UNIVERSIDAD CATOLICA ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL

RIGIDECES DE PLANTA PARA EDIFICIOS CON PORTICOS ORTOGONALES Y NO ORTOGONALES; ESTUDIO DE LAS INTERACCIONES ENTRE LAS RIGIDECES TRASLACIONALES Y TORSIONALES DE UNA PLANTA DE EDIFICIO

Trabajo de Investigación presentado por:

Alicia ARANDIA MENDOZA
Y
Carolina MEDINA INGARUCA

a la
Escuela de Ingeniería Civil
Como requisito parcial para obtener el título de
Ingeniero Civil

Tutor:
Mario PAPARONI

Caracas, Septiembre 2007

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

RIGIDECES DE PLANTA PARA EDIFICIOS CON PÓRTICOS ORTOGONALES Y NO ORTOGONALES; ESTUDIO DE LAS INTERACCIONES ENTRE LAS RIGIDECES TRASLACIONALES Y TORSIONALES DE UNA PLANTA DE EDIFICIO.

Este Jurado; una vez realizado el examen del presente trabajo ha evaluado su contenido con el resultado: .....

J U R A D O E X A M I N A D O R

Firma:	Firma:	Firma:
Nombre:	Nombre:	Nombre: .....

REALIZADO POR ARANDIA MENDOZA, Alicia
MEDINA INGARUCA, Carolina

PROFESOR GUIA Ing. MARIO PAPARONI

FECHA Septiembre de 2007

INDICE DE CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS II

INDICE DE CONTENIDO III

INDICE DE FIGURAS IV

INDICE DE TABLAS V

RESUMEN VI

INTRODUCCIÓN 1

OBJETIVOS 3

ALCANCES Y LIMITACIONES 4

CAPITULO I. FUNDAMENTOS TEORICOS 5

I.1 Definiciones del Tekhné 5

I.2 Coordenadas pedales y forma normal de la recta 10

I.3 Elipses 11

I.3.1 Elipse de radio de giro 12

I.3.1.1 Determinación de las relaciones polo-polar 13

I.3.1.2 Fuerza en el interior del círculo 14

I.3.1.3 Fuerza en el exterior del círculo 14

I.3.1.4 Relaciones Fuerza-deformación 15

I.3.2 Elipse de Torsión 16

I.3.2.1 Definición adoptada para dibujar "la elipse de torsión" 17

I.3.2.2 Caso traslación mas giro 17

I.3.2.3 Traslación pura 18

CAPITULO II TRANSFORMACIONES 21

II.1 FORMULAS TEKHNÉ 21

II.1.2 Momentos de inercia 21

II.1.3 Productos de inercia de coeficientes 21

II.1.4 Productos de inercia de radios 21

II.1.5 Coordenadas de centro de rigidez 22

II.1.6 Dirección de uno de los ejes principales 22

II.2 TRANSFORMACION DE LAS FORMULA DE TEKHNÉ 22

II.2.1 Momentos de inercia 23

II.2.2 Productos de inercia de coeficientes 23

II.2.3 Productos de inercia de radios 23

II.2.4 Coordenadas de centro de rigidez 23

II.2.5 Dirección de uno de los ejes principales 23

CAPITULO III PROCEDIMIENTO DE TRABAJO 24

CAPITULO IV EJEMPLOS DE PLANTAS (FIGURAS GEOMÉTRICAS) 28

CAPITULO V EJEMPLOS DE PLANTA CON FORMA ARBITRARIA 74

CAPITULO VI EJEMPLO DE PLANTAS CON PÓRTICOS ORTOGONALES INTERNOS 132

CAPITULO VII ANÁLISIS DE PLANTAS 155

CONCLUSIONES 159

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 161

APÉNDICE 162

INDICE DE FIGURAS

Fig. 1.1 Centro de masas; Centro de gravedad de áreas despreciando términos de segundo orden 5

Fig. 1.2 Centro de rotación 7

Fig. 1.3 Pórtico singular 7

Fig. 1.4 Dos pórticos paralelos entre si 7

Fig. 1.5 Tres o mas pórticos concurrentes hacia un único punto del diafragma 8

Fig. 1.6 Tres pórticos que no son ni concurrentes ni coplanares entre sí 8

Fig. 1.7 Pórtico inclinado con deformación 9

Fig. 1.8 Representación de la ecuación normal de la recta 11

Fig. 1.9 Centros instantáneos de rotación y pórticos afectados por torsión 12

Fig. 1.10 Polo-antipolo 13

Fig1.11 Fuerza en el interior del círculo 14

Fig. 1.12 fuerza en el exterior del círculo 14

Fig. 1.13 Relaciones fuerza-deformación 15

Fig. 1.14 Ejes conjugados 15

Fig. 1.15 Fuerza tangente a la elipse 17

Fig.1.16 Fuerzas adentro de la elipse 17

Fig. 1.17 Definición adoptada para dibujar la elipse de torsión 17

Fig. 1.18 Caso traslación mas giro 18

Fig. 1.19 Traslación pura 18

Fig. 1.20 Caso en donde ocurre magnificación de la fuerza 19

Fig. 1.21 Desplazamientos generados por rotación y traslación 20

Fig. 3.1 Elipse (forma canónica) 19

Fig. 4.1 Planta #1 29

Fig. 4.2 Elipse de Rigidez 30

Fig. 4.3 Elipse de Flexibilidad. 30

Fig. 4.4 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 31

Fig. 4.5 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 31

Fig. 4.6 Elipse de Torsión. 32

Fig. 4.7 Círculo de Mohr 32

Fig. 4.8 Planta #2 33

Fig. 4.9 Elipse de Rigidez 34

Fig. 4.10 Elipse de Flexibilidad. 35

Fig. 4.11 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 35

Fig. 4.12 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 36

Fig. 4.13 Elipse de Torsión. 37

Fig. 4.14 Círculo de Mohr 37

Fig. 4.15 Planta #3 38

Fig. 4.16 Elipse de Rigidez 40

Fig. 4.17 Elipse de Flexibilidad. 41

Fig. 4.18 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 41

Fig. 4.19 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 42

Fig. 4.20 Elipse de Torsión. 43

Fig. 4.21 Círculo de Mohr 44

Fig. 4.22 Planta #4 45

Fig. 4.23 Elipse de Rigidez 46

Fig. 4.24 Elipse de Flexibilidad. 47

Fig. 4.25 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 48

Fig. 4.26 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 49

Fig. 4.27 Elipse de Torsión. 50

Fig. 4.28 Círculo de Mohr 50

Fig. 4.29 Planta #5 51

Fig. 4.30 Elipse de Rigidez 52

Fig. 4.31 Elipse de Flexibilidad. 53

Fig. 4.32 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 53

Fig. 4.33 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 54

Fig. 4.34 Elipse de Torsión. 55

Fig. 4.35 Círculo de Mohr 55

Fig. 4.36 Planta #6 56

Fig. 4.37 Elipse de Rigidez 57

Fig. 4.38 Elipse de Flexibilidad. 58

Fig. 4.39 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 58

Fig. 4.40 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 59

Fig. 4.41 Elipse de Torsión. 60

Fig. 4.42 Círculo de Mohr 60

Fig. 4.43 Planta #7 61

Fig. 4.44 Elipse de Rigidez 62

Fig. 4.45 Elipse de Flexibilidad. 63

Fig. 4.46 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 63

Fig. 4.47 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 64

Fig. 4.48 Elipse de Torsión. 65

Fig. 4.49 Círculo de Mohr 65

Fig. 4.50 Planta #8 66

Fig. 4.51 Elipse de Rigidez 68

Fig. 4.52 Elipse de Flexibilidad. 69

Fig. 4.53 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 70

Fig. 4.54 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 71

Fig. 4.55 Elipse de Torsión. 72

Fig. 4.56 Círculo de Mohr 73

Fig. 5.1 Planta #9 75

Fig. 5.2 Elipse de Rigidez 77

Fig. 5.3 Elipse de Flexibilidad 78

Fig. 5.4 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 79

Fig. 5.5 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 80

Fig. 5.6 Elipse de Torsión. 81

Fig. 5.7 Círculo de Mohr 81

Fig. 5.8 Planta #10 82

Fig. 5.9 Elipse de Rigidez 84

Fig. 5.10 Elipse de Flexibilidad. 85

Fig. 5.11 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 86

Fig. 5.12 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 87

Fig. 5.13 Elipse de Torsión. 87

Fig. 5.14 Círculo de Mohr 88

Fig. 5.15 Planta #11 89

Fig. 5.16 Elipse de Rigidez 91

Fig. 5.17 Elipse de Flexibilidad. 91

Fig. 5.18 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 92

Fig. 5.19 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 93

Fig. 5.20 Elipse de Torsión. 94

Fig. 5.21 Círculo de Mohr 94

Fig. 5.22 Planta #12 95

Fig. 5.23 Elipse de Rigidez 97

Fig. 5.24 Elipse de Flexibilidad. 97

Fig. 5.25 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 98

Fig. 5.26 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 99

Fig. 5.27 Elipse de Torsión. 100

Fig. 5.28 Círculo de Mohr 100

Fig. 5.29 Planta #13 101

Fig. 5.30 Elipse de Rigidez 103

Fig. 5.31 Elipse de Flexibilidad. 103

Fig. 5.32 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 104

Fig. 5.33 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 105

Fig. 5.34 Elipse de Torsión. 106

Fig. 5.35 Círculo de Mohr 106

Fig. 5.36 Planta #14 107

Fig. 5.37 Elipse de Rigidez 109

Fig. 5.38 Elipse de Flexibilidad. 109

Fig. 5.39 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 110

Fig. 5.40 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 111

Fig. 5.41 Elipse de Torsión. 112

Fig. 5.42 Círculo de Mohr 112

Fig. 5.43 Planta #15 113

Fig. 5.44 Elipse de Rigidez 115

Fig. 5.45 Elipse de Flexibilidad. 115

Fig. 5.46 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 116

Fig. 5.47 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 117

Fig. 5.48 Elipse de Torsión. 118

Fig. 5.49 Círculo de Mohr 118

Fig. 5.50 Planta #16 119

Fig. 5.51 Elipse de Rigidez 121

Fig. 5.52 Elipse de Flexibilidad. 121

Fig. 5.53 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 122

Fig. 5.54 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 123

Fig. 5.55 Elipse de Torsión. 123

Fig. 5.56 Círculo de Mohr 124

Fig. 5.57 Planta #17 125

Fig. 5.58 Elipse de Rigidez 127

Fig. 5.59 Elipse de Flexibilidad. 128

Fig. 5.60 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia) 129

Fig. 5.61 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 130

Fig. 5.62 Elipse de Torsión. 130

Fig. 5.63 Círculo de Mohr 131

Fig. 6.1 Planta #18 133

Fig. 6.2 Elipse de Rigidez 135

Fig. 6.3 Elipse de Flexibilidad. 135

Fig. 6.4 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 136

Fig. 6.5 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 137

Fig. 6.6 Elipse de Torsión. 138

Fig. 6.7 Círculo de Mohr 138

Fig. 6.8 Planta #19 139

Fig. 6.9 Elipse de Rigidez 140

Fig. 6.10 Elipse de Flexibilidad. 141

Fig. 6.11 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 141

Fig. 6.12 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 142

Fig. 6.13 Elipse de Torsión. 143

Fig. 6.14Círculo de Mohr 143

Fig. 6.15 Planta #20 144

Fig. 6.16 Elipse de Rigidez 145

Fig. 6.17 Elipse de Flexibilidad. 146

Fig. 6.18 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 146

Fig. 6.19 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 147

Fig. 6.20 Elipse de Torsión. 148

Fig. 6.21 Círculo de Mohr 148

Fig. 6.22 Planta #21 149

Fig. 6.23 Elipse de Rigidez 151

Fig. 6.24 Elipse de Flexibilidad. 151

Fig. 6.25 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia). 152

Fig. 6.26 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad). 153

Fig. 6.27 Elipse de Torsión. 153

Fig. 6.28 Círculo de Mohr 154

INDICE DE TABLAS

Tabla 1: Datos de la planta #1 29

Tabla 2: Datos de la planta #2 33

Tabla 3: Datos de la planta #3 38

Tabla 4: Datos de la planta #4 45

Tabla 5: Datos de la planta #5 51

Tabla 6: Datos de la planta #6 56

Tabla 7: Datos de la planta #7 61

Tabla 8: Datos de la planta #8 66

Tabla 9: Datos de la planta #9 75

Tabla 10: Datos de la planta #10 82

Tabla 11: Datos de la planta #11 89

Tabla 12: Datos de la planta #12 95

Tabla 13: Datos de la planta #13 101

Tabla 14: Datos de la planta #14 107

Tabla 15: Datos de la planta #15 113

Tabla 16: Datos de la planta #16 119

Tabla 17: Datos de la planta #17 125

Tabla 18: Datos de la planta #18 133

Tabla 19: Datos de la planta #19 139

Tabla 20: Datos de la planta #20 144

Tabla 21: Datos de la planta #21 149

RESUMEN

El presente trabajo especial de grado está destinado a presentar muy brevemente una serie de investigaciones teóricas sobre los efectos de las distribuciones irregulares en orientaciones y en valores de las rigideces de los pórticos (o muros) estructurales en plantas singulares de edificios.

Se presenta una solución matemática o una simplificación de las fórmulas para la determinación del momento de inercia polar, centro de rigídeces, etc. en una planta de edificio que posee pórticos en direcciones arbitrarias para así luego establecer un estudio de ellas a través de las elipses.

En el Capítulo I se presenta una introducción teórica de términos utilizados en el análisis de las plantas.

En el Capítulo II se muestra las transformaciones de fórmulas hechas para el cálculo simple momentos de inercia, productos de inercia de coeficientes, productos de inercia de radios, coordenadas de centro de rigidez, y dirección de uno de los ejes principales de la elipse

En el Capitulo III se explica de forma breve el procedimiento de trabajo.

En el Capítulo IV se muestra una serie de plantas cuyos pórticos perimétricos representan formas geométricas conocidas.

En el Capítulo V se muestra una serie de plantas cuyos pórticos están colocados de forma arbitraria.

En el Capítulo VI se muestra una serie de plantas con pórticos ortogonales internos, sin pórticos externos.

INTRODUCCIÓN

Cuando el ingeniero realiza el estudio sísmico de un edificio, si el trabajo se hace de modo muy riguroso, resulta difícil para el proyectista, el no saber qué decisiones puede tomar ni qué instrumentos tiene en sus manos para corregir situaciones indeseables o para optimizar soluciones. Esto puede simplificarse estudiando por separado la verticalidad de la estructura y la planta; en el Trabajo Especial de Grado realizado por Adriana González Lamon, el análisis y el comportamiento de las plantas lo hace partiendo de las fórmulas del profesor Hummelgens; al ver dichas ecuaciones se hace tedioso aplicarlas, por los datos requeridos para las mismas, los cuales no son ni intuitivos ni fácilmente visualizables.

Esto puede simplificarse, utilizando la ecuación normal de la recta, donde los términos resultantes son similares a los que aparecen en la matriz de rigidez, con funciones de senos y cosenos del ángulo de la recta normal a cada traza de pórtico, además de la longitud de dicha normal a partir de un origen arbitrario escogido por el usuario (coordenadas pedales). Así mismo con la utilización de las fórmulas simplificadas, resulta más sencillo el análisis y el comportamiento de las plantas, sólo conociendo la longitud de los pórticos y el ángulo que forman las mismas en un plano determinado.

Con las fórmulas introducidas por los Profesores M. Paparoni y P. F. Hummelgens se puede determinar el Centro de Rigidez, el cual es importante ya que en torno a él rota la planta cuando existen momento aplicados. También es posible con una de esas fórmulas determinar la dirección de al menos uno de los ejes principales de rigidez.

Se crearán distintas plantas con pórticos colocados de manera "ordenada" y arbitraria para conocer cual de estas son las más confiables al momento de un

sismo y cuales no lo son, así mismo se le colocarán a algunas plantas pórticos internos a fin de analizar su influencia sobre la misma. Todo esto nos mostrará cuáles plantas deberán ser rechazadas por el ingeniero en el diseño de edificios sismoresistentes.

A través del estudio de las cinco elipses empleadas en el presente trabajo, rigidez, flexibilidad, radios de giros al cuadrado, radios de giro, y torsión, se pueden observar cuales de los pórticos son sensibles a efectos torsores y traslacionales de un sismo.

Quedará también claro para el lector el que las propiedades torsionales de una planta de edificio dependen funcionalmente, de las propiedades traslacionales de la misma planta. Por lo tanto, no son como se suele pensar, variables separables, independientes, sin duda son un todo; pues hay relaciones algebraicas y geométricas entre ellas.

Vale la pena decir, para la historia de las estructuras, que todo este estudio, a diferencia de los anteriores, tuvo un nuevo punto de partida, la "Elipse de Elasticidad" concebida por Karl Culmann hacia finales del siglo XIX, habiendo llegado a la conclusión que hay por lo menos cuatro o cinco elipses del mismo origen que pueden ser usadas hoy en día, con propósitos parecidos.

Actualmente es todavía posible buscar en Internet, en lengua Italiana, artículos de ingeniería estructural que se basan en la misma, en el apéndice de este trabajo presentaremos algunos de ellos, en reconocimiento a la unificación de conceptos que se puede lograr entre la Resistencia de Materiales. También queremos hacer una defensa de la Enseñanza de la Geometría (Descriptiva, Analítica, etc.,) dentro de los Pensum de estudios de Ingeniería Civil.

OBJETIVOS

- ✓ Crear un catálogo breve en donde se muestren las rigideces de planta de edificios con pórticos ortogonales y no ortogonales, así mismo la posibilidad de encontrar una analogía parecida para un caso de torsión (planta sometida al momento).

- ✓ Observación cualitativa de las interacciones entre las rigideces traslacionales y torsionales de una planta de edificio a través de los ejemplos mostrados.

ALCANCES

Es una investigación teórica con aplicaciones inmediatas a la Enseñanza del Diseño y la Evaluación de Edificios en zonas sísmicas

LIMITACIONES

Transformar las ecuaciones del articulo "Un Tratamiento Matemático de la rigidez torsional de una Planta de Edificio con Pórticos en direcciones arbitrarias" sacado de la revista Tekhné número 4, Año 2000, a través de una simplificación de las mismas haciendo uso de las coordenadas pedales (A Catalog of Special Plane Curves" por J. Dennis Lawrence. Editorial DOVER, 1972.)

Demostrar que la elipse de rigidez también se puede representar con el Círculo de Mohr.

Mostrar algunos ejemplos de plantas de regulares e irregulares, utilizando estas variables (catálogo).

Comentar cualitativamente los resultados obtenidos de las plantas que hemos realizado.

CAPITULO I

FUNDAMENTOS TEORICOS

1.1 Definiciones del Tekhné

Al diseñar un edificio capaz de soportar solicitaciones sísmicas, se maneja directamente una propiedad de cada losa (o diafragma) que puede interpretarse como "el momento polar de rigideces" de los pórticos que posean trazas en dichos diafragmas (algunas veces se le llama "momento de inercia centrífugo de las rigideces"). Estos conceptos surgen cuando se describe sobre la dinámica de "conjuntos de masas puntuales" o las propiedades seccionales de un miembro sujeto a torsión. En los cursos clásicos de Mecánica Racional o de Resistencia de Materiales esta propiedad se relaciona con los problemas de rotación de un conjunto de "masas" o de "áreas" alrededor de cierto punto conocido (tratando el problema sólo en un plano). En estos casos las "masas" o las "áreas" pueden ser definidas con precisión con el empleo de sólo dos coordenadas (además de los valores de masa o área elementales) referidas a cada "masa puntual" o cada "elemento diferencial de área como ilustra la figura 1.1 siguiente

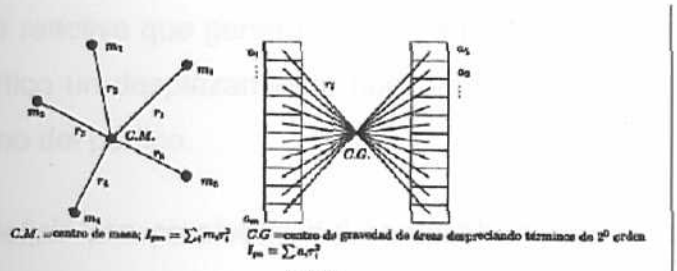


Fig 1.1 Centro de masas; Centro de gravedad de áreas despreciando términos de segundo orden

Cuando se refiere a edificaciones, esas "masas" o esas "áreas" se convierten en líneas (las trazas de los pórticos sobre el diagrama que consideramos). Esas "trazas", en teoría pueden tener longitudes indefinidas, pues las distancias ri se midan desde una posición definida trazando desde allí una normal a la "traza", y no al pórtico o muro que la genere. Si los pórticos o muros se desplazan a lo largo de esas trazas, el comportamiento de ese "diafragma" o "planta" de la edificación no cambia. Esto se debe a que desde el punto de vista de ingeniería, las imágenes planas de los pórticos que utilizamos en los cálculos no poseen rigidez alguna ante fuerzas que no estén contenidas en los planos de esas imágenes. Esto se puede mostrar en la figura 1.2. Entonces se postulan los siguientes conceptos:

1-. Existe un "centro de rigidez" o "centro de torsión" con las siguientes propiedades:

a .Cuando la resultante de las fuerzas externas pase por ese centro, el diafragma se traslada sin rotar (la traslación no necesariamente coincide en dirección con la dirección de la fuerza resultante).

b .Cuando se aplique un momento torsional al diafragma (no importa donde, ni cómo), ocurrirá una rotación pura alrededor de ese centro.

2. Cada pórtico (o pared estructural) posee una rigidez, definida como la magnitud de la fuerza reactiva que genera por unidad de desplazamiento, cuando se impone a ese pórtico un desplazamiento horizontal contenido en el plano del diafragma y en el plano del pórtico.

3. Podemos definir una propiedad del ensamble completo de los pórticos que atraviesen o toquen a un determinado diafragma como sigue:

$$I_P=\sum_i R_i r_i^2$$

donde R_i es la rigidez individual de un pórtico y r_i la distancia normal entre el centro de rigidez y la traza individual de ese pórtico.

4. Si tomamos en cuenta el teorema de Castigliano que define un mínimo enérgico) *Ip* debe ser un mínimo cuando las distancias ri se midan desde la verdadera posición del centro de rigidez de esa planta.

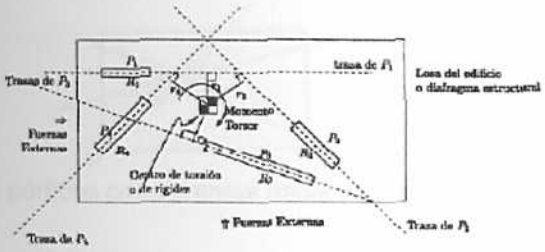


Fig. 1.2 Centro de rotación

Consideremos ahora las siguientes posibilidades configuracionales:

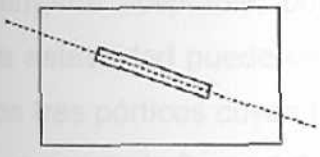


Fig. 1.3 Pórtico singular

1) **Un pórtico singular** (ver figura1.3) orientado en cualquier dirección. Esta configuración es estructuralmente inestable ya que sólo puede oponerse a fuerzas contenidas en el plano (o traza) del pórtico.

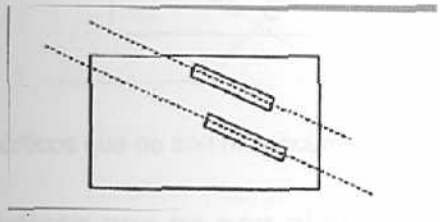


Fig 1.4 Dos pórticos paralelos entre si

2) Dos pórticos paralelos entre sí (ver figura 1.4). Responden solamente en dirección de las trazas. El diafragma posee rigidez Torsional, pero no hay un único centro de rigidez., sino una sucesión alineada de los posibles centros; la estructura es inestable a la torsión, pues la posición indeterminada del centro de rigidez produce estados de equilibrio "indiferentes".

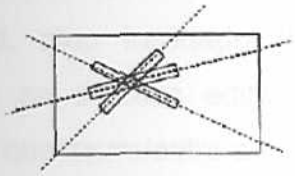


Fig 1.5 Tres o mas pórticos concurrentes hacia un único punto del diafragma

3) *Tres* (o *más) Pórticos* concurrentes hacia un único punto del diafragma (ver figura1.5). La estructura responde a fuerzas en cualquier dirección. La estructura no posee rigidez Torsional. Ninguno de estos tres casos es estructuralmente aceptable, por lo tanto puede decirse que la condición general de estabilidad puede expresarse de la siguiente manera. Debe haber al menos tres pórticos cuyas trazas no sean concurrentes en el plano del diafragma, como en la figura 1.6 que se muestra a continuación:

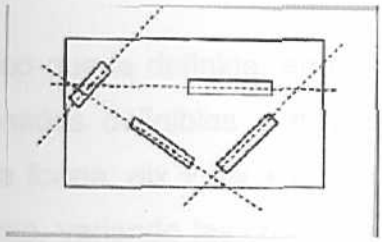


Fig. 1.6 Tres pórticos que no son ni concurrentes ni coplanares entre sí

4) Tres pórticos que no son ni concurrentes ni coplanares entre sí (ver figura 1.6). El diafragma resulta entonces estructuralmente estable a momentos y a fuerzas aplicadas en su plano. Para encontrar tanto la

posición del centro de rigidez como el valor del momento polar de inercia de rigideces, es necesario entonces encontrar el mínimo de la función $\Sigma_i R_i r_i^2$, variando la posición del centro de rigidez. El momento de inercia polar calculado tomando este punto como centro de rigidez, será el valor correcto para utilizarlo en los cálculos. Los coeficientes Ri(coeficientes de rigidez) son cantidades siempre positivas (constantes de resorte). Es posible, sin embargo, suponer que pueda haber R_i negativos. Es el caso de un pórtico que no sea vertical, sino inclinado (su plano puedo seguir siendo vertical),como ocurre en algunos edificios "exóticos". Esta situación se ilustra en la figura 1.7 que se muestra a continuación:

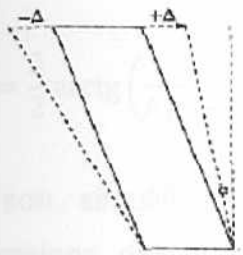


Fig 1.7 Pórtico inclinado con deformación

A continuación se presenta el desarrollo matemático realizado por el segundo de los autores, aplicado al problema que nos ocupa.

Cada Traza de pórtico queda definida, en un sistema arbitrario (escogible por el usuario) de coordenadas definibles a través de las ecuaciones de sus Trazas (líneas rectas), de la forma: aix + biy + ci = 0; luego trazamos normales a dichas rectas desde un punto, variando las coordenadas de ese punto podremos un mínimo de la función "Momento de Inercia Polar de Rigideces Lineales", ubicaremos la posición del Centro de Rigidez de ese conjunto de trazas. (Castigliano).

Para ello definiremos los siguientes parámetros, que aplican a una planta:

$$A_{11}=\sum_1^n \frac{R_i a_i^2}{a_i^2+b_i^2} \quad A_{22}=\sum_1^n \frac{R_i b_i^2}{a_i^2+b_i^2} \quad A_{12}=A_{21}=\sum_1^N \frac{R_i a_i b_i}{a_i^2+b_i^2} \quad P_1=-\sum_1^N \frac{R_i a_i c_i}{a_i^2+b_i^2} \quad P_2=-\sum_1^N \frac{R_i b_i c_i}{a_i^2+b_i^2}$$

•A11 y A22 (rigideces) son las análogas de los Momentos de Inercia.

•A12 = A21 es el análogo de un Producto de Inercia. Los términos P1 y P2 son también análogos de un Producto de Inercia. Todo esto formalmente hablando.

Las Coordenadas del Centro de rigidez resultan ser las siguientes:

$$x_o=\frac{P_1 A_{22}-P_2 A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} \qquad y_o=\frac{P_2 A_{11}-P_1 A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}$$

Continuando con las expresiones mostradas, estas permiten hallar la fórmula que nos da las Direcciones principales de uno de los ejes

$$\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11}-A_{22}}\right)$$

Todas estas fórmulas son simplificables si adoptamos Coordenadas Pedales, de ese modo los términos distintos de R se convierten en senos cuadrados, cosenos cuadrados y seno*coseno). Curiosamente, estos mismos términos trigonométricos aparecen en las matrices de rigidez de miembros. (Ing. Paparoni y Hummelgens, et. al,2004)

1.2 Coordenadas pedales y forma normal de la recta:

Las Coordenadas Pedales se construyen con la normal del origen a una recta (magnitud) y con el ángulo que dicha normal forma con el eje x. Al ponerlo en esta forma aparecen expresiones que figuran en la matriz de rigidez de un miembro ya ordenada y orientada. (Ing. Paparoni y Hummelgens, et. al,2004).

Para simplificar las ecuaciones del Tekhné se puede hacer uso de las coordenadas pedales que sale del libro "A Catalog of Special Plane

Curves",Lawrence 1972, (estas ecuaciones se verán en el capítulo II) o también se puede hacer uso de la forma normal de la recta que sale en libro de Lehman la cual fue la que se utilizó de manera que se hace mas práctico como se muestra en la siguiente figura1.8

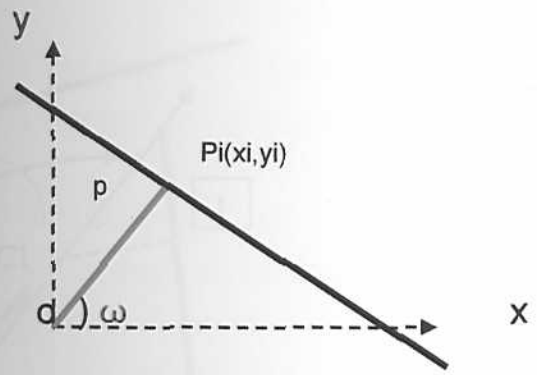


Fig 1.8 representación de la ecuación normal de la recta

Donde :

p:es la distancia perpendicular a la traza desde el centro de coordenadas

ω: es el ángulo comprendido por la perpendicular a la traza y el eje x (Lehman, et al, 1992)

1.3 Elipses

Todas ellas se derivan directa o secuencialmente de la Elipse de Rigidez, trazada según los resultados analíticos de las formulaciones desarrolladas, ellas son: Elipse de flexibilidad, Elipse de radios de giro al cuadrado, Elipse de radios de giro y Elipse de Torsión

Las elipses con las cuales se va a trabajar son la de radios de giro y la de torsión ya que éstas se encuentran a la escala de la planta y también sirven para analizar geométricamente (y por tanto también analíticamente) el comportamiento de los pórticos. En forma general se puede observar la siguiente figura (figura 1.9),

la cual ilustra los centros instantáneos de rotación y en qué estado se encuentra si llega a ocurrir torsión, de acuerdo a la condición de Vector Fuerza Secante (dentro de la Elipse), Tangente (toca la frontera) o fuera del área encerrada por la Elipse.

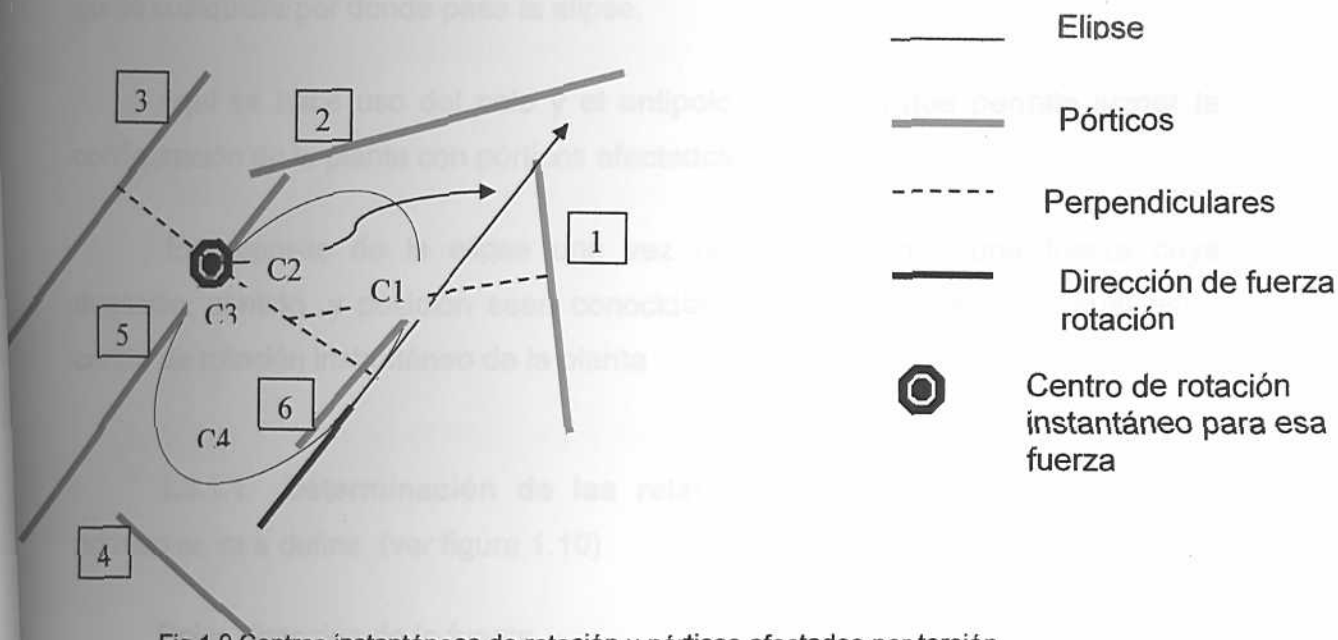


Fig 1.9 Centros instantáneos de rotación y pórticos afectados por torsión

Análisis

1,2,3,4 Pórticos cuya traza está alejada de la elipse son afectados por la torsión más allá del doble de la fuerza de traslación (Factor de Amplificación >2)

5 Traza de pórtico tangente a la elipse, la fuerza absorbida crece al doble de la fuerza de traslación (Factor de Amplificación =2).

6 Pórtico dentro de la elipse (trazas secantes). Las fuerzas crecen a menos del doble de las fuerzas de traslación (Factor de Seguridad <2)

Las otras elipses sirven de manera de orientación pero estas no nos dan la información que se necesita para el comportamiento traslacional y torsional que se van a generar en dichas plantas.

1.3.1 Elipse de radios de giro o elipse de elasticidad de Culmann: Estas Elipses permiten determinar donde está el centro de giro de la planta al aplicarle

una fuerza cuya traza es la Antipolar del centro de Giro, las relaciones fuerza-deformación. Estas elipses se encuentran a la escala de la planta y permíten estudiar todos los pórticos ya que lo que se va a observar va a ser el centro de giro si se encuentra dentro o fuera de la elipse. En donde el centro de giro es un punto cualquiera por donde pasa la elipse.

Aquí se hace uso del polo y el antipolo que es lo que permite juzgar la configuración de la planta con pórticos afectados a la torsión

El propósito de la elipse una vez conocida y dada una fuerza cuya dirección, sentido, y posición sean conocidas, es posible determinar cual es el centro de rotación instantáneo de la planta

1.3.1.1 Determinación de las relaciones polo-polar: A continuación primero se va a definir (ver figura 1.10)

Polar: dirección de la fuerza

Antipolo: centro de rotación

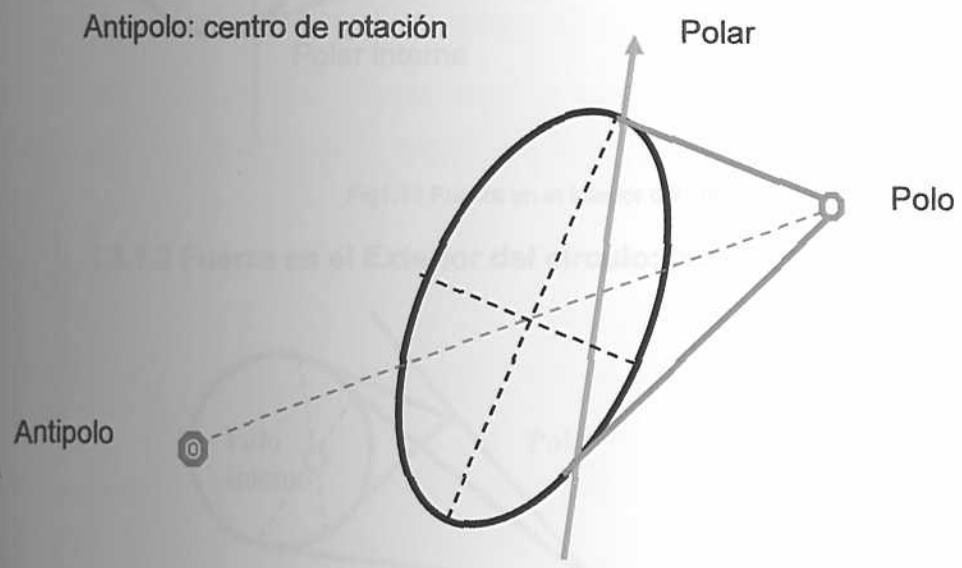


Fig. 1.10 Polo-antipolo

El polo queda determinado por la intersección de las dos tangentes a la elipse que parten de las intersecciones de la traza de la fuerza (secante a la elipse) con la elipse de Culmann. El Antipolo es el punto simétrico al polo tomando una recta que salga del polo y pase por el centro de la Elipse.

Cuando hay tangencia de la traza con la elipse, el polo está en el punto de tangencia.

Cuando la traza de la fuerza ni intersecta ni toca a la elipse, el polo está dentro de la elipse, y el antipolo (centro de giro) es el simétrico del polo respecto al centro de giro de la Elipse.

1.3.1.2 Fuerza en el interior del círculo (ver figura 1.11)

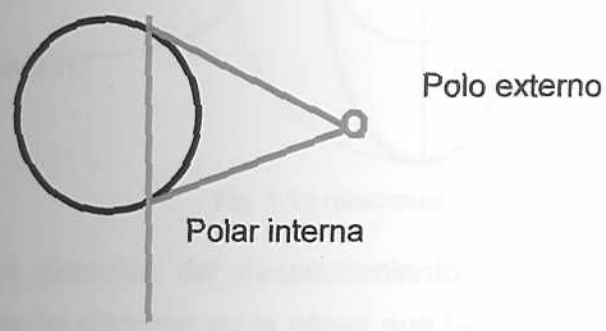


Fig1.11 Fuerza en el interior del círculo

1.3.1.3 Fuerza en el Exterior del círculo: (ver figura 1.12)

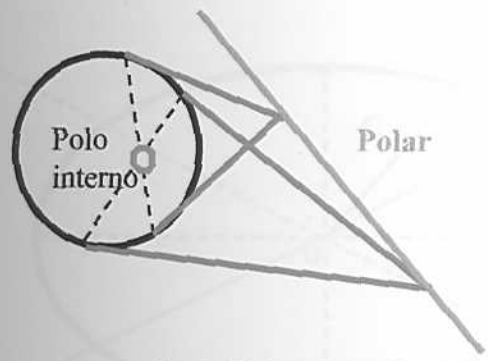


Fig. 1.12 Fuerza en el exterior del círculo

Se trazan dos secantes cualesquiera y se trazan por cada una de ellas rectas tangentes a ese punto de intersección y estas líneas al interceptarse generan un punto de la recta polar y con la unión de esos dos puntos se obtiene la recta polar.

1.3.1.4 Relaciones Fuerza- Deformación: direcciones de cada una (ver figura 1.13)

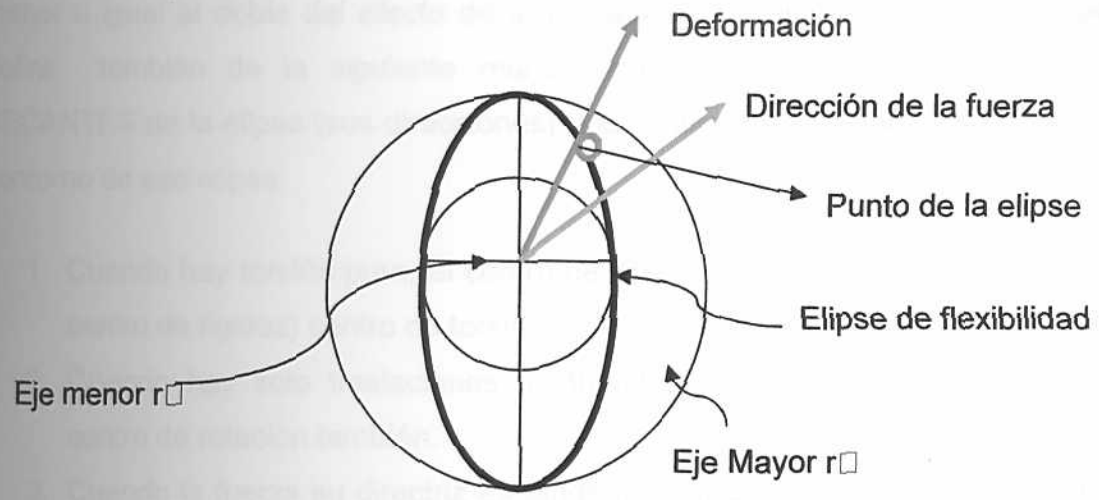


Fig. 1.13 relaciones fuerza-deformación

Regla: La dirección del desplazamiento coincide con la normal del diámetro conjugado del diámetro de la elipse que tenga la dirección de la fuerza (ver figura 1.14)

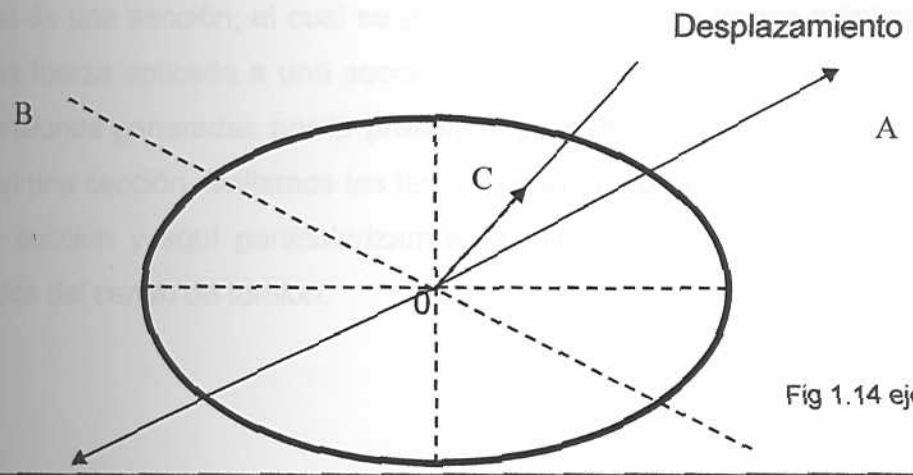


Fig 1.14 ejes conjugados

A-A: diámetro de la elipse generados por la dirección de la fuerza
B-B: diámetro de conjugado de A-A
OA: dirección de la fuerza
OC: dirección del desplazamiento

1.3.2 Elipse de Torsión: Equivale al núcleo central de una sección. En esta elipse se toma en cuenta la excentricidad del pórtico más alejado. Nos da los límites de las excentricidades de las fuerzas (si los centros de masas efectivos o virtuales están dentro del área interior de esa elipse, el efecto de la torsión es menor o igual al doble del efecto de la traslación). La elipse torsional se puede definir también de la siguiente manera para todas las fuerzas que sean SECANTES de la elipse (sus direcciones) los centros de rotación no se salen del contorno de esa elipse.

