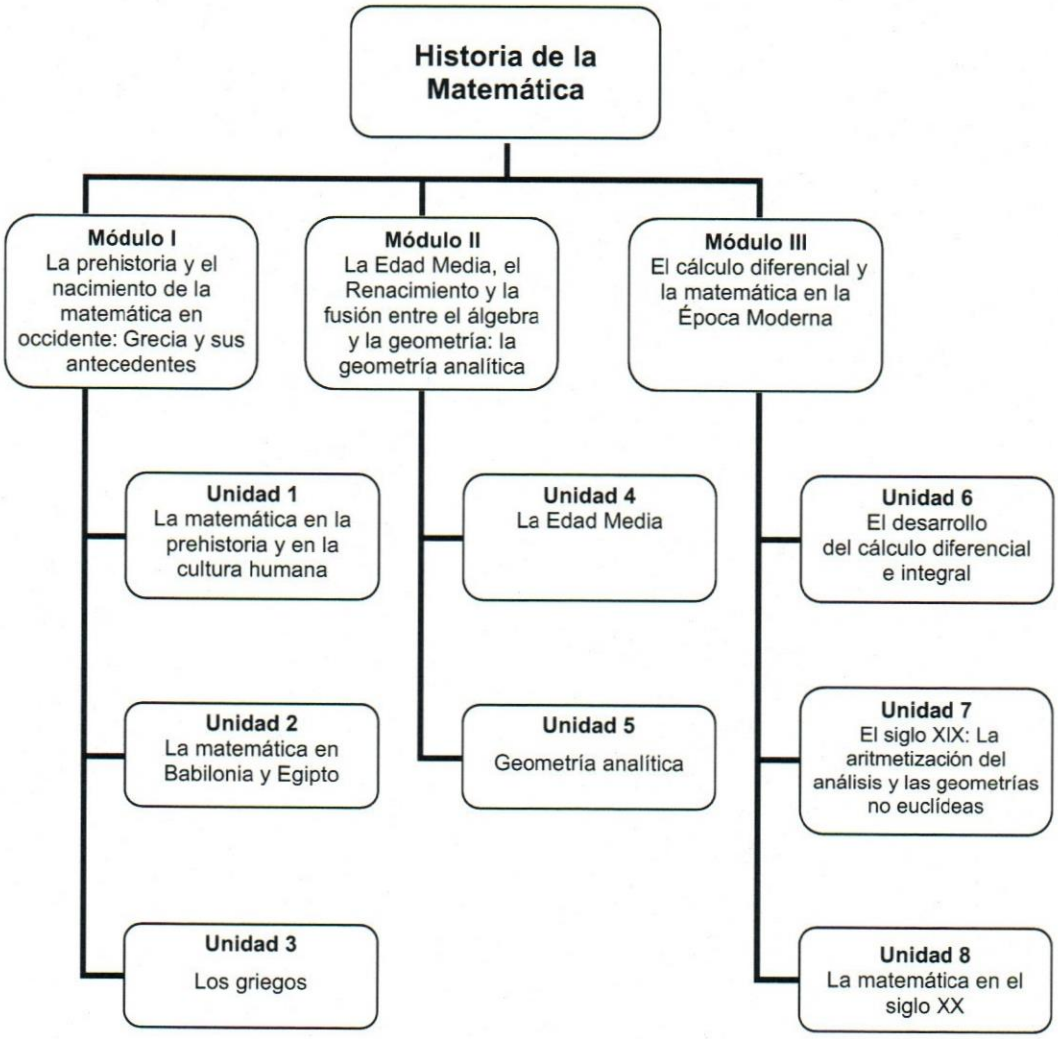
Prof. José Ramón Gascón Márquez
Universidad Nacional Abierta

[a] En muchos casos hemos modificado las notas originales de los autores pero hemos mantenido el espíritu de la misma

OBJETIVO DEL CURSO

Esbozar, de manera pertinente, la evolución de las ideas matemáticas a través de la historia.

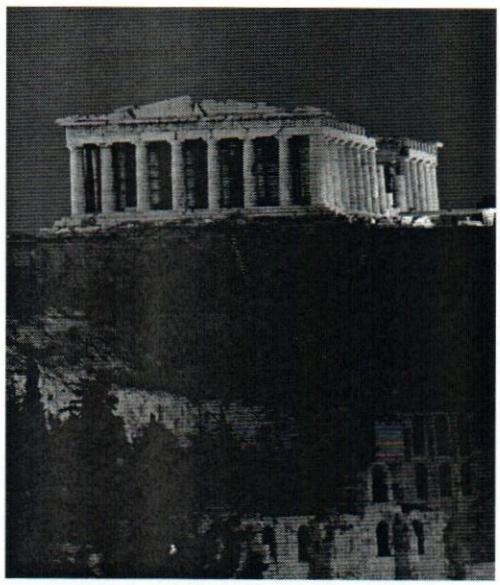
ESTRUCTURA DEL CURSO



MÓDULO I

La prehistoria y el nacimiento de la matemática en occidente: Grecia y sus antecedentes (Babilonia y Egipto)

Babilonia



ESTRUCTURA DEL MÓDULO I

Módulo I

La prehistoria y el nacimiento de la matemática en occidente (Grecia) y sus antecedentes (Babilonia y Egipto)

Objetivo del Módulo I

Describir, de manera pertinente, las principales ideas matemáticas en Grecia y las civilizaciones babilónica y egipcia.

Contenido del módulo

I.1 La matemática en la prehistoria y en la cultura humana:

- La matemática como una actividad fundamental de la cultura y su aparición en la prehistoria.

I.2 La matemática en Babilonia y Egipto:

- Álgebra y Aritmética en Babilonia: las grandes colecciones de tabletas de arcilla. Problemas matemáticos abordados por los babilonios.
- Geometría en Babilonia. El teorema de Pitágoras. Posible influencia de Babilonia en Grecia.
- Egipto: tierra de geómetras.
- Aritmética y fracciones en Egipto.

I.3 Grecia: Un gran salto en el desarrollo de la matemática:

- Tales de Mileto.
- Los pitagóricos. Los eleatas.
- Platón y Aristóteles, su visión de la matemática.
- Matemática en el período helenístico: Euclides. El más grande matemático de la antigüedad: Arquímedes. La obra de Apolonio.
- Análisis del período griego y su aporte.

Unidad 1

La matemática en la prehistoria y en la cultura humana

Objetivo Unidad 1

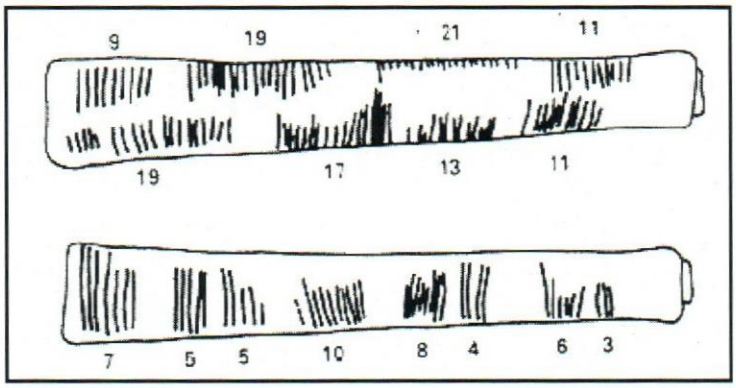
Describir el papel de la matemática como un elemento básico en la cultura.

Tiempo estimado de estudio

1 semana

INTRODUCCIÓN

La matemática aparece como un elemento presente en cada cultura y civilización. Indicios de uso de la matemática aparecen en huesos con muescas del paleolítico.



En el mundo actual no podríamos realizar compras electrónicas, hacernos una resonancia magnética, o ver la televisión de no existir una matemática apropiada. Luego surgen de manera natural las siguientes preguntas: ¿Por qué es tan importante la matemática? y ¿cuándo el hombre empezó a usarla? Esto lo analizan de manera magistral Luis Santaló y Rey Pastor y Babini en sus lecturas *¿Qué es la matemática?* y *la matemática en la Prehistoria* respectivamente.

Parece natural comenzar preguntándonos sobre la ciencia matemática si vamos a trazar su historia. En este sentido hemos incluido la lectura de Santaló. Observe la importancia del proceso dialéctico que es inherente a la matemática: es abstracta pero surge de lo concreto. En esta lectura se hace también un rápido recorrido por la historia de la matemática y sus hitos más importantes.

Por otro lado, saber cuándo el hombre empezó a utilizar la matemática es crucial para entender su vinculación con el resto de las actividades humanas. Es muy importante entender que la matemática es una actividad humana como lo son la pintura o la música. Sin embargo, las características y posible uso de la matemática son difíciles de determinar en el período inicial del desarrollo del hombre al no disponer de información escrita de lo que conocemos como prehistoria. Es muy interesante la hipótesis que asoman Rey Pastor y Babini en su lectura de que la escritura fuera posterior al uso de alguna notación matemática. También describen el papel de la matemática en culturas donde

se halla asociada fuertemente a lo real y a las necesidades más básicas del hombre.

Una vez terminado el estudio de está unidad empezaremos a estudiar civilizaciones que dejaron un testimonio escrito, arquitectónico y tecnológico de su desarrollo matemático.

Plan de instrucción Objetivo 1

1. Reflexione, con base en lo que ya conoce de matemática, su importancia en nuestro país, en el mundo actual y en la mayoría de las culturas. ¿Puede concebir un mundo sin matemática? ¿Qué limitaciones tendría la tecnología en él?

2. Lea las lecturas 1 y 2 de la selección de lecturas.

3. ¿Qué significa la palabra dialéctica? ¿Qué relación guarda la dialéctica con la riqueza de la matemática?

4. En la página del moodle del curso encontrará otra lectura de Courant y Robbins de su famoso libro *Qué es la Matemática*, bájela y léala cuidadosamente.

5. ¿Cuál es la hipótesis que asoman Rey Pastor y Babini en la lectura 2 sobre la posible invención de la escritura?

6. ¿Cuáles son las condiciones para que aparezca el conocimiento matemático en una determinada cultura?

7. Intervenga en el Foro cuando halla completado sus lecturas y discuta con su asesor y compañeros el tópico propuesto.

8. *Empiece la línea del tiempo resumiendo lo que sabemos de la matemática en la prehistoria.*

Tarea fundamental del curso

Como ya vio en el último punto del Plan de Instrucción y como ya conoce de la **evaluación sumativa** en el Plan de curso la gran actividad a realizar en el curso es **construir una línea de tiempo de la matemática**, luego vamos a detenernos a explicar su concepto.

La construcción de la línea histórica de la matemática

Esta actividad la va a realizar el estudiante con la ayuda de sus asesores dentro del semestre. Una línea de la historia de la matemática consiste en un gran organizador, mapa y resumen de lo que el estudiante ha aprendido. No proponemos una única forma de hacerla pero puede organizarla, por ejemplo, como la tabla que mostramos abajo.

Período: 800 A.C->300 A.C	→	→				
La matemática en Babilonia						
Grandes matemáticos: No conocemos los nombres						
Hitos matemáticos: • Resolución de ecuaciones de grado 2 y 3 • Manejo de las ternas pitagóricas, etc. • Aproximación de Pi						
Situación política: Al principio los sumerios tenían un						

Las flechas indican, como es natural, el avance del tiempo aunque a veces se puede dar coexistencia temporal de distintas civilizaciones y su aporte matemático. El grado de detalle de la línea y la forma de organizarla depende del estudiante. El esquema de arriba es sólo una posibilidad, esperamos que cada estudiante use su creatividad y esfuerzo en lograr líneas atractivas e informativas. Por ejemplo, puede agregar en otro cuadro la ubicación Geográfica de la cultura en cuestión, qué civilizaciones existían en ese momento y estaban en las proximidades de la cultura estudiada, otros aportes de esa

civilización fuera del área de la matemática, etc. También puede usar elementos gráficos, montar la línea en Power Point, pdf, u otros formatos. Esta línea la vamos a empezar a realizar en esta unidad señalando lo que conocemos del uso de la matemática (o suponemos) en la prehistoria. Cada centro local y sus asesores escogerán la mejor línea realizada y al final un jurado nacional escogerá las tres mejores líneas elaboradas en el lapso. Las ganadoras serán publicadas en la página moodle del curso.

Un bonito ejemplo de lo que se puede realizar lo va encontrar en http://www2.nvnet.org/nvhs/dept/math/mathproject/Index_files/frame.htm#slide0066.htm

Rincón del asesor

Discuta con su asesor y compañeros el siguiente punto: ¿Es concebible una matemática sin la idea de demostración? Como ya Ud. conoce de sus cursos Matemática I, II (178 y 179), Geometría (754), etc. una demostración es fundamental para aceptar un resultado matemático como verdadero. Sin embargo, las demostraciones empiezan con los griegos y no aparecen en el conocimiento matemático de algunas culturas. Algunos autores como Eric Temple Bell dudan de que podamos hablar del número π sin haber demostrado que el cociente entre el perímetro y el diámetro de un círculo es constante. Luego señala que es absurdo que se hable de aproximaciones de π entre los babilonios y los egipcios ya que duda que comprendan que el número π nos da la proporcionalidad señalada. Incluso la Biblia señala la aproximación de $\pi \approx 3$[b]. ¿Qué opina Ud. de esto?

Autor de la lectura 2

Luis Santaló (1911-2001)
Matemático español de origen catalán. Discípulo del gran Blaschke, es, junto a él, uno de los creadores de la Geometría Integral. Fue, según el testimonio de sus alumnos, un extraordinario profesor. Su labor docente la desarrolló principalmente en Argentina, donde junto a Rey Pastor es uno de los fundadores de la importante escuela argentina de matemáticas. Debemos señalar la influencia de esta escuela en el continente sudamericano en general y en Venezuela en particular.

[b] Lo que demuestra que Dios no es muy buen matemático

Autoevaluación

Trate de responder con la alternativa que considere más próxima a la respuesta de la pregunta:

1- Las dos caras que caracterizan y enriquecen la matemática son:
   a) Abstracta y concreta
   b) Aplicable y exacta
   c) Ordenada y meticulosa
   d) Antigua y hermosa

2- De acuerdo con Santaló en la lectura 1, el matemático que inicia la "matemática moderna" es:
   a) Euclides con *Los elementos*
   b) Cantor y la teoría de conjuntos
   c) Arquímedes y su *método*
   d) Von Neumann y su trabajo sobre los operadores

3- ¿A qué se refieren Rey Pastor y Babini cuando hablan de las "cuentas del templo"?
   a) Largos rosarios hechos con cuentas usados como un ábaco
   b) Especie de leyendas que usaban los sacerdotes con fines diversos
   c) Marcas que aparecían en las paredes del templo sin explicación alguna
   d) Posible relación entre la creación de la escritura y registros matemáticos

4- De acuerdo con Rey Pastor y Babini, los sistemas de numeración y conteo verbales aparecen en:
   a) Las civilizaciones más avanzadas
   b) Todos los pueblos sin excepción
   c) Las tribus indígenas
   d) La costa occidental del Mediterráneo

5- Nuestra palabra "cálculo" proviene del latín:
   a) *Calculus* que es una técnica de derivación
   b) *Calculare* que significa contar
   c) *Calculi* que significa guijarros
   b) *Calculere* persona que llevaba las cuentas en las cortes

6- De acuerdo a Santaló en los *Elementos* de Euclides encontramos principalmente:
   a) La obra matemática más antigua conocida
   b) Sistematización y el método axiomático

c) Los distintos elementos que componen la matemática: álgebra y geometría
d) Un catálogo de las cosas conocidas por los griegos

Solución a la autoevaluación

1- a) La matemática nace de la contraposición entre lo abstracto y lo concreto, de allí su riqueza y flexibilidad.

2- b) La "matemática moderna" (las comillas son clave) es la corriente que deriva del trabajo de Cantor, Hilbert y otros. Tuvo gran influencia en el desarrollo y enseñanza de la matemática en el siglo XX. Si el estudiante respondió con la opción a) se puede aceptar su respuesta.

3- d) Las cuentas del templo eran los registros que practicaron los sacerdotes en Mesopotamia alrededor del cuarto milenio A.C. y de la cual deriva, según esta hipótesis, la escritura.

4- b) El conteo verbal y el uso de fracciones simples es una característica del hombre. La matemática, como la música y la literatura es profundamente humana.

5- c) Calculi (guijarros) es el origen de la palabra cálculo.

6- b) Los *Elementos* son la primera sistematización de la matemática conocida (avanzada) usando como medio de exposición de la lógica aristotélica.

Unidad 2

La matemática en Babilonia y Egipto

Objetivo Unidad 2

Describir el conocimiento matemático en las civilizaciones babilónica y egipcia.

Tiempo estimado de estudio

2 semanas

INTRODUCCIÓN

La matemática griega tiene dos antecedentes importantes desde el punto de vista histórico: Babilonia y Egipto. En ambas culturas una matemática se desarrolló impulsada por problemas de origen práctico. Recordamos, por ejemplo, que la geometría en Egipto se desarrolla asociado al problema de medir el área de regiones aledañas al río Nilo que se inundaban cada año. Esto obligaba a realizar cuidadosas mediciones para asignar los lotes de terreno a los encargados de cultivarlos.

El carácter no deductivo de la matemática de estas civilizaciones difiere del gran logro de la matemática griega: el método axiomático. Quizás no existía un interés intelectual en la matemática pre-griega y sólo reconocían su utilidad en la solución de problemas comerciales, agrícolas, etc. Por otro lado, fueron capaces de resolver interesantes problemas y crear novedosos métodos numéricos como el de la falsa posición. La matemática de estas culturas probablemente influyó en el desarrollo de la matemática griega. Se cree que Thales (también es correcto Tales) de Mileto, que inició la matemática griega y es uno de los siete sabios de la antigüedad, viajó a Egipto buscando el saber de esta cultura.

A los babilonios les debemos grandes progresos en la historia del hombre: la escritura, la creación de códigos legales y comerciales e importantes desarrollos matemáticos. Ocuparon una región fértil, región que además era crucial para la comunicación comercial. Desarrollaron una arquitectura muy rica y una tecnología importante. La matemática era importante para estas actividades y para su intensa actividad comercial. El álgebra puede considerarse en su origen como babilónica: resolvieron la ecuación de segundo grado de manera completa y en algunos casos particulares la de tercer grado. Conocían el teorema de Pitágoras y manejaron las ternas pitagóricas. Poseían un sistema de numeración en base 60 y manejaban el uso de fracciones. Como veremos su matemática era muy interesante.

Los egipcios debían tener, dado su alto grado de desarrollo comercial, arquitectónico e ingenieril, una matemática adecuada para los problemas que se les presentaban en estas áreas. Sin embargo, a diferencia de los babilonios conservamos poco de la matemática egipcia ya que escribieron sus resultados en papiro. En la lectura el estudiante conocerá que los babilonios registraron la mayor parte de su conocimiento en tabletas de arcilla que se preservaron muy bien con el tiempo. Luego es difícil conocer el grado de desarrollo matemático que alcanzaron. Sin embargo el haber obtenido la fórmula del volumen de la pirámide truncada es un logro notable. Sin duda, por lo que conocemos, manejaban la trigonometría y el teorema de Pitágoras. El manejo de las fracciones

es realmente ingenioso y difícil. En las notas matemáticas ahondaremos en la matemática de estas dos civilizaciones.

Plan de instrucción Objetivo 2

1. ¿Qué conoce Ud. de Babilonia? Investigue sobre Babilonia, su situación geográfica y su importancia histórica. ¿Qué país muy conocido se encuentra en el territorio que ocupaba Babilonia?

2. Lea la lectura 3 sobre la matemática en Babilonia.

3. ¿Qué área desarrollaron más los babilonios? ¿El álgebra o la geometría? Base su análisis en la lectura. ¿Conocían el teorema de Pitágoras los babilonios? ¿Qué es una terna pitagórica?

4. Resuma la información relevante de la lectura de Babilonia y su matemática. Añada los resultados encontrados a la línea histórica que está desarrollando.

5. Realice las actividades adicionales que sugerimos más adelante y lea cuidadosamente las notas matemáticas de la lectura 3 sobre la matemática en Babilonia.

6. ¿Qué conoce Ud. de Egipto? Investigue sobre los egipcios, creencias religiosas, sistema político su situación geográfica y su importancia histórica. Ubique en un mapa actual la región que corresponde al antiguo Egipto.

7. Lea la lectura 4 sobre la matemática en Egipto.

8. ¿Cómo se comparan los logros alcanzados por los egipcios en relación a la matemática de los babilonios?

9. Recuerde que el nacimiento de la geometría, como ya la debió ver en el curso Geometría 754, está vinculado a las periódicas inundaciones del Nilo. Investigue sobre Herodoto y su descripción de estos hechos.

10. Lea cuidadosamente las notas matemáticas de la lectura 4.

11. Vaya al foro a discutir con sus compañeros y asesores los temas propuestos sobre la matemática de Babilonia y Egipto.

12. Resuma la información relevante de la lectura sobre la matemática en Egipto. Añada los resultados encontrados a la línea histórica que está desarrollando.

13. Realice los ejercicios y actividades matemáticas propuestas.

14. Realice los ejercicios de autoevaluación.

Rincón del asesor

La matemática se desarrolló en las civilizaciones egipcia y babilónica debido, en mi opinión, a la gran cantidad de problemas técnicos y comerciales que debieron resolver. ¿Es el desarrollo matemático siempre paralelo al desarrollo técnico de una cultura? ¿Qué cree Ud.?

A continuación ahondamos en algunas ideas matemáticas de los babilonios mediante unas notas complementarias. Las que tienen un numero arábigo son modificaciones, realizada por el Prof. Gascón, de las originales de la lectura. Las que aparecen con un número romano fueron escritas por el autor del texto citado.

Notas matemáticas complementarias de la lectura 3[c].

(1) El calculista se enfrenta al problema de hallar la dimensión de dos terrenos que tienen distintos coeficientes de productividad 2/3 y 1/2 y además conoce la suma de las áreas de los terrenos (1800) y la diferencia de producción (500) esto conduce de manera elemental para nosotros al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y=1800 \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y=500 \end{cases}$$

La solución usa el método de la falsa posición (en realidad introduce una ecuación auxiliar), supone el calculista que los dos terrenos son iguales y por ende cada uno mide 900 (¿por qué?). En ese caso cometemos un error de 350 en la diferencia de producción, ya que $\frac{2}{3}900-\frac{1}{2}900=150$. Para compensar esto el calculista observa que el error es $\frac{7}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$ del valor que sumado y restado al dato inicial erróneo dan las extensiones correctas. Obtiene entonces que este valor es 300, midiendo un terreno 1200 y el otro 600. Observe que el procedimiento es el mismo que hubiésemos usado nosotros si suponemos que $x=900+z, y=900-z$ introduciendo este cambio en la segunda ecuación.

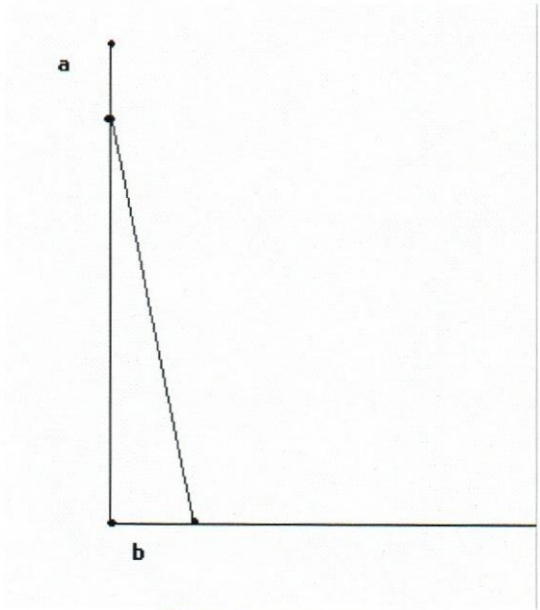
(2) El método de resolución de las ecuaciones de segundo grado es similar al nuestro. Consideremos el problema de resolver el sistema $\begin{cases} xy+x-y=183 \\ x+y=27 \end{cases}$. Este sistema proviene de un problema artificial de medición agrícola, que como señalan Rey Pastor y Babini tiene como objeto introducir el método de solución. Sumamos, siguiendo al calculista, las dos ecuaciones obteniendo $x(y+2)=210$ y sumamos 2 a la segunda $x+y+2=29$. Observe que hemos transformado el problema en hallar 2 números de los cuales se conoce su suma y su producto. Esto es similar a encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado, ¿por qué? El calculista procede a calcular la conocida resolverte. Toma la mitad de 29 es decir 14 +1/2 de cuyo cuadrado resta 210, obteniendo ¼ del cual toma la raíz cuadrada, la cual es ½. El cual suma y resta a 14 ½ obteniendo 15 y 14, luego la solución del problema es 15 y 12.

---

[c] Las notas 1,2,...corresponden a las llamadas que aparecen en la lectura y son modificaciones de las notas originales de Rey Pastor y Babini. Las notas I, II,... son elaboradas por el autor de la Guía para ahondar en la matemáticas de estas culturas.

(3) Duplicación de un capital a una determinada tasa de interés compuesto, en el caso de la tableta estudiada el interés es del 20%. Esto conduce a la ecuación exponencial $(1{,}2)^t = 2$, y el calculista observa que la solución está entre 3 y 4, y aplica el método de la falsa posición para dar la siguiente aproximación de la solución : $\dfrac{(1{,}2^4 - 1{,}2)}{1{,}2^4 - 1{,}2^3}$.

(4) El teorema de Pitágoras es usado para determinar por ejemplo el problema de la caña. Una caña está apoyada de una pared que tiene su misma altura. De pronto la caña se desliza y conocemos la separación b de la pared y la distancia a su tope. Si llamamos h a la altura de la caña (y de la pared) vemos que $d^2 + b^2 = h^2$ y $a + d = h$. De donde $(h-a)^2 + b^2 = h^2$, desarrollamos y obtenemos $h^2 + a^2 - 2ha + b^2 = h^2$ y finalmente $h = \dfrac{a^2 + b^2}{2a}$. En la tableta se tienen los valores a=3 y b=9 de donde h=15



Problema de la caña

(5) Para generar las ternas Pitagóricas observa la identidad algebraica $(n^2-1)^2 + (2n)^2 = (n^2+1)^2$ que genera infinitas ternas para distintos valores de n. Una terna pitagórica *x,y,z* son tres enteros que satisfacen la ecuación de Pitágoras $x^2 + y^2 = z^2$. Por la identidad anterior basta tomar

$x = n^2 - 1, y = 2n, z = n^2 + 1$. Por ejemplo para n=2 obtenemos la solución muy conocida 3, 4 y 5.

I. Los babilonios construyeron extensas tablas de cuadrados y cubos de los números naturales y las usaban de manera muy ingeniosa. Por ejemplo para multiplicar dos números consultaban las tablas de cuadrados usando la identidad algebraica $ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$

II. Dichas tablas también eran usadas para resolver ciertas ecuaciones cúbicas de la forma $ax^3 + bx^2 = c$. Veamos cómo lo hacían. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por $\frac{a^2}{b^3}$ obteniendo la ecuación $\frac{a^3}{b^3}x^3 + \frac{a^2}{b^2}x^2 = \frac{a^2c}{b^3}$. Hacemos ahora $z = \frac{a}{b}x$ convirtiendo la ecuación en $z^3 + z^2 = d = \frac{a^2c}{b^3}$. El calculista buscaba en la tabla un número *z* cuyo cubo sumado con su cuadrado diese *d* y a partir de *z* hallaban *x*. ¡Muy ingenioso de verdad!

III. Aritmética Babilónica. Como ya señalamos el sistema de numeración babilónico es posicional con ausencia de un símbolo para el cero, lo que trae aparejado el problema de reconocer números con igual escritura. Expliquemos esto con cuidado. Si usamos un sistema sin 0 después del 59 debemos escribir de nuevo el 1 aunque nosotros escribimos 10 o 1.0 (para no confundir las cosas). Es decir en numeración babilónica el 99 se debe escribir 1.39=1x60+39. Así el número 12.00.00 corresponde a nuestro 12×60^2. Usualmente el calculista sabía cuál es el número por el contexto del problema o introduciendo símbolos auxiliares.

13

63

IV. Para la división tenían tablas de recíprocos. Por ejemplo $\frac{1}{16} = \frac{3}{60} + \frac{45}{3600}$.

Luego si queremos dividir $\frac{87}{16}$ escribimos 87=1.27 y 1/16 = 0,3.45 de donde

1.27,00x0,3.45=1.00,00x03+27,00x0,3+1.00,00x0,00.45+27.00x0,00.45= 3+1.21+0,45+0,20.15=5,26.15

V. Vamos a explicar el método que usaban los calculistas babilonios para extraer la raíz cuadrada. Ellos usaban la primera versión del método de la falsa posición. Calculemos la raíz cuadrada de 28. Sabían que estaba entre 5 y 6, si fuese 5 entonces debemos tener

$$\frac{28}{5} = 5$$

Pero

$$\frac{28}{5} = 5,6$$

Pero 5x5,6=28, luego la raíz debe estar entre 5 y 5,6 y tomamos su promedio, es decir 5,3

$$\frac{28}{5,3} = 5.283018867924528301$$

Luego, 28=5,3x5.283018867924528301

Recursivamente tomamos ahora el promedio entre 5,3

y 5.28301886792452830188679245283019, es decir

5.29150943396226415094339622641509.

Esto ya es una excelente aproximación.

La tableta de Yale YBC 7289

En ella los babilonios calculan la aproximación de

$$\sqrt{2} = 1+24/60+51/60^2+10/60^3=1,41421963$$

para expresar el valor aproximado de la diagonal de un triángulo isósceles de lado 30. El valor exacto es (hasta donde nos lo da la calculadora) 1.4142135623730950488016887242097. Lo que demuestra que la aproximación de los antiguos es notable.

Notas matemáticas complementarias de la lectura 4

(1) Aritmética Básica de los egipcios

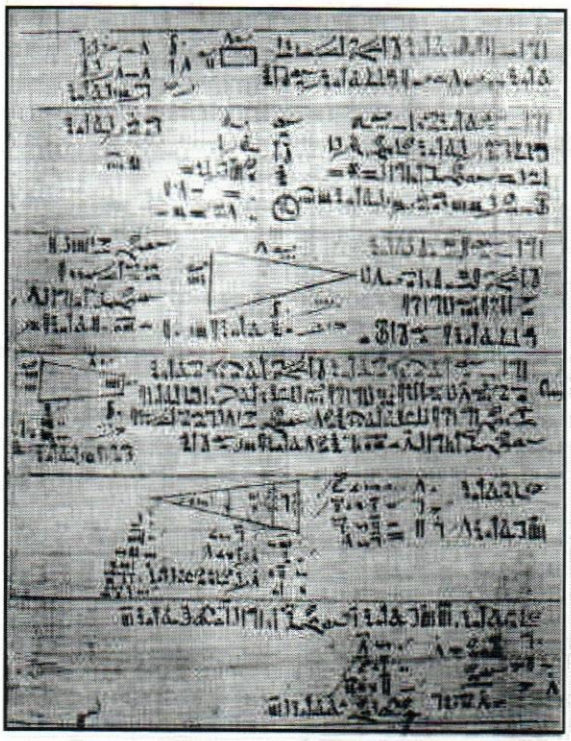
Para multiplicar los egipcios utilizaban un curioso e ingenioso método de duplicación. Supongamos que debemos multiplicar 23x15. Escribimos en dos columnas

23	1
46	2
92	4
184	8

La primera columna se obtiene de duplicar, sucesivamente, 23. La otra de la duplicación seguida de la unidad. Observe que la suma 1+2+4+8=15, luego basta sumar 23+46+92+184=345. Similarmente para la división usaban el mismo procedimiento. Supongamos que debemos dividir 19 entre 8

18	2
8	1
	$\frac{1}{2}$
4	
2	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{8}$
1	

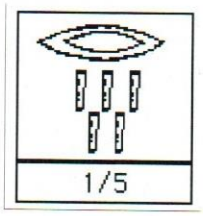
Observe que 16+2+1=19, luego $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ es el resultado.



Fragmento del papiro de Moscú, uno de los pocos documentos que tenemos de la matemática en Egipto

(2) La representación numérica y fracciones unitarias

En primer lugar señalamos que los matemáticos egipcios usaban un sistema no posicional con base 10 y que sólo usaban fracciones de la forma $\frac{1}{n}$ (salvo la fracción $\frac{2}{3}$). En el dibujo que sigue vemos cómo expresaban la fracción $\frac{1}{5}$.



Cualquier fracción se denotaba usando primero el símbolo

pronunciado ro y debajo de él escribían el denominador.

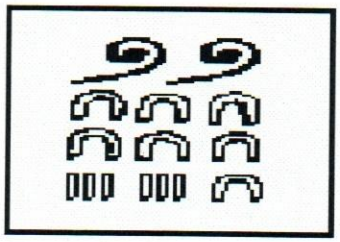
Para los números enteros usaban los siguientes símbolos:

Representa el número 100

Representa el 10.

Representa el 1.

