AA08753

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería De Telecomunicaciones

TRAB
ITC2006
G8

RESONANCIA, FILTROS PASIVOS Y DIAGRAMA DE BODE

Problemas Resueltos

Profesora. Mardemis Gutiérrez Estevanot

Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

Caracas, Noviembre de 2006

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 1

Capítulo 1:

1. CIRCUITO RESONANTE 2
1.1 Circuito RLC SERIE 2
1.2 Circuito RLC PARALELO 8
1.3 Circuito de dos ramas paralelas 13
1.4 Factor de calidad 18

Capítulo 2:

2. FILTROS PASIVOS 25
2.1 Filtro Pasabanda 25
2.2 Filtro Pasaalto 28
2.3 Filtro Pasabajo 33

Capítulo 3:

3. DIAGRAMA DE BODE 38

BIBLIOGRAFÍA 68

ANEXOS

Anexo 1: Diagramas de Bode sobre papel semilogarítmico 69
Anexo 2: Recursos Tecnológicos utilizados 70
Anexo 3: Formulario 71

INTRODUCCION

Este trabajo tiene como objetivo presentar los conceptos de Resonancia Eléctrica, Filtros Pasivos y Diagrama de Bode a través de ejercicios resueltos. No se pretende sustituir con esto, los libros de texto, sino que sirva como guía, de consulta rápida, a estudiantes de asignaturas introductorias sobre circuitos, con conocimiento de las Leyes y Teoremas básicos y del concepto de la variable S, en areas afines a la Tecnología Eléctrica y a la Tecnología Electrónica. De manera específica, esta guía se orienta a condensar parte del contenido programático de las primeras unidades, (disperso en distintos Capítulos en los textos) de la asignatura Circuitos y Sistemas Electrónicos II de la carrera de Ingeniería de Telecomunicaciones de la Universidad Católica Andres Bello.

Los ejercicios se presentan en tres Capítulos, comenzando con los más sencillos en el Capítulo 1, sobre Resonancia Eléctrica, le siguen ejercicios sobre Filtros Pasivos, en el Capítulo 2, destacando el hecho que el circuito RLC serie resonante, analizado en el Capítulo 1, se comporta como Filtro Pasabanda si la salida se toma en la resistencia. En el Capítulo 3, mediante el uso de Diagramas de Bode, se obtienen las Respuestas en frecuencia de Funciones de Transferencia , desde la más simple, como una función con término constante hasta otras más complejas, incluyendo la respuesta de los filtros pasivos, analizados en el Capítulo 2. En los tres Capítulos, la resolución de ejercicios se inicia con ejemplos que plantean los conceptos, fórmulas y metodología a utilizar en ejemplos posteriores.

Para obtener la Respuesta en frecuencia se utilizan Programas de Cálculo y Simulación como Mathematica 5.1, PSIM 7.0 y Matlab 6.5, sin descartar el uso de tablas w versus H para un número limitado de frecuencias, lo que permite observar las diferencias en los trazados manuales y la facilidad con que se obtienen las Respuestas con los Programas. Estas herramientas son alternativas de comprobación al trazado manual de la Respuesta en frecuencia sobre papel semilogaritmico. Se anexan las direcciones de la WEB, en las cuales los usuarios pueden encontrar orientación sobre el uso de tales Programas.

Finalmente, se presenta la Bibliografía utilizada para realizar este trabajo y con la cual los estudiantes pueden encontrar mas información sobre los temas tratados.

1.CIRCUITO RESONANTE

Un circuito entra en resonancia cuando la tensión aplicada y la intensidad de corriente total que circula , estan en fase, por lo que la impedancia compleja del circuito no es un número complejo, es un número real y el ángulo de fase (argumento de la impedancia compleja) es cero.

$$\mathbf{Z} = \frac{V}{I} \tag{1}$$

$$\emptyset\mathbf{Z} = 0 \tag{2}$$

1.1.CIRCUITO RLC SERIE

Ejemplo 1:

Para el circuito RLC serie de la figura 1: a)Determine la impedancia compleja Z b)Determine la frecuencia cuando el circuito entra en resonancia c)Determine la corriente I (fasor, magnitud y fase).