1. Cuando hay torsión pura, el centro de rotación de la planta coincide con el centro de rigidez) centro de torsión.
2. Cuando hay solo traslaciones, la fuerza esta infinitamente alejada y el centro de rotación también.
3. Cuando la fuerza su directriz es tangente a la elipse (circulo) de inercia (ρ, radio de giro).El centro de rotación esta en el punto directamente opuesto de la elipse (círculo).

Esta definición no difiere, conceptualmente de la que damos para el núcleo central de una sección, el cual se define como el límite de las infinitas posiciones de una fuerza aplicada a una sección de una viga capaz de no duplicar o anular las tensiones generadas por la presencia de esa fuerza. La diferencia estriba en que en una sección, limitamos las tensiones en las puntas mas alejadas del centro de la sección y aquí particularizamos la elipse para el pórtico o pórticos mas alejados del centro de torsión.

Fig 1.15 Fuerza tangente a la elipse

Fig1.16 Fuerzas adentro de la elipse

1.3.2.1 Definición adoptada para dibujar la " Elipse de torsión" (ver figura 1.17)

GENERAL

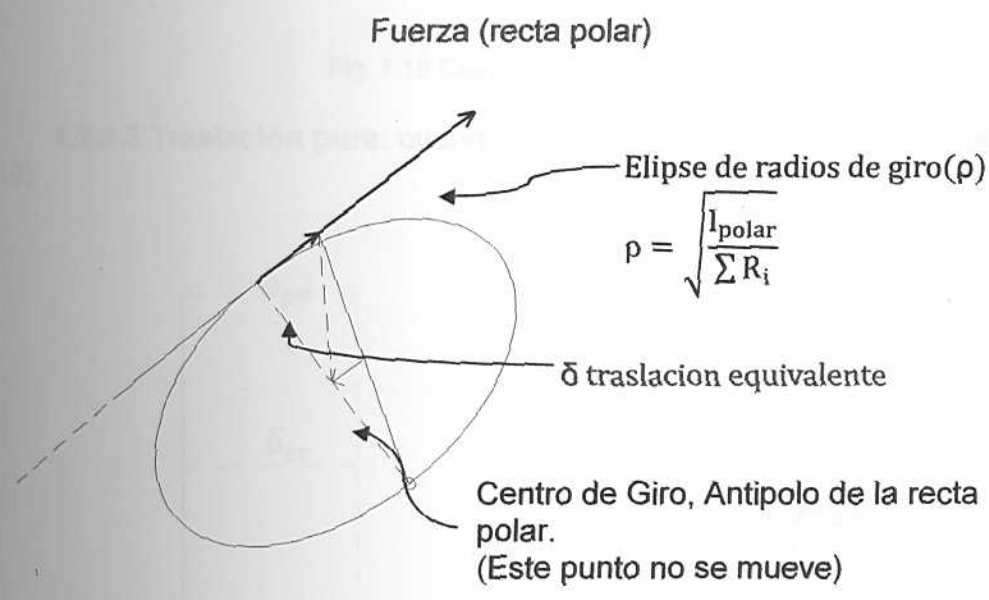
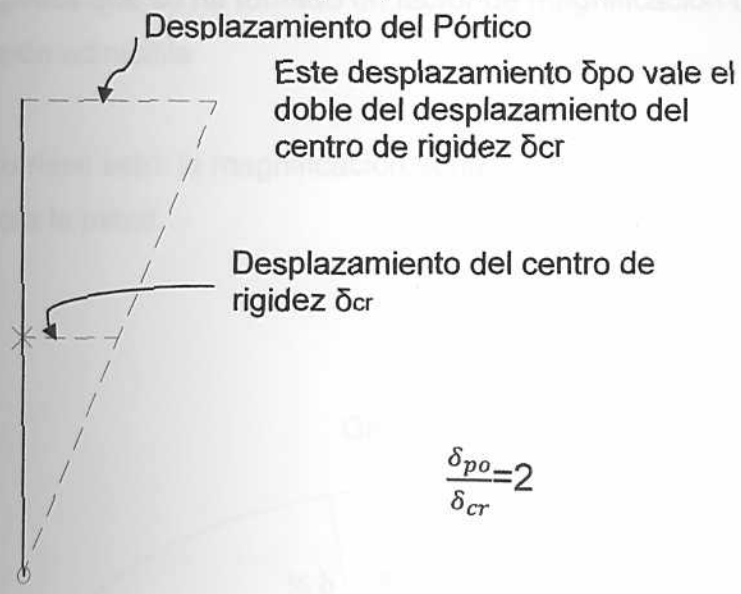


Fig. 1.17 definición adoptada para dibujar la elipse de torsión

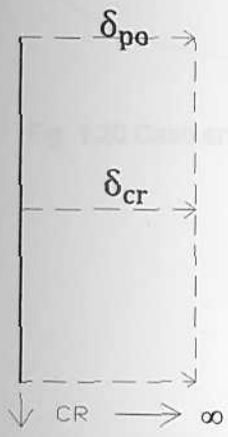
1.3.2.2 Caso traslación mas giro (ver figura 1.18)



$$\frac{\delta_{po}}{\delta_{cr}}=2$$

Fig. 1.18 Caso traslación mas giro

1.3.2.3 Traslación pura: cuando no hay torsión ocurre esto (ver figura 1.19)



$$\frac{\delta_{po}}{\delta_{cr}}=1$$

Fig. 1.19 Traslación pura

Quiere decir esto que, se ha tomado como limite arbitrario (solo para propósitos de definición de la "escala" valores de su dimensión) el lugar geométrico de las tangentes (direcciones de las fuerzas aplicadas) a la elipse de torsión; ello significa que se ha tomado un factor de magnificación de 2 como límite de la torsión admisible

Si ocurriese esto: la magnificación seria 1.5 por giro pues el brazo de la palanca es ahora la mitad

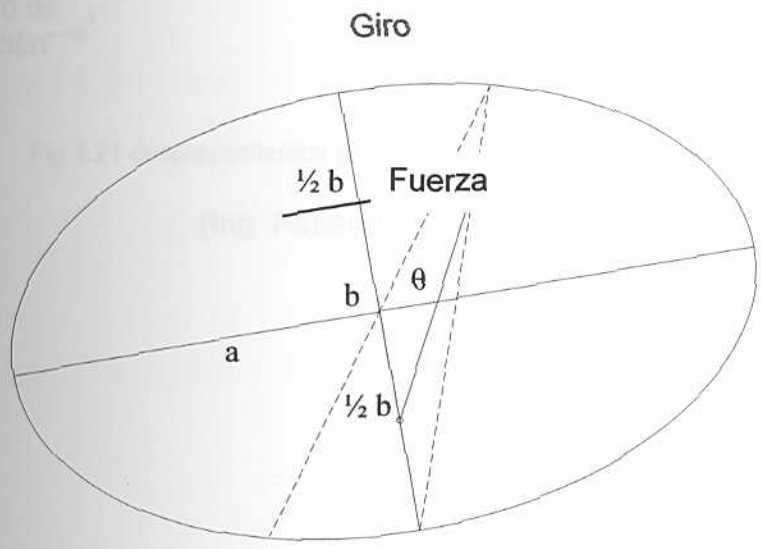


Fig. 1.20 Caso en donde ocurre magnificación de la fuerza

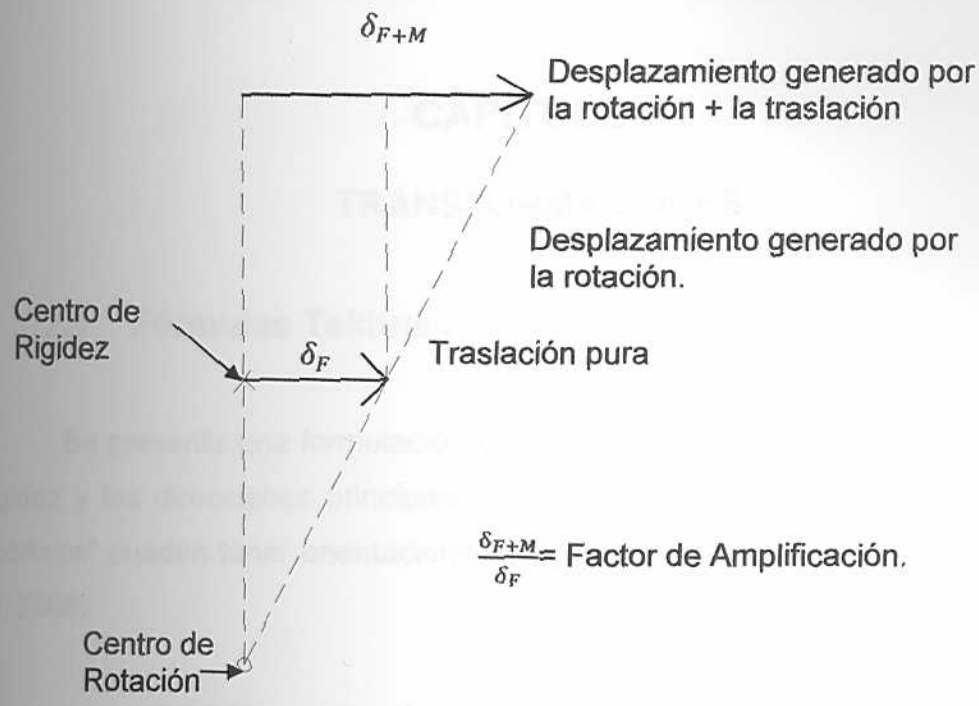


Fig 1.21 desplazamientos generados por rotación y traslación

(Ing. Paparoni, et. al,2007)

CAPITULO II

TRANSFORMACIONES

2.1 Fórmulas Tekhné :

Se presenta una formulación general que permite encontrar los centros de rigidez y las direcciones principales de plantas de edificios en las cuales los "pórticos" pueden tener orientaciones y rigideces cualesquiera. (Ing. Paparoni, et. al, 2006)

2.1.1 Momentos de inercia:

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i a_i^2}{a_i^2 + b_i^2} \qquad A_{22} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i b_i^2}{a_i^2 + b_i^2}$$

2.1.2 Productos de inercia de coeficientes:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i a_i b_i}{a_i^2 + b_i^2} \qquad A_{21} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i a_i b_i}{a_i^2 + b_i^2}$$

2.1.3 Productos de inercia de radios

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i a_i c_i}{a_i^2 + b_i^2} \qquad P_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i b_i c_i}{a_i^2 + b_i^2}$$

2.1.4 Coordenadas de centro de rigidez:

$$X_o = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \qquad Y_o = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_2 A_{11} - P_1 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}$$

2.1.5 Dirección de uno de los ejes principales:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right)$$

2.2 Transformación de las fórmulas de Tekhné:

Como se menciona en el Capítulo I. Todas estas fórmulas se simplifican ya que se adopta las coordenadas pedales o la ecuación normal de la recta (Lehman) de este modo los términos distintos de R se convierten en senos cuadrados, cosenos cuadrados y seno*coseno (Ing. Paparoni, et. al, 2006)

Entonces se hace las siguientes sustituciones tomando las ecuaciones del Lehman

a = cos(ω)

b = sen(ω)

c = - P

2.2.1 Momentos de inercia:

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \qquad A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2)$$

2.2.2 Productos de inercia de coeficientes:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \qquad A_{21} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right)$$

2.2.3 Productos de inercia de radios:

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \cos \omega_i) \qquad P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i)$$

2.2.4 Coordenadas de centro de rigidez:

$$X_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \qquad Y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2}$$

2.2.5 Dirección de uno de los ejes principales:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right)$$

CAPITULO III

PROCEDIMIENTO DE TRABAJO

1. Seleccionar formas de plantas comunes y no comunes, y graficar esas plantas en un sistema de ejes cartesianos.

2. Numerar cada una de las trazas (pórticos) y asignar valores de rigidez (R_i) que serán proporcionales a la longitud de cada pórtico.

3. Obtener los valores P, ω , donde:
   P: es la magnitud perpendicular de la traza al centro de coordenadas.
   ω: es el ángulo comprendido entre la normal de la traza al eje x de coordenadas.

4. Calcular las coordenadas del centro de rigidez, con la ecuación 2.1.4 o 2.2.4 capítulo II

5. Se busca el valor de "c" para cada pórtico, es la magnitud de la distancia normal (perpendicular) medida desde el centro de rigidez hasta la traza de cada pórtico, una vez obtenidos esos valores se procede a sustituir en las ecuaciones mencionadas en capitulo 2 que va de la ecuación 2.2.1 hasta 2.2.4.

6. Se determina el ángulo α (Ecuación 2.2.5) para obtener una de las dos direcciones de los ejes principales, las cuales son perpendiculares entre sí.

7. Se procede a determinar los valores de los coeficientes de rigidez principales A'11, A'22, de cada planta, variando los valores del ángulo alfa sumándole sucesivamente incrementos fijos (5°; 10°; 15°, a conveniencia). Esto hay que hacerlo sólo en aquellos casos dudosos en los cuales las direcciones respectivas de los ejes mayores y menores no sean evidentes, por ejemplo, cuando haya ejes de simetría o simetrías radiales. La fórmula que da el ángulo de las direcciones principales (Capitulo II, punto 2.2.5) no determina unívocamente un resultado (eje principal mayor o eje principal menor). En este trabajo de grado se escogió el eje x' orientada en la dirección alfa, y la orientación correcta de la elipse se obtiene por medio del "Dog Bone" (ver apéndice).

8. Una vez obtenidos los valores de la planta se procede a dibujar la elipse de rigidez. El valor A'_{11} se va a colocar en el eje x' y el valor A'_{22} en el eje y'. La ecuación va estar dada por la ecuación canónica de la elipse (Ec. 3.1):

$$\text{Ec. 3.1} \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

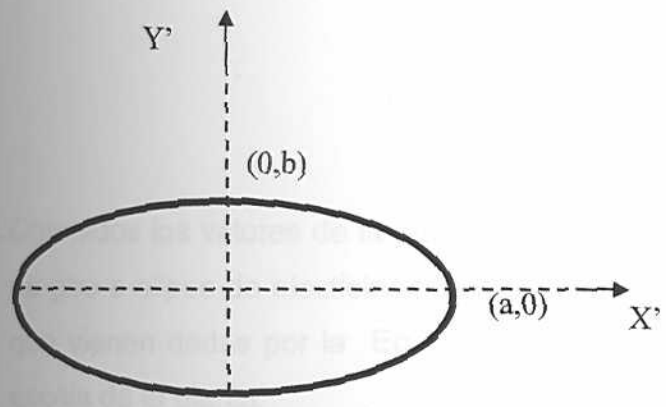


Fig 3.1 Elipse (forma canónica)

En donde:

$a^2 = A'^2_{11}$

$b^2 = A'^2_{22}$

9. Se obtiene el valor del momento polar de inercia de la configuración de pórticos de planta que viene dado por la Ec. 3.2

$$\text{Ec. 3.2} \quad I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2$$

10. Obtenidos los valores de la planta se procede a dibujar la elipse de flexibilidad donde los valores de los semiejes vienen dada por la Ec. 3.3 y la Ec. 3.4:

$$\text{Ec. 3.3} \quad \frac{1}{A'_{11}}$$

$$\text{Ec. 3.4} \quad \frac{1}{A'_{22}}$$

11. Obtenidos los valores de la planta se procede a dibujar la elipse radio de giro al cuadrado cuyos ejes principales vienen dados por las ecuaciones Ec 3.5 y la Ec. 3.6.:

$$\text{Ec. 3.5} \quad r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}}$$

$$\text{Ec. 3.6} \quad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}}$$

12. Obtenidos los valores de la planta se procede a dibujar la elipse de radios de giro o elipse de elasticidad de Culmann con los valores de los semiejes que vienen dadas por la Ec. 3.7 y Ec. 3.8. Esta elipse esta dibujada a la escala de la planta.

$$\text{Ec. 3.7} \quad \sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}}$$

$$\text{Ec. 3.8} \quad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}}$$

13. Obtenidos los valores de la planta se procede a dibujar la elipse de torsión con los valores de los semiejes que vienen dadas por la Ec. 3.9 y Ec. 3.10. Esa elipse de torsión contiene dentro de la elipse de rigidez los valores de las excentricidades máximas admisibles con el criterio del 200% de amplificación. Esta elipse esta dibujada a la escala de la planta.

$$\text{Ec. 3.9} \quad \frac{r_{xx}^2}{c_{max}}$$

$$\text{Ec. 3.10} \quad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}}$$

14. Se busca una expresión para el circulo de Mohr que viene dada por la Ec. 3.11 , Ec. 3.12, Ec.3.13, para luego proceder a dibujarla:

$$\text{Ec. 3.11} \quad a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2}$$

$$\text{Ec. 3.12} \quad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2$$

$$\text{Ec. 3.13} \quad (x - a)^2 + y^2 = b^2$$

CAPITULO IV

EJEMPLOS DE PLANTAS (FIGURAS GEOMETRICAS)

Se muestra una serie de figuras de contornos de plantas formadas por pórticos exclusivamente perimétricos a dichas plantas, representando figuras geométricas conocidas. Esta serie corresponde a aporticamientos óptimos y se escogió fundamentalmente por su simplicidad y carácter básico (ver figuras); luego se muestran una serie de datos (ver tablas) de rigidez, distancia "P", ángulo ω, distancia "c" de cada pórtico o traza, asumiendo que la rigidez es proporcional a la longitud del pórtico; se calcularon las rigideces en cada dirección ($R_{xx} = A_{11}$; $R_{yy} = A_{22}$; $R_{xy} = A_{12}$; $R_{yx} = A_{21}$) con las fórmulas antes señaladas en el Capitulo II.

A partir de estos valores, se calcularon la posición del Centro de Rigidez y la dirección de uno de los ejes principales de la elipse de rigidez, empleando las ecuaciones del Prof. Hummelgens.

Se dibujaron las elipses de rigidez, flexibilidad, radios de giros al cuadrado, radios de giro, torsión, y círculo de Mohr de cada planta; planteándose las ecuaciones de las dos ultimas elipses mencionadas, ya que estas son a escala de planta.

Planta #1:

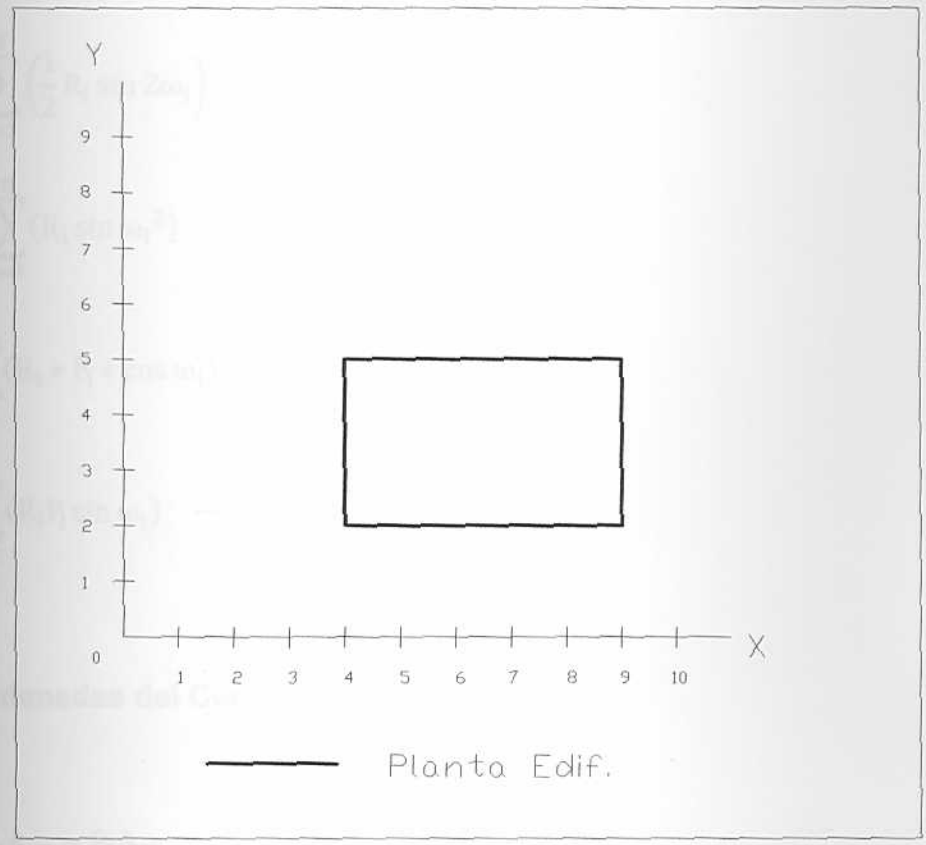


Fig. 4.1 Planta #1

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	0	4	3	2,50
T2	0	9	3	2,50
T3	90	2	5	1,50
T4	90	5	5	1,50

Tabla 1 Datos de la Planta #1

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 6{,}00$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 10{,}00$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 39{,}00$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 35{,}00$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 6{,}50$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 3{,}50$$

- Dirección de uno de los ejes principales:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0{,}00$$

- Elipse de Rigidez:

$A'_{11} = 10{,}00 \quad (\text{semi} - \text{eje x}')$
$A'_{22} = 6{,}00 \quad (semi - eje\ y')$

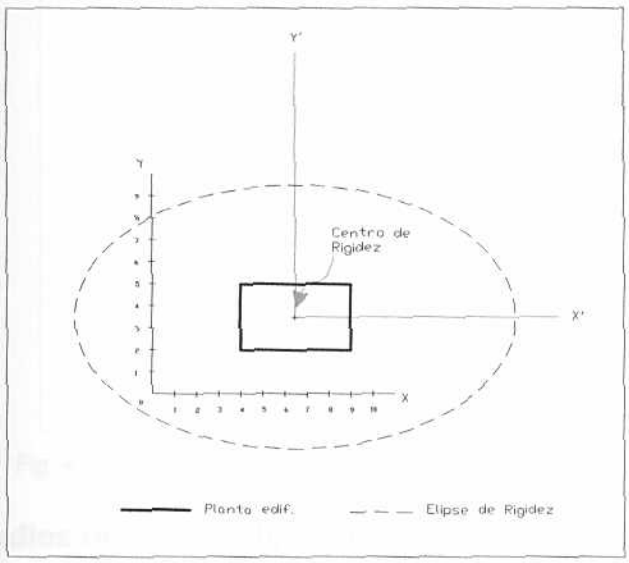


Fig. 4.2 Elipse de Rigidez,

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}10 \rightarrow 5{,}00 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}17 \rightarrow 8{,}33$$

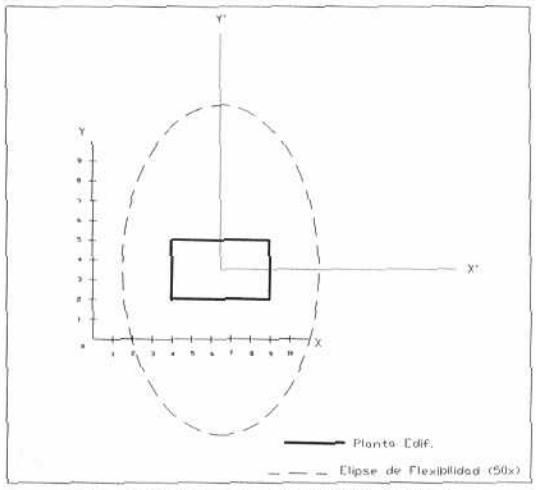


Fig. 4.3 Elipse de Flexibilidad (50x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 60{,}00$

$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 6{,}00 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 10{,}00$

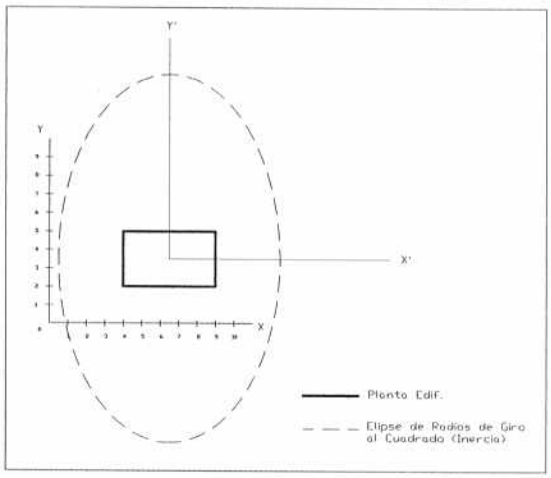


Fig. 4.4 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia).

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \quad \rightarrow \quad r_{xx} = 2{,}45 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \quad \rightarrow \quad r_{yy} = 3{,}16$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{6} + \frac{y'^2}{10} = 1$$

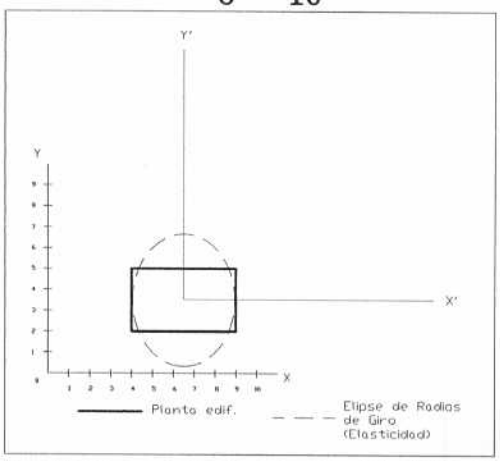


Fig. 4.5 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 2{,}40$ $\qquad$ $\frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 4{,}00$

Ecuación :

$$\frac{x'^2}{5{,}76} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

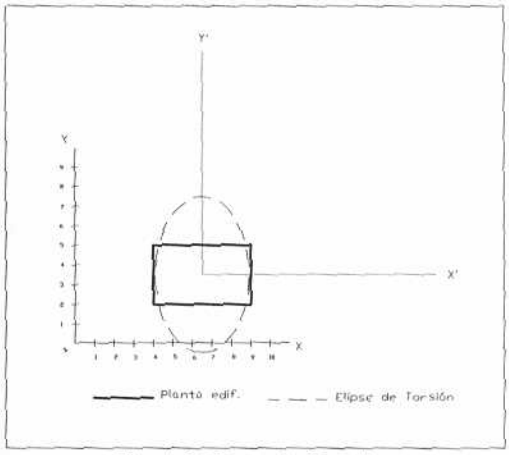


Fig. 4.6 Elipse de Torsión.

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \rightarrow a = 8 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 4$$

Ecuación:

$$(x - 8)^2 + y^2 = 4$$

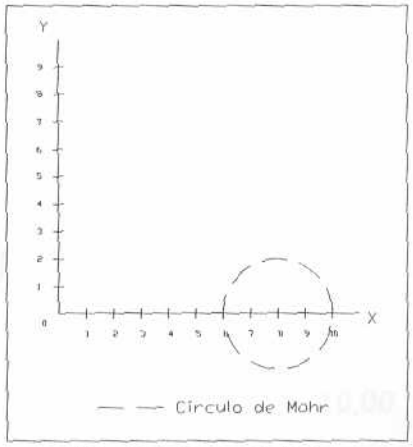


Fig. 4.7 Círculo de Mohr.

Planta #2

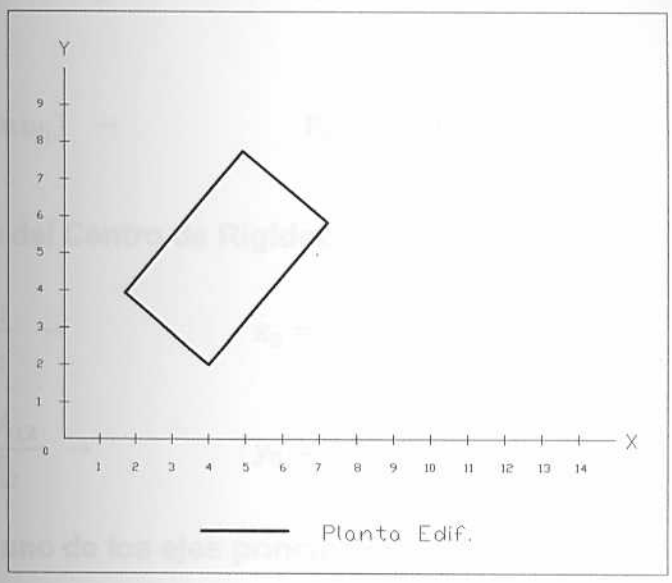


Fig. 4.8 Planta #2

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	50,00	4,10	3,00	1,33
T2	50,00	9,10	3,00	1,67
T3	140,00	1,22	5,00	1,60
T4	320,00	1,78	5,00	1,40

Tabla 2 Datos de la Planta #2

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \quad A_{11} = 8{,}35$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \quad A_{12} = -1{,}97$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \quad A_{22} = 10{,}00$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 27{,}60$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 28{,}56$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 4{,}46$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 4{,}88$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = -40{,}00$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 6{,}00 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22} = 10{,}00 \quad (semi - eje\ y')$

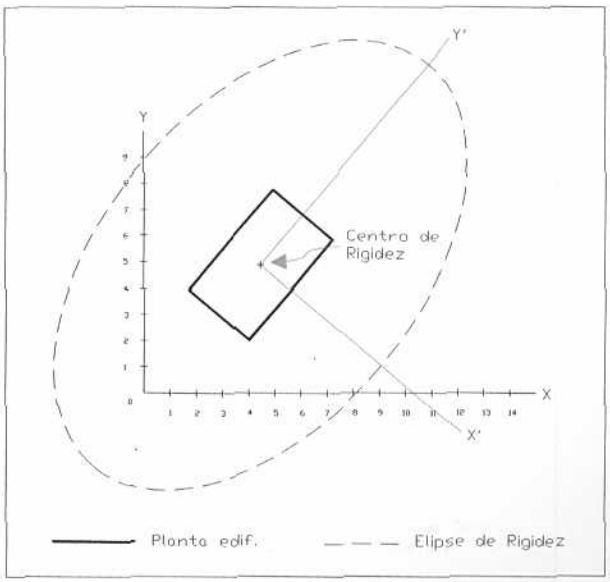


Fig. 4.9 Elipse de Rigidez.

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}17 \rightarrow 8{,}33 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}10 \rightarrow 5{,}00$$

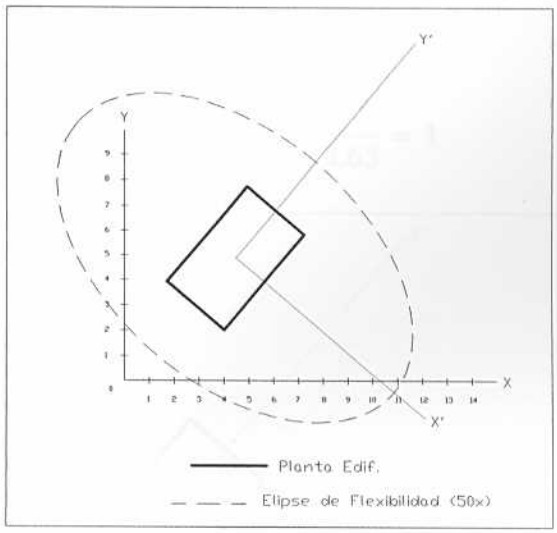


Fig. 4.10 Elipse de Flexibilidad (50x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \rightarrow \qquad I_p = 36{,}28$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \rightarrow r_{xx}^2 = 6{,}05 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \rightarrow r_{yy}^2 = 3{,}63$$

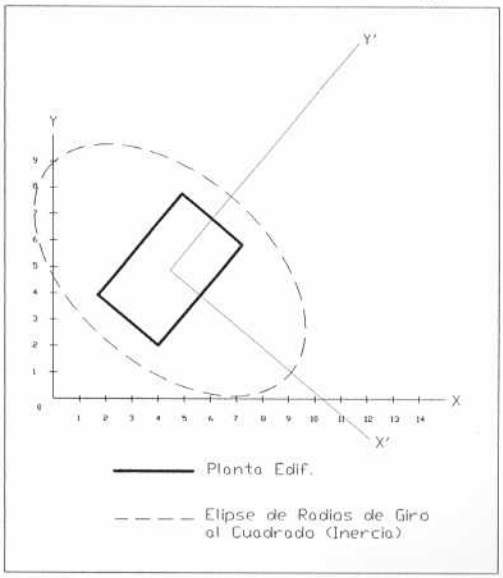


Fig. 4.11 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia).

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 2{,}46 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 1{,}90$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{6{,}05} + \frac{y'^2}{3{,}63} = 1$$

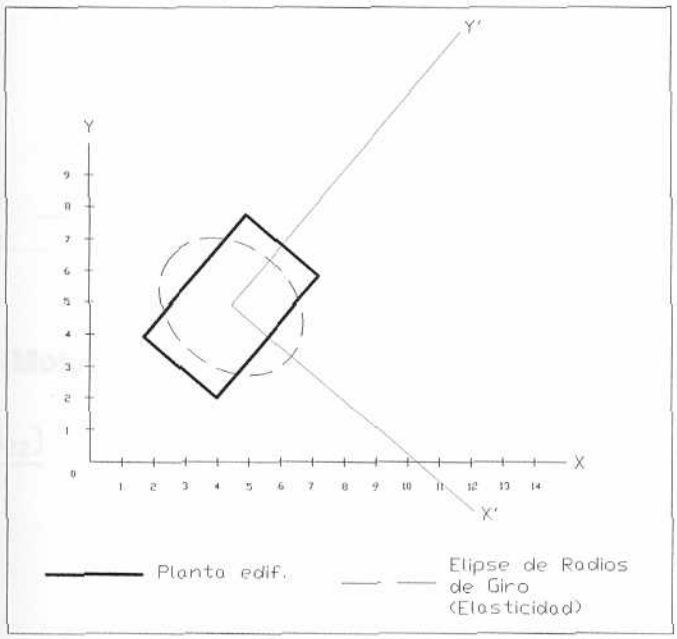


Fig. 4.12 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 2{,}40 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 4{,}00$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{13{,}05} + \frac{y'^2}{4{,}70} = 1$$

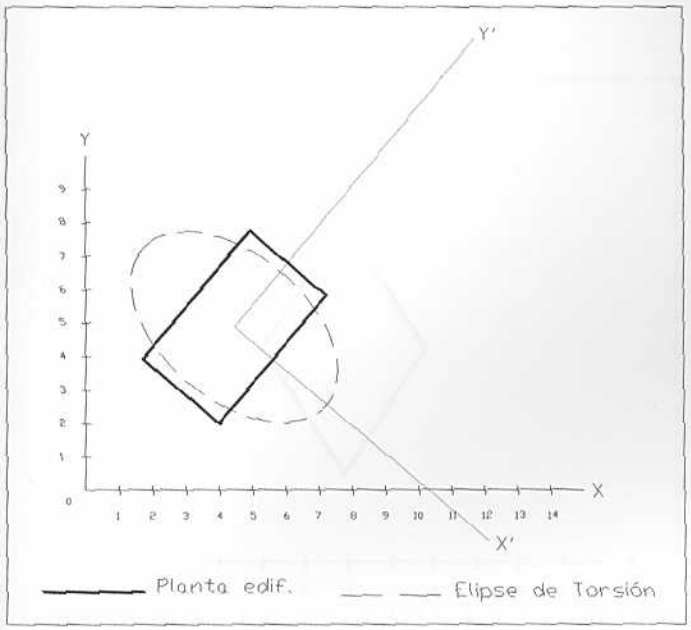


Fig. 4.13 Elipse de Torsión.

- **Circulo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 8 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \quad \rightarrow b^2 = 4$$

Ecuación:

$$(x - 8)^2 + y^2 = 4$$

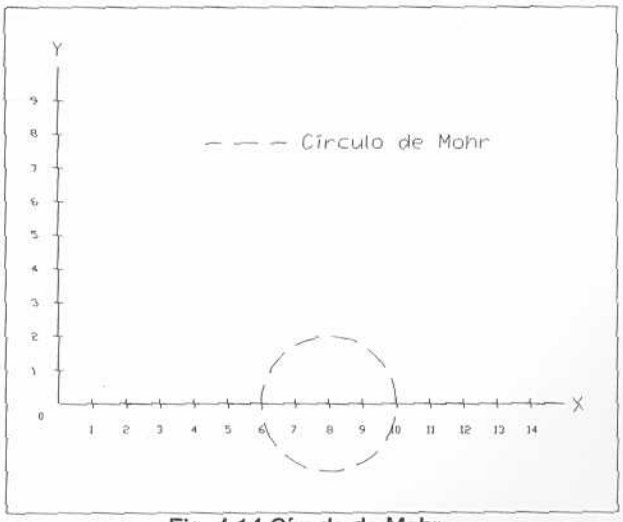


Fig. 4.14 Círculo de Mohr.

Planta #3:

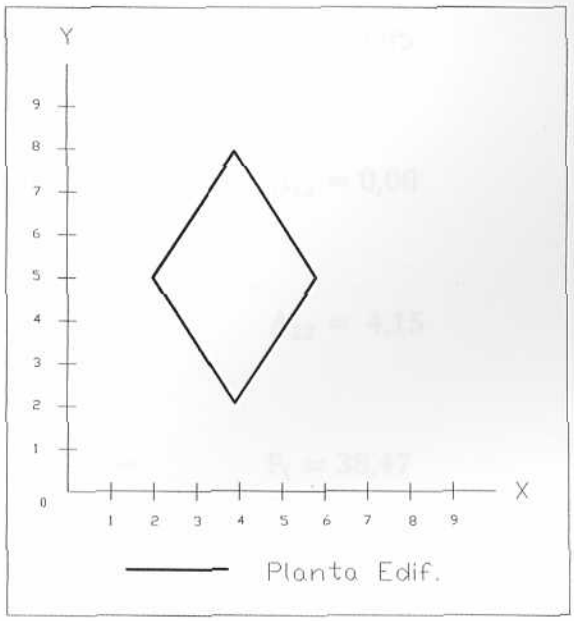


Fig. 15 Planta #3

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	147	1,05	3,5	1,5987
T2	33	7,60	3,5	1,5987
T3	327	2,15	3,5	1,5987
T4	33	4,40	3,5	1,5987

Tabla 3 Datos de la Planta #3

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 9{,}85$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 4{,}15$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 38{,}47$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 20{,}76$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 3{,}91$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 5{,}00$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 4{,}15 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22} = 9{,}85 \quad (semi - eje\ y')$

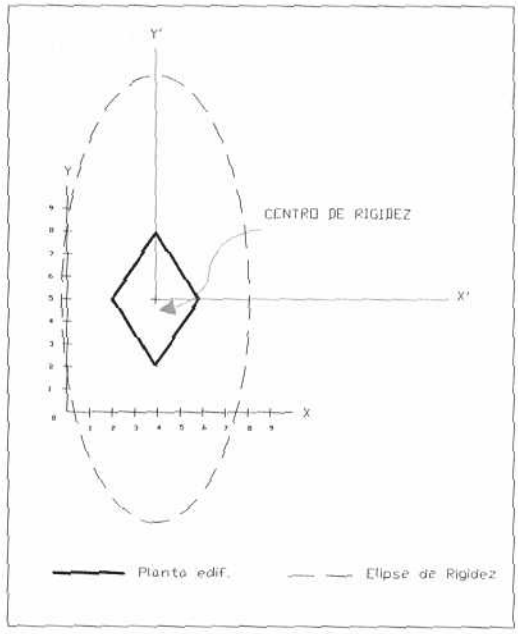


Fig. 4.16 Elipse de Rigidez.

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}24 \rightarrow 12{,}24 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}10 \rightarrow 5{,}08$$

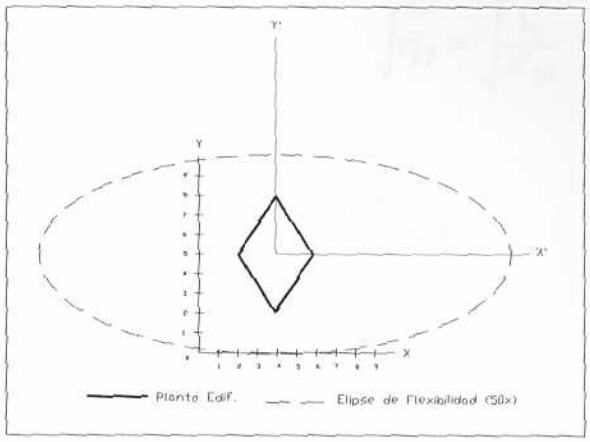


Fig. 4.17 Elipse de Flexibilidad (50x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 35{,}78$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 8{,}62 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 3{,}63$$

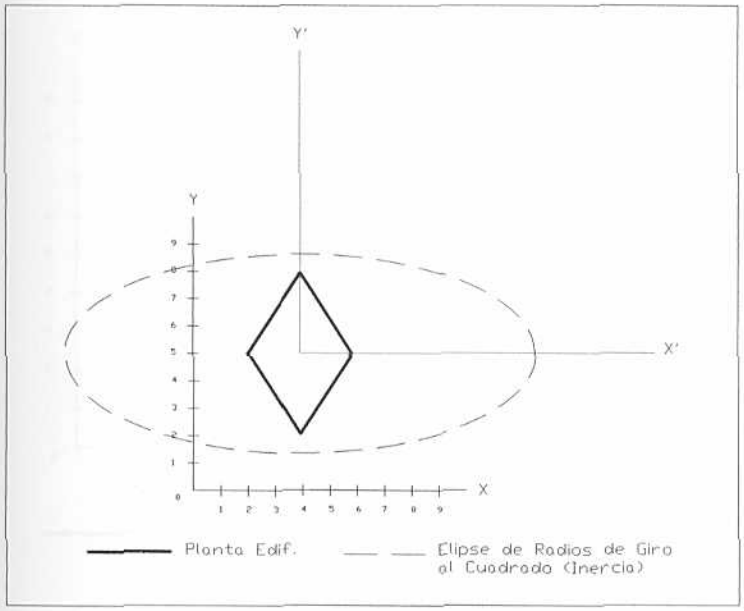


Fig. 4.18 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia).