Así el numero 276 se escribe como



No debe sorprendernos el uso de fracciones con numerador 1 ya que, usualmente, se introducen los números fraccionarios para dividir una unidad en partes iguales. Dichas fracciones se denominan unitarias Lo que es altamente no trivial son algunas de las descomposiciones que obtienen para las fracciones con numerador distinto de 1. Por ejemplo, el escriba Ahmes determina

$$\frac{7}{29}=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}$$

No queda claro qué tipo de algoritmos usaban para realizar estas descomposiciones, se conoce que para ello usaban tablas de las fracciones de

la forma $\frac{2}{n}$ expresadas como suma de fracciones unitarias. Algunos autores como Morris Kline[d] piensan que tal complicado sistema de fracciones tuvo como consecuencia frenar el avance de la matemática en Egipcio.

(3) Álgebra

Resolvieron ecuaciones de primer grado con un procedimiento similar al de los babilonios usando el método de la falsa posición.

Actividades y ejercicios matemáticos

1. Demuestre la identidad empleada usada por los babilonios para realizar multiplicaciones usando las tablas de cuadrados:

$$ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$$

2. Escriba los números 19,68,120,360 y 1001 usando la notación egipcia y la babilónica.

3. Hallar la raíz de 138, hasta la cuarta cifra decimal, empleando el método de los antiguos babilonios, para hallar una aproximación.

4. Resolver, con el método de los babilonios la ecuación de tercer grado:

$$2x^3 + 3x^2 = 75\frac{27}{2}$$

5. Justifique la tabla como un procedimiento para efectuar la división

18	2
8	1
4	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$

[d] *Mathematical Thought: From the ancient to the modern times*, Vol I. Oxford University Press.1972

6. Verifique cuidadosamente la tabla siguiente de fracciones unitarias:

1/ 10	1/10
2/10	1/5
3/10	1/5 + 1/10
4/10	1/3 + 1/5
5/10	1/2
6/10	1/2 + 1/10
7/10	2/3 + 1/30
8/10	2/3 + 1/10 + 1/30
9/10	2/3 + 1/5 + 1/30

7. Use la tabla anterior para descomponer en fracciones unitarias 6/15.

8. Trate de construir algún método para descomponer una fracción en suma de fracciones unitarias.

9. El método de multiplicación egipcio funciona sí y sólo si podemos probar que cualquier natural es suma de potencias de 2. Justifique esto.

Preguntas

Instrucciones: Responda cada pregunta con la alternativa que, en su opinión, se aproxime más a la respuesta correcta.

1- El concepto de demostración en matemática fue propio de la cultura:
a) babilónica
b) egipcia
c) griega
d) renacentista

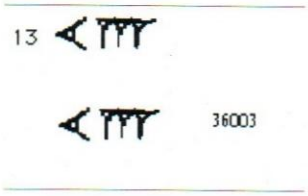
2- La principal fuente de conocimiento de las matemáticas egipcias es:
a) La piedra Roseta
b) Los papiros Rhind y de Moscú

c) Las colecciones de tabletas de arcilla de Yale
d) Los "Elementos de Euclides"

3- El escriba Ahmes es autor del:
a) papiro de Moscú
b) papiro Rhind
c) una importante colección de tabletas de arcilla
d) una importante colección de leyes

4- Usaron una numeración posicional con base en el número 60:
a) franceses después de la Revolución
b) egipcios
c) timotocuicas
d) babilonios

5- El siguiente diagrama muestra una dificultad que encontramos en la numeración:



a) egipcia
b) griega
c) babilonia
d) romana

6- El dibujo siguiente lo usaron

a) Matemáticos egipcios para la construcción de la base de las pirámides
b) Matemáticos babilonios para calcular el área de un hexágono
c) El escriba Ahmes para inscribir un hexágono en un cuadrado
d) Matemáticos egipcios para hallar un valor aproximado de Pi.[e]

[e] Esto es un adelanto al trabajo de Arquímedes con polígonos de un gran número de lados. La solución al problema requiere que el estudiante haga alguna investigación. Vea de todas maneras la última línea de la lectura 4 y la nota 4 del libro de Rey Pastor y Babini

Autores de la lectura 3 y 4

José Babini (1897-1984)
Matemático argentino cuyo principal tema de investigación fue la historia de la ciencia y la matemática. Egresó como profesor de matemática del Instituto del Profesorado Secundario y posteriormente se gradúa de ingeniero en la Universidad de Buenos Aires, aunque decide dedicarle su esfuerzo a la docencia y la matemática. Colaboró con el famoso historiador de la ciencia Aldo Mieli cuando éste llegó a Argentina. Se encargaron, junto a Rey Pastor, de darle un carácter de disciplina científica a la historia de la ciencia en Argentina. Su biblioteca de ciencia y matemática es el pilar del instituto que lleva su nombre y que dirige, actualmente, su hijo.

Julio Rey Pastor (1888-1962)
Matemático español aunque su labor fundamental la realiza en Argentina. Recibió su doctorado en Madrid en 1909. Escribió una gran cantidad de libros entre los que destaca el de Análisis Matemático (4 volúmenes) junto a Pi Calleja y Trejo. Pero su labor como organizador de la matemática en Argentina como disciplina de investigación es suficiente para recordarlo. Desde 1921 se establece en la Universidad de Buenos Aires. Fundó el Seminario Matemático Argentino en 1928. Tuvo discípulos relevantes en Argentina y en España. Dejó una huella notable en los campos de la educación matemática y la historia de la ciencia. En el año 1954 ingresó como miembro en la Real Academia Española de la Lengua.

Autoevaluación

El test consta de dos partes. La primera parte consiste en algunos ejercicios matemáticos relacionados con las técnicas usadas por los babilonios y egipcios. La segunda algunas preguntas muy sencillas de selección simple para verificar su conocimiento del material del curso.

Ejercicios

1. Demuestre la identidad $(n^2-1)^2+(2n)^2=(n^2+1)^2$
2. Obtenga con la identidad anterior 5 ternas de números pitagóricos.
3. Efectúe la multiplicación de los números 23 y 33 usando el método de duplicación egipcio. Efectúe la multiplicación 17x15 sabiendo que $32^2=1024$.
4. Efectúe la multiplicación 23x33 usando la técnica de los babilonios.
5. Descomponga la fracción 13/15 en fracciones unitarias.

Preguntas de selección simple

1- El siguiente dibujo corresponde a:

a) La fracción 1/5 para los egipcios
b) El dios Osiris
c) El número 15 para los babilonios
d) El dios Ahmon Ra (que representa el sol)

2- Manejaron las ternas pitagóricas, como 3, 4 y 5, desde el punto de vista aritmético:
a) Egipcios
b) Babilonios
c) Hebreos
d) Hititas

3- En relación al desarrollo matemático, tuvieron un desarrollo superior:
a) Los babilonios sobre los egipcios
b) Los egipcios sobre los babilonios
c) Eran aproximadamente iguales
d) La información disponible no permite alcanzar una conclusión

4- La fórmula que permite calcular el volumen de un tronco de pirámide aparece, por primera vez, en:
   a) la colección de tabletas de arcilla de Yale
   b) En la matemática griega
   c) En la matemática egipcia
   d) Los "Elementos" de Euclides

5- Resolvieron ecuaciones de segundo y tercer grado:
   a) Los hititas
   b) Los egipcios
   c) Los persas
   d) Los babilonios

Solución a la autoevaluación

Ejercicios

1. $(n^2-1)^2+(2n)^2=n^4-2n^2+1+4n^2=n^4+2n^2+1=(n^2+1)^2$

2. Si tomamos *n*=2 obtenemos la clásica terna 3, 4, 5. Para *n=3* obtenemos 8,6 y 10, ¡otra terna pitagórica! Dejamos al estudiante UNA que termine el cómputo.

3. De acuerdo a lo estudiado en la lectura y notas tenemos:

1	33
2	66
4	132
8	264
16	528

Como 1+2+4+16=23 luego el resultado debe ser 33+66+132+528=759. Dejamos el resto del problema al estudiante UNA.

4. Un babilonio hubiese hecho el ejercicio anterior de la manera siguiente $(33+23)^2=56^2$ y $(33-23)^2=10^2$ y $56^2=3136$ luego 3136-100=3036 y esto debe ser dividido entre 4 obteniendo, como ya sabemos, 759.

5. 1/6+1/5+1/2 es la descomposición buscada.

Preguntas de selección simple

1- a) Para ubicar la respuesta correcta ver las notas matemáticas.

2- b) Dejamos al estudiante UNA que termine el cómputo.

3- a) La matemática babilónica es muy rica y superior a la de los egipcios.

4- c) Eric Temple Bell llama a esta fórmula "la mayor pirámide egipcia".

5- d) Grandes algebristas fueron los babilonios.

INTRODUCIÓN

Los griegos, ¡los griegos! ¡¡los griegos!! Estamos lejos de ellos pero, sin embargo, estamos cerca. El desarrollo de la matemática nos abruma y sorprende: un solo tema y cientos de teoremas, problemas abiertos y aplicaciones. Pero el espíritu permanece cercano al pensamiento griego. Todavía demostramos, razonamos como Aristóteles nos enseñó y trabajamos lo geométrico: geometría diferencial, sistemas dinámicos, geometría algebraica, etc. La aritmética de Diofanto inspiró a Fermat y éste le pasó el testigo a Andrew Wiles. Los griegos constituyen un salto en el pensamiento, están muy lejos de los egipcios y babilonios. Son los maestros de todos nosotros.

La lectura de Hofmann es más académica y erudita que las anteriores, sin embargo, nos informa de manera completa del desarrollo de la matemática griega: desde Tales de Mileto a Arquímedes y Apolonio. Es importante señalar el principio del razonamiento lógico-deductivo en este período. Lea cuidadosamente sobre el comienzo del proceso de demostración, de acuerdo a Hofmann, con el trabajo de Hipócrates sobre la cuadratura de las lúnulas.

Veremos cómo los pitagóricos plantearon un esquema de comprensión del mundo basado en los números racionales: la *Arithmetica Universalis*. Lo pretendido por esta escuela queda destruido por el descubrimiento de los irracionales.

Luego Hofmann se pasea de manera muy completa por las figuras más importantes del pensamiento matemático griego: Euclides y Arquímedes. Los *Elementos (Stokheia)* de Euclides son una obra importantísima en la historia del hombre. Hofmann posteriormente examina el matemático más grande del mundo antiguo. El trabajo de Arquímedes destaca por su originalidad pudiéndose enlazar este trabajo con la matemática del barroco y el comienzo del cálculo integral.

Al final, Hofmann estudia al gran Apolonio y examina brevemente la decadencia de los griegos y el advenimiento de la matemática en Roma, lo que nos sirve de enlace para la lectura que sigue sobre la matemática en el medioevo.

Queda por supuesto la interrogante si la matemática de los egipcios y los babilonios influyó a estos grandes pensadores, de haberlo hecho no influyó en lo más importante del aporte griego: la concepción de la matemática como un producto puro del intelecto humano.

Plan de instrucción Objetivo 3

1. Repase lo que Ud. conoce de la geometría griega: el teorema de Tales y Pitágoras, etc. Estos contenidos los puede ver en Geometría 754.

2. Repase en el libro de Matemática I, Módulo IV el concepto de demostración matemática.

3. Ubique geográficamente el mundo griego, note que algunas regiones (como Sicilia) formaban parte del mundo griego aunque no corresponden a la Grecia actual.

4. Lea la lectura de Hofmann sobre la matemática en Grecia. Vea los otros recursos disponibles en la página Moodle del curso.

5. ¿Quién y en qué trabajo se empezó a usar el método deductivo? ¿A qué se refiere Hofmann con el fin de la Arithmetica Universalis?

6. ¿Cuál es la importancia de los *Elementos?*

7. Señale los aspectos más importantes en el trabajo de Arquímedes de acuerdo con la lectura.

8. Resuma la información conseguida en la lectura en la línea del tiempo que está construyendo.

9. El tema del Rincón del asesor es: ¿Quién cree que fue más importante para el desarrollo de la matemática: Euclides o Arquímedes? Participe en el foro con sus ideas.

10. Vaya a las notas matemáticas de la lectura. Lea cuidadosamente este material.

11. Realice las actividades y ejercicios matemáticos. Recuerde que ello es fundamental para su evaluación formativa.

12. Vea el video sobre el número Pi elaborado por **RTVE** en su serie ***Universo matemático***. Ésta disponible en el espacio web de este curso en Moodle.

13. ¡Ya Ud. está listo para la autoevaluación! Demuestre lo que Ud. conoce.

Rincón del asesor

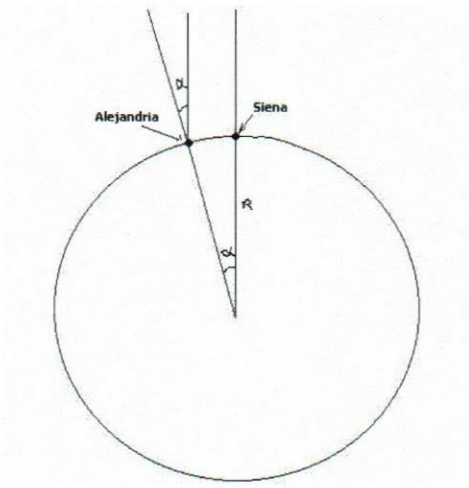
¿Quién es más importante para el desarrollo de la matemática? ¿El sistematizador Euclides o el genio Arquímedes? Se cree que mucho de lo que aparece en los Elementos de Euclides proviene del trabajo de otros matemáticos y que, de hecho, existieron otros libros llamados Elementos anteriores (hoy perdidos) al trabajo de Euclides. Sin embargo, nadie puede dudar de la grandeza del trabajo de Euclides y de la importancia e impacto del método por él usado.

Arquímedes es un genio solitario y en muchos casos incomprendido. Trabajó como trabajan los matemáticos actuales, investigando problemas y comunicando su solución de manera sucinta a otros matemáticos por medio de cartas. ¿Quién es más importante para el desarrollo de la ciencia matemática? ¿Qué opina Ud de este punto?

Notas matemáticas complementarias de la lectura de los griegos

I. Cálculo del radio de la Tierra

El sabio Eratóstenes[f] midió el radio de la Tierra con un procedimiento muy ingenioso que vamos a describir. Sus cálculos sobre la circunferencia terrestre se basaron en la observación que hizo en Cirene, su ciudad natal; a mediodía, en el solsticio de verano, los rayos del sol incidían perpendicularmente sobre la Tierra y, por tanto, no proyectaban ninguna sombra (Cirene estaba situada muy cerca del trópico de Cáncer). En Alejandría se percató de que, en la misma fecha y hora, las sombras tenían un ángulo de aproximadamente 7° con respecto a la vertical. Al conocer la distancia entre Cirene y Alejandría, pudo hallar a través de cálculos trigonométricos la distancia al Sol y la circunferencia de la Tierra.



Midió cuidadosamente (¡usando un promedio de varias mediciones!) la distancia entre las ciudades de Cirene y Alejandría. Encontró que la distancia era de 5000 estadios. El ángulo que midió en Alejandría fue de 7 grados y 12 minutos (observe que las mediciones angulares se basan en el sistema de numeración babilónico de base 60). Luego la medición del ángulo α del dibujo es de 7,2° pero 360=50x7,2 , de esta forma, para encontrar el radio de la Tierra basta multiplicar 50x5000 estadios, luego el radio es de 250000 estadios. No

[f] Eratóstenes (c. 284-c. 192 a.C.), matemático, astrónomo, geógrafo, filósofo y poeta griego. Nació en Cirene (en la actualidad Shahhat, Libia). Entre sus maestros se encontraba el poeta griego Calímaco de Cirene. Hacia el 240 A.C., Eratóstenes llegó a ser el director de la Biblioteca de Alejandría. Eratóstenes también midió la oblicuidad de la eclíptica (la inclinación del eje terrestre) con un error de sólo 7' de arco, y creó un catálogo (actualmente perdido) de 675 estrellas fijas. Su obra más importante fue un tratado de geografía general. Tras quedarse ciego, murió en Alejandría por inanición voluntaria. Referencia: Enciclopedia Encarta 2004 © 1993-2003 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

conocemos el equivalente exacto entre metros y estadios, pero los estudiosos estiman que 1 estadio equivale a 150 metros, luego el radio de la Tierra es, según Eratóstenes,

$$R=37500 \text{ Km}$$

Este valor difiere en unos 2.500 Km del valor real.

II. La matemática de Thales de Mileto

No está claro qué descubrió o conoció Thales, sin embargo los siguientes teoremas se le atribuyen:

1. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales. El estudiante UNA demostró este teorema en el curso Geometría 754, la demostración es conocida como el "puente del asno".

2. Un círculo es bisecado por cualquier diámetro.

3. Los ángulos entre dos líneas rectas que se cortan son iguales (opuestos por el vértice).

4. Dos triángulos son congruentes si ellos tienen dos ángulos y un lado igual.

5. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

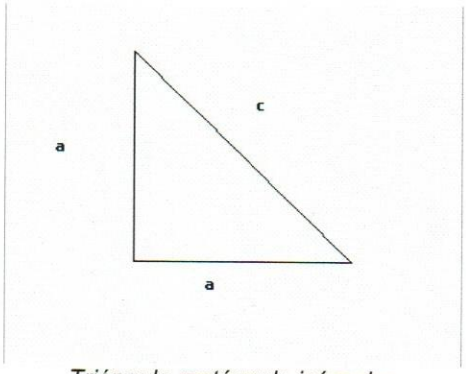
Thales de Mileto
Nació alrededor del año 640 AC en Mileto, Asia Menor (ahora Turquía) Falleció: alrededor 560 AC en Mileto. Astrónomo, comerciante y matemático. Se le considera uno de los siete sabios del mundo antiguo. Se cree que es uno de los primeros matemáticos que demuestra algunas proposiciones Geom.-tricas elementales. Se dice que logró predecir y explicar los eclipses de sol y de luna. Pensaba que el año tenía 365 días. No dejó obra escrita conocida y lo que conocemos de él se infiere de fuentes secundarias.

También se le atribuye el cálculo de la altura de la pirámide de Keops mediante la aplicación del teorema que todavía lleva su nombre. La leyenda cuenta que al ser retado por unos sacerdotes para realizar el cálculo, clavó su bastón en la arena y señaló la equivalente proporción entre el tamaño del bastón y su sombra y la altura de la pirámide y su sombra. Esta historia quizás sea un mito pero uno muy hermoso. Es dudoso que Thales haya descubierto o

demostrado el teorema que lleva su nombre, cumpliéndose la frase del matemático alemán Félix Klein, quien afirmó que el nombre de un teorema nunca coincide con el de su verdadero descubridor. Lo que conocemos de la vida de Thales ronda la leyenda.

III. El descubrimiento de los irracionales

El fin de la Arithmética Universalis de los pitagóricos, tal como lo señala Hofmann en la lectura, sobrevino con el descubrimiento de los irracionales. Para esta escuela, el universo tenía un lenguaje: los números naturales y sus razones que conocemos como fracciones. Pero en algún momento (no sabemos cuándo ni quién) descubrieron que la diagonal de un cuadrado de lado 1 no se puede expresar como un cociente.



Triángulo rectángulo isósceles

En el dibujo anterior, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos $c=\sqrt{2}a$, en particular $c=\sqrt{2}$ si a=1. Vamos a utilizar el argumento de Aristóteles, de contraposición entre par e impar, para demostrar la irracionalidad de $c=\sqrt{2}$. La prueba la realizaremos por reducción al absurdo (repase en su libro de Geometría o en el de Matemática I lo fundamental de este método de demostración).

Teorema: $\sqrt{2}$ es irracional

Demostración: Supongamos que $c=\sqrt{2}$ es racional, es decir existen números naturales p y q tales que:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

Simplificando al máximo, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que p y q no tienen factores comunes. En particular *p* y *q* no pueden ser ambos pares. La ecuación anterior se puede escribir como:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

Analicemos las posibilidades disponibles:

1. *p* y *q* son ambos impares
2. *p* es par y *q* es impar
3. *p* es impar y *q* es par

Descartemos la posibilidad 1. Si ambos números fueran impares, de la ecuación

$$2q^2 = p^2$$

deducimos que el lado izquierdo es par pero el derecho es impar, un absurdo.

Veamos la posibilidad 2. Si *p* es par entonces *p=2m* para algún entero m, luego

$$2q^2 = p^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2$$

pero esta última ecuación implica que q es par contradiciendo lo asumido.

Dejamos al estudiante UNA que elimine la última posibilidad. Hemos demostrado que $\sqrt{2}$ es irracional.

Este hecho causó una grave crisis en la matemática griega. Crisis que resolvió Eudoxio de Cnido con su definición de igualdad entre proporciones y la introducción del "principio de continuidad". Teodoro de Cirene extendió la demostración para incluir otros valores de n.

IV. La cuadratríz de Hipías

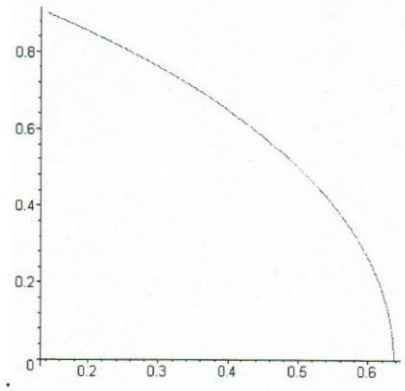
Los grandes problemas del mundo griego, que resultaron irresolubles después de la intervención de matemáticos como Galois, Lindemann y un análisis de varios siglos, son:

1. Trisecar un ángulo cualquiera
2. Duplicar el cubo
3. Cuadrar el círculo

Expliquemos estos problemas brevemente. El primero consiste en que, dado un ángulo cualquiera, lo dividamos en tres ángulos iguales sólo usando regla y compás. Esta restricción, de usar sólo regla y compás, se aplica a los tres problemas y algunos se la atribuyen a Platón.

El segundo problema tiene asociada una leyenda. Se cuenta que la ciudad de Delos, donde nació Apolo, estaba azotada por una epidemia y sus habitantes fueron a consultar al oráculo de Delos cómo acabar con la peste. El altar del oráculo tenía forma cúbica y el sacerdote que interpretaba al oráculo pidió que construyeran un altar del doble de volumen preservando la forma cúbica. De ser cierta la leyenda la ciudad debió perecer por la epidemia.

El último problema tiene un enunciado sencillo. Dado un círculo construyase un cuadrado de la misma área. Los matemáticos griegos conocían un procedimiento para cuadrar cualquier polígono regular. Ya señalamos que, con la condición de sólo usar regla y compás, estos problemas son irresolubles. Pero el hombre busca nuevas herramientas para resolver los problemas. Una de éstas es la curva conocida como la cuadratríz de Hipías. La cuadratíz se construye de manera mecánica, un procedimiento que Platón aborrecía. Tomemos en el plano cartesiano el segmento $x=0$, $0<y<1$. Imagine que este gira alrededor del (0,0), con el sentido de las agujas del reloj y velocidad angular uniforme. También, y empezando en el mismo instante, el segmento $y=1, 0<x<1$ se empieza a mover, paralelo con el eje x, hacia el segmento $y=0, 0<x<1$. En el tiempo $t=1$ ambos segmentos yacen sobre el eje x. La cuadratríz de Hipías es el conjunto de puntos que se obtienen por la intersección de los dos segmentos



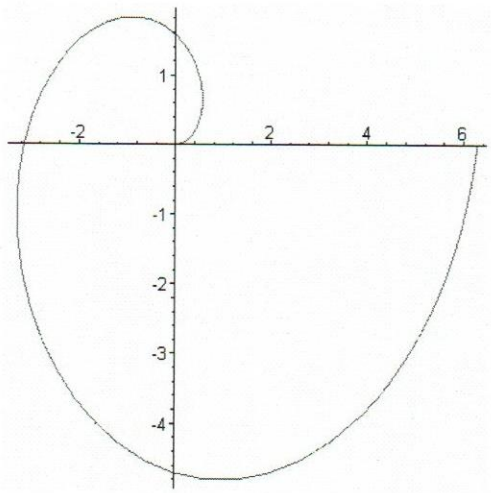
Cuadratríz de Hipías

V. La espiral de Arquímedes

Esta curva se escribe de manera muy sencilla en coordenadas polares:

$$r = \theta$$

Su gráfico, realizado con Maple, es el siguiente:



Espiral de Arquímedes

Arquímedes estudió con detalle esta curva y la aplicó en la solución de diversos problemas matemáticos y geométricos. En los ejercicios el estudiante UNA encontrará alguna de estas aplicaciones.

VI. Infinitud de los números primos

Es la opinión del autor que este resultado y su demostración es una de las joyas que aparecen en los Elementos de Euclides (libro V Prop. XX). Consideremos la sucesión de los números primos

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$$

¿Tiene esta sucesión fin? o ¿se prolonga indefinidamente? Los griegos respondieron esta pregunta de manera concluyente: la sucesión de números primos es infinita. La prueba sólo usa matemática elemental y el método de reducción al absurdo.

Teorema (Euclides Libro V Proposición XX) Existen infinitos números primos[g]

***Demostración*:**

Supongamos lo contrario, es decir existe un primo P el cual es el más grande. Construyamos el número

$$N = 2\times 3\times 5\times \cdots \times P+1.$$

Obsérvese que N es el producto de todos los primos al cual le añadimos 1. Afirmamos que N>P, ya que P aparece entre los factores que multiplicamos. Luego N debe ser compuesto y divisible por algún primo, digamos por el primo j, esto es $N = j\times c$. Pero $N = 2\times 3\times 5\times \cdots \times \overset{j}{j}\times \cdots \times P+1$=j×c luego $1 = j\times(c-2\times 3\times \cdots \times P)$ lo que indica que j divide a 1, una contradicción. Luego la sucesión de los primos es infinita.[h]

La sucesión de los números impares 2k+1 debe contener por ende infinitos primos. Observe que la sucesión 2n+1 es una progresión aritmética y que 2 y 1 son primos entre sí. Si consideramos la progresión aritmética $an+b, n = 0,1,\cdots$ es necesaria, para obtener de ella infinitos primos, que *a,b* sean primos entre sí. Es un resultado difícil y profundo que esto sea también suficiente. Fue demostrado por Dirichlet, a finales del siglo XIX, usando técnicas de variable compleja.

Los números primos y sus propiedades son un tema difícil y apasionante, existen muchos problemas abiertos asociados a ellos. Uno de los más difíciles es el de los primos gemelos: parejas de primos que sólo difieren en 2, como 3 y 5, 11 y 13, 17 y 19 etc. Se cree que pueden existir infinitas parejas, nadie lo sabe a ciencia cierta. Recientemente Goldston, Pitz y Yildririm han realizado un avance prometedor en este problema (ver el artículo de Soundararajan en Bulletin of the American Mathematical Society de Enero de 2007)

---

[g] De hecho Euclides formuló el resultado sin hacer ninguna referencia al infinito lo que demuestra el espíritu griego de evitar la idea de infinito.

[h] Existen otras demostraciones pero la dada es extraordinaria. El autor de estas notas tiene su propia demostración usando cálculo.

VII. El método de Exhaución

El método se debe al matemático Eudoxio de Cnido[i] y el término exhaución fue acuñado durante el renacimiento. Se basa en la definición, dada en la lectura de Hofmann, de igualdad entre proporciones y en el "principio de continuidad" que explicamos a continuación. Según este principio, dados dos números A, B cualesquiera (puede pensar en dos longitudes o áreas) si $A > B$ entonces existe un natural n tal que $nB > A$. Es decir, añadiendo B al mismo número, quizás grande, de veces superamos a A.

Ejercicio: Usando el "principio de continuidad" o de Arquímedes, demuestre que entre dos reales x,y con 0<x<y siempre se puede encontrar un racional. Vamos ahora a estudiar el teorema que afirma la proporcionalidad entre el área de dos círculos y sus diámetros al cuadrado.

Teorema: sean dos círculos de diámetros d, d' y áreas C, C' respectivamente entonces:

$$\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'^2}$$

***Demostración*:**

Inscríbanse en cada círculo un polígono regular de una cantidad n de lados. Es un ejercicio de trigonometría demostrar que las áreas A_n, A'_n de estos polígonos están en la proporción:

$$\frac{A_n}{A'_n} = \frac{d}{d'^2}$$

Muchos estarían tentados a afirmar que el resultado se obtiene del anterior haciendo n tender a infinito. Pero tenemos que tomar en cuenta que la idea de límite de una sucesión es posterior a los griegos, aunque el procedimiento de Eudoxio la tiene implícita. En realidad vamos a aplicar el

[i] Eudoxio (408-355 A.C.), astrónomo y matemático griego que realizó importantes aportaciones en el campo de la geometría y expuso la primera explicación sistemática de los movimientos del Sol, la Luna y los planetas. Eudoxio nació en Cnido (en lo que actualmente es Turquía). Fue discípulo del filósofo Arquitas y estudió con Platón durante un breve período.
A Eudoxio se le atribuye generalmente el descubrimiento de que el año solar tiene 6 horas más de los 365 días. Eudoxio también intentó explicar los movimientos del Sol, la Luna y los planetas mediante un modelo del Sistema Solar basado en una complicada combinación de esferas que giran. Su modelo tuvo un relativo éxito en la predicción de estos movimientos. Eudoxio también llevó a cabo importantes descubrimientos en matemáticas; se le atribuyen muchos en geometría, posteriormente incluidos en los Elementos, el tratado de matemáticas escrito por el matemático griego Euclides. © 1993-2003 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

principio del tercero excluido. Supongamos que $\frac{C}{C'} < \frac{d}{d'^2}$, esto es $\frac{C}{C'} = (1-\varepsilon)\frac{d}{d'^2}, 0 < \varepsilon < 1$. Tomemos ahora un número de lados n tal que $A'_n > (1-\varepsilon)C'$ pero entonces $\frac{C}{C'} = (1-\varepsilon)\frac{d}{d'} = (1-\varepsilon)\frac{A_n}{A'_n} \Rightarrow C = \frac{C'}{A'_n}(1-\varepsilon)A_n$ pero $\frac{C'}{A'_n}(1-\varepsilon) < 1$ de donde $C < A_n$, es un absurdo ya que el polígono A_n está inscrito en el círculo. El estudiante UNA debe analizar y eliminar la posibilidad que $\frac{C}{C'} > \frac{d}{d'^2}$. Sólo queda una posibilidad, ésta es $\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'^2}$ como queríamos demostrar.

Ahora estamos en condiciones de dar una importante definición pero primero dos observaciones.

1. La noción de equivalencia entre razones de Eudoxio puede ser usada sin introducir los números reales.

2. Podemos a partir de la fórmula del teorema anterior reescribir la condición de proporcionalidad de esta forma:

$$\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'^2} = \frac{(2r)^2}{(2r')^2} = \frac{r^2}{(r')^2} \quad \text{luego} \quad \frac{C}{r^2} = \frac{C'}{r'^2}$$

***Definición*:**

El número π es la constante de proporcionalidad, que afirma la observación anterior, entre las áreas y los radios al cuadrado de dos círculos, esto es:

$$\frac{C}{r^2} = \frac{C'}{r'^2} = \pi$$

Actividades y ejercicios matemáticos

Actividad 1

Se requiere formar equipo con otros estudiantes de la UNA (de diferentes centros locales) para realizar esta actividad. Mida el ángulo de la incidencia de los rayos solares, a la misma hora y en dos ciudades diferentes de Venezuela. Determine, a partir de la latitud y la longitud de estas ciudades, la distancia entre ellas. Use estos datos para calcular el radio de la Tierra.

Actividad 2

Investigue sobre la criba de Eratóstenes que permite determinar los primos hasta un determinado entero. Use el computador para escribir un programa que realice este procedimiento.

Actividad 3

¿Cómo determinar la distancia entre la Tierra y el sol usando las ideas de Eratóstenes?

Ejercicio 1

Demuestre los 5 teoremas atribuidos a Thales de Mileto

Ejercicio 2

Realice una actividad para medir a lo Thales, en su localidad o ciudad, un edificio, monumento, obelisco, antena, etc. de gran altura.

Ejercicio 3

Demuestre que $\sqrt{3}$ es irracional

Ejercicio 4

Demuestre que $\sqrt{7}$ es irracional

Ejercicio 5

Demuestre que $\sqrt{n}$ es irracional si n no es un cuadrado. Sugerencia: Use el teorema fundamental de la aritmética.

Ejercicio 6

Explique cómo se puede usar la curva de Hipías para dividir un ángulo cualquiera en 3 partes. Extienda su resultado a un número cualquiera de divisiones.

Ejercicio 7

Investigue en Internet cómo se puede usar la cuadratríz para resolver el problema de la cuadratura del círculo. ¿Fue Hipías quien logró esta aplicación de su curva?

Ejercicio 8

¿Puede usar la espiral de Arquímedes para rectificar un arco de círculo? Por rectificar entendemos construir un segmento de igual longitud que la longitud del arco. Razone su respuesta.

Actividad 5

Investigar los conceptos y resultados básicos de la teoría de números: divisor, número primo, algoritmo de Euclides, máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Ejercicio 9

Demuestre que los primos impares sólo pueden ser de la forma 4n+1 o 4n+3.

Ejercicio 10

Modificando el argumento de Euclides, demuestre que existen infinitos primos de la forma 4n+3

Ejercicio 11

Conviértase en un Arquímedes moderno: use un polígono de 64 lados para lograr una aproximación del número π.

Ejercicio 12

El estudiante UNA debe demostrar que un impar al cuadrado es impar. Esto lo usamos en la demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2.