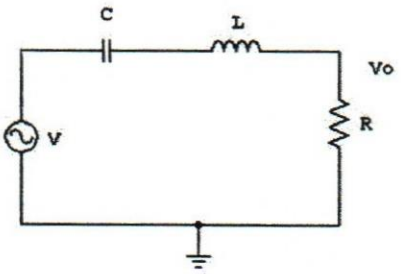


Figura 1. Circuito RLC Serie

Respuesta a)

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Zc} + \mathbf{Zl} + \mathbf{Zr}$$

$$\mathbf{Zc} = -jXc = -j\frac{1}{WC} \tag{3}$$

$$\mathbf{Zl} = jXl = jWL \tag{4}$$

$$\mathbf{Zr} = R \tag{5}$$

$$\mathbf{Z} = R + J(WL - \frac{1}{WC}) \tag{6}$$

La magnitud de la impedancia compleja es

$$/\mathbf{Z}/ = \sqrt{R^2 + (WL - \frac{1}{WC})^2} \tag{7}$$

El ángulo de la impedancia compleja viene dada por la expresión

$$\emptyset\mathbf{Z} = arctg(\frac{WL - \frac{1}{WC}}{R}) \tag{8}$$

Respuesta b)
Cuando el circuito entra en resonancia, la impedancia compleja es una resistencia, un número real, entonces , en la ecuación 6, la parte imaginaria es cero.

$$(WL - \frac{1}{WC}) = 0$$

$$WL = \frac{1}{WC}$$

$$Wo = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{9}$$

Wo es la frecuencia de resonancia en radianes/segundo.

$$Wo = 2\Pi fo \tag{10}$$

$$fo = \frac{Wo}{2\Pi} = \frac{1}{2\Pi\sqrt{LC}} \tag{11}$$

donde fo es la frecuencia de resonancia en Herz del circuito resonante RLC serie.
Zo es la impedancia en resonancia

$$Zo = R$$

Respuesta c)
De la ecuación 1

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{V}}{R + J(WL - \frac{1}{WC})} \tag{12}$$

$$/\mathbf{I}/ = \frac{/\mathbf{V}/}{\sqrt{R^2 + (WL - \frac{1}{WC})^2}} \tag{13}$$

Suponiendo el ángulo del voltaje V sea cero grados

$$\emptyset\mathbf{I} = -\emptyset\mathbf{Z} = -arctg(\frac{WL - \frac{1}{WC}}{R}) \tag{14}$$

Ejemplo 2:

a)Determine la magnitud de la corriente cuando la parte imaginaria de I es igual a la parte real, en un circuito RLC serie. b)Determine la expresión de las frecuencias de corte W1 y W2 en un circuito RLC serie.

Respuesta a):
La parte imaginaria de la impedancia compleja se hace igual a la parte real (ecuación 6)a dos frecuencias, conocidas como frecuencias de corte.

$$(WL - \frac{1}{WC}) = R \tag{15}$$

Las corrientes alcanzadas a tales frecuencias de corte son:

$$/\mathbf{I}w1/ = \frac{/\mathbf{V}/}{\sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{/\mathbf{V}/}{\sqrt{2R^2}} = 0.707\frac{/\mathbf{V}/}{R} = /\mathbf{I}w2/ \tag{16}$$

La corriente máxima Imax=Io se genera a la frecuencia de resonancia Wo, cuando la impedancia compleja es mínima , es resistiva , entonces

$$/\mathbf{I}max/ = \frac{/\mathbf{V}/}{R} \tag{17}$$

$$/\mathbf{I}w1/ = /\mathbf{I}w2/ = 0.707/\mathbf{I}max/ \tag{18}$$

Respuesta b):
A las frecuencias de corte W1 y W2 la parte imaginaria de la magnitud de la impedancia es igual a la parte real, (ecuacion 7), por tanto

