UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

POSTGRADO DE MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS

TRABAJO DE GRADO

Modelo de Optimización de Inversiones en Condiciones de Incertidumbre

ALUMNO: Héctor De Alcántara

TUTOR: Gregório Tomassi

CARACAS-VENEZUELA

JUNIO - 2007

UNIVERSIDAD CATOLICA ANDRES BELLO
Urb. Montalbán - La Vega - Apartado 29068
Teléfono: 407.42.64 Fax: 4074352
Caracas (1021) - Venezuela

Dirección General de los Estudios de Post-Grado
Secretaría

ACTA

Nosotros, Gregorio Tomassi (Tutor), Guillermo Muñoz y José M. Aguirrebeitia, designados por el Consejo General de los Estudios de Postgrado el día 27 de junio de 2007, para conocer y evaluar, en nuestra condición de Jurados Principales de la Tesis de Grado titulada ***"MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE INVERSIONES EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE",*** presentada por el Ing. Héctor M. De Alcántara Freita, C.I. 9096420, para optar al título de Magister en Administración de Empresas.

a. Hemos leído el ejemplar de dicho Trabajo que nos fue enviado oportunamente por el Director del Área.

b. Después de haber estudiado dicho Trabajo, presenciamos la exposición del mismo el día 26 de julio de 2007, en la sede de la Universidad Católica Andrés Bello, por ***HÉCTOR M. DE ALCÁNTARA FREITA***, el cual ha tenido por objeto la defensa por parte del autor, de los conceptos, hipótesis, metodología y estructura del trabajo en referencia.

c. Hecha por nuestra parte las preguntas, aclaraciones correspondientes, una vez terminada dicha exposición, hemos considerado conveniente formalizar el siguiente veredicto.

VEREDICTO

Consideramos la Tesis de Grado ***"MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE INVERSIONES EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE",*** presentado por el Econ. ***HÉCTOR M. DE ALCÁNTARA FREITA***, la cual fue calificada con una nota de Veinte (20) puntos.

En fe de lo cual, nosotros los Miembros Principales del Jurado designado para conocer la Tesis de Grado del Econ. ***HÉCTOR M. DE ALCÁNTARA FREITA***, firmamos la presente Acta en Caracas a los veintiséis días del mes de julio del año dos mil siete.

Gregorio Tomassi
C.I. 6188971

Guillermo Muñoz
C.I. 4825673

José M. Aguirrebeitia
C.I. 2952454

Tabla de contenido

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi esposa María Teresa y a mi hijo Jesús Alejandro, fuentes de amor y luz en mi existencia

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios por haberme dado la vida, la inspiración y fortaleza así como por acompañarme en todo momento

Gracias a mi esposa María Teresa por haberme alentado a seguir adelante en los momentos difíciles y por su comprensión en el largo tiempo que dediqué a este trabajo

Gracias a mis padres, María Matilde y José Alexandre, por su apoyo en cada momento de mi vida

Gracias a mi tutor Gregorio Tomassi por haber aceptado la responsabilidad, por haber creído en mi, por las horas de atención dedicada y por sus valiosos consejos

Gracias a Darío Rico y a Mercedes Guedes, Coordinador y Asistente Ejecutiva respectivamente del postgrado de Administración de Empresas, por su paciente y desinteresada orientación en los pasos y normas a seguir para realizar los trámites administrativos ante la Universidad.

1 Resumen ejecutivo

El presente documento contiene el *Trabajo de Grado*, presentado ante la ilustre Universidad Católica Andrés Bello, para la obtención del Título de Maestría de Administración de Empresas, por el alumno Héctor De Alcántara, C.I. 9.096.420.

Presenta un modelo teórico-práctico para la optimización de inversiones en condiciones de incertidumbre, incorporando al análisis las variables de aportación de valor y de eficiencia en el uso del capital por los proyectos.

La metodología aplicada consiste en el desarrollo de las ecuaciones matemáticas que proveen la desviación máxima del valor del VPN de los proyectos, aplicando el método de propagación de errores en funciones. Para ello, el modelo parte de las mejores estimaciones de desviaciones que puedan realizar los inversionistas, en las principales variables de cálculo del VPN.

Una vez obtenidas las desviaciones de los VPN de los diferentes proyectos, se propone un método gráfico y analítico de normalización y comparación de los proyectos, para ubicarlos en una escala de opciones, desde la mejor hasta la peor opción, según la aceptación empírica del inversionista de un valor de incertidumbre, basada en su aversión al riesgo versus su avidez de ganancias.

Posteriormente se propone una metodología integral de soporte para la toma de decisiones en la elección de inversiones, añadiendo al análisis la preferencia del inversionista por proyectos de acuerdo a su grado de capacidad de aporte de valor al negocio y en segunda instancia según la eficiencia del proyecto en el uso del capital. Cada análisis se realiza por separado maximizando la variable de estudio con respecto al VPN y una vez obtenidos estos resultados, se relacionan los tres entre sí maximizando el conjunto conformado por todo el sistema. De esta forma se hallan las posiciones relativas de los proyectos en una escala definitiva de mejor a peor opción de inversión para permitir su elección.

En la última sección del documento se aplica el modelo en casos reales de la literatura especializada, para demostrar su eficacia.

2 Planteamiento del problema

A menudo las personas que toman decisiones sobre el uso del presupuesto en iniciativas o proyectos de inversión, tienen que tomarlas en condiciones donde existen limitaciones de capital. Si existen varias opciones, deben seleccionar, entre todas ellas, aquellas que rindan mayores beneficios y descartar las demás, aunque también tengan individualmente beneficios asociados.

La rentabilidad de un proyecto se cuantifica financieramente por su Valor Presente Neto (VPN) y es calculado descontando al presente todos los flujos de caja, sean positivos o negativos, según una tasa de descuento específica, llamada costo del capital, durante la vida estimada de este. El proceso de selección entre las diferentes opciones de inversión, se realiza normalmente comparando las diferentes iniciativas según su Valor Presente Neto (VPN). Aquellas que posean los mayores valores de VPN son seleccionadas, de mayor a menor, hasta cumplir la cuota de inversión posible.

Ese proceso de selección mencionado, donde se comparan las diferentes iniciativas según su VPN, puede ser dudoso y ocasionar una elección equivocada, si no se toma en cuenta que el VPN puede ser una cifra calculada en algunos casos según estimaciones y contener errores de precisión en las variables que lo componen, o en otras palabras, en condiciones de incertidumbre. Un proyecto con un VPN menor a otro, pero con una precisión superior en su cálculo, es decir, con un error de estimación menor en sus variables, podría ser mejor candidato a inversión que el otro, si se analizara cuidadosamente.

En la literatura especializada existen varios métodos estadísticos para la comparación y selección de los proyectos más rentables, en condiciones de restricción de presupuesto de capital, que parten del supuesto de que el inversionista tiene un conocimiento bastante preciso de las diferentes situaciones posibles, incluyendo la probabilidad de que ocurra cada una de ellas. Cuando existe ese grado de conocimiento se habla de riesgo y se relaciona este con el mercado y la preferencia del inversionista a invertir bajo condiciones determinadas.

Cuando el conocimiento sobre los resultados esperados es muy limitado y lo sustituye la incertidumbre en los valores que puedan tener las diversas variables, utilizadas para el cálculo de la rentabilidad de un proyecto, se habla de incertidumbre en lugar de riesgo y a lo máximo que se puede aspirar, es que el accionista tenga una idea de los valores máximos y mínimos que puedan alcanzar dichas variables, sin poder ni siquiera atribuirles probabilidades de ocurrencia. En estas condiciones es necesario contar con un método de propagación de este "*error de estimación*" hacia el resultado final y un modelo que permita, en función de estos resultados y sus desviaciones, tomar las decisiones más apropiadas.

3 Objetivo

Obtener un modelo teórico-práctico que permita a los inversionistas hallar las máximas desviaciones en la rentabilidad de sus proyectos, en función de la incertidumbre de las principales variables, para compararlos entre sí y decidir las mejores opciones de inversión.

4 Hipótesis

Si se aplica al cálculo del VPN el método de la propagación en funciones del error en las estimaciones de las variables, entonces se podría obtener la variación absoluta respecto al mejor estimado y de ese modo un método de comparación de proyectos en función de su VPN, añadiendo al análisis el error de estimación. Como consecuencia de esto se podría contar con un instrumento para realizar mejores decisiones de selección en la inversión de capital.

5 Marco teórico de referencia

5.1 Propagación de errores en funciones

Si no se conoce el valor de una cierta magnitud x_t, pero sí un valor aproximado x_a, entonces para estimar la magnitud de este error se define el error absoluto de x_t como [9.5]

$$e_a(x_t) = x_t - x_a$$

Y el error relativo como

$$e_r(x_t) = \frac{e_a(x_t)}{x_t}$$

En general no se conoce el valor de este error sino una acotación de este, esto es, un número $\varepsilon(x)$, tal que

$$|e_a(x_t)| \leq \varepsilon_a(x_t)$$

O bien

$$|e_r(x_t)| \leq \varepsilon_r(x_t)$$

Si se desea evaluar la propagación del error en una función $y=f(x_t)$, entonces usando el Teorema del Valor Medio, se puede escribir

$$f(x_t) - f(x_a) = f'(c)(x_t - x_a)$$

Para algún c entre x_a y x_t.

Si se supone que el error absoluto en x_a como aproximación de x_t, es pequeño, o en la función bajo estudio, la derivada en el intervalo entre x_a y x_t se mantiene con pequeñas variaciones, entonces se puede aproximar c por x_t obteniendo

$$f(x_t) - f(x_a) = f´(x_t)(x_t - x_a)$$

O sea

$$\varepsilon_a(y) = f´(x_t)\varepsilon_a(x_t)$$

En el caso general, en que la función depende de más de una variable $y=f(x_1, x_2,\ldots,x_m)$, la fórmula aproximada de propagación del error, usando la expansión en series de Taylor para los términos de primer orden [8.3] [9.5], es:

$$\varepsilon_a(y) = \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \right| \varepsilon_a(x_i) \qquad \text{(1a)}$$

Por último, se puede demostrar partiendo de la teoría de errores [8.8] [9.5], que en las operaciones aritméticas básicas los errores se propagan de la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_a(x_1 + x_2) = \varepsilon_a(x_1) + \varepsilon_a(x_2) \\
&\varepsilon_a(x_1 - x_2) = \varepsilon_a(x_1) + \varepsilon_a(x_2) \\
&\varepsilon_r(x_1 x_2) = \varepsilon_r(x_1) + \varepsilon_r(x_2) \\
&\varepsilon_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \varepsilon_r(x_1) + \varepsilon_r(x_2)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(1b)}$$

5.2 Propagación del error en el cálculo del Valor Presente Neto

El Valor Presente Neto o VPN de una iniciativa o proyecto, se obtiene aplicando la siguiente ecuación [9.1]:

$$VPN = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{(1+r)^n}$$

Donde a_n son los flujos de caja, n son los períodos anuales y r es la tasa de descuento anual o costo del capital. Esta ecuación es aplicable en los casos en que el crecimiento del capital ocurre en intervalos discretos anuales. En los casos en que el crecimiento es compuesto, o se usan tasas de interés continuamente compuestas, es decir, en que el interés se genera continuamente y se transforma en capital, el intervalo n se hace infinitesimal y los períodos infinitos. Aplicando el límite se obtiene la siguiente ecuación [9.1]:

$$VPN = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{-r_c t_n}$$

Donde a_n representa igualmente el flujo de caja producido en el instante t_n y r_c es la tasa continua equivalente a la tasa discreta r. La equivalencia entre las dos tasas es la siguiente [8.2] [9.1] [9.2]:

$$r_c = \ln(1 + r)$$

O

$$r = e^{r_c} - 1$$

En ambos casos se debe considerar que puede haber errores de estimación en cada uno de los valores de las variables de la ecuación, ya que están basados en interpretaciones a futuro que no necesariamente se cumplen. Si bien es imposible conocer con precisión los valores de estas variables, sí es factible trabajar con la mejor estimación de ellas y con la desviación máxima que puedan alcanzar, es decir, con el error absoluto de la mejor estimación. Este error de estimación o incertidumbre puede propagarse en el tiempo utilizando las ecuaciones vistas anteriormente y a partir de los resultados obtenidos, realizar decisiones más acertadas sobre las inversiones.

Si se definen los errores absolutos ε_a como Δa_n para a_n, Δn para n, Δr para r, Δt_n para t_n, ΔVPN para VPN y se aplican las ecuaciones (1a) y (1b) se obtiene [8.3] [8.4] [8.5]:

$$\Delta VPN = \sum_{n=1}^{N}\left(\Delta a_n \left| \frac{\partial VP_n}{\partial a_n} \right| + \Delta t_n \left| \frac{\partial VP_n}{\partial t_n} \right| + \Delta r_c \left| \frac{\partial VP_n}{\partial r_c} \right| \right)$$

- Caso $VPN = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{-r_c t_n}$

$$\Delta VPN = \sum_{n=0}^{N} \left| a_n e^{-r_c t_n} \right| \left(\left| \Delta t_n r_c \right| + \left| \frac{\Delta a_n}{a_n} \right| + \left| \Delta r_c t_n \right| \right) \qquad (2)$$

- Caso $VPN = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{(1+r)^n}$

$$\Delta VPN = \sum_{n=0}^{N} \left| \frac{a_n}{(1+r)^n} \right| \left(\left| \Delta n \ln(1+r) \right| + \left| \frac{\Delta a_n}{a_n} \right| + \left| \frac{n \Delta r}{(1+r)} \right| \right) \qquad (3)$$

Finalmente, las ecuaciones (1), (2) y (3) pueden usarse para hallar las desviaciones del Valor Presente Neto. Al aplicarlas, es necesario tomar en cuenta todas las variables que intervienen en el cálculo, con sus errores de estimación, tales como costos por unidad, cantidades de piezas, tiempos de duración de actividades, etc., y aplicar el conjunto de ecuaciones (1) para convertirlas en Δa_n, Δt_n y Δr. Una vez obtenidos estos valores, entonces aplicar (2) ó (3) para hallar el ΔVPN.

Es importante considerar que en el alcance de este documento, el método de cálculo visto utiliza la mayor de las desviaciones, en cualquiera de los dos sentidos (mayor o menor), como error base de propagación. Dicho de otra manera, si una variable cualquiera a utilizar para el cálculo, tiene una estimación diferente hacia un sentido que hacia otro, se tomará la mayor de las dos para el estudio, castigando al proyecto con la peor incertidumbre. Por ejemplo, si el tiempo estimado de culminación de una actividad es tres meses, pero existen dudas de si culmina dos semanas antes o una semana después de los tres meses, entonces el error de precisión de esa variable, para el cálculo de la desviación, será de dos semanas. Esta información es muy importante para entender la naturaleza de los cálculos y los resultados, ya que indica que el método no toma en cuenta posibilidades intermedias ni las probabilidades de que ocurran, así como tampoco combinaciones de estas entre si. Simplemente propaga la desviación máxima de cada una de las variables hacia un resultado final que pudiera estar dentro de un rango que va desde un centro de mejor estimación, hacia un extremo de mayor desviación posible, que es producto de la combinación de las mayores desviaciones posibles de cada una de las variables que lo componen, sin considerar las posibilidades ni probabilidades de valores intermedios.

5.3 Consideración de la incertidumbre en las Decisiones de Inversión

En la sección anterior se mostró cómo calcular el error absoluto del VPN, o sea el ΔVPN, para cada iniciativa. Como normalmente se tienen varias de ellas, es necesario construir una tabla con todos los pares VPN_i, ΔVPN_i de manera que se puedan comparar y seleccionar las mejores. Ahora bien, como se deben comparar dos variables en el proceso, para facilitar la labor se puede utilizar un método que permita homologarlas en una misma escala, es decir, normalizar, de modo que puedan ser comparadas de acuerdo a su posición en esa escala.

Para normalizar las iniciativas según su incertidumbre, se puede usar el *Diagrama de Incertidumbre* que se muestra a continuación. Para ello se debe considerar un plano cartesiano con el eje de las ordenadas IP y el eje de las abscisas $VPNR$, donde:

IP: Representa la Incertidumbre de la Iniciativa. Cada posición en este eje es calculada como el valor porcentual del error absoluto ΔVPN respecto al VPN. Es necesario tomar en cuenta que el error absoluto es la mitad de la variación total que puede sufrir el VPN, por encima o debajo del valor estimado como más probable. Definido de esta forma entonces:

$$IP_i = \left(\frac{\Delta VPN_i}{VPN_i} \right) 100 \qquad (4)$$

$VPNR$: Es la posición relativa porcentual del VPN de cada iniciativa respecto a las demás. Se calcula con respecto a la mayor de todas, es decir:

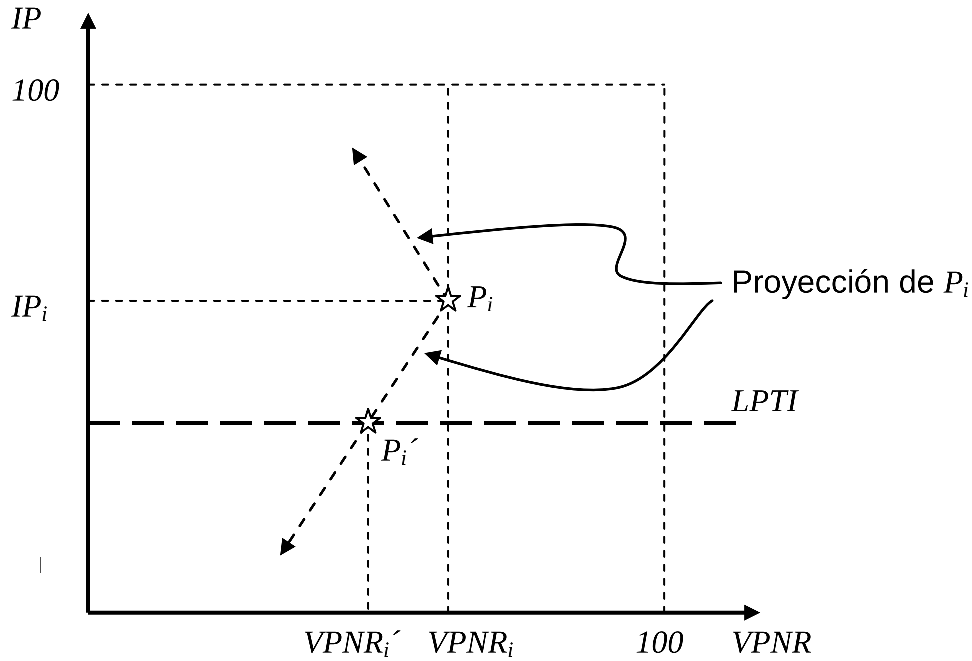
$$VPNR_i = \left(\frac{VPN_i}{VPN_{mayor}} \right) 100 \qquad (5)$$

Definido de esta forma, cada iniciativa tendrá un par de coordenadas asociadas al plano cartesiano, es decir, para cada VPN_i, ΔVPN_i se puede hallar un par IP_i, $VPNR_i$ que la representa en el Diagrama de Incertidumbre. Al punto en el diagrama que está representado por estas dos nuevas coordenadas se le denomina P_i y representa la iniciativa o un proyecto específico i.

Para la ordenación de las iniciativas en la escala de mejores opciones, según su incertidumbre asociada, se establece como criterio que una vez representada en el Diagrama de Incertidumbre, cada iniciativa debe proyectarse en el plano hacia una línea horizontal paralela al eje de las abscisas, siguiendo el procedimiento que se desarrolla en los párrafos posteriores. A esta línea se le denomina en este documento $LPTI$ y se puede definir como una *Línea de Posición de Tolerancia a la Incertidumbre* del Inversor, representando la elección empírica de este, de una posición en la que se encuentre más cómodo, de acuerdo a su tolerancia, atracción o preferencia por la incertidumbre. Constituye un equilibrio entre su aversión al riesgo versus su avidez por las ganancias.

Aunque la posición de $LPTI$ puede ser un número positivo cualquiera, en esta sección se le considera, para facilitar los análisis, entre 0% y 100%. La intersección de esa línea con las proyecciones de las diferentes iniciativas, se representa por los símbolos $P_i´$. La posición menor o más a la izquierda representa una peor opción y la mayor o más a la derecha representa una mejor opción.