Ejercicio 13

Investigue sobre los números pitagóricos: triangulares, cuadrados, etc.

Actividad 6

Los matemáticos griegos estuvieron muy próximos a desarrollar el Cálculo Integral por ejemplo en el trabajo de Arquímedes. Investigue cómo Arquímedes calculó el volumen de la esfera de radio r. Arquímedes consideró, este logro, su mayor obra y mandó que inscribieran una figura de su descubrimiento en su tumba la cual con el paso del tiempo se perdió. ¿Qué historiador muy famoso consiguió la tumba de Arquímedes?

Ejercicio 14

Encuentre la ecuación paramétrica o implícita de la cuadratriz de Hipías. Use un software para obtener su gráfico.

Autor de la lectura

Joseph Ehrenfried Hofmann (1900-1973) Historiador de la Matemática y profesor honorario de la Universidad de Tubingen. Es autor del libro (tres volúmenes) *Historia de la matemática* y realizó investigación matemática en geometría plana.

Autoevaluación

El test consta de dos partes. La primera parte consiste en algunos ejercicios matemáticos relacionados con las técnicas usadas por los babilonios y egipcios. La segunda algunas preguntas muy sencillas de selección simple para verificar su conocimiento del material del curso.

Ejercicios

1. Demuestre que $\sqrt{5}$ es irracional.

2. Use la espiral de Arquímedes para dividir un ángulo cualquiera en un determinado número de partes iguales.

3. Dé una demostración pictórica de la identidad $1+3+5+\cdots+2n+1=n^2$.

Preguntas de selección simple

1.- De acuerdo a lo discutido en el curso, el principal logro de la matemática griega es:

a) El cálculo de Pi
b) La invención de la geometría
c) El método axiomático deductivo
d) La determinación del volumen de la esfera hecha por Arquímedes

2.- Un método similar al de los infinitesimales (exhaución) se debe al matemático:

a) Euclides
b) Eudoxio
c) Arquímedes
d) Anaxágoras

3.- La obra maestra de la matemática griega es:

a) *Los elementos* de Euclides
b) *El arenario* de Arquímedes
c) *Las cónicas* de Apolunio
d) La cuadratura de las lúnulas de Hipócrates

4.- Fue el primero en demostrar resultados matemáticos en su cuadratura de las lúnulas:

a) Hipócrates
b) Euclides
c) Thales
d) Pitágoras

5.- Calculó aproximadamente el valor de Pi :

a) Euclides
b) Pitágoras
c) Arquímedes
d) Eudoxio

6.- Crítico acérrimo de las ideas de movimiento, espacio y tiempo:

a) Diómedes
b) Zenón
c) Aristóteles
d) Platón

7.- Da importancia a los métodos de deducción matemática en comparación a los métodos puramente filosóficos:

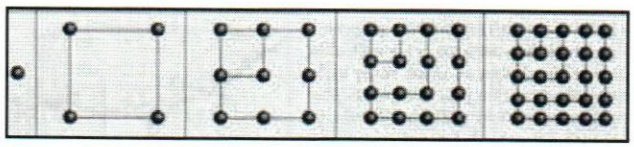
a) Aristóteles
b) Platón
c) Euclides
d) Pitágoras

Solución a la autoevaluación

Ejercicios

1. Supongamos que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 5 \Rightarrow p^2 = 5q^2$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible. De la igualdad $p^2 = 5q^2$ se deduce que 5 debe dividir a p, luego $p = 5k$ con k entero, luego $(5k)^2 = 5q^2 \Rightarrow q^2 = 5k^2$ y esto implica que 5 debe dividir a q. Una contradicción con el hecho que $\frac{p}{q}$ es irreducible. Hemos demostrado la afirmación. El estudiante observará que la prueba es esencialmente similar a la demostración que $\sqrt{2}$ es irracional. Trate de generalizar los argumentos usados para demostrar que $\sqrt[3]{3}$ es irracional.

2. Use la espiral de Arquímedes combinada con el teorema de Thales que permite dividir un segmento dado en un número cualquiera de partes.



3. El estudiante UNA debe interpretar estos diagramas.

Preguntas de Selección Simple

1. c) La matemática en Babilonia y Egipto era fundamentalmente empírica. Los griegos con Hipócrates de Chios empiezan a buscar la certeza absoluta en matemática. Es opinión de algunos que ya Thales de Mileto demostró algunas proposiciones pero no tenemos certeza de esto. Sin duda Aristóteles y Platón con su peso filosófico empujan aún más la tendencia deductiva de la matemática pero es sin duda el extraordinario libro *Los Elementos* de Euclides el que presenta por primera vez el método axiomático deductivo, marcando el desarrollo posterior de toda la matemática.

2. b) Es Eudoxio el que crea de manera magistral el método de exhaución y lo aplica en la demostración de la existencia del número π.

3. a) Sin duda *Los Elementos*. Las otras alternativas son libros muy importantes pero *Los Elementos* de Euclides son una obra maestra que influyó en todo el desarrollo de la matemática.

4. a) Hipócrates fue el autor de esta obra que sienta de manera explícita el método deductivo como una herramienta matemática.

5. c) Arquímedes uso polígonos de un gran número de lados (96) para aproximar el número π.

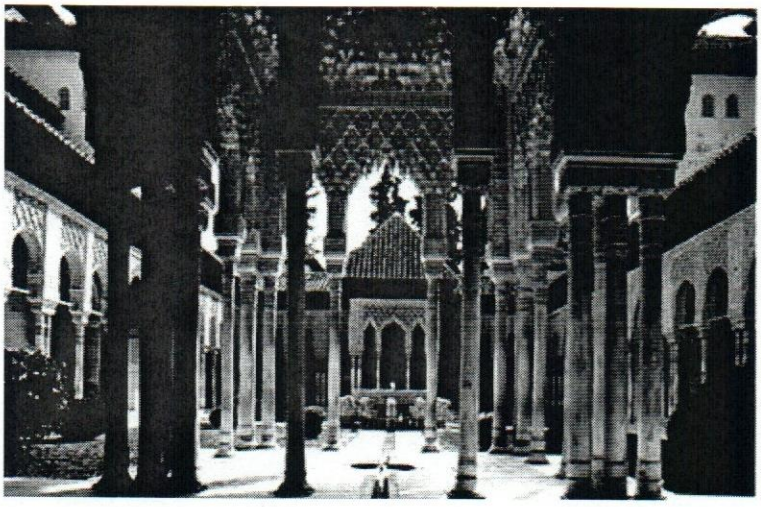
6. b) Zenón.

7. b) Platón le dio gran importancia a la matemática y mando a inscribir en el pórtico de la Academia **No entre aquí quien no sepa de Geometría.**

MÓDULO II

La Edad Media, el Renacimiento y la fusión entre el álgebra y la geometría: la geometría analítica

Perre de Fermat
Co-descubridor de la geometría analítica



ESTRUCTURA DEL MÓDULO II

Objetivo del Módulo II

Describir el nacimiento de la geometría analítica como una síntesis entre el álgebra árabe y la geometría griega.

Contenido del módulo

II.4 La edad media

- Matemática en la Edad Media: el aporte de los árabes. Creación del álgebra.
- Aportes de la India y China: el sistema de numeración hindú.
- Labor de los árabes en la preservación del conocimiento griego.

II.5 La geometría analítica

- El desarrollo de la geometría analítica como síntesis entre el álgebra y la geometría.
- Vida de René Descartes.

Unidad 4

La Edad Media

Objetivo Unidad 4

Describir el rol de la civilización árabe en la preservación y desarrollo del conocimiento matemático.

Tiempo estimado de estudio

1 semana y media.

INTRODUCCIÓN

Los maestros Rey Pastor y Babini nos llevan a conocer el mundo matemático asociado a civilizaciones cargadas de misterio: las civilizaciones orientales. Por supuesto que no ha sido nuestra única incursión por el oriente ya que analizamos la matemática de los babilonios y egipcios.

La matemática de estas culturas fue importante para el desarrollo de la matemática europea. Señalemos solamente el sistema de numeración que nos viene de los árabes e hindúes todavía presente entre nosotros. Los romanos usaban un sistema engorroso de cifras que hacía complejo cualquier cálculo, el sistema indoarábigo es flexible y transparente y debe considerarse como uno de los componentes cruciales que facilitaron el desarrollo de la matemática en occidente.

Por otro lado, los árabes cumplieron el papel de correa de trasmisión entre la matemática griega y Europa, así como entre el conocimiento hindú y la anquilosada cultura europea. Sus múltiples conquistas, viajes y curiosidad científica sirvieron para revitalizar un mundo europeo que tendía a estar paralizado entre el fervor religioso y el oscurantismo de la Edad Media. Debemos reconocer la importancia y el aporte de la cultura árabe en Europa y en nosotros a través de su notoria influencia en España. Fueron unos apasionados de la matemática en la que buscaban quizás la simetría de un desierto ya olvidado.

El plan de la lectura es el siguiente. Empiezan los autores evaluando el aspecto poco desarrollado de la matemática en Roma y en la temprana Edad Media. Brevemente tocan el tema de la matemática en China señalando que poseemos un desconocimiento importante de lo alcanzado por los chinos. Posteriormente, hacen una breve incursión por la matemática hindú en esa época, destacando su importancia. Para luego entrar a discutir el conocimiento de los árabes, el cual analizan con mayor detalle. Los árabes trasmiten a Europa un conocimiento matemático griego revitalizado ya que es probable que esas matemáticas griegas hubiesen sido preservadas en ciertas bibliotecas europeas. Pero no sólo son unos trasmisores, su aporte es original y nuestra álgebra es su mayor logro.

Después los autores analizan la alta y baja Edad Media, donde se centran en figuras como Al-Khuwarizmi y Omar Khayyam, matemáticos de una incuestionable originalidad. Al primero le debemos el primer estudio sistemático de las ecuaciones algebraicas. El segundo, matemático y poeta desarrolló originales métodos como una solución geométrica de la ecuación cúbica.

Los autores no descuidan las posibles influencias de la cultura hindú en occidente para lo cual los árabes servían como vaso comunicante.

Al final de la lectura se plantea el renacer de la matemática europea. Europa se va a liberar, mediante la imprenta y la aparición de pensadores originales en todas las áreas del saber, de la superstición y la contemplación divina. Europa a partir de este momento, con sus matemáticos y cultura será el centro de nuestra historia. El álgebra de los árabes y la geometría de los griegos, se van a unir. Oriente y occidente se van a mezclar para producir una síntesis matemática de importancia: la geometría analítica que es el objeto de nuestra próxima lectura.

Plan de instrucción Objetivo 4

1. Lea sobre los romanos y su imperio, y la Edad Media.

2. Lea la lectura 6 de Rey Pastor y Babini "La Época Medieval".

3. ¿Qué podemos decir del desarrollo de la matemática en el imperio romano? ¿tienen alguna importancia las matemáticas que desarrollaron hindúes y chinos? Base su análisis en la lectura.

4. ¿Cuál fue el rol de los árabes en la matemática que se desarrolla en occidente?

5. ¿Con qué matemático empieza la matemática europea a tener representantes originales e importantes?

6. Lea cuidadosamente las notas matemáticas de la lectura 6. *En esta Unidad de la Guía Instruccional las notas son las originales del libro de Rey Pastor y Babini y las encontrará en la propia lectura.*

7. Recuerde hacer un resumen de toda la información recabada en la línea de tiempo que está construyendo.

8. Vaya a las actividades y ejercicios matemáticos y enfrente problemas atacados por los árabes, hindúes, chinos etc.

9. Vaya al Rincón del asesor a discutir y compartir con los compañeros y asesores.

10. Realice los ejercicios de autoevaluación, confiamos en Ud. y los resultados que obtendrá.

Rincón del asesor

Los árabes mantuvieron importantes obras matemáticas griegas mediante sus traducciones. Sin embargo los monasterios tuvieron un rol importante en este aspecto. ¿Puede Ud. considerar cuál fue su aporte? Una buena novela que recomendamos a los estudiantes es el *Nombre de la Rosa* de Humberto Eco (hay una película del mismo nombre protagonizada por Sean Connery). En ella se adentrará en el mundo de los monasterios y su trabajo intelectual.

Actividades y ejercicios matemáticos

Ejercicio1

Lea el siguiente párrafo:

¿Cual es el cuadrado que sumado a diez raíces da el número 39? Dice: "Debes tomar la mitad del número de las raíces, en este caso 5, y multiplicarlo por sí mismo y obtienes 25 al que le sumas el número 39, con el resultado 64. Tomas la raíz cuadrada de este número que es 8 y le restas la mitad de las raíces 5 y obtienes 3, que es el valor buscado".

Verifique que el algebrista está enunciando la conocida fórmula de las raíces de una ecuación de segundo grado.

Actividad 1

Usando sus conocimientos de geometría demuestre la fórmula $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ de Brahmagupta que da el área de un cuadrilátero inscrito en un círculo.

Ejercicio 2

Dos números se denominan amigos si la suma de los divisores de uno equivale al otro. Demuestre que 220 y 284 son amigos.

Actividad 2

Si $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$,
$q = 3 \times 2^{n} - 1$,

$r = 9 \times 2^{2n-1} - 1,$

donde $n > 1$ es entero y p, q, y r son *números primos*, demuestre que entonces

$2^n pq$ y $2^n r$ son un par de números amigos.

Esta fórmula genera los pares (220, 284), (17.296, 18.416).

Autoevaluación

El test consta de dos partes. La primera parte consiste en algunos ejercicios matemáticos relacionados con las técnicas usadas por los babilonios y egipcios. La segunda algunas preguntas muy sencillas de selección simple para verificar su conocimiento del material del curso.

Ejercicios

1. Dos números se denominan amigos si la suma de los divisores de uno equivale al otro. Demuestre que A= 17296 , B = 18416 son amigos[j]

2. Resuelve el siguiente problema de Baskhara: "La raíz cuadrada de la mitad de un enjambre de abejas se esconde en la espesura de un jardín. Una abeja hembra con un macho quedan encerrados en una flor de loto, que los sedujo por su dulce perfume. Los $^8/_9$ del enjambre quedaron atrás. Dime el número de abejas.

3. Un número que es amigo de si mismo se denomina perfecto. Es decir, un número tal que la suma de sus divisores es igual al mismo número se denomina perfecto. Demostrar que la fórmula $2^{n-1}(2^n - 1)$ genera un número perfecto par siempre que $2^n - 1$ es primo.

4. Convierta la ecuación de segundo grado $x^2 - 6x + 5 = 0$ a uno de los tipos considerados por Al-Khuwarizmi

Preguntas de selección simple

1- De acuerdo a la lectura la matemática de los romanos fue:

a) un retroceso a los métodos de los babilonios
b) una continuación vigorosa de la matemática griega
c) una matemática simple orientada a las aplicaciones prácticas
d) un estancamiento de lo conocido por los griegos

2- El renacer de la matemática europea en la Edad Media se debió a:

a) la influencia de la matemática que vino del Oriente
b) al emperador Carlomagno que se preocupo de mejorar el nivel educativo

[j] Este par es atribuido muchas veces a Descartes pero ya era conocido por los árabes.

c) a los matemáticos griegos que reaparecieron en la biblioteca de Alejandría
d) al estudio de los religiosos como Beda el venerable

3- En relación al desarrollo matemático, tuvieron una influencia mayor sobre la matemática en occidente:

a) los hindúes que los chinos
b) los chinos que los hindúes
c) fue aproximadamente igual
d) debido a su situación geográfica no tuvieron influencia alguna

4- De acuerdo a Rey Pastor y Babini el aporte de los árabes a la ciencia en la Edad Media fue:

a) simple recolección del saber griego
b) aporte singular de primera importancia
c) las guerras y el fanatismo religioso los mantuvieron al margen de cualquier conocimiento científico
d) Aporte menor que fue absorbido por la importante matemática de Europa

5- La razón para manipular los términos de una ecuación de segundo grado y considerar los seis casos posibles es:

a) todos los coeficientes debían ser positivos
b) evitar raíces complejas
c) facilitar el cálculo de las raíces
d) El número seis era un número importante para el Islam

6- El primer matemático que representó el renacer de la matemática en Europa fue:

a) Cardano
b) Abelardo de Bath
c) Fibonacci
d) Newton

Solución a la autoevaluación

Ejercicios

1. Calculemos los divisores de 17296 ellos son
   $\{1, 2, 4, 8, 16, 23, 46, 47, 92, 94, 184, 188, 368, 376, 752, 1081, 2162, 4324, 8648, 17296\}$
   Su suma es:
   > 1+ 2+ 4+ 8+ 16+ 23+ 46+ 47+ 92+ 94+ 184+ 188+ 368+ 376+ 752+ 1081+ 2162+ 4324+ 8648;
   18416
   (hemos hecho los cálculos con Maple)
   Por otro lado los divisores de 18416 son
   $1, 2, 4, 8, 16, 1151, 2302, 4604, 9208, 18416$
   Su suma es
   > 1+ 2 +4+ 8+ 16+ 1151+ 2302+ 4604+ 9208;
   17296

2. El planteamiento del problema lleva a la ecuación
   $$\sqrt{\frac{x}{2}}+2+\frac{8}{9}x=x \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{2}}+2=\frac{1}{9}x \Rightarrow 9\sqrt{\frac{x}{2}}+2=x \Rightarrow 9\sqrt{\frac{x}{2}}=x-2 \Rightarrow$$
   $$81\frac{x}{2}=x^2-4x+4$$
   Procediendo como Al-Khuwarizmi escribimos esta ecuación como
   $81\frac{x}{2}=x^2-4x+4 \Rightarrow 81\frac{x}{2}+4x=x^2+4$. El estudiante UNA debe verificar que la raíz es 72 y que la otra raíz es negativa.

3. Si el número $2^{n-1}(2^n-1)$ es tal que 2^n-1 es primo es muy sencillo decir cuáles son sus divisores: $1, 2(2^n-1), 2^2(2^n-1)\cdots\ 2^{n-2}(2^n-1)$ y 2^n-1. Dejamos al estudiante UNA verificar que
   $1+\ 2^n-1+2(2^n-1)+2^2(2^n-1)\cdots\ +2^{n-2}(2^n-1)$ es igual a $2^{n-1}(2^n-1)$

4. Esto es muy sencillo y lo dejamos a la interpretación del estudiante UNA.

Preguntas de selección simple

1- Los romanos ni siquiera mantuvieron viva la matemática griega, la respuesta es la alternativa **c**.

2- La matemática en occidente retrocedió mucho al decaer el mundo helénico y la influencia de oriente fue lo que la revitalizó, luego la alternativa **a** es la correcta.

3- La matemática hindú es muy importante para lo que ocurre en occidente. Nos llega su conocimiento por intermedio de los árabes. La influencia de China no está tan clara. La respuesta correcta es la alternativa **a**.

4- Está textual en la lectura, el aporte de los árabes es singular. Luego la alternativa **b** es la correcta.

5- La alternativa correcta es la **a** los matemáticos siempre han enfrentado con suspicacia la introducción de nuevos tipos.

6- La alternativa **c** es la correcta como puede observar el lector atento cuando Rey Pastor y Babini hablan de Fibonacci.

Unidad 5

Geometría analitica

Objetivo Unidad 5

Conocer el desarrollo de la Geometría analítica.

Tiempo estimado de estudio

1 semana y media

INTRODUCCIÓN

En esta lectura, con un estilo muy ameno Berlinski examina la vida de Descartes y su creación de la geometría analítica. Se puede apreciar la fusión del álgebra y sus ecuaciones con la geometría de los antiguos. Al final todo se reduce al número como deseaban los pitagóricos en su *arithmetica universalis*. Podemos apreciar además la creación de un lenguaje flexible y potente, adecuado para empresas mayores como es la creación del cálculo, hecho que estudiaremos en la próxima Unidad.

Como ya vimos el álgebra es una creación de los árabes pero éstos usaban una notación muy verbal que tuvo que ser mejorada por los matemáticos europeos para lograr el dinamismo que requería la geometría analítica. Lamentablemente no entraremos en este aspecto. Una vez que se logró tener una notación algebraica más adecuada e introducidos los ejes coordenados para asociar a los puntos números se logró un efecto notable, los objetos geométricos correspondían a ecuaciones algebraicas.

Objeto geométrico $\longleftrightarrow$ **Ecuación algebraica**

Pero el álgebra es fundamentalmente algorítmica y esto implica que posee procedimientos sistemáticos para resolver los problemas que enunciemos dentro de su lenguaje. Luego los problemas geométricos se traducían a problemas algebraicos que eran resueltos con las herramientas del álgebra y su solución era interpretada geométricamente.

Problema geométrico $\longrightarrow$ **Problema algebraico**

$\downarrow$

Solución mediante los algoritmos del álgebra $\longrightarrow$ **Interpretación geométrica del resultado**

Es de hacer notar que muchos de los problemas geométricos indujeron el estudio de importantes nociones algebraicas, por ejemplo, el estudio de los invariantes de las formas cuadráticas empieza con la geometría analítica.

Así se estableció una relación simbiótica entre el álgebra y la geometría que preparaba el mayor avance de la matemática desde *Los elementos* de Euclides: el nacimiento del cálculo

Plan de instrucción Objetivo 5

1. Ubíquese en la Europa de Descartes y Fermat. ¿Existe ya el concepto de nación en el viejo continente?

2. Recuerde lo que Ud. aprendió en la geometría analítica de quinto año o tome cualquier libro de geometría analítica y observe su principal característica: la introducción de sistemas coordenados para escribir algebraicamente los lugares geométricos.

3. ¿Es la falta de un lenguaje apropiado el impedimento para el desarrollo de una teoría matemática?

4. Lea la lectura de Berlinski sobre Descartes y el nacimiento de la geometría analítica.

5. De acuerdo a la lectura:

   - ¿Qué es un sistema coordenado? ¿Cuál es su importancia?
   - ¿Qué parámetros aparecen en la ecuación de la recta?
   - ¿En qué famoso libro de filosofía aparece el trabajo matemático de Descartes?
   - ¿Qué cantidad caracteriza a las diferentes cónicas?
   - ¿Qué relación guarda la geometría analítica con la idea pitagórica que todo es número?

6. Lea las notas matemáticas complementarias de la lectura.

7. Las actividades y ejercicios matemáticos están relacionadas con la evaluación formativa, no las omita.

8. Resuma la información relevante que ha encontrado sobre la geometría analítica en su línea de tiempo.

9. Recuerde que tiene un trabajo sobre la disputa sobre quién descubrió en realidad la geometría analítica. ¿Fue Descartes o Fermat? Converse con su asesor y vaya al foro para discutir sobre este tema.

10. Puede ver también el video sobre Fermat cuyo enlace lo damos en el Moodle del curso.

11. Vaya a la prueba de autoevaluación, demuestre lo que Ud. conoce.

Rincón del asesor

La discusión se va a centrar en el tema de la tarea: ¿fue Fermat o Descartes el descubridor de la geometría analítica? Es conocido que Fermat poseía la noción de ejes coordenados y un claro algoritmo para buscar máximos y mínimos. Recientemente recibí del matemático francés Hiriart-Urruty un artículo que sustenta la tesis de que Fermat no sólo es el fundador de la geometría analítica sino también del cálculo. Investigue y discuta con su asesor y compañeros este tópico fascinante.

Autor de la lectura

La geometría analítica

David Berlinski (1942)
Matemático y filósofo norteamericano, autor de diversas obras de divulgación matemática entre ellas *Ascenso infinito* (2005) de la cual tomamos la lectura. Ha mantenido un criterio polémico en relación a la evolución darwiniana realizando profundas críticas a sus principales ideas.

Notas Matemáticas complementarias de la lectura de la geometría analítica

I. Estudio de las cónicas y formas cuadráticas

Consideremos la forma cuadrática general:

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Una primera observación es que podemos hacer una rotación que elimine de la forma cuadrática el término cruzado *xy*. Comprobemos ésto en detalle. Una rotación está dada por la ecuación lineal de la forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Observe que el determinante de la matriz es 1 y que su inversa es también una rotación. Veamos la forma cuadrática en las coordenadas x', y'

Como $\begin{matrix} x=\cos\alpha x'-sen\alpha y' \\ y=sen\alpha x'+\cos\alpha y' \end{matrix}$ en las nuevas coordenadas la forma cuadrática se escribe como:

$$f(x',y')=\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

La matriz de la nueva forma se calcula sin mucho esfuerzo, hagamos el cálculo. En primer lugar:

$$\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a\cos\alpha+\frac{b}{2}sen\alpha & -asen\alpha+\frac{b}{2}\cos\alpha \\ \frac{b}{2}\cos\alpha+csen\alpha & \frac{-b}{2}sen\alpha+c\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Tenemos ahora que multiplicar

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\cos\alpha + \frac{b}{2}sen\alpha & -asen\alpha + \frac{b}{2}\cos\alpha \\ \frac{b}{2}\cos\alpha + csen\alpha & \frac{-b}{2}sen\alpha + c\cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a\cos^2\alpha + b\cos\alpha sen\alpha - csen^2\alpha & -asen\alpha\cos\alpha + \frac{b}{2}\cos^2\alpha - \frac{b}{2}sen^2\alpha + c\cos\alpha sen\alpha \\ -a\cos\alpha sen\alpha - \frac{b}{2}sen^2\alpha + \frac{b}{2}\cos^2\alpha + c\cos\alpha sen\alpha & asen^2\alpha - bsen\alpha\cos\alpha + c\cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

Observe cuidadosamente la última matriz, afirmamos que existe un ángulo α para el cual:

$$-a\cos\alpha sen\alpha - \frac{b}{2}sen^2\alpha + \frac{b}{2}\cos^2\alpha + c\cos\alpha sen\alpha = 0$$

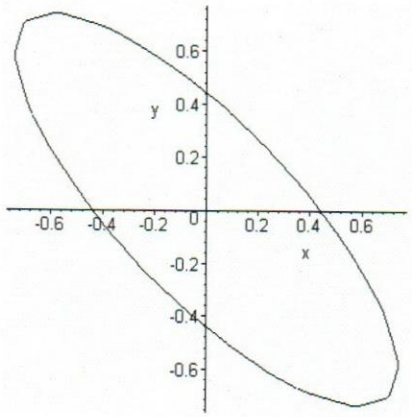
Luego la matriz corresponde a una forma cuadrática que no tiene término cruzado. Esto lleva al siguiente teorema conocido como el "Teorema de los Ejes Principales"

Teorema: Dada la forma cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2$ existe una rotación mediante la cual la nueva forma asociada no tiene término cruzado.

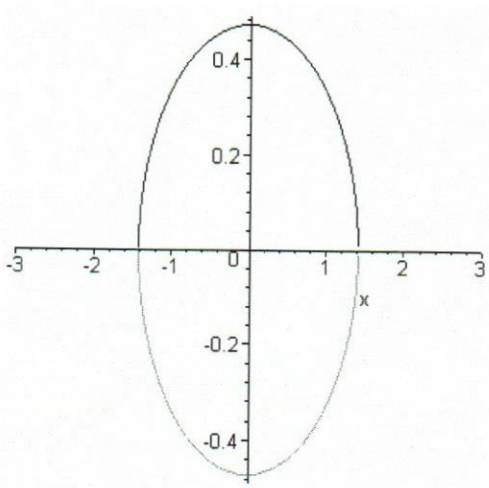
La interpretación geométrica del resultado es muy sencilla. El resultado indica que mediante una rotación apropiada los ejes de una cónica son paralelos a los ejes coordenados.

Veamos un ejemplo:

Tomemos la cuádrica $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$, su gráfica es:



Por otro lado le podemos aplicar una rotación de 45 grados para obtener la gráfica de abajo. Note que, en este caso, la elipse luce como las elipses que estudiamos en quinto año de bachillerato, mientras que la primera es oblicua.



II. El problema de la tangente: Máximos y mínimos

Muchas veces decimos "no hay nada nuevo bajo el sol" y en matemática esto es cierto. Si bien acreditamos al binomio de Newton y Leibnitz como los creadores del cálculo diferencial e integral, los nombres de Fermat, Arquímedes o Cavalieri no pueden ser olvidados. Vamos a examinar en esta nota el método de Fermat para calcular la tangente con la misión clara de ubicar los máximos y mínimos de determinadas curvas. En primer lugar sabemos que Fermat al igual que Descartes poseía la idea básica de la geometría analítica: la introducción de ejes coordenados que permiten

Notas matemáticas complementarias de la lectura "Cálculo"

I. Crítica del obispo Berkeley al uso de los infinitesimales

El obispo Berkeley (1685-1753) escribió una obra titulada *El analista* dedicada a un infiel matemático (¿Newton?, ¿Halley?) que reflexionaba sobre el uso de las cantidades infinitamente pequeñas o evanescentes. Decía Berkeley que su uso era arbitrario y carecía de lógica porque en algún momento eran no nulas y luego eran 0. Ilustremos lo afirmado por Berkeley con un ejemplo muy conocido. Veamos cómo calculamos, en una típica clase de matemática, la derivada o fluxión de x^2. Planteamos el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

Usualmente advertimos a nuestros estudiantes que **h es muy pequeño pero no 0 y por ende tiene sentido el cociente**, sigamos con el álgebra

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2xh-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h=2x$$

Observe que en último paso hemos hecho h igual a 0

Obispo George Berkeley

El cálculo del límite anterior recuerda los actos de magia: antes no eras 0 y ahora sí. De aquí la crítica de Berkeley. Notemos que Newton y Leibniz concebían a estas cantidades infinitesimales como menores que cualquier número positivo pero mayores que 0. Tales cantidades no pueden satisfacer el principio de continuidad de Arquímedes que nos viene desde Eudoxio: *si a>0 y b>a entonces sumando a suficientes veces con él mismo en algún momento se va a tener:* $na>b$

La crítica de George Berkeley es de difícil refutación: esencialmente tenía razón. Solamente, como veremos más adelante, con Cauchy y Bolzano se define de manera rigurosa el concepto de límite aritmetizando el mismo y entrando en la formalización del cálculo.

Debemos sin embargo señalar que los infinitesimales, esas cantidades fantasmales como las llamó Berkeley, reaparecerían en el siglo XX en la forma del análisis no estándar de Abraham Robinson. Robinson legitima el uso de los infinitesimales por medio de la lógica matemática. Recomendamos al lector interesado leer, en primera instancia, el libro *Infinitesimal calculus* de Henle y Kleinberg como primera lectura de este novedoso enfoque.

Abraham Robinson
(1918-1974)

II. Enunciado de las leyes de la Física

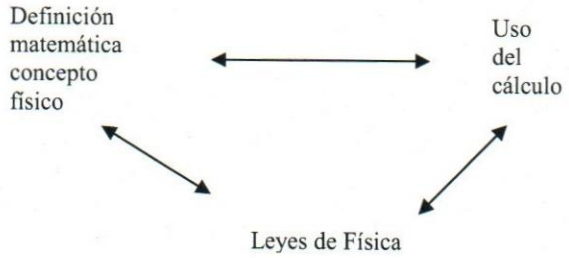
La segunda ley de Newton nos indica que lo que produce un cambio en la cantidad de movimiento de un cuerpo es la fuerza. La cantidad de movimiento se calcula mediante la expresión:

$$p = mv$$

En la fórmula anterior, p es la cantidad de movimiento, m es la masa inercial del cuerpo y v es la velocidad del mismo. Newton se dio cuenta que el concepto matemático asociado al cambio era la derivada, luego la fuerza debía satisfacer:

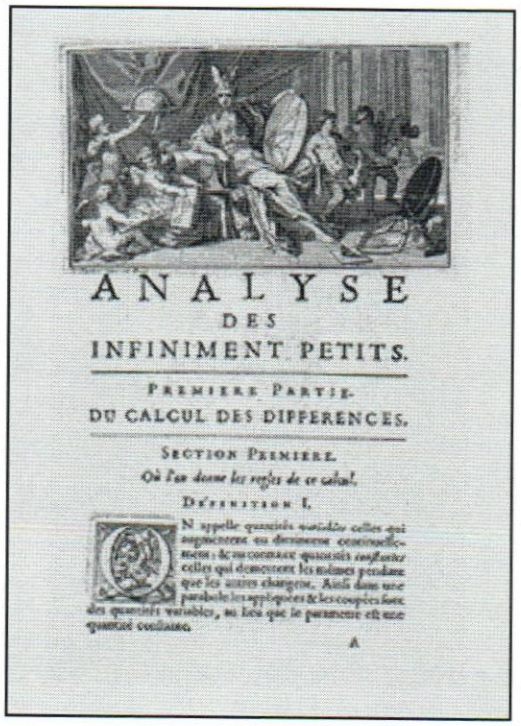
$$F = \frac{d}{dt} mv = ma$$

donde a es la aceleración. Hemos deducido a partir de sencillas definiciones físicas y las herramientas del cálculo la conocida fórmula $F = ma$



III. Una competencia que hizo época

Johann Bernoulli es famoso por diversos resultados matemáticos y por haber escrito el primer libro de cálculo diferencial: *Análisis de lo infinitamente pequeño.* Sin embargo, el libro fue publicado como escrito por el Marques de L´Hopital. L´Hopital es recordado por todos los estudiantes ya que su regla permite el cálculo de muchos límites de manera sencilla.


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS.

PREMIERE PARTIE.
DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION PREMIERE.
Où l'on donne les regles de ce calcul.