$$(WL - \frac{1}{WC})^2 = R^2$$

A la frecuencia inferior W1, el término imaginario es negativo

$$W1L - \frac{1}{W1C} = (-R)$$
$$W1^2LC - 1 = -RW1C$$
$$W1^2LC + W1RC - 1 = 0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado y considerando solo la solución positiva, W1>0

$$aW1^2 + bW1 + c = 0$$
$$W1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$W1 = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$W1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2LC}\sqrt{(RC)^2 + 4LC} \tag{19}$$

$$f1 = \frac{W1}{2\Pi} \tag{20}$$

A la frecuencia superior W2, el término imaginario es positivo

$$W2L - \frac{1}{W2C} = +R$$
$$W2^2LC - 1 = RW2C$$
$$W2^2LC - W2RC - 1 = 0$$

De igual manera, resolviendo la ecuación de segundo grado y considerando unicamente la solución positiva, W2>0

$$W2 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$W2 = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2LC}\sqrt{(RC)^2 + 4LC} \tag{21}$$

$$f2 = \frac{W2}{2\Pi} \tag{22}$$

Se define el ancho de banda (Width Band)en rad/seg o en HZ, a la

diferencia de las frecuencias de corte superior menos la frecuencia de corte inferior

$$AB = WB = W2 - W1 \tag{23}$$

$$AB = WB = f2 - f1 \tag{24}$$

Ejemplo 3:

En el circuito RLC serie de la figura 1 /Vg/=5Vpp y con C=1nf L=11mH: calcule a)frecuencia de resonancia para R=1KOhm y R=1.5KOhm b)CalculeW1, f1,W2,f2 y AB para cada valor de resistencia c)Calcule voltaje y corriente en la resistencia a la frecuencia de resonancia d)Calcule voltaje en el condensador y en la bobina a la frecuencia de resonancia e)Dibujar la respuesta en frecuencia de la magnitud de corriente /I/=i para cada caso

Respuesta a)
Con las ecuaciones 9 y 11 calculamos la frecuencia de resonancia en rad/seg y en HZ.
Con R=1KOhm y R=1.5 KOhm la frecuencia de resonancia es la misma Wo=301.5 Krad/seg y fo=47.99 KHz

Respuesta b)
Utilizando las ecuaciones desde la 19 hasta la 24 calculamos las frecuencias de corte y el ancho de banda.
Con R=1KOhm: W1=259.7 Krad/seg, f1=41.33KHz, W2=350.72Krad/seg, f2=55.82KHz,AB=14.5KHz
Con R=1.5KOhm: W1=241.23Krad/seg, f1=38.39KHz, W2=377.63Krad/seg, f2=60.10 KHz, AB=21.7KHz

Respuesta c)
Con R=1KOhm /Vr/=/Vg/=5Vpp,/Io/=5ma,
Con R=1.5KOhm /Vr/=/Vg/=5Vpp,/Io/=3.33ma,

Respuesta d)
Con R=1KOhm /Vco/=/Zco//Io/=16.58Vpp, /Vlo/=/Zlo//Io/=16.58Vpp
Con R=1.5KOhm /Vco/=/Vlo/=11.06Vpp

Respuesta e)
Determinamos el valor de /I/ a distintas frecuencias, las frecuencias claves son cero,Wo/10, Wo, 10Wo, y las frecuencias de corte W1 (fre-

cuencia inferior o frecuencia baja) y W2 (frecuencia superior o frecuencia alta).

/Iw1/=/Iw2/ a R1=1KOhm /Iw1/=3.54ma y a R= 1.5KOhm /Iw1/=2.35ma newline

A frecuencias muy inferiores a W1, cercanas a cero, la corriente tiende a cero. A frecuencias muy superiores a W2, por ejemplo 10Wo,la corriente tiende a cero (ecuación 13).
La respuesta en frecuencia de la magnitud de corriente i=/I/ en un circuito RLC serie para cada valor de resisitencia es mostrada en la figura 2 y figura 3.(Dibujadas con el Programa Mathematica 5.1)