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \quad \rightarrow \quad r_{xx} = 2{,}94 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \quad \rightarrow \quad r_{yy} = 1{,}91$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{8{,}62} + \frac{y'^2}{3{,}63} = 1$$

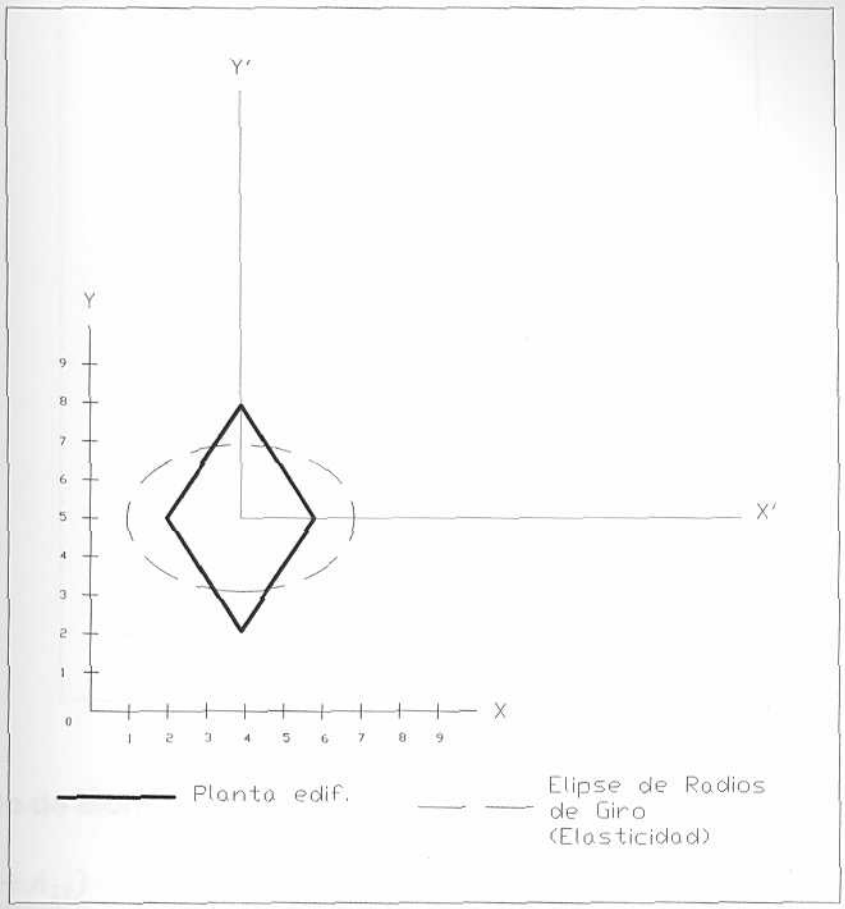


Fig. 4.19 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 5{,}39 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 2{,}57$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{29{,}05} + \frac{y'^2}{5{,}17} = 1$$

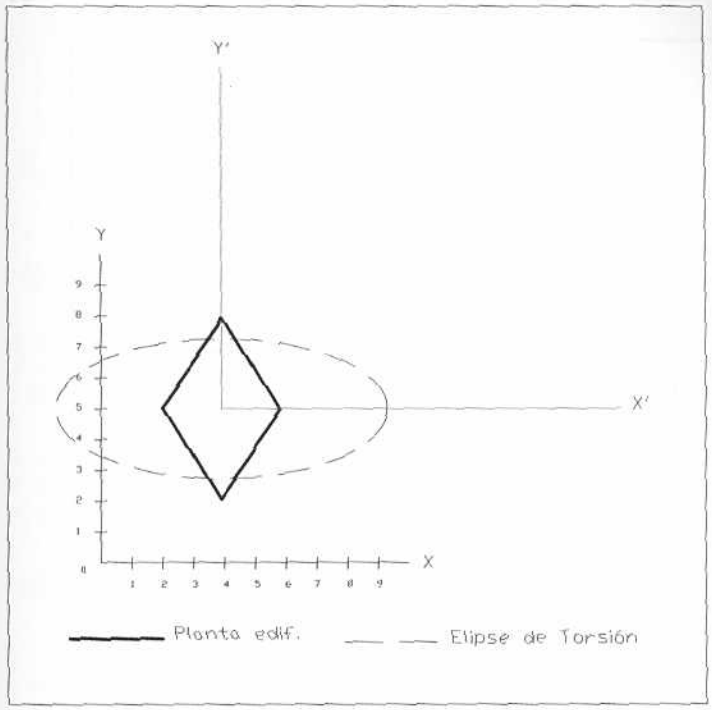


Fig. 4.20 Elipse de Torsiòn.

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \rightarrow a = 7 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 8{,}11$$

Ecuación:

$$(x - 7)^2 + y^2 = 8{,}11$$

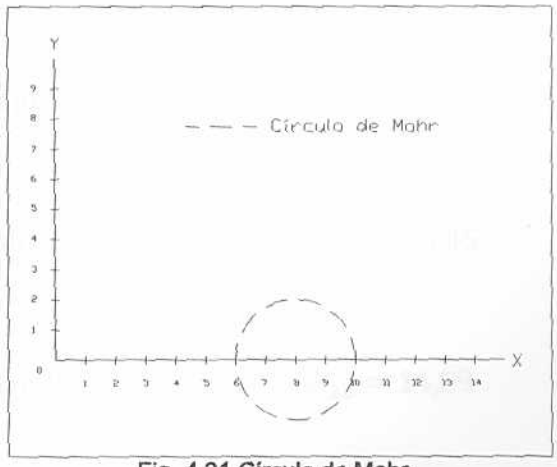


Fig. 4.21 Círculo de Mohr,

Planta #4:

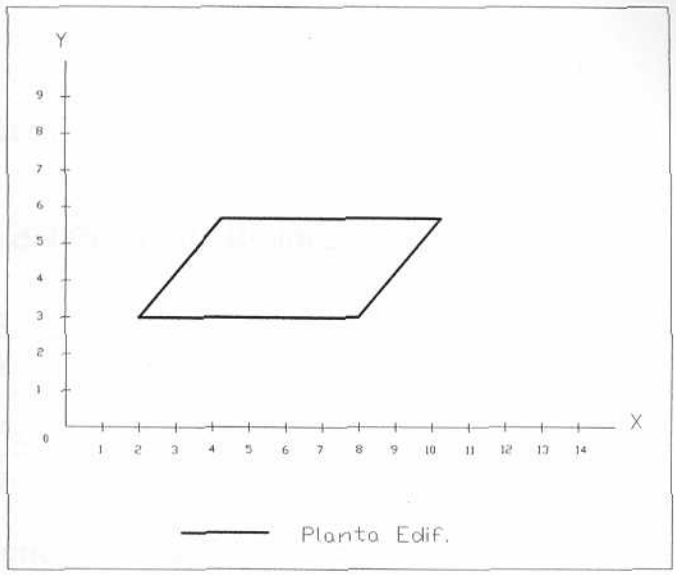


Fig. 4.22 Planta #4

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	140	0,38	3,50	2,33
T2	90	5,69	6,00	1,34
T3	320	4,23	3,50	2,40
T4	90	3,00	6,00	1,34

Tabla 4 Datos de la Planta #4

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 4{,}11$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = -3{,}45$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 14{,}89$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 10{,}31$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 43{,}49$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 6{,}16$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 4{,}34$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 16{,}29$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 15{,}90 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22}0 = 3{,}1 \quad (semi - eje\ y')$

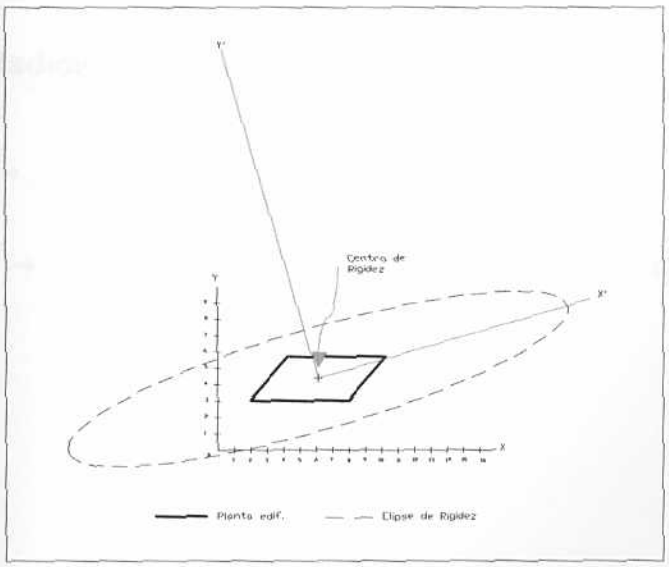


Fig. 4.23 Elipse de Rigidez,

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}06 \rightarrow 3{,}15 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}32 \rightarrow 16{,}13$$

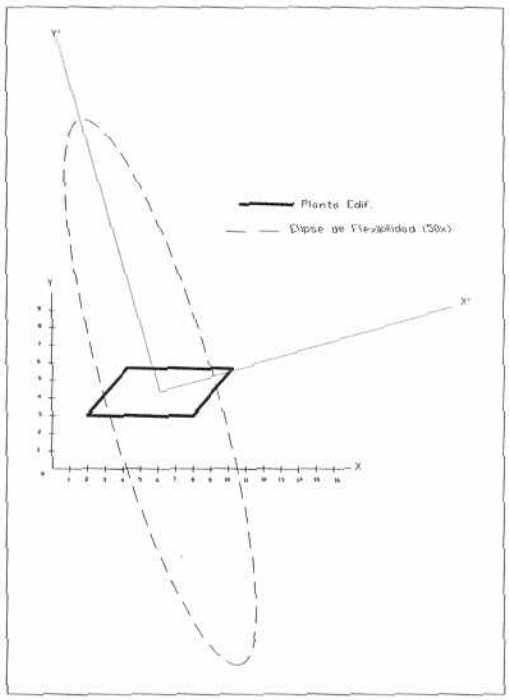


Fig. 4.24 Elipse de Flexibilidad (50x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \rightarrow \quad I_p = 60{,}91$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 3{,}83 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 19{,}65$$

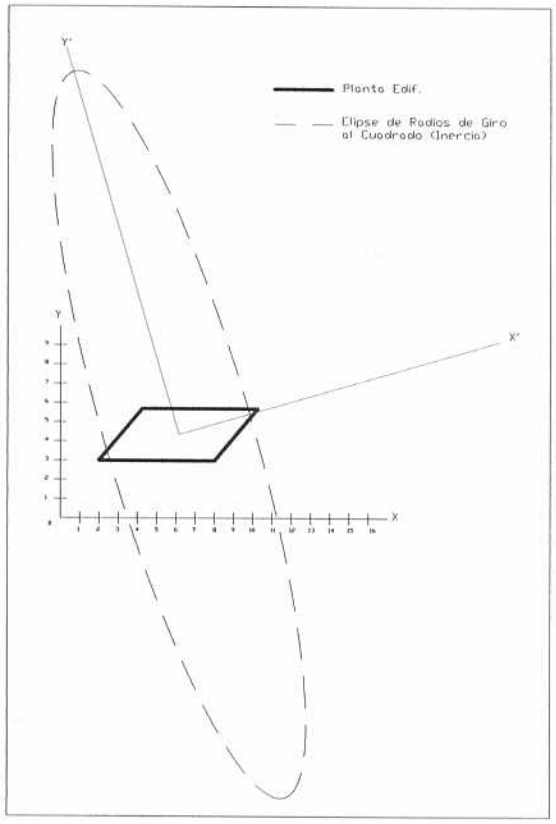


Fig. 4.25 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}96 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 4{,}43$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{3{,}83} + \frac{y'^2}{19{,}65} = 1$$

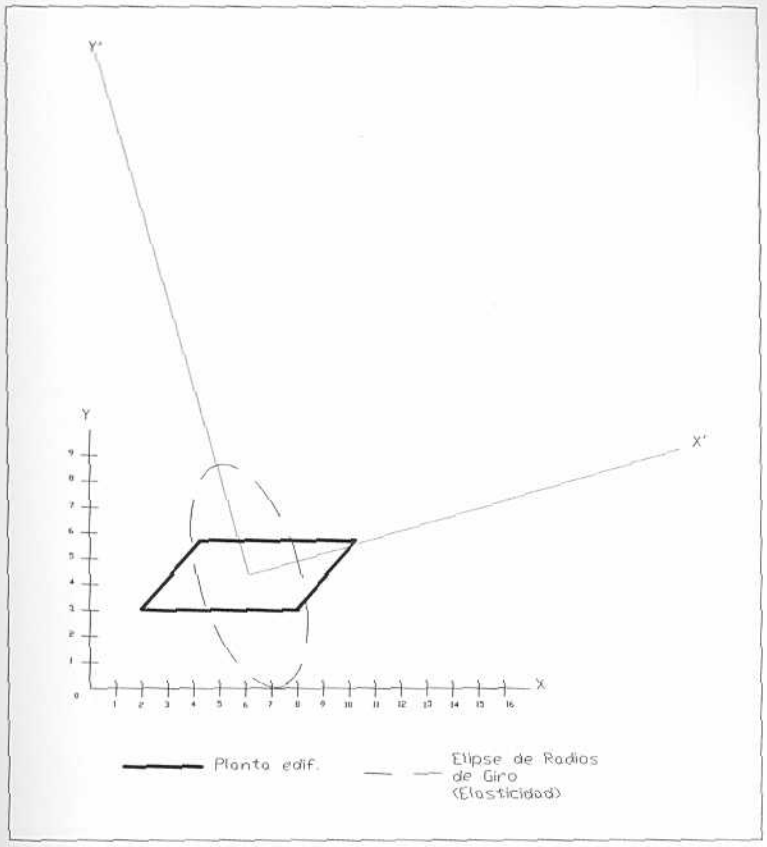


Fig. 4.26 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 1{,}60 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 8{,}18$$

Ecuación:

$$\frac{x^2}{2{,}55} + \frac{y^2}{66{,}98} = 1$$

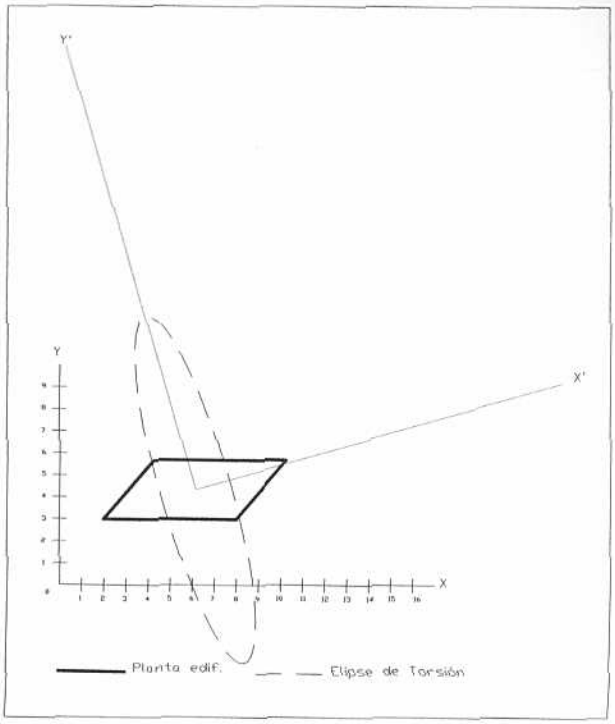


Fig. 4.27 Elipse de Torsión,

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \rightarrow a = 9{,}50 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 40{,}96$$

Ecuación:

$$(x - 9{,}5)^2 + y^2 = 40{,}96$$

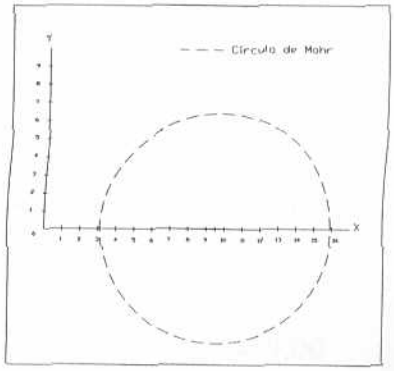


Fig. 4.28 Círculo de Mohr,

Planta #5

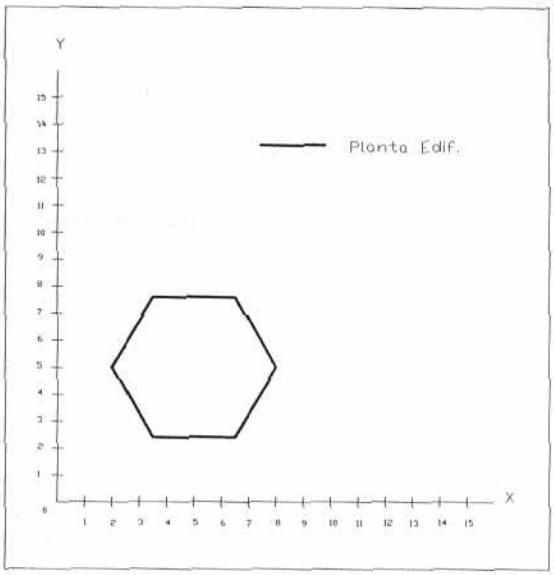


Fig. 4.29 Planta #5

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	90	7,60	3	2,60
T2	30	9,43	3	2,60
T3	330	4,43	3	2,60
T4	90	2,40	3	2,60
T5	30	4,23	3	2,60
T6	150	0,77	3	2,60

Tabla 5 Datos de la Planta #5

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 9{,}00$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 9{,}00$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 45{,}00$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 45{,}00$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 5{,}00$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 5{,}00$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 9{,}00 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22} = 9{,}00 \quad (semi - eje\ y')$

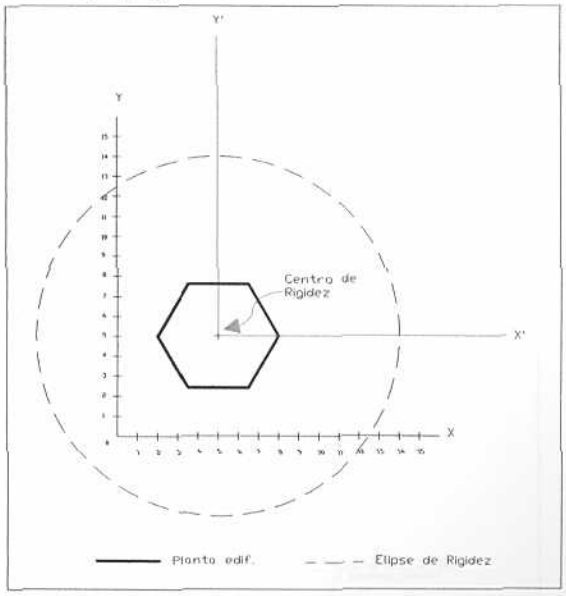


Fig. 4.30 Elipse de Rigidez,

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}11 \rightarrow 11{,}11 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}11 \rightarrow 11{,}11$$

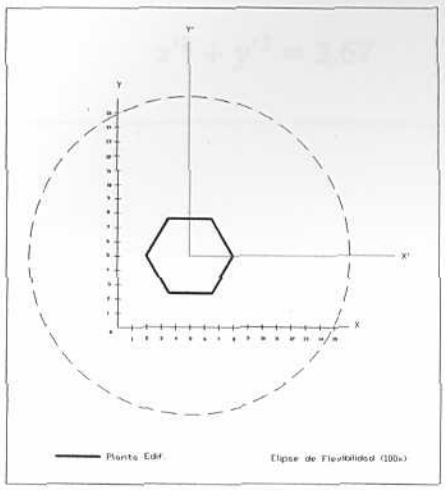


Fig. 4.31 Elipse de Flexibilidad (100x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \rightarrow \quad I_p = 121{,}50$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \rightarrow r_{xx}^2 = 13{,}50 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \rightarrow r_{yy}^2 = 13{,}50$$

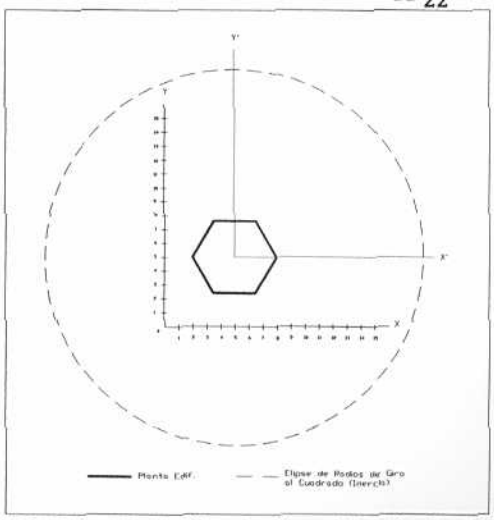


Fig. 4.32 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia).

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \quad \rightarrow \quad r_{xx} = 3{,}67 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \quad \rightarrow \quad r_{yy} = 3{,}67$$

Ecuación:

$$x'^2 + y'^2 = 3{,}67$$

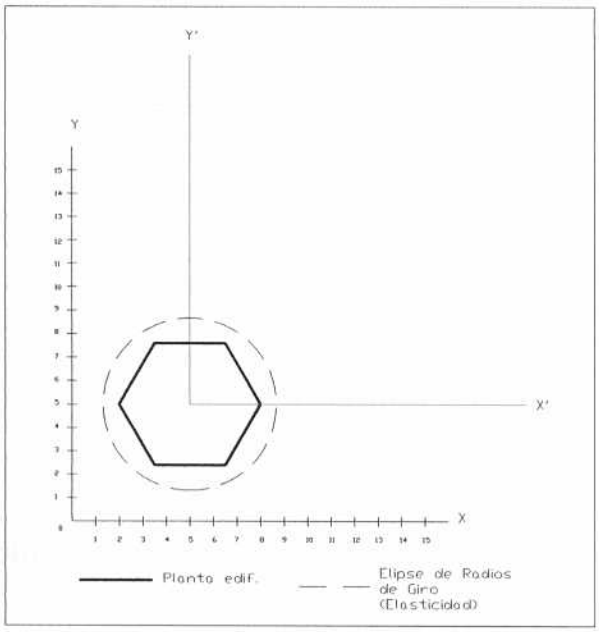


Fig. 4.33 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad)

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 5{,}20 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 5{,}20$$

Ecuación:

$$x'^2 + y'^2 = 5{,}20$$

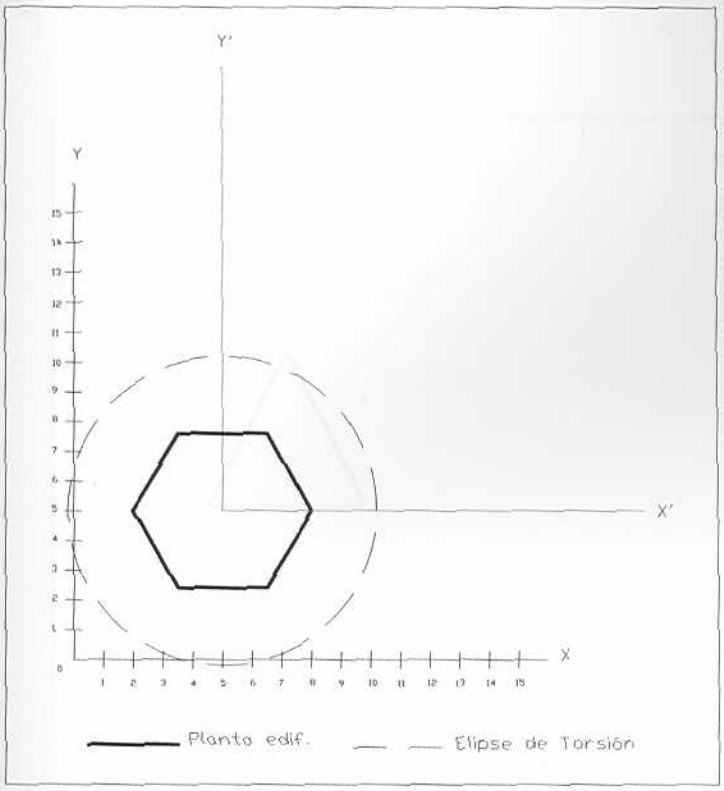


Fig. 4.34 Elipse de Torsión.

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 9{,}00 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \quad \rightarrow b^2 = 0$$

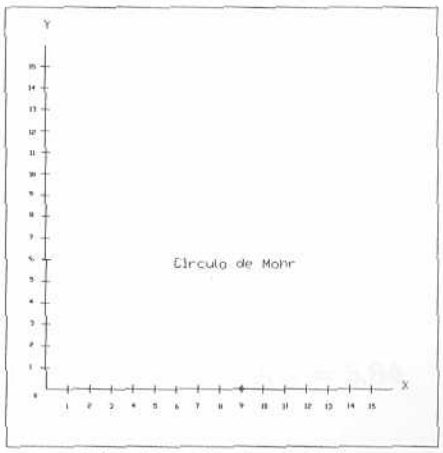


Fig. 4.35 Círculo de Mohr

Planta #6:

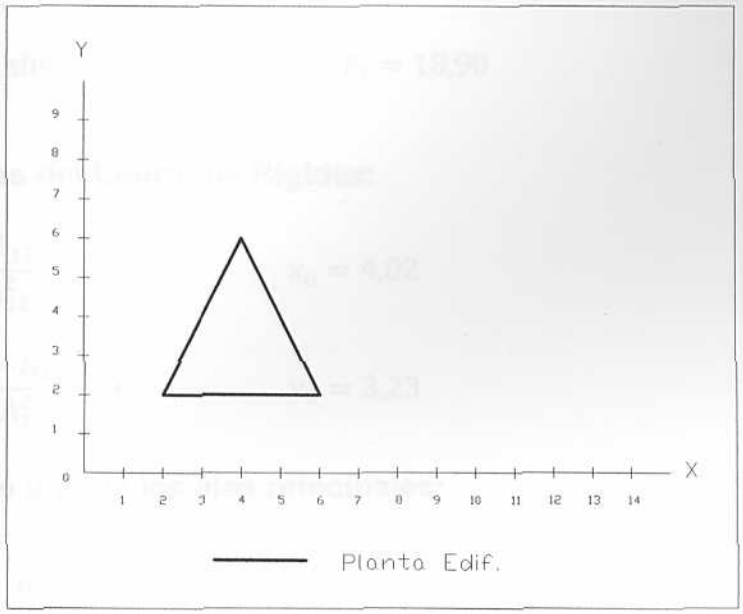


Fig. 4.36 Planta #6

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	90	2,00	4,00	1,23
T2	27	6,26	4,47	1,22
T3	333	0,89	4,47	1,25

Tabla 6 Datos de la Planta #6

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 7{,}10$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 5{,}84$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos\omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 28{,}51$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin\omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 18{,}90$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 4{,}02$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 3{,}23$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 5{,}84 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22} = 7{,}10 \quad (semi - eje\ y')$

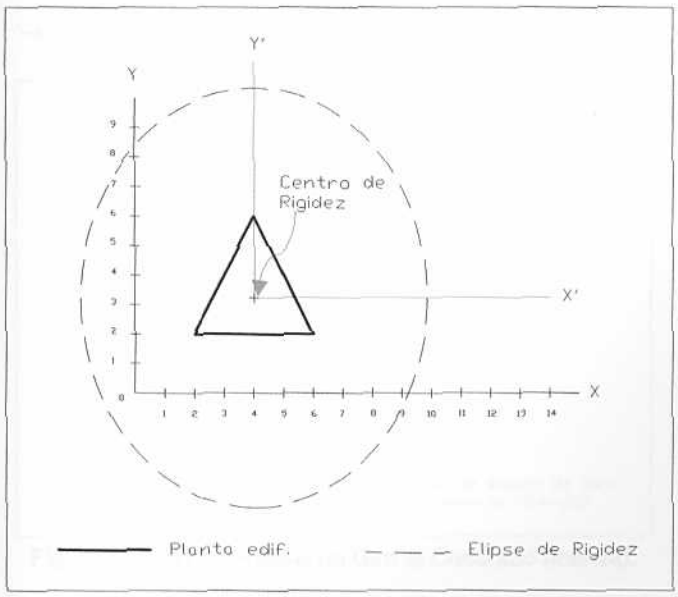


Fig. 4.37 Elipse de Rigidez

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}17 \rightarrow 8{,}56 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}14 \rightarrow 7{,}04$$

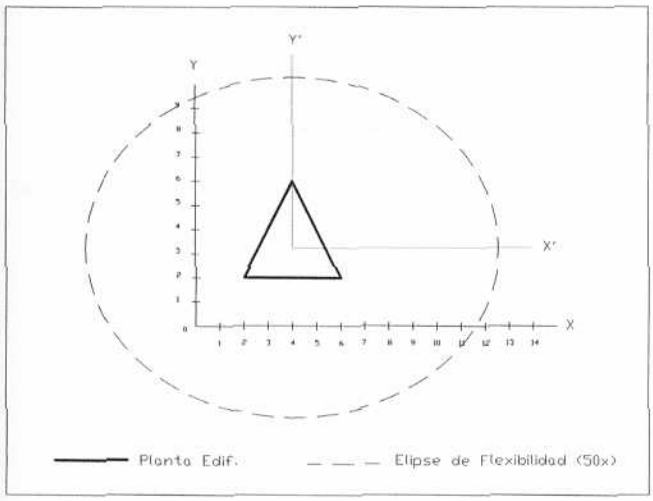


Fig. 4.38 Elipse de Flexibilidad (50x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \rightarrow \quad I_p = 19{,}78$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 3{,}38 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 2{,}79$$

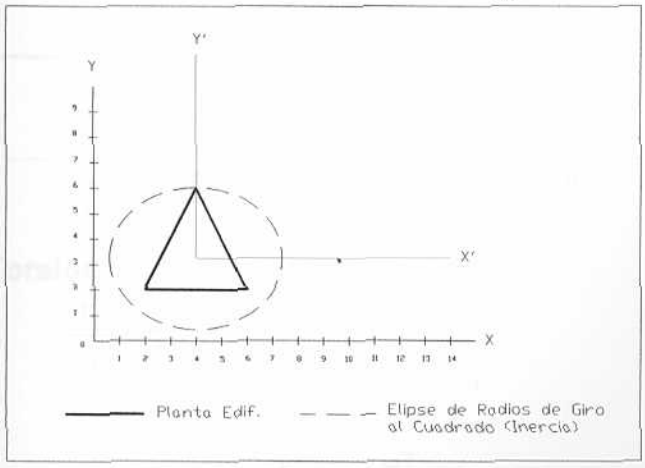


Fig. 4.39 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia).

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}84 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 1{,}67$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{3{,}38} + \frac{y'^2}{2{,}79} = 1$$

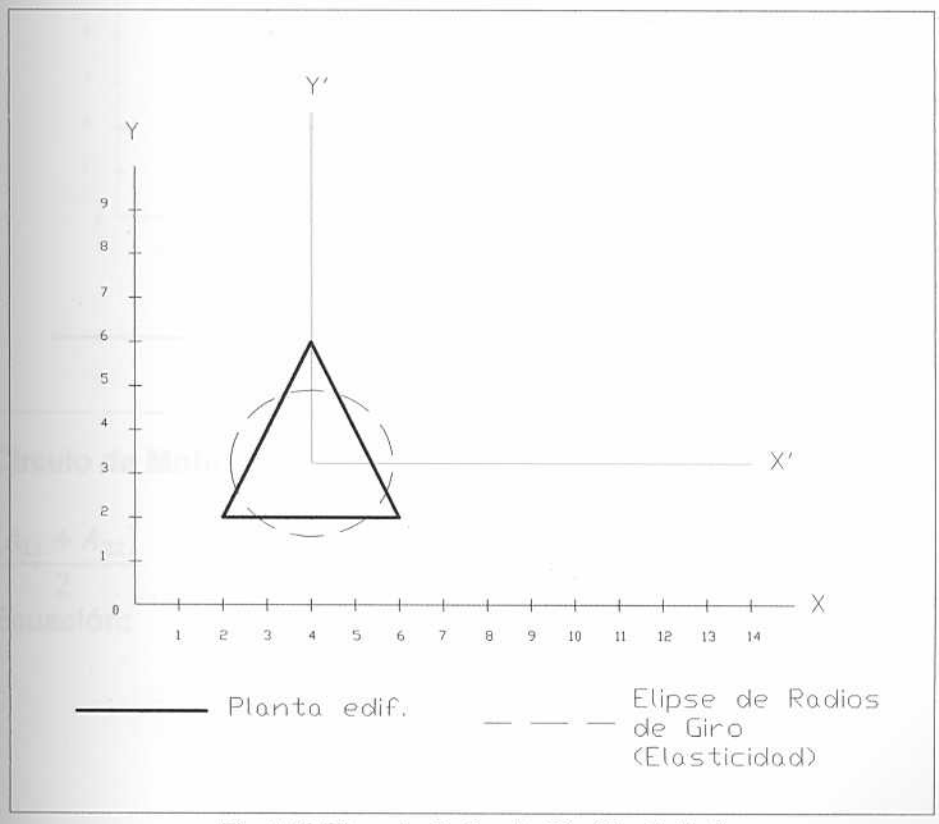


Fig. 4.40 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 2{,}71 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 2{,}23$$

Ecuación:

$$\frac{x^2}{7{,}32} + \frac{y^2}{4{,}968} = 1$$

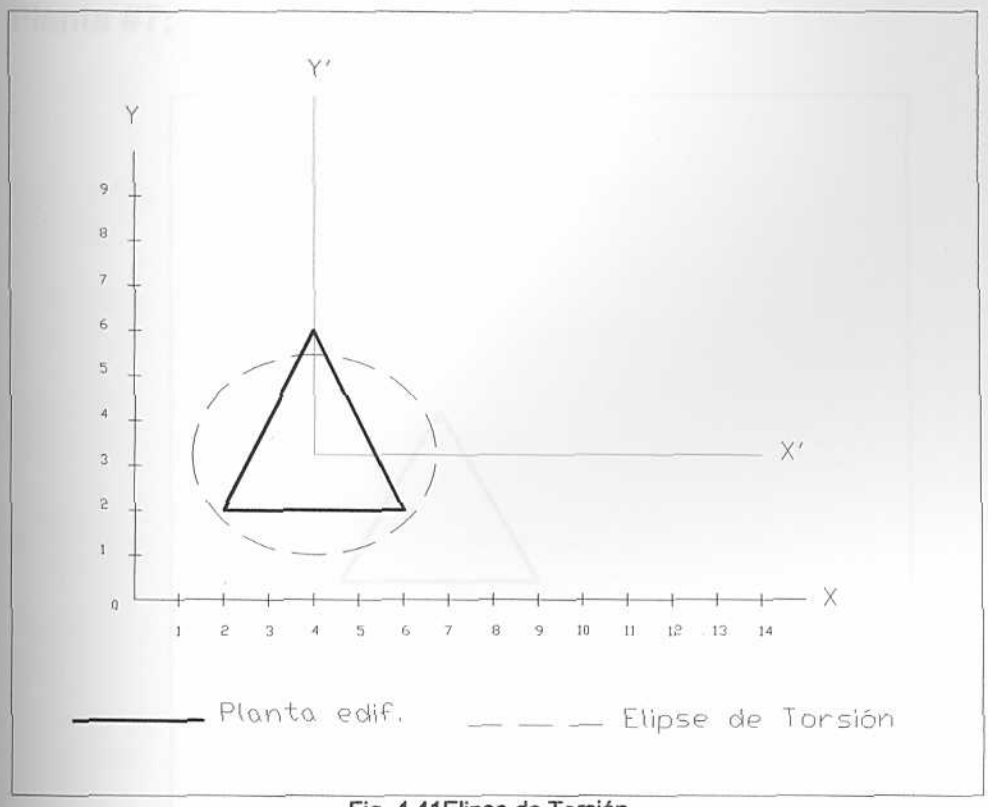


Fig. 4.41Elipse de Torsión,

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \rightarrow a = 6{,}47 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 0{,}40$$

Ecuación:

$$(x - 6{,}47)^2 + y^2 = 0{,}40$$

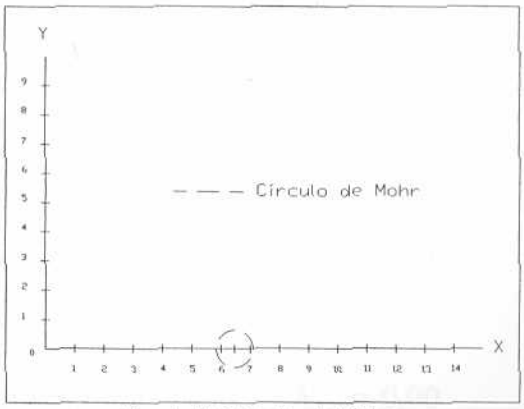


Fig. 4.42 Círculo de Mohr,

Planta #7:

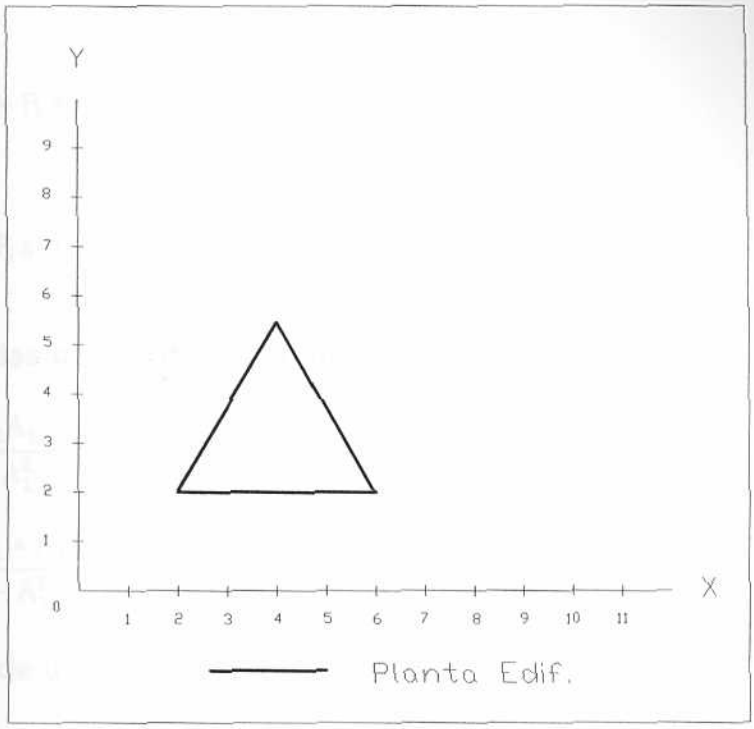


Fig. 4.43 Planta #7

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	90	2,45	4	1,46
T2	30	6,20	4	1,00
T3	330	0,73	4	1,00

Tabla 4.3 Datos de la Planta #7

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 6{,}00$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 6{,}00$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 24{,}00$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 20{,}75$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 4{,}00$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 3{,}46$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 6{,}00 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22} = 6{,}00 \quad (semi - eje\ y')$

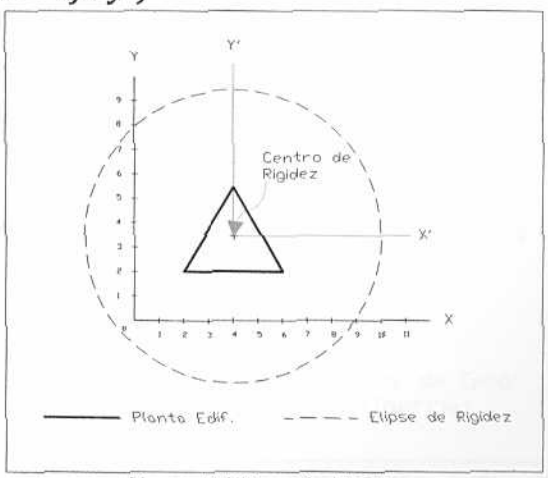


Fig. 4.44 Elipse de Rigidez,

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}17 \rightarrow 4{,}17 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}17 \rightarrow 4{,}17$$

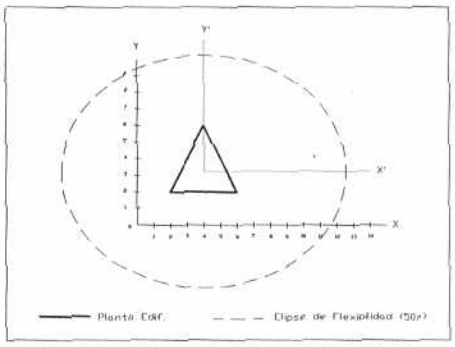


Fig. 4.45 Elipse de Flexibilidad (25x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \rightarrow \qquad I_p = 16{,}55$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \rightarrow r_{xx}^2 = 2{,}76 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \rightarrow r_{yy}^2 = 2{,}76$$

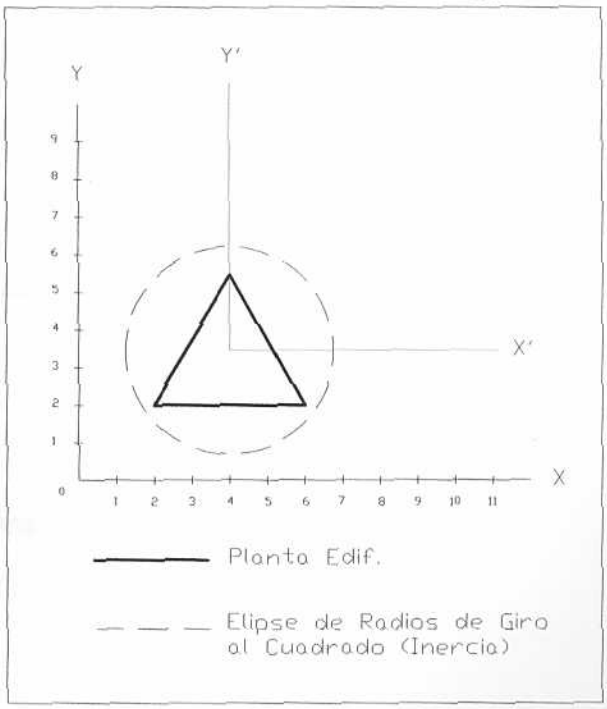


Fig. 4.46 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}66 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 1{,}66$$