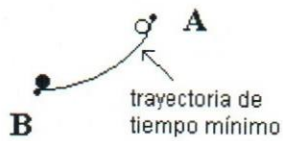
DÉFINITION I.

N appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le parametre est une quantité constante.

A

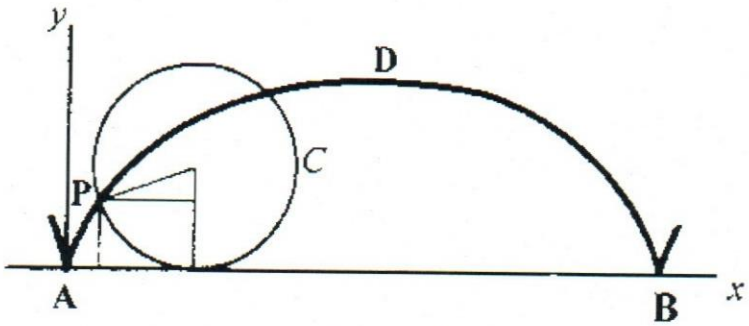
L´Hopital fue alumno privado de Bernoulli y le solicitó que escribiese unas notas para el curso y que no las mostrase a nadie. El estudiante puede imaginar el resto de la historia. El inescrupuloso Marques de L´Hopital publicó el trabajo como suyo, ganando una reputación como matemático. Ahora el estudiante sabe que la regla de L´Hopital es la regla de Bernoulli.

En 1696 J. Bernoulli retó a la comunidad matemática internacional a resolver el problema de la curva de descenso mínimo: dados dos puntos A y B en el espacio encontrar la curva que los une tal que si soltamos una partícula desde el punto de mayor altura y la partícula se desliza por la curva



la partícula llega *en un tiempo mínimo* al punto de menor altura.

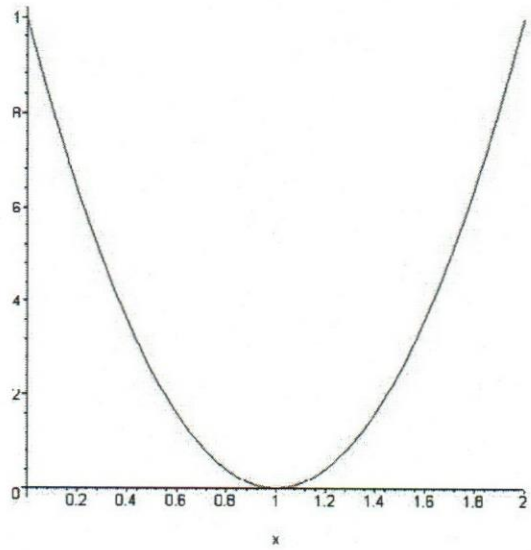
Contrario a lo que uno puede pensar la solución al problema no es una recta o un arco de parábola. La curva que resuelve el enigma de Bernoulli es un arco de cicloide (http://es.wikipedia.org/wiki/Cicloide).



Arco de cicloide

La cicloide se genera por el movimiento de un punto **P,** que está sobre un círculo, cuando este rueda sin deslizar. La solución del problema que encontró Bernoulli es de una brillantez y belleza notable, se basa en el principio de mínima acción de Fermat y de una analogía óptico-mecánica. Invitamos al lector interesado a leer el libro de Polya citado en la bibliografía para ahondar en las ideas de Bernoulli.

cuantificar las relaciones geométricas. También Fermat tenía claro que en un punto de máximo la variación (derivada) de la curva debía ser 0.



Veamos cómo procedía Fermat en su *Método para la evaluación de máximos y mínimos.*

Pierre de Fermat (1601-1665)

Me voy a basar en el trabajo del matemático francés Hiriart-Urruty: *Du calcul differentiel au calcul variationnel: un apercu del'evolution de P. Fermat a nos tours* (Del cálculo diferencial al cálculo de variaciones: un resumen de la evolución de Fermat a nuestros días). Hemos recibido el mismo por correspondencia del autor y no sé si está publicado. El trabajo original de Fermat se titula *Methodus ad disquirendam maximam et minimam.* (Versión en línea: http://fr.wikisource.org/wiki/%C5%92uvres_de_Fermat_-_Livre_I_-_Maxima_et_Minima). Conocido como *Maxima et Minima* escrito en 1638 y enviado a Descartes por intermedio de Mersenne.

Por supuesto que Fermat no hablaba de funciones ni derivadas, todas esas ideas son posteriores. Sin embargo el propio Newton en una carta reconoció que su cálculo de la fluxión (derivada) fue inspirado en el método de las tangentes de Fermat. Voy a trabajar con un ejemplo específico tratando en lo posible de mantener el espíritu del trabajo de Fermat.

Como ya dije Fermat estaba interesado en buscar el máximo o mínimo de una curva, por ejemplo $y=(x-1)^2$. Fermat llama a al punto buscado y lo primero que considera es la expansión de $(a-1)^2=a^2-2a+1$. Ahora viene la idea

importante de considerar una pequeña variación en el punto a y considerar $a+e$. El valor de la curva en ese punto está dado por $(a+e-1)^2=a^2-2a+1+2e(a-1)$ y ahora adiguala[k] las expresiones

$$a^2-2a+1= a^2-2a+1+2e(a-1)$$

De donde $2e(a-1)=0$, ahora divide por e, **lo que indica que Fermat está calculando la derivada e igualándola a 0**. Obtiene entonces

$$a-1=0$$

de donde $a=1$.

Vamos a hacer unos comentarios finales. La nota presentada puede servir de enlace a nuestra próxima Unidad sobre el cálculo diferencial. Sin duda lo hecho por Fermat está muy próximo a lo que Newton y Leibniz van a desarrollar. Lagrange consideraba a Fermat el creador del cálculo diferencial e Integral ya que además de su método de la tangente calculó el área debajo de la gráfica de todas las potencias enteras de x. La estatua de Fermat en Toulouse dice: Pierre Fermat creador del cálculo.

Estatua de Fermat en el Capitolio de Toulouse (Francia)

Luego Fermat:

1. Creó con Pascal la teoría de probabilidades.
2. Fue creador, junto a Descartes, de la geometría analítica.
3. Es, sin duda, pionero del desarrollo del cálculo.

[k] Adigualar lo toma Fermat de Diofanto y significa igualar cantidades muy próximas.

4. Planteó el problema más famoso de la matemática: El último teorema de Fermat. También encontró originales métodos en teoría de números y nuevos resultados.

Por favor vaya a http://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat para una biografía corta. También puede ver el libro *Los grandes matemáticos* de E. T. Bell que está en http://www.geocities.com/grandesmatematicos/.

Actividades y ejercicios matemáticos

Ejercicio 1

Demuestre, usando geometría analítica, que si en un cuadrilátero cualquiera unimos los cuatro puntos medios se forma un paralelogramo.

Ejercicio 2

Demuestre que una circunferencia de centro *(a,b)* y radio r tiene ecuación:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Ejercicio 3

Demuestre que si dos rectas se intersecan lo hacen en un solo punto.

Ejercicio 4

Demuestre que el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $(0,a)$ y de la recta $y=-a$ está dado por la ecuación:

$$x^2=4ay$$

Ejercicio 5

Demuestre que la cantidad Δ discriminante es una invariante de la forma cuadrática:

$$f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2=\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sugerencia: antes de embarcarse en largos cálculos piense un poco en términos de matrices y determinantes.

Ejercicio 6

Aplique el método de Fermat para hallar máximos y mínimos al problema de determinar de todos los rectángulos de un perímetro dado el de mayor área.

Autoevaluación

El test consta de dos partes. La primera parte consiste en algunos ejercicios matemáticos relacionados con las técnicas usadas por Descartes y Fermat. La segunda algunas preguntas muy sencillas de selección simple para verificar su conocimiento del material del curso.

Ejercicios

1.- Calcule el discriminante para deducir la naturaleza de la cónica:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$$

2.- Halle la fórmula de la ecuación de la recta que pasa por los puntos (a,b) y (c,d).

3.- Demuestre mediante un cálculo que mediante una rotación siempre se puede eliminar el término xy en una forma cuadrática

4.- Demuestre la igualdad $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Preguntas de selección simple

Escoja la alternativa que más se aproxime a responder la pregunta

1- La descripción más adecuada de la geometría analítica es:

a) Análisis de los métodos geométricos griegos realizado por Descartes
b) Fusión del álgebra y la geometría creando un lenguaje potente
c) Geometría de la elipse, la parábola y la circunferencia
d) Geometría no euclidiana basada en el análisis

2- Además de matemático Descartes era:

a) Filósofo
b) Físico
c) Abogado
d) Médico

3- El primer invariante matemático descubierto fue:

a) La ecuación de la recta
b) La ecuación de la circunferencia
c) El concepto de excentricidad de Apolonio
d) El discriminante b^2 -4ac asociado a una forma cuadrática

4- Una ecuación de primer grado Ax+By=C representa en el plano:

a) La solución al problema griego de bisecar el ángulo
b) Una recta
c) La proporcionalidad establecida por el teorema de Thales
d) La ecuación de un semiplano

5- Descartes muere en Suecia a causa de:

a) Vejez
b) Envenenado en el palacio de la reina Cristina
c) Pulmonía
d) Ahogado en un naufragio

6- La clave de la geometría analítica es:

a) La introducción de ejes de coordenadas
b) El método deductivo
c) El análisis matemático
d) Las ideas que se derivan de *Los elementos* de Euclides

Solución a la autoevaluación

Ejercicios

1.- Al calcular $\Delta = 4^2 - 5*5 = 16 - 25 = -9 < 0$ vemos que tenemos una elipse.

2.- La pendiente viene dada por $m = \frac{d-b}{c-a}$ y por ende la recta debe ser la forma:

$y = (\frac{d-b}{c-a})x + b$. El parámetro *b* se calcula con cualquiera de los puntos. Si *a=c* la pendiente no está definida pero la recta tiene una ecuación muy sencilla que dejamos al estudiante UNA.

3.- Basta ver que podemos encontrar un ángulo tal que:

$$-a\cos\alpha sen\alpha - \frac{b}{2}sen^2\alpha + \frac{b}{2}\cos^2\alpha + c\cos\alpha sen\alpha = 0$$

El punto es que podemos usar identidades trigonométricas bien conocidas y factorizar $\frac{b}{2}$ en la expresión anterior para obtener:

$$b\cos 2\alpha + sen2\alpha(c-a) = 0$$

Dejamos al estudiante UNA completar el cálculo.

4.- Esto es una computación directa basada en la multiplicación de matrices. No la vamos a realizar.

Preguntas de Selección Simple

1- b) La geometría analítica une el álgebra y la geometría mediante el uso de sistemas de referencia.

2- a) Descartes fue un gran filósofo autor del *Discurso del método.*

3- d) Tal como lo señala Berlinski este fue el primer invariante matemático descubierto.

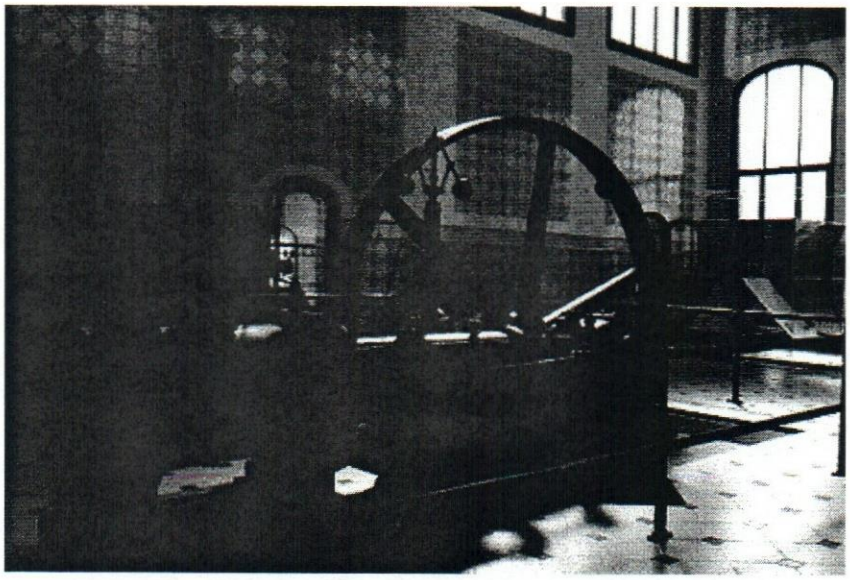
4- a) La ecuación de la recta. Esto aparece al principio de la lectura cuando caracterizan la ecuación de la recta por medio de dos parámetros.

5- c) Ver el final de la lectura.

6- a) Los ejes coordenados permiten cuantificar, asociar números y ecuaciones a los entes geométricos.

MÓDULO III

El cálculo diferencial y la Matemática en la Época moderna



ESTRUCTURA DEL MÓDULO III

Módulo III

El cálculo diferencial y la Matemática en la Época moderna

Objetivo del Módulo III

Describir la evolución del cálculo desde su nacimiento hasta su formalización y la influencia de este proceso en la matemática del siglo XX.

Contenido del módulo

III.6 El desarrollo del cálculo diferencial e integral

- Creación del cálculo en el trabajo de Newton y Leibnitz.
- Vida y obra de Leibnitz

III.7 La aritmetización del análisis

- El siglo XIX: la formalización del análisis.
- La geometría no Euclídea.

III.8 La teoría de conjuntos y la matemática del siglo XX

- El fin del siglo XIX: La obra de Cantor
- El siglo XX: David Hilbert, sus 23 problemas y su programa logicista.
- La crisis de los fundamentos de las matemáticas: Russell y Godel.
- El concepto de espacio abstracto y estructura
- Las matemáticas después de la segunda guerra mundial: el grupo Bourbaki y su influencia en la matemática y educación

Unidad 6

La naturaleza y sus leyes se escondían en la noche, Dios dijo, hágase Newton: y se hizo la luz.

Alexander Pope

Objetivo Unidad 6

Conocer el desarrollo del cálculo diferencial e integral.

Tiempo estimado de estudio

2 semanas

INTRODUCCIÓN

El cálculo diferencial e integral representó un avance crucial en el desarrollo de la matemática. Ideas como límite, velocidad instantánea o el área de regiones irregulares se llevaron a una precisión que permitió contar con la matemática que necesitaba la técnica, la física y la inminente revolución industrial. Muchas de estas ideas venían de la matemática griega pero los griegos aferrados a lo geométrico no disponían del lenguaje para desarrollar el cálculo. Como ya estudiamos, es la geometría analítica el lenguaje apropiado para desarrollar el cálculo. De hecho Fermat conocía cómo calcular máximos y mínimos usando la geometría analítica. El cálculo diferencial es fundamentalmente algorítmico y en sus inicios fue muy algebraico. La matemática griega fue estática y geométrica. Esto quizás haya frenado a matemáticos como Arquímedes a avanzar hacia la senda próxima, a lo que ahora conocemos como cálculo. También debemos resaltar que los griegos fueron escrupulosos en relación al uso de lo infinitamente grande o pequeño evitando estas ideas cuando les era posible.

Berlinski lleva al estudiante de la mano en la génesis del cálculo, tomando como hilo conductor el trabajo de Leibniz. Aquí se aleja un poco del camino trillado de vincular el origen del cálculo al trabajo de Newton en física. Examina Berlinski con detenimiento el concepto de de recta tangente, área y la vinculación entre ambos: el teorema fundamental del cálculo.

Berlinski examina el difícil concepto de límite $\varepsilon - \delta$ y se pasea por los infinitesimales y la crítica que hizo Berkeley de ellos. Habla del trabajo de formalización que inician Weierstrass y Cauchy. Esto prepara de manera natural para parte de lo que veremos en la próxima lectura: el proceso de formalización del cálculo.

Plan de instrucción

1. Repase lo que conoce de matemática I, matemática II y Cálculo Integral. En particular la idea de **límite, velocidad o derivada y el teorema fundamental del cálculo**. También puede tomar un libro de Física General (el de la UNA por ejemplo) y leer sobre los conceptos de velocidad y aceleración.

2. Ubíquese en la Inglaterra y la Europa continental de la época de Newton y Leibniz.

Lea la lectura de Berlinski con cuidado y resuma la información revelante en la línea de tiempo.

4. Complemente su información con la lectura de una biografía de Newton (el MacTutor de Historia de la matemática es un buen lugar donde ir o también la Wikipedia).

5. Recuerde ir al foro del rincón del asesor, en este caso planteamos otra disputa de prioridad: ¿Quién fue el primero en crear o descubrir el cálculo? ¿Newton o Leibniz? ¿Toma Berlinski partido por alguno de los dos? Vea el video de RTVE en su serie Universo matemático sobre estos genios y el descubrimiento del cálculo. ¡A investigar y discutir!

6. Resuma todos sus hallazgos en la línea de tiempo que está construyendo.

7. No olvide leer las notas matemáticas complementarias que aparecen la Guía Instruccional a la lectura de Berlinski.

8. Realice las actividades y ejercicios matemáticos. Recuerde que ello es fundamental para la evaluación formativa.

9. Hemos colocado un enlace al video sobre Leonard Euler, de quien se conmemoran 300 años de nacimiento.

10. ¡Ya Ud. está listo para la autoevaluación! Demuestre lo que conoce

Rincón del asesor

Esto es una disputa vieja que de hecho nace con el tema mismo. Una versión muy conocida de cómo se desarrollaron los hechos es la siguiente: hacia 1666 ya Newton conocía lo que llamamos hoy cálculo diferencial e integral. Sin embargo, no quiso divulgar su método. El mismo le proporcionaba una ventaja grande sobre el resto de los matemáticos y físicos y lo usó para realizar sus grandes descubrimientos en ambas áreas. Hacia 1676 Leibniz redescubre el cálculo infinitesimal pero publica su trabajo, obligando a Newton a revelar que ya él conocía el mismo. El terreno ya se encontraba abonado para una pelea que hizo que los matemáticos de entonces tomaran partido por Newton o Leibniz. ¿Qué cree Ud?

El problema inició una rama de las matemáticas conocida como **cálculo de variaciones.** Varios matemáticos resolvieron el problema y enviaron sus soluciones con un pseudónimo. Se dice que al leer la de Newton, Bernoulli exclamó: "¡Es Newton!" Le preguntaron, "¿Cómo lo sabe?" Y respondió, "porque conozco las garras del león (*Ex ungue leonis*)"

IV. El teorema fundamental del cálculo y las sumas telescópicas

Existen muchas maneras de demostrar el teorema fundamental, en esta nota pretendemos dar un enfoque intuitivo del mismo. Sabemos que el teorema fundamental del cálculo dice que:

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Una manera de ver el resultado es pensar que lo que ocurre entre a, b **sólo depende de lo que pasa en los extremos**. Veamos una situación similar. Supongamos que queremos calcular $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n(n+1)}$. Esto parece un ejercicio tedioso hasta que observamos que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ y aparece la magia de las sumas telescópicas. Apliquemos la observación hecha para el cálculo de la suma $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots (\frac{1}{20} - \frac{1}{21}) = 1 - \frac{1}{21}$, ¡el valor sólo depende del primero y último término! Tales sumas ocurren con frecuencia en matemática y se denominan telescópicas. ¿Tendrá algo que ver el teorema fundamental del cálculo con las sumas telescópicas?

Recordamos que:

$f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ si h es pequeño. Por otro lado la integral $\int_a^b f'(t)dt$ se puede aproximar mediante las sumas de Riemann

$$\int_a^b f'(t)dt \approx \sum_{j=1}^{n} f'(t_j)(t_{j+1} - t_j) \text{ pero}$$

$$f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \Rightarrow \int_a^b f'(t)dt \approx \sum_{j=1}^{n} f'(t_j)(t_{j+1} - t_j) \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{f(t_j + h) - f(t_j)}{h}(t_{j+1} - t_j)$$

Ahora vamos a tomar $h = t_{j+1} - t_j$ y lo sustituimos en la última suma de la expresión anterior para obtener

$$\int_a^b f'(t)dt \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{h} h = \sum_{j=1}^{n} f(t_{j+1}) - f(t_j)$$

Pero la última suma es telescópica, luego $\sum_{j=1}^{n} f(t_{j+1}) - f(t_j) = f(t_{n+1}) - f(t_1)$, y como los t_j eran una partición del intervalo, el último debe ser b y el primero a. Haciendo h arbitrariamente pequeño las aproximaciones anteriores se convierten en igualdades luego

$$\int_a^b f'(t)dt = \lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{n} \frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{h} h = \sum_{j=1}^{n} f(t_{j+1}) - f(t_j) = f(b) - f(a)$$

V. La matemática del siglo XVIII y su gran representante: Euler

La nota que presentamos es en honor de los 300 años del nacimiento de Leonard Euler (1707-1783) y pretende remediar una gran omisión en nuestro modesto trabajo. Sin duda el siglo XVIII es un siglo excitante para la matemática en general y para el cálculo diferencial en particular.

Leonard Euler

Euler era un extraordinario matemático que escribió más que ningún otro y su obra completa no ha terminado de ser publicada (van más de 70 volúmenes y se cree que llegarán a 200) a pesar de haber trabajado ciego en los últimos

años de su vida (desde 1766 en adelante). Nació en Basilea, Suiza pero vivió en Rusia la mayor parte de su vida, vida que cubre la mayor parte del siglo XVIII. Su padre que además de pastor era un matemático competente le enseñó matemática. Discípulo de Jean Bernoulli (1667-1748) se vio involucrado en las amargas disputas de esta familia de genios pero los superó a todos.

Su trabajo estuvo relacionado a la mayor parte de la matemática conocida de la época y abrió nuevos campos de trabajo como la Topología (problema de los 7 puentes de Königsberg), Cálculo de Variaciones (Ecuación de Euler-Lagrange), etc. Discutió sobre el concepto de función acercándose al concepto moderno y creando la notación que usamos $f(x)$. También la notación de sumatoria $\sum$ nos viene del trabajo de Euler. La fórmula considerada "la más bella fórmula matemática" es de su creación:

$$e^{i\pi}+1=0$$

Observe que en ella aparecen los 5 números más importantes de la matemática:

- El numero π, viejo amigo en nuestro viaje desde Babilonia
- El número e base de los logaritmos neperianos que Euler definió como la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$
- La gran invención hindú: el 0
- El número imaginario i, el salto a lo complejo
- La unidad 1 que genera todo lo demás

Voy a señalar cómo Euler descubrió otra fórmula notable. Varios matemáticos, entre ellos Jean Bernoulli, habían tratado de encontrar el valor exacto de la serie convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

Euler parte de un hecho conocido desde la época de MacLaurin (1696-1746) y de Brook Taylor (1685-1731)[1]

[1] Lo que conocemos como series de Taylor aparentemente son invención de MacLaurin y recíprocamente.

MacLaurin

Taylor

Usando las series de estos caballeros, escribimos:

$$\frac{sen\,x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots + \cdots$$

Este resultado era bien conocido por Euler. También Euler, como cualquier estudiante de bachillerato, conocía que las raíces de un polinomio determinan los coeficientes y su factorización. Por ejemplo, si tenemos un polinomio mónico $p(x)$ de segundo grado de raíces α, β entonces:

$$p(x) = (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$$

Esto puede ser generalizado a polinomios de grado superior.

Ahora Euler vuela alto. Plantea la ecuación $\frac{sen\,x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots + \cdots = 0$ que tiene como soluciones los ceros del seno salvo $x = 0$, sabemos que el seno se anula en $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots, \pm k\pi, \cdots$ y piensa que la expresión $\frac{sen\,x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots + \cdots$ puede ser vista como un polinomio de grado ¡infinito! del cual conocemos sus raíces, Euler se atreve a escribir la factorización:

$$\frac{sen\,x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \cdots + \cdots = (1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{2\pi})(1+\frac{x}{2\pi})\cdots(1-\frac{x}{k\pi})(1+\frac{x}{k\pi})\cdots$$

Recordando la identidad $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ obtenemos

$$(1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{\pi})(1-\frac{x}{2\pi})(1+\frac{x}{2\pi})\cdots(1-\frac{x}{k\pi})(1+\frac{x}{k\pi})\cdots=(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2})\cdots(1-\frac{x^2}{(k\pi)^2})\cdots$$

Si suponemos que esto es correcto, tendríamos

$$1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\cdots=(1-\frac{x^2}{\pi^2})(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2})\cdots(1-\frac{x^2}{(k\pi)^2})\cdots$$

Supongamos que expandimos el producto infinito del lado derecho y vemos el coeficiente de x^2 obtendríamos

$$-(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\cdots+\frac{1}{k^2\pi^2}+\cdots)$$

Pero si dos polinomios son iguales, continúa Euler hilando fino, sus coeficientes deben ser iguales entre si, luego

$-(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\cdots+\frac{1}{k^2\pi^2}+\cdots)=\frac{-1}{6}$ de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Un descubrimiento notable.

Debo alertar al lector que en muchos libros presentan a Euler como una especie de algebrista y algorítmico irresponsable, poco cuidadoso en relación a la convergencia de las series y sucesiones. Esto dista mucho de la realidad. En el argumento que mostramos para descubrir la notable y hermosa fórmula:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

Euler estaba consciente que había realizado varias peligrosas analogías. De hecho tardó 10 años en probar rigurosamente el mismo. Lo mismo pasaba cuando realizaba cálculos de series divergentes como

$1-2!+3!-\cdots+(-1)^{n+1}n!+\cdots$. Euler sabía muy bien que la serie es divergente y que lo que hace, al calcularla, es introducir un método de sumación. Recomendamos al lector el artículo "Euler and his work on infinite series" de Varadarajan en el Bulletin de la AMS de octubre de 2007 para profundizar en estas ideas. Vaya al Moodle del curso y disfrute del video de Euler.

Actividades y ejercicios

Actividad 1

Construya una definición de función continua en un punto usando infinitesimales. La idea es que si f es continua en $x=a\in\mathbb{R}$ y ε es un infinitesimal ¿Qué debería ser $f(a+\varepsilon)-f(a)$?

Ejercicio 2

Demuestre que en los reales adjuntándoles los infinitesimales no se puede satisfacer el principio de Arquímedes.

Sugerencia: razone por reducción al absurdo

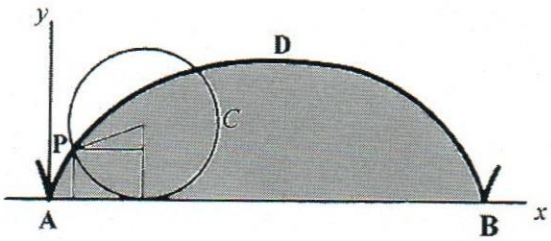
Ejercicio 3

Demuestre que un infinitesimal *dx* verifica que $dx^2<dx$

Ejercicio 4

Demuestre que usando el principio de continuidad se puede probar que entre dos números positivos siempre existe un racional.

Ejercicio 5



Supongamos que en t=0 el punto **P** está en el origen de coordenadas y que el radio del círculo es 1. Halle la ecuación de la cicloide.
Sugerencia:

Parametrice la trayectoria dividiendo el movimiento en *x* y en *y*. Observe qué ocurre con el ángulo que forma P con el centro del círculo a medida que este avanza.

Ejercicio 6

Calcule la longitud del arco que genera **P** hasta su primer rebote en el eje *x* (**B** en el dibujo de arriba)

Ejercicio 7

Calcule el área bajo la cicloide que genera **P** hasta su primer rebote en el eje *x* (región verde en el dibujo de arriba).

Actividad 8

A lo Euler pretendemos justificar el resultado de Leibniz $1-1+1\cdots=\frac{1}{2}$. Obviamente la suma infinita es divergente, pero vamos a justificar el resultado intuitivo de Leibniz. Observe que las sumas parciales de $1-1+1\cdots$ toman dos valores: 0 y 1. Así que Leibniz le asocia a la suma infinita el punto medio o promedio entre ellos. Cambiemos la serie por:

$$1-1x+1x^2\cdots$$

a) si $x=1$ obtenemos la serie numérica.

b) Demuestre que si $|x|<1$ entonces $1-1x+1x^2\cdots=\frac{1}{1+x}$

c) Demuestre que $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$. Esto justifica el resultado de Leibniz.

Autoevaluación

El test consta de dos partes. La primera parte consiste en algunos ejercicios matemáticos relacionados con las técnicas usadas por los babilonios y egipcios. La segunda algunas preguntas muy sencillas de selección simple para verificar su conocimiento del material del curso.

Ejercicios

1- Use las técnicas de Euler y el teorema fundamental del cálculo para que a partir de:

$1-1x+1x^2\cdots=\dfrac{1}{1+x}$ obtener

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

2- Demuestre que entre dos racionales siempre hay un racional.

3- Use el teorema fundamental del cálculo para demostrar que el área de un círculo de radio 1 es π.

Preguntas de selección simple

Trate de responder con la alternativa que considere más próxima a la respuesta de la pregunta.

1.- Empezaron a usar los infinitesimales para hallar el área bajo una curva y la recta tangente a una curva en un punto:

a) Eudoxio y Arquímedes
b) Newton y Leibnitz
c) El obispo Berkeley y Robinson
d) Los algebristas italianos del renacimiento

2.- El teorema fundamental del cálculo relaciona:

a) El concepto de derivada e integral como operaciones inversas una de la otra
b) La integral como área bajo una curva
c) La integral y el volumen de la esfera como lo estableció Arquímedes
d) Las sumas de Riemann y la partición de un intervalo

3.- La posición de Berlinski sobre la creación del cálculo diferencial e Integral es:

a) Indiscutiblemente producto del gran genio de Newton
b) Leibniz se adelantó a Newton un par de años
c) Fermat y Descartes son los verdaderos creadores del cálculo
d) Newton y Leibnitz lo descubren independientemente

4.- Criticó el concepto de infinitesimal en el naciente cálculo:

a) El obispo Berkeley
b) Arquímedes
c) Abraham Robinson
d) Halley

5.- De acuerdo a Berlinski la definición de límite es:

a) un concepto sencillo y natural
b) Difícil de manejar por la presencia de varios cuantificadores y números simultáneamente
c) Equivalente al uso de los infinitesimales
d) una idea que viene de los babilonios y egipcios

Solución a la autoevaluación

Ejercicios

1- Como 1= $(1+x)(1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n)-(-1)^n x^{n+1}$ entonces:

$\frac{1}{(1+x)}=(1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n)-\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+x)}$, si $|x|<1$ el último término va a 0 si *n*, de donde:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)}dx=\int_0^1 (1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots)dx \quad \text{y}$$

$$\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$$

2- Tome el punto medio entre ellos, y esto es un racional.

3- Recuerde lo que aprendió en su curso de Cálculo Integral

Preguntas de selección simple

1.- b) El uso de los infinitesimales arranca con los creadores del cálculo, Newton y Leibniz, aunque antecedentes de los mismos se pueden encontrar en la obra de Cavalieri y en la matemática del barroco.

2.- a) La importancia del teorema fundamental del cálculo es relacionar los conceptos de derivada e integral.

3.- d) Es claro a partir de la lectura que Berlinski admira a Newton y Leibnitz por igual y los considera como codescubridores del cálculo.

4.- a) Aparece tanto en la lectura como en las notas complementarias.

5.- b) Un concepto muy difícil de aprehender, el estudiante UNA tendrá que reflexionar y madurar esta idea.

Unidad 7

El siglo XIX: La aritmetización del análisis y las geometrías no euclídeas

Hilbert es el campeón de la axiomática
H. Weyl

Objetivo Unidad 7

Conocer el proceso de formalización en el cálculo diferencial y la creación de la geometría no euclídea.

Tiempo estimado de estudio

2 semanas

INTRODUCCIÓN

La matemática del siglo XIX es una matemática impresionante: la formalización del análisis matemático, la teoría de funciones de variable compleja, la aparición de las geometrías no euclídeas, el nacimiento de la teoría de conjuntos y el álgebra moderna bastarían para sustentar mi afir-mación. La lista de los matemáticos de esa centuria está compuesta por inmortales de la matemática: Gauss, Riemann, Galois, Weierstrass, Kummer, Dedekind, Cantor y Cauchy entre otros. No he incluido a Hilbert ni a Poincare por considerarlos matemáticos que cabalgan entre los siglos XIX y XX.

De nuevo Rey Pastor y Babini nos indican los hitos importantes en el desarrollo de la matemática del siglo XIX. Lo primero que examinan es el nacimiento de la geometría no euclídea, un hecho que tiene importancia diversa. Por un lado se cerraban los intentos de geómetras como Lambert y Sachieri que intentaron derivar el axioma de las paralelas del resto de los postulados de Euclides. Pero más importante que ésto es que se percibió que los axiomas tenían cierto grado de arbitrariedad y que lo único que importaba es que no fuesen contradictorios entre sí. Esto liberaba a la matemática de manera violenta de cualquier atadura con lo real, aunque matemáticos como Gauss estaban convencidos de que eran las mediciones astronómicas las que determinarían la verdad de una u otra geometría. Es sin duda una consideración transitoria y el punto de vista axiomático-abstracto se terminará imponiendo con el resultado sorprendente que las matemáticas serán cada vez más relevantes para las aplicaciones a la mayor parte de los campos. Los matemáticos como Gauss, Lobachebsky, Boliay y Riemann y su aporte al nuevo campo de la geometría no euclídea son examinados.