DIAGRAMA DE INCERTIDUMBRE

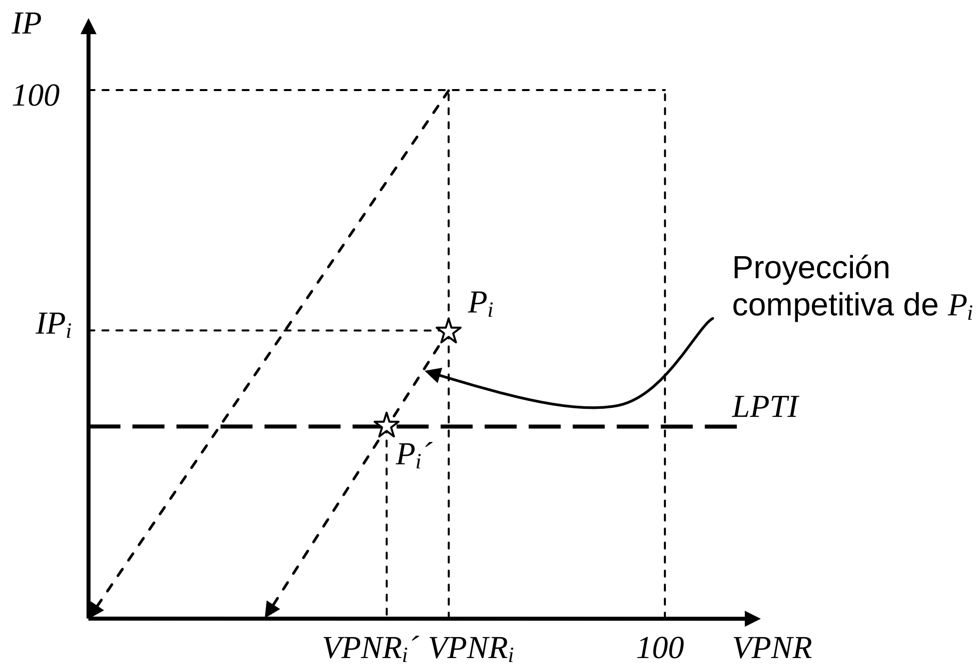


Hasta este momento se definieron para cada iniciativa, los valores y símbolos asociados VPN_i, ΔVPN_i, IP_i, $VPNR_i$, P_i y $P_i´$, donde P_i representa su posición relativa en el Diagrama de Incertidumbre y $P_i´$ su posición proyectada en la Línea de Posición de Tolerancia a la Incertidumbre. Ahora se definirá el método de proyección para hallar las coordenadas de $P_i´$ es decir $VPNR_i´$ e $IP_i´$.

En principio, el valor de $IP_i´$ es el mismo que el de $LPTI$, ya que es la proyección de P_i en esa recta. Para determinar el valor de $VP_i´$ es necesario considerar el valor de IP_i respecto a $LPTI$, pero primero es necesario realizar algunas consideraciones teóricas respecto a esa proyección.

Para el caso en que un proyecto P_i cualquiera en el Diagrama de Incertidumbre, la Línea de posición de Tolerancia a la Incertidumbre elegida empíricamente por el inversionista, coincide precisamente con ese punto, la proyección del proyecto en la línea es él mismo, es decir $P_i = P_i´$. Este resultado es razonable, ya que el inversionista acepta precisamente como óptima la incertidumbre del proyecto. También es razonable pensar que si $LPTI$ es mayor o menor que IP_i, entonces la proyección debe ser hacia una posición de menor competitividad para ese proyecto, porque la preferencia del inversionista es diferente a la natural del proyecto. En esa situación otro proyecto con el mismo $VPNR_i$ pero cuyo IP_i, coincida con la preferencia del inversionista, debe representar necesariamente una mejor opción para él, porque su $VPNR_i´$ es mayor al del primer proyecto. El razonamiento anterior conduce a que la proyección en el Diagrama de Incertidumbre siempre debe ser hacia una posición de menor ventaja para el proyecto, porque su $VPNR_i´$ es inferior a su $VPNR_i$. Debe recordarse que la comparación entre proyectos se realiza utilizando los $VPNR_i´$.

Para el caso en que la $LPTI$ es cero, es decir, en que el inversionista elige la posición de cero incertidumbre, la proyección de cualquier proyecto debe coincidir con el punto en que se descarta toda la incertidumbre de este, es decir, es el $VPNR_i$ mínimo de ese proyecto, que se halla al descontarle el valor de ΔVPN_i. Si el proyecto tuviera una incertidumbre de 100%, es decir, si su IP_i es igual a 100, o sea que su ΔVPN_i es igual a su $VPNR_i$, entonces su proyección en una LPTI igual a cero, sería en el origen, es decir, $IP_i = VPNR_i´$.= 0. En ambos casos los dos puntos descritos para cada situación definen rectas de pendiente positiva. Estas rectas son paralelas, es decir, tienen la misma pendiente. Esto se puede observar en el siguiente diagrama:

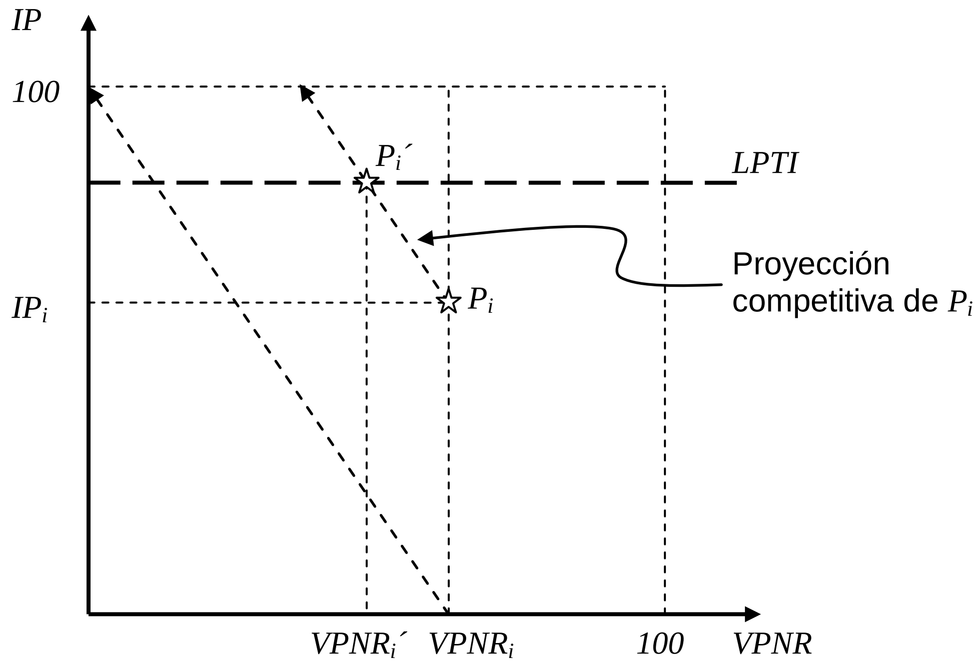


La pendiente de las rectas es igual a $\frac{100}{VPNR_i}$, por lo tanto se puede deducir que

$$VPNR_i´ = VPNR_i\left(1 - \frac{(IP_i - LPT)}{100}\right)$$

Esta ecuación es válida si $LPTI < IP_i$

Considérese ahora el caso en que el proyecto tiene una incertidumbre igual a cero, es decir, su $IP_i = 0$. Eso es lo mismo que decir que para este proyecto su $\Delta VPN_i = 0$. Si el inversionista eligiese una $LPTI=0$, entonces en este caso también el punto $P_i = P_i´$ y $VP_i = VP_i´$, pero si el inversionista eligiese una $LPTI=100$, es en ese caso su $VPNR_i´=0$. Estos dos puntos definen una recta de pendiente negativa que es paralela a las proyecciones de P_i hacia la zona de mayor incertidumbre, como se puede observar en el siguiente gráfico:



En este caso la pendiente de las rectas es igual a $-\frac{100}{VPNR_i}$, por lo tanto se puede deducir que

$$VPNR_i´ = VPNR_i\left(1+\frac{(IP_i - LPT)}{100}\right)$$

Esta ecuación es válida si $LPTI > IP_i$

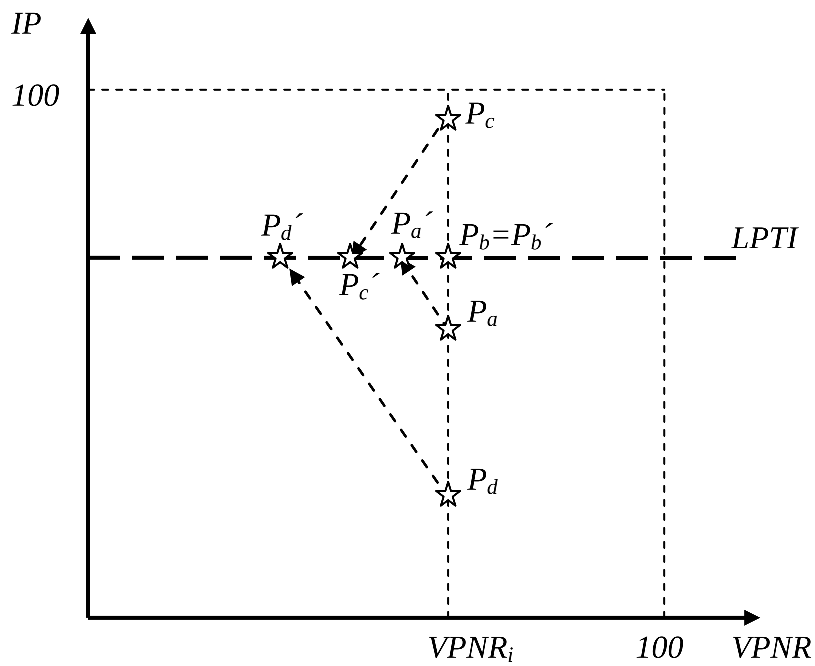
Las dos ecuaciones se pueden unificar en la siguiente:

$$VPNR_i´ = VPNR_i\left(1-\frac{|IP_i - LPT|}{100}\right) \qquad (6)$$

En el caso en que *LPTI* fuere mayor a 100%, entonces el $VPNR_i$´ tendría un valor negativo por debajo de un cierto valor de *LPTI* y el modelo aplicaría exactamente igual.

Habiendo definido completamente los métodos de proyección dentro del Diagrama de Incertidumbre, se puede mostrar algunos ejemplos de cómo se compararían diferentes proyectos hipotéticos. Considérense los siguientes casos:

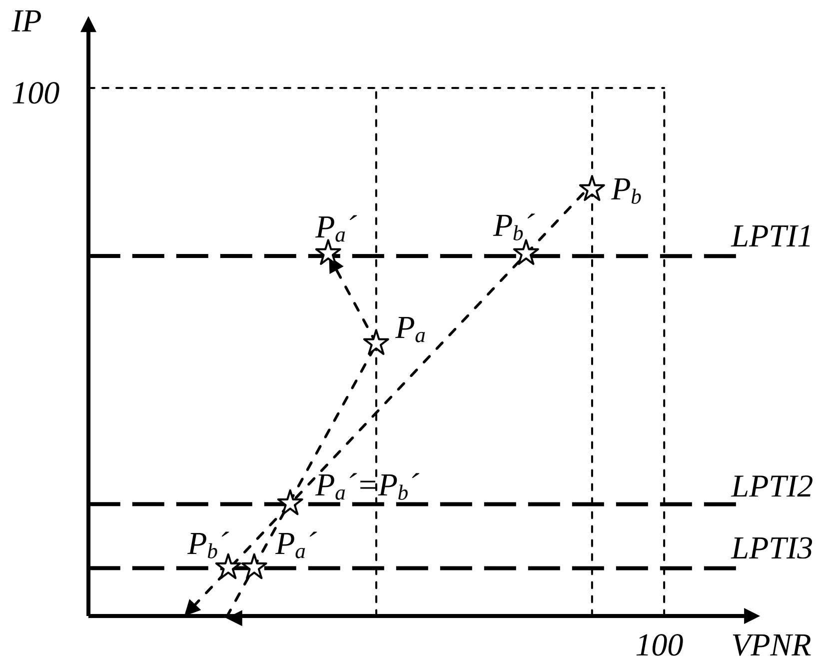
a) Caso en que todos los proyectos tienen el mismo valor de $VPNR_i$ pero diferentes IP_i:



Se puede observar en el diagrama que $VPNR_b´>VPNR_a´>VPNR_c´>VPNR_d´$ y ese es el orden de las mejores opciones. En este caso la elección depende exclusivamente de la posición que adopta el inversionista al elegir *LPTI*.

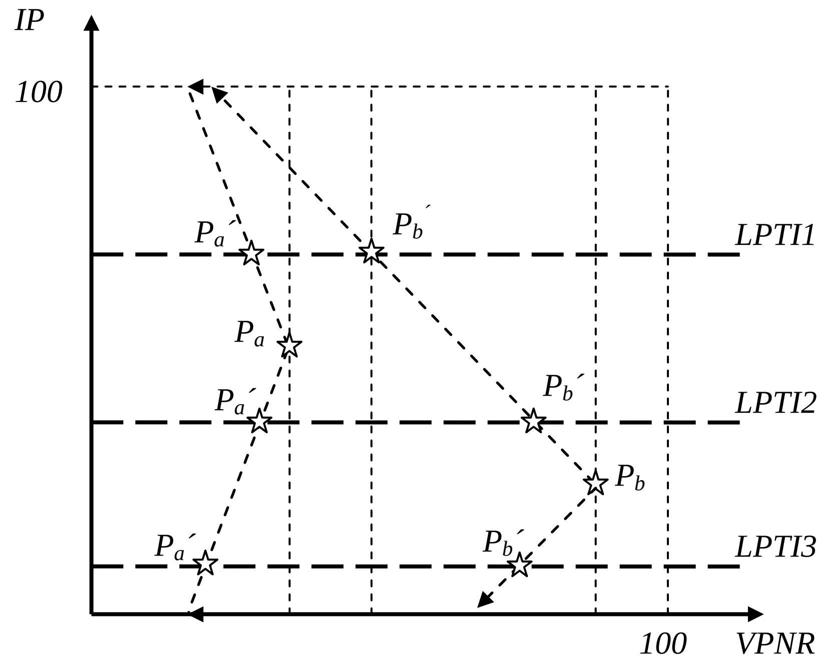
b) Caso en que dos proyectos intercambian sus lugares de mejor opción en función de la preferencia del accionista por la incertidumbre:

Supóngase dos proyectos P_a *y* P_b y tres diferentes *LPTI*, a saber *LPTI1>LPTI2>LPTI3* dispuestos de la forma en que indica el diagrama. Se puede observar que dependiendo de la posición del inversionista los proyectos se hacen más o menos atractivos, llegando a intercambiar de hecho sus posiciones. Se puede observar que para *LPTI1*, P_b es más atractivo que P_a. Para *LPTI2*, P_b es tan atractivo como P_a y para *LPTI3*, P_b es menos atractivo que P_a.



c) Caso en que se comparan dos proyectos, uno de bajo rendimiento y alta incertidumbre con uno de alto rendimiento y baja incertidumbre:

En el diagrama que se muestra a continuación se hacen las proyecciones de los proyectos en referencia, en tres líneas cualesquiera de posición de incertidumbre. Se puede observar que mientras no se crucen las proyecciones, es decir, mientras la incertidumbre del proyecto de menor rendimiento nunca supere al rendimiento del otro, nunca cambiarían de posición los proyectos en la preferencia del inversionista. Este resultado prueba el modelo, ya que siempre será mejor opción invertir en el proyecto de alto rendimiento y menor incertidumbre.



5.4 Consideración de la Creación de Valor en las Decisiones de Inversión

En el último ejemplo de la sección anterior se observó que pueden existir situaciones en que dos o más proyectos tienen el mismo valor de $VPNR_i$´. En este caso se requieren criterios adicionales para elegir la mejor opción entre ellos. Una variable de importancia capital para cualquier negocio, que es necesario incorporar para lograr este objetivo, es la capacidad de creación de valor.

No todos los proyectos tienen la misma capacidad de creación de valor para el negocio, aunque tengan Valor Presente Netos muy atractivos. La creación de valor está relacionada con la afinidad del proyecto con el negocio, es decir, con la misión y visión de la empresa, la alineación con los planes estratégicos, la capacidad de apalancar futuros proyectos y negocios, incremento o protección del patrimonio, mantenimiento de la operación, crecimiento y expansión, reducción de costos o incremento de productividad, etc. Además, es imposible considerar en el VPN todos los beneficios colaterales futuros de un proyecto.

Un proyecto o iniciativa que tenga una o más características de las mencionadas anteriormente, será a la larga mucho más beneficioso para la empresa o al inversionista, que una simple oportunidad aislada de obtención de ganancias y aunque tenga un menor VPN que otro, podría ser más beneficioso que aquel, porque a futuro su aporte al patrimonio podría ser mayor.

El olfato para seleccionar proyectos capaces de mantener o aumentar el valor del negocio, lo debe tener el propio inversionista en base a su experiencia, anhelos, visión, convicciones y estrategias que se haya planteado para el futuro. Es por esto que un buen administrador no necesariamente es un buen inversionista. Por ejemplo, el inversionista puede elegir en un determinado momento si conviene diversificar el negocio ó conservar el enfoque, porque ninguna de las dos opciones, a priori, es mejor que la otra. De la capacidad de identificar oportunidades, visión de futuro, aversión al riesgo, avidez de ganancias y finalmente de su habilidad para mantenerse en el negocio, dependerá que realice las elecciones adecuadas.

Existen muchas herramientas que se pueden utilizar para ordenar y clasificar iniciativas en base a estrategias que se plantee el inversionista. A continuación se proporciona una metodología que prioriza las iniciativas según su capacidad de creación de valor.

Con el objetivo de priorizar los proyectos según su aporte de valor al negocio, se debe construir y completar la *Tabla de Aportación de Valor*, que se muestra a continuación, (para facilitar la comprensión se han colocado valores imaginarios):

TABLA DE APORTACIÓN DE VALOR

Consideraciones estratégicas	**Peso**	**Iniciativa 1**	**Iniciativa 2**	**Iniciativa n**
Alineación con la misión y Visión	10	10	0	10
Alineación con planes estratégicos	5	5	0	10
Capacidad de apalancar futuras iniciativas	7	0	0	10
Incremento o protección del patrimonio	2	7	0	10
Crecimiento o expansión del negocio	1	10	0	10
Reducción de costos o incremento de productividad	6	10	0	10
CAV_i		**35**	**0**	**51,66**

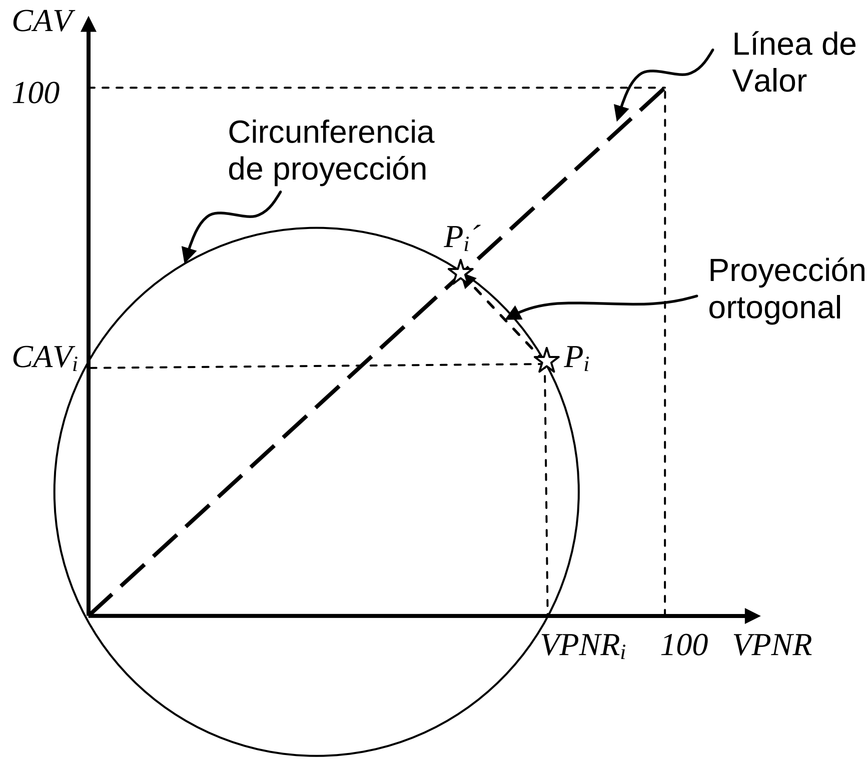
La tabla se construye colocando en la columna denominada *Consideraciones Estratégicas*, aquellas que definen el mayor aporte de valor de la iniciativa al negocio. En el ejemplo se han colocado algunas de las más importantes, pero depende del inversionista elegir aquellas que según su criterio más convengan. Si el inversionista fuera por ejemplo el gobierno de una nación, lo más probable es que las consideraciones estratégicas serían muy diferentes a las de una empresa trasnacional. Luego se debe ponderar estas consideraciones estratégicas con una puntuación del uno al diez, donde se le dé mayor puntuación a aquellas que sean de mayor aportación de valor y colocarla en la columna denominada *peso*. Seguidamente se debe realizar un análisis de cada iniciativa, para valorizarla de acuerdo a su aporte, según cada consideración, asignándole una puntuación del cero al diez, en la casilla correspondiente. En la fila de Resultados se coloca la sumatoria de los productos de las ponderaciones o pesos por las valoraciones, individualmente para cada proyecto, dividida entre la cantidad de consideraciones definidas. Los valores obtenidos se denominarán CAV_i y siempre estarán acotados entre uno y cien.

$$CAV_i = \frac{\sum_{j=1}^{CantidadEstrategias} (PonderaciónEtrategia_j)(PuntuaciónIniciativa_{ij})}{CantidadEstrategias} \qquad (7)$$

Cabe destacar que la tabla construida de la manera indicada, depende del criterio aportado por el inversionista y proporciona una priorización empírica de las iniciativas.