Ecuación:

$$x'^2 + y'^2 = 2{,}76$$

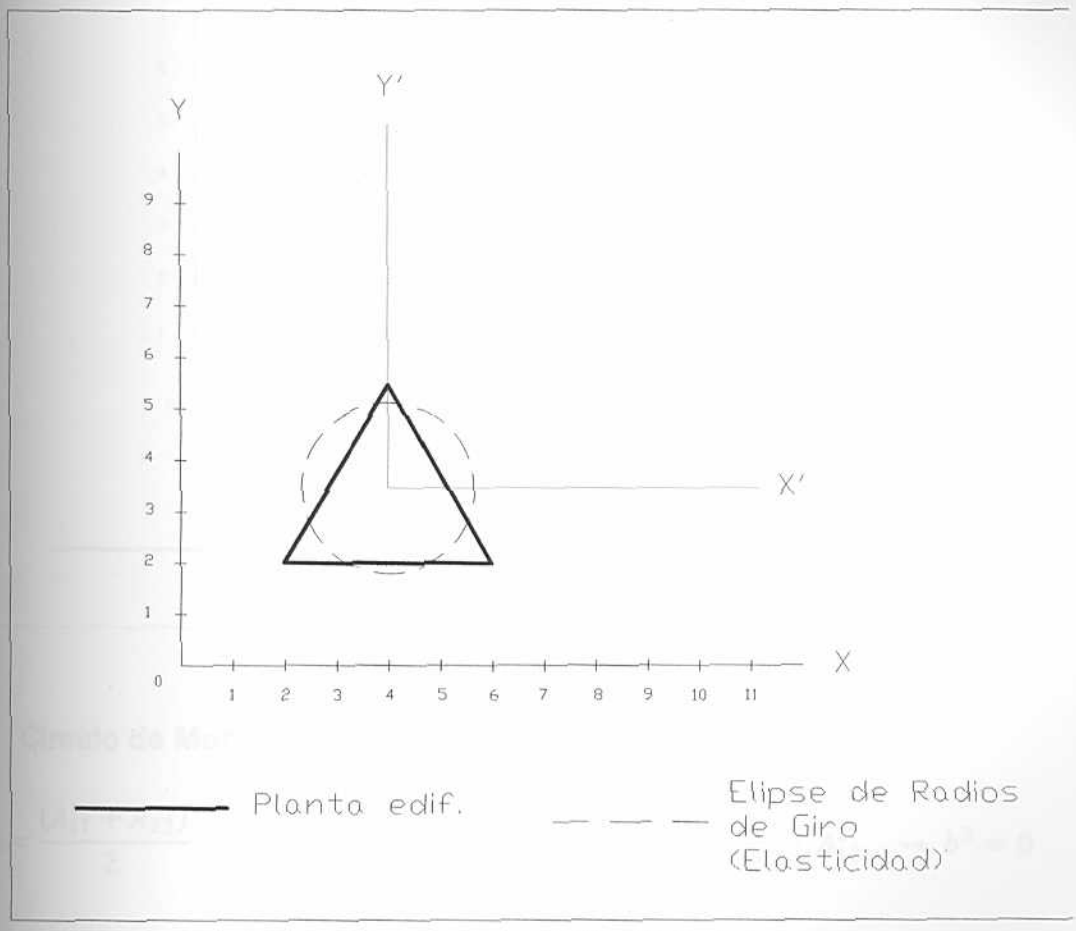


Fig. 4.47 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 1{,}89 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 1{,}89$$

Ecuación:

$$x'^2 + y'^2 = 3{,}58$$

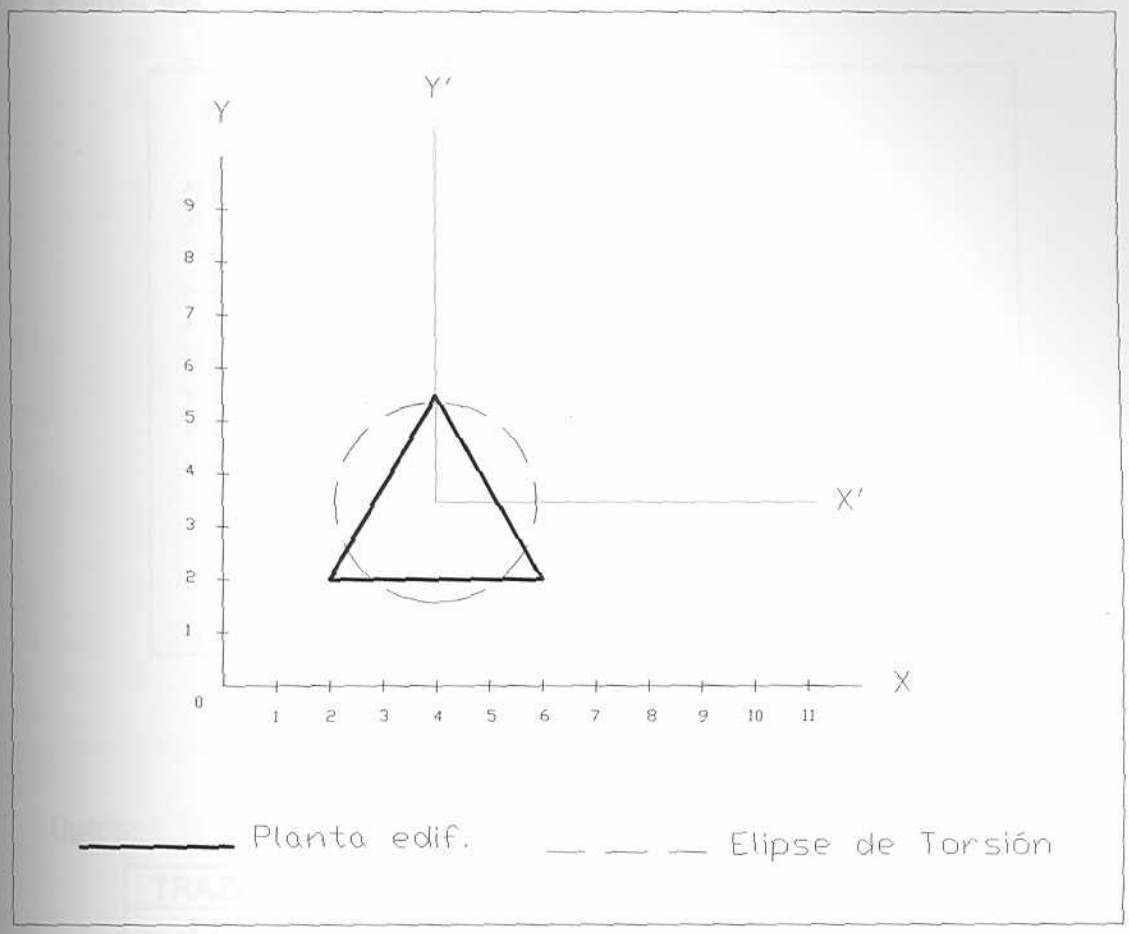


Fig. 4.48 Elipse de Torsión,

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 6{,}00 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \quad \rightarrow b^2 = 0$$

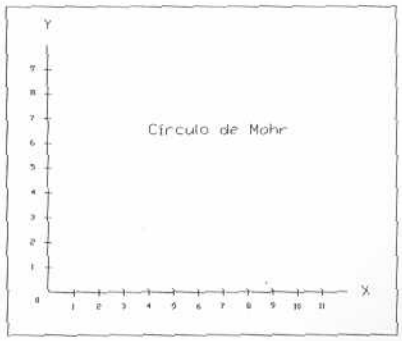


Fig. 4.49 Círculo de Mohr,

Planta #8:

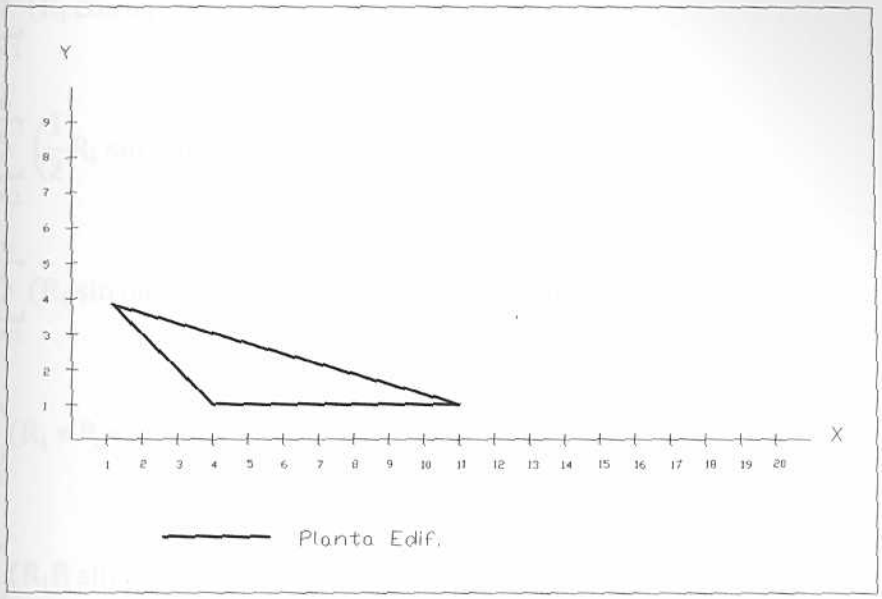


Fig. 50 Planta #8

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	90	1,00	7,00	0,94
T2	45	3,54	4,00	0,93
T3	74	4,00	10,23	0,93

Tabla 8 Datos de la Planta #8

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 2{,}78$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 1{,}47$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 21{,}28$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 56{,}35$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 4{,}38$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 1{,}94$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = -15{,}50$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 19{,}76 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22} = 1{,}47 \quad (semi - eje\ y')$

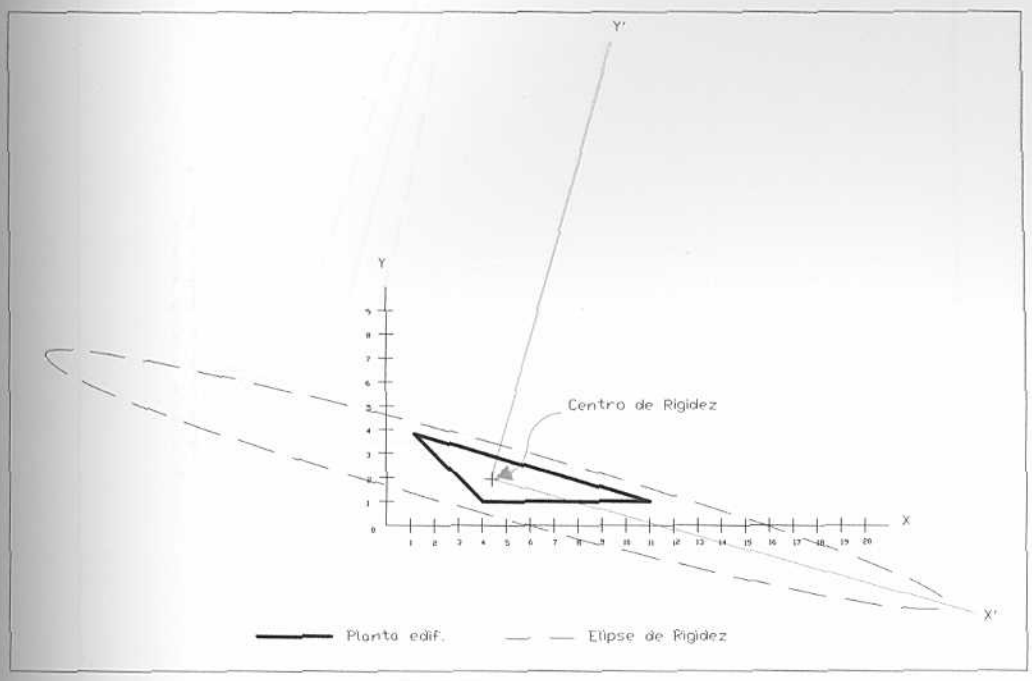


Fig. 4.51 Elipse de Rigidez,

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}05 \rightarrow 1{,}27 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}68 \rightarrow 17$$

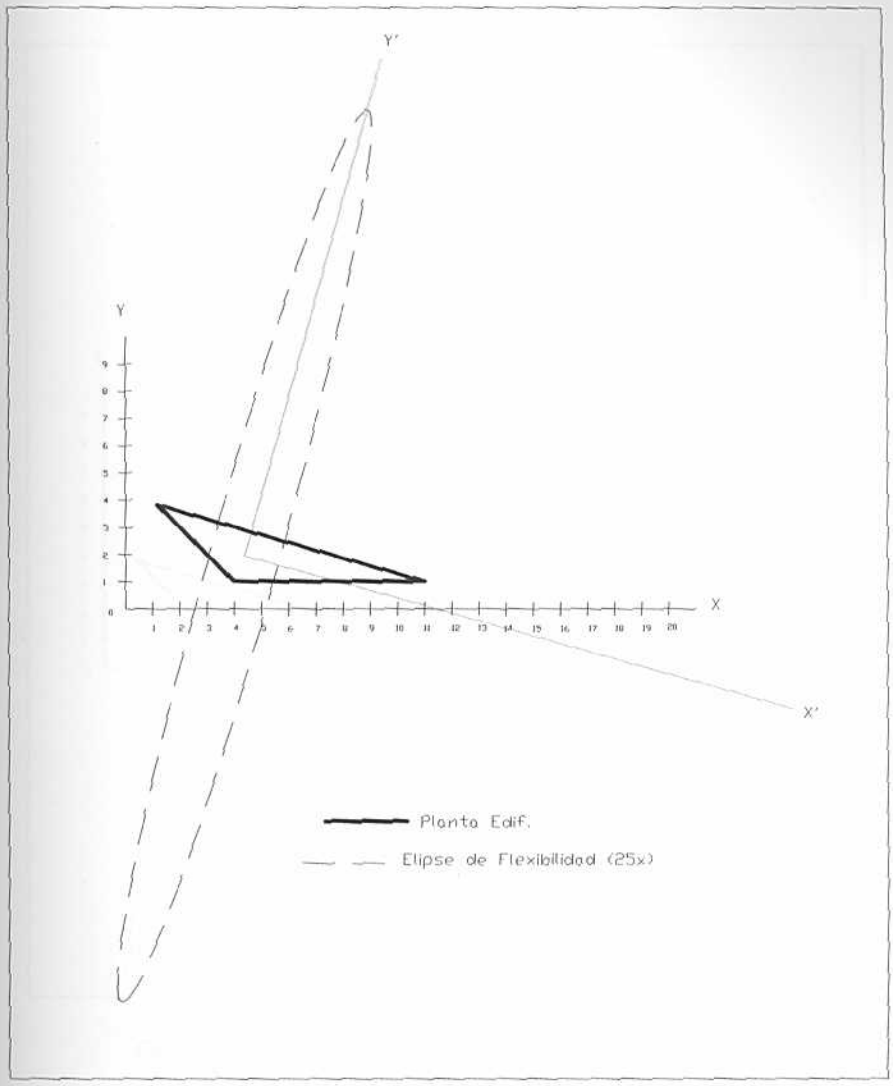


Fig. 4.52 Elipse de Flexibilidad (25x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 18{,}47$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 0{,}93 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 12{,}56$$

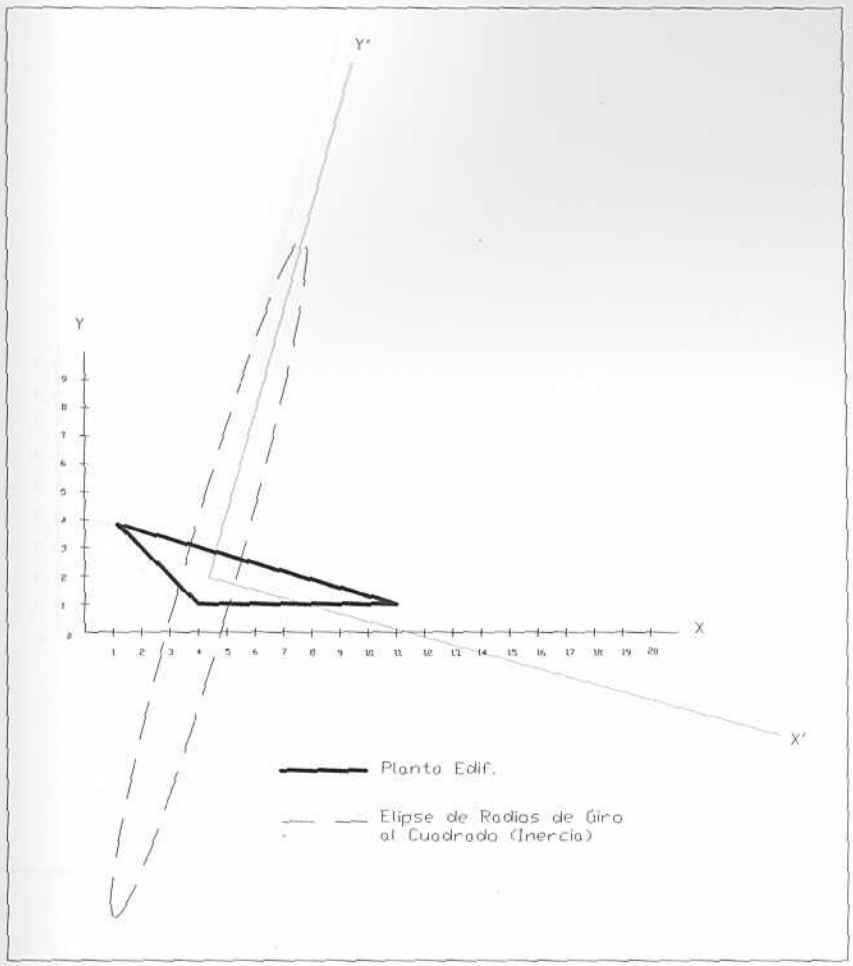


Fig. 4.53 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia).

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 0{,}97 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 3{,}54$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{0{,}93} + \frac{y'^2}{12{,}56} = 1$$

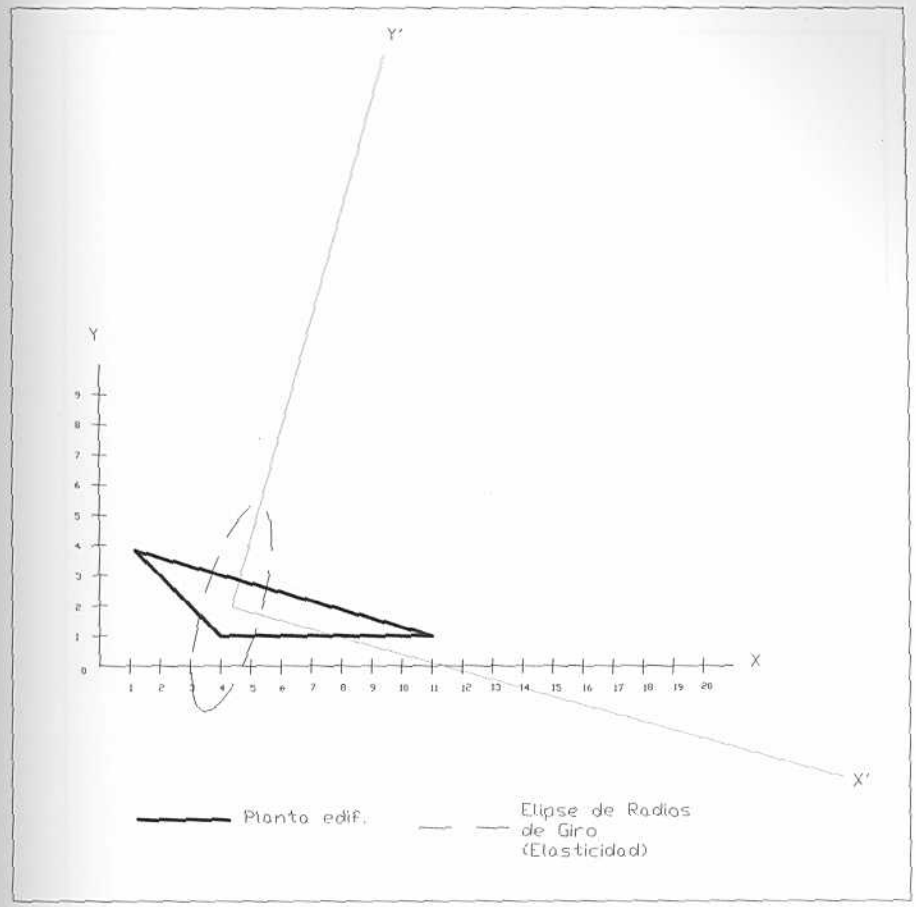


Fig. 4.54 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 1{,}00 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 13{,}41$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{179{,}93} = 1$$

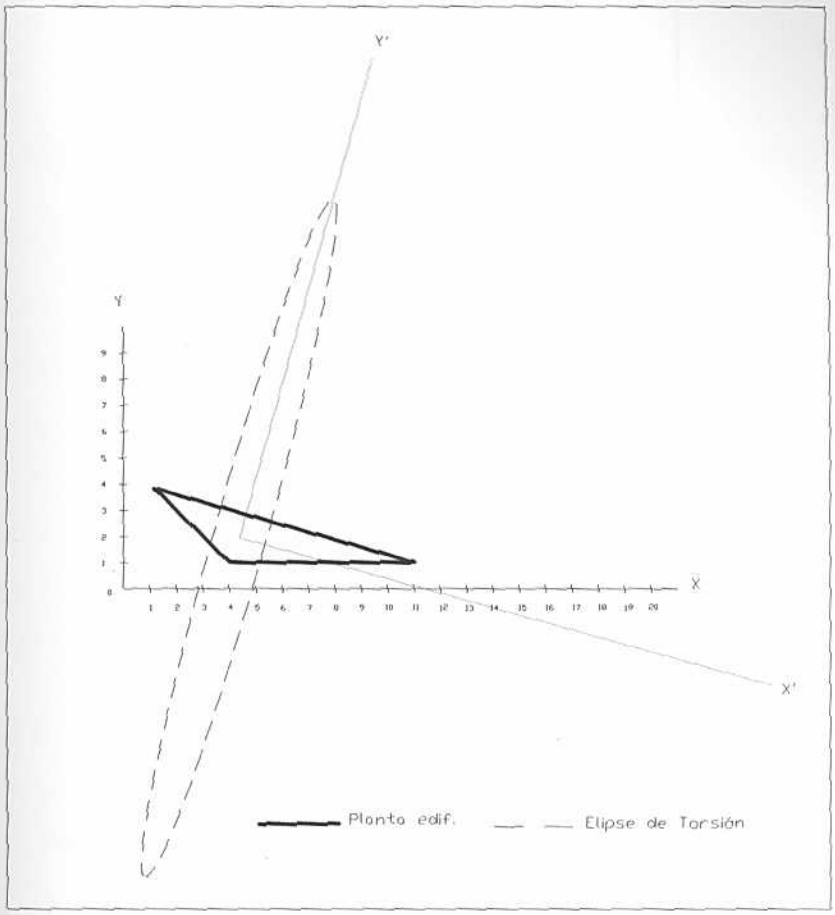


Fig. 4.55 Elipse de Torsión,

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 10{,}61 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \quad \rightarrow b^2 = 83{,}60$$

Ecuación:

$$(x - 10{,}61)^2 + y^2 = 83{,}60$$

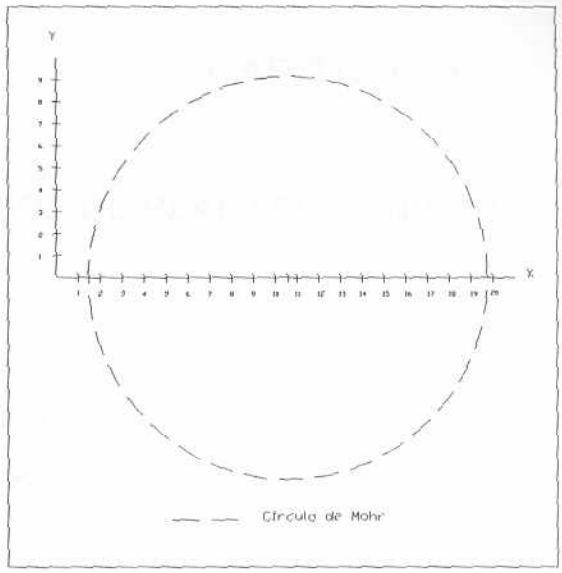


Fig. 4.56 Círculo de Mohr,

CAPITULO V

EJEMPLOS DE PLANTAS CON FORMA ARBITRARIA

Al igual que en el Capítulo IV, se presenta una serie de plantas cuyos pórticos externos a ser estudiados están orientados y distribuidos arbitrariamente (ver figuras); luego se muestran una serie de datos (ver tablas) de rigidez, distancia "P", ángulo ω, distancia "c" de cada pórtico o traza, asumiendo que la rigidez es proporcional a la longitud del pórtico; se calcularon las rigideces en cada dirección (R_{xx} = A_{11}; R_{yy}= A_{22}; R_{xy}= A_{12}; R_{yx}= A_{21}) con las formulas antes señaladas en el Capítulo II.

A partir de estos valores, se calcularon la posición del Centro de Rigidez y la dirección de uno de los ejes principales de la elipse de rigidez, empleando las ecuaciones del Prof. Hummelgens.

Se dibujaron las elipses de rigidez, flexibilidad, radios de giros al cuadrado, radios de giro, torsión, y círculo de Mohr de cada planta; planteándose las ecuaciones de las dos ultimas elipses mencionadas, ya que estas son a escala de planta.

Planta #9

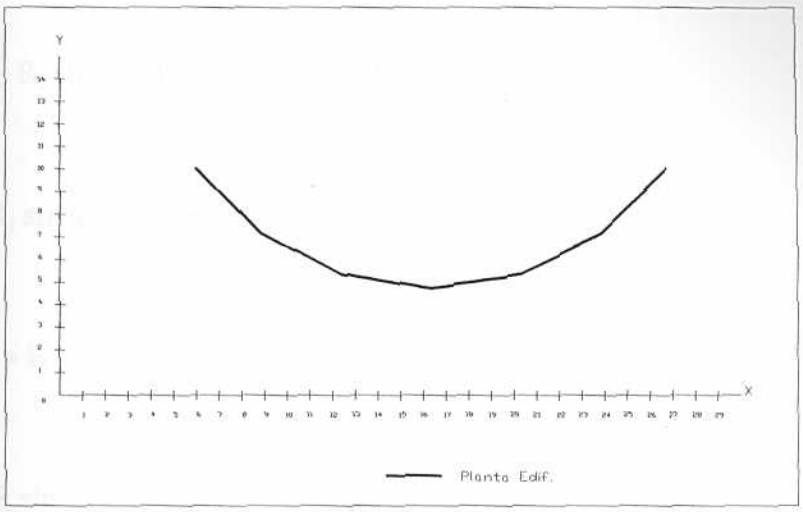


Fig. 5.1 Planta #9

DATOS:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	45	11,31	4,00	2,45
T2	63	10,40	4,00	0,19
T3	81	7,23	4,00	1,58
T4	99	2,12	4,00	1,58
T5	297	4,44	4,00	0,19
T6	315	11,80	4,00	2,45

Tabla 9 Datos de la planta # 9

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 5{,}84$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 18{,}16$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 95{,}52$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 56{,}77$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 6{,}50$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 3{,}13$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0{,}00$$

- **Elipse de Rigidez:**

$$A'_{11} = 18{,}16 \quad (\text{semi} - \text{eje x}')$$
$$A'_{22} = 5{,}84 \quad (semi - eje\ y')$$

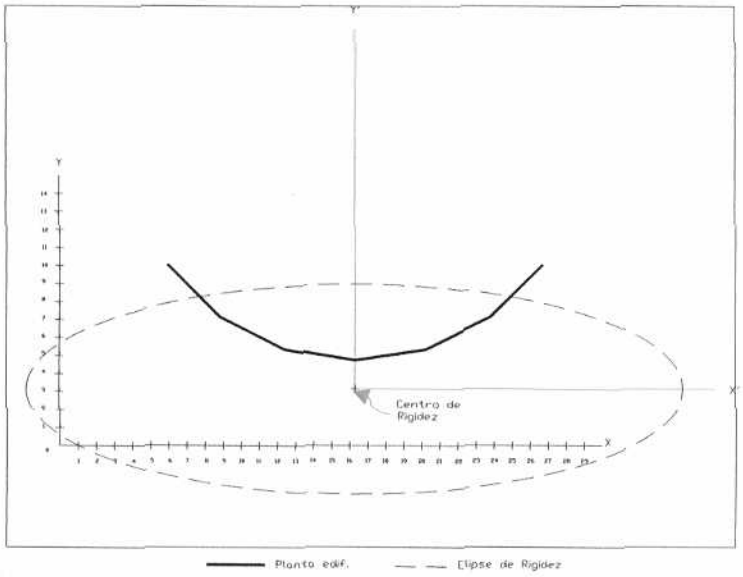


Fig. 5.2 Elipse de rigidez

- **Elipse de Flexibilidad**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}06 \ \rightarrow 5{,}51 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}17 \ \rightarrow 17{,}11$$

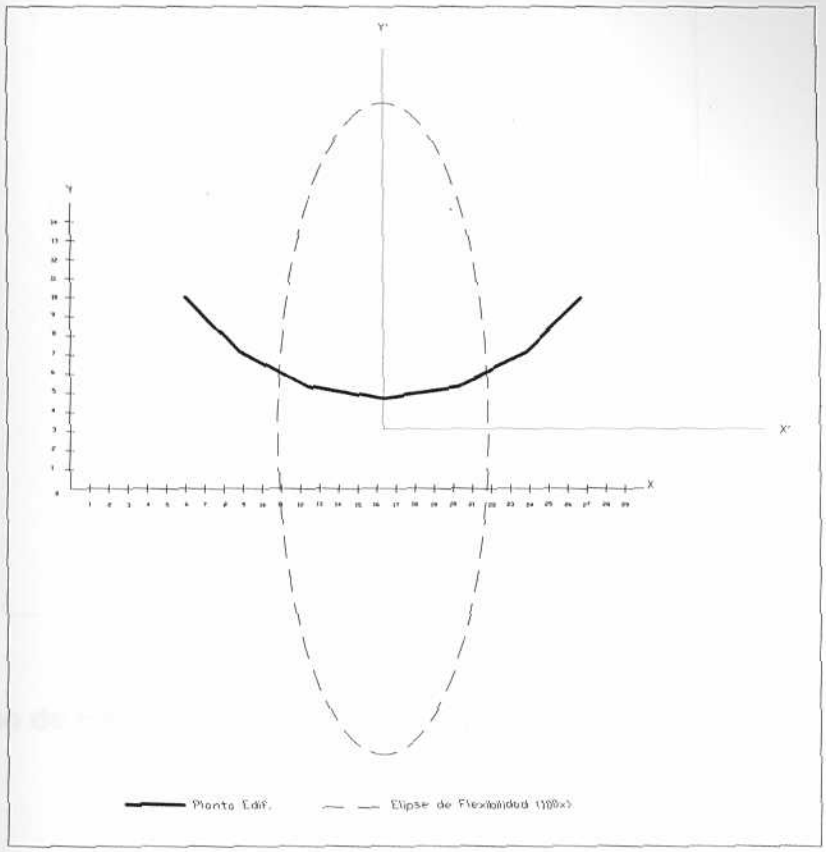


Fig. 5.3 Elipse de flexibilidad (100x)

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia):**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 68{,}51$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = \quad 3{,}77 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = \quad 11{,}72$$

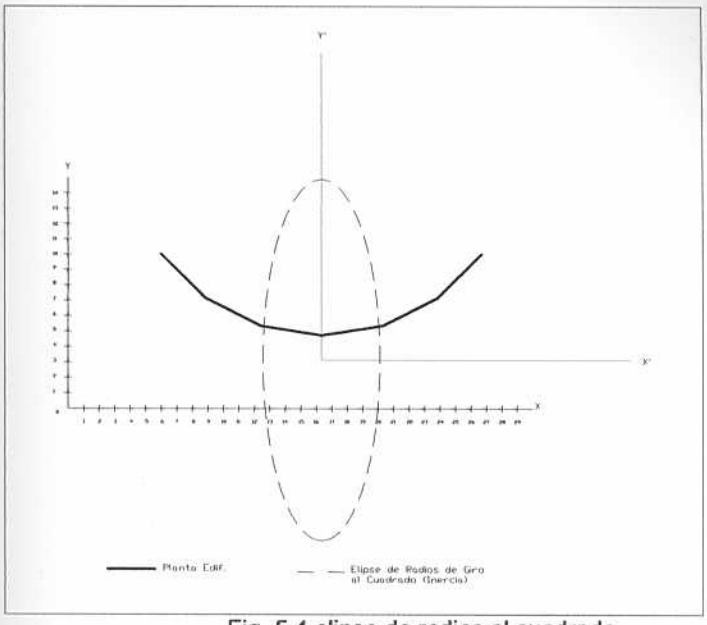


Fig. 5.4 elipse de radios al cuadrado

- **Elipse de Radio de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \quad \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}94 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \quad \rightarrow \quad r_{yy} = 3{,}42$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{3{,}77} + \frac{y'^2}{11{,}72} = 1$$

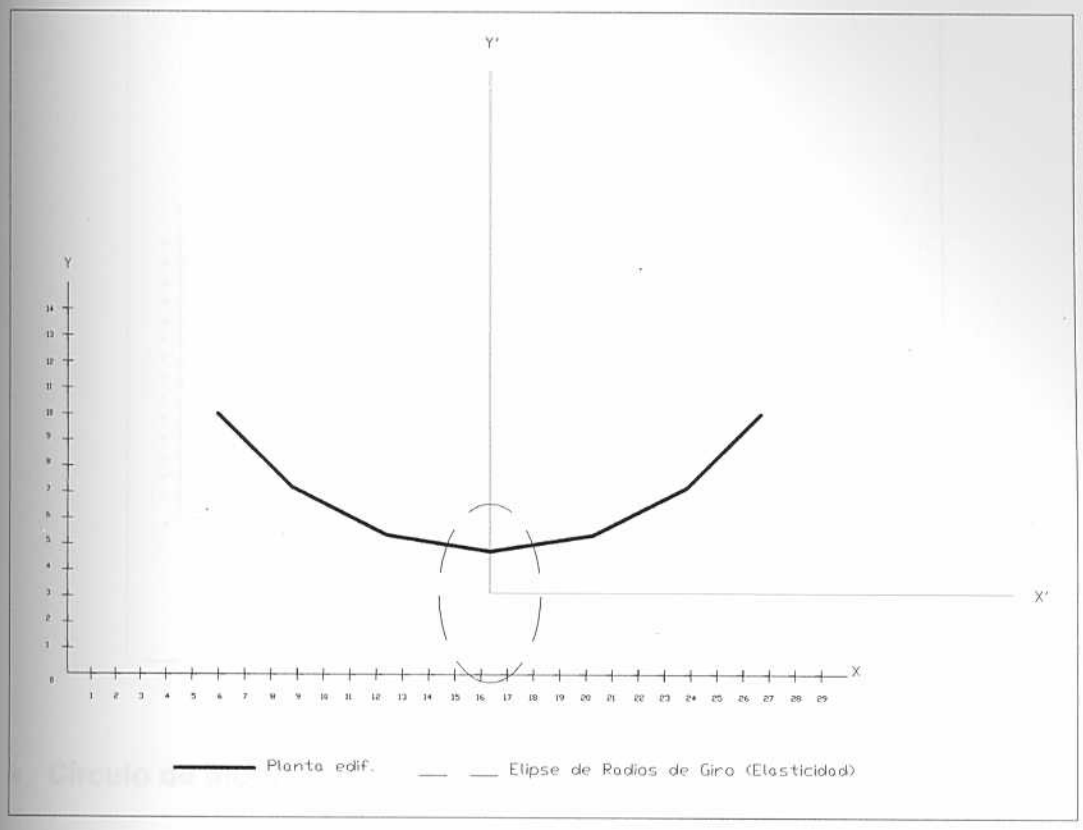


Fig. 5.5 elipse de radios de giro

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 1{,}54 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 4{,}78$$

Ecuación :

$$\frac{x'^2}{2{,}37} + \frac{y'^2}{22{,}82} = 1$$

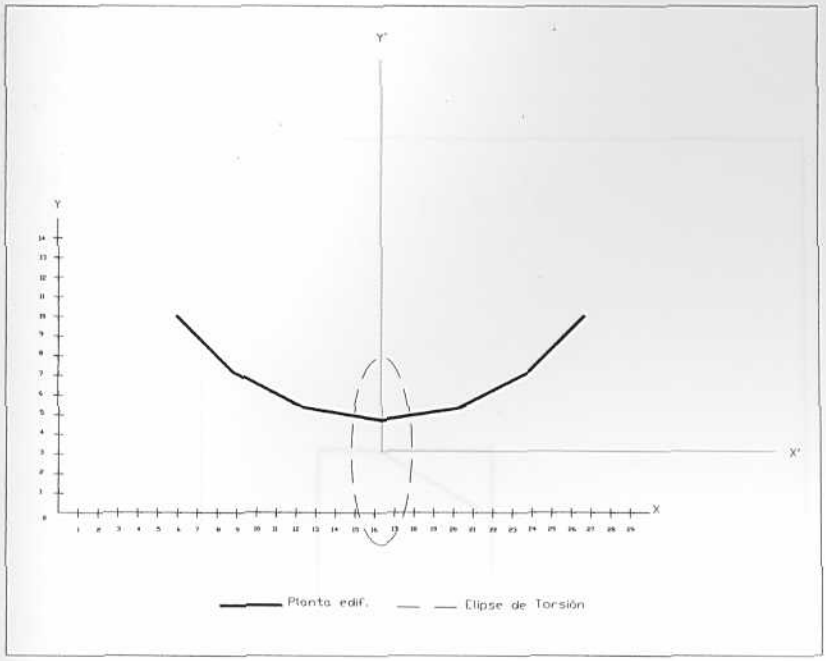


Fig. 5.6 Elipse de Torsión

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11}+A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 12$$

$$b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 37{,}89$$

Ecuación:

$$(x-12)^2 + y^2 = 37{,}89$$

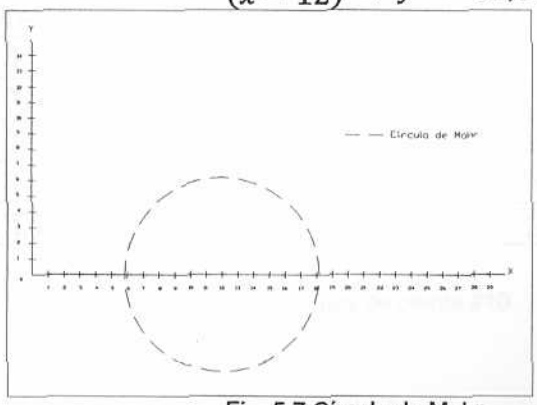


Fig. 5.7 Círculo de Mohr

Planta #10

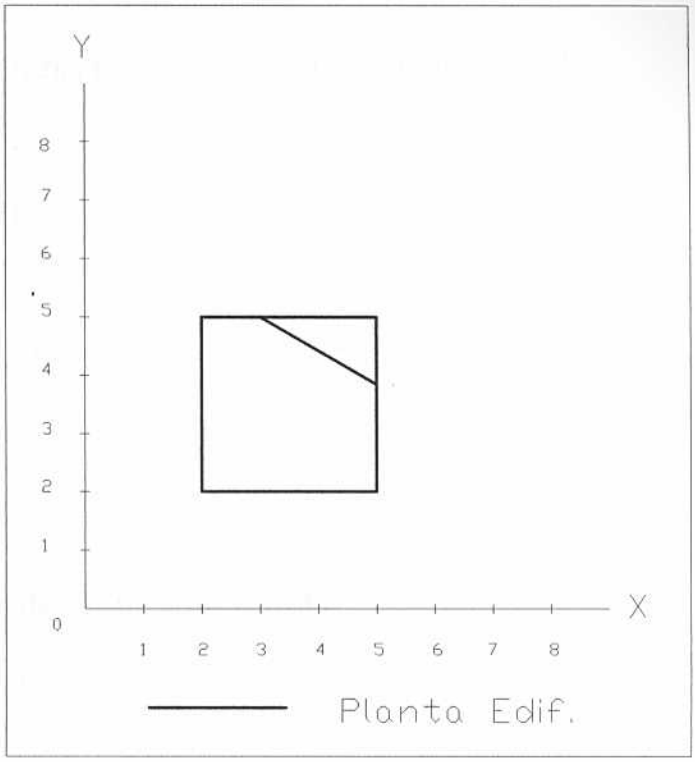


Fig. 5.8 Planta # 10

DATOS:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	0	2,00	3,00	1,65
T2	0	5,00	3,00	1,35
T3	90	2,00	3,00	1,75
T4	90	5,00	3,00	1,25
T5	60	5,83	2,31	0,76

Tabla 10 Datos de planta #10

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 6{,}58$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 1{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 7{,}73$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 27{,}74$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 32{,}67$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 3{,}65$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 3{,}75$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = -30{,}00$$

- **Elipse de Rigidez:**

$$A'_{11} = 8{,}31 \qquad (\text{semi} - \text{eje } x')$$
$$A'_{22} = 6{,}00 \qquad (semi - eje\ y')$$

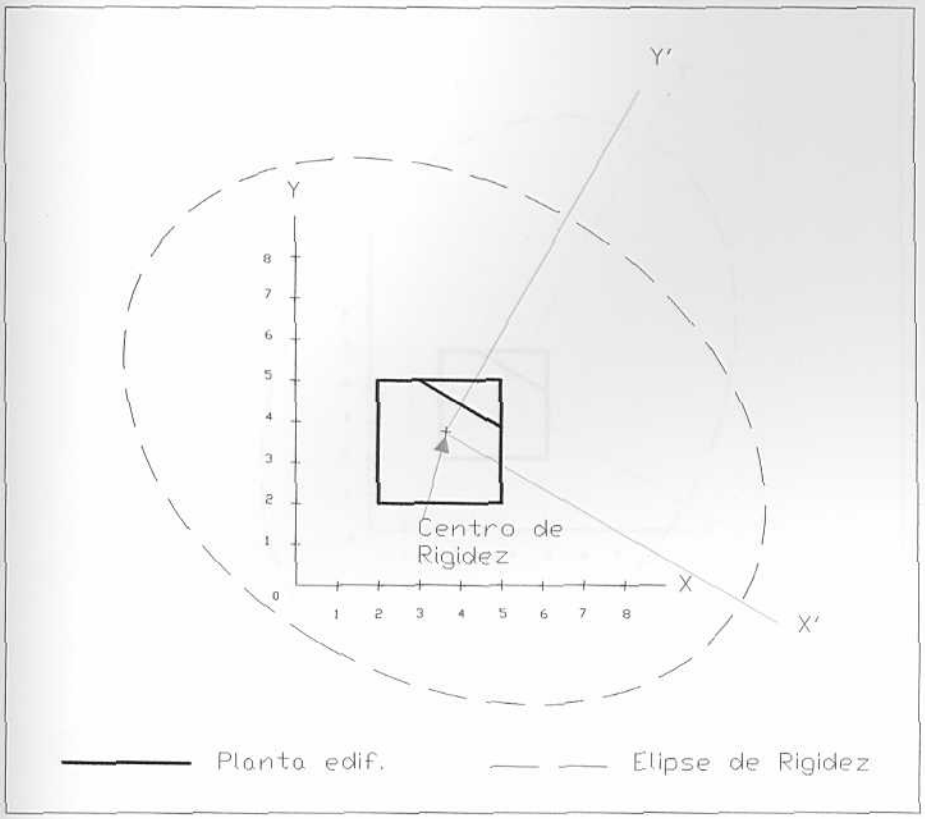


Fig. 5.9 Elipse de rigidez

- **Elipse de Flexibilidad**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}12 \quad \rightarrow 6{,}02 \qquad\qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}17 \quad \rightarrow 8{,}33$$