Posteriormente Rey Pastor y Babini en el proceso que se conoce como la aritmetización del análisis, analizan brevemente a Bolzano cuyo importantísimo trabajo no es bien conocido y por supuesto la obra de Cauchy, Abel y Weierstrass. Estos matemáticos abordan con éxito la noción de continuidad y la convergencia de series numéricas. Recordemos que Abel trató de expurgar a la matemática de las series divergentes, a las que consideraba sin sentido. También el proceso de integración es analizado por Cauchy quien, sin embargo, tiene en su trabajo algunas importantes omisiones.

El proceso de construcción de los números reales es llevado a cabo por varios matemáticos: Weierstrass, Cantor (completación mediante sucesiones de Cauchy) y Dedekind. La construcción de Dedekind será examinada en las notas matemáticas complementarias a la lectura. Sin duda, la construcción de los números reales era la base que necesitaba el proceso de formalización del cálculo, ya que de una u otra manera la aritmetización del análisis descansa

en el conjunto de los números reales, prototipo de todo lo que se desarrollaría después desde un punto de vista más abstracto y general.

Al final, los autores examinan el trabajo de Poincare y Hilbert lo que enlaza esta lectura con nuestro trabajo sobre la matemática en el siglo XX, que encontrará en el último capítulo de la guía instruccional. Pasemos ahora al estudio de este siglo de guerras y avances importantes, un siglo que prepara la explosión matemática del siglo XX.

Plan de instrucción Objetivo 7

1. Repase el concepto de límite y de número real de su curso de Matemática I, observe que las definiciones apelan a nociones intuitivas como cercano, aproximándose, etc.

2. Lea en el libro de Darío Duran *La geometría euclidiana* la importancia del axioma de las paralelas y de los intentos fallidos en demostrarlo.

3. Vuelva a la lectura de Berlinsky sobre el cálculo (Unidad 6) y el concepto de límite, así como a la crítica del obispo Berkeley sobre el uso de los infinitesimales.

4. Ubíquese como siempre en el siglo XIX, lea sobre la situación de las naciones en Europa, guerras entre ellas, etc.

5. Lea la lectura de Rey Pastor y Babini sobre la matemática en el siglo XIX.

6. Resuma los hechos más importantes en la línea de tiempo que está construyendo:

   - ¿Cuáles matemáticos trabajaron en el desarrollo de las nuevas geometrías y en qué orden cronológico?

   - ¿Cuál es la dirección que señala Riemann para el trabajo geométrico?

   - ¿Estaba Gauss al tanto de los nuevos desarrollos en geometría?

   - ¿Qué problemas tenía el cálculo de Newton y Leibniz?

   - ¿Cuáles matemáticos trabajaron en el desarrollo de la formalización del análisis?

- ¿Quiénes contribuyeron a aclarar el concepto de número irracional? ¿el de límite?

7. En las notas matemáticas complementarias encontrará una descripción de las cortaduras de Dedekind, estudie cuidadosamente su construcción. También hablaremos del disco de Poincare y del modelo de Klein-Beltrami en relación a la geometría no euclídea hiperbólica y en una breve nota, en honor a Bolzano, se presenta su definición de continuidad.

8. Es hora de demostrar sus conocimientos, resuelva la autoevaluación sabemos que Ud. lo va a hacer muy bien.

Notas matemáticas complementarias de la lectura de la matemática en el siglo XIX

I. Las cortaduras de Dedekind

Desde Eudoxio los matemáticos han tratado de resolver el problema de los "inconmensurables" o irracionales. Como ya el estudiante conoce, los pitagóricos descubrieron que existen longitudes que no corresponden a ningún número racional. Definir cuidadosamente los números reales era el problema a resolver para que el análisis matemático tuviese una fundamentación irreprochable. Dedekind logró este objetivo mediante la construcción de los reales empleando el concepto de cortaduras. Sin embargo, su exposición ha sido desplazada por la presentación del conjunto de los números reales a través del enfoque axiomático encontrándose en pocos lugares. En estas notas queremos mostrarle al estudiante uno de los hitos en el desarrollo del análisis matemático.

Recordemos que el conjunto de los racionales es un cuerpo ordenado (vea las definiciones en el texto de Álgebra I de la UNA o un poco más abajo). La idea de Dedekind es brillante y simple, se trata de construir cada real como un punto de la recta que "separa" en dos clases *A* y *B* los racionales, siendo *A* los racionales a la izquierda del punto y *B* los racionales a la derecha. Por supuesto que se deben evitar referencias cíclicas y no definir algo a partir de lo que pretendemos determinar. Dedekind logra esto de manera clara. **Cualquier definición aceptable en matemáticas tiene que basarse en cosas anteriores que estén claramente definidas.**

*Punto **r** de la recta que determina una cortadura*

Antes de dar la definición veamos el siguiente par de ejemplos. En lo que sigue *p,q* son enteros, siendo *q* no nulo. Consideremos los dos conjuntos:

$$B = \left\{ \frac{p}{q} \text{ tales que } \frac{p}{q} > 0 \text{ y } \left(\frac{p}{q}\right)^2 > 2 \right\}$$

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \text{ tales que } \frac{p}{q} < 0 \text{ o } \left(\frac{p}{q}\right)^2 < 2 \right\}$$

Observamos:

1. Los racionales se escriben como $A \bigcup B$

2. Las clases de racionales *A* y *B* son disjuntas, $A \bigcap B = \varnothing$

3. La clase *B* no está acotada superiormente y si $\frac{p}{q} \in B$ y $\frac{r}{s} > \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{r}{s} \in B$

4. La clase *A* no está acotada inferiormente y si $\frac{p}{q} \in A$ y $\frac{r}{s} < \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{r}{s} \in A$

5. La clase *A* no tiene mayor elemento y la clase *B* no tiene menor elemento

6. Todo elemento de la clase *B* es mayor que cualquier elemento de la clase *A*

La idea intuitiva es que el irracional $\sqrt{2}$ *queda determinado por la cortadura (A,B) antes definida.*

Supongamos ahora que tomamos ahora:

$$C = \left\{ \frac{p}{q} \text{ tales que } \frac{p}{q} < \frac{1}{2} \right\}$$

$$D = \left\{ \frac{p}{q} \text{ tales que } \frac{p}{q} \geq \frac{1}{2} \right\}$$

Tenemos:

1. Los racionales se particionan en las clases *C,D esto es:* $\mathbb{Q} = C \bigcup D, C \bigcap D = \varnothing$
2. La clase *D* no está acotada superiormente y si $\frac{p}{q} \in D$ y $\frac{r}{s} > \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{r}{s} \in D$
3. La clase *C* no está acotada inferiormente y no tiene un mayor elemento, además si $\frac{p}{q} \in C$ y $\frac{r}{s} < \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{r}{s} \in C$
4. Todo elemento de la clase *D* es mayor que cualquier elemento de la clase *C*

Es decir, se cumplen las mismas propiedades que en el ejemplo anterior con **una sutil diferencia: la clase D contiene un menor elemento, en este caso** $\frac{1}{2}$. Luego el punto que determina la cortadura es un racional, a diferencia que en el ejemplo anterior que era un irracional. Este es el punto básico de las cortaduras. **Los irracionales caracterizan una cortadura donde las clases A y B no tienen un mayor elemento(A) y la otra no tiene un menor elemento (B). Mientras que para un racional una de las clases siempre tiene un mayor elemento (la clase A) o un menor elemento (la clase B).** No puedo enfatizar la brillantez de la idea de Dedekind.

Estamos listos para la definición estrella de esta sección, pero antes una recapitulación corta de algunas propiedades de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}$$

.

Consideramos el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ con el orden:

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s} \Leftrightarrow 0 < \frac{r}{s} - \frac{p}{q}.$$

Sabemos además que $\mathbb{Q}$ es un grupo abeliano respecto a la suma y que si sacamos el 0 es un grupo abeliano para la multiplicación, es decir $\mathbb{Q}$ es un cuerpo. Una propiedad básica de los racionales es su densidad: entre dos racionales siempre se puede insertar otro racional.

Definición:

Una cortadura (A, B) en el conjunto de los racionales es un par de subconjuntos A, B de $\mathbb{Q}$ *que verifican*:

1. $\mathbb{Q} = A \cup B$
2. $A \cap B = \varnothing$
3. Si $\frac{p}{q} \in A$ y $\frac{r}{s}$ es cualquier elemento de $B \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$
4. El conjunto A no está acotado inferiormente y es un ideal en el sentido que si $\frac{p}{q} \in A$ y $\frac{r}{s} < \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{r}{s} \in A$

5. El conjunto *B* no está acotado superiormente y es un ideal en el sentido que si $\frac{p}{q} \in B$ y $\frac{r}{s} > \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{r}{s} \in B$

Observaciones a la definición:

- Las propiedades 1 y 2 de la cortadura usualmente se resumen de la manera siguiente: los conjuntos *A,B* particionan a $\mathbb{Q}$.

- La propiedad 3 indica que todos los elementos de la clase *A* están a la izquierda de los elementos de la clase *B*.

- No excluimos la posibilidad que el conjunto *B* tenga un menor elemento o que *A* tenga un mayor elemento si lo tiene debe ser u racional que caracteriza la cortadura (ver el ejemplo anterior) *Si la clase B no tiene un menor elemento y la clase A no tiene un mayor la cortadura está definiendo un número irracional.*

¿Cómo operamos con estas nuevas entidades llamadas cortaduras? ¿Cómo las sumamos? ¿Cómo las ordenamos? ¿Es un conjunto *completo*? Aquí completo significa "sin huecos" lo que correspondería a la idea intuitiva de que la recta real es continua.

Vamos a ir respondiendo a estas preguntas de manera pausada pero le debemos decir al estudiante UNA que las respuestas son sencillas y se basan casi en la intuición geométrica que genera el concepto de cortadura. Invitamos al estudiante UNA a reflexionar sobre las preguntas anteriores antes de continuar leyendo.

Recordamos al estudiante UNA que ***un* conjunto A está parcialmente ordenado por $\leq$ si la relación $\leq$ es transitiva, esto es si** $a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ donde $a,b,c \in$ ***A.*** Un orden se puede definir en el conjunto de todas las cortaduras mediante la relación:

$$(A,B) \leq (C,D) \Leftrightarrow A \subseteq C$$

En cualquier conjunto parcialmente ordenado se puede definir la noción de conjunto acotado superiormente: decimos que *A está acotado superiormente si existe un* $b \in M$ *tal que* $x \leq b$ para todo $x \in A$. *Un conjunto acotado superiormente tiene un supremo sí y sólo si existe una cota superior mínima. Un conjunto parcialmente ordenado es completo sí y sólo si todo conjunto acotado superiormente tiene supremo.* El siguiente resultado es fundamental.

Teorema: El conjunto de todas las cortaduras (*A, B*) es completo.

***Demostración*:**

Sea $(A_\alpha, B_\alpha)\ \alpha \in I$ una familia de cortaduras acotada superiormente por la cortadura $(M,N) \Rightarrow A_\alpha \subset M$ para todo α. Verifiquemos que:

$$(A,B) = (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c)$$

es una cortadura y ella es el candidato natural a ser el supremo de la familia $(A_\alpha, B_\alpha)\ \alpha \in I$.

En primer lugar tenemos:

1. $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cup \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \mathbb{Q}$

2. $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \varnothing$

de forma directa por la definición de complemento de un conjunto.

Verifiquemos ahora la propiedad 3:

si $\frac{p}{q} \in A$ y $\frac{r}{s}$ es cualquier elemento de $B \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ .Tomemos $\frac{p}{q} \in A$ y $\frac{r}{s}$ es cualquier elemento de B , como $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \frac{p}{q} \in A_\varphi$ donde $\varphi \in I$, al tener que $\frac{r}{s} \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c$ entonces $\frac{r}{s} \notin A_\varphi \Rightarrow \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ ya que $(A_\varphi, (A_\varphi)^c)$ es una cortadura.

Tenemos que verificar la propiedad 4 de la cortadura, esto es el conjunto A no está acotado inferiormente y es un ideal en el sentido que si $\frac{p}{q} \in A$ y $\frac{r}{s} < \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{r}{s} \in A$. Como $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ y cada A_α es no acotado inferiormente el conjunto $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ no puede estar acotado inferiormente.

Por otro lado si $\frac{p}{q} \in A$ y $\frac{r}{s} < \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \Rightarrow \frac{p}{q} \in A_\gamma$ y $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ pero A_γ es una cortadura de donde $\frac{r}{s} \in A_\gamma$. Las otras 2 partes que restan son ejercicios y actividades para el estudiante UNA. Esto termina nuestra demostración.

Veamos un poco el álgebra de las cortaduras. Por ejemplo examinemos cómo se suman las cortaduras $(A,B),(C,D)$ parece natural definir esta operación como:

$$(A,B)+(C,D)=(A+C,B+D)$$

Pero vamos a tomar un atajo. Una simplificación en el concepto de cortadura es posible mediante la observación elemental que en la cortadura (*A*, *B*) la clase *A* determina a la clase *B* y recíprocamente. Es decir podemos considerar a una cortadura como el conjunto *A* que verifica las propiedades siguientes:

- $A \neq \mathbb{Q}, A \neq \varnothing, A \subset \mathbb{Q}$
- $a \in A$ y $b < a$ entonces $b \in A$
- A no tiene mayor elemento.

Así los racionales quedan caracterizados por la siguiente propiedad de la cortadura $\sup A \in \mathbb{Q}$ y los irracionales por las cortaduras que no tienen supremo en $\mathbb{Q}$.

Luego la suma de cortaduras A y B se puede definir como la suma de conjuntos A y B. El estudiante UNA debe observar que entendemos por la suma de los conjuntos A y B al conjunto $A+B=\{z=x+y, x \in A, y \in B\}$[m].

El estudiante UNA va demostrar que esto es una cortadura, también invitamos al estudiante UNA a pensar cuál es el elemento neutro para la suma antes definida, si esta operación es conmutativa etc.

Finalmente la definición de los números reales.

Definición:

El conjunto de todas las cortaduras A con el orden y operaciones antes definidas constituyen el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.
Más información en: http://es.wikipedia.org/wiki/Cortaduras_de_Dedekind

[m] También se llama suma de Minkowski de dos conjuntos.

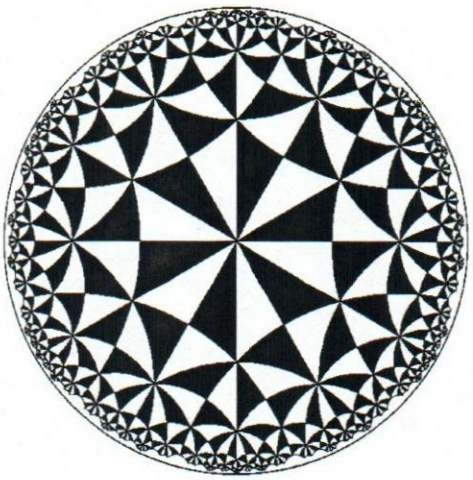
R. Dedekind

Nace en Braunschweig (Brunswick en castellano), Alemania el 6 de octubre de 1831. Uno de los más destacados matemáticos del siglo XIX. Es junto con Cantor uno de los creadores del concepto de infinito actual en matemática. Su trabajo en la fundamentación del análisis es muy importante construyendo de manera sólida el continuo de los números reales mediante el expediente de las cortaduras. Destacó también su trabajo en el campo del álgebra y los números algebraicos introduciendo el concepto de ideal e ideal principal, fundamentales para desarrollar una teoría de factorización en los anillos. También divulga y esclarece la Teoría de Galois para los matemáticos alemanes. Fue un matemático solitario, que nunca se casó y vivió siempre con su familia.
Muere en 1916 en la ciudad que lo vio nacer.
Para mas información:

http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Dedekind.html
http://es.wikipedia.org/wiki/Julius_Wilhelm_Richard_Dedekind

II. El disco de Poincare

Los matemáticos tardaron en entender el significado de la aparición de las geometrías no euclídeas. Lo primero era entender que no había una geometría verdadera y que existía cierto grado de arbitrariedad al escoger los axiomas de una teoría matemática.



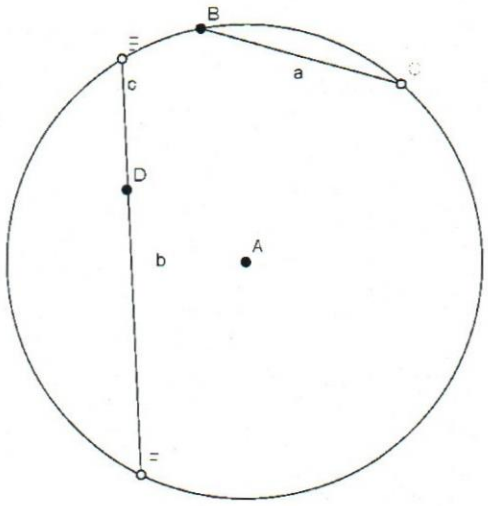
Mosaicos de Escher en el disco de Poincare[n].

[n] Cada mosaico del dibujo tiene el mismo tamaño.

Era mucho más importante que de un sistema axiomático no se derivaran contradicciones, es decir que el sistema fuese **consistente.** También se requería que los axiomas fueran independientes: un axioma no debería ser consecuencia de los otros.

En el caso de las geometrías no euclídeas los matemáticos establecieron pruebas de consistencia relativas: si la geometría euclidea era consistente también lo era la geometría no euclidea. Para lograr esto construían un modelo euclídeo de los objetos que representaban la geometría no euclídea. Si esta teoría tenía contradicciones, éstas se reflejarían en la geometría euclídea a través del modelo.

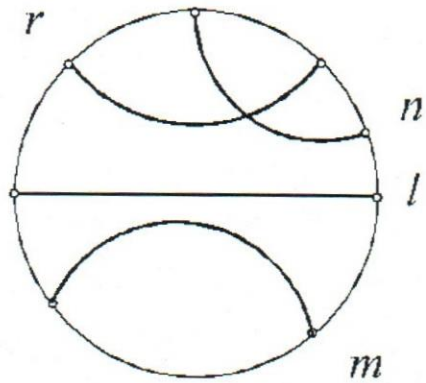
Una de las posibles negaciones del axioma de las paralelas es que dada una recta L y un punto fuera de ella es que existen infinitas rectas paralelas a L. Klein y Beltrami construyen un modelo de esa geometría que **usa el interior de un círculo como plano y las cuerdas como las líneas del plano**. Observe que los puntos del círculo no están en el plano. *Dos rectas (cuerdas) se denominan paralelas si no se cortan.*



Modelo de Klein-Beltrami

Así las líneas **a** y **b** del dibujo arriba son rectas paralelas, Observe que por D pasan infinitas cuerdas que no cortan (son paralelas) a la cuerda **a.** Así si se presentase una contradicción en la geometría hiperbólica, ella se traduciría en una contradicción en la geometría euclídea del interior del círculo.

El modelo del disco de Poincare es similar al de Klein-Beltrami y se basa en la introducción de una distancia que aleja los puntos a medida que se acercan al borde del círculo. Las rectas en este caso son diámetros o círculos ortogonales al círculo unidad.



Disco de Poincare

Vemos que los arcos r, n, l, m son rectas en este modelo de la geometría hiperbólica y por ejemplo las rectas l, m son paralelas entre sí ya que no se cortan.

H. Poincare

Matemático francés nacido el 29 de abril de 1854. Se le considera junto a David Hilbert como los últimos matemáticos que abarcaron el conocimiento matemático de su época. Fue además un importante filósofo de la ciencia cuyo libro más importante es *Ciencia e Hipótesis* y fue uno de los pioneros en el estudio de la relatividad. Su trabajo incluye importantes aportes en el campo de la mecánica celeste donde abordó el problema de los tres cuerpos desde un enfoque novedoso, analizándolo desde un punto de vista cualitativo. Estudió el grupo de transformaciones fuchsianas, vinculando las ecuaciones diferenciales lineales, la geometría hiperbólica y la teoría de invariantes. Enunció el problema conocido como la Conjetura de Poincare recientemente resuelto por Perelman, que propulsó el desarrollo de la topología algebraica. Asoció a un espacio topológico su grupo fundamental para estudiar las propiedades del mismo.

Los matemáticos se quejaban del estilo intuitivo de sus demostraciones, omitiendo los cálculos tediosos. Poincare en su libro *El valor de la ciencia* cataloga a los matemáticos como geómetras y analistas; los primeros eran

intuitivos y visualizaban en el espacio los resultados. Los segundos eran formales y rigurosos. Poincare sin duda fue un matemático geómetra. Al final de su vida fijó posición en relación a la naciente teoría de conjuntos, manifestándose en contra de ella pudiéndose considerar a Poincare como uno de los precursores del intuicionismo. Muere en París en 1912.

III. El concepto de continuidad según Bolzano

El concepto de continuidad de Bolzano, enunciado en 1818, es:
"Una función *f (x)* varía de acuerdo a una ley de continuidad para todos los valores de *x* entre ciertas cotas si cuando tomamos uno de estos *x* la diferencia *f (x+a)-f (x)* se puede hacer más pequeña que cualquier cantidad siempre que podamos tomar *a* tan pequeño como queramos"

Por supuesto que el estudiante puede ver en el mismo el concepto usual de continuidad definido por Cauchy con su epsilon y delta: *decimos que* f *es continua en* x_0 *sí y sólo si dado cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $|w| < \delta \Rightarrow |f(x_0 + w) - f(x_0)| < \varepsilon$. De hecho la definición de Bolzano es preferible ya que es más intuitiva que la muy formal definición de Cauchy. Le recordamos al estudiante que el difícil concepto de continuidad invariablemente asociado al de límite nos viene desde los griegos y que tardó más de 2000 años en ser enunciado de la forma que conocemos.

Bolzano pudo demostrar que una función que verifica una ley de continuidad y que cambia de signo se debe anular en algún punto. Es lo que conocemos como el *Teorema del valor medio* de Bolzano, resultado importante desde el punto de vista teórico y que se aplica para ubicar raíces de ecuaciones generando el método de bisección.

Bolzano es un matemático de alguna forma olvidado pero lo consideramos uno de los matemáticos más innovadores del siglo XIX.

Bolzano
Matemático checo, aunque en ese momento lo que se conoce como Checoslovaquia está bajo el dominio del imperio Austro-Habsburgo. Su padre era de origen Italiano. Nace en Praga en el año de 1781 y fue un clérigo muy dedicado aunque racionalista en su aproximación a la religión. Hacia 1800 estudia matemática pero pronto cambia hacia el estudio de teología y filosofía. Nunca abandona completamente el estudio de la matemática.

Se presenta a concurso por las cátedras de Filosofía de la Religión y Matemática en la Universidad Charles. Gana ambos concursos pero las autoridades prefieren que dicte Filosofía. La compleja situación política y su visión de lo religioso afectan a Bolzano quien pierde su cátedra y es puesto bajo arresto domiciliario. Nada de lo que escribe puede ser publicado lo que afecta la divulgación de su importante obra. Su trabajo matemático es descubierto después de su fallecimiento.

Su obra matemática es importante definiendo de manera moderna el concepto de continuidad. También demuestra la existencia de una biyección entre los intervalos [1,3] y [1,2], señalando que no es posible establecer una biyección entre el conjunto de los números naturales y cualquiera de estos intervalos, por lo que se le puede considerar como el precursor directo de la teoría de conjuntos. Establece el importante *Teorema del valor medio* y el principio de acumulación de una infinidad de puntos que conocemos como *Teorema de Bolzano-Weierstrass.*

Muere en Praga en 1848. Sus obras se empiezan a publicar en 1862, quince años después de su muerte. Entre ellas destaca su trabajo titulado *Paradojas del infinito.*

Actividades y ejercicios matemáticos

Ejercicio 1. Demostrar que en el conjunto de todas las cortaduras la relación:

$$(A,B) \leq (C,D) \Leftrightarrow A \subseteq C$$

es una relación de orden.

Ejercicio 2. Si (A,B) es una cortadura entonces $B = A^c$

Ejercicio 3. Complete la demostración del teorema de completitud de las cortaduras de Dedekind.

Ejercicio 4. Demuestre que la suma de cortaduras está bien definida, es decir que $A+B$ es una cortadura si A,B son cortaduras.

Ejercicio 5. Enuncie y demuestre las propiedades básicas de la suma de cortaduras:

- La propiedad conmutativa
- La propiedad asociativa

Actividad 1. Discuta y construya la multiplicación de cortaduras.
Sugerencia: considere diversos casos.

Ejercicio 6. ¿Cómo define una cortadura positiva? ¿Cómo define una cortadura negativa?

Ejercicio 7. Sea 0 la cortadura $\left\{\frac{p}{q}<0\right\}$. Demuestre que $0+A=A$ para cualquier cortadura A.

Actividad 2. Utilizando cuidadosamente el concepto de número real y la definición de Bolzano, demuestre el *Teorema del valor medio.*

Autoevaluación

El test consta de dos partes. La primera parte consiste en algunos ejercicios matemáticos relacionados con la fundamentación del análisis y los temas tratados en la lectura y las notas matemáticas. La segunda consiste en algunas preguntas muy sencillas de selección simple para verificar su conocimiento del material del curso.

Ejercicios

1.- Demuestre usando la definición de Bolzano que si una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en a y $f(a)>0$, entonces existe un intervalo $(a-\delta,a+\delta)$ tal que $x\in(a-\delta,a+\delta)\Rightarrow f(x)>0$

2.- Construya la definición de la cortadura $-A$ (opuesta de A) y demuestre que $A+(-A)=0$

3.- Demuestre que en el modelo de Klein-Beltrami dos puntos cualesquiera determinan unívocamente una recta en el plano hiperbólico (interior del círculo)

4.- Demuestre usando cortaduras de Dedekind que la suma de un racional y un irracional es, necesariamente, un irracional.

Preguntas de selección simple

1.- De acuerdo a lo discutido en la lectura la historia de la matemática más detallada y extensa escrita es:

a) La de Ptolomeo de Alejandría
b) La de Euclides
c) La de Hofmann
d) La de M. Cantor

2.- Al principio del siglo XIX los métodos infinitesimales:

a) Fueron sustituidos por el rigor del análisis
b) Estaban aún presentes en el uso matemático
c) Fueron sustituidos por la geometría no euclídea
d) Fueron criticados por el obispo Berkeley

3.- Reintroduce el rigor en las matemáticas basándolas en el método deductivo:

a) Gauss
b) Riemann
c) Pitágoras
d) Newton

4.- Uno de los precursores de las geometrías no euclidianas es:

a) Hipócrates
b) Bolzano
c) Saccheri
d) Leibniz

5.- Gauss en relación a la geometría no euclidiana pensaba:

a) Que era un disparate matemático
b) que estaba contenida en el trabajo de Euclides
c) no estaba al tanto de su desarrollo
d) trabajo sobre ella pero no quiso publicar nada por lo polémico del tema

6.- Trata de manera sistemática de fundar el análisis:

a) Cauchy
b) Euler
c) L'Hopital
d) Jean Bernoulli

7.- Pensaba que el uso de las series divergentes era "algo diabólico":

a) Zenón
b) Newton
c) Abel
d) Gauss

Solución a la autoevaluación

Ejercicios

1.- Si la función verifica que $f(a)>0$ basta que tomemos $\varepsilon=\frac{f(a)}{2}>0$ y $\delta>0$ tal que si $x\in(a-\delta,a+\delta)\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\frac{f(a)}{2}\Rightarrow 0<\frac{f(a)}{2}<f(x)<\frac{3f(a)}{2}$ para los puntos en el intervalo $x\in(a-\delta,a+\delta)$

2.- Lo dejamos al estudiante UNA.

3.- Basta ver que dos puntos cualesquiera del interior del círculo determinan (unívocamente) una cuerda.

4.- Las cortaduras que nos proporcionan los números irracionales son aquellas para las cuales su supremo no existe (no es racional). Si el supremo de la suma existiese y fuera racional, al existir el supremo de una de las cortaduras, el de la otra también existiría y sería racional. Invitamos al estudiante UNA a verificar los detalles.

Preguntas de selección simple

1. d) La historia de M. Cantor (no confundir con el creador de la teoría de conjuntos) es una de las obras más completas (hasta el siglo XIX) que traza la evolución de las ideas matemáticas.

2. b) Tardaron un poco en verse expulsados del cálculo por el trabajo de Cauchy entre otros.

3. a) Gauss influenciado por el pensamiento de Pfaff reintroduce las pruebas rigurosas.

4. c) Saccheri estuvo a punto de descubrir la geometría no euclídea, solamente su excesivo respeto al trabajo de Euclides se lo impide.

5. d) Gauss no quiso desatar "la ira de los beocios" y se abstuvo de publicar sus ideas sobre el axioma de las paralelas. Fue un gran admirador de Lobachevsky a quién propuso como miembro honorario de la Academia de Ciencia.

6. a) Cauchy como ya hemos mencionado.

7. c) La expresión es de Abel.

Unidad 8

La matemática en el siglo XX

Objetivo Unidad 8

Conocer la dirección principal de la matemática en el siglo XX y el nacimiento de la Teoría de Conjuntos.

Tiempo estimado de estudio

2 semanas

INTRODUCCIÓN

El siglo XX vio la mayor cantidad de matemática producida jamás, la solución de importantes problemas como la demostración del "último teorema de Fermat", el uso intensivo del método axiomático y la aplicación de la matemática en múltiples áreas del conocimiento y la técnica: mecánica cuántica, economía, medicina etc. Podemos afirmar que fue el siglo de la matemática. Debido a la naturaleza múltiple y profunda de la matemática del siglo XX vamos a concentrarnos en algunas ideas que corresponden a la primera mitad del siglo. Es imposible describir el panorama de la matemática del siglo XX sin escribir un tratado (probablemente de varios volúmenes), lo cual escapa, además, a mi competencia. Nos concentraremos en los siguientes aspectos de la matemática del siglo XX:

1. **El uso de la teoría de conjuntos a partir del trabajo de Cantor**
2. **El programa de Hilbert y su famosa lista de problemas**
3. **El concepto de estructura en matemática y el grupo Bourbaki**

Estos tres aspectos están vinculados. La teoría de conjuntos proporciona un lenguaje adecuado para el resto de la matemática, podemos afirmar con completa seguridad, que en matemática "todo es conjunto". Además el trabajo de Cantor y Dedekind daba legitimidad a un evasivo concepto necesario para entender en profundidad la idea de límite y de cálculo diferencial: el infinito.

Hilbert, por otro lado, adopta de manera decidida el trabajo de Cantor como el lenguaje para presentar, de manera axiomática, una teoría matemática. Hilbert dice "nadie podrá arrojarnos jamás del paraíso que Cantor ha creado para nosotros". Como veremos fue un paraíso con un pecado original que se manifestó con el surgimiento de paradojas. A raíz del surgimiento de las antinomias en la Teoría de Conjuntos, Hilbert pretendió poner toda la matemática a salvo de contradicciones mediante un poderoso programa lógico. Hilbert intentó, en su programa de fundamentación de la matemática, tres cosas, en primer lugar formalizar la matemática escribiéndola en un lenguaje donde no se colase lo intuitivo. También quería librar Hilbert a la matemática de contradicciones mediante la elaboración de pruebas de en el devenir de la matemática del siglo XX con la lista de problemas que propuso en el Congreso de París de 1900.consistencia absoluta. Por último, Hilbert quería mostrar que la matemática era completa, en el sentido que toda proposición verdadera pudiese ser demostrada a partir del tinglado lógico matemático y los axiomas de la teoría. Como veremos, este programa era irrealizable en su totalidad pero marcó una manera de entender y enfocar la matemática. También, Hilbert contribuyó de manera decisiva

Bourbaki adopta el enfoque de Hilbert de manera sistemática. Pretenden presentar de manera rigurosa, axiomática y abstracta toda la matemática que consideran relevante. Para ello escriben una obra titulada *Los elementos de las matemáticas* (Elements des Mathematiques) que contenía el saber matemático moderno. El primer libro de 1939 es sobre la Teoría de Conjuntos donde establecen la notación y estilo que prevalecerá en el resto de la obra. Usan la estrategia de Hilbert en la resolución de muchos problemas: crear una estructura axiomática donde el problema queda inmerso y resolver el mismo en este contexto. Es esa idea de **estructura matemática** la que unifica el monumental trabajo emprendido por Bourbaki y que además unifica, en su visión, la matemática.

Bourbaki arremete contra la intuición geométrica, señalando ésta como inútil (Godement) para el desarrollo de nuestra ciencia. Esta tendencia hacia la abstracción marcó una pauta en la forma de desarrollar la matemática e incluso pasó a la Educación Matemática aunque no directamente por medio de un programa establecido por Bourbaki como aclaró Dieudonne.

El plan de la lectura es el siguiente. Comenzamos hablando del concepto de conjunto e infinito. Una breve biografía de Cantor será presentada. Posteriormente hablaremos del trabajo de Hilbert, su vida y su programa. Comentaremos sobre su decisiva ponencia que contenía sus celebres 23 problemas presentada en el Congreso de París de 1900. Mostraremos las limitaciones de su programa formalista que surge a partir del trabajo de Godel.

Al final, el concepto de espacio abstracto y estructura matemática, fundamentales para la matemática del siglo XX, serán presentados a partir del trabajo del grupo de matemáticos franceses conocido como Bourbaki. Referiremos al lector algunas historias y anécdotas de este grupo de matemáticos que influyó no sólo en la matemática sino en la forma como la enseñamos.