Una vez cumplido el procedimiento anterior, cada iniciativa se debe ubicar en un plano cartesiano denominado *Diagrama de Valor*, donde las abscisas corresponden a los valores de *VPNR,* tal como fueron definidos en la sección anterior y las ordenadas a su *Capacidad de Aporte de Valor* al negocio, por lo tanto, a cada iniciativa corresponden las coordenadas CAV_i, $VPNR_i$ en ese plano.

DIAGRAMA DE VALOR



Para la ordenación de las iniciativas en la escala de mejores opciones, según su aportación de valor, se establece como criterio que en el Diagrama de Valor las iniciativas se proyecten ortogonalmente sobre una línea denominada *Línea de Valor*. La Línea de Valor representa el equilibrio que desea el inversionista entre el aporte de valor del proyecto al negocio y su rentabilidad asociada. Su pendiente es elegida empíricamente por el inversionista según su preferencia por una u otra variable, por ejemplo, si el inversionista prefiere darle la misma importancia a la rentabilidad que al aporte de valor, entonces elegirá una pendiente igual a uno. Si el inversionista le otorga el doble de importancia al aporte de valor que a la rentabilidad, entonces elegirá una pendiente igual a 2. Si la elección es inversa, entonces elegirá una pendiente igual a un medio y así sucesivamente.

Formalmente, partiendo de la ecuación continua de la recta:

$$\frac{CAV - p_2}{v_2} = \frac{VPNR - p_1}{v_1}$$

Donde p_1 y p_2 son las coordenadas de un punto cualquiera en la recta y v_1, v_2 son las coordenadas del vector director.

Como en el caso de estudio la recta pasa por el origen, entonces puede elegirse este punto para p_1 y p_2. En cambio v_1, v_2 equivalen conceptualmente a los valores asignados a la ponderación de las variables de comparación, y pueden ser definidos con números reales iguales o mayores a cero, siempre que no sean ambos igual a cero. Mientras mayor es un número respecto a los demás, mayor es la importancia que el inversionista asigna a esa variable. La relación entre ellos define la pendiente de la Línea de Valor:

$$\frac{CAV}{VPNR} = \frac{v_2}{v_1} \qquad (8)$$

La proyección se ha definido como ortogonal porque constituye la distancia más corta al punto que se considera más óptimo, representado por la intersección con la Línea de Valor. De esta manera, la proyección que resulte con la mayor distancia al origen del diagrama representa la mejor opción de inversión. Ahora bien, La proyección ortogonal de cualquier punto del plano cartesiano sobre una línea que pasa por el origen, describe una circunferencia al variar la pendiente de esta línea. Esto es debido a que, según las propiedades de la circunferencia, el ángulo de la intersección entre dos líneas que pasan por los extremos del diámetro, que en este caso son el origen y el punto que representa al proyecto, es siempre recto.

El punto del proyecto siempre está en el extremo opuesto al origen y la línea que los une pasa por el centro de la circunferencia, dividiéndola en dos partes iguales. Esto implica que la distancia desde el punto del proyecto al origen es el propio diámetro de la circunferencia y es la máxima desde el origen a cualquier otro punto de ella, lo cual significa que si se elige la relación entre CAV y VPN óptima, igual a la relación entre las coordenadas del proyecto, entonces esa es la mejor posición de ese proyecto (la proyección a lo largo de la circunferencia es él mismo) y cualquier otra posición es desventajosa para él, (disminuye su distancia respecto al origen).

Descrita de esta forma, la ecuación de la circunferencia de proyección es:

$$\left(CAV - \frac{CAV_i}{2}\right)^2 + \left(VPNR - \frac{VPNR_i}{2}\right)^2 = \frac{CAV_i^{\,2} + VPNR_i^{\,2}}{4}$$

Y la intersección de la circunferencia con la línea de Valor es:

$$VPNR_i{}' = \frac{v_1\left(v_2 CAV_i + v_1 VPNR_i\right)}{v_2^{\,2} + v_1^{\,2}}$$

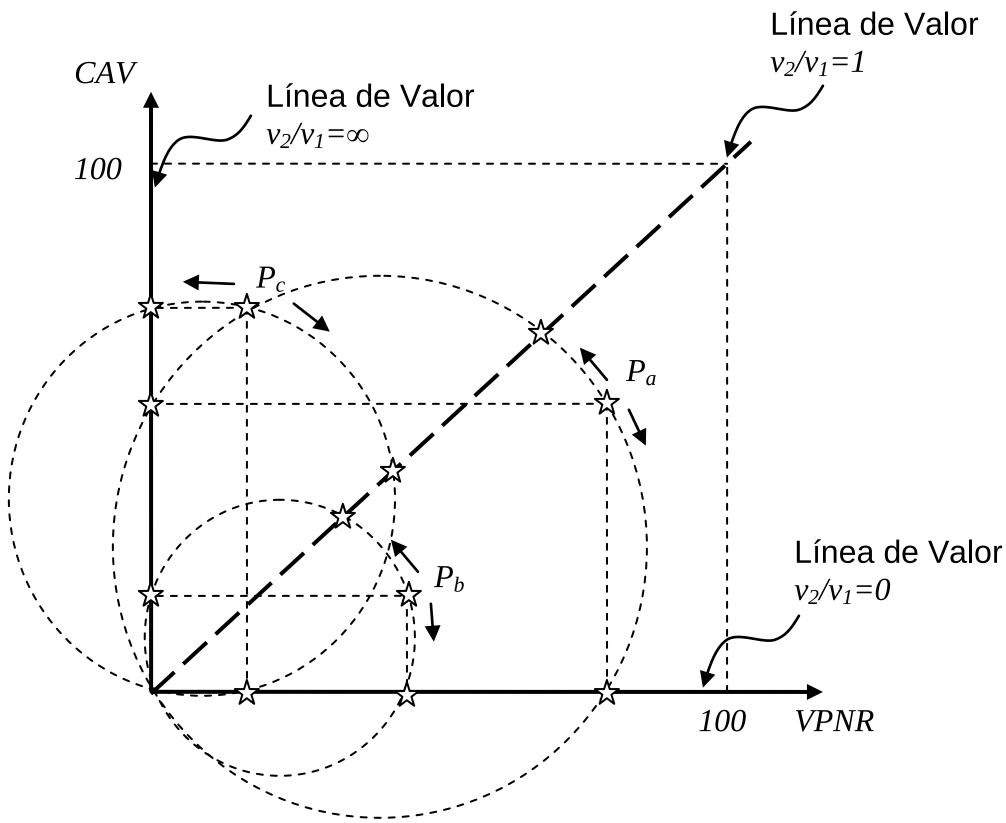
$$CAV_i{}' = \frac{v_2\left(v_2 CAV_i + v_1 VPNR_i\right)}{v_2^{\,2} + v_1^{\,2}}$$

Hay otra solución que es la solución trivial, es decir, (0,0). Esto solo significa que todas las circunferencias pasan por el origen.

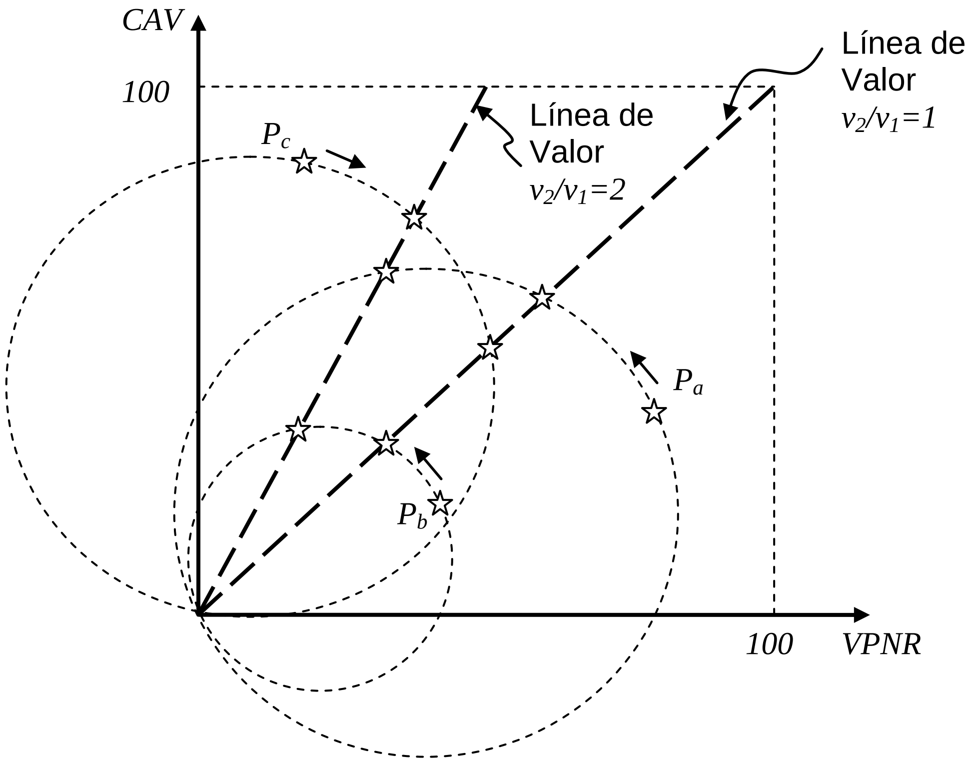
Los cuatro puntos que determinan la circunferencia son el origen del plano cartesiano, el punto del proyecto y la intersección de sus proyecciones ortogonales sobre los ejes. Estas dos últimas son las propias coordenadas del punto y representan la preferencia completa por una variable ó la indeferencia total por la otra. En estas condiciones extremas el proyecto tiene valor por su aporte a la variable de interés.

La relación óptima para el inversionista entre el Valor y el VPN de un proyecto, que está representada por la Línea de Valor, significa que ambas variables siguen teniendo interés, pero que se prefiere darle a una mayor relevancia de acuerdo a la proporción expresada. Como consecuencia de ello, un proyecto puede resultar con una mejor posición que otro en la línea de valor, aunque tenga una relación de sus componentes más alejada de la óptima y aunque el otro sí coincida en su relación de componentes con la línea de valor. La razón es que su contribución a la otra componente es tal que el proyecto se vuelve muy competitivo.

Para facilitar la comprensión del concepto de Línea de Valor, supóngase en el siguiente diagrama que el inversionista se coloca, ante la selección de tres proyectos, en posiciones completamente extremas y opuestas, a saber, en la indiferencia total por la creación del valor, $v_2=0$ o $v_2/v_1=0$, ó en la indiferencia total por la rentabilidad del proyecto, $v_1=0$ o $v_2/v_1=\infty$. En cada caso la Línea de Valor coincide con un eje del diagrama. Entonces se puede observar claramente en el diagrama que los proyectos intercambian sus posiciones de mejor opción, Las posiciones para cada caso son, para $v_2/v_1=0$, $P_a\ P_bP_c$, y para $v_2/v_1=\infty$, P_c P_aP_b



Igualmente en el siguiente diagrama se puede observar con claridad que para la Línea de Valor de pendiente igual a uno, las posiciones de mejor opción son $P_aP_cP_b$, no obstante, para la Línea de Valor de pendiente igual a 2, las posiciones de mejor opción son $P_cP_aP_b$



Finalmente para hallar la distancia de cada proyección al origen, es decir V_i y con ello las posiciones de cada proyecto a lo largo de la Línea de Valor, se debe aplicar la siguiente fórmula:

$$V_i = \sqrt{VPNR_i'^2 + CAV_i'^2}$$

Para obtener:

$$V_i = \frac{v_2 CAV_i + v_1 VPNR_i}{\sqrt{v_2^{\,2} + v_1^{\,2}}} \qquad (9)$$

5.5 Consideración de la Eficiencia del Uso del Capital en las Decisiones de Inversión

La *Eficiencia del Uso del Capital*, Ef, se puede definir como la cantidad de dinero que se necesita invertir para poder obtener cada unidad adicional de VPN. Expresado matemáticamente, es la relación entre el Valor Presente Neto, VPN y el Capital, Cx.

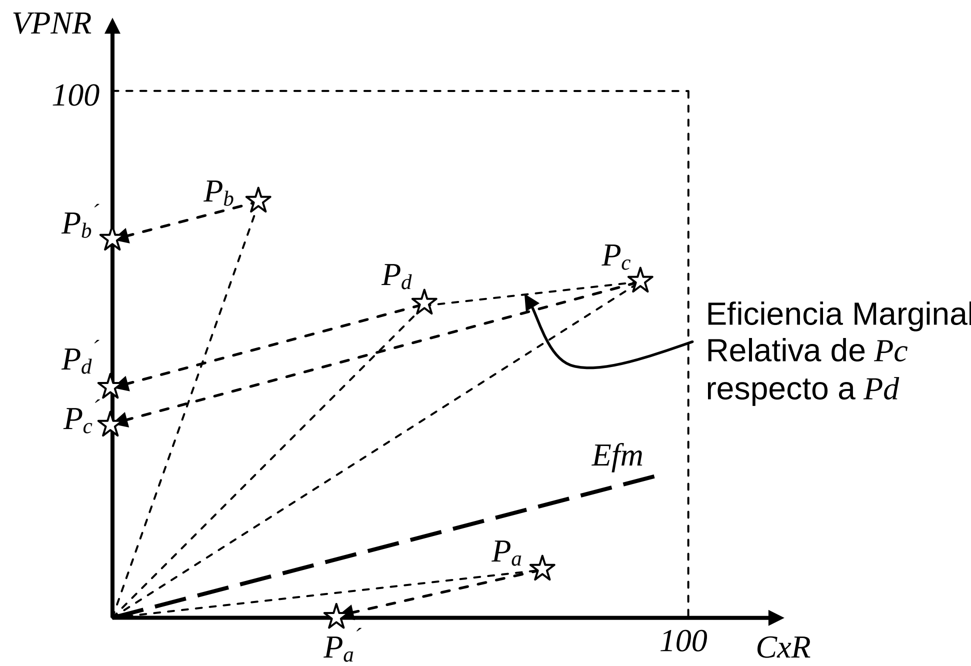
$$Ef = \frac{Cx}{VPN}$$

La importancia de esta variable se fundamenta en que ante diversas opciones de inversión, con diferentes rendimientos asociados, es necesario elegir aquellas a las que al capital invertido se saque el mayor provecho. No basta con utilizar únicamente el mayor rendimiento individual para seleccionar los proyectos, dado que pudiera haber opciones y/o combinaciones con necesidades menores de presupuesto y rendimientos superiores, es decir, con una Eficiencia de Inversión más alta. No obstante, no es suficiente tampoco con elegir las iniciativas con Eficiencias más altas, porque podrían obviarse oportunidades de inversión con rendimientos más elevados. En otras palabras, es necesario incluir las dos variables en el análisis. A continuación se presenta una metodología para realizar esta labor.

Cada iniciativa tiene una Eficiencia asociada Ef, pero existe para cada negocio una *Eficiencia Mínima* intrínseca o característica, Efm, que resulte de un mínimo que se considere aceptable de las inversiones exitosas que se realicen en su ámbito y que puede ser marcadora de las futuras inversiones que se puedan realizar. En otras palabras, la Eficiencia Mínima puede ser utilizada como un patrón de referencia para calificar y seleccionar proyectos, dentro del tipo de negocio en el que se realizan y puede obtenerse analizando diferentes experiencias históricas de inversión en otras empresas del ramo y con ello trazando un marcador para el negocio en general.

Para realizar la comparación de los proyectos según su *Ef*, se puede utilizar un plano cartesiano denominado *Diagrama de Eficiencia,* en el cual las abscisas representan el capital invertido, y las ordenadas el Valor Presente Neto del proyecto. Para facilitar la observación y los posteriores cálculos, se utilizarán los valores relativos a los máximos de cada variable, según se ha visto en las secciones anteriores, para acotar los valores entre 0 y 100, es decir, *VPNR* y *CxR*. Según estas dos coordenadas, cada proyecto tiene una posición en el diagrama, como a continuación se presenta:

DIAGRAMA DE EFICIENCIA



En el diagrama anterior la pendiente de la recta que une a cada proyecto con el origen representa la eficiencia en la inversión de capital de ese proyecto. Dado que el diagrama está normalizado, la eficiencia de cada proyecto, al igual que la eficiencia característica *Efm*, se encuentran multiplicadas por el término *Cxmayor/VPNmayor*, es decir,

$$CxR_i = \left(\frac{Cx_i}{Cx_{mayor}} \right) 100 \qquad (10)$$

$$VPNR_i = \left(\frac{VPN_i}{VPN_{mayor}} \right) 100$$

$$Ef_i = \left(\frac{VPN_i}{Cx_i} \right) \left(\frac{Cx_{mayor}}{VPN_{mayor}} \right) \qquad (11)$$

Aclarados estos conceptos, se puede observar en el diagrama que Pb es más eficiente que Pc en la inversión del capital, porque requiere menor inversión para obtener un VPN muy cercano a aquel. Ahora bien, si se traza una recta que una a dos proyectos, su pendiente representa el incremento marginal de VPN respecto a Cx, de un proyecto comparado con el otro, es decir, la *Eficiencia Marginal Relativa*. Este parámetro puede entenderse como el esfuerzo que hay que hacer, en términos de inversión, una vez alcanzado el rendimiento de un proyecto, para llegar al rendimiento del otro. Si la Eficiencia Marginal Relativa de un proyecto dado con respecto a otro es mayor a la Eficiencia Mínima, entonces es mejor opción que aquel y viceversa. Siguiendo este razonamiento entonces Pd es mejor opción que Pc, quien a su vez es mejor que Pa y Pb es mejor que todos los demás.

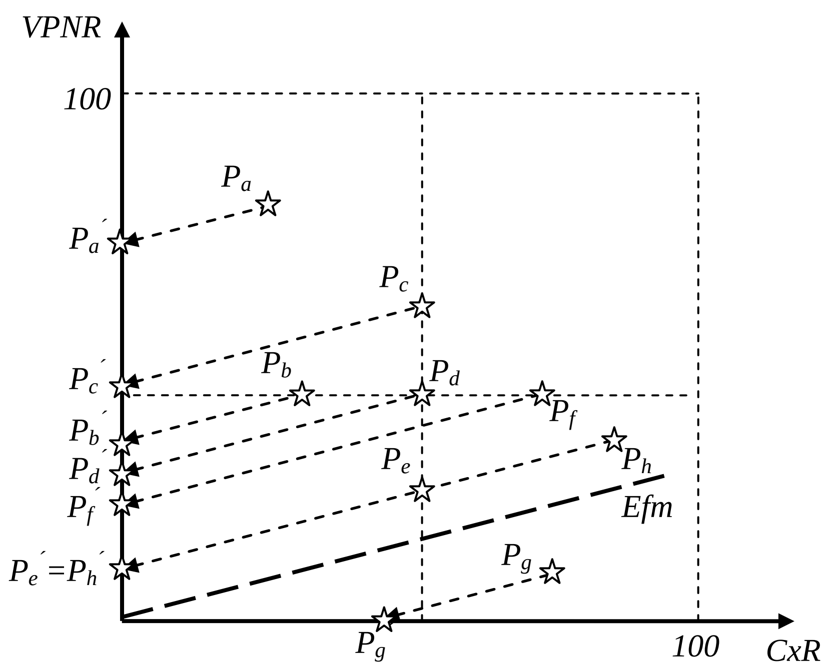
La ecuación de la Eficiencia Marginal Relativa entre dos proyectos, en el diagrama normalizado, es la siguiente:

$$Ef_{i-j} = \left(\frac{VPN_i - VPN_j}{Cx_i - Cx_j} \right) \left(\frac{Cx_{mayor}}{VPN_{mayor}} \right)$$

El método explicado en el párrafo anterior puede ser utilizado para comparar dos proyectos entre sí, pero también puede ser generalizado para comparar varios proyectos. Para la ordenación de las iniciativas en la escala de mejores opciones, según su eficiencia en el uso del capital, se establece como criterio proyectar cada proyecto hacia el eje de las ordenadas, utilizando una recta con la misma pendiente de la recta de la eficiencia mínima. El significado del punto de intersección no es otra cosa que la prima de rendimiento adicional que aporta cada proyecto, comparado con uno que aportara la eficiencia mínima y que utilizara el mismo capital. La utilización del eje de las ordenadas se fundamenta en que allí el proyecto se representa desprovisto de Capital y toda la rentabilidad que manifiesta es cuantificada como un aporte neto sobre el proyecto equivalente de eficiencia mínima.