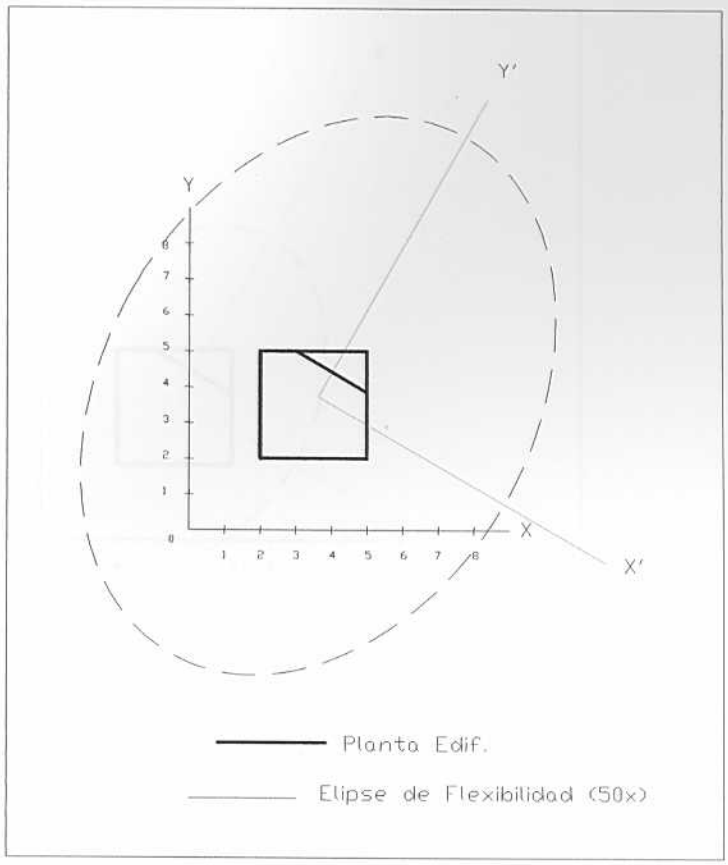


Fig. 5.10 Elipse de flexibilidad (50x)

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia):**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 28{,}83$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 3{,}47 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 2{,}74$$

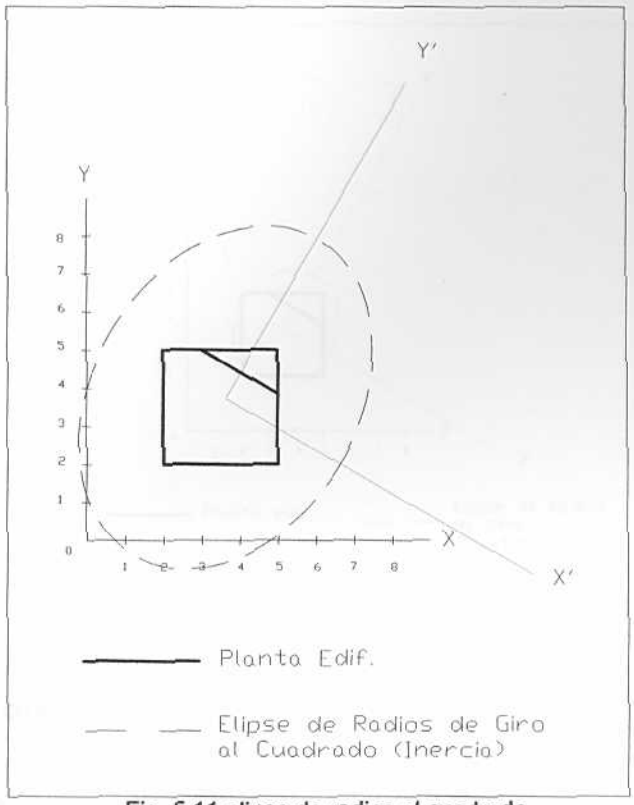


Fig. 5.11 elipse de radios al cuadrado

- **Elipse de Radio de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}86 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 2{,}19$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{3{,}47} + \frac{y'^2}{4{,}80} = 1$$

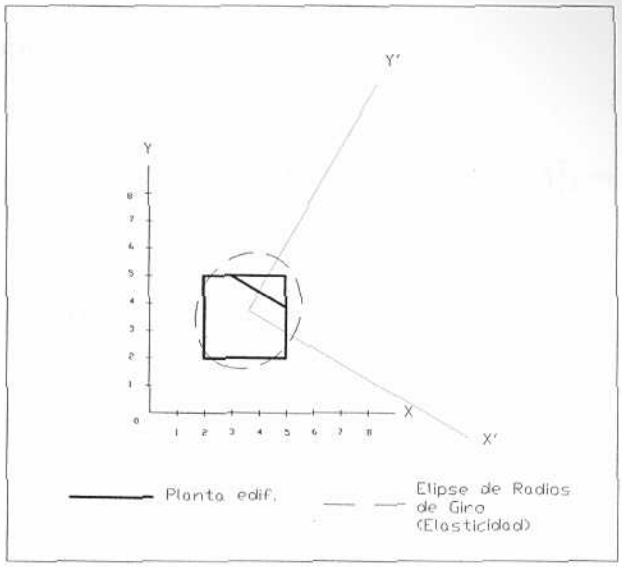


Fig 5.12 elipse de radios de giro

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 1{,}98 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 2{,}74$$

Ecuación :

$$\frac{x'^2}{3{,}92} + \frac{y'^2}{7{,}52} = 1$$

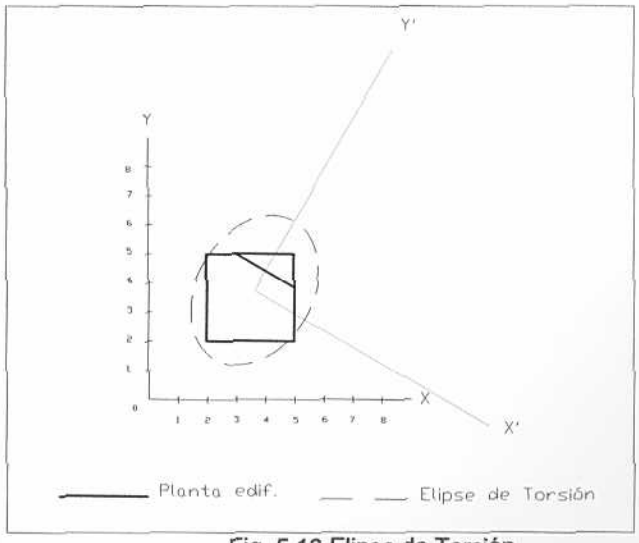


Fig. 5.13 Elipse de Torsión

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11}+A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 7{,}16 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 1{,}34$$

Ecuación:

$$(x - 7{,}16)^2 + y^2 = 1{,}34$$

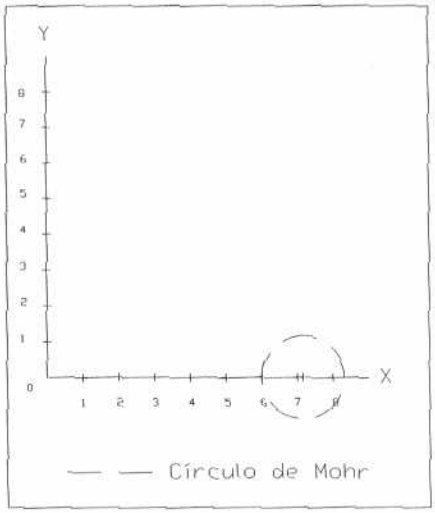


Fig. 5.14 Círculo de Mohr

Planta # 11

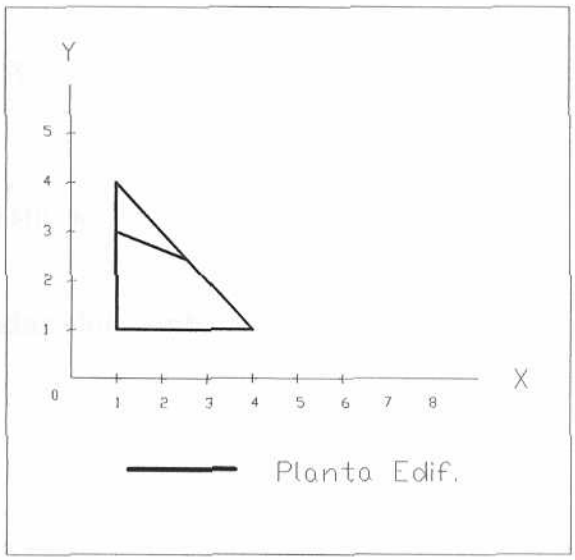


Fig. 5.15Planta # 11

DATOS:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	0	1,00	3,00	0,87
T2	90	1,00	3,00	1,06
T3	45	3,54	4,24	0,76
T4	70	3,16	1,67	0,58

Tabla 10 Datos de la planta # 11

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 5{,}32$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 2{,}66$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 6{,}60$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 15{,}41$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 18{,}58$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 1{,}87$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 2{,}06$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = -38{,}22$$

- **Elipse de Rigidez:**

$$A'_{11} = 8{,}69 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$$
$$A'_{22} = 3{,}22 \quad (semi - eje\ y')$$

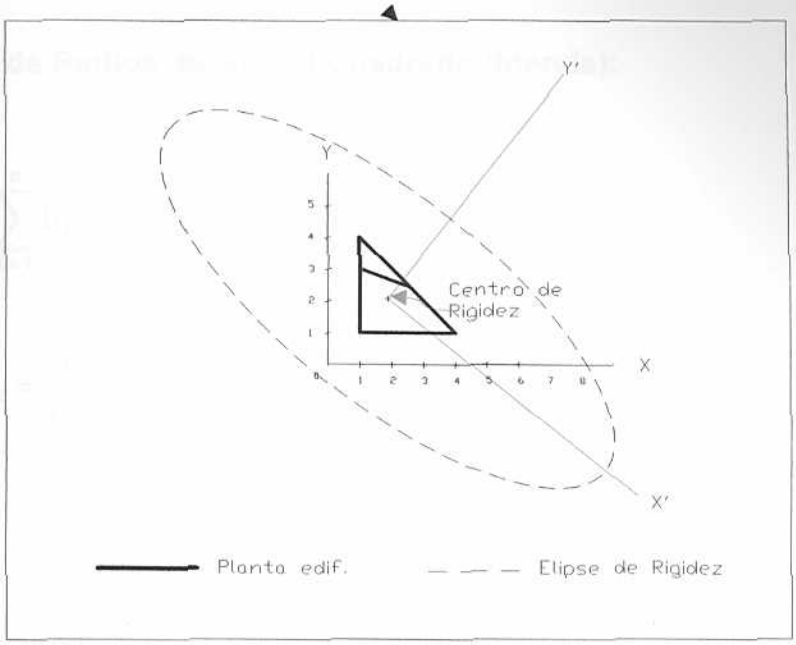


Fig. 5.16 Elipse de rigidez

- **Elipse de Flexibilidad**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}12 \rightarrow 2{,}88 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}31 \rightarrow 7{,}76$$

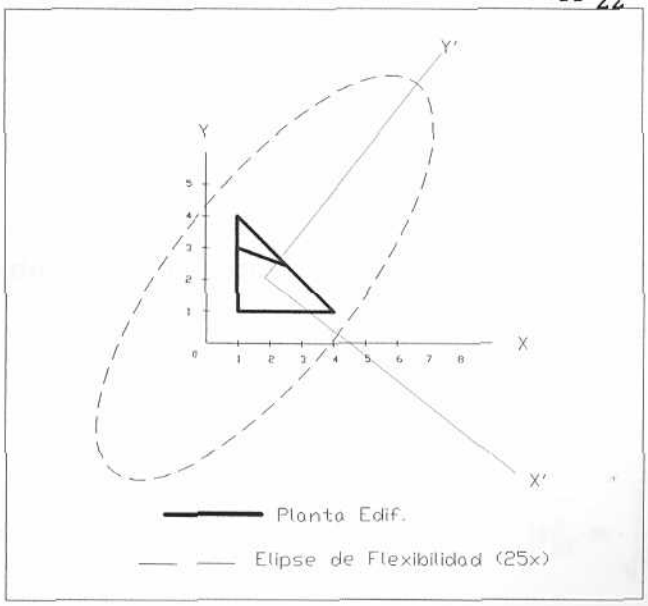


Fig. 5.17 Elipse de flexibilidad (25x)

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia):**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 8{,}64$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 0{,}99 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 2{,}68$$

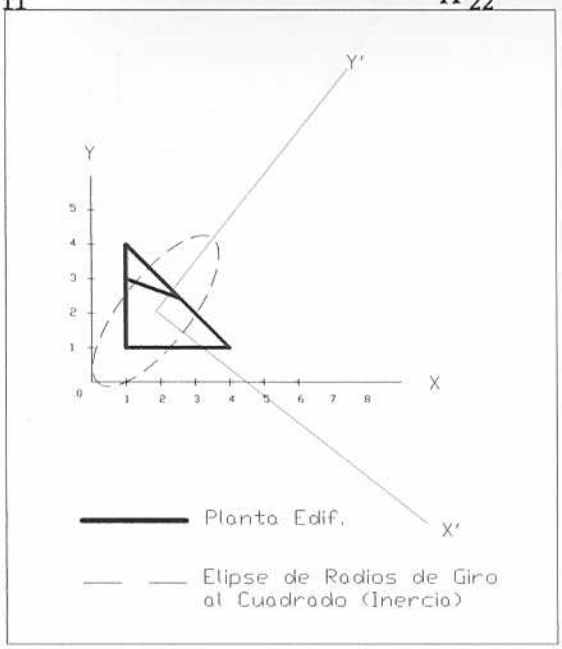


Fig. 5.18 elipse de radios al cuadrado

- **Elipse de Radio de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \quad \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}00 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \quad \rightarrow \quad r_{yy} = 1{,}64$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{1} + \frac{y'^2}{2,68} = 1$$

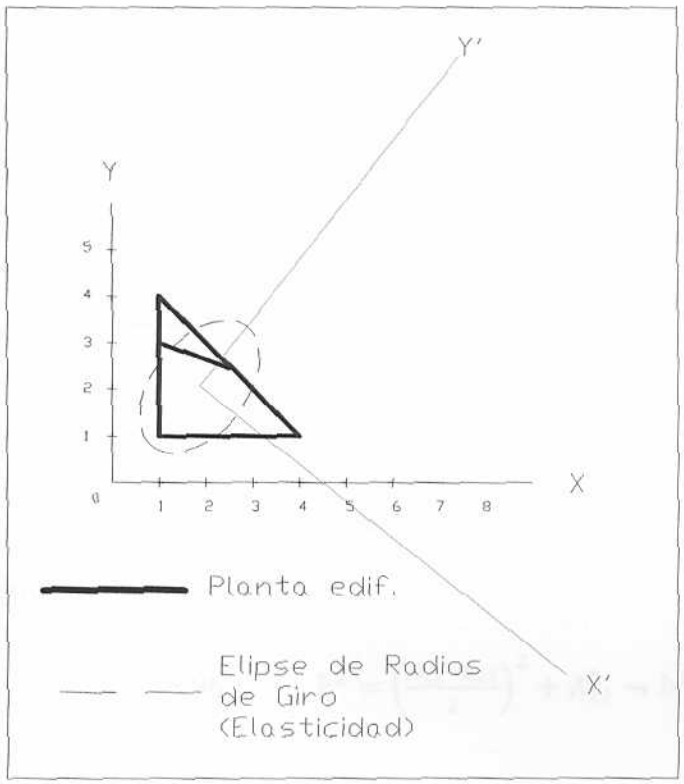


Fig. 5.19 elipse de radios de giro

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 0,94 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 2,52$$

Ecuación :

$$\frac{x'^2}{0,88} + \frac{y'^2}{6,37} = 1$$

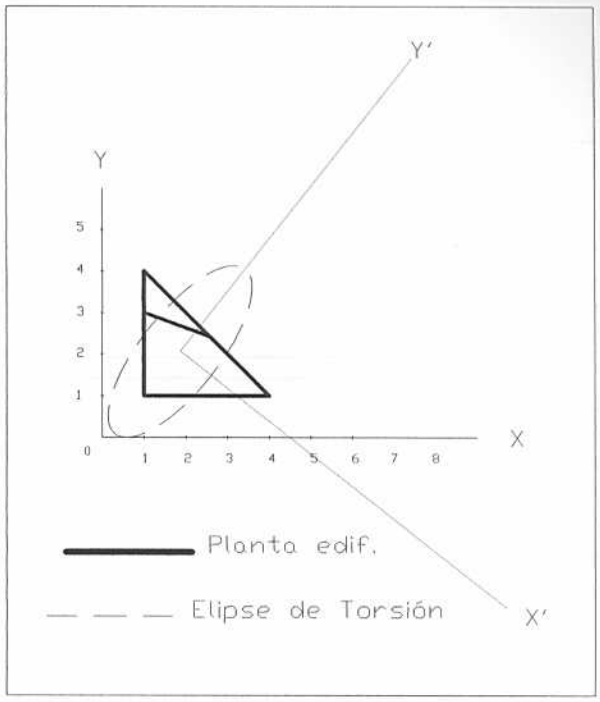


Fig. 5.20 Elipse de Torsión

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11}+A_{22})}{2} \rightarrow a = 5{,}96 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 7{,}48$$

Ecuación:

$$(x - 5{,}96)^2 + y^2 = 7{,}48$$

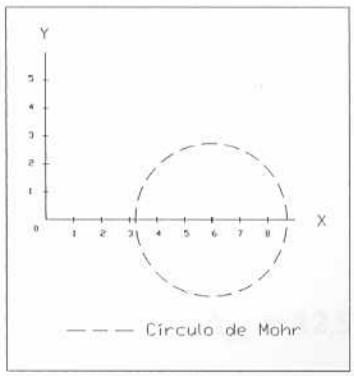


Fig. 5.21 Circulo de Mohr

Planta # 12

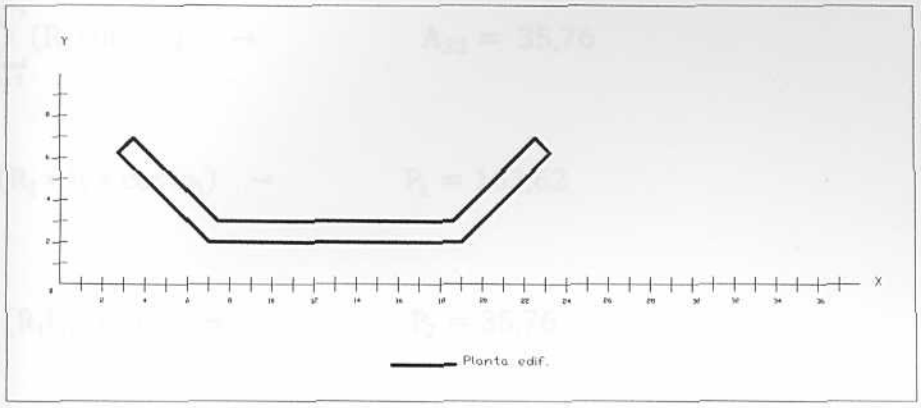


Fig. 5.22 Planta 12

DATOS:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	90	2,00	12,00	1,01
T2	90	3,00	11,17	2,01
T3	45	7,36	5,59	2,53
T4	45	6,36	6,00	3,53
T5	135	2,46	1,00	10,95
T6	45	20,85	1,00	10,95
T7	315	12,02	6,00	3,53
t8	315	11,02	5,59	2,53

Tabla 12 Datos de la planta #12

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 12{,}59$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 35{,}76$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 163{,}62$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 35{,}76$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez**:

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 13{,}00$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 0{,}99$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0{,}00$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 35{,}76 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22} = 12{,}59 \quad (semi - eje\ y')$

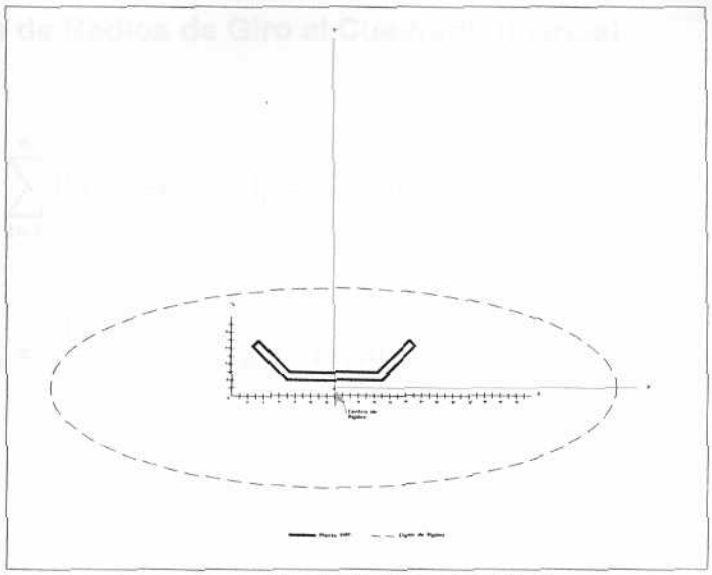


Fig. 5.23 Elipse de rigidez

- **Elipse de Flexibilidad**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}03 \rightarrow 11{,}19 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}08 \rightarrow 31{,}78$$

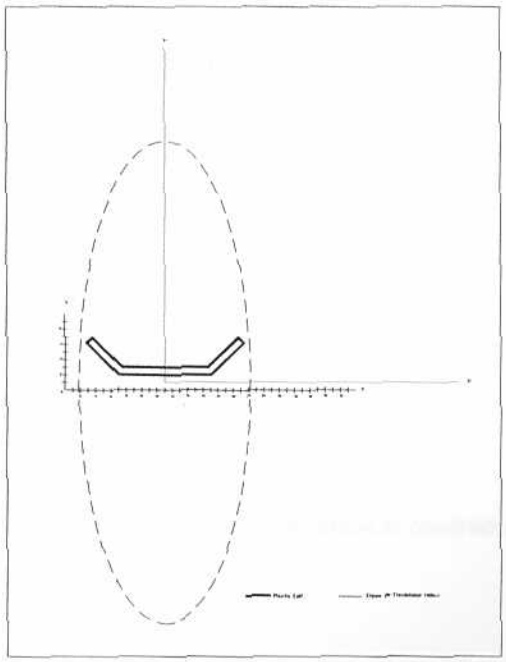


Fig. 5.24 Elipse de flexibilidad (400x)

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia):**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 518{,}30$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 14{,}50 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 41{,}18$$

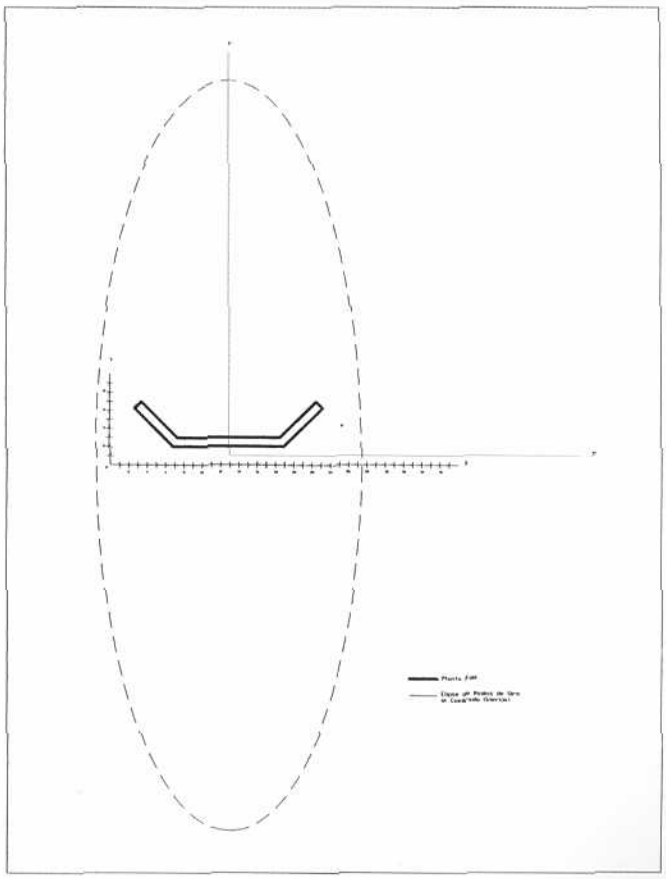


Fig. 5.25 elipse de radios al cuadrado

- **Elipse de Radio de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 3{,}81 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 6{,}42$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{14{,}50} + \frac{y'^2}{41{,}18} = 1$$

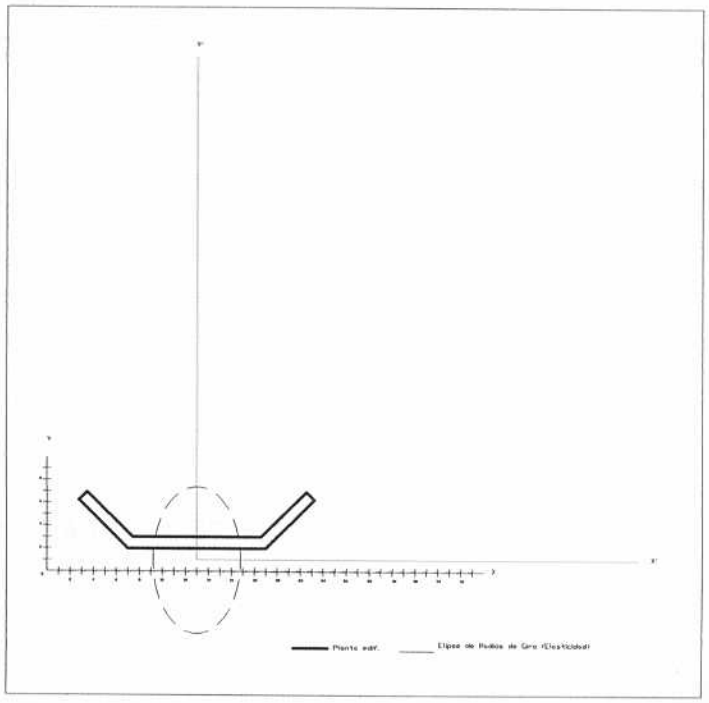


Fig. 5.26 elipse de radios de giro

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 1{,}94 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 3{,}76$$

Ecuación :

$$\frac{x'^2}{1{,}75} + \frac{y'^2}{14{,}13} = 1$$

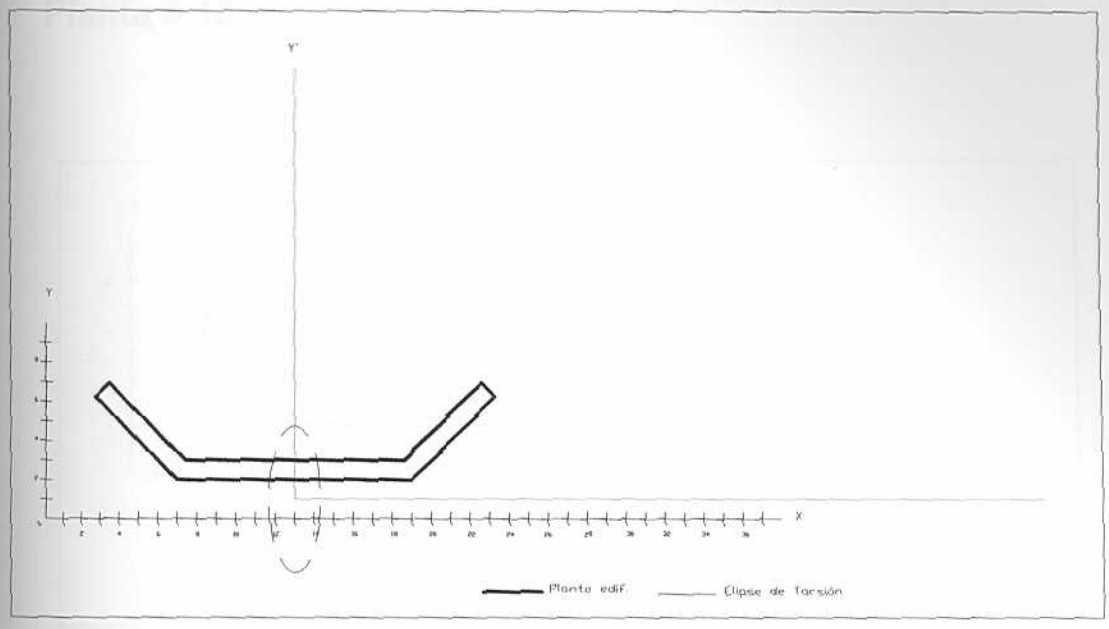


Fig 5.27 Elipse de Torsión

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11}+A_{22})}{2} \rightarrow a = 24{,}17 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 134{,}23$$

Ecuación:

$$(x - 24{,}17)^2 + y^2 = 134{,}23$$

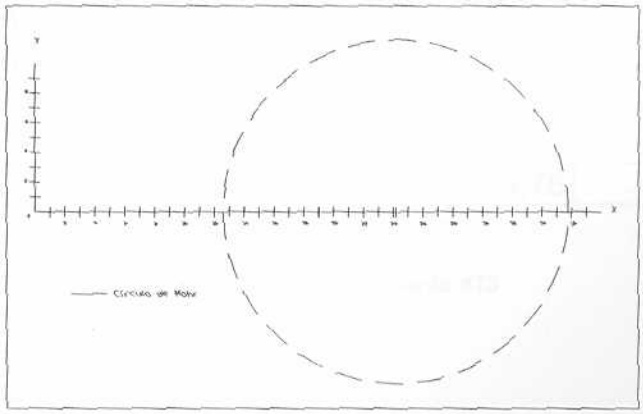


Fig. 5.28 Círculo de Mohr

Planta # 13

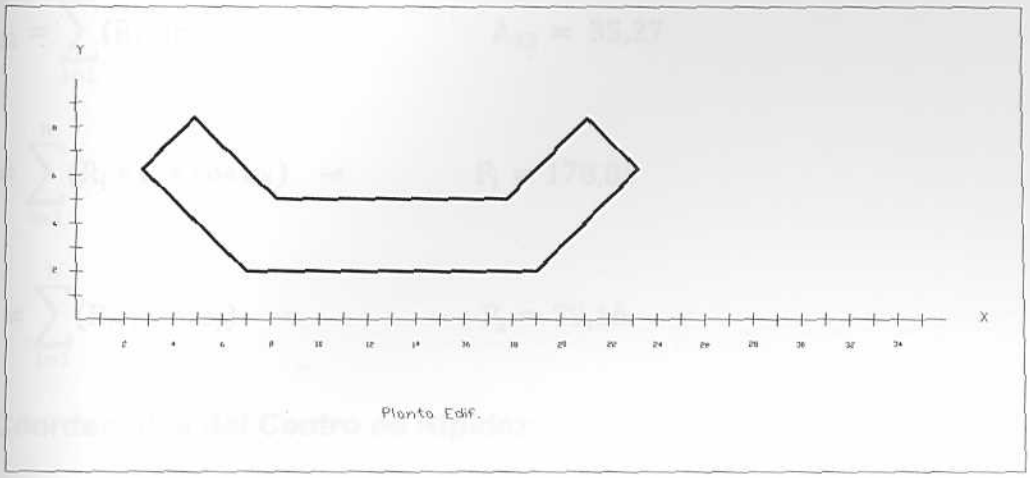


Fig. 5.29 Planta 13

DATOS:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	90	2,00	12,00	0,24
T2	90	3,00	9,51	2,76
T3	45	9,36	4,76	1,42
T4	45	6,36	6,00	4,42
T5	135	2,46	3,00	10,70
T6	45	20,85	3,00	10,70
T7	315	12,02	6,00	4,42
t8	315	9,02	4,76	1,42

Tabla 13 Datos de la planta #13

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 13{,}56$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}R_i \sin 2\omega_i\right) \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n}(R_i \sin \omega_i{}^2) \rightarrow \qquad A_{22} = 35{,}27$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n}(R_i * P_i * \cos \omega_i) \rightarrow \qquad P_1 = 178{,}85$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n}(R_i P_i \sin \omega_i) \rightarrow \qquad P_2 = 79{,}16$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez**:

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \rightarrow \qquad x_0 = 13{,}00$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \rightarrow \qquad y_0 = 2{,}24$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \rightarrow \qquad \alpha = 0{,}00$$

- **Elipse de Rigidez:**

$$A'_{11} = 35{,}76 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$$
$$A'_{22} = 13{,}76 \quad (semi - eje\ y')$$

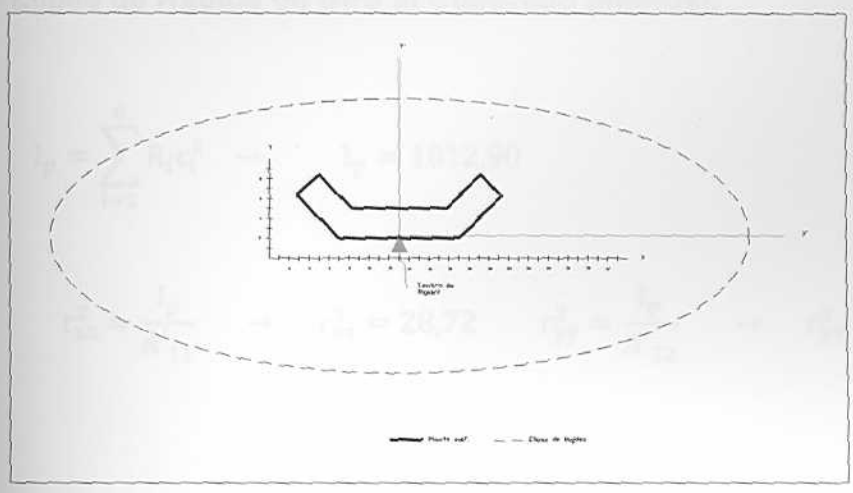


Fig. 5.30 Elipse de rigidez

- **Elipse de Flexibilidad**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}03 \rightarrow 12{,}76 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}07 \rightarrow 32{,}71$$

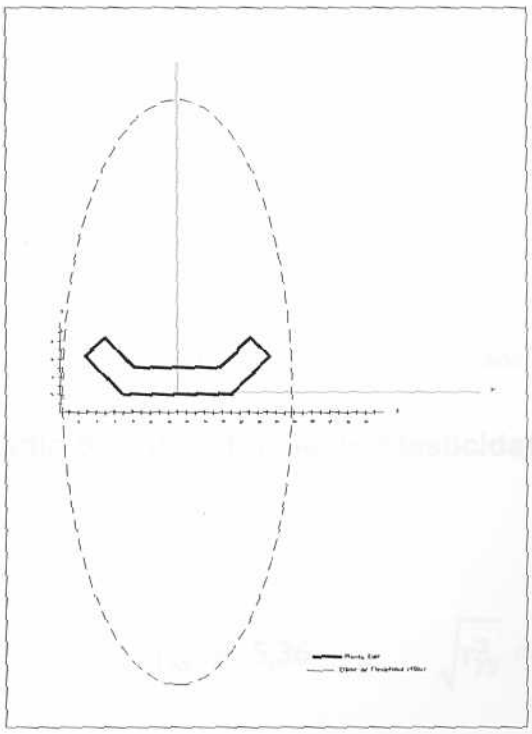


Fig. 5.31 Elipse de flexibilidad (400x)

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia):**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 1012{,}90$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 28{,}72 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 73{,}63$$

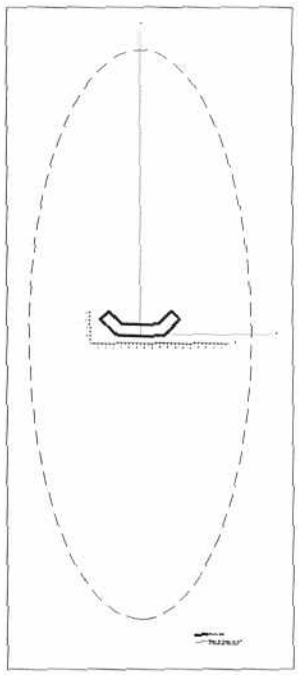


Fig. 5.32 elipse de radios al cuadrado

- **Elipse de Radio de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \quad \rightarrow \quad r_{xx} = 5{,}36 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \quad \rightarrow \quad r_{yy} = 8{,}58$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{28,72} + \frac{y'^2}{73,63} = 1$$

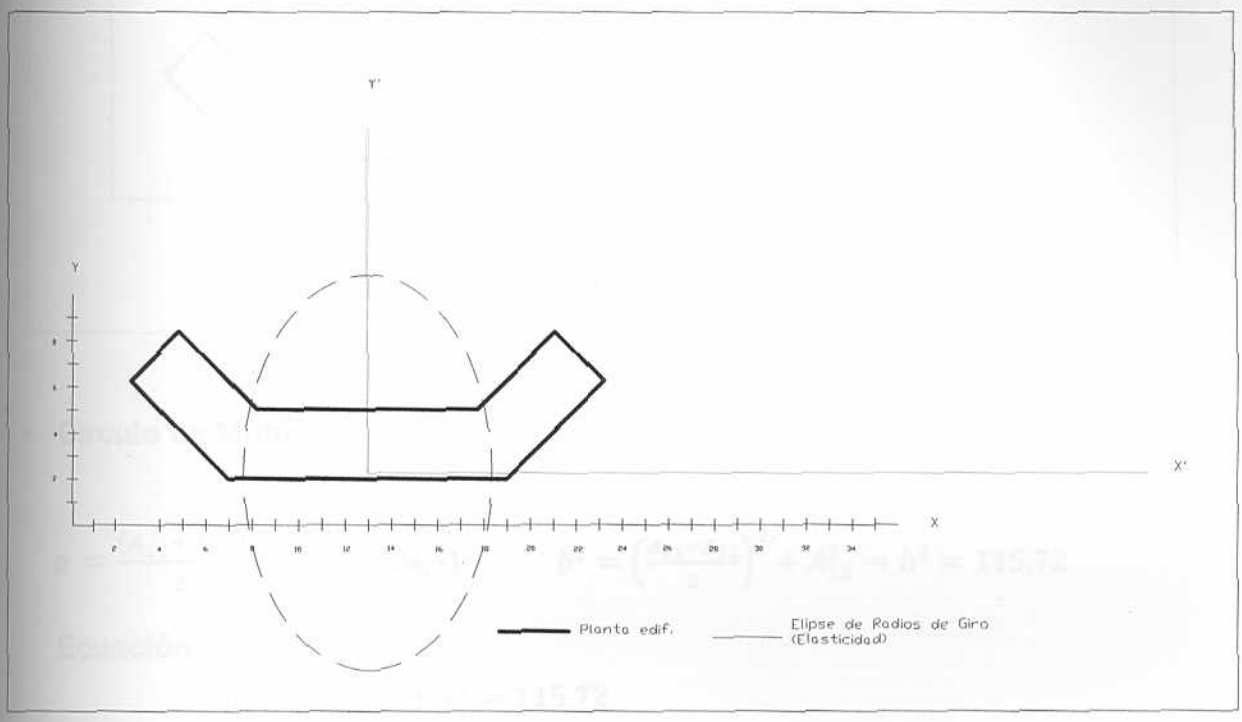


Fig. 5.33 elipse de radios de giro

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 2,68 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 6,88$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{7,20} + \frac{y'^2}{47.35} = 1$$

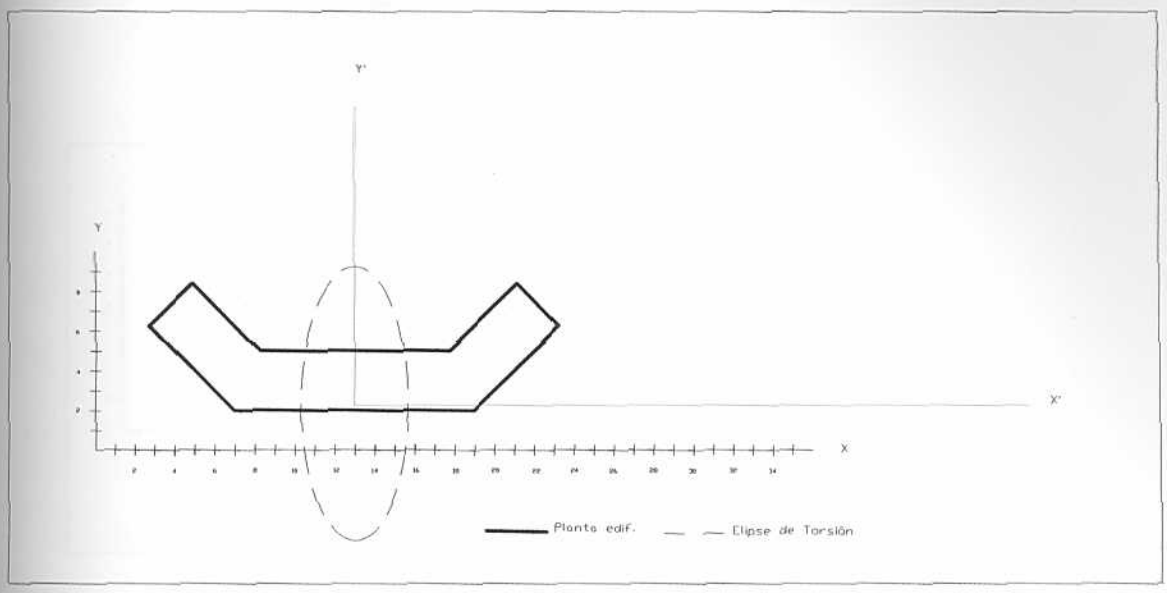


Fig. 5.34 Elipse de Torsión

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11}+A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 24{,}51 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 115{,}72$$

Ecuación:

$$(x - 24{,}51)^2 + y^2 = 115{,}72$$

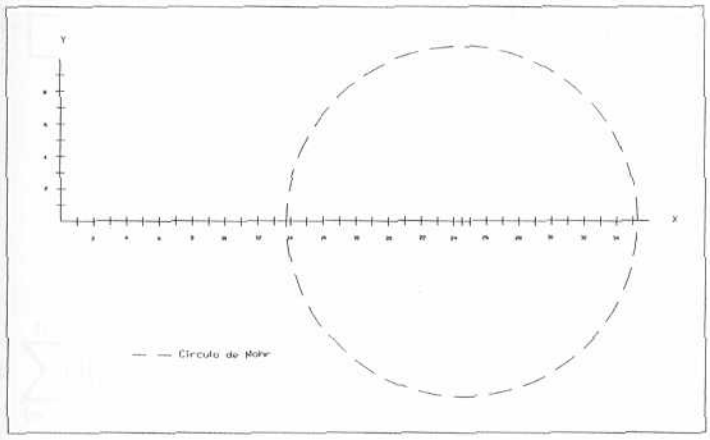


Fig. 5.35 Círculo de Mohr

Planta #14

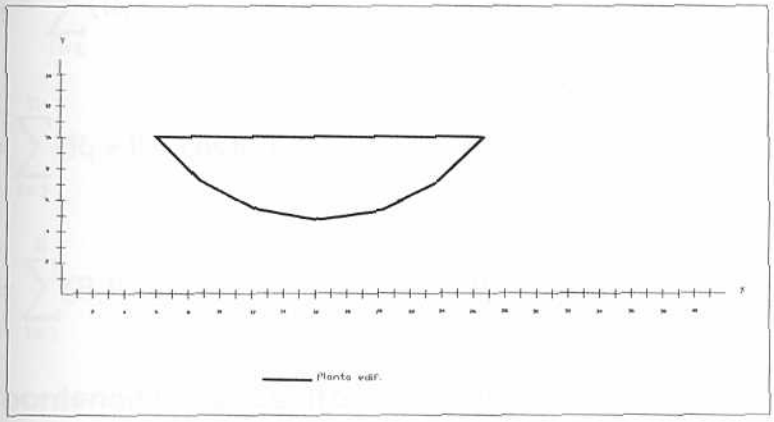


Fig. 5.36Planta 14

DATOS:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	45,00	11,31	4,00	5,04
T2	63,00	10,40	4,00	3,07
T3	81,00	7,23	4,00	2,03
T4	99,00	2,12	4,00	2,03
T5	297,00	4,44	4,00	3,07
T6	315,00	11,80	4,00	5,04
T7	90,00	10,00	20,69	3,21