Hemos tratado de mantener la estructura del trabajo en esta Unidad de la Guía Instruccional. Sin embargo, me parece más natural incluir las notas matemáticas dentro de la propia lectura.

Plan de instrucción Objetivo 8

1. Resuma los hechos más relevantes del siglo XX: guerras mundiales, revolución rusa, avances en la física, nuevas corrientes artísticas: cubismo, surrealismo, etc. Surgimiento del cine, la televisión y la radio.

2. Lea la lectura 10 escrita por el Prof. José Gascón titulada **La matemática en el siglo XX.**

3. Resuma la información relevante sobre Cantor, su vida y obra.

4. Resuma la información relevante sobre la teoría de conjuntos de Cantor: ¿Cuál es el concepto de conjunto para Cantor? ¿Cuál es la definición de conjunto infinito? ¿Existen diferentes tipos de infinito? ¿Es el cardinal de los números reales mayor que el de los números naturales? ¿Qué problemas se presentaron con los fundamentos de la Teoría de Conjuntos? Vaya a la referencia

   http://es.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Zermelo-Fraenkel para ver los axiomas más usados como base para la Teoría de Conjuntos.

5. Resuma la información relevante sobre Hilbert, su vida y obra. Observe la importancia educativa e investigativa de David Hilbert.

6. Vea en el moodle del curso el documento Grundlagen der Geometrie: http://academico.una.edu.ve/foro/file.php/40/MaterialesInstruccionales/hilbertgrundlagen-pdf.pdf ¿Qué importancia tuvieron los Grundlagen? ¿Qué defectos tenía la axiomática de Euclides? ¿Qué es el *Zahlbericht*?

7. Resuma la información relevante sobre el programa de Hilbert. ¿Por qué fue destruida la pretensión de Hilbert de mostrar que la Matemática era completa?

8. Vea en el Moodle del curso la Conferencia de Hilbert en París: http://academico.una.edu.ve/foro/mod/resource/view.php?id=928.
   Visite los otros enlaces sugeridos para tener una visión más completa de los problemas de Hilbert.

9. Resuma lo más relevante sobre Nicolás Bourbaki y su matemática. ¿Qué es una estructura? ¿Qué tipos de estructuras existen? Vaya a la biblioteca del centro local y en los libros de matemática encuentre los axiomas que caracterizan estructuras de los distintos tipos.

10. Vaya al Foro y discuta con sus compañeros el tema propuesto.

11. Lea la referencia sobre Nicolás Bourbaki en el moodle del curso: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Bourbaki.asp.

12. Resuelva los ejercicios y actividades matemáticas propuestos.

13. El test de autoevaluación lo espera, seguro que Ud. no tendrá problema alguno en resolverlo.

Lectura: *La matemática en el siglo XX.*
José Gascón

Breve perfil biográfico de George Cantor

George Cantor

I. Algunos datos familiares, estudios y carrera académica

George Cantor nació en San Petesburgo (posteriormente Leningrado) en 1845 en el seno de una familia burguesa. Nace en Rusia aunque su carrera la realiza fundamentalmente en Alemania y se le considera un matemático alemán, aunque Cantor nunca olvidó su tierra natal y siempre manifestó nostalgia por la Rusia perdida. Su padre George Cantor nació en Copenhague y fue formado bajo la religión luterana, aunque, probablemente, tanto su madre como su padre, provienen de una familia de judíos conversos. Su madre fue María Anna Böhm, de religión católica y con gran afición por la música.

Después de algunos fracasos en los negocios, el padre de Cantor tuvo éxito en el mercado de valores. Su padre era una persona estricta e inculcó en el joven Cantor el amor por el trabajo, la religión y la disciplina. Cantor ingresa relativamente mayor a la escuela y parte de su formación inicial la recibió en su hogar por medio de un tutor. Al terminar el Gymnasium (bachillerato alemán) Cantor quiere estudiar matemática pura. Sin embargo tuvo una moderada oposición de su padre. Este le pidió que estudiase Ingeniería lo cual Cantor realizó del año 59 al 62, en la escuela de formación profesional de Darmstadt. El padre de Cantor quería que su hijo fuese "una estrella brillante en el firmamento de la Ingeniería". El conflicto se resolvió cuando el padre aceptó la vocación de su hijo permitiéndole estudiar matemática en la Universidad de Zurich a partir del año de 1862. Algo similar ocurrió con

el gran matemático John Von Neumann que se graduó de químico y matemático por la presión de su padre quién consideraba la matemática como una profesión poco rentable.

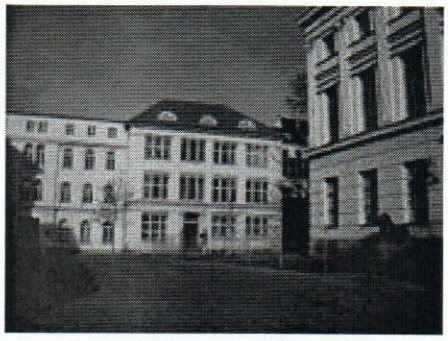
Cantor interrumpe brevemente sus estudios de matemática al morir su padre para luego continuarlos en la Universidad de Berlín. Berlín era el centro del mundo matemático alemán, la universidad del gran Weierstrass, de Kummer, de Kronecker, etc. Posteriormente dejó de ser el centro de gravitación de la matemática alemana cuando éste se desplazó a Gotinga (Göttingen), bajo la influencia de Hilbert de quién hablaremos más tarde. Debemos señalar que la competencia académica entre las dos universidades de Berlín y Gotinga fue favorable para el desarrollo matemático alemán. Gotinga fue la universidad del gran Gauss por lo que la competencia entre los dos centros llevaba cerca de un siglo.

Cantor se doctora mejorando los resultados de Gauss sobre la teoría de números en 1867 y tuvo como tutor de tesis a Kummer y sirvió de segundo tutor Weierstrass.

El sistema de educación alemán es muy estricto para la contratación y obtención de una posición fija y remunerada en la universidad. El doctorado obtenido no le garantizaba a Cantor una carrera académica. Grandes matemáticos han sufrido penurias para encontrar un puesto en la enseñanza superior alemana. Recordemos el caso de Weierstrass quién enseñó por años en secundaria antes de obtener una posición en la universidad de Berlín, logrando ésto cuando el matemático Richelot de Königsberg interviene a su favor. Además de esta favorable recomendación, el nombre de Richelot debe ser recordado por ser el matemático que crea el sistema de seminarios tan importante en el desarrollo de la investigación matemática alemana del siglo XIX.

Al doctorarse Cantor se le presenta la posibilidad de trabajar en educación secundaria pero le preocupa abandonar sus investigaciones. De hecho trabaja algún tiempo en un Gymnasium de señoritas. Se considera un investigador matemático no un docente de bachillerato. Una plaza de privatdozent aparece vacante en la Universidad de Halle. Un *privatdozent* ganaba un salario ofreciendo cursos a grupos de estudiantes que le pagaban lo estipulado de común acuerdo. La Universidad de Halle era de poca importancia en el sistema universitario alemán, sin embargo, Cantor se sintió aliviado al presentársele la posibilidad de continuar su trabajo como matemático.

Aprueba la habilitación (especie de concurso de oposición) con un trabajo sobre teoría de números. La Universidad de Halle contaba entre sus miembros a Heine que realizó destacadas investigaciones de análisis, por ejemplo en el concepto de continuidad y convergencia uniforme y el celebrado teorema de Heine-Borel. La influencia de Heine es importante en el trabajo de Cantor. Heine le plantea a Cantor un problema ya abordado por Riemann: la unicidad del desarrollo en serie de Fourier. Es a partir de este problema que fluye la matemática de Cantor de manera imparable. Luego el trabajo investigativo de Cantor se movió del álgebra al análisis.



Edificio de los Leones, Universidad de Halle

En 1872 Cantor conoce a quien fue su colaborador por un largo período de tiempo: Richard Dedekind.

Richard Dedekind

Dedekind fue una persona reservada que nunca se separó de su madre y de su hermana por lo que la colaboración con Cantor fue epistolar. Las cartas entre Cantor y Dedekind sobre la teoría de

conjuntos, el concepto de número real y su construcción y lo asombroso del concepto de infinito son un caso notable de colaboración matemática. Al morir Heine en 1881 su cátedra le es ofrecida a Dedekind quién no la acepta, causando la molestia de Cantor, quién había elaborado la terna de profesores para sucederle y colocado a Dedekind en primer lugar. Cantor y Dedekind dejan de comunicarse, lamentablemente, por un largo período de tiempo. Las heridas empiezan a cicatrizar después de conversar en la Conferencia Internacional de Zurich de 1897 y el trabajo conjunto se restablece en 1899. Pero ya en este momento la carrera matemática de Cantor venía en claro declive.

La carrera docente de Cantor es importante, dictó clases por más de cuarenta años pero nunca logró una posición como profesor en una mejor Universidad. Tuvo un solo estudiante de doctorado: Alfred Barneck, quizás porque no se encontraba en una Universidad que atrajese a estudiantes dotados para la matemática.

Kronecker

Se cree que Cantor no logró una mejor posición en el sistema universitario alemán debido a lo polémico de su trabajo sobre el infinito y a la oposición de algunas figuras destacadas del mundo académico. En particular, Kronecker fue el que más oposición le presentó. No voy a entrar en detalles de la disputa entre ambos, existen muchas crónicas de ello donde Kronecker aparece usualmente como villano y Cantor como héroe. Lo cierto es que Kronecker tenía un sistema filosófico en torno a la matemática y sus objetos. Es famosa su frase "Dios creó los números naturales, lo demás es creación del hombre". Se cuenta que cuando Lindemann demostró π que era trascendente, Kronecker le escribió, felicitándolo de manera sarcástica, por su descubrimiento. Kronecker concebía los números de manera constructiva y un irracional era la idealización de un proceso donde en cada paso

intervenían intervalos de extremos racionales. *Pero era un proceso nunca acabado.* De acuerdo a esa concepción no existían los números trascendentes. Por supuesto que con semejante sistema de ideas Kronecker iba a reaccionar contra la teoría de conjuntos de Cantor. Todo apunta también a que intentó evitar que los artículos de Cantor fueran publicados y que Cantor lograra abandonar la Universidad de Halle. Kronecker no se ganó tampoco la simpatía de Hilbert, probablemente por su cerrada filosofía de la matemática.

Se puede considerar que una carrera universitaria en una universidad de segunda categoría, la disputa con Kronecker y el mediano reconocimiento de su importantísimo trabajo matemático contribuyeron al deterioro de su salud mental y física. Quizás uno de los pocos reconocimientos que se le hizo en vida fue el nombramiento como primer presidente de la Sociedad Matemática Alemana, sumando esto a reconocimientos en Noruega e Inglaterra. Se puede aplicar la frase que nadie es profeta en su Tierra: la Academia de Berlín nunca le reconoció incluyéndolo como miembro de la misma.

Cantor y su persona

Cantor además de ser un matemático destacado tenía una afición por la música que heredó de sus padres. Era un violinista competente y disfrutaba de largas veladas musicales que organizaba en su excelente casa de la calle Händelstrasse (calle que lleva por coincidencia el nombre del gran músico Händel). Cantor se casó con Vally Guttmann en 1874, con ella tuvo seis hijos: 2 varones y cuatro hembras.

Cantor y su esposa

La muerte de su primogénito hacia finales del siglo XIX le causó una profunda depresión. El hecho es que Cantor tuvo que ser recluido en varias oportunidades en sanatorios mentales. Investigaciones desde el punto de vista clínico realizadas por el historiador de la matemática Ivor Grattan-Guinness señalan que Cantor era un maniaco-depresivo, sin embargo esto no toma en cuenta la tremenda soledad en la que desarrolló su trabajo y la oposición que éste obtuvo. Quizás el concepto de infinito y en particular la hipótesis del continuo atenten contra la salud mental de cualquier persona.[o]

Finalmente en 1916 Cantor fallece en un hospital, a pesar de haber manifestado su deseo de morir en su casa, en la cual vivió por cerca de 40 años. Al parecer, el desarrollo de la Primera Guerra Mundial influyó en la decisión de los familiares que no permitieron que Cantor regresara a su casa ya que la situación de todos era muy precaria[p].

Teoría de Conjuntos y el infinito

El trabajo de Cantor en Teoría de Conjuntos fue motivado por el estudio de las series trigonométricas. Debemos señalar que el estudio de las series de Fourier contribuyó a esclarecer el concepto de función, integral y conjunto. Así vemos cómo un tema matemático específico y los problemas asociados a ese tema puede impulsar el desarrollo de ideas fundamentales y básicas. No vamos a explicar el problema de la unicidad del desarrollo en serie trígono-métrica sino más bien a explicar la noción de conjunto y las importantes concepciones alrededor de esta idea. Sin duda, la noción de cardinal es la más importante. Además de su propio trabajo sobre series trígonométricas debemos señalar la influencia en la creación de la teoría de conjuntos de la obra de Weierstrass quien, en relación con su trabajo de funciones analíticas demostró el teorema de Bolzano-Weierstrass en el cual el concepto de conjunto infinito de puntos es la hipótesis central. La clasificación de las singularidades realizada por Hurwitz de una función de variable compleja fue un temprano éxito de la teoría de conjuntos.

Para Cantor un conjunto (Menge) es "cualquier colección constituida por objetos separados de nuestra intuición o pensamiento". El lector debe notar que esta definición no alcanza el rigor que se

[o] El matemático ruso Aleksandrov sintió que enloquecía al intentar por un año resolver este problema.
[p] Contra esta asunción podemos decir que el hospital donde fue recluido Cantor pasaba por una situación crítica y que Cantor allí padeció hambre.

desarrolló en la matemática (geometría y análisis) durante el siglo XIX, impulsado por Cauchy, Weierstrass, Hilbert, Pfaff , Riemann y Frege entre otros. Es una definición que recuerda las definiciones que aparecen en *Los Elementos* de Euclides. Euclides decía que punto es lo que "no tiene partes". Es decir lo atómico, lo que compone el resto de las cosas. Sin duda es una definición que apela a la intuición, a lo visual, a lo geométrico. Pero no es una definición rigurosa. Pasa lo mismo con la defi-nición de conjunto de Cantor. Era solamente el punto de partida para el trabajo que sobre cardinalidad y el infinito va a desarrollar.

A continuación explicaremos una serie de ideas importantes en las notas matemáticas que siguen:

1. Contar y la idea de biyección
2. El concepto de infinito según Cantor y Dedekind
3. La numerabilidad de Q
4. La no numerabilidad de IR
5. El teorema de Cantor sobre el conjunto de partes
6. Las paradojas en la teoría de conjuntos

La idea de definir lo infinito proviene de Dedekind y Cantor usando la aparente propiedad contradictoria de que para conjuntos infinitos el todo no es mayor que las partes. Antes de ver esto analizaremos el concepto de cardinal de un conjunto.

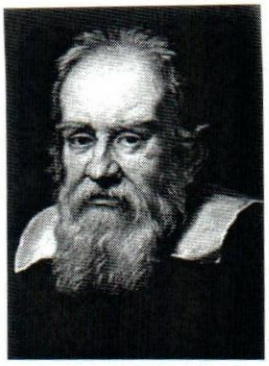
Notas matemáticas complementarias de la lectura *matemátrica del siglo XX*

1. Contar y la idea de biyección

La idea de contar está asociada a la idea de biyección, **decimos que dos conjuntos A, B tienen la misma cantidad de elementos o cardinal si existe una biyección** $f: A \to B$. Así los conjuntos $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b,c\}$ tienen el mismo cardinal, pudiendo ser la biyección $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = 6$ aunque existen otras posibilidades. Es decir, establecer una biyección entre dos conjuntos permite establecer que ambos conjuntos tienen algo en común: el mismo cardinal o número de elementos.

2. El concepto de infinito según Cantor y Dedekind

Ya Galileo había notado que existen tantos números naturales como cuadrados. Esto le pareció paradójico y descartó el uso del infinito en matemática. Cantor y Dedekind tuvieron una idea brillante (Bolzano se anticipó a los dos pero no entraremos en detalles) La propiedad de existir una biyección entre el conjunto y una parte de él es lo que caracteriza a un conjunto infinito.



Galileo Galilei (1564-1642)

DEFINICIÓN: **Decimos que un conjunto A es infinito sí y sólo si existe una biyección** $f: A \to B,\ B \subsetneq A$

Observe, retomando el ejemplo de Galileo, que f definida como:

$f: IN \to C$

$f(n) = n^2$

es una biyección donde *IN* son los números naturales y $C = \{0,1,4,9,\cdots\}$ es el conjunto de todos los cuadrados.

Luego un conjunto es infinito si se puede poner en correspondencia biunívoca con una parte propia. Esto es la caracterización que dan, tanto Dedekind como Cantor, de conjunto infinito. De esta manera, la aparente propiedad paradójica de los conjuntos infinitos de poder establecer una biyección con una parte propia sirve para definir de manera *rigurosa* el concepto de infinito.

Posteriormente, Cantor examina la noción de conjunto **numerable** que aparece en su trabajo sobre las series trigonométricas. De alguna manera lo numerable es el primer escalón dentro de la larga escalera del infinito. **Demuestra un resultado sorprendente: que el conjunto de los números racionales, que es denso en la recta, es**

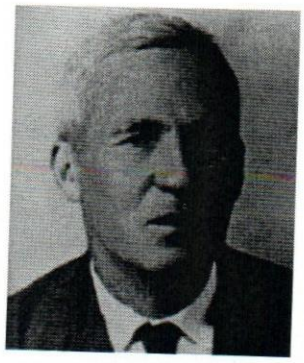
numerable. *Un conjunto A es numerable si se puede establecer una biyección entre A y los naturales.*

3. La numerabilidad de los racionales Q

Esto fue un hallazgo sorprendente: existen tantos naturales como racionales, aunque entre dos naturales cualesquiera ¡existan infinitos racionales! El siguiente dibujo explica el por qué.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} \rightarrow \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \ldots & & \\
 & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \ldots & & & & \\
\downarrow & \nearrow & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & \ldots & & & & & &
\end{array}
$$

En la primera fila colocamos las fracciones con denominador 1, en la siguiente fila las que tienen denominador 2, etc. Al final obtendremos todas las fracciones (positivas) en algún lugar de nuestro cuadro. Después recorremos el cuadro tal como indican las flechas dando una numeración de los racionales. La demostración es ingeniosa y gráfica. El gran matemático Kolmogorov dio otra prueba basada en el concepto de altura de una fracción.



Kolmogorov(1903-1987)

Si tenemos una fracción $\frac{n}{m}$ podemos pensar que ella está escrita de manera irreducible. Asociamos a cada fracción su altura *h* definida por $h(\frac{n}{m}) = |n| + |m|$ lo que siempre es un número natural. Para cada número natural sólo existen una cantidad finitas de fracciones con esa determinada altura. Por ejemplo, si la altura es 3 solamente las fracciones $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{1}, \frac{0}{3}$ tienen esa altura. De esta propiedad de la altura se deduce que las fracciones son numerables.

Cantor después de su hallazgo de la numerabilidad de los números racionales se cuestiona: ¿acaso lo numerable equivale a lo infinito? La respuesta es negativa y constituye un gran hallazgo, aunque Bolzano lo había previsto. **En 1873 Cantor demuestra que los números reales no son un conjunto numerable mediante su célebre argumento diagonal**[q].

4. El argumento diagonal y la no numerabilidad de los reales

Otra sorpresa aguardaba a Cantor y a Dedekind. Los números reales no son numerables. La demostración de este hecho es una de las pruebas matemáticas más hermosas que alguna vez se han realizado. Cantor realiza su demostración mediante el método de reducción al absurdo. Supongamos que los reales pudiesen ser numerados. Es decir existe una biyección de los naturales IN en los reales IR.

En lugar de trabajar con todo IR trabajamos solamente con el intervalo [0,1]. Cantor describe tal biyección mediante una matriz infinita (a la derecha en el dibujo abajo).

[q] El argumento diagonal contrario a la terminología usual no se debe a Cantor , fue Ascoli en 1884 quién por primera vez lo usó.

$$
\begin{array}{lll}
1 \leftrightarrow & 0.3\,9\,7\,2\,0\,4\,8\,1\,7\ldots \\
2 \leftrightarrow & 0.5\,2\,6\,6\,1\,3\,8\,0\,9\ldots \\
3 \leftrightarrow & 0.4\,9\,8\,3\,1\,0\,1\,2\,3\ldots \\
4 \leftrightarrow & 0.2\,7\,5\,4\,1\,8\,8\,3\,1\ldots \\
5 \leftrightarrow & 0.0\,0\,2\,2\,0\,0\,0\,2\,5\ldots \\
6 \leftrightarrow & 0.9\,9\,9\,9\,0\,4\,6\,8\,1\ldots \\
\vdots & \qquad\qquad\ddots \\
 & 0.4\,3\,9\,5\,1\,5\ldots
\end{array}
$$

Observemos la diagonal de esta matriz y construyamos un número entre 0 y 1 cuyo primer decimal sea distinto de 3, su segundo decimal distinto de 2 etc. Tal número puede ser construido sin problemas pero ¿dónde está ese número en nuestra numeración? ¿Qué posición ocupa en la tabla?

Debe estar en algún lugar porque una biyección debe ser sobreyectiva. Supongamos que está en la fila posición 1234. ¡Veamos su decimal 1234! Debe diferir del decimal de este elemento y por ende el número no puede estar en posición alguna. *Los números reales no son numerables.*

Esto planteaba un problema muy serio e importante. ¿Existirá algún cardinal intermedio entre el cardinal de los números reales y los naturales? Cantor pensaba que no y esto constituye su **hipótesis del continuo.** Es el primer problema de la lista de Hilbert que veremos en la próxima sección.

Cantor se dio cuenta que existían cardinales infinitos cada vez mayores, como hemos dicho que forman una escalera infinita. La operación clave era tomar el conjunto de partes de un conjunto dado. Es un resultado elemental que si A es un conjunto finito y P (A) es el conjunto de partes (todos los subconjuntos de A) entonces P (A) tiene 2^n elementos si A tiene n elementos, la desigualdad $2^n > n$ se verifica para cada natural n. Cantor generalizó este resultado a conjuntos infinitos.

5. El teorema de Cantor sobre el conjunto de partes

Supongamos que A es un conjunto, veamos que es imposible establecer una aplicación sobreyectiva desde A hasta $\mathrm{P}(A)$. El argumento es esencialmente "diagonal", supongamos que $f: A \to \mathrm{P}(A)$ es sobreyectiva. Formemos el conjunto $B = \{x \in A / x \notin f(x)\}$. ¿Puede haber un $a \in A / f(a) = B$? En ese caso podríamos examinar si $a \in B$ o no. Si $a \in B$ entonces $a \notin f(a) = B$, esto es absurdo. Pero si $a \notin B = f(a)$ entonces, por definición de $B = \{x \in A / x \notin f(x)\}$ tendríamos que $a \in B$, de nuevo una contradicción. Esto demuestra que es imposible la biyección entre A y $\mathrm{P}(A)$. Luego si A es infinito el cardinal de $\mathrm{P}(A)$ es estrictamente mayor que el de

A. Este resultado fue publicado en 1891 con el título *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.*

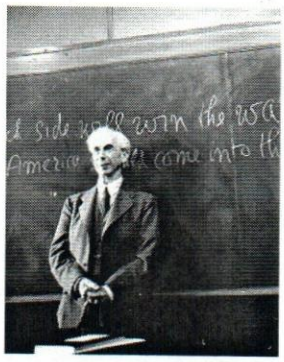
Cantor estableció una aritmética de los cardinales infinitos y sus propiedades principales, de tal manera que el infinito actual adquirió nacionalidad matemática. Cantor y Dedekind cerraron el camino que los filósofos griegos como Zenón empezaron. Sin embargo, la naturaleza intuitiva del trabajo de Cantor tenía fisuras por las cuales el peligroso concepto del infinito se trató de escapar. Las paradojas aparecieron, algunas de las cuales el propio Cantor descubrió. Se debe al trabajo de Zermelo, Fraenkel y Von Neumann el alcanzar una axiomática sobre la cual derivar toda la teoría de conjuntos (http://es.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Zermelo-Fraenkel).

6. Las paradojas en la teoría de conjuntos

Bertrand Russell planteó una pregunta aparentemente ingenua en relación al trabajo de Frege. Dividamos los conjuntos en dos tipos: los que se pertenecen a sí mismos como elementos y los que no lo hacen. Por ejemplo el conjunto de todas las ideas se pertenece a sí mismo como elemento ya que es, sin duda, una idea. Por otro lado, si consideramos el conjunto de todas la personas, no se pertenece a sí mismo como elemento ya que no es una persona. Sea A el conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos como elemento, en símbolos:

$$B \in A \Leftrightarrow B \notin B$$

Russell se preguntó ¿es cierto o no que $A \in A$? Si $A \notin A$ por la definición de A se debe tener que $A \in A$, una contradicción. Por otro lado si afirmamos que $A \in A$ entonces, de nuevo aplicando la definición de A, $A \notin A$. Estamos en una encrucijada.



Bertrand Russell

Gotlob Frege

Frege estaba tratando de deducir toda la matemática a partir de los conceptos de Cantor y la lógica cuando recibió la carta de Russell que contenía su paradoja dijo: "con nada más indeseable puede enfrentarse un científico que con deshacerse de sus fundamentos después de terminar su obra. Me ha puesto en esa situación una carta de Mr. Bertrand Russell cuando estaba a punto de mandar mi obra a la imprenta". La obra se titulaba *Leyes fundamentales de la aritmética.*

Sin embargo, el trabajo de Cantor se podía poner en una base firme como ya señalamos y de él se deriva "la matemática moderna" con su tendencia a la abstracción y al formalismo. El trabajo de formalización lo llevan a cabo Zermelo, Fraenkel y Von Neumann entre otros. Invitamos al lector a ir a:

http://es.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Zermelo-Fraenkel para que lea sobre la axiomática más exitosa de la Teoría de Conjuntos. La axiomática va a ser crucial en el desarrollo de la matemática en el siglo XX. Esta tendencia la veremos en el trabajo de Hilbert, nuestro próximo invitado. El propulsará los métodos que cimentarán de manera irreprochable la matemática

Breve biografía de David Hilbert

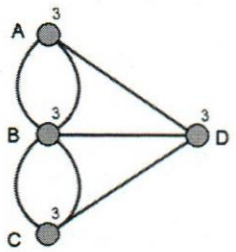
Nosotros debemos conocer, nosotros conoceremos

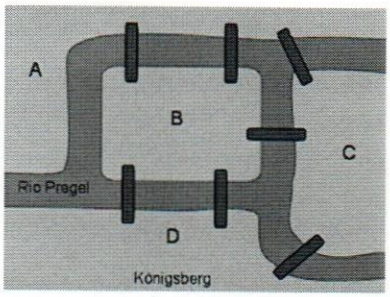
David Hilbert

I. David Hilbert, datos familiares y carrera académica

Hilbert a diferencia de Cantor disfrutó de un gran prestigio como matemático y junto a Klein movió las piezas del ajedrez académico alemán de su época. Hilbert fue un matemático de importancia mundial y para muchas personas el último matemático universal. Sin embargo, existen interesantes similitudes biográficas entre ambos personajes, muchas de ellas derivadas del sistema universitario alemán y las creencias de la época.

Hilbert nace en Königsberg, la ciudad de Kant y del famoso problema de los siete puentes[r], el 23 de enero de 1862. Debemos señalar que esta ciudad, después de la Segunda Guerra Mundial pasó al dominio ruso y hoy se conoce como Kaliningrado. Es decir, Cantor nació en Rusia y se hizo alemán pero Hilbert nació en Alemania pero hoy en día sería considerado como un matemático ruso.





Emplazamiento de los puentes en la época de Euler

Al igual que Cantor, el padre de Hilbert Otto era una persona con sólidos valores, estricta y juez de profesión. La madre Maria Therese Erdtmann representaba un lado más intelectual, sensible y artístico. Entre sus diversas aficiones estaban los números primos y sus propiedades. Así tanto Cantor como Hilbert provenían del seno de la

[r] El problema consistía en cruzar los siete puentes pasando por cada puente una sola vez. Euler resolvió el problema, pero reto al estudiante UNA a decir si es posible o no. Ver el dibujo arriba.

burguesía de su tiempo, con padres relativamente autoritarios y madres con vocación por el arte y la ciencia.

Empezó el colegio a la edad de ocho años, por lo que es probable que haya recibido, al igual que Cantor, las primeras letras en casa. Podríamos especular que fue la madre la que enseñó a Hilbert los primeros conocimientos, quizás transmitiéndole su inclinación por la matemática. Al igual que Cantor no manifestó Hilbert precocidad para la matemática. Muchas personas creen que los grandes matemáticos son genios precoces y hay ejemplos de ello: Gauss, Galois, etc. Pero ni Hilbert ni Cantor lo fueron. Cantor dio muestras de talento en la escuela pero no fue como Gauss. Alguna vez, siendo Hilbert un matemático famoso, se le consultó sobre su impresión sobre la matemática cuando era niño y adolescente. Hilbert señaló que no le importaba demasiado estudiar en ese momento ya que sabía que volvería a ella más adelante. Hilbert fue un estudiante promedio con poco entusiasmo por aprender de memoria, lo cual era típico de la enseñanza de aquel tiempo.

En 1880 Hilbert inicia sus estudios universitarios en la Universidad de Königsberg. Al igual que Cantor el padre de Hilbert quería orientar la vocación de su hijo indicándole que siguiera estudios de derecho. Pero Hilbert que era de un carácter más fuerte que el de Cantor decide que quiere estudiar Matemática en Königsberg, una ciudad que siempre amó. Debo señalar el enfoque liberal que tenía la enseñanza de la matemática en la Alemania de Hilbert. En primer lugar los alumnos podían escoger entre las diversas asignaturas que los profesores ofertaban. Usualmente los profesores en-señaban lo que investigaban, este modelo lo impulso Humboldt para la Universidad alemana. Humboldt concebía que enseñanza e investigación eran un binomio inseparable. Por supuesto que la evaluación debía no ser tan estricta en semejante enfoque ya que usualmente los temas y seminarios versaban sobre matemática avanzada. Muchos cursos no se evaluaban y sólo a la hora de doctorarse el candidato debía presentar exámenes. Los alumnos podían moverse de una universidad a otra, acreditándose las asignaturas cursadas en distintas instituciones. Por ejemplo Hilbert, siguió en sus primeros semestres cursos en Heideberg con Lázaro Fuchs sobre ecuaciones dife-renciales.

La Universidad de Königsberg no era la de Berlín donde estudió Cantor o la de Gotinga donde enseñó Gauss, pero el gran Jacobi había sido profesor en ella lo que le daba prestigio académico.

Universidad de Königsberg

Hilbert asiste a diversos cursos en Königsberg: Cálculo Integral, Teoría de Determinantes e Invariantes, Geometría Diferencial, etc.

Un hecho debemos destacar en los estudios de Hilbert en Königsberg: encontró y se hizo amigo de Minkowski. Minkowski nacido en Rusía y de origen judío, fue un genio precoz. Era dos años menor que Hilbert y ganó a los 18 años el Grand Prix des Sciences Mathematiques de la Academia de Francia por su trabajo en formas cuadráticas. Debemos señalar que el premio tuvo cierta controversia al comprobarse que la solución alcanzada por Minkowski habia sido obtenida años antes por el matemático inglés Henri Smith.

Hermann Minkowski (1864-1909)

Al final la Academia optó por el expediente de dar el premio compartido aunque Smith falleció poco antes de la entrega de la medalla.

El trabajo de Minkowski estaba orientado a la teoría geométrica de números (sus resultados sobre reticulados en el plano y convexidad son primordiales) y las formas cuadráticas, sin embargo, obtuvo resultados impor-tantes en análisis matemático e introdujo brillantes métodos matemáticos para la Teoría de la Relatividad como las transformaciones del espacio-tiempo que llevan su nombre. Einstein fue alumno de Minkowski en Zurich y por cierto un alumno no muy destacado. Un día Minkowski bromeaba que la matemática que Einstein había usado para desarrollar su trabajo en relatividad era tan mala por haber sido alumno suyo. Aunque Minkowski y Hilbert fueron grandes amigos, no podemos descartar que en Hilbert se haya manifestado el espíritu de competencia y el deseo de superar a su muy joven condiscípulo.

Otro joven matemático que despertó admiración de Hilbert y Minkowski fue Hurwitz.

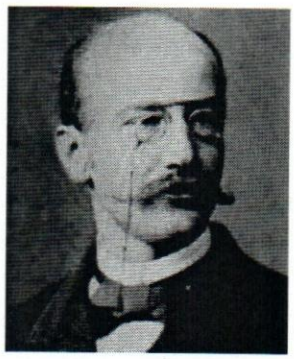
Adolf Hurwitz (1859-1919)

Hurwitz, un estudiante de doctorado de Félix Klein, mezcló ideas de Weierstrass y Klein para resolver un problema importante de las funciones modulares elípticas. A pesar de su juventud conocía una gran cantidad de matemáticas y Hilbert aspiraba a emularlo en este aspecto: convertirse en un matemático universal. Debemos señalar que a pesar de ser muy joven Hurwitz llegó contratado como profesor ordinario a Königsberg. Tenemos así al joven Hilbert en contacto con dos grandes matemáticos Hurwitz y Minkowski, uno profesor el otro estudiante, con los que entabla una franca amistad pero que seguro estimulan su espíritu de superación como matemático. Sus largas caminatas para conversar por los alrededores de Königsberg son legendarias. El tema principal de charla era, como debe adivinar, la matemática.