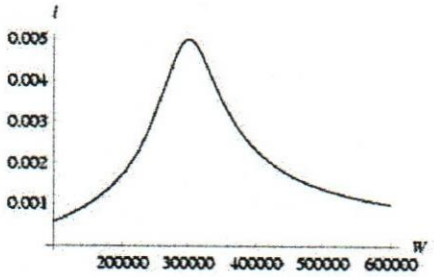


Figura 2.Respuesta en frecuencia de la magnitud de corriente en un circuito RLC serie R=1000 Ohms

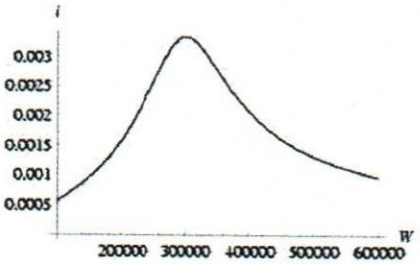


Figura 3.Respuesta en frecuencia de la magnitud de corriente en un circuito RLC serie con R=1500 Ohms

1.2.CIRCUITO RLC PARALELO

Ejemplo 4:

Para el circuito de la figura 4:a)Determine la admitancia compleja Y,b)Determine la frecuencia cuando el circuito entra en resonancia,c)Determine la relación de corriente Ir/It(fasor, magnitud y fase), donde Ir es la corriente en la resistencia R e It es la corriente total en el circuito, generada por V.

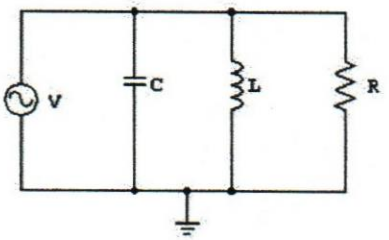


Figura 4. Circuito RLC paralelo.
Respuesta a):

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{R} - \frac{j}{WL} + jWC \tag{25}$$

La magnitud de la admitancia compleja Y es /Y/

$$/\mathbf{Y}/ = \sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (WC - \frac{1}{WL})^2} \tag{26}$$

El ángulo de la admitancia compleja viene dada por la expresión

$$\emptyset\mathbf{Y} = arctg(R(WC - \frac{1}{WL})) \tag{27}$$

Respuesta b):
Cuando el circuito entra en resonancia, la admitancia compleja es una conductancia ,un número real, la parte imaginaria es cero. Siguiendo el procedimiento utilizado en el análisis del circuito RLC serie, resulta:

$$Wo = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Wo en radianes /segundo.

$$fo = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

fo en Hz.
Respuesta c):

$$\mathbf{V} = \mathbf{ItZ}$$

donde

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Y}}$$

tambien

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{It}}{\mathbf{Y}}$$

y

$$\mathbf{V} = \mathbf{Ir}R$$

igualando resulta

$$\frac{\mathbf{It}}{\mathbf{Y}} = \mathbf{Ir}R$$

despejando

$$\frac{\mathbf{Ir}}{\mathbf{It}} = \frac{1}{R\mathbf{Y}} \tag{28}$$

La ecuación 25, la sustituimos en la anterior

$$\frac{\mathbf{Ir}}{\mathbf{It}} = \frac{1}{R[\frac{1}{R} + J(WC - \frac{1}{WL})]}$$

el fasor es

$$\frac{\mathbf{Ir}}{\mathbf{It}} = \frac{1}{1 + RJ(WC - \frac{1}{WL})} \tag{29}$$

la magnitud de la relación de corriente es:

$$/\frac{\mathbf{Ir}}{\mathbf{It}}/ = \frac{1}{\sqrt{1 + [R(WC - \frac{1}{WL})]^2}} \tag{30}$$

El ángulo de la relación de corriente viene dado por la expresión

$$\emptyset\frac{\mathbf{Ir}}{\mathbf{It}} = -arctgR(WC - \frac{1}{WL}) \tag{31}$$

Ejemplo 5:

Para el circuito de la figura 4: Calcule la frecuencia de resonancia en radianes/seg y en Hz si C=3microf, R=1KOhm y L=83.33mH