Tabla 14 Datos de la planta # 14

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 5{,}84$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}R_i \sin 2\omega_i\right) \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n}(R_i \sin \omega_i{}^2) \rightarrow \qquad A_{22} = 38{,}84$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n}(R_i * P_i * \cos \omega_i) \rightarrow \qquad P_1 = 95{,}52$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n}(R_i P_i \sin \omega_i) \rightarrow \qquad P_2 = 263{,}63$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \rightarrow \qquad x_0 = 16{,}34$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \rightarrow \qquad y_0 = 6{,}74$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \rightarrow \qquad \alpha = 0{,}00$$

- **Elipse de Rigidez:**

$$A'_{11} = 38{,}84 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$$
$$A'_{22} = 5{,}84 \quad (semi - eje\ y')$$

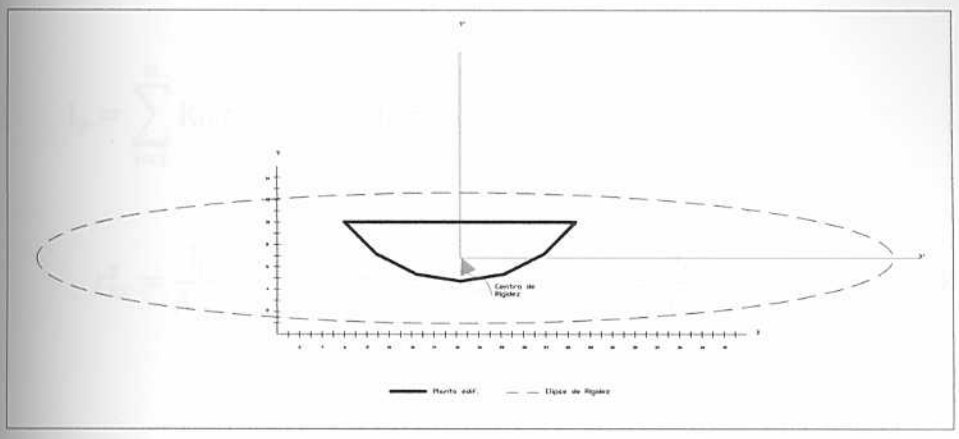


Fig. 5.37 Elipse de rigidez

- **Elipse de Flexibilidad**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}03 \rightarrow 5{,}15 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}17 \rightarrow 34{,}22$$

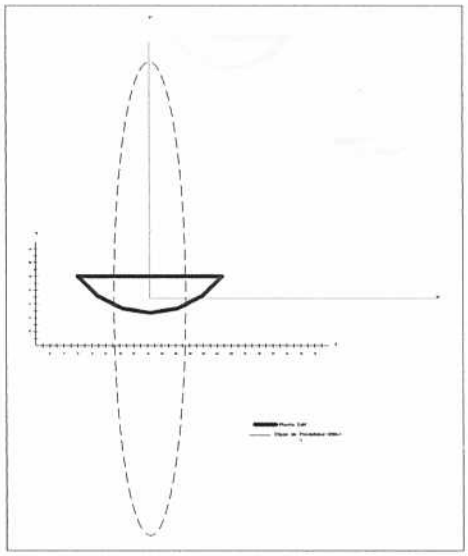


Fig 5.38 Elipse de flexibilidad (200x)

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia):**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 525{,}29$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 13{,}52 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 89{,}87$$

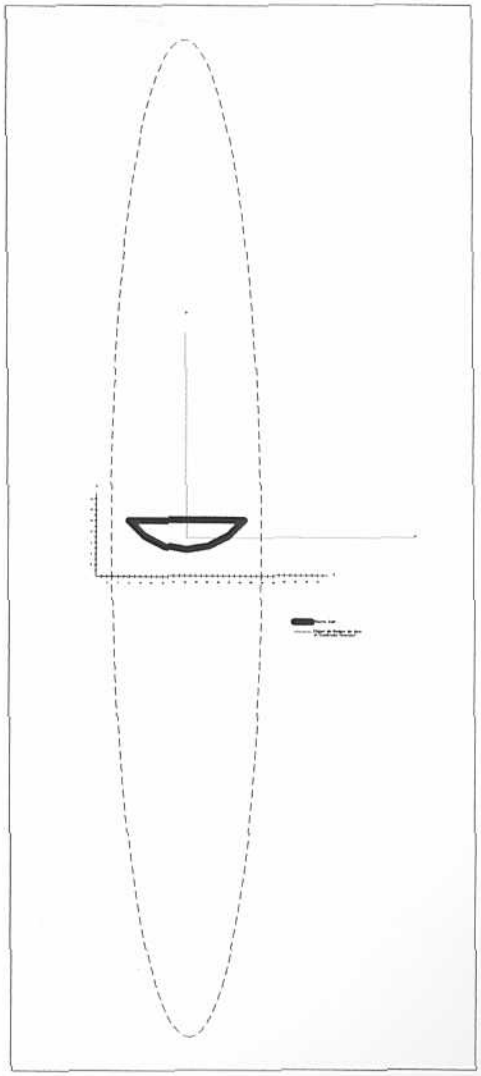


Fig. 5.39 elipse de radios al cuadrado

- **Elipse de Radío de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 3{,}68 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 9{,}48$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{13{,}52} + \frac{y'^2}{89{,}87} = 1$$

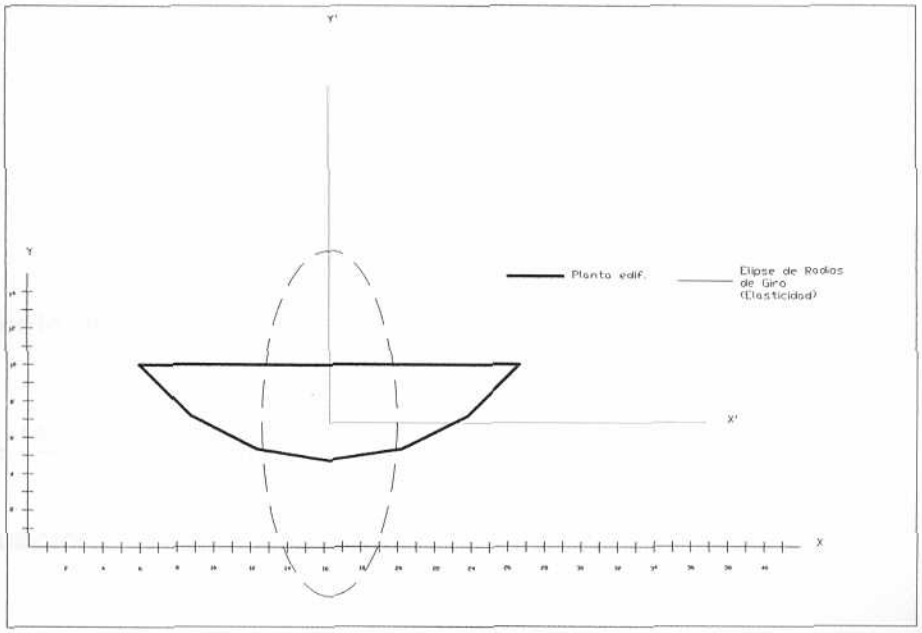


Fig. 5.40 elipse de radios de giro

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 2{,}68 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 17{,}82$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{7{,}19} + \frac{y'^2}{317{,}73} = 1$$

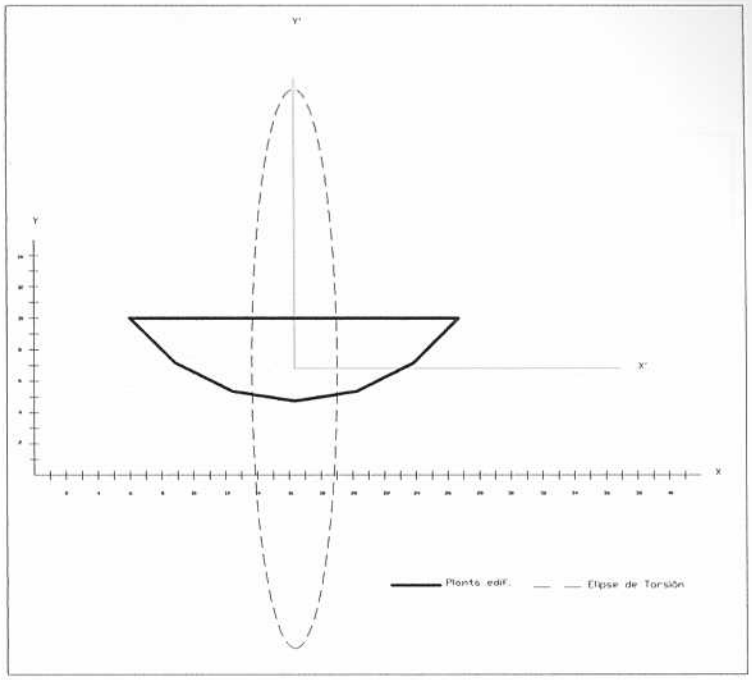


Fig. 5.41 Elipse de Torsión

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11}+A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 22{,}34 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 270{,}20$$

Ecuación:

$$(x - 22{,}34)^2 + y^2 = 270{,}20$$

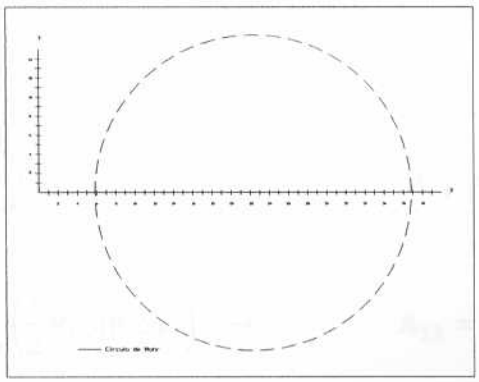


Fig. 5.42 Círculo de Mohr

Planta # 15

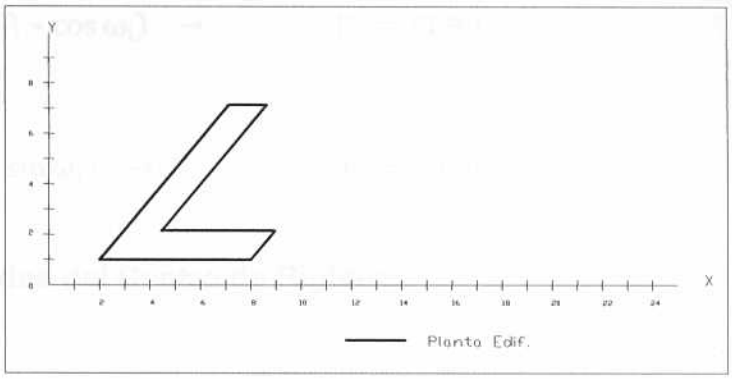


Fig. 5.43 Planta #15

DATOS:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	320	5,49	1,50	3,70
T2	90	2,00	6,00	1,70
T3	320	0,89	8,00	0,90
T4	90	7,13	1,50	4,43
T5	320	2,04	6,50	0,25
T6	90	2,15	4,50	0,55

Tabla 15 Datos de la planta # 15

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 9{,}39$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = -7{,}88$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 18{,}61$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 21{,}90$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 13{,}98$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez**:

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 4{,}60$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 2{,}70$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 29.83$$

- **Elipse de Rigidez:**

$$A'_{11} = 23{,}13 \qquad (\text{semi} - \text{eje } x')$$
$$A'_{22} = 4{,}87 \qquad (semi - eje\ y')$$

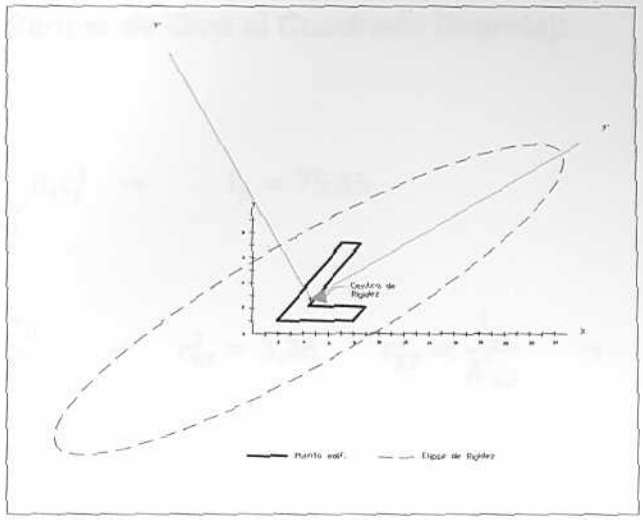


Fig. 5.44 Elipse de rigidez

- **Elipse de Flexibilidad**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}04 \rightarrow 4{,}32 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}21 \rightarrow 20{,}53$$

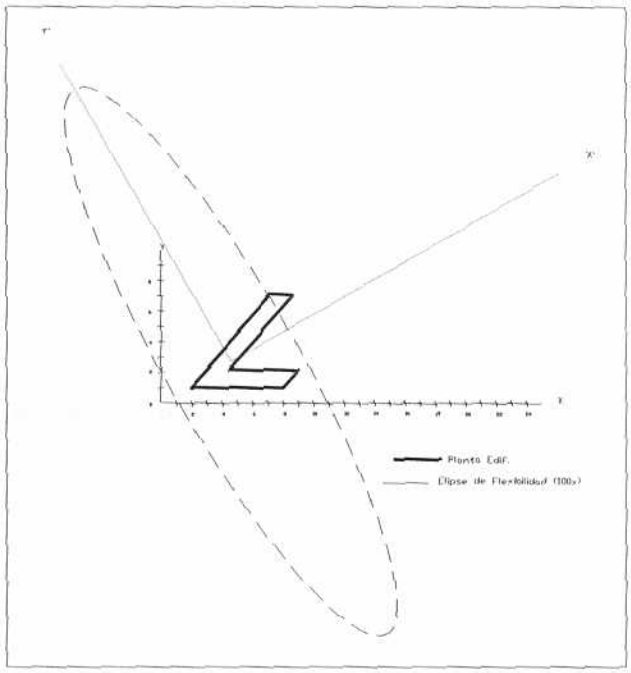


Fig. 5.45 Elipse de flexibilidad (100x)

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia):**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 75{,}46$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 3{,}26 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 15{,}49$$

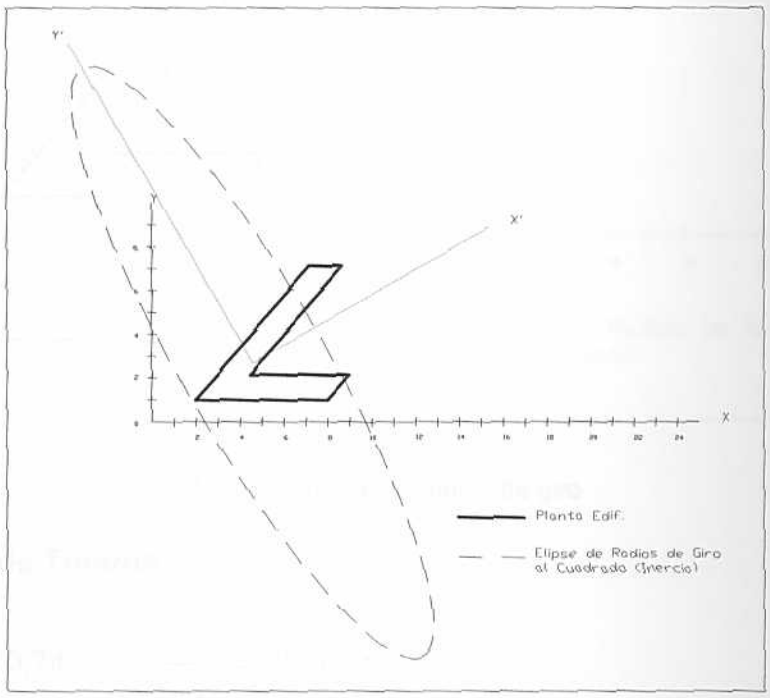


Fig. 5.46 elipse de radios al cuadrado

- **Elipse de Radio de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \quad \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}81 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \quad \rightarrow \quad r_{yy} = 3{,}94$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{3{,}96} + \frac{y'^2}{15{,}49} = 1$$

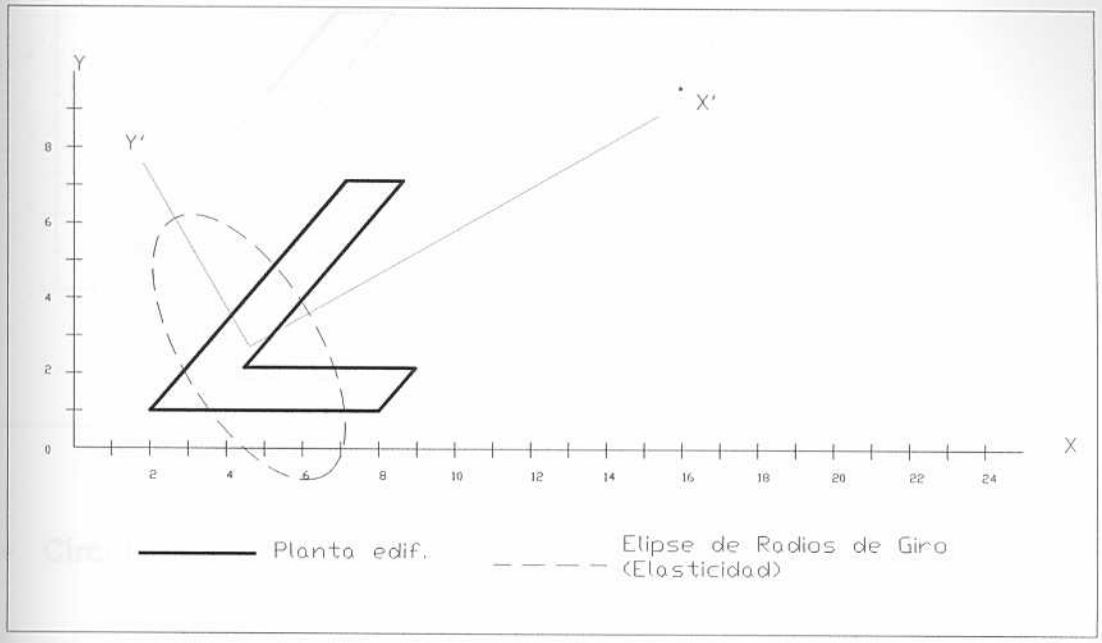


Fig. 5.47 elipse de radios de giro

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 0{,}74 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 15{,}49$$

Ecuación :

$$\frac{x'^2}{0{,}54} + \frac{y'^2}{12{,}22} = 1$$

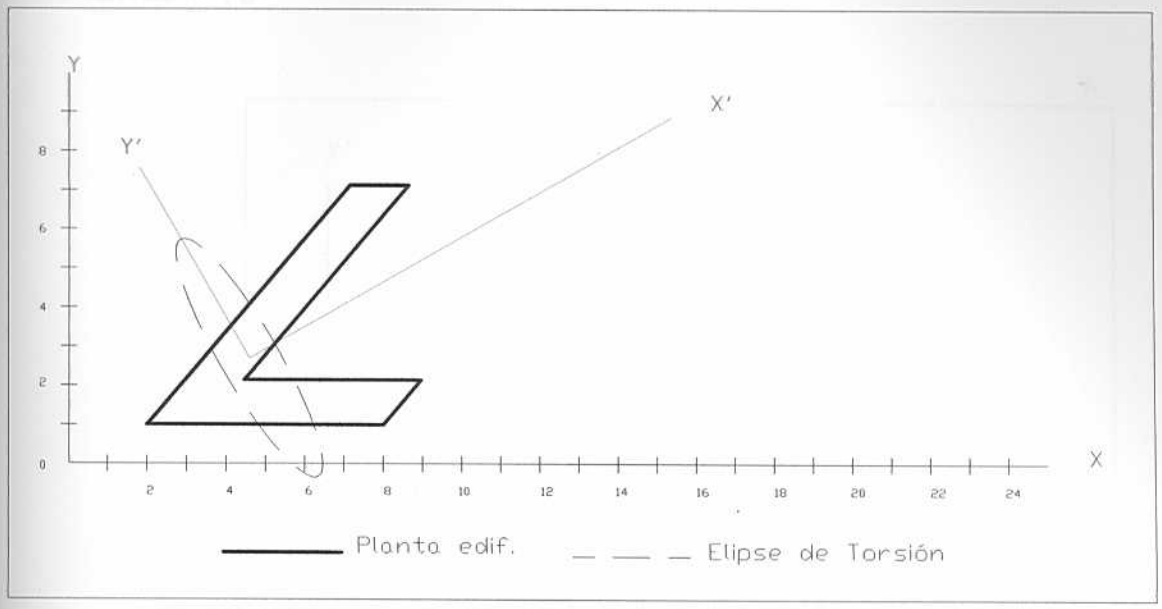


Fig. 5.48 Elipse de Torsión

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11}+A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 14{,}00 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 83{,}33$$

Ecuación:

$$(x-14)^2 + y^2 = 83{,}33$$

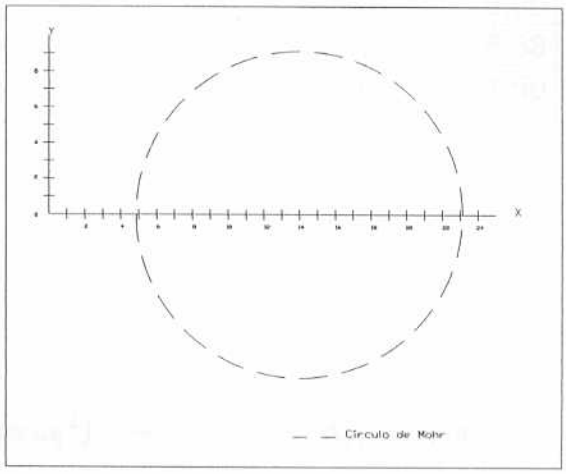


Fig. 5.49 Círculo de Mohr

Planta # 16

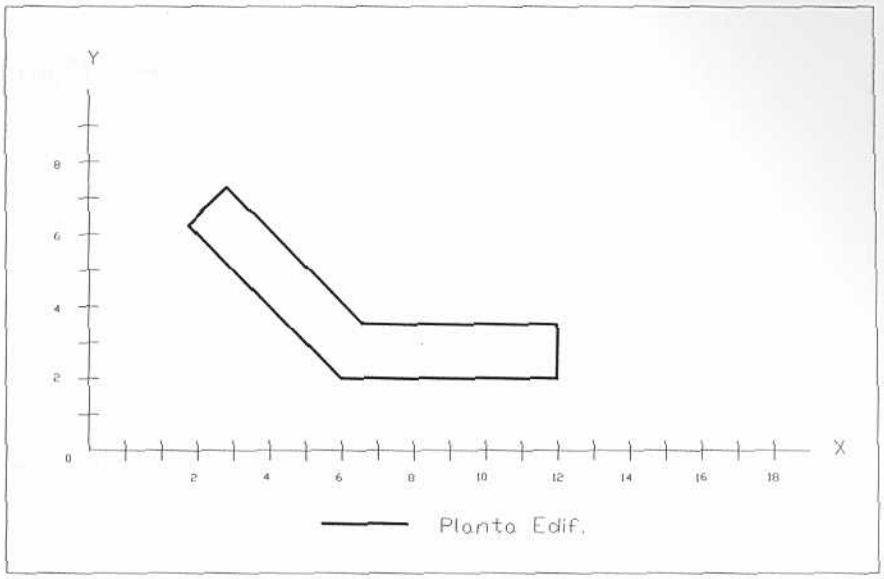


Fig. 5.50 Planta #16

DATOS:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	45	6,36	6,00	1,01
T2	45	7,86	5,38	0,49
T3	90	2,00	6,00	1,01
T4	90	3,50	5,38	0,49
T5	135	2,46	1,50	5,58
T6	0	13,00	1,50	5,58

Tabla 16 Datos de la planta # 16

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 7{,}94$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}R_i \sin 2\omega_i\right) \rightarrow \qquad A_{12} = 4{,}94$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n}(R_i \sin \omega_i{}^2) \rightarrow \qquad A_{22} = 17{,}82$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n}(R_i * P_i * \cos \omega_i) \rightarrow \qquad P_1 = 73{,}80$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n}(R_i P_i \sin \omega_i) \rightarrow \qquad P_2 = 90{,}35$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez**:

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \rightarrow \qquad x_0 = 7{,}42$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \rightarrow \qquad y_0 = 3{,}01$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \rightarrow \qquad \alpha = -22{,}50$$

- **Elipse de Rigidez:**

$$A'_{11} = 19{,}98 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$$
$$A'_{22} = 5{,}89 \quad (semi - eje\ y')$$

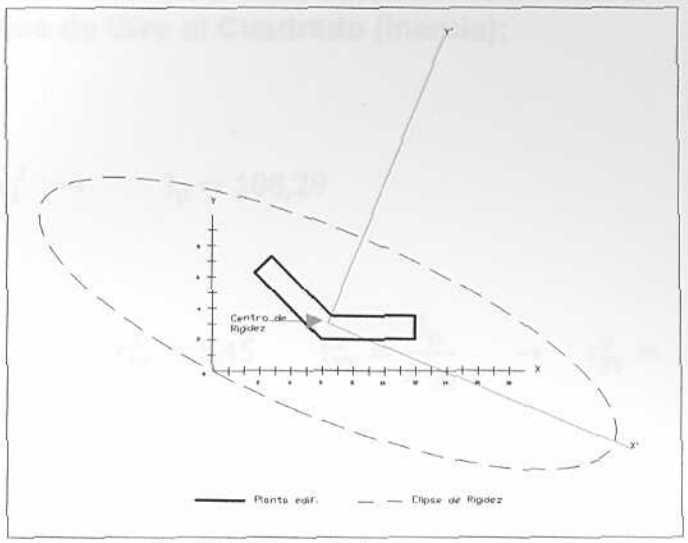


Fig. 5.51 Elipse de rigidez

- **Elipse de Flexibilidad**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}05 \rightarrow 5{,}03 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}17 \rightarrow 16{,}97$$

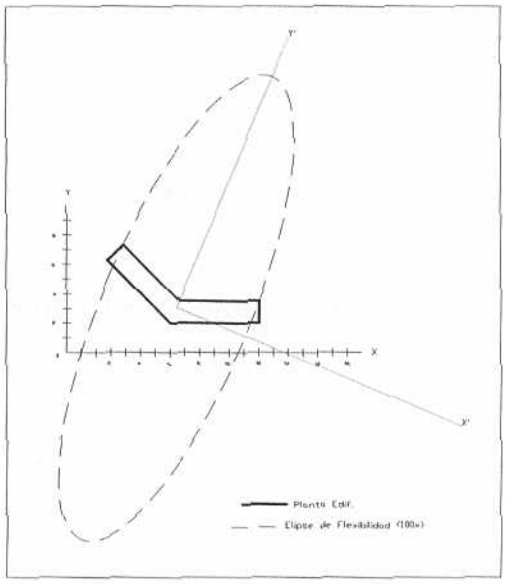


Fig. 5.52 Elipse de flexibilidad (100x)

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia):**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 108{,}29$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 5{,}45 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 18{,}37$$

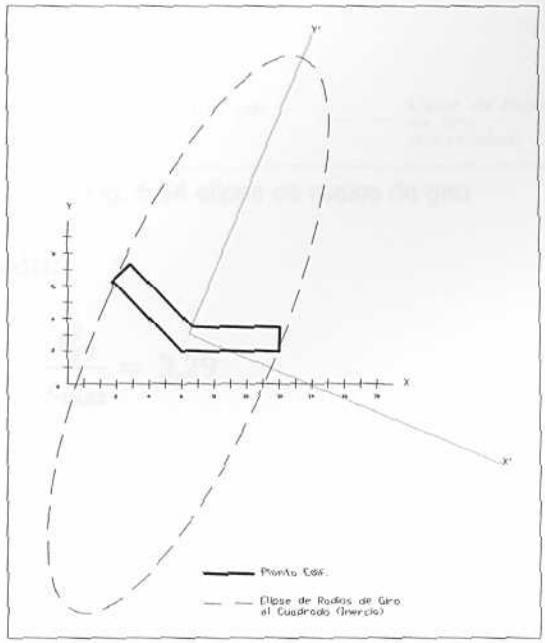


Fig. 5.53 elipse de radios al cuadrado

- **Elipse de Radio de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \quad \rightarrow \quad r_{xx} = 2{,}33 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \quad \rightarrow \quad r_{yy} = 4{,}29$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{5{,}45} + \frac{y'^2}{18{,}37} = 1$$

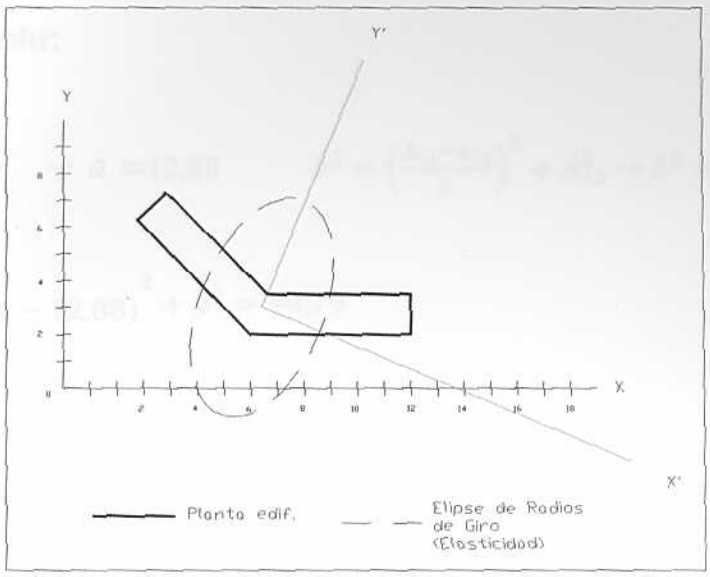


Fig. 5.54 elipse de radios de giro

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 0{,}98 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 3{,}29$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{0{,}95} + \frac{y'^2}{10{,}84} = 1$$

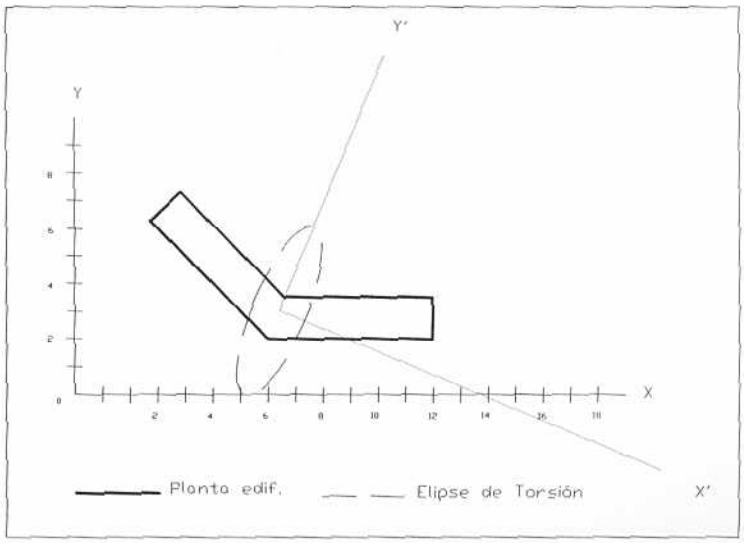


Fig. 5.55 Elipse de Torsión

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11}+A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 12{,}88 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 48{,}79$$

Ecuación:

$$(x - 12{,}88)^2 + y^2 = 48{,}79$$

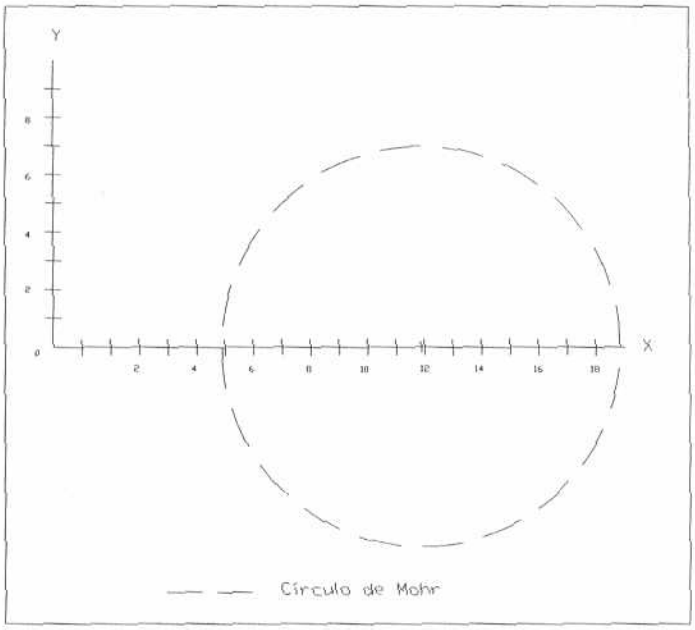


Fig. 5.56 Círculo de Mohr

Planta # 17

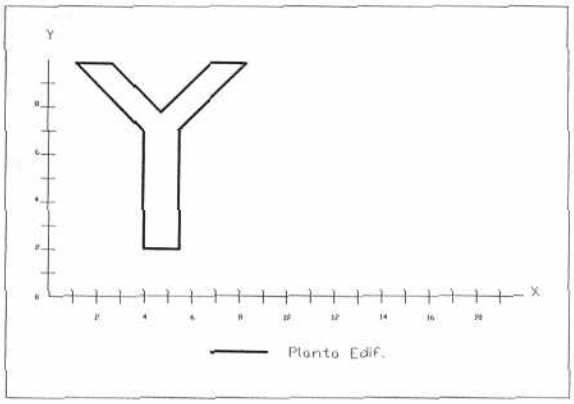


Fig. 5.57Planta #17

DATOS:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	90	2,00	1,50	5,02
T2	0	4,00	5,00	0,60
T3	0	5,50	5,00	0,90
T4	45	7,78	4,00	0,44
T5	135	1,06	4,00	0,65
T6	45	8,84	2,94	0,62
T7	135	2,12	2,94	0,41
t8	90	9,83	1,50	2,81
T9	90	9,83	1,50	2,81

Tabla 16 Datos de la planta # 16

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 16{,}94$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}R_i \sin 2\omega_i\right) \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n}(R_i \sin \omega_i{}^2) \rightarrow \qquad A_{22} = 11{,}44$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n}(R_i * P_i * \cos \omega_i) \rightarrow \qquad P_1 = 80{,}46$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n}(R_i P_i \sin \omega_i) \rightarrow \qquad P_2 = 80{,}26$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez**:

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \rightarrow \qquad x_0 = 4{,}75$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \rightarrow \qquad y_0 = 7{,}02$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \rightarrow \quad \alpha = 0{,}00$$

- **Elipse de Rigidez:**

$$A'_{11} = 11{,}44 \qquad (\text{semi} - \text{eje } x')$$
$$A'_{22} = 16{,}94 \qquad (semi - eje\ y')$$

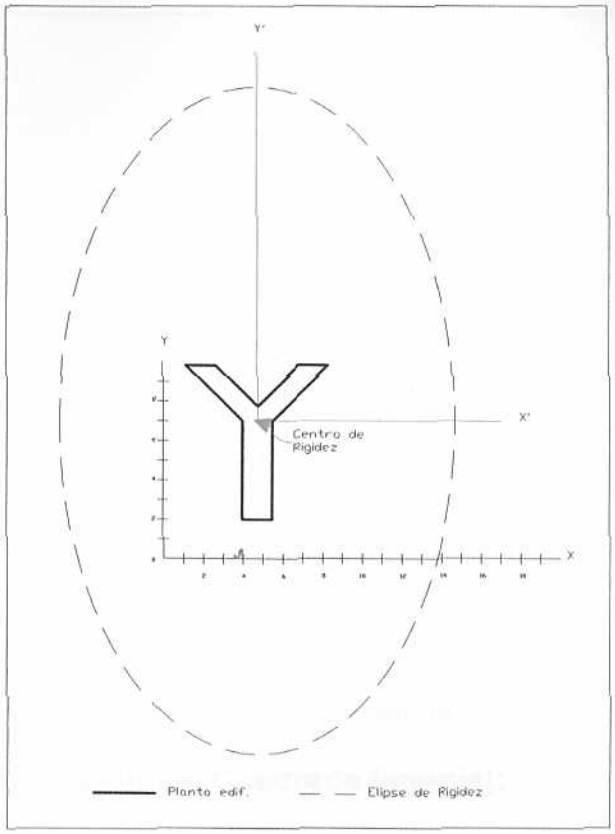


Fig. 5.58 Elipse de rigidez

- **Elipse de Flexibilidad**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}09 \rightarrow 17{,}48 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}06 \rightarrow 11{,}81$$

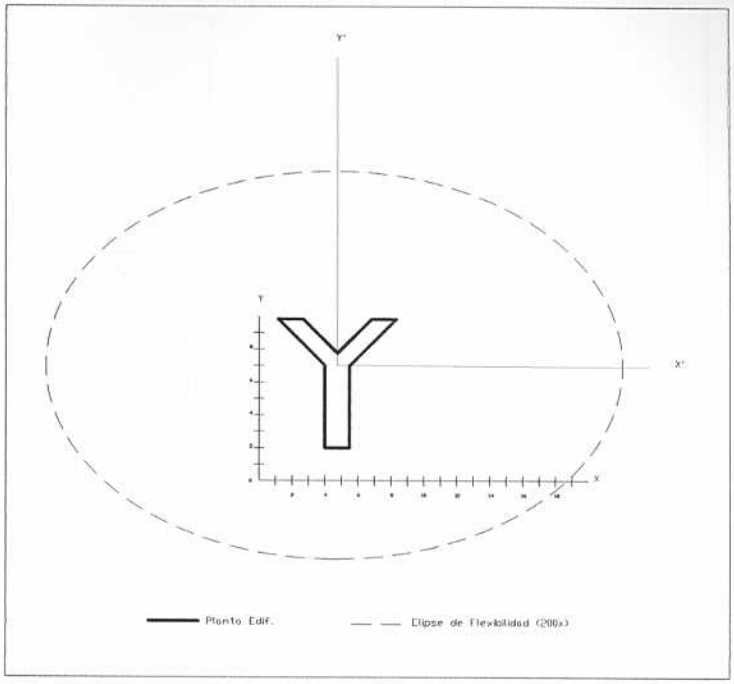


Fig. 5. 59 Elipse de flexibilidad (100x)

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia):**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 71{,}39$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 6{,}24 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 4{,}21$$

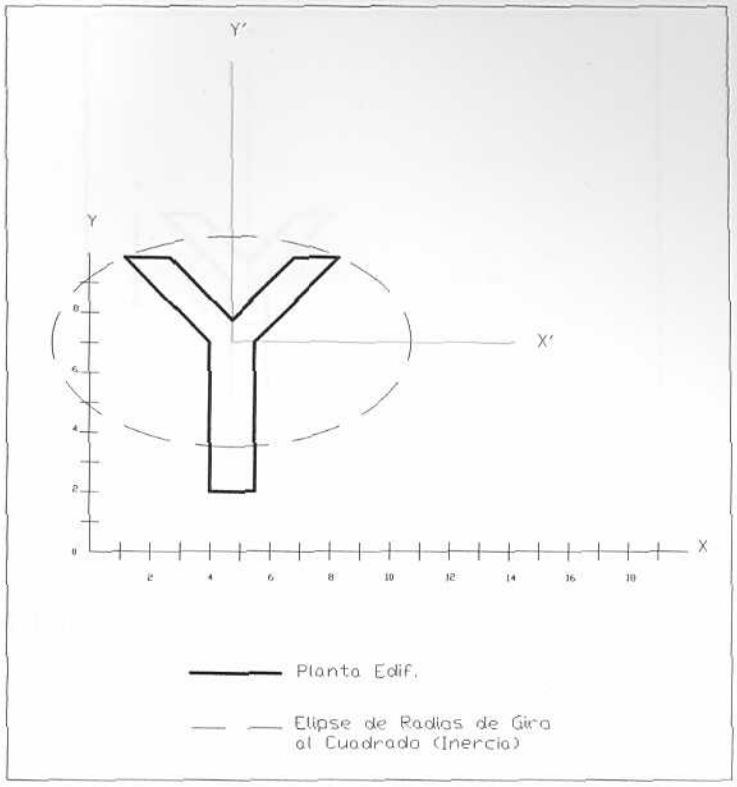


Fig. 5.60 elipse de radios al cuadrado

- **Elipse de Radio de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 2{,}50 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 2{,}05$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{6{,}24} + \frac{y'^2}{4{,}21} = 1$$

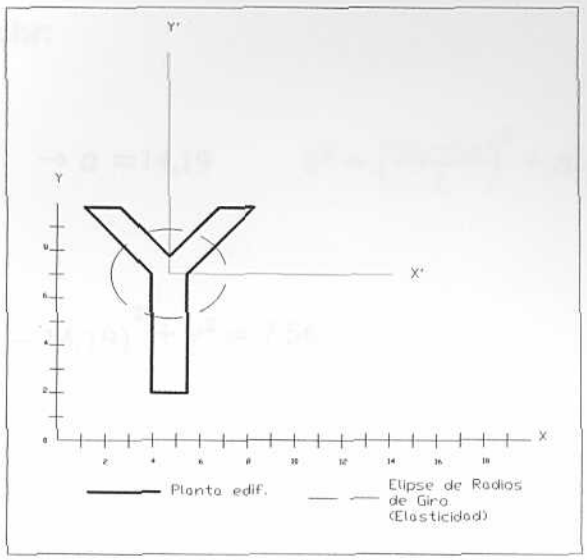


Fig. 5.61 elipse de radios de giro

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 1{,}24 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 0{,}84$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{1{,}53} + \frac{y'^2}{0{,}71} = 1$$

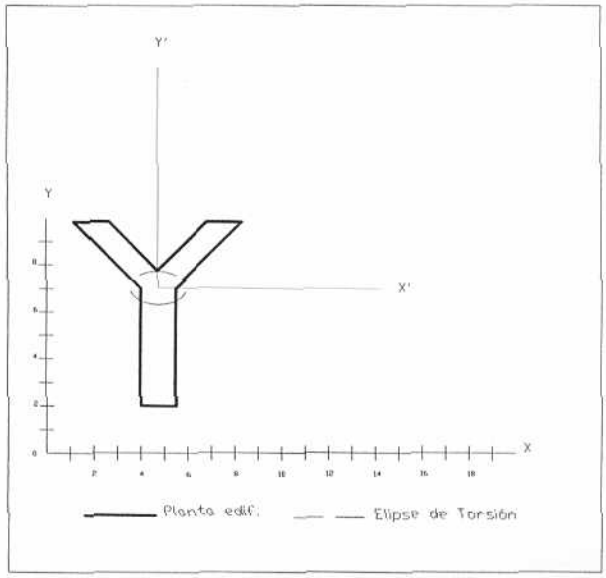


Fig. 5.62 Elipse de Torsión

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11}+A_{22})}{2} \rightarrow a = 14{,}19 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11}-A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \rightarrow b^2 = 7{,}56$$

Ecuación:

$$(x - 14{,}19)^2 + y^2 = 7{,}56$$

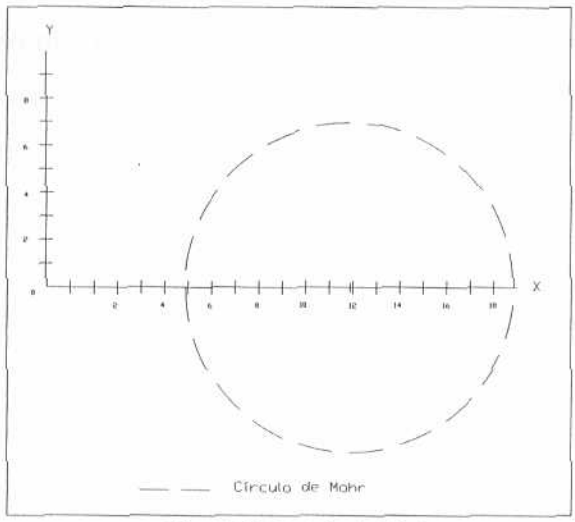


Fig. 5.63 Círculo de Mohr

CAPITULO VI

EJEMPLOS DE PLANTAS CON PÓRTICOS ORTOGONALES INTERNOS

Al igual que en el capítulo anterior se presenta una serie de plantas tipo, en este caso de figuras geométricas conocidas, cuyos pórticos internos a ser estudiados son ortogonales (ver figuras); luego se muestra una serie de datos (ver tablas) de rigidez, distancia "P", ángulo ω, distancia "c" de cada pórtico o traza, asumiendo que la rigidez es proporcional a la longitud del pórtico; se calcularon las rigideces en cada dirección de las coordenadas de referencia adoptadas en los dibujos (R_{xx} = A_{11}; R_{yy}= A_{22}; R_{xy}= A_{12}; R_{yx}= A_{21}) con las fórmulas antes señaladas en el Capítulo II.