Hilbert escoge como tutor de tesis doctoral al matemático Lindemann. Debemos recordar que entre los logros de su asesor de tesis está la demostración de la trascendencia de π en el año de 1882.

1. La trascendencia de π

Los matemáticos dividieron el campo de los números reales en dos clases disjuntas: los **racionales y los irracionales**. Dentro del campo de los irracionales una nueva dicotomía se establece: **algebraico y trascendente.**



Ferdinand Von Lindemann (1852-1939)

Sabemos que el número $\sqrt{2}$ es irracional (ver la guía Instruccional de la Unidad 3), es decir no puede ser solución de ninguna ecuación de la forma:

$$ax + b = 0$$

donde $a, b \in \mathbb{Z}$. Sin embargo es solución de la ecuación de segundo grado con coeficientes enteros:

$$x^2 - 2 = 0$$

DEFINICIÓN*:* **Un número irracional que no es raíz de polinomio alguno con coeficientes enteros se denomina trascendente.**

Los números irracionales que son soluciones de ecuaciones polinómicas de algún grado con coeficientes enteros se denominan algebraicos. Así $\sqrt{2}$ es irracional algebraico y surge de inmediato una pregunta: ¿existen números trascendentes? La solución es afirmativa, el matemático francés Hermite (1822-1901) demostró que el número ***e*** base de los logaritmos naturales era trascendente. Liouville, se le había adelantado a Hermite, demostrando la

existencia de números trascendentes pero con números un tanto artificiales[s]. Sin embargo, Cantor dio una prueba de la existencia de números trascendentes usando su teoría de los cardinales infinitos. Cantor demuestra de manera sencilla que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Pero lo reales $\mathbb{R}$ no son numerables, luego ¡la mayor parte de los números reales son trascendentes! Era el tipo de prueba no constructiva que debía desquiciar a Kronecker.

Al demostrar la trascendencia de π, Lindemann resolvió el problema de la cuadratura del círculo, este problema, que proviene de la matemática griega como vimos en la Unidad 3, consiste en, usando sólo regla y compás construir un cuadrado de área igual a un círculo dado. La cuadratura del círculo, si fuese posible, implicaría que π es algebraico lo cual Lindemann probó imposible.

Hilbert empieza a trabajar en fracciones continuas y logra algunas generalizaciones de ellas, pero Lindemann le señala que ya Jacobi había logrado sus resultados. Le sugiere, para evitar este tipo de accidente, que trabaje en un área de investigación en boga: la teoría de los invariantes algebraicos. Hacia 1884 la defiende con éxito, pero queda mucho camino que andar en la teoría, camino que Hilbert cruzó con éxito creando nuevas técnicas y enfoques. Sucedía aquí lo mismo que molestó al joven Galois en relación a las ecuaciones algebraicas: la falta de una teoría que explicase lo que se sabía y ayudase a entender lo que no se conocía. La teoría de los invariantes estaba dominada por largos y tediosos cálculos. Hilbert introdujo potentes métodos que clarificaron y unificaron el panorama. La teoría es compleja, trataremos de darle al estudiante UNA algo del sabor de la misma.

2. Grupos de transformaciones, formas cuadráticas e invariantes

Desde el trabajo de Galois, los matemáticos percibieron la importancia del concepto de grupo. Félix Klein unificó las diferentes geometrías en el Programa de Erlangen (http://es.wikipedia.org/wiki/Programa_de_Erlangen) basándose en la idea de grupo.

DEFINICIÓN: **Un conjunto G con una ley de composición interna $\circ$ es un grupo si se verifica**

[s] Los números de Liouville son de la forma 0,101001000001… Observe que entre dos unos hay n! ceros.

1. $a \circ b \in G$ si $a, b \in G$
2. **La operación es asociativa** $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ **para todo** $a, b, c \in G$
3. **Existe un elemento neutro** $e \in G$ **que verifica** $e \circ a = a \circ e = a$ ***para todo*** $a \in G$
4. **Todo elemento** a **tiene un inverso** a^{-1} **que verifica** $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

Un ejemplo de grupo son las transformaciones lineales del plano en el plano que tienen determinante ± 1. Una transformación lineal *T* del plano en el plano está caracterizada por una matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (para simplificar fijamos la base canónica de $\mathbb{R}^2$) de forma que:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Así que $G = \{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ lineal y } \det(T) = \pm 1\}$ y la operación $\circ$ que tomamos es la composición de funciones. Por ejemplo cualquier rotación está en $G = \{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ lineal y } \det(T) = \pm 1\}$ ya que su matriz es de la forma $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

DEFINICION: *Una forma cuadrática homogénea es una función del plano en sí mismo de la forma* $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$

Si cambiamos las coordenadas mediante una transformación lineal de *G* obtenemos una nueva forma cuadrática que es sencilla de calcular. Lo que es interesante es que la cantidad conocida como el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ permanece invariante respecto a las transformaciones que están en el grupo $G = \{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ lineal y } \det(T) = \pm 1\}$. Se sabía que sólo existían finitos invariantes básicos para las formas cuadráticas, cúbicas, etc. Cualquier otro invariante se escribía como un polinomio de los invariantes fundamentales, los cuales constituían *una base.* El gran maestro (conocido como el rey de los invariantes) de la manipulación algebraica de los invariantes era Gordan (1837-1912). Gordan demostró que existía siempre una base de invariantes pero su prueba era oscura y basada en un largo cálculo. Hilbert demostró lo mismo en 2 páginas después de clarificar qué es lo que se quería demostrar. Gordan pronunció una frase celebre "eso no es matemática, es teología"

Éxito académico y Gotinga

Félix Klein era sin duda el general en jefe de la matemática alemana. Brillante matemático que había establecido desde muy joven las profundas relaciones entre objetos matemáticos diversos como las isometrías de las figuras geométricas y la solución de ecuaciones por radicales. Su importante programa de Erlangen en 1872 caracterizaba los distintos tipos de geometrías por medio de la teoría de grupos y sus invariantes.

Félix Klein (1849-1925)

Klein estaba consciente de la fuerza de Hilbert como matemático y quedó impresionado desde que lo oyó hablar en su seminario alrededor de 1885. Como ya señalamos en la nota matemática anterior la demostración de una base finita de invariantes que prosiguió a la tesis doctoral bajo la supervisión de Lindemann constituyó un éxito académico notable. Al principio Gordan se negó a aceptar el trabajo de Hilbert e incluso, como era árbitro del artículo que Hilbert envió al Mathematische Annalen, lo rechazó en la mencionada revista. Klein se molestó con Gordan y enderezó el entuerto publicando el artículo de Hilbert tal como fue enviado; de hecho lo refirió como el más importante artículo de álgebra publicado en el Mathematische Annalen. Gordan no estaba tan contento. En primer lugar consideraba la demostración de Hilbert errónea. Klein, que estaba convencido de la validez del argumento de Hilbert, se reunió con Gordan durante una semana para discutir la demostración. Al final Gordan tuvo que conceder que la demostración era correcta pero enfocó su crítica en el aspecto no constructivo de la prueba proporcionada por Hilbert. Hilbert, quien era un matemático profundo valoró la crítica de Gordan y trató de mejorar su prueba dando en unos años una demostración constructiva.

La carrera de Hilbert se encamina al éxito, va a París en 1885 siguiendo el consejo de Klein acompañado de Study. Klein recordaba con nostalgia su viaje a París cuando era un joven matemático y a su compañero de viaje: el legendario Sophus Lie. Lie era un genio matemático noruego creador de la teoría de grupos continuos, además de una excelente persona. Pero Study, el compañero de viaje de Hilbert era un hombre amargado que criticaba a todos. Como no hay nadie absolutamente malo, debemos señalar que Study con-tribuyó con impulsar la carrera de Hausdorff, sacando al mismo del relativo amateurismo que practicaba. Hilbert, a pesar de la mala compañía, aprovechó el viaje y conoció a diversos matemáticos, entre ellos a uno no tan amable Henri Poincare. Hilbert asistió al curso de Teoría de Potencial que Poincare dictaba. Quizás Poincare preveía ya que Hilbert iba a ser su competidor como el mejor matemático viviente.

Movimientos como la salida de Lindemann por jubilación y de Hurwitz quién marchó a Zurich acelera la subida de Hilbert dentro del escalafón académico. También logra sucesivos éxitos en la teoría de invariantes y en el álgebra abstracta.

La Sociedad Matemática Alemana le encarga en 1893 la elaboración del **Zahlbericht (Informe de la teoría de los números algebraicos)** junto a Minkowski. Según Herman Weyl el *Zahlbericht* es no sólo una obra maestra de la matemática sino también del idioma alemán. Minkowski tuvo problemas en terminar su parte del trabajo, pero Hilbert completó la suya. Minkowski estaba encargado de escribir la parte de fundamentos y básica de la teoría, Hilbert iba a redactar los aspectos más novedosos y avanzados. La publicación en 1897 del *Zahlbericht* sólo incrementó la fama de Hilbert como matemático.

En 1895 Hilbert logra un puesto en Gotinga debido a que Schwarz se mueve a Berlín, lo que cambia sin duda la historia de la Universidad de Götingen, cuyo departamento de matemáticas iba a convertirse en el primer departamento de matemáticas a nivel mundial. Matemáticos de todas partes del mundo estudiaron en Gotinga que bajo la guía de Hilbert se convierte en el primer centro matemático del mundo. La carrera de Hilbert iba viento en popa pero un cambio brusco en su investigación sorprendió a todos.

En 1898 Hilbert ofrecía en Gotinga un curso titulado "Fundamentos de Geometría". Hilbert, como ya explicamos que hacían los profesores alemanes, enseñaba sobre lo que investigaba, usualmente si quería investigar sobre un tema abría un curso sobre el mismo. Su interés sobre el tema geométrico no era nuevo ya que desde 1891

había dictado conferencias y cursos, con poco éxito de audiencia, sobre geometría proyectiva y euclídea.

Quizás Hilbert sentía que el edificio matemático temblaba, era un temblor leve pero para Hilbert era un alerta. Oscuras sombras se desplegaron sobre la matemática y sus fundamentos al aparecer paradojas en la teoría de conjuntos, algunas previstas por Cantor y otras en la teoría de ordinales como la de Burali-Forti publicada en 1897. Hilbert sabía que lo primero que se formalizó en matemáticas fue la geometría, siendo Euclides el arquitecto de la obra. Pero Hilbert era un matemático meticuloso. ¿Era el edificio de Euclides sólido? ¿No sería conveniente refrescar el andamiaje del mismo mediante el rigor que impulsaron los matemáticos del siglo XIX? Existían antecedentes en el trabajo de Peano y Pfaff (1765-1825)[t] sobre la axiomática de la geometría. Pero Hilbert buscaba más y lo encontró.

Grundlagen der Geometrie (Los fundamentos de la geometría)

En 1899 Hilbert publica un trabajo fundamental: *Grundlagen der Geometrie* que el estudiante UNA encontrará en el Moodle del curso (http://academico.una.edu.ve/foro/file.php/40/MaterialesInstruccionales/hilbertgrundlagen-pdf.pdf). En ese trabajo la geometría alcanzó un desarrollo riguroso. Un matemático, dijo que lo que encontramos en los *Elementos* de Euclides son razonamientos incorrectos sobre figuras bien trazadas. Nosotros no llevamos nuestra crítica a ese extremo y consideramos que *Los elementos* son una obra crucial para las matemáticas. Pero, desde las primeras proposiciones se aceptan y aplican resultados que usaban nociones de orden y continuidad no explícitamente enunciadas. Además, Hilbert no estaba además de acuerdo con definiciones como "Punto es lo que no tiene partes". **Para Hilbert los objetos de una teoría quedaban caracterizados por los axiomas** y por eso decía "hablamos de puntos, rectas y planos pero podemos hablar de sillas, mesas y jarras de cerveza".

3. ¿Qué es un número natural?

Parece sorprendente que lleguemos al siglo XX para responder lo que cualquier niño conoce. Pero la matemática debía alcanzar un estándar de rigor que el siglo XIX aportó. Giussepe Peano propuso los siguientes axiomas que caracterizan los números naturales.

[t] Pfaff fue el tutor de Gauss y de Mobius. Pfaff es un precursor de la orientación que seguiría la matemática alemana del siglo XIX.

1. 0 es un número natural.

2. Todo número natural tiene un número que le sigue, o un sucesor.

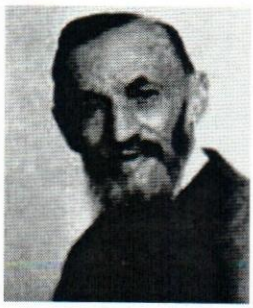
3. 0 no es el sucesor de ningún número natural.

4. Si dos números naturales tienen el mismo sucesor son el mismo número.

5. Si A es un subconjunto de los números naturales tal que 0 está en A y si x está en A su sucesor también está en A entonces A es el conjunto de los naturales.

La idea de Peano, como de Hilbert, es que el conjunto de propiedades anteriormente escritas como axiomas representan o capturan lo esencial de los números naturales. Luego los definen unívocamente. Debemos destacar que Hilbert ideó en 1899 una axiomática de los números reales que ha prevalecido sobre el uso de las cortaduras de Dedekind. Los axiomas de Hilbert para los números reales son:

1. Los números reales son un cuerpo ordenado.
2. Toda parte acotada de los números reales tiene un supremo.
3. Los reales verifican la propiedad arquimediana.



Giussepe Peano (1858–1932)
Matemático, filósofo y profesor italiano. Hombre de una personalidad polifacética, ideó un lenguaje con el que pretendía lograr la comunicación entre todos los hombres. Impulsó el uso de la lógica y simbología matemática. Es importante su teorema de existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales y su construcción de una curva que llena un cuadrado. En el año de 1888 dio los axiomas para caracterizar un espacio vectorial que todavía usamos.

4. Estructura de los Grundlagen

Hilbert dividió los axiomas de la geometría en 5 grupos:

1. Axiomas de incidencia.
2. Axiomas de orden.
3. Axioma de las paralelas.
4. Axiomas de congruencia.
5. Axioma de continuidad(principio de Arquímedes).

No hace ningún intento de definir lo que es un punto o una recta, esos objetos quedan determinados por los axiomas. Las letras mayúsculas $A,B,\cdots$ designan los puntos y las letras minúsculas $a,b\cdots$ las líneas rectas y los planos con letras griegas $\alpha,\pi,\cdots$. Observe que esa notación es la que se acostumbra a usar en los textos de geometría más de 100 años después.

Hilbert también incluye, en su obra maestra sobre los fundamentos de geometría, la geometría proyectiva y los desarrollos que conocemos como geometría no euclídea. Era una obra que abarcaba el desarrollo de más de 2.300 años y que ponía la piedra definitiva del edificio que el anciano Euclides empezó a armar.

Así tenemos a un David Hilbert en la cumbre de sus poderes matemáticos con un importante trabajo en la teoría de invariantes y en el álgebra conmutativa y que quiere poner el cuerpo de las matemáticas en orden y a salvo tal como lo había hecho con la geometría. Pero antes de exponer su programa y ver el impacto de su charla de 1900 en el Congreso Mundial de París, terminemos esta corta biografía.

Hilbert y su persona

A diferencia de Cantor, Hilbert fue una persona que disfrutó la vida, la política, los paseos, etc. Se le podía ver en bicicleta recorriendo el campus universitario y ya hablamos de su carácter peripatético disfrutando, desde que era estudiante, largas caminatas con Minkowski y Hurwitz. Era una forma que le encantaba para aprender y discutir sobre matemáticas. También era una persona sociable a quien le encantaban las fiestas y bailar. Disfrutaba de la compañía de los otros y éstos también lo querían. Sin ser un muje-

riego, le encantaban las mujeres comportándose caballeroso pero a veces realizaba atrevidos avances.

No se desenvolvía mal en el ajedrez académico alemán y el importante ministro para la Educación y Ciencia Althoff, propició el avance de Hilbert en el escalafón universitario alemán. Althoff siguió en varias oportunidades los consejos de Hilbert sobre promociones y movimientos de profesores; debemos señalar que Althoff tenía la reputación de ser autoritario y poco influenciable.

Hilbert se casó en 1892 con Kathe Jerosch, hija de un profesor de Königsberg. Kathe representó un balance importante en el distraído profesor de matemáticas. Se cuenta que una vez estando reunido con el rector de la Universidad de Königsberg, Hilbert olvidó el motivo de la entrevista y sabiendo que Kathe estaba en el patio de enfrente sentada en una banca, se asomó por la ventana y le gritó, ¿qué era lo importante que tenía que conversar con el rector?

Weyl consideraba que, en buena parte, el *Zahlbericht* estaba escrito de manera tan impecable por la intervención y revisión que realizó Kathe. Hilbert y Kathe tuvieron un hijo: Franz. Lamentablemente fue un joven frágil mentalmente, que no destacó en los estudios y le trajo a los Hilbert diversas preocupaciones. Franz murió en el año 1969.

Hilbert mantuvo su actitud alegre, activa y social toda su vida. Cuando Runge llegó a Gotinga en 1904 enseñó a Hilbert a esquiar. Un día Hilbert perdió uno de los esquís en la parte superior de la montaña y el mismo deslizó pendiente abajo hasta una ladera de la montaña. Hilbert bajó penosamente la montaña llevando un solo esquí. Al comentar en una carta el incidente a Minkowski, éste le respondió ¿por qué no te liberaste del otro esquí?, si lo hubieras lanzando cuesta abajo en el mismo lugar donde perdiste el primero, con seguridad hubiese terminado cerca de éste y tu descenso no hubiera sido tan fastidioso. En la siguiente carta Hilbert le dijo a Minkowski: ¡Runge no me enseñó eso!

Bajo la égida de Hilbert, Gotinga llegó a ser el principal centro matemático mundial. Importantes matemáticos fueron discípulos de Hilbert. Invitamos al lector a ir a la web The Mathematics Genealogy Project(http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=7298) para que observe la impresionante lista de 75 estudiantes de doctorado de David Hilbert, en esto Hilbert superó a Cantor quien solamente tuvo un estudiante de doctorado y el mismo no destacó como matemático.

A pesar de ser un alemán a carta cabal, Hilbert se opuso sin éxito a las políticas de discriminación con base a la raza que llevaron adelante los nazis desde los años treinta. Grandes matemáticos discípulos de Hilbert fueron judíos: Lasker (campeón mundial de ajedrez de 1894-1921), Courant, Steinhauss, etc. Incluso Weyl tuvo que dejar Alemania por que su esposa era judía. Algunos de estos matemáticos huyeron de Europa, otros fueron asesinados o encarcelados por los nazis. Sabemos que los nazis atacaron no sólo a las personas sino también al conocimiento que ellas generaron. Por ejemplo, calificaron a la Teoría de la Relatividad como una patraña judía. Una muestra del valor y la independencia de Hilbert es que, siendo Hilbert un anciano, el ministro de Educación nazi Rust, le preguntó cómo iba la matemática en Gotinga después de ser liberada de la influencia judía. Hilbert respondió de manera sarcástica: "¿Matemática? Allí no queda nada de eso".

Hilbert fallece en 1943 a consecuencia de una caída y las complicaciones e inactividad derivada de ella, pocas personas fueron a su funeral; recordamos que en este momento Alemania ya perdía la Segunda Guerra Mundial y que la situación para los civiles era terrible. Además, como ya lo señalamos, los nazis provocaron la pérdida del importante grupo humano que acompañó a Hilbert durante su vida. En su lápida se lee: **Nosotros debemos conocer, nosotros conoceremos.**

Los 23 problemas de Hilbert

En el congreso de París en 1900 ocurrió uno de los hechos que marcó la matemática del siglo XX de manera decisiva. Hilbert tiene la responsabilidad de una de las conferencias en la plenaria. Llevaba tiempo planificando su alocución; recordaba que Minkowski le señaló lo aburrida que le pareció la conferencia de Poincare en el Congreso de Zurich de 1897 y Hilbert no quería sufrir críticas similares.

Además, la conferencia inauguraba un nuevo siglo y debía marcar caminos matemáticos para la nueva centuria. Hilbert comenzó su alocución con palabras muchas veces mencionadas: *¿Quién de nosotros no quisiera levantar el velo tras el cual yace escondido el futuro, y asomarse, aunque fuera por un instante, a los próximos avances de nuestra ciencia y a los secretos de su desarrollo ulterior en los siglos futuros? ¿Cuáles serán las metas particulares que tratarán de alcanzar los líderes del pensamiento matemático de las generaciones futuras? ¿Qué nuevos métodos y nuevos hechos nos depa-*

rarán los siglos por venir en el ancho y rico campo del pensamiento matemático?

Hilbert como Halmos[u] reconocía la importancia de los problemas para la vitalidad de las matemáticas. La resolución de problemas era la fuente para la creación de teorías matemáticas. Este es un punto vital en el trabajo de Hilbert, puede ser llamado el método de Hilbert. El problema se coloca en un contexto muy general, en una teoría que abarca el problema en particular pero quizás otros problemas, el matemático desarrolla en abstracto la teoría considerada y la solución del problema emerge de los resultados obtenidos en la teoría, pudiéndose encontrar en el camino nuevos métodos que pueden aplicarse a un espectro diferente de problemas. Veamos lo que dice Angus Taylor, traduzco: "El tratamiento de muchos tópicos en matemática pura y aplicada es caracterizado por el esfuerzo de eliminar los detalles que no son esenciales para mostrar claramente los postulados fundamentales y la estructura del razonamiento. El esfuerzo frecuentemente lleva a un cierto grado de abstracción, donde ponemos temporalmente de lado la naturaleza concreta del problema considerado, y los aspectos del problema que son de gran importancia son exhibidos de manera axiomática".

Así, Hilbert no contemplaba su lista como una serie de acertijos más o menos difíciles de resolver sino como la fuente para la creación de importantes teorías que a su vez generarían nuevos problemas. La importancia de la solución del "último teorema de Fermat" no radica tanto en la verificación de lo que pensaba Fermat. La importancia es que al intentar resolver el problema se desarrollaron novedosos métodos del Álgebra como la factorización en ideales primos o las extensiones ciclotómicas. Hilbert quería postular una serie de problemas que impulsasen el desarrollo matemático en el siglo XX en el álgebra, teoría de conjuntos, ecuaciones en derivadas parciales, etc.

La siguiente lista resume los problemas de Hilbert.

LOS 23 PROBLEMAS DE HILBERT
(Nota de la Edición del Prof. José Ramón Ortiz:
http://personales.ya.com/casanchi/ref/pfuturos01.htm)

1. Problema de Cantor sobre el cardinal del continuo. ¿Cuál es el cardina l del continuo?

[u] *The Heart of Mathematics* [The American Mathematical Monthly, Volumen 87, Número 7, Agosto–Septiembre de 1980, páginas 519–524],

2. La compatibilidad de los axiomas de la aritmética. ¿Son compatibles los axiomas de la aritmética?

3. La igualdad de los volúmenes de dos tetraedros de igual base e igual altura.

4. El problema de la distancia más corta entre dos puntos. ¿Es la línea recta la distancia más corta entre dos puntos, sobre cualquier superficie, en cualquier geometría?

5. Establecer el concepto de grupo de Lie, o grupo continuo de transformaciones, sin asumir la diferenciabilidad de las funciones que de finen el grupo.

6. Axiomatización de la física. ¿Es posible crear un cuerpo axiomatico para la física?

7. La irracionalidad y trascendencia de ciertos números como $2^{\sqrt{2}}$,etc.

8. El problema de la distribución de los números primos.

9. Demostración de la ley más general de reciprocidad en un cuerpo de números cualesquiera.

10. Establecer métodos efectivos de resolución de ecuaciones diofánticas.

11. Formas cuadráticas con coeficientes algebraicos cualesquiera.

12. La extensión del teorema de Kronecker sobre cuerpos abelianos a cualquier dominio de racionalidad algebraica.

13. Imposibilidad de resolver la ecuación general de séptimo grado por medio de funciones de sólo dos argumentos.

14. Prueba de la condición finita de ciertos sistemas completos de funciones.

15. Fundamentación rigurosa del cálculo enumerativo de Schubert o geometría algebraica.

16. Problema de la topología de curvas algebraicas y de superficies.

17. La expresión de formas de finidas por sumas de cuadrados.

18. Construcción del espacio de los poliedros con gruentes.

19. Las soluciones de los problemas regulares del cálculo de variaciones, ¿son siempre analíticas?

20. El problema general de condiciones de contorno de Dirichlet.

21. Demostración de la existencia de ecuaciones diferenciales lineales de clase fuchsiana, conocidos sus puntos singulares y grupo monodrómico.

22. Uniformidad de las relaciones analíticas por medio de funciones automórficas: siempre es posible uniformizar cualquier relación algebraica entre dos variables por medio de funciones automorfas de una variable.

23. Extensión de los métodos del cálculo de variaciones.

Algunos problemas son muy sencillos de entender. Por ejemplo, Hilbert se preguntó por la naturaleza del número $2^{\sqrt{2}}$, ¿es este número trascendente? Guelfond (1906-1968) demostró en 1934 que el número era de hecho trascendente resolviendo el problema. El primer problema es la Hipótesis del Continuo, propuesta inicialmente por Cantor. Esto indica la importancia que Hilbert le daba a la Teoría de Conjuntos. En la página del moodle del curso hemos dejado para los estudiantes la charla original de Hilbert, así como un par de referencias sobre la importancia de los problemas en el siglo XX.

Algunos de los problemas son muy difíciles de entender y no hay consenso matemático sobre lo que Hilbert pretendía. Quizás el carácter universal de Hilbert y su amplia visión de la matemática haya hecho que esos enunciados permanezcan oscuros para la mayoría.

Hilbert logró sus objetivos, sus problemas motivaron desarrollos importantes y casi todos fueron resueltos mediante la introducción de importantes ideas y métodos. Los matemáticos que resolvieron algún problema de la lista ganaron reconocimiento mundial.

El programa de Hilbert

Como ya señalamos la aparición de paradojas en la Teoría de Conjuntos, como la Burali-Forti y la de Bertrand Russell, indicaban que un esfuerzo debía ser realizado para sostener el importante edificio de la matemática. Hilbert concibió un plan completo a comienzos de los años veinte, basado en la lógica matemática, para garantizar la estabilidad del universo matemático. Hilbert pretendía que cada teoría matemática debía consistir en cuerpo axiomatizado de forma que:

1. Los axiomas fueran independientes unos de otros.
2. Los axiomas fueran consistentes.
3. La teoría fuera completa.

El estudiante debe recordar de su curso de Geometría algunas de estas ideas. Un conjunto de axiomas verifica la condición 1. sí y sólo si ninguno de los axiomas se puede derivar de los otros. Usualmente uno puede mostrar la independencia de un axioma construyendo un modelo de la teoría axiomática en la cual se verifique el resto de los axiomas y se niegue el axioma que queremos mostrar que es independiente. Si el axioma fuera una consecuencia del resto, al hacer lo anterior encontraríamos una teoría contradictoria o inconsistente, y no podría existir un modelo.

Una teoría axiomática se denomina consistente si no podemos derivar contradicciones de los axiomas que la determinan, usando las leyes de inferencia de la lógica. Una contradicción fulmina una teoría matemática. No vale aquello de que la excepción confirma la regla. En matemática las reglas no tienen excepciones y si encontramos una regla (teorema) que afirma *P* y otra que afirma no *P la teoría no es válida desde el punto de vista matemático.* El estudiante debe recordar que en un sistema contradictorio se puede probar cualquier proposición. Una vez le preguntaron a Hardy cómo se podía deducir de que si 2+2=3 entonces el Papa Juan XXIII y Churchill eran la misma persona, Hardy dijo: "si 2+2=3 entonces, restando 2 a ambos lados, se tiene que 2=1, como el Papa y Churchill son dos ellos son uno". No sé si esta anécdota es cierta pero es muy hermosa.[v] La he colocado para demostrarle al estudiante lo peligroso de encontrar en una teoría una contradicción, a partir de ella se puede demostrar cualquier cosa.

La completitud de una teoría matemática significa que si una proposición es verdadera ella puede ser demostrada a partir de los

[v] Sucede que he leído la misma historia atribuida a otros matemáticos y con otros personajes, pero eso ocurre frecuentemente.

axiomas. De alguna manera los axiomas constituyen una base para construir el resto de las proposiciones verdaderas.

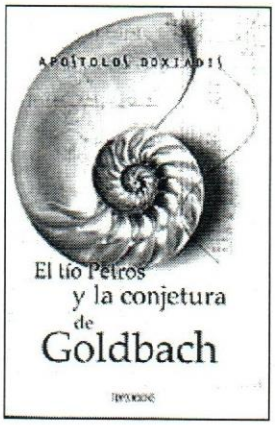
Por supuesto Hilbert también favorecía el uso de la teoría de conjuntos y de un lenguaje depurado con una simbología matemática adecuada. Ninguna intrusión de la intuición o de un lenguaje vago era permitida.

Godel y Einstein en Princeton

Un primer éxito de este programa viene cuando un joven doctorando, Kurt Godel, bajo la tutela de Hans Hahn, demuestra en 1931 que el cálculo lógico de primer orden era completo y consistente. Este trabajo fue la tesis doctoral de Godel y sólo tenía 11 páginas, lo cual habla mucho de la relación entre importancia y cantidad. Hilbert se debió sentir entusiasmado y aliviado. Era un gran éxito en la dirección que había planteado. No presentía que ese mismo joven iba a acabar de plano con su programa, asestándole un golpe mortal.

5. Godel y sus resultados

Lo que voy a relatar es difícil de asimilar. Godel demuestra un resultado denominado Teorema de Incompletitud. Esencialmente el mismo dice que, a diferencia de lo que ocurría en el cálculo lógico de primer orden, la aritmética es incompleta. Es decir, en cualquier sistema que contenga los postulados de Peano ocurre la existencia de proposiciones P tales que ni P ni la negación de P van a ser demostrables. Pero una de ellas debe ser verdadera por el principio del tercio excluso, es decir la teoría admite **verdades indemostrables.** Luego estamos en una encrucijada insalvable ya que la mayoría de las teorías matemáticas son más complejas que la aritmética de Peano. Invitamos al estudiante UNA a leer la divertida novela



El tío Petros y la conjetura de Goldbach[w] *de Apostolos Doxiadis para reflexionar más sobre el profundo resultado de Godel.*

Se cuenta que Hilbert se enfureció cuando conoció el resultado de Godel, después invito a Godel a Gotinga para conversar sobre su teorema. Al final lo aceptó pero continúo explorando la posibilidad de salvar su programa, bus-cando nuevos métodos e ideas en la lógica matemática, pero la historia nos muestra que fue un vano intento. Kurt Godel acabó con el programa logicista de David Hilbert.

Kurt Godel(1906-1978)

Matemático austríaco, posteriormente nacionalizado norteamericano. Publicó poco pero su trabajo fue profundo e importante:

1. El Teorema de Incompletitud de los sistemas formales.
2. Solución parcial de la hipótesis del continuo, finalmente resuelta por Paul Cohen.
3. Un modelo matemático para la teoría general de la relatividad de Einstein.

Estudiante de Hans Hahn, miembro del Círculo de Viena, a raíz del ascenso de los nazis decide quedarse en la Universidad de Princeton (EEUU) donde era invitado con frecuencia. Personalidad hipocondríaca, depresiva y un maniático compulsivo. Muere de inanición porque pensaba que le podían dar comida envenenada, de hecho, por años, solamente comía lo que su esposa le preparaba. Fue sin duda uno de los genios matemáticos del siglo XX.

[w] La conjetura de Goldbach afirma que cualquier número par es la suma de dos primos. Fue un problema planteado por Goldbach a Euler en una carta fechada en 1742.

Los espacios de infinitas dimensiones

Voy a concluir con el trabajo de Hilbert en una rama de las matemáticas conocida como análisis funcional. La idea inicial de espacios de infinitas dimensiones está claramente expresada en el trabajo de Riemann *Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría*, cito: *Pero existen variedades en las cuales la determinación de la posición exige, no un número finito, sino una serie infinita, o una variedad continua de determinaciones de magnitudes. Tales son, por ejemplo, las variedades formadas por las determinaciones posibles de una función en una región dada, por las formas posibles de una figura en el espacio, etc.* Sin embargo, la motivación de Hilbert para considerar espacios de infinitas dimensiones viene del estudio de las ecuaciones integrables, iniciado por Vito Volterra (1860-1940) e Ivar Fredholm (1866-1927). Hilbert geometriza la teoría de ecuaciones integrables, considerando las funciones incógnitas como "vectores de infinitas componentes". La teoría obtenida era similar a la del espacio de Euclides de *n* dimensiones, en la cual se mantenían las nociones de ortogonalidad y era válido el Teorema de Pitágoras. Por supuesto la noción de convergencia adquiere crucial importancia para poder definir el tamaño o norma de un vector que tiene infinitas componentes. En un trabajo de 1906, Hilbert define la bola unitaria del espacio l_2 como el dominio de las formas cuadráticas; el espacio l_2 queda definido por:

$$l_2 = \left\{ (\xi_i)_{i=1\cdots\infty}, \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 < \infty \right\}$$

y la bola unitaria es el conjunto *B* definido por:

$$B = \left\{ (\xi_i)_{i=1\cdots\infty}, \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 < 1 \right\}$$

Se cuenta que un día en el seminario de Gotinga, Weyl dio una charla del teorema de Riesz-Fischer sobre la completitud del espacio de Hilbert. A la salida del seminario Hilbert le dijo: "no entendí algo, ¿qué es un espacio de Hilbert?"