Respuesta: Wo=2000rad/seg, fo=318.31Hz

Ejemplo 6:

Determine la expresión de las frecuencias de corte W1 y W2 en un circuito paralelo RLC

Respuesta:
A las frecuencias de corte, la parte imaginaria de la admitancia compleja es igual a la parte real. De la ecuación 25:

$$WC - \frac{1}{WL} = \frac{1}{R}$$

A la frecuencia inferior W1 el término 1/WL es grande por lo que el término imaginario es negativo

$$WC - \frac{1}{WL} = -\frac{1}{R}$$

$$W^2CL - 1 = -\frac{WL}{R}$$

$$W^2RCL + WL - R = 0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado y considerando solo la solución positiva, W1>0

$$aW1^2 + bW1 + c = 0$$

$$W1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$W1 = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 4CLR^2}}{2RCL}$$

$$W1 = -\frac{L}{2RCL} + \sqrt{\frac{L^2}{4(RCL)^2} + \frac{4CLR^2}{4(RCL)^2}}$$

$$W1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4(RC)^2} + \frac{1}{CL}} \qquad (32)$$

$$f1 = \frac{W1}{2\Pi}$$

Para determinar la frecuencia de corte superior consideramos que a tal frecuencia el término 1/WL (ecuación 25) se hace pequeño y WC>1/WL

$$WC - \frac{1}{WL} = \frac{1}{R}$$

$$W^2RCL - WL - R = 0$$

Siguiendo el procedimiento anterior para determinar W1, resolvemos la ecuacion de segundo grado y considerando solo la solucion positiva, W2>0, tenemos:

$$W2 = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4CLR^2}}{2RCL}$$

$$W2 = \frac{1}{2CR} + \sqrt{\frac{1}{4(RC)^2} + \frac{1}{CL}} \tag{33}$$

$$f2 = \frac{W2}{2\Pi}$$

Ejemplo 7:

Para el circuito RLC paralelo (Ejemplo 5): a)Calcule las frecuencias de corte y el ancho de banda, b)Calcule la magnitud de la relación de corriente a la frecuencia de resonancia, c)Dibuje la respuesta en frecuencia de la magnitud de la relacíon de corriente.

Respuesta a):
W1=1.84 Krad/seg, f1=293 Hz, W2=2.18 Krad/seg, f2=347 Hz, AB=0.34Krad/seg AB=54 Hz
Respuesta b):
La frecuencia de resonancia fue calculada en el ejemplo 5, W=2000rad/seg y la magnitud de la relación de corriente es máxima e igual a 1 a dicha frecuencia.
Respuesta c):
A frecuencias por debajo de la frecuencia inferior W1 y a frecuencias por encima de la frecuencia superior W2, la magnitud de la relacíon de corriente tiende a cero. La respuesta en frecuencia se muestra en la figura 5.(Dibujada con el Programa Mathematica 5.1)

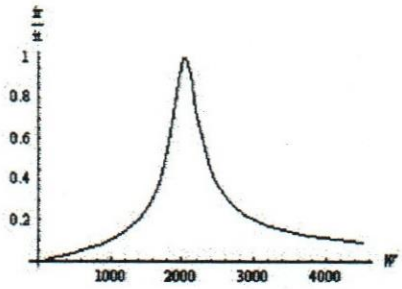


Figura 5.Respuesta en frecuencia de la magnitud de la relación de corriente para el circuito RLC paralelo. Ejemplo 7.

1.3.CIRCUITO DE DOS RAMAS PARALELAS

Ejemplo 8:

Para el circuito de la figura 6 determine la frecuencia de resonancia.

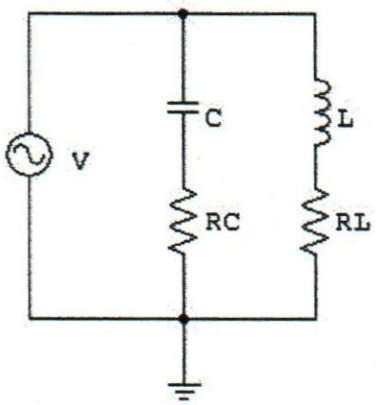


Figura 6. Circuito de dos ramas paralelas.