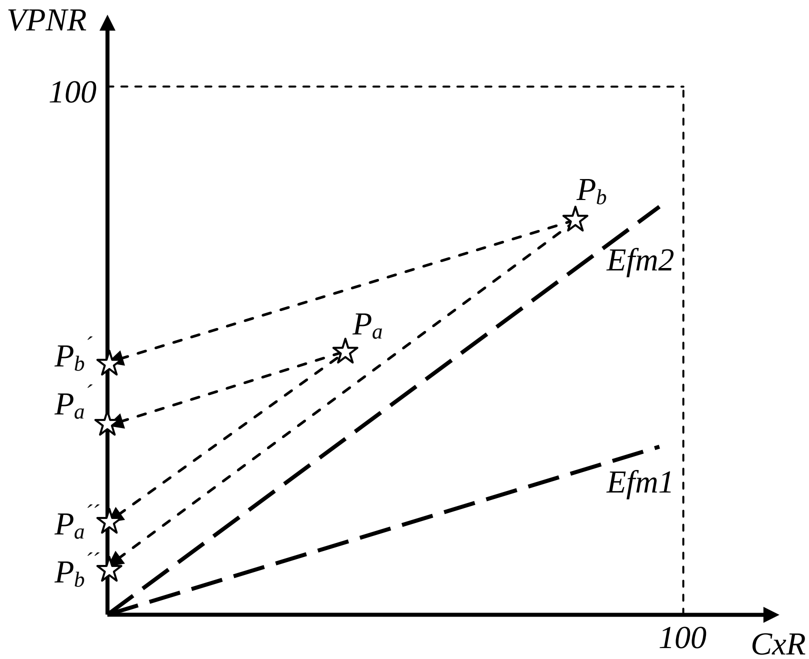
El orden de las proyecciones, tomado de mayor a menor, indicará las mejores opciones de elección de los proyectos. Por otro lado los proyectos que estén por debajo de la *Línea de Eficiencia Mínima*, serán descartados. Siguiendo este razonamiento la mejor opción de selección de los proyectos es *Pb, Pd, Pc* y *Pa* quedaría descartado.

Para validar estos conceptos, se muestran en el siguiente diagrama algunos casos representativos:



En el diagrama se puede observar que los proyectos *Pc, Pd y Pe* tienen el mismo Capital, pero diferentes *VPN*. En este caso la mejor elección sería el de mayor *VPN*, es decir, *Pc*. Por otro lado los proyectos *Pb, Pd* y *Pf* tienen el mismo *VPN* pero diferente Capital. En este caso la mejor opción es el que exige menor Capital, es decir, *Pb*. Por otro lado, el proyecto *Pa* tiene el mayor *VPN* con el menor Capital, por lo tanto debería ser la mejor opción y el proyecto *Pg* tiene una eficiencia menor que la Eficiencia Mínima seleccionada, por lo que este proyecto debería ser descartado. Tomando en cuenta todas esta consideraciones, el mejor orden de elección para estos proyectos sería entonces *Pa*, *Pc*, *Pb*, *Pd*, *Pf*, *Ph*, *Pe* y descartar *Pg*. Nótese que se elige a *Ph* antes que a *Pe*, dado que al estar ambos sobre la línea de Eficiencia Mínima, es mejor opción el de mayor *VPN*.

Es importante notar que dos proyectos pueden intercambiar sus posiciones en la elección, dependiendo de la Eficiencia Mínima elegida. Para ilustrar esto véase el siguiente gráfico, donde según *Efm1*, *Pb* es mejor que *Pa* y según *Efm2*, *Pa* es mejor que *Pb*.



Finalmente, para hallar analíticamente las posiciones de elección de los proyectos, puede utilizarse la ecuación de la recta, de la siguiente manera:

$$E_i = VPNR_i - EfmCxR_i \qquad (12)$$

5.6 Evaluación de las iniciativas de inversión a través de la aplicación combinada de los criterios de Incertidumbre, Aportación de Valor y Eficiencia del uso del Capital

En las secciones anteriores se ha mostrado como si bien el Valor Presente Neto es una variable de gran importancia a tomar en cuenta en los análisis y decisiones de inversión, no obstante no es la única. Todo inversionista desea obtener el mayor rendimiento de su inversión de capital y por ello elige aquellas iniciativas que lo maximizan, pero también existen otras variables, tales como el manejo de la Incertidumbre, el aporte de Valor y la Eficiencia en el uso del capital, que desearía incorporar en el análisis, porque optimizan o direccionan el uso de ese capital, según su conveniencia. El enfoque que se ha planteado es confrontar por separado cada una de las variables mencionadas con el Valor Presente Neto, garantizando la optimización de la relación entre ellos, de forma que se maximicen ambos, según ciertos criterios prácticos aportados por el inversionista.

Una vez realizadas las confrontaciones por separado de cada una de las variables con el valor Presente Neto y optimizadas sus relaciones con este importante factor, es posible continuar el análisis sin involucrarlo explícitamente. Con ello se ingresa a una segunda fase que contempla la optimización de la relación entre los resultados de la fase anterior. Para continuar es necesario mirar en perspectiva estos resultados y sus significados.

En primer lugar se ha visto como en el Diagrama de Incertidumbre las iniciativas pueden posicionarse a lo largo de la Línea de Tolerancia a la Incertidumbre, la cual se ubica en el diagrama de acuerdo a una decisión empírica del Inversionista, respecto a su tolerancia por la incertidumbre, que involucra en el fondo un equilibrio entre su avidez de ganancias versus su aversión al riesgo.

En segundo lugar se ha mostrado como en el Diagrama de Valor, cada iniciativa puede posicionarse a lo largo de la Línea de Valor, la cual se construye teniendo como base decisiones también empíricas del inversionista sobre lo que considera el aporte de Valor que cada proyecto representa para el negocio y el equilibrio que para él es óptimo entre esta aportación de valor y la rentabilidad de la iniciativa.

En tercer lugar se ha observado como en el Diagrama de Eficiencia se pueden posicionar las iniciativas según la prima de aporte de rentabilidad adicional por encima de proyectos ubicados en la medida de eficiencia mínima de uso de capital, tomada esta de la experiencia como patrón característico del negocio.

Los tres resultados mencionados ya llevan implícita, como se mencionó anteriormente, la maximización de la rentabilidad del proyecto, por lo cual es posible optimizar la relación entre ellos sin dejar de tomar en cuenta este factor, aunque no se haga explícitamente. Para hallar esta optimización es necesario recurrir nuevamente al criterio del inversionista, quien se supone debe conocer bien su negocio y sus propias aspiraciones, para definir la relación óptima entre las variables de estudio, a saber, Incertidumbre, Valor y Eficiencia del uso del Capital. A continuación se proporciona el método analítico para obtener el resultado de la aplicación de este criterio y de esta manera encontrar definitivamente la mejor opción entre todas las posibles.

En lo sucesivo se hará referencia a las variables simplemente por las iniciales I, V y E, al mencionar la Incertidumbre, Aportación de Valor y Eficiencia de Uso de Capital, respectivamente. Cada variable representará uno de tres ejes ortogonales en el espacio cartesiano. A las coordenadas del proyecto sobre estos ejes se les denominará respectivamente I_i, V_i y E_i. La correspondencia entre estas coordenadas y los resultados obtenidos en los análisis vistos son: $I_i = VPNR_i{}'$ de la sección 6.3, que corresponde a la posición sobre la línea LPTI. De igual manera

V_i de la sección 6.4, corresponde a la posición sobre la Línea de Valor y finalmente E_i de la sección 6.5, que corresponde a la posición en el eje de rentabilidad que coincide con la ordenada VPNR. Definido de esta manera, cada proyecto P_i está identificado en el espacio cartesiano por las coordenadas (I_i, V_i, E_i).

Para definir la relación óptima entre las variables, debe utilizarse la ecuación continua de la recta en el espacio cartesiano, a saber:

$$\frac{I - p_1}{v_1} = \frac{V - p_2}{v_2} = \frac{E - p_3}{v_3}$$

Como en este caso la recta pasa por el origen, se puede elegir este punto para definir los valores de p_i, de forma tal que la ecuación adquiere la siguiente forma:

$$\frac{I}{v_1} = \frac{V}{v_2} = \frac{E}{v_3} \qquad (13)$$

A esta recta se le define como *Línea de Optimización*. Los valores v_1, v_2 *y* v_3 representan al vector director y por definición son las ponderaciones individuales empíricas de las variables en consideración. Pueden ser números reales positivos o iguales a cero, pero no pueden ser todos a la vez igual a cero. Mientras mayor es un valor respecto a los demás, mayor es la importancia que el inversionista asigna a esa variable. La relación entre estos valores constituye la priorización de una variable con respecto a la otra y la proporciona el inversionista de acuerdo a su experiencia y expectativas.

Análogamente al plano cartesiano, la proyección ortogonal $P_i´$, de un proyecto cualquiera sobre la recta, representa su posición en la Línea de Optimización porque constituye la menor distancia a esa línea. Usando este método como criterio de ordenación de las iniciativas en la escala de mejores opciones, mientras mayor es la distancia con respecto al origen del resultado de esta proyección, mejor opción representa el proyecto con respecto a los demás. Similar al plano, la proyección describe una esfera al variar la dirección de la Línea de Optimización, o en otras palabras, la relación entre los valores de las ponderaciones de las variables.

La ecuación de la esfera de proyección es la siguiente:

$$\left(I-\frac{I_i}{2}\right)^2+\left(V-\frac{V_i}{2}\right)^2+\left(E-\frac{E_i}{2}\right)^2=\frac{I_i^{\,2}+V_i^{\,2}+E_i^{\,2}}{4}$$

La esfera toca al origen del espacio cartesiano, al proyecto y a cada una de las coordenadas de este en los ejes. Estos cinco puntos la determinan inequívocamente. Su centro está ubicado en el punto que tiene como coordenadas la mitad de cada una de las coordenadas del proyecto.

La intersección con la Línea de optimización tiene las siguientes coordenadas:

$$I_i{'}=\frac{v_1\left(v_1 I_i+v_2 V_i+v_3 E_i\right)}{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}$$

$$V_i{'}=\frac{v_2\left(v_1 I_i+v_2 V_i+v_3 E_i\right)}{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}$$

$$E_i{'}=\frac{v_3\left(v_1 I_i+v_2 V_i+v_3 E_i\right)}{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}+v_3^{\,2}}$$

Esas coordenadas corresponden a la proyección del proyecto sobre la Línea de Optimización. La distancia desde el origen hasta el punto de proyección en la línea, representa la posición competitiva de este con respecto a los demás. A mayor distancia mejor posición. La distancia se consigue aplicando la siguiente ecuación:

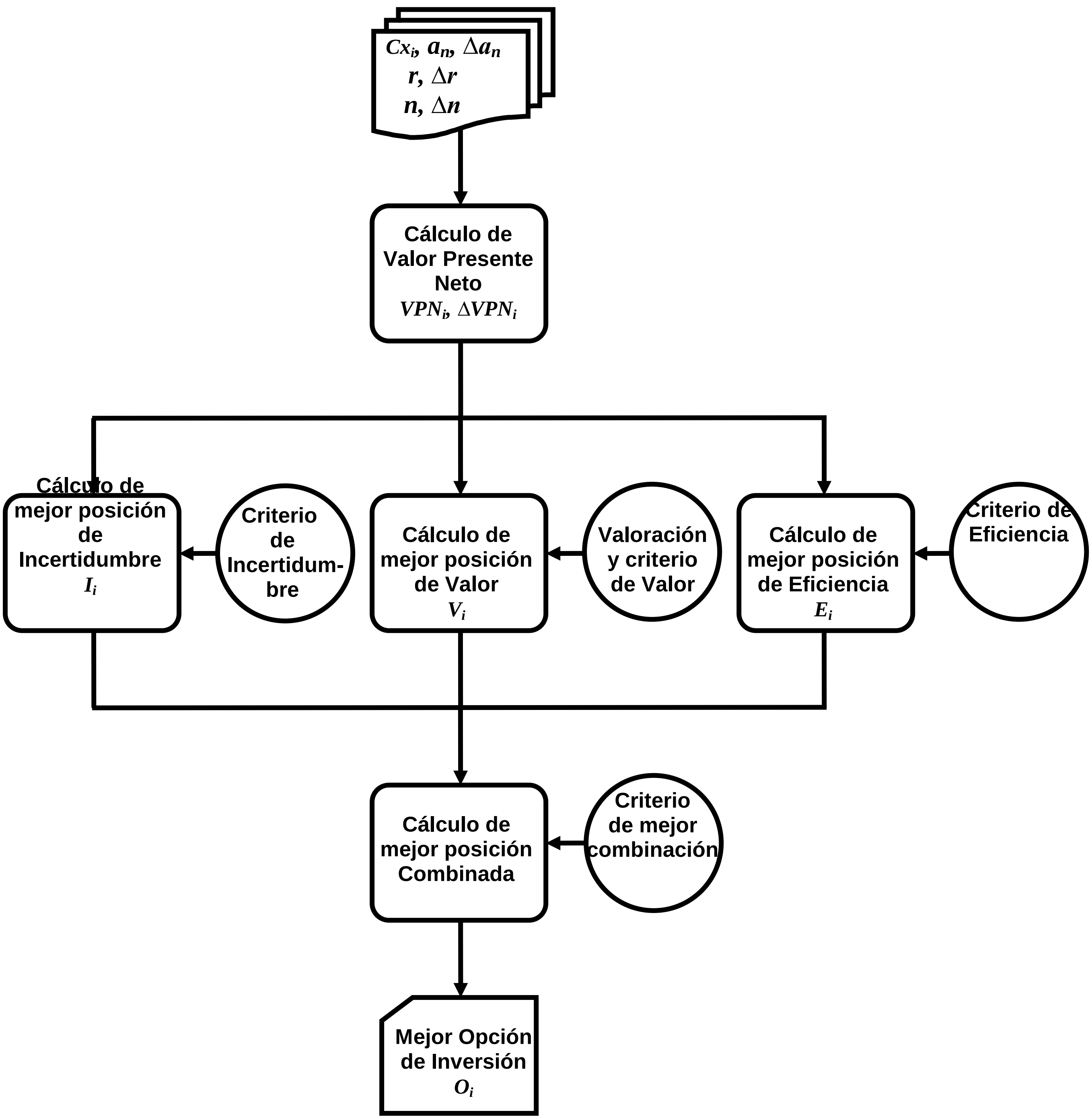
$$O_i=\mathrm{mod}(P_i{'})=\sqrt{I_i{'}^2+V_i{'}^2+E_i{'}^2}$$

Para obtener:

$$O_i = \frac{v_1 I_i + v_2 V_i + v_3 E_i}{\sqrt{v_1^{\ 2} + v_2^{\ 2} + v_3^{\ 2}}} \qquad (14)$$

Las ecuaciones vistas, en conjunto con los diagramas y criterios señalados, conforman la metodología para el *Modelo de Optimización de Inversiones en Condiciones de Incertidumbre.* A continuación se muestra un gráfico que ilustra en forma resumida el flujograma del modelo:

FLUJOGRAMA DEL MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE INVERSIONES EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE



5.7 Ejemplo práctico de aplicación del Modelo

En el ejemplo práctico que se muestra a continuación se parte de un proyecto base con las siguientes características:

- Inversión: Un millón de dólares, en el año cero
- Un capital que consiste en la inversión inicial de un millón de dólares
- Ingresos anuales de 200 mil dólares, desde el primer año hasta el año 15
- Tasa de descuento del 10%
- El primer proyecto, ***P1***, tiene una incertidumbre del 10% en la estimación del tiempo en que cada ingreso ocurrirá. El proyecto 2, ***P2***, tiene una incertidumbre del 10% del monto del ingreso anual. El proyecto 3, ***P3***, tiene ambas incertidumbres.
- Todos los proyectos tienen la incertidumbre en el 10% de la tasa de descuento.
- A continuación los resultados obtenidos:

P1					
VPN	***521,22***	***ΔVPN***	***177,87***		
n	***Δn***	***an***	***Δan***	***VP(n)***	***ΔVP(n)***
0	0,00	-1000	0	-1000,00	0,00
1	0,10	200	0	181,82	3,39
2	0,20	200	0	165,29	6,16
3	0,30	200	0	150,26	8,39
4	0,40	200	0	136,60	10,18
5	0,50	200	0	124,18	11,56
6	0,60	200	0	112,89	12,61
7	0,70	200	0	102,63	13,38
8	0,80	200	0	93,30	13,90
9	0,90	200	0	84,82	14,22
10	1,00	200	0	77,11	14,36
11	1,10	200	0	70,10	14,36
12	1,20	200	0	63,73	14,24
13	1,30	200	0	57,93	14,02
14	1,40	200	0	52,67	13,73
15	1,50	200	0	47,88	13,37
r	*0,10*	***Δr***	*0,01*		

P2					
VPN	***521,22***	***ΔVPN***	***238,95***		
n	***Δn***	***an***	***Δan***	***VP(n)***	***ΔVP(n)***
0	0,00	-1000	0	-1000,00	0,00
1	0,00	200	20	181,82	19,83
2	0,00	200	20	165,29	19,53
3	0,00	200	20	150,26	19,12
4	0,00	200	20	136,60	18,63
5	0,00	200	20	124,18	18,06
6	0,00	200	20	112,89	17,45
7	0,00	200	20	102,63	16,79
8	0,00	200	20	93,30	16,12
9	0,00	200	20	84,82	15,42
10	0,00	200	20	77,11	14,72
11	0,00	200	20	70,10	14,02
12	0,00	200	20	63,73	13,32
13	0,00	200	20	57,93	12,64
14	0,00	200	20	52,67	11,97
15	0,00	200	20	47,88	11,32
r	*0,10*	***Δr***	*0,01*		

P3					
VPN	***521,22***	***ΔVPN***	***329,99***		
n	***Δn***	***an***	***Δan***	***VP(n)***	***ΔVP(n)***
0	0,00	-1000	0	-1000,00	0,00
1	0,10	200	20	181,82	21,57
2	0,20	200	20	165,29	22,68
3	0,30	200	20	150,26	23,42
4	0,40	200	20	136,60	23,84
5	0,50	200	20	124,18	23,98
6	0,60	200	20	112,89	23,90
7	0,70	200	20	102,63	23,64
8	0,80	200	20	93,30	23,23
9	0,90	200	20	84,82	22,70
10	1,00	200	20	77,11	22,07
11	1,10	200	20	70,10	21,37
12	1,20	200	20	63,73	20,61
13	1,30	200	20	57,93	19,82
14	1,40	200	20	52,67	19,00
15	1,50	200	20	47,88	18,16
r	*0,10*	***Δr***	*0,01*		

				P1	***P2***	***P3***
VPNmayor	521,22		***VPN***	521,22	521,22	521,22
LPT	5	Incertidumbre	***ΔVPN***	177,87	238,95	329,99
			IPi (%)	34	46	63
			VPNRi (%)	100	100	100
			Ii (VPNRi')	**70,87**	**59,15**	**41,69**

En la tabla anterior se puede observar que los tres proyectos tienen el mismo VPN, sin embargo las incertidumbres son diferentes para todos, siendo P3 el proyecto de mayor incertidumbre. En las dos primeras columnas de la tabla se colocan los valores elegidos para LPT, por un inversionista hipotético con unas preferencias determinadas.