A partir de estos valores, se calcularon la posición del Centro de Rigidez y la dirección de uno de los ejes principales de la elipse de rigidez, empleando las ecuaciones del Prof. Hummelgens.

Se realizaron las elipses de rigidez, flexibilidad, radios de giros al cuadrado, radios de giro, torsión, y círculo de Mohr de cada planta; planteándose las ecuaciones de las dos ultimas elipses mencionadas, ya que estas son a escala de planta.

Planta #18:

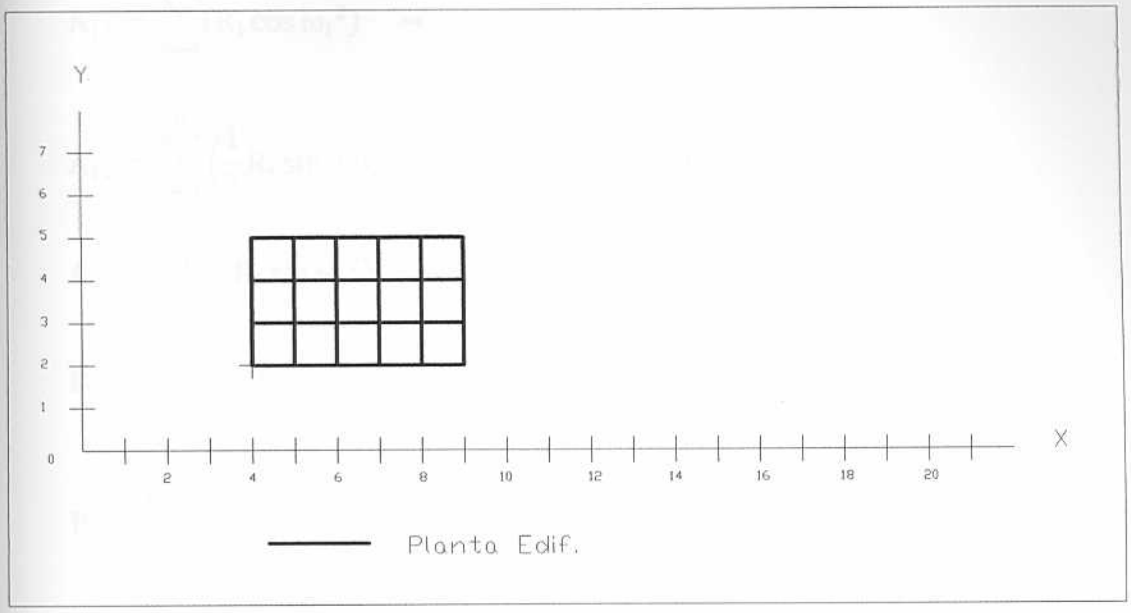


Fig. 6.1 Planta #18

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	0	4,00	3,00	2,50
T2	0	9,00	3,00	2,50
T3	90	2,00	5,00	1,50
T4	90	5,00	5,00	1,50
T5	0	5,00	3,00	1,50
T6	0	6,00	3,00	0,50
T7	0	7,00	3,00	0,50
T8	0	8,00	3,00	1,50
T9	90	3,00	5,00	0,50
T10	90	4,00	5,00	0,50

Tabla 4.3 Datos de la Planta #18

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 18{,}00$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 20{,}00$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 117$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 70{,}00$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 6{,}50$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 3{,}5$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 20{,}00 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22} = 18{,}00 \quad (semi - eje\ y')$

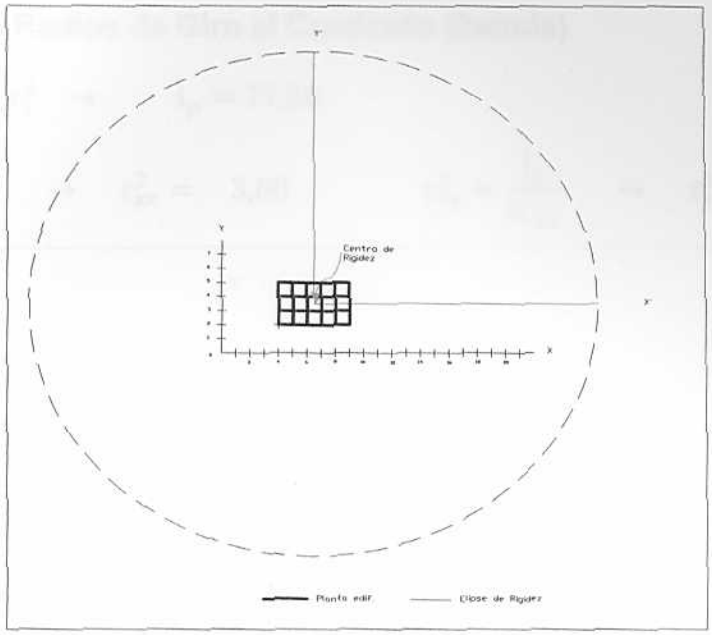


Fig. 6.2 Elipse de Rigidez,

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}05 \rightarrow 15{,}00 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}06 \rightarrow 16{,}67$$

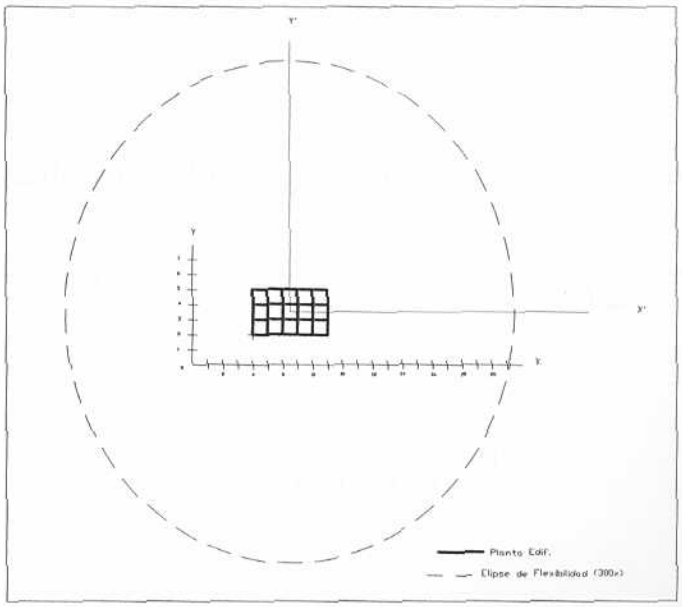


Fig. 6.3 Elipse de Flexibilidad (300X)

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 77{,}50$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 3{,}88 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 4{,}31$$

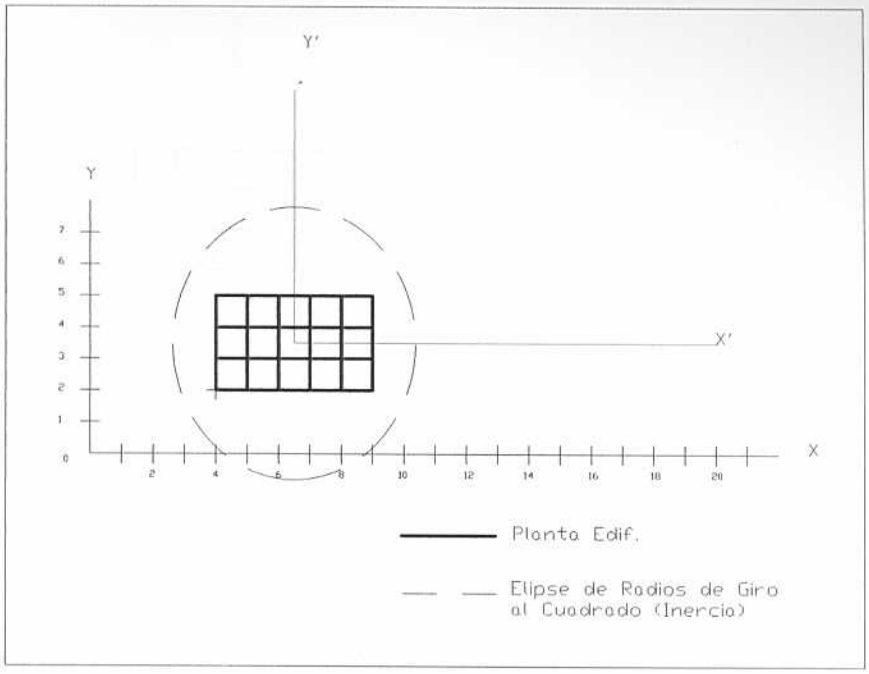


Fig. 6.4 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia).

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \quad \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}97 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \quad \rightarrow \quad r_{yy} = 2{,}07$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{3{,}88} + \frac{y'^2}{4{,}31} = 1$$

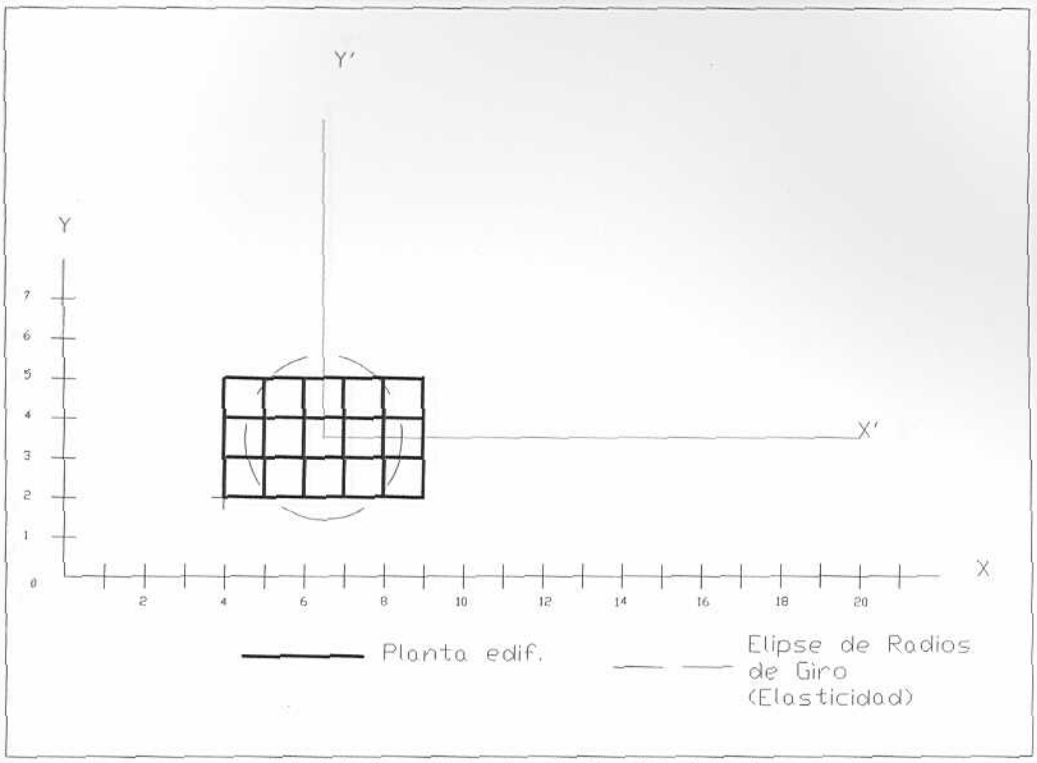


Fig. 6.5 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 1{,}55 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 1{,}72$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{2{,}40} + \frac{y'^2}{2{,}97} = 1$$

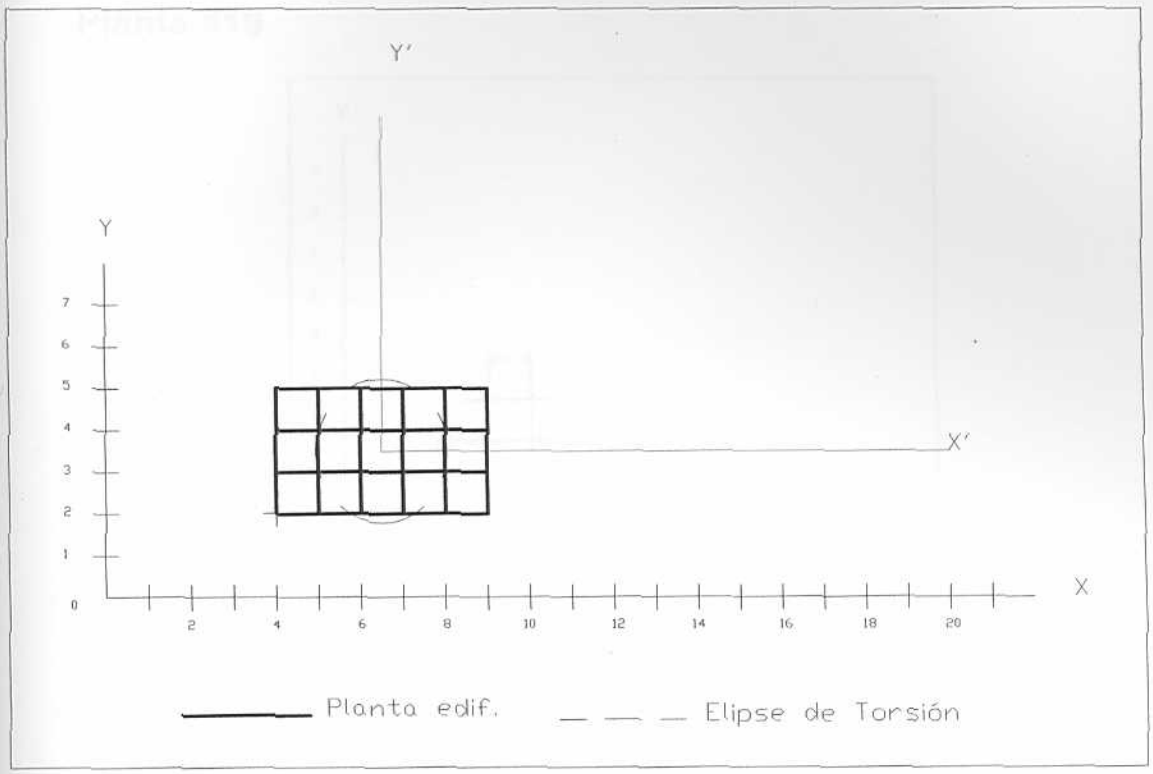


Fig. 6.6 Elipse de Torsión,

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 19{,}00 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \quad \rightarrow b^2 = 1{,}00$$

Ecuación:

$$(x - 19)^2 + y^2 = 1$$

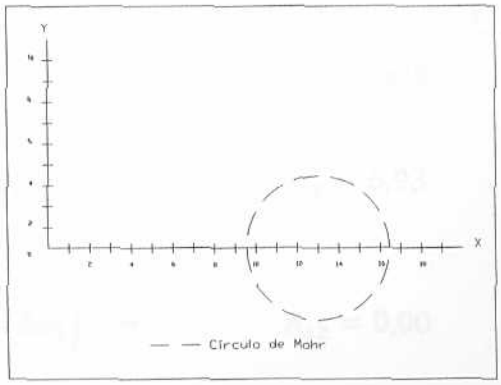


Fig. 6.7 Círculo de Mohr.

Planta #19

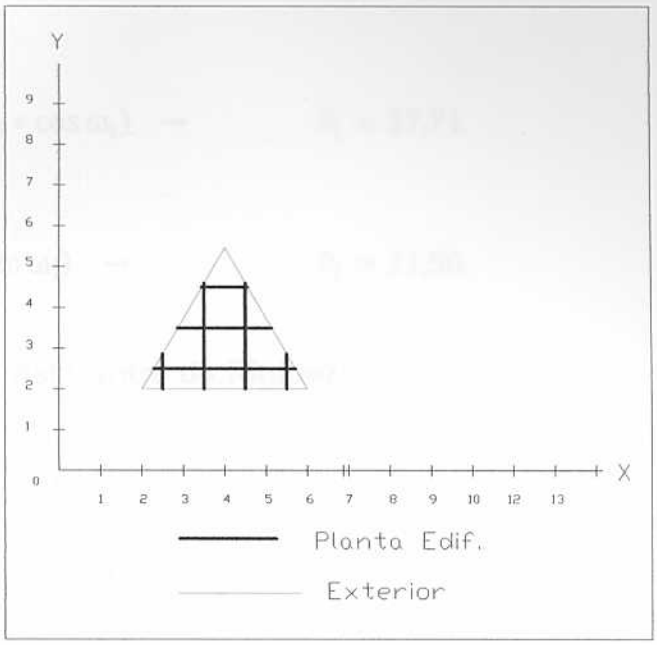


Fig. 6.8 Planta #19

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	0	2,50	0,87	1,50
T2	0	3,50	2,60	0,50
T3	0	4,50	2,60	0,50
T4	0	5,50	0,87	1,50
T5	90	2,50	3,42	0,40
T6	90	3,50	2,27	0,40
T7	90	4,50	1,11	1,60

Tabla 4.3 Datos de la Planta #19

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 6{,}93$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 6{,}80$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 27{,}71$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 21{,}50$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 4{,}00$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 3{,}16$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 6{,}80 \quad (semi - eje\ x')$
$A'_{22} = 6{,}93 \quad (semi - eje\ y')$

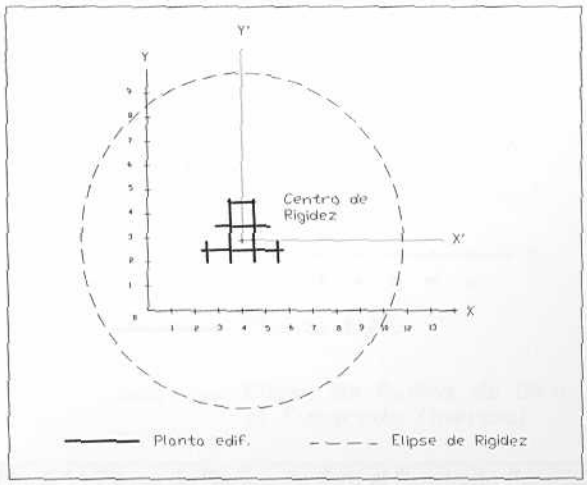


Fig. 6.9 Elipse de Rigidez,

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}15 \rightarrow 7{,}35 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}14 \rightarrow 7{,}22$$

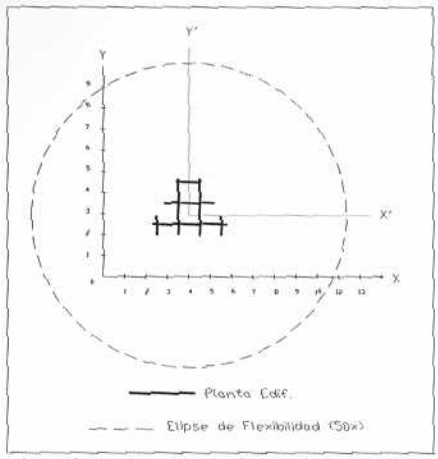


Fig. 6.10 Elipse de Flexibilidad (50x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \rightarrow \qquad I_p = 8{,}95$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \rightarrow r_{xx}^2 = 1.32 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \rightarrow r_{yy}^2 = 1{,}29$$

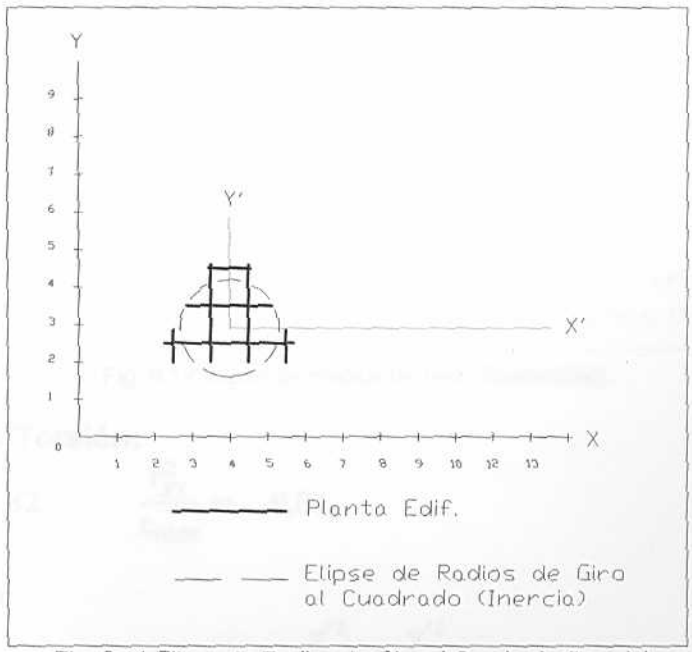


Fig. 6.11 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia).

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}15 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 1{,}14$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{1.32} + \frac{y'^2}{1{,}29} = 1$$

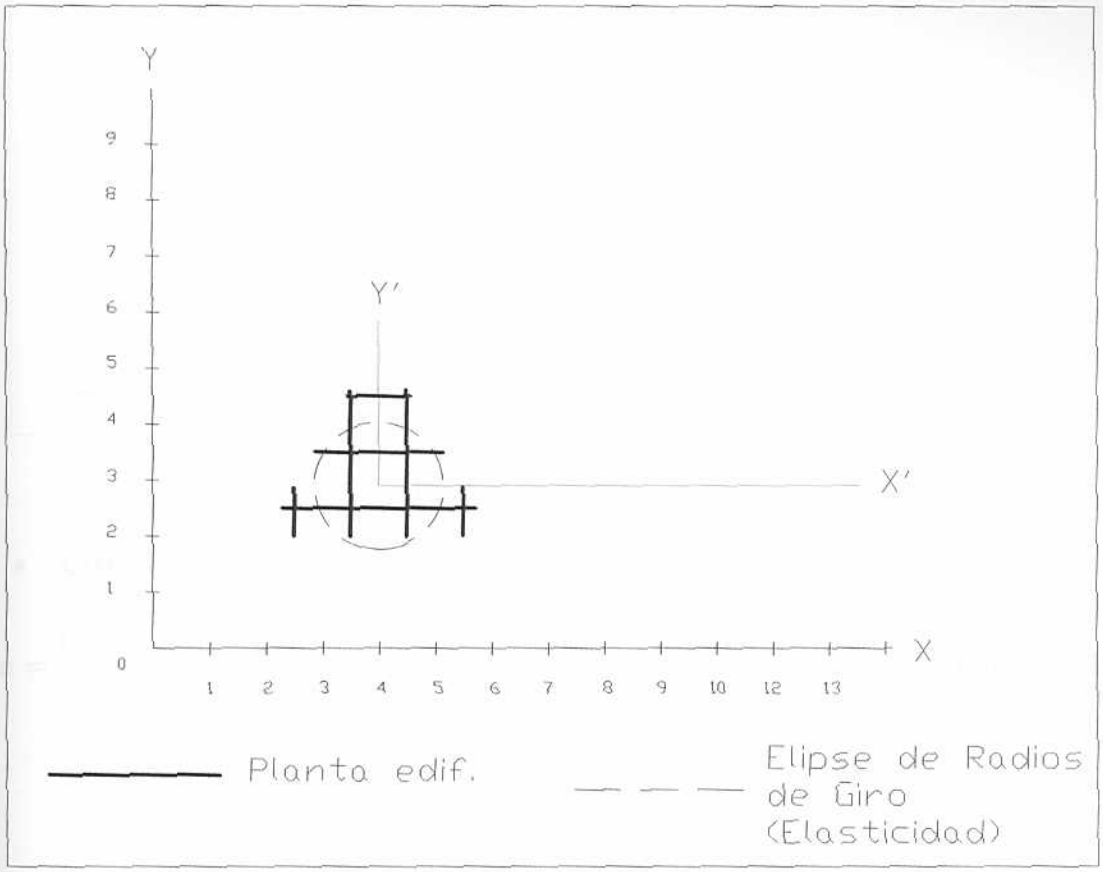


Fig. 6.12 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 0{,}82 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 0{,}81$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{0{,}68} + \frac{y'^2}{0{,}65} = 1$$

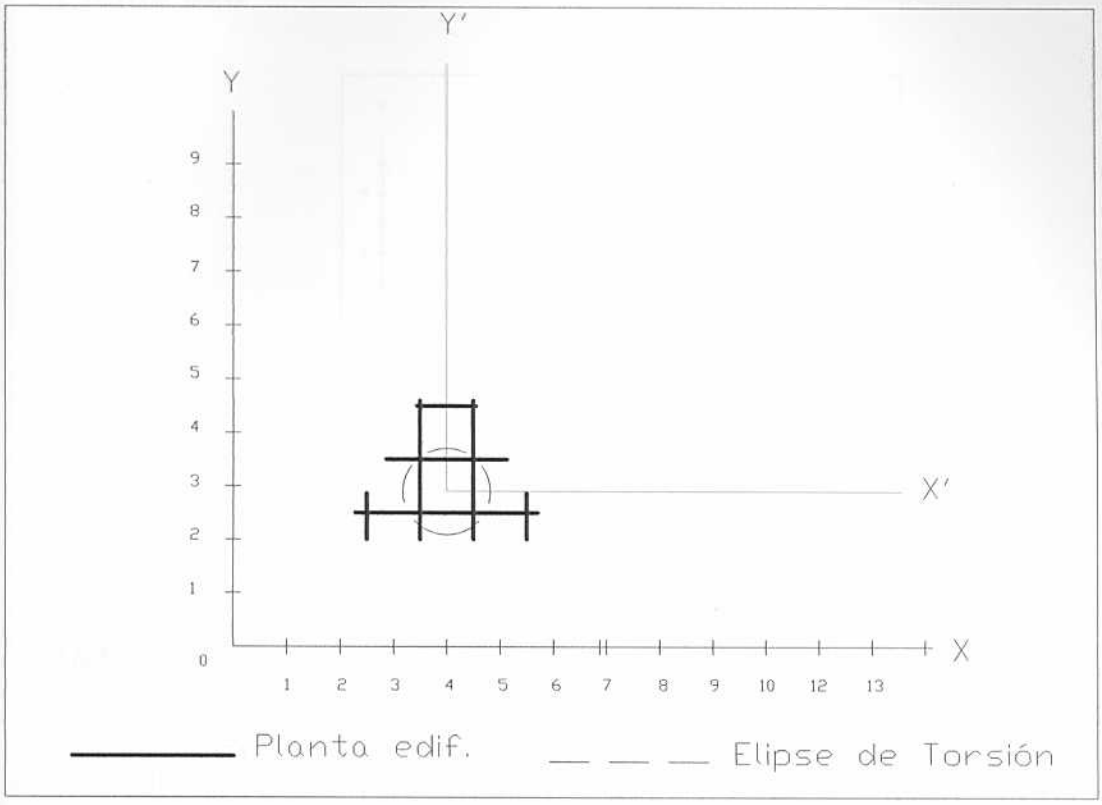


Fig. 6.13 Elipse de Torsión

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 6{,}87 \qquad\qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \quad \rightarrow b^2 = 0{,}00$$

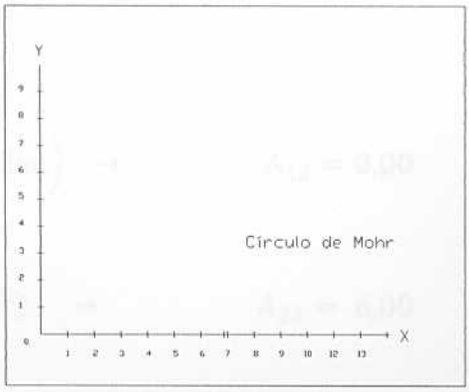


Fig. 6.14 Círculo de Mohr,

Planta #20

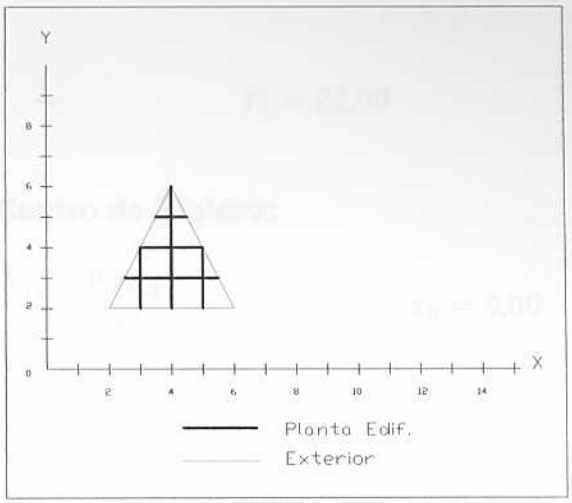


Fig. 6.15 Planta #20

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	0	3	2	1,00
T2	0	4	4	0,00
T3	0	5	2	1,00
T4	90	3	3	0,67
T5	90	4	2	0,33
T6	90	5	1	1,33

Tabla 4.3 Datos de la Planta #20

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 8{,}00$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 6{,}00$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos\omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 32{,}00$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin\omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 22{,}00$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 4{,}00$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 3{,}67$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 6{,}80 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22} = 8{,}00 \quad (semi - eje\ y')$

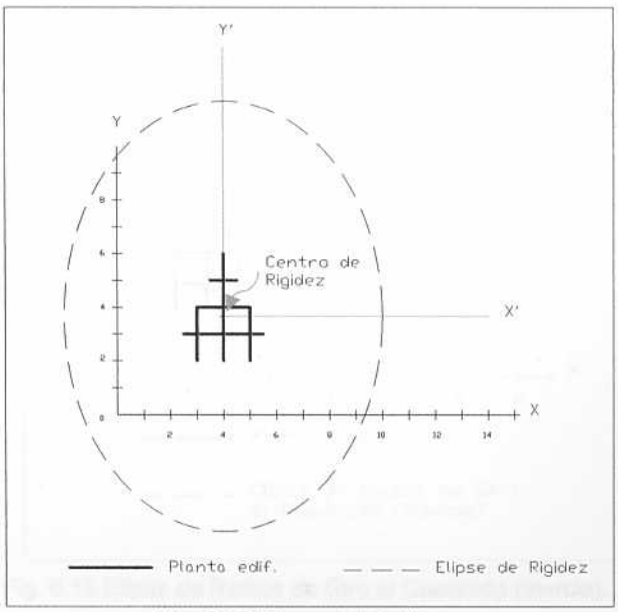


Fig. 6.16 Elipse de Rigidez,

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}17 \rightarrow 8{,}33 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}13 \rightarrow 6{,}25$$

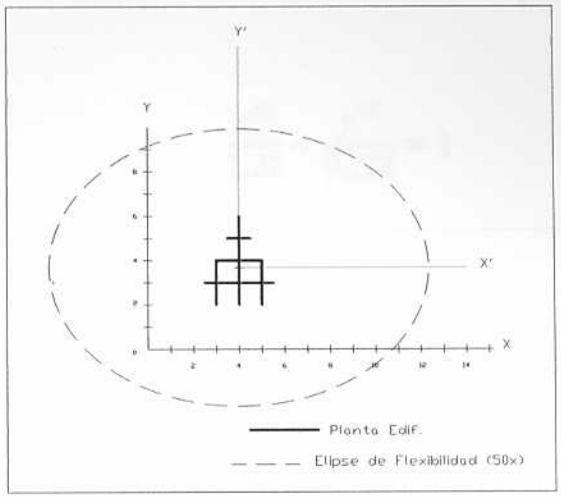


Fig. 6.17 Elipse de Flexibilidad (50x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \rightarrow \qquad I_p = 7{,}33$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \rightarrow \quad r_{xx}^2 = \quad 1.22 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \rightarrow \quad r_{yy}^2 = \quad 0{,}92$$

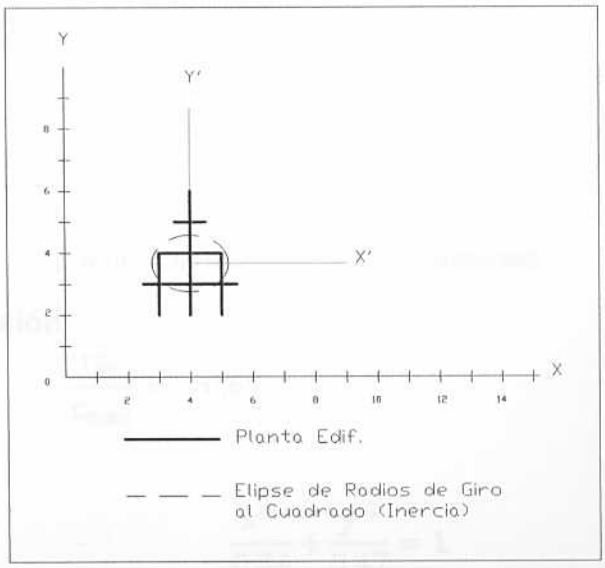


Fig. 6.18 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia).

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}11 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \rightarrow \quad r_{yy} = 0{,}96$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{1.22} + \frac{y'^2}{0,,92} = 1$$

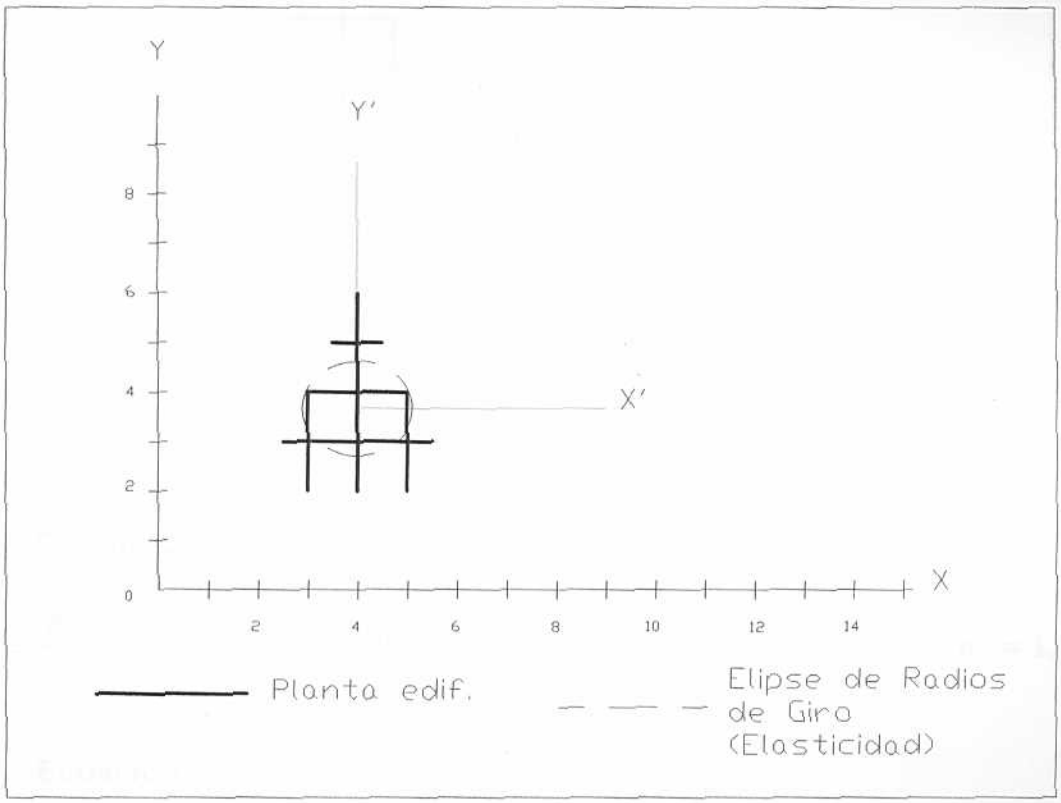


Fig. 6.19 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 0{,}92 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 0{,}69$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{0{,}84} + \frac{y'^2}{0{,}47} = 1$$

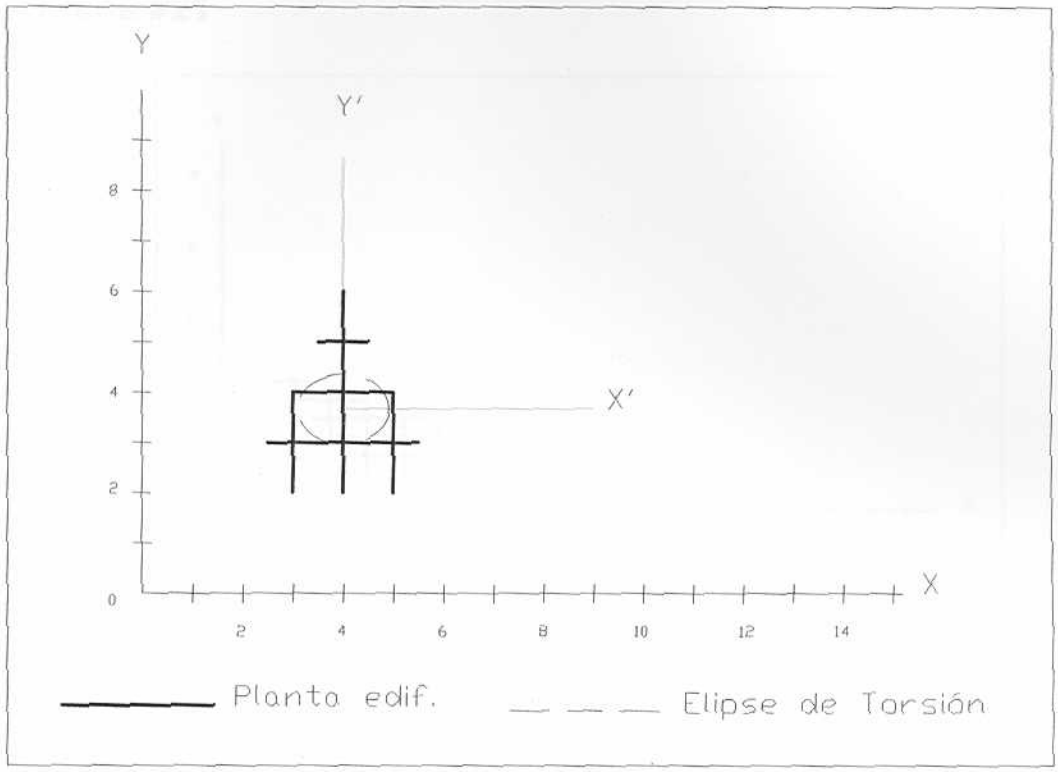


Fig. 6.20 Elipse de Torsión.

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 7{,}00 \qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \quad \rightarrow b^2 = 1{,}00$$

Ecuación:

$$(x-7)^2 + y^2 = 1$$

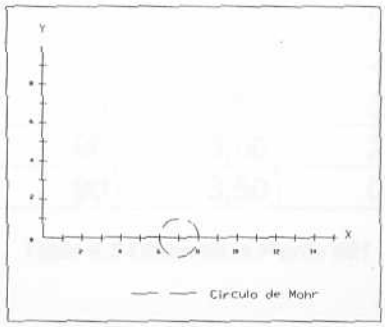


Fig. 6.21 Círculo de Mohr.