Respuesta:

$$\mathbf{Z1} = Rc - \frac{j}{WC} \tag{34}$$

$$\mathbf{Y1} = \frac{1}{\mathbf{Z1}} \tag{35}$$

$$\mathbf{Z2} = Rl + jWL \tag{36}$$

$$\mathbf{Y2} = \frac{1}{\mathbf{Z2}} \tag{37}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y1} + \mathbf{Y2}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{Rc - \frac{j}{WC}} + \frac{1}{Rl + jWL}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{Rc + \frac{j}{WC}}{Rc^2 + (\frac{1}{WC})^2} + \frac{Rl - jWL}{Rl^2 + (WL)^2} \tag{38}$$

El circuito paralelo de la figura 6 entra en resonancia cuando la admitancia es un número real, es decir la parte imaginaria es cero.

$$\frac{\frac{1}{WC}}{Rc^2 + (\frac{1}{WC})^2} - \frac{WL}{Rl^2 + (WL)^2} = 0$$

$$\frac{WC}{(RcWC)^2 + 1} = \frac{WL}{Rl^2 + (WL)^2}$$

$$CRl^2 + C(LW)^2 = L + L(RcCW)^2$$

$$W^2(C^2Rc^2L - CL^2) = CRl^2 - L$$

$$W^2 = \frac{CRl^2 - L}{C^2Rc^2L - CL^2} \tag{39}$$

La frecuencia de resonancia en rad/seg es Wo

$$Wo = \sqrt{\frac{CRl^2 - L}{C^2Rc^2L - CL^2}} \tag{40}$$

$$Wo = \sqrt{\frac{CRl^2 - L}{CL(CRc^2 - L)}}$$

$$Wo = \sqrt{\frac{Rl^2 - \frac{L}{C}}{CL(Rc^2 - \frac{L}{C})}} \tag{41}$$

La frecuencia de resonancia en Hz es fo

$$fo = \frac{Wo}{2\Pi}$$

Ejemplo 9:

Para el circuito de la figura 6 determine el rango de Rl y Rc que aseguren a dicho circuito entre en resonancia.

Considerando la ecuación 41 que expresa la frecuencia de resonancia
a)si el numerador es igual al denominador y Rl=Rc

$$Wo = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b)Si Rl es distinta a Rc y

$$Rl^2 = \frac{L}{C}$$

Wo tiende a cero
c)Si Rl es distinta a Rc y

$$Rc^2 = \frac{L}{C}$$

Wo tiende a infinito
d)Si

$$Rl^2 > \frac{L}{C}$$

y

$$Rc^2 > \frac{L}{C}$$

y Rl es distinta a Rc, Wo es un número real positivo.
e)Si

$$Rl^2 < \frac{L}{C}$$

y

$$Rc^2 < \frac{L}{C}$$

y Rl es distinta a Rc, Wo es un número real positivo.

Ejemplo 10:

Determine la impedancia en resonancia del circuito de la figura 6.

Respuesta:
De la ecuación 38,la admitancia en resonancia es

$$Yres = Yo = \frac{Rc}{Rc^2 + (\frac{1}{WoC})^2} + \frac{Rl}{Rl^2 + (WoL)^2}$$

La impedancia en resonancia es el inverso de la admitancia en resonancia

$$Zres = Zo = \frac{1}{Yres}$$

Ejemplo 11:

Para el circuito de la figura 6, calcule los valores de L si Wo=2500rad/seg, Rl=5 Ohm, Rc=2 Ohm, Xco=10 Ohm (reactancia capacitiva a la frecuencia de resonancia).