La posición elegida para la Línea de Posición de Tolerancia es la de una incertidumbre porcentual igual a cinco, 5. De esta manera el Diagrama de Incertidumbre arroja las posiciones 70,87; 59,15 y 41,69 para los proyectos P1, P2 y P3 respectivamente, concluyendo de esta forma que este es el orden de mejor opción para la selección, de acuerdo al parámetro de la incertidumbre.

Si la posición del inversionista fuera de mayor aceptación a la incertidumbre, en el valor porcentual 39,99 de la LPT se igualarían los proyectos P1 y P2 y a partir de entonces el Proyecto P2 pasaría a ser la mejor opción. De esta forma,

				P1	***P2***	***P3***
VPNmayor	521,22		***VPN***	521,22	521,22	521,22
LPT	45	Incertidumbre	***ΔVPN***	177,87	238,95	329,99
			IPi (%)	34	46	63
			VPNRi (%)	100	100	100
			Ii (VPNRi')	**89,13**	**99,15**	**81,69**

Como se puede observar en la tabla anterior, para un valor porcentual de 45 para la LPT, el proyecto P2 pasó a ser la mejor opción, seguido por P1 y luego P3, como consecuencia de la nueva posición de tolerancia elegida por el inversionista.

De igual manera en la posición de tolerancia en 54,58 se igualan las posiciones de los proyectos P2 y P3, de forma tal que por encima de este valor P3 pasa a ser la mejor opción.

				P1	*P2*	*P3*
VPNmayor	521,22		*VPN*	521,22	521,22	521,22
LPT	60	Incertidumbre	*ΔVPN*	177,87	238,95	329,99
			IPi (%)	34	46	63
			VPNRi (%)	100	100	100
			Ii (VPNRi')	**74,13**	**85,85**	**96,69**

En la tabla anterior P3 es la mejor opción, seguido por P2 y luego por P1, como consecuencia de la posición porcentual de la LPT elegida en 60.

En la siguiente tabla se muestra la posición de cada proyecto según el Diagrama de Valor, considerando que en la Tabla de Valor las puntuaciones de los proyectos P1, P2 y P3 fueron 20, 30 y 20 respectivamente. Así mismo se eligió la relación de tres a uno entre la variable rentabilidad y valor, obteniéndose:

				P1	*P2*	*P3*
v2 (valor)	1	Valor	*CAVi (%)*	20	30	20
v1 (rentabilidad)	3		*Vi*	**101,19**	**104,36**	**101,19**

Como se puede observar la mejor puntuación la obtuvo el proyecto P2 y en el segundo lugar quedaron P1 y P3 con igual puntuación.

El capital de cada proyecto en el caso de estudio es el mismo, por lo cual el Diagrama de Eficiencia arroja la misma puntuación para todos los proyectos. En este caso se eligió la Línea de Eficiencia Mínima en la posición 0,4 obteniendo 60 puntos para cada proyecto.

				P1	P2	P3
Cxmayor	1000	Eficiencia	*Cxi*	1.000	1.000	1.000
Efm	0,4		*CxRi (%)*	100	100	100
			Ei	**60,00**	**60,00**	**60,00**

Si se hubiera elegido la eficiencia mínima en uno, la puntuación sería cero para todos los proyectos y por encima de ese valor, los proyectos serían descartados como se muestra a continuación:

				P1	P2	P3
Cxmayor	1000	Eficiencia	*Cxi*	1.000	1.000	1.000
Efm	2		*CxRi (%)*	100	100	100
			Ei	**-100,00**	**-100,00**	**-100,00**

Finalmente el modelo completo aplicado a los tres proyectos utilizando una relación entre las variables Incertidumbre, valor y eficiencia igual a 3, 2, 3 respectivamente, produce el siguiente resultado

				P1	P2	P3
VPNmayor	521,22		*VPN*	521,22	521,22	521,22
LPT	45	Incertidumbre	*ΔVPN*	177,87	238,95	329,99
			IPi (%)	34	46	63
			VPNRi (%)	100	100	100
			Ii (VPNRi')	**89,13**	**99,15**	**81,69**
v2 (valor)	1	Valor	*CAVi (%)*	20	30	20
v1 (rentabilidad)	3		*Vi*	**101,19**	**104,36**	**101,19**
Cxmayor	1000	Eficiencia	*Cxi*	1.000	1.000	1.000
Efm	0,4		*CxRi (%)*	100	100	100
			Ei	**60,00**	**60,00**	**60,00**
v3 (eficiencia)	3	Selección final				
v2 (valor)	2					
v1 (incertidumbre)	3		*Oi*	**138,53**	**146,29**	**133,77**

Donde P2 obtuvo la mejor puntuación total, seguida por P1 y luego por P3. Sin embargo, si la posición de Tolerancia hubiera sido de 5% las mejores opciones hubieran sido P1, luego P2 y finalmente P3 como se muestra a continuación

				P1	***P2***	***P3***
VPNmayor	521,22		***VPN***	521,22	521,22	521,22
LPT	5	Incertidumbre	***ΔVPN***	177,87	238,95	329,99
			IPi (%)	34	46	63
			VPNRi (%)	100	100	100
			Ii (VPNRi')	**70,87**	**59,15**	**41,69**
v2 (valor)	1	Valor	***CAVi (%)***	20	30	20
v1 (rentabilidad)	3		***Vi***	**101,19**	**104,36**	**101,19**
Cxmayor	1000	Eficiencia	***Cxi***	1.000	1.000	1.000
Efm	0,4		***CxRi (%)***	100	100	100
			Ei	**60,00**	**60,00**	**60,00**
v3 (eficiencia)	3	Selección final				
v2 (valor)	2					
v1 (incertidumbre)	3		***Oi***	**126,86**	**120,71**	**108,19**

Aunque P1 pudiera lograr obtener el primer lugar si el inversionista le diera mucho más importancia al Valor, como se muestra a continuación

				P1	***P2***	***P3***
VPNmayor	521,22		***VPN***	521,22	521,22	521,22
LPT	5	Incertidumbre	***ΔVPN***	177,87	238,95	329,99
			IPi (%)	34	46	63
			VPNRi (%)	100	100	100
			Ii (VPNRi')	**70,87**	**59,15**	**41,69**
v2 (valor)	1	Valor	***CAVi (%)***	20	30	20
v1 (rentabilidad)	3		***Vi***	**101,19**	**104,36**	**101,19**
Cxmayor	1000	Eficiencia	***Cxi***	1.000	1.000	1.000
Efm	0,4		***CxRi (%)***	100	100	100
			Ei	**60,00**	**60,00**	**60,00**
v3 (eficiencia)	1	Selección final				
v2 (valor)	5					
v1 (incertidumbre)	1		***Oi***	**122,56**	**123,35**	**116,94**

5.8 Selección de la mejor combinación de iniciativas en un marco de restricción de capital, mediante la Optimización de Beneficios Totales

En muchas ocasiones los inversionistas se encuentran en la situación de que el capital requerido para la ejecución de todas las iniciativas identificadas, es superior al capital real disponible. También puede ocurrir que ese capital máximo aprobado para la inversión, o el que finalmente se pudo conseguir, no alcanza ni siquiera para ejecutar la mejor iniciativa, o si alcanza para la primera, ya el restante no alcanza para la segunda opción sino para la tercera o la cuarta, o cualquiera de las demás. En otras palabras, si el capital es limitado y se desea usarlo completamente, no es posible elegir las iniciativas según el orden de mejor opción de inversión descrito, sino que es necesario sacrificar algunas mejores por otras peores, según lo permita el monto restante. En ese contexto se requiere de una metodología que permita obtener la combinación óptima de las iniciativas disponibles, de tal forma que se maximice el uso del capital aprobado para la inversión.

Para hallar el método buscado se puede comenzar por entender que la línea de optimización y la posición de las iniciativas sobre ella, constituyen una escala de valorización asociada a las puntuaciones alcanzadas por estas, como resultado de la confrontación de sus capacidades de aportación de valor, eficiencia en el uso del capital e incertidumbre, optimizadas según los criterios del inversionista, respecto a la rentabilidad de cada una de ellas. Visto de esta manera, la puntuación asociada a las diferentes iniciativas sobre la línea es una medida de valoración individual sobre una escala, que se puede sumar a las demás iniciativas, para conseguir puntuaciones más altas. Mientras más alta sea la sumatoria de las puntuaciones de las iniciativas, es decir, la puntuación colectiva, que a partir de este momento se denominará en este documento *Beneficio Total*, mejor será esa combinación de inversiones para el negocio.

La conclusión importante de la reflexión del párrafo anterior, es que las puntuaciones de las iniciativas sobre la Línea de Optimización pueden sumarse o agregarse, para conseguir las combinaciones que mejoren los beneficios colectivos de la inversión. Dicho de otra forma, para el negocio importa, más que el valor individual de una iniciativa, la combinación de aquellas que maximicen el beneficio. Este principio puede ser utilizado para maximizar el uso del capital disponible, a la vez que se maximiza el Beneficio Total. Para ello debe encontrarse el resultado de todas las combinaciones posibles con las diferentes iniciativas y seleccionar aquella combinación Ci tal que cumpla simultáneamente la condición de que el Beneficio Total BT_i sea el mayor de todas, y que requiera un *Capital Total* CT_i menor o igual al *Capital Disponible* CD.

La mejor manera de visualizar la conclusión anterior, es dibujando un plano cartesiano donde las ordenadas están representadas por la variable Beneficio Total, BT y las abscisas por la variable Capital Total, CT. Cada combinación Ci estará representada en el plano por un punto con el par de coordenadas (BT_i, CT_i). El área de acotada por el eje de las ordenadas, es decir $CT=0$, y la vertical que pasa por el punto $(CD, 0)$ contendrá aquellas combinaciones elegibles, porque su Capital Total es menor al Disponible. En esa área la combinación que tenga el mayor BT es la mejor opción.

Para hallar la cantidad máxima de combinaciones posibles, en un conjunto de M iniciativas, se debe hacer uso de la fórmula que expresa la cantidad de combinaciones posibles de M elementos en grupos de cantidad r [9.10]

$$C_r^M = \frac{M!}{(M-r)!\,r!}$$

Como se desea incluir cualquier combinación desde una iniciativa individual hasta todas las M existentes, entonces la *Cantidad Total de Combinaciones Posibles, CTCP* será:

$$CTCP = \sum_{r=1}^{M} \frac{M!}{(M-r)!r!} \qquad (15)$$

Para ordenar los cálculos se puede partir de una T*abla de Combinación de Iniciativas* como se muestra a continuación:

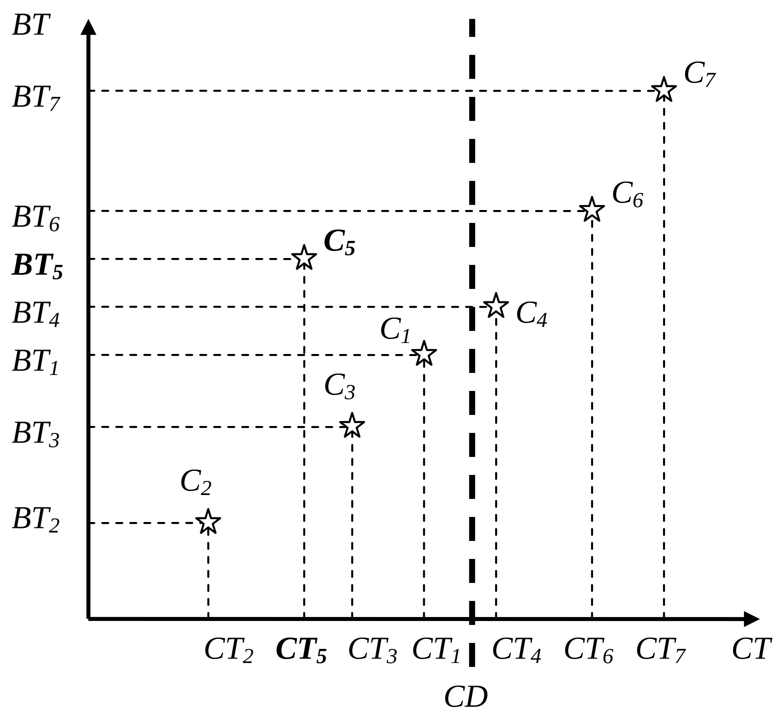
TABLA DE COMBINACION DE INICIATIVAS

Combinación	**Beneficio Total BT_i**	**Capital Total CT_i**
C_1	O_1	C_1
C_2	O_2	C_2
C_3	:	:
:	O_M	C_M
:	O_1+O_2	C_1+C_2
	O_1+O_3	C_1+C_3
	:	:
	:	:
	$O_1+O_2+O_3$	$C_1+C_2+C_3$
	$O_1+O_2+O_4$	$C_1+C_2+C_4$
	:	:
	:	:
C_{CTCP}	$O_1+O_2+\ldots+O_M$	$C_1+C_2+\ldots+C_M$

No puede haber ninguna combinación que no esté representada en la tabla, de forma que la combinación que sume más beneficios, es decir, cuyo Beneficio Total sea mayor y cuyo Capital Total sea menor al Capital Disponible, será elegida como mejor opción. El Capital disponible restante no se podrá utilizar con las iniciativas conocidas.

En el siguiente diagrama, que se denominará en este documento *Diagrama de Combinaciones*, se muestra un ejemplo con tres iniciativas para las cuales existen, según la ecuación (15), siete combinaciones posibles. Se colocan en el plano cartesiano todos los pares Beneficio-Capital, para observar que la combinación número cinco es la mejor opción:

DIAGRAMA DE COMBINACIONES



5.9 Ejemplo práctico de aplicación de la selección de la mejor combinación de iniciativas mediante la Optimización de Beneficios Totales

Volviendo al ejemplo de los proyectos P1, P2 y P3, con la variante de que los proyectos requieren diferentes capitales para su ejecución, se obtiene, asumiendo algunas posiciones del inversionista expresadas en la LPT, Efm y coeficientes de relación entre variables, lo siguiente:

				P1	*P2*	*P3*
VPNmayor	621,22		*VPN*	521,22	621,22	421,22
LPT	40	Incertidumbre	Δ*VPN*	177,87	238,95	329,99
			IPi (%)	34	38	78
			VPNRi (%)	84	100	68
			Ii (VPNRi')	**78,97**	**98,47**	**41,81**
v2 (valor)	1	Valor	*CAVi (%)*	20	30	20
v1 (rentabilidad)	3		*Vi*	**85,92**	**104,36**	**70,65**
Cxmayor	1100	Eficiencia	*Cxi*	1.000	900	1.100
Efm	0,4		*CxRi (%)*	91	82	100
			Ei	**47,54**	**67,27**	**27,81**
v3 (eficiencia)	2	Selección final				
v2 (valor)	5					
v1 (incertidumbre)	2		*Oi*	**118,83**	**148,53**	**85,73**

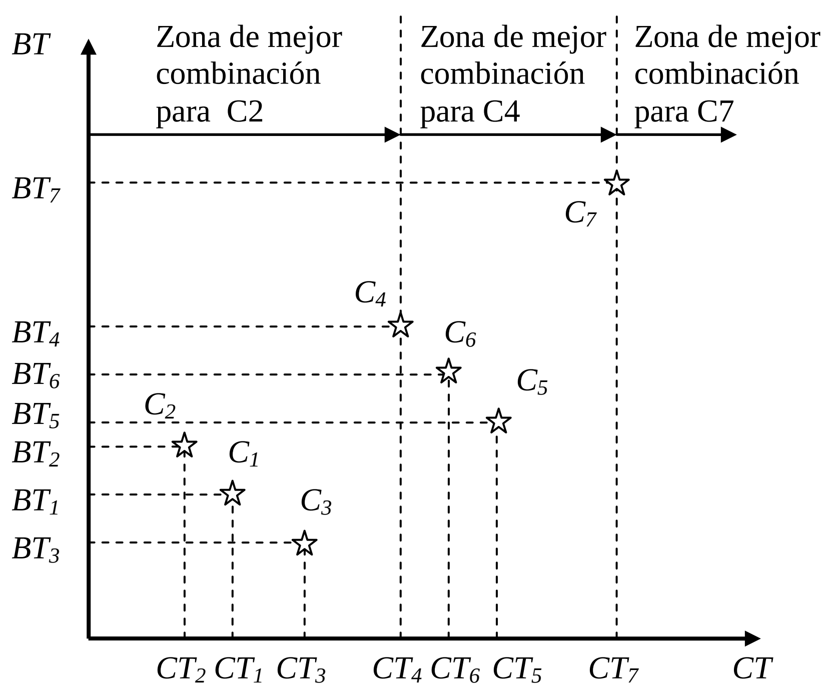
Se puede observar que el capital requerido por los proyectos P1, P2 y P3, es de 1; 0,9 y 1,1 millones de dólares respectivamente, por lo cual sus puntuaciones O_i variaron sustancialmente con respecto a los ejemplos mostrados anteriormente. También se puede observar que el inversionista tiene una tolerancia a la incertidumbre relativamente alta, 40%, que le da bastante importancia a la rentabilidad respecto al valor, tres a uno y finalmente que respecto a la eficiencia y la incertidumbre le da mucho más importancia al valor. Bajo las condiciones mostradas P2 es la mejor opción, seguido por P1 y P3.

Ahora supóngase que el inversionista posee restricciones de capital y no puede ejecutar todos los proyectos, pero tiene posibilidades de ejecutar más de uno. Obsérvese a continuación la Tabla de Combinación de Iniciativas, construida para este ejemplo:

TABLA DE COMBINACION DE INICIATIVAS

Combinación Ci	Beneficio Total BT_i	Capital Total CT_i
C1=P1	118,83	1.000
C2=P2	148,53	900
C3=P3	85,73	1.100
C4=P1+P2	267,36	1.900
C5=P1+P3	204,56	2.100
C6=P2+P3	234,26	2.000
C7=P1+P2+P3	353,09	3.000

De la tabla se desprende que P2 es la mejor opción individual, pero a medida que el inversionista logra obtener más capital, las combinaciones pueden añadir otros proyectos, por ejemplo si alcanza los 1900 Millones (C4), puede incluir P1 y si alcanza los tres millones (C7), puede incluir P3.



6 Análisis comparativo del Modelo de Optimización de Inversiones en Condiciones de Incertidumbre con otros modelos

6.1 Diferencia entre Riesgo e Incertidumbre

El economista norteamericano Frank H. Knight en su libro “Riesgo, Incertidumbre y Beneficio” hace la distinción entre riesgo e incertidumbre, entendido lo primero como aleatoriedad con probabilidades conocidas, e incertidumbre como aleatoriedad sin probabilidades conocidas. El autor considera que el beneficio empresarial surge de la diferencia entre las previsiones y lo que realmente ocurre [9.6].

Herbert A. Simon, premio Nóbel de Economía 1978 por su investigación pionera en el procedimiento de toma de decisiones dentro de organizaciones económicas, defiende la tesis de que las empresas actúan para alcanzar objetivos que no son los óptimos desde el punto de vista de la racionalidad. Su conducta es más compleja y por tal razón no se fundamenta en el principio del beneficio máximo, sino de elegir alternativas satisfactorias [9.6].

Daniel Kahneman recibe el Premio Nóbel de Economía 2002 por haber integrado los avances de la investigación psicológica en la ciencia económica especialmente en lo que se refiere al juicio humano y a la adopción de decisiones bajo incertidumbre. A partir de la publicación en 1979 de sus articulo "Teoría de la prospección" (7) D. Kahneman y Amos Tversky desarrollan la llamada “teoría prospectiva”, según la cual las decisiones en situación de incertidumbre difieren de los principios básicos de la teoría de la probabilidad. Por ejemplo, en esta teoría se destaca que en el comportamiento humano normalmente se realiza una aversión a la pérdida: un individuo prefiere no perder 100 dólares antes que ganar 100 dólares [9.6].

A pesar de que aparecen algunas diferencias en los detalles, en la mayoría de las definiciones el riesgo empresarial se interpreta en el espacio de categorías como incertidumbre, probabilidades, alternativas, perdidas. El riesgo empresarial tiene su fundamento en el carácter probabilístico de la actividad empresarial, así como en la relativa incertidumbre situacional en que se desarrolla esta actividad. De este modo la actividad empresarial se acompaña necesariamente por una dosis de incertidumbre que predetermina la necesidad de elegir entre diferentes alternativas y de tomar decisiones en situación de información incompleta.