6. ¿Qué es un espacio de Hilbert?

En el espacio de tres dimensiones que denominamos $\mathbb{R}^3$ tenemos:

1. La estructura de espacio vectorial, es decir los elementos del espacio son vectores los cuales se pueden sumar y multiplicar por un número real.

2. La noción de tamaño de un vector dada por: $\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Observe que el tamaño de un vector se puede definir a partir del producto escalar de dos vectores; recordamos que el producto escalar en $\mathbb{R}^3$ se define como:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

Luego:

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Con estas ideas se pueden definir las nociones básicas de distancia entre vectores, límite, continuidad de funciones, etc. Es decir podemos hacer *análisis* en el espacio $\mathbb{R}^3$. Hilbert quería extender estas ideas a espacios de vectores con *infinitas componentes* y lo logró.

Un espacio de Hilbert H es un espacio vectorial sobre los números reales (o complejos) y sobre él se define un producto escalar $\langle , \rangle$ que verifica:

- $\langle x, y \rangle$ es un número real para cualquier *x,y* en H
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para cualquier *x,y* en H , es decir el producto escalar es simétrico
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ para cualquier x en H y vale 0 sólo para el vector nulo
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ para cualquier terna *x,y,z* en H
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ para cualquier *x,y* en H y escalar α

El tamaño de un vector se define como: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Comprobaciones no muy difíciles indican que el número $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ tiene las propiedades que debe tener una función que mida el tamaño de un

vector. Luego, Hilbert logró extender la noción de espacio de ndimensiones a una cantidad arbitraria de dimensiones.

La presentación axiomática y geométrica de la teoría se debe a Erhard Schmidt (1876-1959) y a John Von Neumann (1903-1957).

La obra de Hilbert permanecerá como una montaña impresionante en la cordillera de la matemática, pero una montaña sin nubes y con profundas hondonadas. Una montaña que muestra toda su belleza pero que tiene profundidades no exploradas.

Nicolas Bourbaki: "Uno para todo y todos para uno"

Alemania y Francia fueron dos países con una gran cantidad de guerras y disputas: guerras napoleónicas, Primera Guerra Mundial, Segunda Guerra Mundial, etc. La matemática fue para los matemáticos de esos grandes países un campo de batalla pacífico pero intenso. Se cuenta que al terminar un conflicto bélico los matemáticos de ambos países organizaban encuentros conjuntos para tratar de cicatrizar las heridas dejadas por la guerra.

En la época de la Revolución Francesa el centro de la matemática era Francia, la Francia de Cauchy, Lagrange, Laplace, Fourier, Galois, etc. Sin embargo, con la puesta en marcha del plan de Pfaff y el sistema de seminarios vigente en Alemania impulsado por Richelot, el centro de la matemática se desplaza a Alemania. A ello contribuyeron matemáticos como Gauss, Dirichlet, Riemann etc. Berlin y Gotinga se erigen como los centros principales del saber matemático a nivel mundial. Francia reacciona con algunas individualidades importantes como Hermite, Liouville o Poincare. Pero los desarrollos más novedosos en Álgebra (Kummer, Dedekind), Teoría de Números (Kronecker, Minkowski), Fundamentación del Análisis (Riemann, Weierstrass), Teoría de Conjuntos (Cantor) y Geometría no euclídea (Klein, Riemann) se realizaron en Alemania. Además, los alemanes tenían al director de orquesta más genial en el período entre siglos: David Hilbert. Esta decadencia de la matemática francesa se mantiene en las dos primeras décadas del siglo XX con el agravante de la pérdida de muchos jóvenes prospectos en la primera guerra mundial. Así encontramos en el año 1935 a dos amigos, egresados de la Ecole Normale (Escuela Normal) discutiendo qué libro deberían usar para enseñar el curso de Cálculo en la Universidad de Caen. Los amigos

eran André Weil y Henri Cartan. Ellos usaban el libro de Goursat, el cual fue escrito entre 1902-1913 y era un considerado un texto clásico pero que no incluía modernos desarrollos. De hecho, en su tiempo, este tratado de tres volúmenes fue considerado un gran libro de texto.

Los jóvenes profesores estaban preocupados viendo cómo la matemática en Francia se encontraba rezagada respecto a la matemática alemana e incluso la naciente matemática en Estados Unidos de América, amenazaba con acabar la supremacía que Europa mantuvo por varios siglos. Sentían que la matemática francesa perdía el tren de la historia y que debía ser renovada. Así se plantean empezar por lo fundamental: escribir el mejor y más moderno texto de cálculo. Planean nuevas reuniones e invitan a otros condiscípulos como Dieudonné y Chevalley, quienes se unen al grupo y empiezan una serie de reuniones en un café del barrio latino. Empiezan a discutir sobre el texto de cálculo, pero pronto los diversos intereses de los participantes se manifiestan. Quieren escribir sobre álgebra, teoría de conjuntos, topología, etc. ya no era un libro de cálculo, el proyecto se torna en una reedición del famoso enciclopedismo francés: una obra monumental que incluyese toda la matemática. El autor va a ser un desconocido pero pronto famoso matemático inexistente: Nicolás Bourbaki.

La obra que planifican no podía tener un nombre más emblemático: *Éléments des mathématiques*
(http://www.bourbaki.ens.fr/Ouvrages.html). El nombre recordaba el nombre de la gran obra griega *Los elementos (Stokheia)* de Euclides. Euclides de alguna manera recopiló el saber geométrico y aritmético de la época. Además, Euclides lo organizó de manera brillante: el método axiomático guiaba su trabajo. Ya hemos señalado que el método de Euclides tenía fallas, como señala Blanché: "suprimid la figura, trazada o imaginada, y la demostración se viene abajo". Hilbert con sus Grundlagen subsanó estas deficiencias, especificó un grupo de axiomas que eliminaban el llamado a lo sensorial, a lo pictórico. Poincare pensaba se había alcanzado el rigor absoluto. El método axiomático es fundamental para la empresa que Nicolás Bourbaki se va a trazar.

La empresa además resultó un éxito editorial grande lo cual permitió editar una gran cantidad de volúmenes (30 aproximadamente) en 70 años de existencia. Por supuesto que no todo fue escrito por los legendarios miembros iniciales, de hecho para mantener el vigor del grupo se puso la condición que todo miembro debía retirarse a los 50 años. También por la necesidad de una buena comunicación

los miembros debían hablar un francés muy fluido. De hecho Bourbaki es una obra francesa con la participación de pocos extranjeros. Una de las pocas excepciones fue Samuel Eilenberg de origen polaco. Bourbaki fue creciendo en los años cincuenta y sesenta y su importancia llegó a ser incuestionable. En algún momento el matemático americano Ralph Boas en un artículo en la Enciclopedia Británica comentó que ya todos sabían que Bourbaki era un grupo de matemáticos franceses que se escondían bajo un seudónimo. La reacción no se hizo esperar. Bourbaki en un artículo llamó gusano a Boas y además decía que Boas era un grupo de matemáticos americanos que publicaban bajo el seudónimo de Boas.

El origen del nombre Bourbaki permanece oscuro, algunos dicen que se debe a una representación en broma que realizó un actor en la Ecolé Normale pretendiendo ser un matemático. En algún momento, demostró el Teorema de Bourbaki. Otra historia señala que el nombre se debe a un general francés de origen griego, que al perder una batalla amenazó con suicidarse, de hecho no lo hizo y se convirtió en un venerable anciano. Una estatua suya permanece en la ciudad de Nancy donde varios de los miembros fundadores fueron profesores. De cualquier forma, estas historias nos revelan el espíritu juvenil de los participantes y la alegría con la que emprendieron su monumental tarea.

Bourbaki: Primer Congreso 1935

Los elementos de las matemáticas

El sistema de trabajo consistía en reuniones anuales, en verano denominadas Congreso. En ellas se escogía y discutía sobre el próximo trabajo a ser publicado. Usualmente una persona era asignada para escribir los capítulos del siguiente libro durante un período de un año. Al año siguiente el manuscrito era repartido al resto de los miembros quienes usualmente lo criticaban hasta destruirlo, el autor resignado debía empezar prácticamente de nuevo. Se trataba de se-

guir ciertas pautas que le daban a Bourbaki un estilo característico y uniforme independientemente de quién escribía el texto. En la elección de Bourbaki para el desarrollo de su obra matemática se plantean varias cosas:

1. Uso del lenguaje de la Teoría de Conjuntos, de hecho el primer volumen iba a ser sobre conjuntos y fue publicado en 1939.
2. Uso del método axiomático que Hilbert y su escuela impusieron.
3. Una presentación completa de las principales **estructuras matemáticas**

El lenguaje fue muy cuidado en la obra de Bourbaki, quienes sometían los trabajos a una minuciosa revisión. Uno de los puntos importantes del uso del lenguaje en Bourbaki es la presentación de un lenguaje unificado que se mantenía en las diversas obras.

Debemos señalar una diferencia entre el trabajo en la axiomática de Hilbert en geometría y lo que pretendía Bourbaki. Hilbert en sus Grundlagen der Geometrie axiomatiza una teoría específica, en este caso la geometría. *Bourbaki quería axiomatizar las grandes teorías unificadoras de la matemática. Esa unificación se lograba a través del concepto de estructura*. Era el concepto de estructura lo que quería atrapar Bourbaki. Bourbaki define tres tipos de estructuras básicas:

- Algebraicas
- De orden
- Topológicas

Las estructuras algebraicas se entienden claramente considerando una estructura madre: la estructura de grupo (ver la nota 2. matemática arriba). Una estructura madre o básica es aquella de la cual derivan o está incluida en la formulación de estructuras más complejas. El estudiante recordará que en la formulación del concepto de anillo, cuerpo o de espacio vectorial el concepto de grupo aparece inmerso. En las estructuras algebraicas tenemos entonces un conjunto dotado de leyes de composición (externas o internas) que verifican ciertas propiedades o axiomas.

Las estructuras de orden son fáciles de entender si el estudiante recuerda el concepto de orden parcial ya revisado en esta unidad. La estructura básica o fundamental es la de reticulado.

Notas matemáticas complementarias

1. Reticulados

Decimos que L *es un reticulado si*: L un conjunto con un orden parcial $\leq$ para el cual si tenemos dos elementos cualesquiera x, y existe el máximo $\max\{x, y\}$ y el mínimo $\min\{x, y\}$ que verifican:

1. $x \leq \max\{x, y\}$, $y \leq \max\{x, y\}$ y $\max\{x, y\}$ es el menor elemento de L con esta propiedad
2. $\min\{x, y\} \leq x$, $\min\{x, y\} \leq y$ y $\min\{x, y\}$ es el mayor elemento de L con esta propiedad.

Ejemplos de reticulado son la recta real con el orden usual o el conjunto de partes de un conjunto dado, donde la relación de orden es la inclusión. También dentro la teoría de grupos podemos dar como ejemplo de reticulado el conjunto de todos los subgrupos de un grupo dado, con el orden natural de la inclusión.

El último tipo de estructura considerada es la estructura topológica. En este caso queremos unificar las partes de la matemática donde las nociones de continuidad y convergencia son estudiadas. Esto es realmente un desarrollo matemático propio del siglo XX ya que alrededor de los años 20, estos conceptos son clarificados y enunciados de manera definitiva. Antecedentes de los conceptos que van a surgir son la teoría de los espacios de Hilbert desarrollada por Schmidt en 1906 y la teoría de espacios métricos desarrollada por Frechet el mismo año. Por cierto que el concepto de espacio métrico engloba varias estructuras: espacio de Hilbert, espacio normado, etc. Vamos a describir lo que es un espacio métrico donde el concepto fundamental es el de distancia.

2. Espacios métricos

Un *espacio métrico* E es un conjunto (los elementos de E se llaman puntos) dotado de una distancia d entre los puntos de E que satisface los siguientes axiomas:

1. La distancia d en E asocia a cada par de puntos $x, y \in E$ un número real, es decir como función $d : E \times E \to \mathbb{R}$

2. La distancia es simétrica, es decir para cada par de puntos $x, y \in E$ se tiene $d(x, y) = d(y, x)$

3. La distancia siempre es positiva, esto es decir para cada par de puntos $x, y \in E$ se tiene $d(x, y) \geq 0$. Aún más, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

4. La distancia verifica la desigualdad triangular, es decir para cada terna de puntos $x, y, z \in E$ se tiene $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

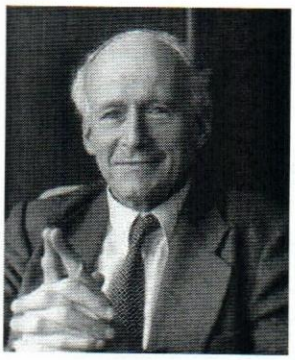
Unos comentarios sobre los axiomas. El axioma 2 indica que la distancia entre el punto $x \in E$ y el punto $y \in E$ es la misma que entre el punto $y \in E$ y el punto $x \in E$. El axioma 3 es muy natural, diciéndonos que la distancia es siempre una cantidad positiva y que sólo es nula en el caso que los puntos coincidan. El axioma 4 es muy importante, probablemente el más importante. Indica que siempre el camino más corto es ir directamente de un punto al otro. Debemos señalar que estos axiomas no son independientes entre sí, aunque creo conveniente, por la claridad de la exposición, escribir los 4 postulados.

El concepto de espacio métrico evolucionó a un importante hito en la matemática del siglo XX: el concepto de espacio topológico, debido a Hausdorff quien en 1914 publica *Grundzüge der mengenlehre*. Este trabajo abarcaba la teoría de los espacios métricos y la de los espacios topológicos.

Felix Hausdorff

Matemático alemán de origen judío. Nació en 1868 en Breslau, que ahora es parte de Polonia. De familia rica, se dedica a la filosofía y a la matemática. En el campo de la matemática no padeció el infortunio de otros matemáticos alemanes desarrollando su trabajo despreocupadamente por su situación económica. Es en el siglo XX y por la influencia de Study que toma su trabajo matemático más profesionalmente. Destaca su obra en la Teoría de Conjuntos y en la formulación de la Teoría de Espacios Topológicos. A raíz de la llegada de los nazis empieza a padecer el infortunio de ser judío. Él y su esposa comenten suicidio en Bonn en el año de 1942, cuando era inevitable que lo enviasen aun campo de concentración.

Uno cosa que debemos señalar común a todos estos desarrollos del siglo XX y al enfoque de Bourbaki es el creciente grado de abstracción de la matemática. Pero como señala Bourbaki no es una búsqueda de lo abstracto como equivalente de lo separado de la realidad. Las estructuras matemáticas que estudia Bourbaki son concebidas como estructuras relevantes y preñadas de posibilidades. Son el alma del cuerpo de la matemática y la unifican. Por supuesto que estas estructuras se combinan entre ellas dando lugar a una nueva síntesis en matemática, tan potente como la que dio lugar a la geometría analítica. Por ejemplo, de la estructura algebraica de los espacios vectoriales y la topológica de los espacios topológicos surge la teoría de los Espacios Vectoriales Topológicos. Alertamos al lector que esto no es un juego del arte por el arte. De la teoría de Espacios Vectoriales Topológicos surge, por ejemplo, la Teoría de Distribuciones de Laurent Schwartz con aplicaciones en física matemática, ecuaciones en derivadas parciales, etc. Por cierto Laurent Schwartz fue un miembro destacado de Bourbaki que ganó la medalla Fields en el año de 1950.



Laurent Schwartz (1915-2002)

El grupo Bourbaki marcó una tendencia en la matemática del siglo XX, dominada por un enfoque abstracto donde lo axiomático era omnipresente. El siglo XX vio el desarrollo de la lógica matemática y la Teoría de Conjuntos a una altura no sospechada por Cantor ni Russell. Los matemáticos también formularon la Teoría de Categorías y Funtores que era un nuevo paso hacia una mayor abstracción en matemática. Bourbaki no dio ese paso y se mantuvo dentro del esquema derivado de la Teoría de Conjuntos y su axiomática, fue una elección deliberada. Quizás temían que esto solamente llevase a un proceso muerto donde la matemática se alejará de sus fuentes vitales. No querían lo abstracto por lo abstracto. Siempre se preocuparon por mantener en sus libros una matemática relevante. Su obra es una

piedra fundamental de lo que entendemos por matemática en el siglo XX como lo señaló Halmos.

Se ha hablado de la influencia de la matemática de Bourbaki en la enseñanza de la matemática a nivel medio y primario. Sus miembros destacados como Dieudonne han alertado que ellos no han propuesto nada al respecto. Sin embargo, con una obra escrita tan importante, han influido el currículo universitario y en algunas universidades como la de Sao Paulo sus libros fueron usados como libros de texto. El tiempo nos dirá cuál va a ser el aporte final de este grupo de amigos que sólo querían escribir el mejor libro de cálculo que se hubiese escrito.

Rincón del asesor

El desarrollo del campo matemático en el siglo XX fue tremendo. Surgieron áreas como el Análisis Funcional, la Teoría de la Medida, la Topología Algebraica, etc. De hecho se considera a Hilbert como el último matemático universal. Actualmente cada matemático se dedica a una pequeña parcela y conoce sólo un dominio bien delimitado. Cabe pregóntarse: ¿tenemos una matemática o infinidad de disciplinas que por razones históricas y sociales se siguen agrupando con el nombre de matemática? Esperamos oír sus ideas.

Actividades y ejercicios matemáticos

Ejercicio 1. Demuestre que f definida como:

$$f : IN \to C$$
$$f(n) = n^2$$

es una biyección, donde *IN* son los números naturales y $C = \{0,1,4,9,\cdots\}$ es el conjunto de todos los cuadrados.

Ejercicio 2. Demuestre que existe una biyección entre los números enteros y los números naturales.

Ejercicio 3. Sea K el conjunto de todas las sucesiones de ceros y unos, es decir un elemento típico de K es 1010101010101010101. Para ser un poco

más formales, K=$\{f:\mathbb{N}\to\{0,1\}\}$. Demuestre, usando el argumento diagonal de Cantor, que K es no numerable.

Actividad 1. Recordamos que la definición de tamaño de un vector $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$. Demuestre la importante desigualdad de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\|y\|$$

Siguiendo los pasos que sugerimos:

1. Defina el polino
2. mio en $\lambda, p(\lambda)=\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle$ y calcule el mismo. Imagine que los vectores *x,y* están fijos. ¿Cuál es el grado de p?
3. Verifique que para todo es positivo ¿Cómo debe ser el discriminante de p?
4. Establezca la desigualdad que queremos demostrar.

Ejercicio 4. Usando la actividad anterior demuestre que:

$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$$

Ejercicio 5. Demuestre que en un grupo cualquiera el elemento neutro es único.

Ejercicio 6. Un caballo determina la distancia entre dos casillas del tablero de ajedrez de la manera siguiente: la distancia entre la casilla *A* y la casilla *B* es el menor número de saltos que debe hacer el caballo para ir de *A* hacia *B*. Demuestre que ésto es en realidad es una distancia que convierte el tablero de ajedrez en un espacio métrico.

Actividad 2. Demuestre que los axiomas de la distancia no son independientes.

Actividad 3. Vaya a la biblioteca del centro local y busque los axiomas que caracterizan las siguientes estructuras matemáticas:

1. Anillo
2. Espacio vectorial

3. Ideal
4. Espacio topológico
5. Espacio vectorial topológico
6. Espacio normado
7. Reticulado normado

Indique cúales son estructuras algebraicas, de orden, topológicas o una mezcla de las anteriores. Busque ejemplos de cada una de estas estructuras: anillo, ideal, etc. Los libros de Matemática de la UNA (carreras 106 y 120) pueden ser de valiosa ayuda para esta actividad.

Ejercicio 7. Demuestre que si un conjunto tiene n elementos, el conjunto de sus partes tiene 2^n.

Autoevaluación

El test consta de dos partes. La primera parte consiste en algunos ejercicios matemáticos relacionados con la matemática del siglo XX y los temas tratados en la lectura y las notas matemáticas. La segunda consiste en algunas preguntas muy sencillas de selección simple para verificar su conocimiento del material del curso.

Ejercicios

1. Demuestre que el conjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tiene un cardinal mayor que el de los números reales.

2. Un conjunto dotado de una ley de composición interna $\oplus$ se denomina un semigrupo sí y sólo si $\oplus$ es asociativa. ¿Son los números naturales un semigrupo con respecto a la suma usual?. Razone su respuesta.

3. En las calles de una ciudad se establece la distancia del taxista como el menor número de cuadras que lleva ir de un punto a otro. Suponga que la ciudad y sus cuadras forman una cuadrícula uniforme y que las calles son de doble sentido. Verifique que esto es una distancia. ¿Es el camino de menor distancia único?

4. Se considera el reticulado de los números reales con las operaciones de suma y multiplicación usuales, demostrar que $a+b-a\wedge b=a\vee b$.

Preguntas de selección simple

1.- De acuerdo a lo discutido en la lectura del siglo XX, Bourbaki fue:

a) Un matemático francés de origen griego
b) Un grupo de matemáticos franceses
c) Un general griego que derrotó a Napoleón
d) Un grupo de matemáticos americanos encabezados por Ralph Boas

2.- Dos características principales de la matemática del siglo XX son:

a) Abstracción y uso del método axiomático
b) Una vuelta al uso de los infinitesimales y a lo geométrico

c) La aparición de la geometría no euclídea y la teoría de conjuntos
d) Aparición de la matemática aplicada y del concepto de grupo

3.- Colaboró con Cantor para el desarrollo de la Teoría de Conjuntos:
a) Gauss
b) Riemann
c) Dedekind
d) Hilbert

4.- Uno de los dos últimos matemáticos universales es:

a) Euclides
b) Arquímedes
c) Gauss
d) Hillbert

5.- Pensaba Kronecker sobre la Teoría de Conjuntos:

a) que era un disparate matemático
b) que era el punto de partida de la matemática contemporánea
c) no estaba al tanto de su desarrollo
d) trabajó sobre ella pero no quiso publicar nada por lo polémico del tema

6.- Uno de los miembros fundadores del grupo Bourbaki es:

a) David Hilbert
b) André Weil
c) Henri Poincare
d) Jean Bernoulli

7.- El trabajo de tesis doctoral de Hilbert versó sobre:

a) Geometría y sus fundamentos
b) Espacios de Hilbert
c) Teoría de números algebraicos
d) Teoría de invariantes

8.- Demostró la imposibilidad de cuadrar el círculo:

a) Gauss
b) Galois
c) Lindemann
d) Hilbert

9.- El problema conocido como la hipótesis del continuo surge de:

a) El trabajo de Cantor sobre Teoría de Conjuntos
b) del trabajo del griego Eudoxio y su concepto de continuidad
c) de la formalización de Cauchy sobre el concepto de función continua
d) del trabajo de Hilbert en sus Grundlagen

10.- Centrar la matemática en el concepto de estructura es una idea de:

a) Cantor
b) Hilbert
c) Bourbaki
d) Kronecker

11.- Destruyó el programa logicista de Hilbert con sus resultados:

a) Godel
b) Russell
c) Frege
d) Burali-Forti

Solución a la autoevaluación

Ejercicios

1. Supongamos que se pueda establecer una biyección entre los reales y el conjunto de todas las funciones de los números reales en los números reales, $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. El argumento, si el lector observa cuidadosamente, es una variación del argumento diagonal de Ascoli-Cantor. A cada x real le asociamos una función $x \leftrightarrow f_x$. Consideramos ahora los "valores diagonales" $f_x(x)$ y construimos una función g que verifica:

$$g(x) \neq f_x(x)$$

Le preguntamos al lector: ¿se puede construir g? Si la respuesta es afirmativa y debe serlo, ¿ve Ud. estimado lector el problema que se presenta con g?

2. Los números naturales son un ejemplo muy importante de semigrupo. El lector debe recordar que en los números naturales con la suma usual se verifica la propiedad asociativa.

3. Lo dejamos al lector del curso, lo único algo difícil de demostrar es la desigualdad triangular. Trate de demostrarla usando reducción al absurdo.

4. Si sumo dos números y le quito el más pequeño de ellos, me queda el más grande.

Preguntas de Selección Simple

1. b) Grupo de matemático franceses autores de una extraordinaria obra matemática: Los elementos.

2. a) Del trabajo de la escuela alemana se deriva el enfoque principal de la matemática en el siglo XX: la abstracción y el método axiomático.

3. c) Como señalamos en la lectura Dedekind y Cantor tuvieron una copiosa correspondencia en relación al infinito.

4. d) Hilbert y Poincare son los dos últimos matemáticos que tuvieron una visión panorámica de nuestra ciencia.

5. a) A Kronecker le disgustaba la idea del infinito, era un matemático con una visión limitada.

6. b) Andre Weil. ¿Sabía Ud. que Henri Cartan es el único miembro fundador vivo?

7. d) Lindemann le propone a Hilbert trabajar en la Teoría de Invariantes después de un tropezón que sufrió Hilbert al trabajar en fracciones continuas.

8. c) Lindemann al demostrar que π era trascendente acabó con el asunto. Por favor si alguien les muestra una prueba de cómo cuadrar el círculo ni la vean. La duplicación del cubo y la trisección del ángulo tuvieron igual suerte: son imposibles. Todos estos resultados están enmarcados en la Teoría de Extensiones de Cuerpo que surge del trabajo de Galois.

9. a) La Hipótesis del Continuo nos pregunta si existen o no cardinales intermedios entre el cardinal de los naturales y el de los números reales y viene del trabajo de Cantor.

10. c) Bourbaki considera tres tipos de estructuras matemáticas fundamentales.

11. a) Godel le dio jaque mate al programa de Hilbert.

A manera de Epílogo: Lecturas recomendadas

Todavía recuerdo cuando er la selección de lecturas recomendadas en el libro *Calculus* de Micha k. Pensaba que si Spivak fue capaz de escribir esa maravilla que es su *Calculus* entonces los libros que sugería debían ser las fuentes de su extraordinario talento como escritor matemático. Con el tiempo he podido verificar mi hipótesis y he ido adquiriendo muchas de las obras que Spivak me señaló. Vamos a intentar sugerirle a lector más cosas que leer en el futuro.

Me encantó el delicioso libro de Almira y Sabina: *Hilbert: matemático fundamental.* Muy bien escrito, se escapa de lo puramente anecdótico con sustanciosas notas matemáticas. Si el lector cree que es mejor muchas biografías en lugar de una sola, el libro de Eric Temple Bell *Men of mathematics* es el indicado. En el moodle del curso puse un enlace a una versión en español que se puede descargar.

Para una visión panorámica de la historia de la matemática nos quedamos **el libro de Rey Pastor y Babini;** el mismo está en nuestros centros de recursos múltiples.

La comunidad hispanoamericana sufrió recientemente una lamentable perdida, la muerte de Miguel de Guzmán. Sus libros rebozan de amor por la matemática y sus personajes. Uno de sus libros, escrito con Claudi Alsina, es *Los matemáticos no son gente seria.* Lleno de anécdotas que presentan de manera muy humana y jocosa a los matemáticos. Pero su obra de divulgación es importante y recomendamos al estudiante UNA sus libros.

Apéndice I: Obra de Bourbaki y miembros del grupo
Lo siguiente lo tomamos de la página web oficial del grupo Bourbaki, es un resumen de los títulos publicados por el grupo Bourbaki.

Éléments de Mathématique:
Títulos en francés

Théorie des Ensembles	chapitres 1 à 4	1970 (réimpression en 1998)	352 pages	
Algèbre	chapitres 1 à 3	1970	654 pages	
Algèbre	chapitres 4 à 7	1981	432 pages	
Algèbre	chapitre 8	1958 (nouveau tirage en 1973)	190 pages	épuisé
Algèbre	chapitre 9	1959 (nouveau tirage en 1973)	212 pages	épuisé
Algèbre	chapitre 10	1980	224 pages	
Topologie Générale	chapitres 1 à 4	1971 (réimpression en 1990)	376 pages	
Topologie Générale	chapitres 5 à 10	1974	334 pages	
Fonctions d'une Variable Réelle	chapitres 1 à7	1976	336 pages	
Espaces Vectoriels Topologiques	chapitres 1 à 5	1981	400 pages	
Intégration	chapitres 1 à 4	1965 (nouveau tirage en 1973)	284 pages	épuisé
Intégration	chapitre5	1967	154 pages	épuisé
Intégration	chapitre 6	1959	106 pages	épuisé
Intégration	chapitres 7 et 8	1963	222 pages	épuisé

Intégration	chapitre 9	1969	134 pages	
Algèbre Commutative	chapitres 1 à 4	1968 et 1969 (réimpression en 1985)	364 pages	
Algèbre Commutative	chapitre 5 à 7	1964et 1965 (réimpression en 1985)	352 pages	
Algèbre Commutative	chapitres 8 et 9	1983	208 pages	
Algèbre Commutative	chapitre 10	1998	187 pages	
Variétés Différentielles et Analytiques	§§ 1 à 15	1967 et 1971 (réimpression en 1998)	198 pages	
Groupes et Algèbres de Lie	chapitre 1	1971	146 pages	
Groupes et Algèbres de Lie	chapitres 2 et 3	1972	320 pages	
Groupes et Algèbres de Lie	chapitres 4 à 6	1968 (réimpression en 1981)	288 pages	
Groupes et Algèbres de Lie	chapitres 7 et 8	1975 (réimpression en 1998)	272 pages	
Groupes et Algèbres de Lie	chapitre 9	1982	144 pages	
Théories spectrales	chapitres 1 et 2	1967	168 pages	épuisé
Eléments d'histoire des mathématiques		1974 (réimpression en 1984)	376 pages	

La lista de miembros fundadores incluye a: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt, André Weil.

Otros miembros de gran importancia han sido : Alexandre Grothendieck (medalla Fields 1966), Samuel Eilenberg y Alain Connes (medalla Fields 1982).

BIBLIOGRAFÍA

Almira, J., Sabina, J. (2007). *Hilbert: Matemático fundamental*. España: Nivola

Alsina, C., De Guzman, M. (1998). *Los matemáticos no son gente seria.* Madrid: Editorial Rubes.

Babini, J., Rey Pastor, J. (1997). *Historia de la Matemática, Vols. I y II.* Barcelona: Editorial Gedisa

Bell, E. (1996). *Historia de las Matemáticas*. Mexico: Fondo de Cultura Económica.

Bell, E. (1986). *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster

Berlinski, D. (2006). *Ascenso Infinito*. Barcelona: Debate

Blanché, R. (1965). *La Axiomática.* México: Universidad Autonoma de de México.

Boyer, C. (2004). *History of Analytic Geometry*. New York: Dover.

Cantor, G. (1955). *Contributions to the founding of the Theory of Transfinite Numbers*. New York : Dover.

Cotlar,M., Sadowsky, C.(1966). *Introducción al Álgebra. Nociones de Algebra Lineal.* Buenos Aires: Eudeba.

Courant, R., Robbins, H. (1996) *What is Mathematics?*. Oxford: Oxford University Press

De Guzmán, M. (2006). *Aventuras Matemáticas: Una ventana hacia al caos y otros episodios.* Madrid: Pirámide

Dedekind, R. (1901). *Essays on the Theory of Numbers.* Extraído el 10 de Noviembre de 2007 desde http://www.gutenberg.org/etext/21016

Domingo, C. (2003). *Historia de las Ideas Matemáticas*. Merida: Escuela Venezolana para la enseñanza de la Matemática

Euclid. (1956). *The Elements, Vols. I, II y III*. New York: Dover.

Gray, J. (2003). *El reto de Hilbert.* Barcelona: Critica

Hilbert, D. (1900). *Los problemas futuros de la matemática* (traducción José Ramón Ortiz). Extraído el 21 de diciembre de 2007 desde http://personales.ya.com/casanchi/ref/pfuturos01.htm.

Hilbert, D. (1899). *Foundations of Geometry*. Extraído el 10 de Noviembre desde http://www.gutenberg.org/etext/17384

Hiriart-Urruty. J. (2006). *Du Calcul Differentiel au Calcul Variationnel: un apercu del'evolution de P. Fermat a nos jours.* Manuscrito no publicado.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought:From the ancient to the modern times, Vol I.* Oxford: Oxford University Press.

Le Lionnais, F. (2004). *Great Currents of Mathematical Thought.* New York: Dover

Pietsch, A. (2007). *History of Banach Spaces and Linear Operators.* Boston: Birkhäusser.

Reid, C. (1996). *Hilbert*. New York: Springer-Verlag

Riemann, B. (1854). *Sobre las Hipótesis que sirven de Fundamento a la Geometría".* Extraido el 11 de diciembre de 2007 desde http://personales.ya.com/casanchi/ref/riemann03.htm.

Santalo, L. et al (1994). *Enfoques: Hacia una didáctica humanística de la matemática.* Buenos Aires: Trovquel Educación

Taylor, A. (1958). *Introduction to Functional Análisis.*New York: John Wiley&Sons