Respuesta:
L=415mH y L=1mH

Ejemplo 12:

a)Para el circuito de la figura 6, calcule el valor de C si Wo=5000rad/seg, Rl=8 Ohm,Rc=8.34 Ohm y Xlo=6 Ohm (reactancia inductiva a la frecuencia de resonancia).
b)Repita la parte a) con Rl=80 Ohm

Respuesta a):
C=24 microf
Respuesta b):
C=3mf

Ejemplo 13:

Para el circuito de la figura 6,calcule el valor de Rc para que entre en resonancia si Rl=10 Ohm, Xlo=10 Ohm y Xco=2 Ohm

Respuesta:
Xlo=WoL=10 despejando Wo=10/L
Xco=1/WoC despejando Wo=1/2C
igualando ambas expresiones resulta

$$\frac{L}{C} = 20$$

$$L = 20C$$

en la ecuación 41 sustituimos

$$Wo^2CL = \frac{100-20}{Rc^2-20}$$

Sustituimos la primera expresión de Wo encontrada en este ejemplo

$$\frac{100CL}{L^2} = \frac{80}{Rc^2-20}$$

$$\frac{100C}{L}(Rc^2-20) = 80$$

$$\frac{100C}{20C}(Rc^2-20) = 80$$

$$5Rc^2 = 180$$

Rc=6 Ohm

1.4.FACTOR DE CALIDAD Q

El factor de calidad Q es un parámetro que establece cuan bueno es un circuito resonante, si pierde poca energía o si es mas selectivo. No tiene dimensiones. En general para un circuito RLC serie o paralelo se tienen distintas ecuaciones para calcularlo:

El factor de calidad en función de la energía almacenada y potencia disipada:

$$Q = 2\Pi \frac{Eamax}{PdP} \tag{42}$$

Eamax es la energía máxima almacenada por los componentes reactivos. Pd es la potencia media disipada en la resistencia. La energía disipada es el producto de la potencia media disipada por período

El factor de calidad en función de las frecuencias de corte inferior y superior:

$$Q = \frac{Wo}{W2 - W1} = \frac{Wo}{AB} \tag{43}$$

Wo es la frecuencia de resonancia en rad/seg y AB=WB es el ancho de banda (Width Band)en rad/seg

$$Q = \frac{fo}{f2 - f1} = \frac{fo}{AB} \tag{44}$$

fo es la frecuencia de resonancia en Hz y AB es el ancho de banda en Hz Si el factor de calidad es alto, el circuito RLC serie y/o RLC paralelo tienen un ancho de banda angosto.Ambos,son circuitos selectivos de frecuencia.

Por otro lado si observamos en el ejemplo 3d, los valores de amplitud de tensión (o corriente) en la bobina o en el condensador, a la frecuencia de resonancia, pueden ser mayor que la amplitud del generador de funciones aplicado. A tal relación de ganancia entre la amplitud del componente reactivo en resonancia y la amplitud del generador se le denomina también factor de calidad.
En un circuito serie RLC

$$Qserie = \frac{/Vc/}{/Vg/} \tag{45}$$

donde /Vc/=/Vl/ voltaje en el condensador es el mismo voltaje en la

bobina a la frecuencia de resonancia.
En un circuito paralelo RLC

$$Qparalelo = \frac{/Ic/}{/Ig/} \tag{46}$$

donde /Ic/=/Il/ corriente en el condensador es la misma corriente en la bobina a la frecuencia de resonancia.

Ejemplo 14:

Demostrar que para un circuito resonante RLC serie el factor de calidad Q se calcula por las siguientes ecuaciones:

$$Qo = \frac{WoL}{R} \tag{47}$$

$$Qo = \frac{1}{WoCR} \tag{48}$$

Respuesta:
En la bobina,en un circuito serie RLC, a la frecuencia de resonancia

$$Eamax = \frac{LIo^2}{2} \tag{49}$$

$$Pd = \frac{RIo^2}{2} \tag{50}$$

$$P = \frac{1}{fo}$$

donde Io es la corriente maxima. Sustituyendo las tres ecuaciones anteriores en la ecuación 42, tenemos que:

$$Qo = 2\Pi\frac{foL}{R}$$

$$Wo = 2\Pi fo$$

$$Qo = \frac{WoL}{R}$$

lo que se queria demostrar

En el condensador, en un circuito serie RLC, a la frecuencia de resonancia

$$Eamax = \frac{Io^2}{2CWo^2} \tag{51}$$

$$Pd = \frac{RIo^2}{2}$$

$$P = \frac{1}{fo}$$

Sustituyendo las tres ecuaciones anteriores en la ecuación 42, resulta:

$$Q = 2\Pi fo\frac{1}{CRWo^2}$$

como

$$Wo = 2\Pi fo$$

$$Qo = \frac{Wo}{CRWo^2}$$

$$Qo = \frac{1}{CRWo}$$

lo que se queria demostrar.