El riesgo empresarial podría definirse como un fenómeno subjetivo-objetivo del proceso de toma de decisión entre diferentes alternativas en situación de incertidumbre, con la probabilidad de ocasionar efectos negativos en los objetivos de la empresa, produciendo después de realizarse la acción decidida un resultado peor del previsto. De tal modo el riesgo se presenta como un fenómeno complejo, de carácter objetivo y a la vez subjetivo que incluye [9.8]:

- La situación de incertidumbre como contexto y condición objetiva del riesgo
- El acto de tomar decisiones sobre la base de información incompleta
- La vivencia de vacilación motivada por la probabilidad de pérdidas o fracasos como resultado de la realización de la alternativa privilegiada.

En parte el riesgo es “situación”, porque no hay riesgos donde no hay incertidumbre, pero no es sólo la situación incierta porque puede haber incertidumbre sin riesgo. El riesgo es un proceso de toma de decisiones porque no hay riesgos donde no se presentan diferentes opciones y no se asigna la preferencia a una de ellas. Los riesgos empresariales son principalmente decisiones, eventos o procesos, ejecutados (u omitidos) en situación de incertidumbre, que potencialmente/probablemente originan resultados en forma de pérdidas o de beneficios para la empresa.

6.2 Descripción y análisis de los métodos de evaluación de proyectos de inversión en condiciones de riesgo

Es posible distinguir entre una inversión en riesgo o en incertidumbre en función de la cantidad de información que se conoce sobre dicha inversión. En la práctica, si se conocen los estados posibles y la probabilidad asociada a los mismos, se está en caso de inversión en riesgo y si solo se conocen los estados de la naturaleza pero no las probabilidades, entonces se está ante un caso de incertidumbre.

Si ante una decisión de inversión la empresa se enfrenta con diferentes recursos de acción alternativos, es decir, cada proyecto ofrece varios resultados posibles a los que se puede asignar coeficientes de probabilidad, entonces en estas condiciones de riesgo existen algunos métodos de evaluación y decisión que se pueden aplicar, como los que se muestran a continuación [9.7] [9.8] [9.9]:

6.2.1 Método de la Distribución de Probabilidad

Si se considera que el inversionista es capaz de plantear los distintos sucesos que condicionan el resultado de su decisión, la adopción de decisiones de inversión exige la determinación de la distribución de probabilidad de los flujos de caja generados por el proyecto. Así, se define un proyecto de inversión por un determinado conjunto de flujos de caja con unas determinadas distribuciones de probabilidad, cada una de ellas con una media y una desviación típica.

Formalmente, el valor esperado de cada uno de los flujos de caja en cada momento de tiempo, dados J estados, viene dado por:

$$E(a_n) = \sum_{j=1}^{J} P(a_{nj}) \rightarrow \forall n \in \{1,2,\cdots,N\}$$

El riesgo de una inversión está asociado a la variabilidad de los distintos flujos de caja que componen dicha inversión. Una medida adecuada del riesgo se obtiene a través de la varianza o desviación típica de cada uno de los flujos de caja.

$$VAR(a_n) = E\left[a_{nj} - E(a_n)\right]^2 = \sum_{j=1}^{J} P(a_{nj})\left[a_{nj} - E(a_n)\right]^2$$

Y el VPN que se espera obtener es

$$E[VPN] = \sum_{n=1}^{N} \frac{E(a_n)}{(1+r)^n}$$

Si bien el cálculo del valor esperado del proyecto es directo, la medida del riesgo es compleja en el caso de proyectos con una vida útil de múltiples períodos, dado que el cálculo de la varianza del proyecto depende de la correlación existente entre los distintos flujos de caja. La fórmula general es la siguiente:

$$\sigma^2(VPN) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} \frac{\sigma(a_j)}{(1+r)^j} \frac{\sigma(a_k)}{(1+r)^k} \rho_{jk}$$

Donde

$\sigma(a_j)$ y $\sigma(a_k)$ son las desviaciones típicas de los flujos j y k

ρ_{jk} es la correlación entre los flujos de caja j y k

Una vez que se ha estimado el riesgo del proyecto se puede utilizar dicha cifra directamente o calcular el coeficiente de variación que es una medida de dispersión relativa que se obtiene dividiendo la desviación típica del proyecto entre su valor esperado,

$$CV = \frac{\sigma(VPN)}{E(VPN)}$$

6.2.2 Método del Valor Esperado Máximo

Este método utiliza los resultados del Método de Distribución de Probabilidad y establece que un inversor racional elegirá aquella inversión que le proporcione el VPN esperado máximo, $E(VPN)$, sin embargo tiene el inconveniente de que no considera el riesgo.

6.2.3 Método del Ajuste de la Tasa de descuento

Este método también se basa en el Método de Distribución de Probabilidad y considera el riesgo de un proyecto de inversión ajustando la tasa de descuento que se utiliza para la actualización de los flujos de caja. Cuánto más riesgo tenga la inversión más se penalizará la tasa de descuento. De esta forma cada inversión tendrá una penalización distinta en función de su riesgo, pero una vez consideradas las penalizaciones a aplicar se pueden comparar directamente los valores actuales netos de los distintos proyectos.

$$r^* = r + p$$

Donde p es la penalización de la tasa de descuento en función del proyecto y el grado de aversión al riesgo del inversor. Así el Valor Presente neto Esperado se calcula como:

$$E(VPN) = \sum_{n=0}^{N} \frac{E(a_n)}{(1 + r^*)^n}$$

Una de las críticas que recibe este método es que penaliza los proyectos con vencimientos más prolongados. Un segundo problema se deriva de que la determinación de la penalización que se aplica a cada proyecto en función de su riesgo es subjetiva y no sigue ningún procedimiento preestablecido.

6.2.4 Método del Equivalente Cierto

Este método también se basa en el Método de Distribución de Probabilidad y consiste en el ajuste de los flujos netos de caja esperados en función del riesgo. El flujo neto de caja esperado de cada período n se multiplica por un coeficiente λ_n que depende del grado de riesgo del flujo de caja, de tal forma que al inversor le resulte indiferente percibir el flujo esperado a_n en condiciones de riesgo, que su equivalente cierto $\lambda_n a_n$. El coeficiente puede variar entre cero y uno, lo cual implica que el flujo cierto es menor o igual que el flujo incierto. Cuanto menor sea el riesgo, mayor será el valor del coeficiente de ajuste. En el caso en que sea 1 el flujo de caja es cierto y se aproximará a cero para flujos de caja con un riesgo muy elevado.

Para estimar el coeficiente λ_n, el punto de partida consiste en la estimación de las distintas combinaciones entre valor esperado y riesgo que resulten ser indiferentes al inversor y que se representan mediante una curva de indiferencia. En segundo lugar, se estimarán unos coeficientes de ajuste para cada nivel de riesgo y finalmente se evalúa el proyecto de inversión sustituyendo los flujos de caja esperados en cada período por sus equivalentes ciertos y descontando dichos equivalentes ciertos a la tasa libre de riesgo.

El principal inconveniente que presenta este criterio se debe a la dificultad de estimar los coeficientes de ajuste, cuya determinación es subjetiva en función del grado de aversión del inversionista al riesgo.

6.2.5 Método de Análisis de Sensibilidad o Diagrama Binomial

El análisis de sensibilidad de las decisiones de inversión investiga la variabilidad del resultado obtenido, teniendo en cuenta posibles errores en la estimación de las distintas variables que definen la inversión, ya sean flujos de caja o tasas de descuento, con el fin de obtener una medida del grado de confianza de la decisión tomada. De esta forma, en ocasiones se encontrará que pequeñas variaciones en la estimación de algunos parámetros suponen un cambio en la decisión de aceptar o rechazar un proyecto. En estos casos se considera que el proyecto presenta un riesgo elevado, sin embargo, si una variación amplia de los parámetros no afecta de forma significativa al resultado obtenido, entonces el proyecto presenta un riesgo menor, por lo que pueden admitirse ciertas desviaciones al estimar sus variables.

El análisis de sensibilidad, aunque no constituye por si mismo un criterio de decisión, es de gran utilidad para la evaluación de proyectos de inversión en condiciones de riesgo e incertidumbre, ya que permite centrarse en aquellas variables críticas a las que el proyecto es más sensible. El inconveniente de este método es que requiere que se realice un cálculo individual para cada variable cuyo impacto en el resultado del Valor Presente Neto se desea conocer, para cada uno de sus extremos y compararlo con la sensibilidad a las demás variables para realizar una decisión final. Este método resulta largo y engorroso, además que es imposible considerar todas las variables a la vez.

6.2.6 Método de Simulación de Montecarlo

Es un método de simulación asistido por computadora, que constituye una extensión del método de análisis de sensibilidad. Simultáneamente toma en cuenta las diferentes distribuciones de probabilidades y los diferentes rangos de los valores para las variables claves del proyecto, generando una distribución de probabilidad de los resultados del proyecto (VPN) y permitiendo la correlación entre variables.

Este método permite experimentar con las variables del modelo y en función del análisis del comportamiento de las variables significativas del modelo estocástico (con asignación de probabilidades), se obtiene la curva de la respuesta completa, no solo el valor esperado, lo que permite precisar el factor de riesgo asociado (Coeficiente de Variación o la relación entre la desviación estándar versus el valor esperado).

Dado que la técnica requiere la obtención de distribuciones de probabilidad sobre cierto número de variables (desembolsos de inversión, precios de productos, precios de insumos, vida de los activos, etc.), implica una buena cantidad de costos de programación y tiempos de máquina, además de que la mayoría de las veces la asignación de probabilidades a todas estas variables no deja de ser una actividad sin soportes objetivos. Todo esto hace que la aplicación de este método a escala completa no suela ser factible.

6.3 Descripción y análisis de los criterios de toma de decisiones en condiciones de incertidumbre

En algunas ocasiones el futuro de una decisión se plantea tan incierto que no es posible medir la probabilidad asociada a cada uno de los estados posibles. En los procesos de decisión bajo incertidumbre, el decisor conoce cuáles son los posibles estados, aunque no dispone de información alguna sobre cuál de ellos ocurrirá. No sólo es incapaz de predecir el estado real que se presentará, sino que además no puede cuantificar de ninguna forma esta incertidumbre. En particular, esto excluye el conocimiento de información de tipo probabilístico sobre las posibilidades de ocurrencia de cada estado. En estos casos las empresas necesitan también disponer de distintos métodos que les permitan evaluar y seleccionar las inversiones. A continuación los más utilizados [9.8] [9.9]:

6.3.1 Criterio de Bayes-Laplace

Este criterio, propuesto por Laplace en 1825, está basado en el principio de razón insuficiente: como a priori no existe ninguna razón para suponer que un estado se puede presentar antes que los demás, podemos considerar que todos los estados tienen la misma probabilidad de ocurrencia, es decir, la ausencia de conocimiento sobre el estado, equivale a afirmar que todos los estados son equiprobables. El criterio Bayes-Laplace considera que si no existe información acerca de la probabilidad de ocurrencia de los distintos acontecimientos que afectan al futuro de una inversión, se debería asignar un mismo coeficiente de probabilidad a cada estado y utilizarlos para estimar el valor esperado de cada proyecto de inversión. La principal deficiencia que presenta este método se deriva del hecho de que generalmente el inversor no conoce todos los acontecimientos posibles que afectan a los resultados futuros de cada proyecto de inversión, lo que dificulta considerablemente la asignación de probabilidades.

6.3.2 Criterio de Wald, Maximin o Pesimista

En 1950, Wald sugiere que el decisor debe elegir aquella alternativa que le proporcione el mayor nivel de seguridad posible. Este criterio indica que el encargado de tomar las decisiones debe escoger la alternativa que proporcione el mejor de los peores resultados posibles. Esto se hace determinando lo peor posible, o lo mínimo, para cada alternativa y, a continuación, escogiendo aquella cuyo resultado peor proporcione el resultado máximo o más elevado. Por ende, este criterio indica que es preciso maximizar el resultado mínimo posible.

Se trata de un método conservador adecuado sólo si el inversor tiene una actitud de alta aversión al riesgo. En los momentos en que las decisiones alternativas posibles incluyen resultados que ponen en peligro la supervivencia de la organización, este criterio constituye una táctica apropiada para la toma de decisiones.

6.3.3 Criterio Máximax

El criterio Maximax consiste en elegir aquella alternativa que proporcione el mayor nivel de optimismo posible. Este criterio corresponde a un pensamiento optimista, ya que el decisor supone que la naturaleza siempre estará de su parte, por lo que siempre se presentará el estado más favorable.

Al utilizar el criterio Maximax las pérdidas pueden ser elevadas si no se presenta el estado de la naturaleza elegido. Además, en ocasiones puede conducir a decisiones pobres o poco convenientes.

6.3.4 Criterio de Hurwicz

Se trata de un criterio intermedio entre el criterio de Wald y el criterio Maximax. Dado que muy pocas personas son tan extremadamente pesimistas u optimistas como sugieren dichos criterios, Hurwicz (1951) considera que el decisor debe ordenar las alternativas de acuerdo con una media ponderada de los niveles de seguridad y optimismo. Propone un método de decisión en incertidumbre que se encuentra entre los dos extremos, pesimista y optimista. El inversor elige un coeficiente X que utiliza para hallar el valor esperado de los flujos de caja según la siguiente ecuación:

$$E(a_n) = Xa_{n[pesimista]} + (1 - X)a_{n[optimista]}$$

De esta forma el inversor pondera los flujos de caja de cada alternativa mediante unos coeficientes que dependen de su actitud frente al riesgo. Si es optimista asignará un mayor peso al flujo más alto de cada proyecto y si es pesimista la ponderación más alta corresponderá al flujo de caja más bajo.

El problema que presenta este método, al igual que los dos métodos anteriores, es que olvida los valores intermedios generados por los proyectos.

6.3.5 Criterio de Savage o Minimax

Se trata de una aproximación centrada en el cálculo de los costos de oportunidad en los que incurriría el inversor si no tomase la decisión más adecuada en cada caso. Su objetivo es la minimización de los costos de oportunidad. El primer paso en la aplicación de este criterio consiste en determinar una tabla de costos de oportunidad, luego se determina el costo de oportunidad más alto de cada proyecto y se selecciona aquel proyecto con un menor costo de oportunidad. En 1951 Savage propone seleccionar la alternativa que proporcione la menor de las mayores pérdidas relativas.

6.4 Análisis práctico comparativo del Modelo de Optimización de Inversiones en Condiciones de Incertidumbre, con los diferentes criterios de decisión

Con el objetivo de exponer las diferencias entre los criterios mencionados en la sección anterior y la complementariedad de estos con el Modelo de Optimización presentado en este documento, se mostrarán en la siguientes secciones casos de borde o extremos, que permitan resaltar estas diferencias.

6.4.1 Proyectos con VPN alto e incertidumbre baja vs. Proyecto con VPN bajo e incertidumbre alta

Considérense los siguientes proyectos:

	P1	*P2*
ΔVPN	100,00	90,00
VPN	1.000,00	100,00
VPN max	1.100,00	190,00
VPN min	900,00	10,00

Puede notarse que el Proyecto P1 tiene un VPN alto y una incertidumbre baja, de un 10% de su VPN, sin embargo el proyecto P2 tiene un VPN bajo en comparación con P1, con una incertidumbre muy alta, de un 90% de su VPN. En estas condiciones, si no se incluyen en el análisis otros criterios como disponibilidad de capital, eficiencia de uso de capital, valor agregado, etc., entonces es razonable concluir que el proyecto P1 es mejor opción que P2. Obsérvese entonces el resultado de la aplicación de los diferentes criterios vistos en la siguiente tabla:

	Variación de Criterio	Puntuación Proyecto 1	Puntuación Proyecto 2	Mejor puntuación	Mejor Opción
Criterio de Bayes-Laplace	N/A	1000,00	100,00	1000,00	Proyecto 1
Criterio Maximin	N/A	900,00	10,00	900,00	Proyecto 1
Criterio Maximax	N/A	1100,00	190,00	1100,00	Proyecto 1
Criterio de Hurwicz	0	1100,00	190,00	1100,00	Proyecto 1
	1	900,00	10,00	900,00	Proyecto 1
Criterio de Savage	N/A	0,00	910,00	0,00	Proyecto 1
Diagrama de Incertidumbre	0	90,00	1,00	90,00	Proyecto 1
	>101,11%	8,89	8,89	8,89	Proyecto 2

La conclusión principal es que todos los criterios coinciden en que el Proyecto P1 es la mejor opción. En cuanto al Diagrama de Incertidumbre, indica que a partir de una LPT mayor a 101,11% el proyecto P2 pasa a ser la mejor opción para el inversionista. Esto se explica porque el inversionista en este caso está dispuesto a arriesgar y perder toda la rentabilidad del proyecto, es decir, si está dispuesto a arriesgar hasta más de la totalidad de la rentabilidad del proyecto, entonces lo puede lograr primero con P2 y de ahí en adelante arriesga más veces P2 que P1.

Es conveniente aclarar que en las tablas mostradas las puntuaciones de los proyectos según el Diagrama de Incertidumbre, se colocan mostrando únicamente las cifras correspondientes a la cota inferior al valor del criterio, es decir, la puntuación parte desde allí y no se colocan los distintos valores que tomarían de acuerdo a las variaciones de la LPT. Esto se verá de igual manera reflejado en las sucesivas tablas del mismo tipo.

6.4.2 Proyectos con igual VPN y distintas Incertidumbres

Considérense los siguientes proyectos:

	P1	*P2*	*P3*
ΔVPN	300,00	500,00	700,00
VPN	1.000,00	1.000,00	1.000,00
VPN max	1.300,00	1.500,00	1.700,00
VPN min	700,00	500,00	300,00

Nótese que tienen igual VPN pero distintas incertidumbres. Intuitivamente, sin considerar otros factores, el proyecto P1 constituye la mejor opción por tener la menor incertidumbre, seguido por el P2 y el P3. A continuación el resultado de la aplicación de los criterios:

	Variación de Criterio	Puntuación Proyecto 1	Puntuación Proyecto 2	Puntuación Proyecto 3	Mejor puntuación	Mejor Opción
Criterio de Bayes-Laplace	N/A	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	No distingue
Criterio Maximin	N/A	700,00	500,00	300,00	700,00	Proyecto 1
Criterio Maximax	N/A	1300,00	1500,00	1700,00	1700,00	Proyecto 3
Criterio de Hurwicz	0	1300,00	1500,00	1700,00	1700,00	Proyecto 3
	0,5	1000,00	1000,00	1000,00	1000,00	No distingue
	1	700,00	500,00	300,00	700,00	Proyecto 1
Criterio de Savage	NA	400,00	200,00	400,00	200,00	Proyecto 2
Diagrama de incertidumbre	0 a 40	70,00	50,00	30,00	70,00	Proyecto 1
	40 a 60	90,00	90,00	70,00	90,00	Proyecto 2
	60 a 100	70,00	90,00	90,00	90,00	Proyecto 3

Puede observarse a primera vista que los resultados son contradictorios entre los criterios, excluyendo el del Diagrama de Incertidumbre, pero aún así, este se complementa con los demás. Algunos criterios no llegan ni siquiera a distinguir cuál es la mejor opción. En el Diagrama de Incertidumbre la mejor decisión depende del grado de cautela que tenga el inversionista y le permite conocer cuánto está arriesgando en cada momento y en cada decisión. A medida que va avanzando en su disposición a subir la tolerancia a la incertidumbre, los proyectos se van alternando en sus posiciones hasta llegar al que más incertidumbre tiene. Es importante recordar en este momento que a medida que se baja la LPT, el inversionista es más cauteloso y desea asegurar más la rentabilidad. En cambio, a medida que se sube, también lo hace en la tolerancia a la incertidumbre y el inversionista acepta los proyectos que más incertidumbre poseen a aquellos que son más seguros. En condiciones extremas, mientras más rentabilidad tenga comprometida, mejor opción representa el proyecto.