Plana #21

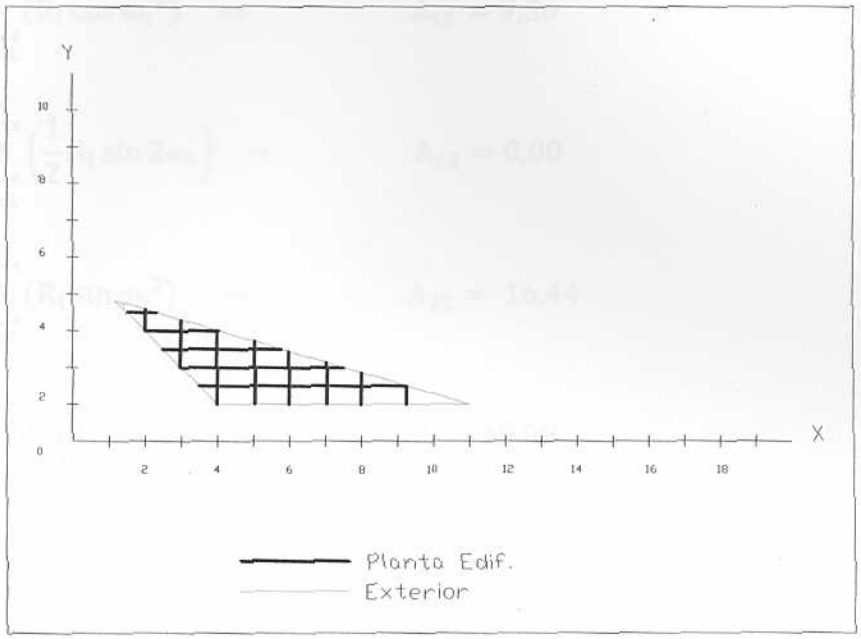


Fig. 6.22 Planta #21

Datos:

TRAZA	ω	P	R	c
T1	0	2,00	0,59	3,23
T2	0	3,00	1,30	2,73
T3	0	4,00	2,01	1,23
T4	0	5,05	1,71	0,18
T5	0	6,00	1,44	0,77
T6	0	7,05	1,14	1,85
T7	0	8,00	0,86	2,77
T8	0	9,26	0,50	4,03
T9	90	1,50	5,76	0,62
T10	90	2,00	4,53	0,12
T11	90	2,50	3,29	0,38
T12	90	3,00	2,05	0,89
T13	90	3,50	0,81	1,38

Tabla 4.3 Datos de la Planta #21

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \cos \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{11} = 9{,}56$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} R_i \sin 2\omega_i\right) \quad \rightarrow \qquad A_{12} = 0{,}00$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n} (R_i \sin \omega_i{}^2) \quad \rightarrow \qquad A_{22} = 16{,}44$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_i * P_i * \cos \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_1 = 49{,}98$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_i P_i \sin \omega_i) \quad \rightarrow \qquad P_2 = 34{,}91$$

- **Coordenadas del Centro de Rigidez:**

$$x_0 = \frac{P_1 A_{22} - P_2 A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad x_0 = 5{,}23$$

$$y_0 = \frac{P_2 A_{11} - P_1 * A_{12}}{A_{11} A_{22} - A_{12}^2} \quad \rightarrow \qquad y_0 = 2{,}12$$

- **Dirección de uno de los ejes principales:**

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}\right) \quad \rightarrow \qquad \alpha = 0$$

- **Elipse de Rigidez:**

$A'_{11} = 16{,}44 \quad (\text{semi} - \text{eje } x')$
$A'_{22} = 9{,}56 \quad (semi - eje\ y')$

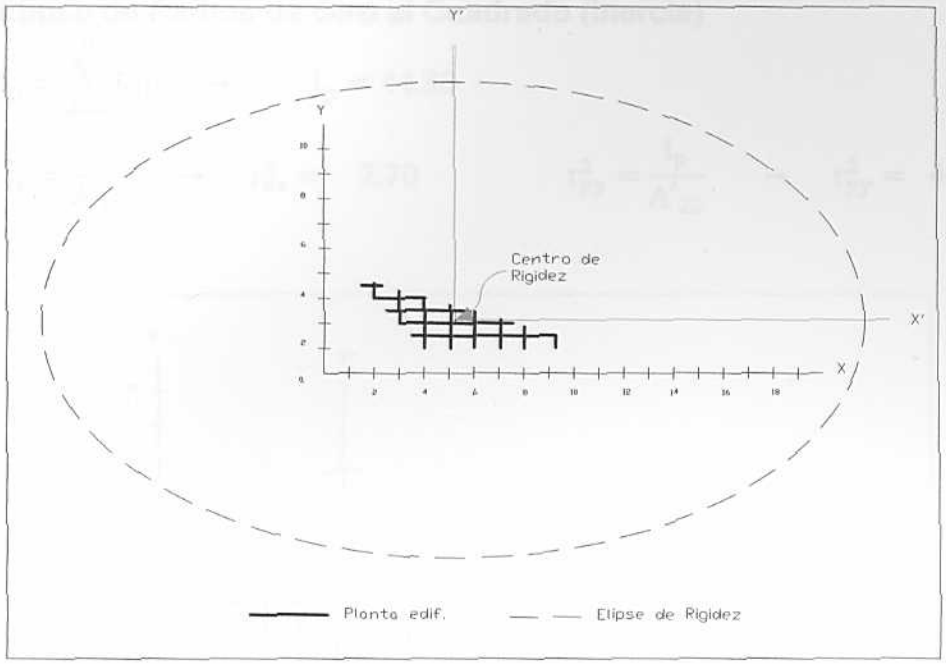


Fig. 6.23 Elipse de Rigidez,

- **Elipse de Flexibilidad:**

$$\frac{1}{A'_{11}} = 0{,}06 \rightarrow 9{,}12 \qquad \frac{1}{A'_{22}} = 0{,}10 \rightarrow 15{,}69$$

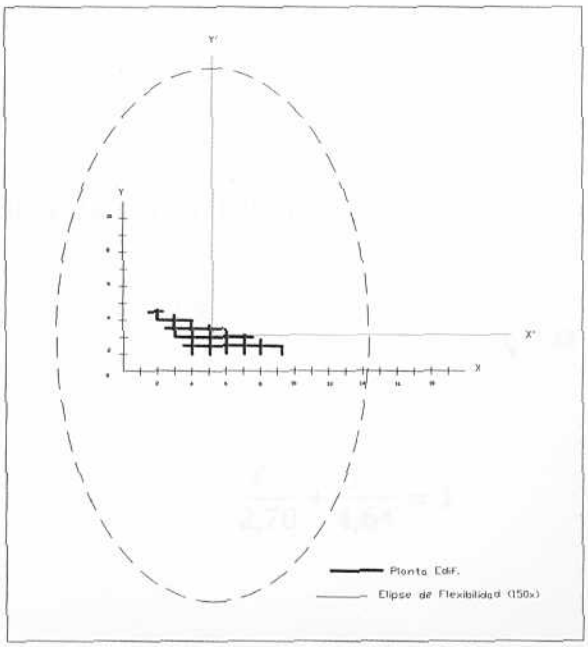


Fig. 6.24 Elipse de Flexibilidad (150x).

- **Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia)**

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} R_i c_i^2 \quad \rightarrow \quad I_p = 44{,}38$$

$$r_{xx}^2 = \frac{I_p}{A'_{11}} \quad \rightarrow \quad r_{xx}^2 = 2{,}70 \qquad r_{yy}^2 = \frac{I_p}{A'_{22}} \quad \rightarrow \quad r_{yy}^2 = 4{,}64$$

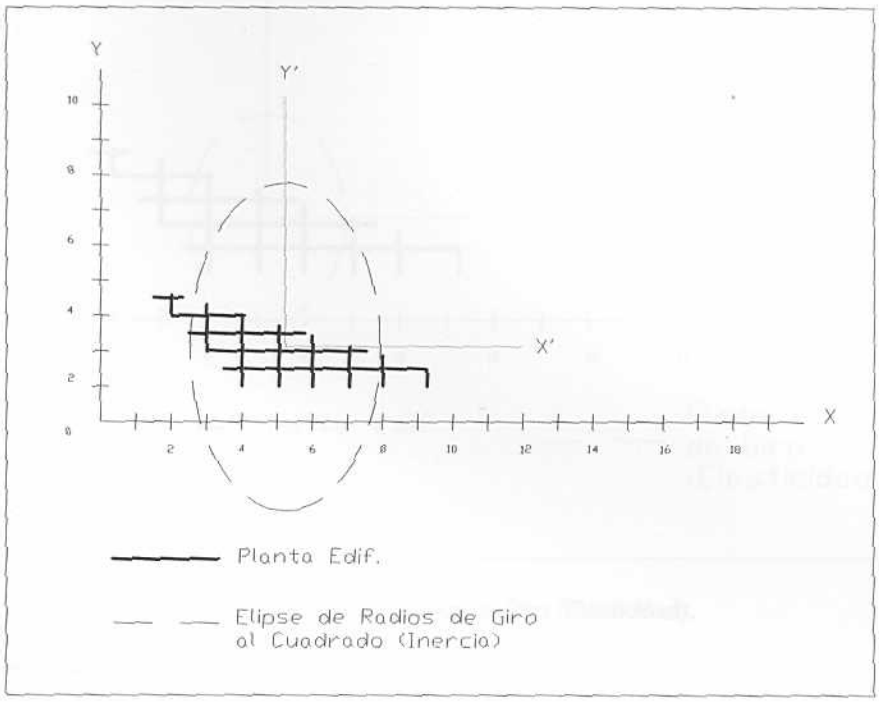


Fig. 6.25 Elipse de Radios de Giro al Cuadrado (Inercia).

- **Elipse de Radios de Giro o Elipse de Elasticidad de Culmann**

$$\sqrt{r_{xx}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{11}}} \quad \rightarrow \quad r_{xx} = 1{,}64 \qquad \sqrt{r_{yy}^2} = \sqrt{\frac{I_p}{A'_{22}}} \quad \rightarrow \quad r_{yy} = 2{,}15$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{2{,}70} + \frac{y'^2}{4{,}64} = 1$$

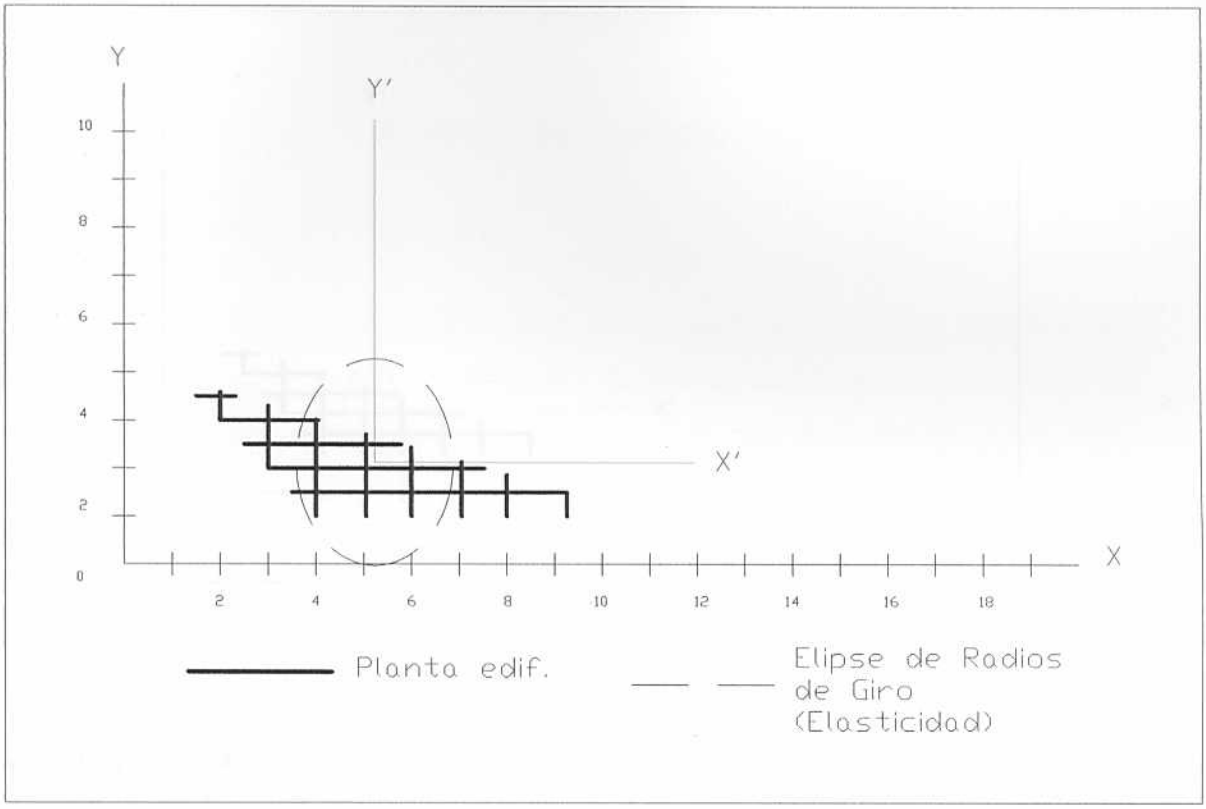


Fig. 6.26 Elipse de Radios de Giro (Elasticidad).

- **Elipse de Torsión:**

$$\frac{r_{xx}^2}{c_{max}} = 0{,}67 \qquad \frac{r_{yy}^2}{c_{max}} = 1{,}15$$

Ecuación:

$$\frac{x'^2}{0{,}45} + \frac{y'^2}{1{,}33} = 1$$

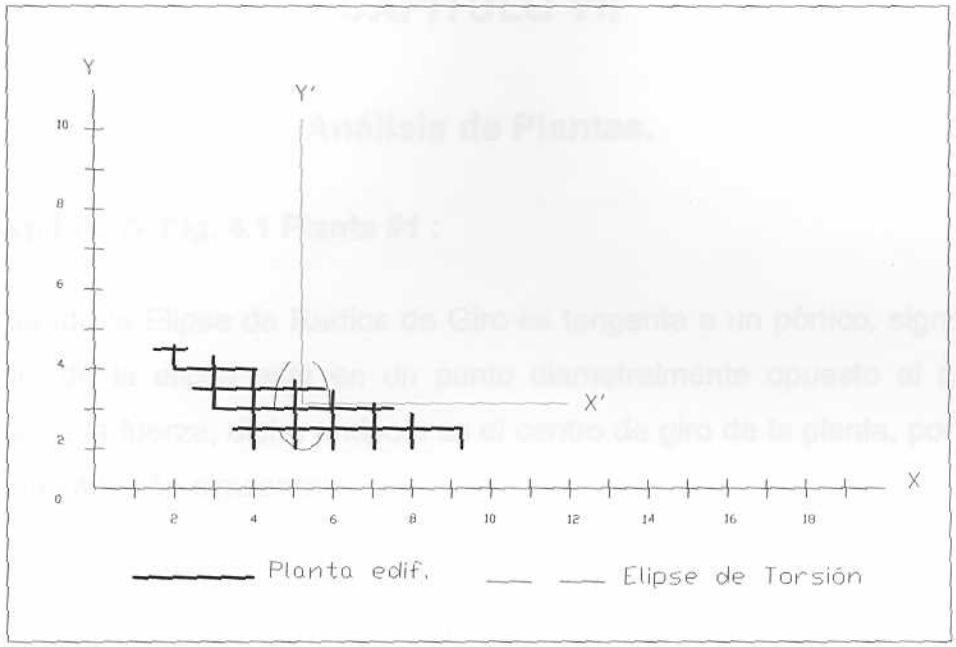


Fig. 6.27Elipse de Torsión,

- **Círculo de Mohr:**

$$a = \frac{(A_{11} + A_{22})}{2} \quad \rightarrow a = 13{,}00 \qquad\qquad b^2 = \left(\frac{A_{11} - A_{22}}{2}\right)^2 + A_{12}^2 \quad \rightarrow b^2 = 11{,}84$$

Ecuación:

$$(x - 13)^2 + y^2 = 11{,}84$$

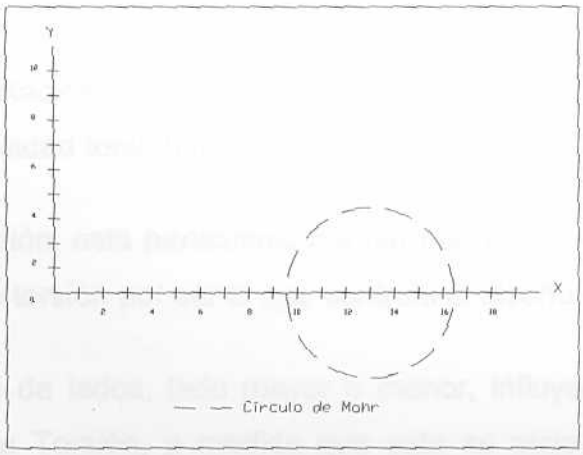


Fig. 6.28 Círculo de Mohr,

CAPITULO VII

Análisis de Plantas.

Capítulo IV Fig. 4.1 Planta #1 :

Cuando la Elipse de Radios de Giro es tangente a un pórtico, significa que el antipolo de la elipse está en un punto diametralmente opuesto al punto de tangencia de la fuerza, dicho antipolo es el centro de giro de la planta, por lo tanto tenemos la situación siguiente:

Todos los pórticos cuyas trazas sean externas, están en una de estas dos situaciones, o se desplazan mas del doble de lo que se desplazaría la planta, si dicha fuerza pasara por el centro de la elipse, o bien tiende a retroceder, lo cual no es favorable para el equilibrio; podemos adoptar esa situación limite como uno de los criterios limitantes de las excentricidades admisibles. A esta elipse se le puede aplicar factores de seguridad arbitrales, debemos admitir entonces que cada planta posee una elipse de radios de giro limite, lo cual es lógico pues ((ro)) , e , c son propiedades geométricas de la planta; las magnitudes de la fuerza aplicada en la planta no inciden en ello .

La elipse de Radios de Giro, convenientemente minorada podría tomarse como criterio de viabilidad torsional para una planta.

Elipse de Torsión, esta particularizada para un pórtico determinado, el más alejado del centro de torsión por ser el que controla el diseño.

La proporción de lados, lado mayor o menor, influyen sobre la Elipse de Radios de Giro y de Torsión, a medida que esta se aleja de un cuadrado las elipses disminuyen.

Esta planta se considera viable por estar dentro de las Elipses de Torsión y Radios de Giro.

Capítulo IV Fig. 4.15 Planta #3:

Las trazas de los pórticos son todas secantes a la elipse lo cual se considera favorable, es decir los centros de giro se encuentran dentro de la elipse.

Capítulo IV Fig. 4.22 Planta #4:

Se puede observar que estas trazas oblicuas no son nada favorables a la conducta torsional de la planta

Capítulo IV Fig. 4.29 Planta #5:

Esto es una planta sumamente favorable, todos los pórticos son internos a las elipses.

Capítulo IV Fig. 4.36 Planta #6:

Las trazas curiosamente son trazas internas por tanto hay factores de amplificación menor a dos

Capítulo IV Fig. 4.43 Planta #7:

Las trazas curiosamente son trazas internas por tanto hay factores de amplificación menor a dos

Capítulo IV Fig. 4.50 Planta #8:

Esta planta es totalmente favorable ya que tiene extrema diferencia de rigideces traslacionales.

Elipse de torsión, tiene enorme diferencia en los ejes, lo cual es desfavorable; para un lado se toma como favorable pero para el otro ocasiona problemas de concentración de fuerza en ciertos pórticos.

Capítulo V Fig. 5.1 Planta #9:

Es una configuración de pórticos muy desfavorable a pesar de que sus trazas son secantes, las elipses de torsión y de radios de giro son muy pequeñas y las rigideces traslacionales son muy diferentes entre si

Capítulo IV Fig. 5.8 Planta #10:

Ésta es muy favorable a pesar de la presencia de pórticos oblicuos

Capítulo IV Fig. 5.15 Planta #11:

Es una planta favorable, todas sus trazas son secantes a la elipse, las dos regideces traslacionales, son muy diferentes entre si , lo cual trae problema.

Capítulo IV Fig. 5.22 Planta #12:

El centro de rigidez se encuentra fuera de la planta, es una planta desfavorable.

Capítulo IV Fig. 5.29 Planta #13:

No todos los pórticos son secantes lo cual hace la planta bastante desfavorable, esos pórticos son castigados con fuerzas torsionales muy fuertes

Capítulo IV Fig. 5.36 Planta #14:

Tiene una enorme diferencia entre las rigideces traslacionales y torsionales

Capítulo IV Fig. 5.43 Planta #15:

Es una planta totalmente desfavorable.

Capítulo IV Fig. 5.50 Planta #16:

Esta planta es desfavorable, tiene pórticos que no son secantes.

Capítulo IV Fig. 5.57 Planta #17:

La elipse a pesar de tener una forma no muy alargada es pequeña y hace que la planta fuera desfavorable, lo que la hace a torsión totalmente inaceptable.

Capítulo VI Fig. 6.1 Planta #18:

A pesar de que la elipse se asemeja a una circunferencia, admite menos excentricidades

Capítulo VI Fig. 6.8 Planta #19:

La rigidez esta en ambas direcciones

Capítulo VI Fig. 6.15 Planta #20:

La presencia en los pórticos internos ayuda a mejorar la planta, aunque no es muy favorable.

Capítulo VI Fig. 6.22 Planta #21

Las excentricidades no deben salirse de los valores de la elipse, esta planta no es tan mala, mejora ya que se colocan pórticos internos ortogonales.

CONCLUSIONES

- ✓ La metodología desarrollada en este trabajo ofrece al proyectista vías de acción con base analítica firme, pues la metodología corriente, de ensayo y error es muy costosa imprecisa y difícil de realizar, ya que no parte de una base teórica firme y clara.

- ✓ Las diferencias de rigideces entre las dos direcciones principales de rigidez de una planta son un factor que no sólo afecta las propiedades traslacionales, también influye fuertemente en el comportamiento a torsión, es por ello que Las plantas analizadas muestran una clara relación entre dichas propiedades, siendo útiles las cinco elipses para su análisis.

- ✓ Únicamente con pórticos externos solo obtendremos los casos óptimos para cada configuración, por ello incluimos algunos pórticos con trazas internas o secantes con fines comparativos

- ✓ La condición de ser o no secante la traza de un pórtico a la elipse de radios de giro, calibra la magnitud de la influencia relativa de la torsión (mayor o menor del 200%) en la conducta de una planta. La elipse torsional es una particularización, para un pórtico dado, de la elipse de radios de giro.

- ✓ Lo mejor para mejorar las plantas irregulares atenuando las influencias indeseables es colocar pórticos ortogonales internos, correctamente proporcionados en sus rigideces, con el objetivo de obtener elipses de rigidez con ejes principales de magnitudes parecidas. En algunos casos, la supresión de pórticos de fachada con curvaturas u orientaciones inconvenientes u orientaciones no ortogonales con la mayoría de los demás pórticos, puede ser una solución para mejorar el comportamiento de una planta.

- ✓ Creemos haber alcanzado el objetivo de hacer entendibles y prácticas las metodologías originalmente publicadas en TEKHNÉ 4, cuyo aparataje matemático asustó a muchos lectores.

- ✓ La metodología y los instrumentos desarrollados en este trabajo especial, aunque sean quizá de difícil descripción escrita y justificación teórica un poco compleja, son sencillos de programar en Excel.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- **GONZALEZ LAMON, Adriana (2004).** T.E.G. "Elaboración de Catalogo de Plantas de Edificios Aporticados con La Posiciones de los Centros de Masas.

- **LAWERENCE, Dennis J.(1972).** "A Catalog of Especial Planes Curves", Editorial Dover . Dover Publications INC. New York.

- **LEHMAN, T. (1992)."** Geometría analítica plana":Editorial Limosa

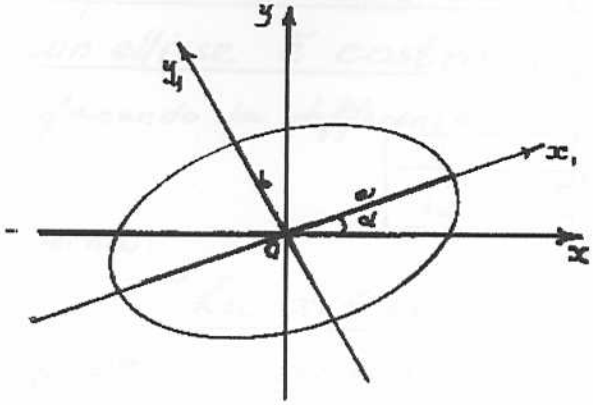
- **PAPARONI, Mario (2007).** Apuntes Manuscritos.

- **PAPARONI M., y P. F. Hummelgens (2000).** "Propiedades Torsionales de una Planta de Edificio. Condiciones de Elasticidad con Pórticos Multidireccionaes. Revista de la Facultad de Ingenieria, Tekhné # 4. Publicaciones UCAB.

APÉNDICE

COMO HALLAR LOS EJES PRINCIPALES DE UNA ELIPSE ROTADA

L'equazione dell'ellisse ad assi ruotati



L'equazione per la rotazione degli assi (v. prec.) è:

$$\begin{cases} x_1 = y \operatorname{sen}\alpha + x\cos\alpha \\ y_1 = y\cos\alpha - x\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

l'equazione dell'ellisse al centro: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

può scriversi:

$$\boxed{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2 = 0}$$

sostituendo: $b^2(y^2\operatorname{sen}^2\alpha + x^2\cos^2\alpha + 2xy\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = b^2x_1^2$

$a^2(y^2\cos^2\alpha + x^2\operatorname{sen}^2\alpha - 2xy\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = a^2y_1^2$

sommando: $\boxed{(a^2\operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)x^2 + (a^2\cos^2\alpha + b^2\operatorname{sen}^2\alpha)y^2 + (b^2-a^2)\operatorname{sen}(2\alpha)xy = a^2b^2}$ (1)

dividendo per a^2b^2 si ha:

$$\boxed{\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2} + \frac{\cos^2\alpha}{a^2}\right)x^2 + \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{a^2}\right)y^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\operatorname{sen}(2\alpha)\,xy = 1} \quad (2)$$

Ricordando che: (vedi eq in coord. polari)

$\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{b^2} + \frac{\cos^2\alpha}{a^2}\right) = \frac{1}{\rho_x^2}$; (ρ_x = semidiametro sull'asse x)

$\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\alpha}{b^2}\right) = \frac{1}{\rho_y^2}$; (ρ_y = semidiametro sull'asse y)

si ha:

$$\boxed{\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} + \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\operatorname{sen}(2\alpha)\right]xy = 1}$$

Attenzione: ρ_x e ρ_y non sono, né possono essere diametri coniugati essendo fra loro perpendicolari.

http://www.itismeucci.it/corradobrogi/II/II-283.htm

sommando: $\boxed{\frac{1}{\rho_x^2} + \frac{1}{\rho_y^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$ si ha una importante relazione: "La somma dei quadrati dei reciproci di due semidiametri ortogonali, in un ellisse è costante"

facendo la differenza:

$$\boxed{\frac{1}{\rho_x^2} - \frac{1}{\rho_y^2} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos(2\alpha)}$$

si ha:

"La differenza dei quadrati dei reciproci di due semidiametri ortogonali, in un ellisse è pari alla differenza dei quadrati dei reciproci dei semidiametri principali moltiplicata per il coseno dell'angolo doppio fra i due sistemi"

Ma dati due semidiametri ortogonali di un ellisse, le due relazioni scritte non sono sufficienti a risolvere il problema perché le incognite sono tre: "a", "b", "α".

Questo problema, di cui abbiamo già fatto cenno, si presenta spesso nei calcoli di matematica applicata, per esempio nel calcolo dell'ellisse d'inerzia, di una figura piana, non simmetrica, (per esempio la sezione ad L), per essa è facile trovare $\rho_{(x)}$ e $\rho_{(y)}$, ma occorre avvalersi dei momenti d'inerzia centrifughi per trovare a, b, α.

Se confrontiamo l'equazione dell'ellisse ad assi ruotati con l'equazione generale delle coniche si ha: $a_{11} = (a^2 \operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)$; $2a_{12} = (b^2 - a^2)\operatorname{sen}(2\alpha)$; $a_{22} = (a^2\cos^2\alpha + b^2\operatorname{sen}^2\alpha)$; $2a_{13} = 0$; $2a_{23} = 0$; $a_{33} = -a^2b^2$.

Nell'equazione dell'ellisse ad assi <u>sole</u> ruotati mancano i termini in x ed y, figura invece: a_{12} in xy.

Si nota che se poniamo $a_{33} = 1$ si ha l'equazione nella forma (2). per cui:

$$\frac{a_{11} + a_{22}}{a_{33}} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad ; \qquad \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33}} = \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos(2\alpha)$$

perciò: $$\frac{2a_{12} \cdot a_{33}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\operatorname{sen}(2\alpha)}{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos(2\alpha)} = \operatorname{tang}(2\alpha).$$

trovato: α ; $\frac{a_{11} - a_{22}}{a_{33}\cos\alpha} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$; $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ era noto, quindi per somma e sottrazione si ricavano i diametri principali dell'ellisse.

DOG BONE

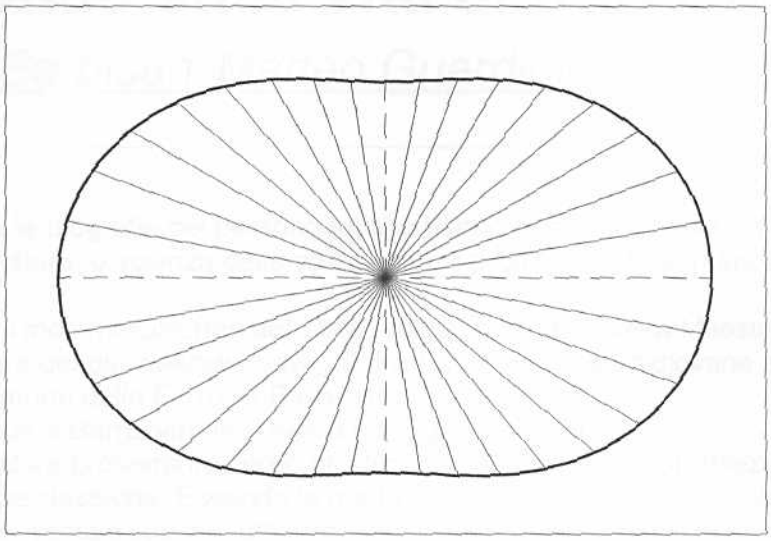


Fig.Dog Bone.

Ref. Elaboración propia

El dibujo presentado está conformado por radio vectores que son las proyecciones de la rigidez en " x" $R_{xx} = A_{11}$, cada 10 grados. Datos tomados de la planta #1 del presente trabajo.

Se puede observar como es la orientación de la Elipse de Rigidez gracias a la rotación de las rigideces en x de cada pórtico en el plano de planta. Coincidiendo los valores máximos y mínimos de las mismas con los semiejes principales de la Elipse.

http://www.tecnologos.it/Articoli/articoli/numero_001b/CULMANN.asp

Riflettendo sulla vita di Karl Culmann,

Umberto Barbisan, Matteo Guardini

Curiosando fra le biografie dei personaggi che hanno costituito l'ossatura portante della teoria delle strutture, o scienza delle costruzioni, il profilo di Culmann appare intrigante e stimolante.
Quando, dopo i moti rivoluzionari del 1848, salì al trono di Baviera Massimiliano II Giuseppe, padre del più celebre Ludwig II, Karl Culmann era un giovane e promettente ingegnere ventenne delle Ferrovie Bavaresi.
Culmann nacque a Bergzbern in Baviera nel luglio del 1821.
Figlio di un pastore protestante, iniziò gli studi con un particolare predilezione per la storia e le lingue classiche. Essendo la madre originaria dell'Alsazia, continuò gli studi a Metz in Francia, presso suo zio, ufficiale dell'esercito francese e docente nella locale scuola d'applicazione dove, a quel tempo, insegnava anche il noto ingegnere Poncelet.
Dopo gli studi a Metz, il giovane Culmann aspirava ad entrare all'Ecole Politecnique di Parigi.
La storia ufficiale racconta che una grave malattia gli impedì di sostenere brillantemente gli esami d'ammissione.
Non manca il sospetto che si sia ritirato per evitare il modesto giudizio ottenuta nella prova di ammissione sostenuta.
Così lasciò la Francia e, diciassettenne, entrò al Politecnico di Karlsruhe, nuovamente in Germania.
A Karlsruhe rimase fino al 1841. All'età di vent'anni ottenne il titolo d'ingegnere ed entrò a far parte della Compagnia delle Ferrovie Bavaresi in un periodo in cui ferveva l'attività di studio e ricerca per il completamento delle linee ferrate alpine.
Lavorando come assistente alla progettazione si occupò soprattutto della costruzione dei ponti ferroviari, uno dei "nuovi problemi" tecnici di quel secolo.
Infatti, con la diffusione della ferrovia e il sempre progressivo aumento della velocità e peso dei convogli, il riferimento all'esperienza storicamente accumulata non era più sufficiente, essendo vertiginosamente aumentati i carichi statici e dinamici.

Indubbiamente Culmann dimostrò elevate capacità se gli ingegneri Denis e Pauli, cui era affidata la direzione della progettazione delle opere delle ferrovie bavaresi, lo scelsero per essere inviato in Inghilterra e poi negli Stati Uniti d'America, per studiare e carpire i segreti dei grandi ponti ferroviari nord-americani.
Culmann passò un anno a Monaco di Baviera per imparare l'inglese e, nella primavera del 1849, salpò alla volta dell'Inghilterra e poi del "Nuovo Mondo".

- Karl Culmann nel 1860 circa.

Viaggiò per due anni in America lasciando un approfondito resoconto di quella sua "magnifica avventura". Studiò tutti i nuovi ponti delle ferrovie statunitensi e conobbe le diverse soluzioni di travi reticolari adottate.
Tornato in Europa diede rapidamente alle stampe il resoconto del suo viaggio, pubblicando il "Der Bau der holzenbrucken in den Vereinigten Staten von Nordamerika", edito a Vienna nel 1851 nella collana degli "Allgemeine Bauzeitung", a cui fece seguito una seconda edizione nell'anno seguente.

Allgemeine Bauzeitung

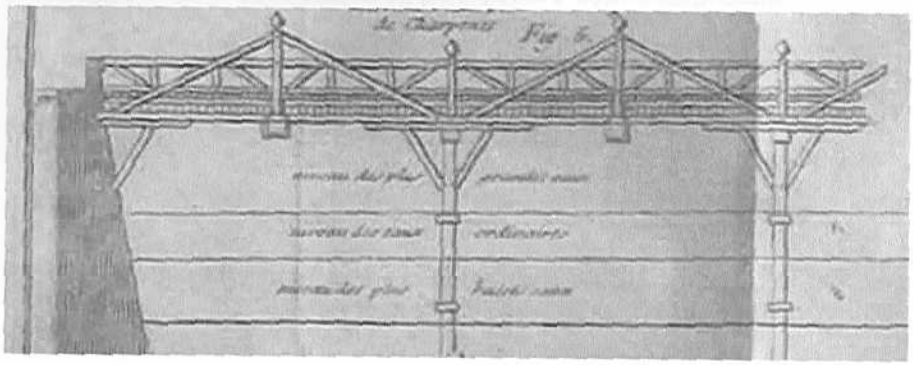
mit Abbildungen.

Prof. Christ. Fried. Ludwig Förster.

- Karl Culmann, frontespizio del "Der Bau der holzenbrucken in den Vereinigten Staten von Nordamerika", Vienna, 1851.
Ripreso il suo lavoro d'ingegnere ferroviario in Baviera, dopo tre anni di progettazione di ponti e consulenza nei cantieri, gli furono offerte, contemporaneamente, due cattedre universitarie, una a Karlsruhe, l'altra al Politecnico di Zurigo.
Accettò la proposta dell'ateneo svizzero; a trentaquattro anni si ritrovò titolare di una prestigiosa cattedra, non disdegnando di continuare la sua opera d'esperto ingegnere.
A Zurigo divenne una specie di consulente speciale per ogni opera ingegneristica di gran complessità sia nel campo delle costruzioni ferroviarie sia in quell'idraulico, rimanendo in contatto con Gauss suo mèntore per il calcolo matematico.
Il Politecnico di Zurigo lo inviò, come delegato scientifico, alle esposizioni universali del 1862, del 1867, del 1873 e del 1878, con il preciso scopo di analizzare e studiare i risultati della tecnica in quegli anni.
Culmann divenne cittadino onorario di Zurigo nel 1868 dopo aver rifiutato una cattedra all'Università di Monaco di Baviera. Sui motivi di questo rifiuto la storia, allo stato attuale delle ricerche, non racconta molto.

Nel 1880 ottenne la laurea ad honorem in filosofia dall'ateneo zurighese.
L'anno precedente aveva compiuto un viaggio in Romania chiamato dal governo rumeno in qualità di consulente per le grandi opere pubbliche di Bucarest.
Fece ritorno in Romania nel 1881, spingendosi poi fino a Costantinopoli dove studiò le cupole della gran moschea di Santa Sofia.
Quest'ultimo viaggio, però, gli fu fatale; contrasse una grave malattia che lo portò alla morte nel dicembre del 1881.
Culmann, divenuto docente all'Università di Zurigo, è passato alla storia come fondatore della statica grafica, in particolare per i metodi di calcolo delle travi reticolari, e la sua fortuna, le sue riflessioni, le sue migliori conoscenze, iniziarono proprio con quel viaggio negli Stati Uniti.
Il problema dei ponti fu uno dei principali impulsi per la ricerca teorica di quegli anni, i cui fondamenti scientifici, però, devono molto al pragmatismo nordamericano.
La storia racconta che il primi ponti reticolari furono disegnati nel Cinquecento da Andrea Palladio nel suo celebre trattato "I quattro libri dell'architettura", edito a Venezia nel 1570.
Plausibilmente Palladio disegnò una serie di ponti simili a quelli che già esistevano fra le Alpi.
I carpentieri svizzeri, austriaci e bavaresi da secoli avevano imparato il segreto per superare fiumi e scoscese gole costruendo con travi di legno complessi intrecci di aste.
Poi, nel Settecento, il carpentiere svizzero Grubermann raggiunse gli allora limiti massimi per le strutture in legno, realizzando ponti da sessanta metri di luce.
Nel frattempo il trattato del Palladio fu tradotto in inglese nel 1716 e, tramite i coloni britannici, giunse nei futuri Stati Uniti d'America, rappresentando, per il Nord America, un fondamentale riferimento nell'architettura.
Inoltre al trattato di Palladio si rivolsero i coloni quando dovettero iniziare a costruire ponti in legno.
Il Ponte su fiume Witham a Boston, realizzato nel 1742, assomigliava, infatti, molto ad uno di quelli progettati dal Palladio; le proposte dell'ingegner Price erano molto simili alle travate reticolari del Palladio e del tutto simile al progetto di ponte reticolare ad arco del Palladio è il Ponte progettato da Flicroft sul lago Virginia o quello di Washington del 1796.
Le successive necessità di attraversare il Nord America con il treno perfezionò l'arte di costruire queste affascinanti strutture, incentivando la ricerca teoriche per determinare i procedimenti di calcolo.
Il resoconto che Culmann redige al termine del suo viaggio, "Der Bau der holzenbrucken in den Vereinigten Staten von Nordamerika" (Vienna,1851 e 1852) mette chiaramente in evidenza i suoi interessi in tal senso.
Infatti, Culmann tratta le questioni inerenti alla realizzazione dei nodi delle reticolari in legno ed ai procedimenti di calcolo.
Nel caso dei ponti americani in legno, Culman compara i carichi di rottura adottati nei procedimenti di calcolo dei ponti statunitensi con quelli europei, concludendo che nel "Nuovo Mondo" il materiale "è sfruttato in modo sconsiderato".
Durante il viaggio negli Stati Uniti, Culmann ebbe modo di conoscere l'opera teorica di Long, ufficiale del genio, e di visitare i ponti di Squire Whipple.
Teoricamente la paternità della prima metodologia di calcolo delle reticolari spetterebbe proprio a Whipple che, nel 1847, pubblicò un trattatello, "An Essay on Bridge Building" (Utica, New York), in cui l'autore affronta l'analisi statica delle reticolari attraverso la

scomposizione analitica delle forze.
Al trattato di Whipple fa seguito quello di Hermann Haupt, "General Theory of Bridge Construction" (New York, 1853). Haupt contestò il diritto priorità per il procedimento, ma la storia non aggiunge molto a questa intricata vicenda.
Comunque, ambedue gli autori statunitensi non sembrano andare oltre la scomposizione delle forze, metodologia già nota nel "Vecchio Continente" a partire da Simon Stevin e applicata nell'ingegneria da Bernard Forest de Belidor nel Settecento.



- Particolare di ponte reticolare proposto dal Belidor in "La science des ingenieurs..." Parigi, 1793.

Culmann, tornato in Europa, proporrà un metodo di calcolo ben più completo di quello di Whipple e Haupt; è però difficile stabilire se Culmann possa aver avuto occasione di conoscere il trattati di Whipple e Haupt; certamente vide i ponti realizzati da questi due ingegneri.

- Procedimento di calcolo analitico di Culmann poi diventato più noto come sezione di

Ritter.
In Europa, J. W. Schwedler nel trattato "Theorie der Brückenbalkensysteme" (Berlino, 1851), propose la soluzione analitica per la valutazione delle sollecitazioni nelle reticolari, seguito dagli studi di Wöhler pubblicati in "Theorie rechteckiger eiserner Brückenbalken mit Gitterwänden und mit Blechwänden" (Berlino, 1855).

Schewdler elaborò un'articolata procedura di analisi, spesso fumosa nei diversi passaggi, che, in breve sintesi, può essere così interpretata:

$Nc = M_s / h$

$Nd = T_s d / h$

dove:

Nc = sollecitazione di trazione o di compressione nei correnti paralleli

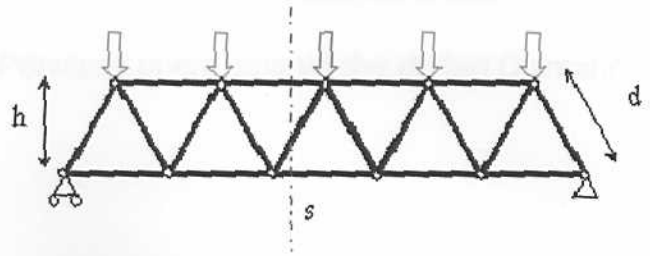
M_s = momento nella sezione in esame

h = altezza della sezione

Nd = sollecitazione di trazione o di compressione nei diagonali

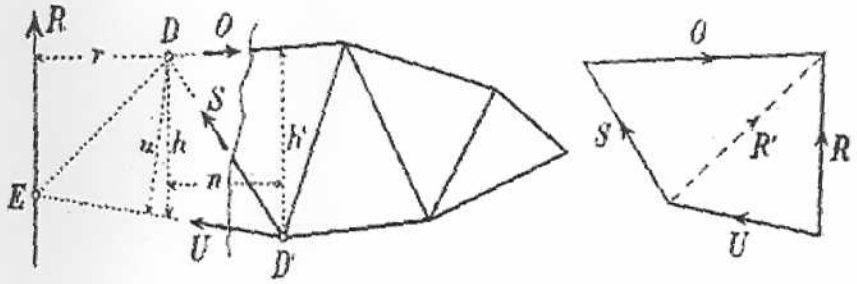
T_s = taglio nella sezione in esame

d = lunghezza del diagonale



Nel "Die graphische Statik" (Zurigo, 1865) il pensiero strutturale di Culmann è invece più maturo e completo; le reticolari sono risolte analiticamente e graficamente raggruppando in un solo diagramma i diversi poligoni, ottenendo così una rappresentazione grafica delle sollecitazioni che anticipa il procedimento poi sviluppato da Luigi Cremona, di cui Culmann si occupò sul finire dei suoi anni.

Fig. 7. Fig. 8.



Soluzione grafica della reticolare secondo Culmann contenuta in "Anwendungen der Graphischen Statik nach Professor dr. K. Culmann von W. Ritter, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich", Zürich, 1890.

Culmann conferì quindi sistematicità alla soluzione delle reticolari mentre con Cremona troverà "compimento il progetto di Culmann per l'integrazione della statica nella geometria proiettiva; in essa il disegno acquista più vaste intenzioni facendosi linguaggio scientifico perfetto, tale da riassumere in sé il criterio della sua coerenza" (E. Benvenuto, "La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico", Sansoni, Firenze, 1981).

E' una storia d'altri tempi, due secolo or sono, eppure il grande contributo offerto da Culmann alla teoria delle strutture, nacque fra le Alpi di Baviera e di Svizzera, incentivato dalla necessità di risolvere complessi problemi come la costruzione dei ponti che attraversavano le valli.

Principali opere scientifiche di Karl Culmann

Umberto Barbisan,
Matteo Guardini