6.4.3 Proyectos con distintos VPN e iguales Incertidumbres

Considérense los siguientes proyectos:

	P1	*P2*	*P3*
ΔVPN	500,00	500,00	500,00
VPN	100,00	500,00	900,00
VPN max	600,00	1.000,00	1.400,00
VPN min	-400,00	0,00	400,00

Los proyectos tienen distintos VPN, pero todos tienen igual incertidumbre. Claro está que porcentualmente son distintas las incertidumbres, pero en valor absoluto es la misma. En este caso, de forma intuitiva, el proyecto P3 constituye la mejor opción, seguido por P2 y P3. A continuación los resultados de la aplicación de los distintos criterios:

	Variación de criterio	Puntuación Proyecto 1	Puntuación Proyecto 2	Puntuación Proyecto 3	Mejor puntuación	Mejor Opción
Criterio de Bayes-Laplace	N/A	100,00	500,00	900,00	900,00	Proyecto 3
Criterio Maximim	N/A	-400,00	0,00	400,00	400,00	Proyecto 3
Criterio Maximax	N/A	600,00	1000,00	1400,00	1400,00	Proyecto 3
Criterio de Hurwicz	0	600,00	1000,00	1400,00	1400,00	Proyecto 3
	1	600,00	1000,00	1400,00	1400,00	Proyecto 3
Criterio de Savage	N/A	500,00	400,00	0,00	0,00	Proyecto 3
Diagrama de incertidumbre	0 a 100	-44,44	0,00	44,44	44,44	Proyecto 3
	100 a 233,34	-33,33	55,56	55,56	55,56	Proyecto 2
	mayor a 233,44	-18,52	-18,52	-77,78	-18,52	Proyecto 1

De la tabla se desprende que todos los criterios coinciden con que la mejor opción es P3, no obstante, el Diagrama de Incertidumbre permite conjeturar acerca del resultado que arrojaría una altísima aceptación de la incertidumbre por parte del inversionista. En este caso hipotético el proyecto P3 cedería su posición a P2 y luego a P1 a medida de que el inversionista sube el valor de la LPT. Si decidiera arriesgar el 100% de la rentabilidad del proyecto, el primero que lo satisfacerla sería P2 y luego P1.

7 Conclusiones

El modelo descrito en este documento de análisis y toma de decisiones en condiciones de incertidumbre, es aplicable para aquellos casos en que no se conocen las probabilidades de ocurrencia de los diferentes estados de cada una de las variables. Es compatible con los conceptos emitidos a lo largo de la literatura mencionada, ya que atribuye al Valor Presente Neto una Incertidumbre o aleatoriedad propia de la falta de certeza de las variables involucradas, que se propaga en el cálculo al resultado final. La propuesta consiste es que se realice esta propagación a través del método de propagación de errores en funciones. La incertidumbre es algo que existe y que puede tener una medida máxima estimada con un relativo conocimiento de las variables que intervienen en el desarrollo de la iniciativa. Esa medida puede ser obtenida sin conocer las probabilidades de que ocurra cada una de las posibilidades o valores que puedan obtener esas variables.

En la literatura analizada el riesgo es afrontado tomando la incertidumbre como punto de partida y aceptando que existe. De ese modo se trata de darle probabilidad de ocurrencia a escenarios posibles y se hallan las varianzas y desviaciones estándar de estas posibilidades. Esto último le añade a los métodos vistos un grado de error adicional al existente, porque el inversionista debe estimar estas probabilidades muchas veces sin información. No es lo mismo predecir los valores máximo y mínimo de una variable, que asignarle probabilidades de ocurrencia. Los primeros se pueden obtener con cálculos partiendo de otras variables, los segundos son subjetivos u obedecen a corazonadas que no necesariamente se cumplen.

La aversión al riesgo es normalmente conectada con la desviación estándar para elegir entre las diferentes opciones posibles según los escenarios y sus probabilidades y según la capacidad o disposición del inversionista a asumir esa desviación. Dos casos característicos y muy utilizados son el Diagrama Binomial y el Método de Montecarlo, pero ninguno de los dos permite conocer en forma simple el error total del cálculo del VPN, en una sola ecuación y sin necesidad de conocer las posibilidades intermedias y combinadas de las variables que lo conforman. En el modelo propuesto se afronta esta decisión a través de la elección de la Línea de Posición de Tolerancia a la Incertidumbre, LPTI, la cual consiste también en una elección del inversionista donde pone en una balanza su aversión al riesgo versus su avidez de ganancias, sin conocer en detalles todos los escenarios posibles, sino puramente el conocimiento de las variables involucradas y la propia disposición a tolerar la incertidumbre. Una característica importante del modelo propuesto es que parte del valor extremo de las desviaciones estimadas de cada variable y utiliza el principio de la sumatoria de los errores absolutos individuales de la teoría de errores, para propagarlos en la función del VPN. De esta manera se proporciona en una sola ecuación un método práctico para el cálculo del error máximo asociado al VPN que puede ser utilizado para tener una visión cierta del rango extremo de variación de este resultado, sin hacer consideraciones particulares sobre los valores intermedios. Para muchos inversionistas es muy valioso este conocimiento porque acota el margen de incertidumbre y permite tomar decisiones con seguridad dentro de esta incertidumbre, es decir, permite manejar con certidumbre la propia incertidumbre. El Diagrama de Incertidumbre permite comparar las diferentes iniciativas sin proponer un criterio de selección específico. En este sentido el modelo no compite con ninguno de los criterios estudiados sino que más bien se complementa, ya que según la posición de la línea de Tolerancia a la Incertidumbre, la cual depende del criterio del Inversionista de acuerdo a su aversión al riesgo, se van transitando por los resultados de los diferentes criterios, como se demuestra en los ejemplos vistos En otras palabras, el modelo propone un método, mas no un criterio en particular. En este sentido el modelo llena un vacío, ya que según la literatura estudiada se han propuesto métodos de análisis y toma de decisiones para las condiciones de riesgo y diferentes criterios para las condiciones de incertidumbre, pero no se ha propuesto un modelo integral de toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

Otra característica importante del modelo es que complementa el análisis de la incertidumbre con otras variables de gran interés, tales como la eficiencia en el uso del capital y la aportación del valor de la iniciativa al negocio, las cuales son maximizadas en función de la rentabilidad, proporcionando así una puntuación de cada iniciativa sobre una escala y permitiendo su selección en función de la puntuación más alta. Cuando el capital es limitado y no alcanza para ejecutar todas las iniciativas, la puntuación mencionada permite adicionarse y hallar la mejor combinación de las iniciativas en función también de la máxima puntuación lograda por cada combinación. De esta forma el modelo presenta una metodología completa que permite llegar al final de la decisión sobre las mejores opciones disponibles, según los criterios empíricos del inversionista, analizando las variables más importantes y considerando las limitaciones existentes de capital. Esta característica lo hace un modelo completo que se complementa con los criterios y teorías de decisión.

8 Demostraciones

8.1 Obtención de la fórmula del Valor Presente Neto para procesos continuos de descuento

Está establecido en la literatura [8.1], que para hallar el valor presente de una serie de flujos de caja en períodos semianuales compuestos, partiendo de la tasa anual, se usa la siguiente ecuación

$$VP_n = \frac{a_n}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}}$$

Donde n es el período anual y m la cantidad de períodos semianuales. Multiplicando y dividiendo el exponente del denominador por r se tiene

$$VP_n = \frac{a_n}{\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^{nr}} = \frac{a_n}{\left(\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^{nr}}$$

Haciendo $q = m/r$ se tiene

$$VP_n = \frac{a_n}{\left(\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q}\right)^{nr}}$$

Pero se quiere hacer particiones infinitas del período, por lo tanto mientras m tiende a infinito, el límite de la expresión del denominador tiende al número

e, n se hace continua reemplazándose por el tiempo t_n y la tasa compuesta del período se hace r_c obteniéndose

$$VP_n = a_n e^{-r_c t_n}$$

8.2 Equivalencia entre las tasas discreta y continua

Nuevamente usando la literatura [8.1], se puede asociar una función exponencial continua a una discreta de la siguiente forma

$$VP_n = \frac{a_n}{(1+r)^n} = a_n e^{-r_c t_n}$$

Como se está evaluando en el período, n es igual al instante t_n

$$(1+r)^{t_n} = e^{r_c t_n}$$

Tomando los logaritmos de ambos lados y cancelando los términos comunes se obtiene

$$r_c = \ln(1+r)$$

O

$$r = e^{r_c} - 1$$

8.3 Obtención de la fórmula de propagación del error en el Valor Presente Neto a partir de las Series de Taylor

Partiendo de la serie de Taylor para funciones multivariables [9.5] [9.10]

$$
\begin{aligned}
& f(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{mt}) = f(x_{1a}, x_{2a}, \cdots, x_{ma}) + \\
& + a_{11}(x_{1t} - x_{1a}) + a_{12}(x_{1t} - x_{1a})^2 + a_{13}(x_{1t} - x_{1a})^3 + \cdots \\
& + a_{21}(x_{2t} - x_{2a}) + a_{22}(x_{2t} - x_{2a})^2 + a_{23}(x_{2t} - x_{2a})^3 + \cdots \\
& \vdots \\
& + a_{m1}(x_{mt} - x_{ma}) + a_{m2}(x_{mt} - x_{ma})^2 + a_{m3}(x_{mt} - x_{ma})^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Donde

$a_{ik} = \dfrac{1}{k!}\dfrac{\partial^k f}{\partial {x_i}^k}$, evaluada en x_{ia}

Y haciendo

$$e_a(x_i) = (x_{it} - x_{ia})$$

$$e_a(y) = f(x_{1t}, x_{2t}, \cdots, x_{mt}) - f(x_{1a}, x_{2a}, \cdots, x_{ma})$$

Pero tomando de la definición

$$\left|e_a(x_i)\right| \le \varepsilon_a(x_i)$$

$$\left|a_{ik}\right| {\varepsilon_a}^k(x_i) \le \varepsilon_a(y_i)$$

$$\varepsilon_a(y) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_a(y_i)$$

Entonces, tomando los términos K de primer orden

$$\varepsilon_a(y) = \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \right| \varepsilon_a(x_i)$$

Y aplicando a la ecuación del VP

$$\varepsilon_{an} = \left| \frac{\partial VP_n}{\partial a_n} \right| \Delta a_n + \left| \frac{\partial VP_n}{\partial r} \right| \Delta r + \left| \frac{\partial VP_n}{\partial t_n} \right| \Delta t_n$$

Haciendo

$$\Delta VPN = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_{an}$$

Entonces

$$\Delta VPN = \sum_{n=1}^{N} \left(\Delta a_n \left| \frac{\partial VP_n}{\partial a_n} \right| + \Delta r \left| \frac{\partial VP_n}{\partial r} \right| + \Delta t_n \left| \frac{\partial VP_n}{\partial t_n} \right| \right)$$

8.4 Obtención de la fórmula de ∆VPN para la función continua

Partiendo de la ecuación del VPN para la función continua

$$VPN_n = a_n e^{-r_c t_n}$$

Se aplica la ecuación del teorema de Valor Medio aplicado al VPN y se deriva respecto a cada variable

$$\Delta VPN = \sum_{n=1}^{N}\left(\Delta a_n \left|\frac{\partial VP_n}{\partial a_n}\right| + \Delta r_c \left|\frac{\partial VP_n}{\partial r_c}\right| + \Delta t_n \left|\frac{\partial VP_n}{\partial t_n}\right| \right)$$

$$\Delta VPN = \sum_{n=1}^{N}\left(\Delta a_n \left|e^{-r_c t_n}\right| + \Delta t_n \left|-a_n r_c e^{-r_c t_n}\right| + \Delta r_c \left|-a_n t_n e^{-r_c t_n}\right| \right)$$

Ordenando y sacando factor común se obtiene la ecuación definitiva

$$\Delta VPN = \sum_{n=1}^{N}\left|a_n e^{-r_c t_n}\right|\left(\left|\frac{\Delta a_n}{a_n}\right| + \left|\Delta t_n r_c\right| + \left|\Delta r_c t_n\right| \right)$$

8.5 Transformación entre ΔVPN de la función continua y discreta

Partiendo de la ecuación (2) y sustituyendo la tasa de descuento continua por su equivalente discreta $r_c = \ln(1+r)$ y t_n por n se obtiene:

$$\Delta VPN = \sum_{n=0}^{N}\left|a_n e^{-r_c t_n}\right|\left(\left|\Delta t_n r_c\right| + \left|\frac{\Delta a_n}{a_n}\right| + \left|\Delta r_c t_n\right| \right)$$

Se obtiene

$$\Delta VPN = \sum_{n=0}^{N}\left|a_n e^{-n\ln(1+r)}\right|\left(\left|\Delta n \ln(1+r)\right| + \left|\frac{\Delta a_n}{a_n}\right| + \left|\Delta[\ln(1+r)]n\right| \right)$$

Derivando el último término de la sumatoria respecto a *r* se hace

$$\Delta\left[\ln(1+r)\right] = \frac{\Delta r}{(1+r)}$$

De modo que

$$\Delta r_c = \frac{\Delta r}{(1+r)}$$

Obteniendo la ecuación

$$\Delta VPN = \sum_{n=0}^{N} \left| \frac{a_n}{(1+r)^n} \right| \left(\left| \Delta n \ln(1+r) \right| + \left| \frac{\Delta a_n}{a_n} \right| + \left| \frac{n \Delta r}{(1+r)} \right| \right)$$

El método se puede comprobar experimentalmente, como se muestra en la siguiente tabla:

						rc	0,0953
						Δ*rc*	0,0091
P1							
VPN	***521,22***	**Δ*VPN***	***177,87***				
n	**Δ*n***	***an***	**Δ*an***	***VP(n)***	**Δ*VP(n)***	***VPc(tn)***	**Δ*VPc(tn)***
0	0,00	-1000	0	-1000,00	0,00	-1000,00	0,00
1	0,10	200	0	181,82	3,39	181,82	3,39
2	0,20	200	0	165,29	6,16	165,29	6,16
3	0,30	200	0	150,26	8,39	150,26	8,39
4	0,40	200	0	136,60	10,18	136,60	10,18
5	0,50	200	0	124,18	11,56	124,18	11,56
6	0,60	200	0	112,89	12,61	112,89	12,61
7	0,70	200	0	102,63	13,38	102,63	13,38
8	0,80	200	0	93,30	13,90	93,30	13,90
9	0,90	200	0	84,82	14,22	84,82	14,22
10	1,00	200	0	77,11	14,36	77,11	14,36
11	1,10	200	0	70,10	14,36	70,10	14,36
12	1,20	200	0	63,73	14,24	63,73	14,24
13	1,30	200	0	57,93	14,02	57,93	14,02
14	1,40	200	0	52,67	13,73	52,67	13,73
15	1,50	200	0	47,88	13,37	47,88	13,37
r	*0,10*	**Δ*r***	*0,01*			***521,22***	***177,87***

Se puede observar que la tasa r de valor 0,1 tiene una tasa equivalente continua rc de valor 0,0953. Aplicando ambas a las ecuaciones correspondientes para la forma discreta y continua, respectivamente, se observa que los VPN y sus errores son iguales, adoptando los valores 521,22 y 177,87 respectivamente.

8.6 Consideraciones acerca de la aplicación del Teorema del Valor Medio al VPN

Para comprobar que la aproximación del teorema del valor medio es aplicable a cada sumando, se puede analizar la segunda derivada parcial de ese sumando respecto a cada variable por separado. Si el resultado es cero o se aproxima a cero, entonces la primera derivada parcial es casi constante y sí es posible aproximar *f´(x$_t$)=f´(c).* De este modo, en el caso de la variable t_n, la ecuación de la segunda derivada parcial es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 VPN}{\partial t_n{}^2} = a_n r_c^2 e^{-r_c t_n} \approx 0$$

El factor $r_c{}^2$ aproxima a cero porque los valores que puede tomar r_c son cercanos a cero, lo cual significa que la segunda derivada se aproxima cero.

En el caso de la variable a_n se puede observar que la segunda derivada parcial de VPN respecto a esta variable es igual a cero.

$$\frac{\partial^2 VPN}{\partial a_n{}^2} = 0$$

En el caso de la variable r, la ecuación de la segunda derivada parcial es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 VPN}{\partial r^2} = \frac{n(1+n)a_n}{(1+r)^{n+2}}$$

Se puede observar que el denominador se aproxima a uno pero el numerador puede ser un número real cualquiera. Este resultado significa que el Teorema del Valor Medio solo puede aplicarse si r es pequeña y si su variación también lo es, de tal manera que la aproximación de c a x_t pueda usarse. Esto no representa una limitación para el uso de la metodología planteada porque precisamente la tasa de descuento es una variable con valores pequeños, que se elige con cierta precisión y su rango de valores no es amplio. Un 10% de variación como máximo podría ser tomado.

8.7 Consideraciones acerca de la aplicación del cálculo de propagación de errores sobre la ecuación del VPN en el caso discreto:

a. La ecuación está conformada por una sumatoria de términos de la forma $\frac{a_n}{(1+r)^n}$. Por la ecuación (1), el error absoluto de la suma es igual a la suma de los errores absolutos de los sumandos, de modo tal que es posible trabajar en cada uno de los sumandos independientemente, para hallar los errores parciales y luego sumar estos para hallar el error total.

b. Cada uno de los sumandos está conformado por una función continua y diferenciable en cada una de las variables a_n, y r. La diferenciación con respecto a n requiere un análisis particular porque su condición de índice de la sumatoria permite dudar respecto a su diferenciabilidad. En realidad es una variable que representa el tiempo y la sumatoria lo toma como índice únicamente para denotar los sucesivos períodos del tiempo en que la tasa de descuento está definida, pero puede asumir valores no enteros o fracciones de números de forma continua. Lo que se denota con la sumatoria es únicamente que los Valores Presentes de cada flujo de caja se pueden sumar para hallar el Valor Presente Neto, pero no es estrictamente necesario que los exponentes del denominador de cada sumando sean enteros iguales a los índices de la sumatoria. Para demostrar esto obsérvese primero la equivalencia en el Valor Presente del mismo flujo de caja medido según tasas de períodos distintos:

$$VP = \frac{VF}{(1+r)} = \frac{VF}{(1+r_1)^m}$$

De allí:

$$r = (1 + r_1)^m - 1$$

O

$$r_1 = (1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1$$

Donde VF es el valor futuro, VP es el valor presente, r es la tasa del período más largo T, r_1 es la tasa del período corto, al cual denominaremos t_0 y m es un entero que representa el número de períodos cortos en que se divide el más largo. Definido de esta manera, t_0 puede ser cualquier intervalo de tiempo cuya multiplicación por m sea igual a T, es decir:

$$T = mt_0$$

Ahora supóngase que se desea conocer el valor presente de un flujo de caja acaecido en un período largo más una cantidad cualquiera k de períodos cortos, siendo k un entero cualquiera menor que m. Entonces se puede escribir:

$$VP = \frac{VF}{(1 + r_1)^{m \pm k}} = \frac{VF}{(1 + r_1)^m (1 + r_1)^{\pm k}}$$

Sustituyendo r_2

$$VP = \frac{VF}{\left(1 + (1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1\right)^m \left(1 + (1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1\right)^{\pm k}} = \frac{VF}{(1 + r)(1 + r)^{\pm k / m}}$$

O sea:

$$VP = \frac{VF}{(1+r)^{1 \pm k/m}}$$

El resultado anterior indica que el exponente del denominador puede ser un número real positivo entre cero y dos, cuando se trata del primer periodo como aquí se ha estudiado, dependiendo de los valores que puedan tomar k y m, es decir:

$$0 < 1 \pm \frac{k}{m} < 2\,.$$

En los sucesivos períodos se utiliza por lo tanto la cantidad de períodos más la fracción, de la siguiente forma:

$$n \pm \frac{k}{m}$$

Dado que no se ha hecho en el análisis ninguna suposición a priori sobre la cantidad de períodos cortos ni la longitud de estos, en que puede dividirse el período largo, se puede elegir m como cualquier número entero entre cero e infinito y k como cualquier número entero menor que m. Si se define la variable tiempo t como kt_0 y se hacen los intervalos t_0 infinitesimales o muy pequeños se tiene entonces:

$$t = kt_0\,,\ T = mt_0$$

Si además multiplicamos el numerador y el denominador por t_0 entonces

$$\frac{kt_0}{mt_0} = \frac{t}{T}$$

Y entonces el exponente del denominador puede escribirse como

$$n \pm \frac{t}{T}$$

Este hallazgo es importante porque indica que el exponente del denominador puede considerarse un continuo en el intervalo estudiado, es decir no es un valor discreto. En otras palabras es una variable para ese intervalo y la función VPN es diferenciable con respecto a esa variable en ese intervalo, donde esta está acotada.

c. Partiendo del resultado de la sección anterior se puede considerar n como una variable en el entorno del valor discreto del período a evaluar y VPN como una función continua en este entorno, por lo tanto se puede diferenciar obteniéndose

$$VP_n = \frac{a_n}{(1+r)^n}$$

Pero

$$(1+r)^n = e^{n\ln(1+r)}$$

Por lo que

$$\frac{\partial VP_n}{\partial n} = \frac{-a_n \ln(1+r)}{(1+r)^n}$$

También

$$\frac{\partial VP_n}{\partial a_n} = \frac{1}{(1+r)^n}$$

Y

$$\frac{\partial VP_n}{\partial r} = \frac{na_n}{(1+r)^{n+1}}$$

Por lo que aplicando

$$\Delta VPN = \sum_{n=1}^{N}\left(\Delta a_n\left|\frac{\partial VP_n}{\partial a_n}\right| + \Delta r\left|\frac{\partial VP_n}{\partial r}\right| + \Delta n\left|\frac{\partial VP_n}{\partial n}\right|\right)$$

Se obtiene

$$\Delta VPN = \sum_{n=0}^{N}\left|\frac{a_n}{(1+r)^n}\right|\left(\left|\Delta n \ln(1+r)\right| + \left|\frac{\Delta a_n}{a_n}\right| + \left|\frac{n\Delta r}{(1+r)}\right|\right)$$

A continuación se presentan algunos ejemplos prácticos de la aplicación de la ecuación y su comparación con el método manual, para ilustrar las características particulares del método y su aplicación:

Comparación entre el cálculo manual y el método de propagación de error, con incertidumbre en n

n min	*n*	*n max*	*Δn*	*an min*	*an*	*an max*	*Δan*	*VP(n) min*	*VP(n)*	*VP(n) max*	*ΔVP(n)*
0	0	0	0,00	-900	-900	-900	0,00	-900,00	-900,00	-900,00	0,00
0,9	1	1,1	0,10	216,5	216,5	216,5	0,00	198,70	196,82	194,95	1,88
1,8	2	2,2	0,20	216,5	216,5	216,5	0,00	182,37	178,93	175,55	3,41
2,7	3	3,3	0,30	216,5	216,5	216,5	0,00	167,38	162,66	158,07	4,65
3,6	4	4,4	0,40	216,5	216,5	216,5	0,00	153,62	147,87	142,34	5,64
4,5	5	5,5	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	140,99	134,43	128,17	6,41
5,4	6	6,6	0,60	216,5	216,5	216,5	0,00	129,40	122,21	115,42	6,99
6,3	7	7,7	0,70	216,5	216,5	216,5	0,00	118,76	111,10	103,93	7,41
7,2	8	8,8	0,80	216,5	216,5	216,5	0,00	109,00	101,00	93,58	7,70
8,1	9	9,9	0,90	216,5	216,5	216,5	0,00	100,04	91,82	84,27	7,88
9	10	11	1,00	216,5	216,5	216,5	0,00	91,82	83,47	75,88	7,96
9,9	11	12,1	1,10	216,5	216,5	216,5	0,00	84,27	75,88	68,33	7,96
10,8	12	13,2	1,20	216,5	216,5	216,5	0,00	77,34	68,98	61,53	7,89
11,7	13	14,3	1,30	216,5	216,5	216,5	0,00	70,98	62,71	55,40	7,77
12,6	14	15,4	1,40	216,5	216,5	216,5	0,00	65,15	57,01	49,89	7,61
13,5	15	16,5	1,50	216,5	216,5	216,5	0,00	59,79	51,83	44,92	7,41
			10,00%				***0,00%***	***849,62***	***746,72***	***652,24***	***98,55***

r	0,10	***Δr***	0,00	***0,00%***
rc	0,0953	***Δrc***	0,0000	

VPN	***746,72***
ΔVPN por metodo de propagación	***98,55***
ΔVPN por cálculo manual	***98,69***

Comparación entre el cálculo manual y el método de propagación de error, con incertidumbre en r

n min	*n*	*n max*	*Δn*	*an min*	*an*	*an max*	*Δan*	*VP(n) min*	*VP(n)*	*VP(n) max*	*ΔVP(n)*
0	0	0	0,00	-900	-900	-900	0,00	-900,00	-900,00	-900,00	0,00
1	1	1	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	198,62	196,82	195,05	1,79
2	2	2	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	182,22	178,93	175,72	3,25
3	3	3	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	167,18	162,66	158,30	4,44
4	4	4	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	153,37	147,87	142,62	5,38
5	5	5	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	140,71	134,43	128,48	6,11
6	6	6	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	129,09	122,21	115,75	6,67
7	7	7	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	118,43	111,10	104,28	7,07
8	8	8	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	108,65	101,00	93,95	7,35
9	9	9	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	99,68	91,82	84,64	7,51
10	10	10	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	91,45	83,47	76,25	7,59
11	11	11	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	83,90	75,88	68,69	7,59
12	12	12	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	76,97	68,98	61,88	7,53
13	13	13	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	70,62	62,71	55,75	7,41
14	14	14	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	64,79	57,01	50,23	7,26
15	15	15	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	59,44	51,83	45,25	7,07
			0,00%				***0,00%***	***845,14***	***746,72***	***656,82***	***94,00***

r	0,10	***Δr***	0,01	***10,00%***
rc	0,0953	***Δrc***	0,0091	

VPN	*746,72*
ΔVPN por metodo de propagación	***94,00***
ΔVPN por cálculo manual	***94,16***

Comparación entre el cálculo manual y el método de propagación de error, con incertidumbre en an

n min	n	n max	Δn	an min	an	an max	Δan	VP(n) min	VP(n)	VP(n) max	ΔVP(n)
0	0	0	0,00	-900	-900	-900	0,00	-900,00	-900,00	-900,00	0,00
1	1	1	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	177,14	196,82	216,50	19,68
2	2	2	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	161,03	178,93	196,82	17,89
3	3	3	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	146,39	162,66	178,93	16,27
4	4	4	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	133,09	147,87	162,66	14,79
5	5	5	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	120,99	134,43	147,87	13,44
6	6	6	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	109,99	122,21	134,43	12,22
7	7	7	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	99,99	111,10	122,21	11,11
8	8	8	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	90,90	101,00	111,10	10,10
9	9	9	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	82,64	91,82	101,00	9,18
10	10	10	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	75,12	83,47	91,82	8,35
11	11	11	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	68,29	75,88	83,47	7,59
12	12	12	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	62,09	68,98	75,88	6,90
13	13	13	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	56,44	62,71	68,98	6,27
14	14	14	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	51,31	57,01	62,71	5,70
15	15	15	0,00	194,85	216,5	238,15	21,65	46,65	51,83	57,01	5,18
			0,00%				***10,00%***	***582,04***	***746,72***	***911,39***	***164,67***

r	0,10	**Δr**	0,00	***0,00%***
rc	0,0953	**Δrc**	0,0000	

VPN	***0,10***
ΔVPN por metodo de propagación	***164,67***
ΔVPN por cálculo manual	***164,67***

Comparación entre el cálculo manual y el método de propagación de error, con incertidumbre en todas las variables

n min	n	n max	Δn	an min	an	an max	Δan	VP(n) min	VP(n)	VP(n) max	ΔVP(n)
0	0	0	0,00	-900	-900	-900	0,00	-900,00	-900,00	-900,00	0,00
0,9	1	1,1	0,10	194,85	216,5	238,15	21,65	180,31	196,82	212,32	23,35
1,8	2	2,2	0,20	194,85	216,5	238,15	21,65	166,85	178,93	189,30	24,56
2,7	3	3,3	0,30	194,85	216,5	238,15	21,65	154,40	162,66	168,77	25,35
3,6	4	4,4	0,40	194,85	216,5	238,15	21,65	142,88	147,87	150,46	25,80
4,5	5	5,5	0,50	194,85	216,5	238,15	21,65	132,22	134,43	134,14	25,96
5,4	6	6,6	0,60	194,85	216,5	238,15	21,65	122,35	122,21	119,60	25,88
6,3	7	7,7	0,70	194,85	216,5	238,15	21,65	113,22	111,10	106,63	25,59
7,2	8	8,8	0,80	194,85	216,5	238,15	21,65	104,77	101,00	95,06	25,15
8,1	9	9,9	0,90	194,85	216,5	238,15	21,65	96,95	91,82	84,75	24,57
9	10	11	1,00	194,85	216,5	238,15	21,65	89,71	83,47	75,56	23,89
9,9	11	12,1	1,10	194,85	216,5	238,15	21,65	83,02	75,88	67,37	23,13
10,8	12	13,2	1,20	194,85	216,5	238,15	21,65	76,82	68,98	60,06	22,31
11,7	13	14,3	1,30	194,85	216,5	238,15	21,65	71,09	62,71	53,55	21,45
12,6	14	15,4	1,40	194,85	216,5	238,15	21,65	65,78	57,01	47,74	20,56
13,5	15	16,5	1,50	194,85	216,5	238,15	21,65	60,88	51,83	42,56	19,66
			10,00%				***10,00%***	***761,25***	***746,72***	***707,86***	***357,22***
r	0,10	***Δr***	0,01	***10,00%***							
rc	0,0953	***Δrc***	0,0091								

VPN	***746,72***
ΔVPN por metodo de propagación	***357,22***
ΔVPN por cálculo manual	***26,69***

En las dos primeras tablas se puede observar que el método de propagación de errores tiene una precisión excelente, ya que presenta una variación de 0,15% con respecto al cálculo manual, para el cálculo con error en n y del 0,17% para el cálculo con error en r. En la tercera tabla se muestra que para el cálculo de a_n el error es 0%, o la precisión es 100%, tal como se demostró en esta sección.

En la cuarta tabla se muestra que el cálculo manual no puede ejecutarse con todas las variaciones a la vez, ya que el resultado es completamente erróneo. El cálculo manual se iguala al método de propagación únicamente haciendo por separado los cálculos respecto a los mínimos y máximos de cada variable, dejando las demás fijas en el valor esperado y luego sumando todas las desviaciones obtenidas. Esto se puede comprobar fácilmente sumando las cifras

98,55+94+164,67=357,22

Cuyo resultado coincide con el método de propagación. Ahora obsérvese los siguientes ejemplos con variaciones asimétricas de las variables:

Comparación entre el cálculo manual y el método de propagación de error, con variación asimétrica de n

n min	*n*	*n max*	*Δn*	*an min*	*an*	*an max*	*Δan*	*VP(n) min*	*VP(n)*	*VP(n) max*	*ΔVP(n)*
0	0	0	0,00	-900	-900	-900	0,00	-900,00	-900,00	-900,00	0,00
0,5	1	1	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	206,42	196,82	196,82	9,38
2	2	2,5	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	178,93	178,93	170,60	8,53
3	3	3	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	162,66	162,66	162,66	0,00
4	4	4	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	147,87	147,87	147,87	0,00
4,5	5	5	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	140,99	134,43	134,43	6,41
6	6	6,5	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	122,21	122,21	116,52	5,82
7	7	7	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	111,10	111,10	111,10	0,00
8	8	8,5	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	101,00	101,00	96,30	4,81
9	9	9	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	91,82	91,82	91,82	0,00
10	10	10	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	83,47	83,47	83,47	0,00
10,5	11	11	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	79,59	75,88	75,88	3,62
12,5	12	12	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	65,77	68,98	68,98	3,29
13	13	13	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	62,71	62,71	62,71	0,00
14	14	14	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	57,01	57,01	57,01	0,00
15	15	15,5	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	51,83	51,83	49,42	2,47
							0,00%	***763,38***	***746,72***	***725,59***	***44,32***

r	0,10	***Δr***	0,00	***0,00%***
rc	0,0953	***Δrc***	0,0000	

VPN	***746,72***
ΔVPN por metodo de propagación	***44,32***
ΔVPN por cálculo manual	***18,89***

Comparación entre el cálculo manual y el método de propagación de error, con variación asimétrica de an

n min	n	n max	Δn	an min	an	an max	Δan	VP(n) min	VP(n)	VP(n) max	ΔVP(n)
0	0	0	0,00	-900	-900	-900	0,00	-900,00	-900,00	-900,00	0,00
1	1	1	0,00	211	216,5	216,5	5,50	191,82	196,82	196,82	5,00
2	2	2	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	178,93	178,93	178,93	0,00
3	3	3	0,00	214	216,5	216,5	2,50	160,78	162,66	162,66	1,88
4	4	4	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	147,87	147,87	147,87	0,00
5	5	5	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	134,43	134,43	134,43	0,00
6	6	6	0,00	212	216,5	230	13,50	119,67	122,21	129,83	7,62
7	7	7	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	111,10	111,10	111,10	0,00
8	8	8	0,00	210	216,5	218	6,50	97,97	101,00	101,70	3,03
9	9	9	0,00	216,5	216,5	219	2,50	91,82	91,82	92,88	1,06
10	10	10	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	83,47	83,47	83,47	0,00
11	11	11	0,00	215	216,5	222	5,50	75,36	75,88	77,81	1,93
12	12	12	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	68,98	68,98	68,98	0,00
13	13	13	0,00	216,5	216,5	219	2,50	62,71	62,71	63,44	0,72
14	14	14	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	57,01	57,01	57,01	0,00
15	15	15	0,00	213	216,5	216,5	3,50	50,99	51,83	51,83	0,84
			0,00%					***732,90***	***746,72***	***758,75***	***22,08***

r	0,10	***Δr***	0,00	***0,00%***
rc	0,0953	***Δrc***	0,0000	

VPN	***746,72***
ΔVPN por metodo de propagación	***22,08***
ΔVPN por cálculo manual	***12,92***

Comparación entre el cálculo manual y el método de propagación de error, con variación asimétrica de an y n

n min	n	n max	Δn	an min	an	an max	Δan	VP(n) min	VP(n)	VP(n) max	ΔVP(n)
0	0	0	0,00	-900	-900	-900	0,00	-900,00	-900,00	-900,00	0,00
0,5	1	1	0,50	211	216,5	216,5	5,50	201,18	196,82	196,82	14,38
2	2	2,5	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	178,93	178,93	170,60	8,53
3	3	3	0,00	214	216,5	216,5	2,50	160,78	162,66	162,66	1,88
4	4	4	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	147,87	147,87	147,87	0,00
4,5	5	5	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	140,99	134,43	134,43	6,41
6	6	6,5	0,50	212	216,5	230	13,50	119,67	122,21	123,79	13,44
7	7	7	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	111,10	111,10	111,10	0,00
8	8	8,5	0,50	210	216,5	218	6,50	97,97	101,00	96,97	7,85
9	9	9	0,00	216,5	216,5	219	2,50	91,82	91,82	92,88	1,06
10	10	10	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	83,47	83,47	83,47	0,00
10,5	11	11	0,50	215	216,5	222	5,50	79,03	75,88	77,81	5,54
12,5	12	12	0,50	216,5	216,5	216,5	0,00	65,77	68,98	68,98	3,29
13	13	13	0,00	216,5	216,5	219	2,50	62,71	62,71	63,44	0,72
14	14	14	0,00	216,5	216,5	216,5	0,00	57,01	57,01	57,01	0,00
15	15	15,5	0,50	213	216,5	216,5	3,50	50,99	51,83	49,42	3,31
			0,00%					***749,29***	***746,72***	***737,24***	***66,40***

r	0,10	***Δr***	0,00	***0,00%***
rc	0,0953	***Δrc***	0,0000	

VPN	***746,72***
ΔVPN por metodo de propagación	***66,40***
ΔVPN por cálculo manual	***6,03***

De las tablas anteriores se desprende que el método de propagación de errores arroja un resultado mayor para la incertidumbre del VPN, cuando las variaciones de cada una de las variables son asimétricas, en comparación con el método manual. La explicación de esto es que el método utiliza los extremos de los estimados de cada una de las variables porque propaga el mayor error. Esto se realiza de esta forma porque no se hacen consideraciones a priori sobre la correlación de las variables que intervienen en el cálculo, sino que se considera que no tienen correlación alguna, es decir, que unas variables no influyen en las demás. Esto naturalmente castiga el resultado final, pero también evita cálculos complicados, estimaciones imprecisas y permite incluir en el análisis todas las variaciones, las peores situaciones, evita el efecto de “neteo” de errores y todo en una sola ecuación.

8.8 Obtención de las ecuaciones de propagación de errores para las operaciones aritméticas

Para todas las demostraciones siguientes [9.5] x_1 y x_2 son los valores verdaderos, x_{1a} y x_{2a} son las aproximaciones, ε_a son los errores absolutos y ε_r son los errores relativos

a. Suma

$$x_1 + x_2 = x_{1a} + x_{2a} + \varepsilon_a(x_1) + \varepsilon_a(x_2) = (x_{1a} + x_{2a}) + \varepsilon_a(x_1) + \varepsilon_a(x_2)$$

Por lo cual

$$\varepsilon_a(x_1 + x_2) = \varepsilon_a(x_1) + \varepsilon_a(x_2)$$

b. Resta

De una manera semejante y tomando el valor absoluto

$$\varepsilon_a(x_1 - x_2) = \varepsilon_a(x_1) + \varepsilon_a(x_2)$$

c. Multiplicación

$$x_1 x_2 = (x_{1a} + \varepsilon_a(x_1))(x_{2a} + \varepsilon_a(x_2)) = x_{1a}x_{2a} + x_{1a}\varepsilon_a(x_2) + x_{2a}\varepsilon(x_1) + \varepsilon_a(x_1)\varepsilon_a(x_2)$$

Ignorando el producto de los errores entonces

$$x_1 x_2 \cong x_{1a} x_{2a} + x_{1a}\varepsilon_a(x_2) + x_{2a}\varepsilon(x_1)$$

De modo que

$$\varepsilon_a(x_1 x_2) \cong x_{1a}\varepsilon_a(x_2) + x_{2a}\varepsilon(x_1)$$

Dividiendo ambos términos entre $x_{1a}x_{2a}$ se obtiene

$$\varepsilon_r(x_1 x_2) \cong \varepsilon_r(x_1) + \varepsilon_r(x_2)$$

d. División

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(x_{1a} + \varepsilon_a(x_1))}{(x_{2a} + \varepsilon_a(x_2))}$$

Sacando factor común x_{2a} en el denominador y reacomodando términos se obtiene

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(x_{1a} + \varepsilon_a(x_1))}{x_{2a}\left(1 + \frac{\varepsilon_a(x_2)}{x_{2a}}\right)} = \frac{(x_{1a} + \varepsilon_a(x_1))}{x_{2a}}\left(\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_a(x_2)}{x_{2a}}}\right)$$

Pero el factor entre paréntesis se puede desarrollar en una serie

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(x_{1a} + \varepsilon_a(x_1))}{x_{2a}}\left(1 - \frac{\varepsilon_a(x_2)}{x_{2a}} + \left(\frac{\varepsilon_a(x_2)}{x_{2a}}\right)^2 - \cdots\right)$$

Efectuando la multiplicación y despreciando todos los términos de error que tengan potencias de orden superior al primero

$$\frac{x_1}{x_2} \cong \frac{x_{1a}}{x_{2a}} + \frac{\varepsilon_a(x_1)}{x_{2a}} - \frac{x_{1a}\varepsilon_a(x_2)}{x_{2a}^2}$$

Por lo tanto

$$\varepsilon_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cong \frac{\varepsilon_a(x_1)}{x_{2a}} - \frac{x_{1a}\varepsilon_a(x_2)}{x_{2a}^2}$$

Dividiendo ambos términos entre x_{1a}/x_{2a} y aplicando el valor absoluto

$$\varepsilon_r\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \cong \varepsilon_r(x_1) + \varepsilon_r(x_2)$$

9 Referencias bibliográficas

9.1 WESTON J. Fred y COPELAND Thomas E., **Finanzas en Administración**, Vol. 1, Mc. Graw Hill, Octava Edición.

9.2 WESTON J. Fred y COPELAND Thomas E., **Finanzas en Administración**, Vol. 2, Mc. Graw Hill, Octava Edición.

9.3 UNDURRAGA CORREA Joaquín, **Formulación y Evaluación de Proyectos**, Tomo II, Primera Edición, Equinoccio, Editorial de la Universidad Simón Bolívar

9.4 COSS Bu, **Análisis y Evaluación de Proyectos de Inversión**, Limusa, Noriega Editores

9.5 CLIFORD A.A., **Multivariate error analysis; a handbook of error propagation and calculation in many-parameter systems,** New York, Wiley [1973]

9.6 KOPRINAROV Bratoy, **El riesgo empresarial y su gestión**, Analítica Consulting 1996, Analitica.com Venezuela, Jueves, 12 de mayo de 2005

9.7 BREALEY, MYERS, ALLEN, **Principios de Finanzas Corporativas**, 8/e, Mc Graw Hill, España, 2006

9.8 INFANTE, R., **Teoría de la decisión,** (1976), UNED, Madrid

9.9 RIOS GARCIA, S., **Análisis de decisiones**, (1989), Ediciones ICE, Madrid

9.10 Kreyszig, E. **Advanced Engineering Mathematics**, 1967, John Wiley & Sons Inc. N.Y.