Ejemplo 15:

Calcular el factor de calidad Q para el circuito RLC serie del ejemplo 3 utilizando las cuatro ecuaciones

$$Qo = \frac{fo}{AB}$$

$$Qo = \frac{WoL}{R}$$

$$Qo = \frac{1}{WoCR}$$

$$Qo = \frac{/Vc/}{/Vg/}$$

Respuesta:
Sustituyendo los valores de frecuencia de resonancia, ancho de banda, voltaje en el condensador, calculados en el ejemplo 3 con los datos dados de Vg, C, L y R, encontramos que:
Con R=1K Ohm Qo=3.31 y con R=1.5K Ohm Qo=2.21

Ejemplo 16:
Demostrar que para un circuito RLC paralelo el factor de calidad Q viene dado por las siguientes expresiones

$$Qo = RWoC \tag{52}$$

$$Qo = \frac{R}{WoL} \tag{53}$$

Respuesta:
En un circuito RLC paralelo,la energía máxima almacenada en el condensador a la frecuencia de resonancia fo

$$Eamax = \frac{CVc^2}{2} \tag{54}$$

La potencia media disipada en el resistor

$$Pd = \frac{Vc^2}{2R}$$

$$P = \frac{1}{fo}$$

donde Vc es el voltaje aplicado y es el mismo en los tres componentes. Sustituyendo las tres ecuaciones anteriores en la ecuación 42 tenemos

$$Qo = \frac{2\Pi 2foCVc^2R}{2Vc^2}$$

Como

$$Wo = 2\Pi fo$$

$$Qo = WoCR$$

lo que se queria demostrar. De la expresión de frecuencia de resonancia

$$Wo^2 = \frac{1}{LC}$$

entonces

$$C = \frac{1}{LWo^2}$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación , resulta

$$Qo = \frac{R}{WoL}$$

lo que se queria demostrar.

Ejemplo 17:

Demostrar que la potencia media disipada en un resistor

$$Pd = \frac{RImax^2}{2} = \frac{Vmax^2}{2R}$$

donde

$$Vmax = RImax$$

Ejemplo 18:

Demostrar que la energía almacenada máxima en un circuito serie RLC es:

$$Eamax = \frac{LIo^2}{2}$$

Ejemplo 19:

Demostrar que la energía almacenada máxima en un circuito paralelo RLC es :

$$Eamax = \frac{CVo^2}{2}$$

Ejemplo 20:

Demuestre que para un circuito serie y/o un circuito paralelo RLC:

$$W1 = Wo\sqrt{1 + \frac{1}{(2Qo)^2}} - \frac{Wo}{2Qo} \tag{55}$$

$$W2 = Wo\sqrt{1 + \frac{1}{(2Qo)^2}} + \frac{Wo}{2Qo} \tag{56}$$

Respuesta:
En un circuito serie RLC tenemos las ecuaciones 9,19 y 47

$$W1 = \frac{1}{2LC}\sqrt{(RC)^2 + 4LC} - \frac{R}{2L}$$

$$\frac{R}{L} = \frac{Wo}{Qo}$$

sustituyendo la expresión anterior en la previa e incluyendo 2LC en la raíz

$$W1 = \sqrt{\frac{(RC)^2}{4(LC)^2} + \frac{4LC}{4(LC)^2}} - \frac{Wo}{2Qo}$$

$$W1 = \sqrt{Wo^2 + \frac{Wo^2}{4Qo^2}} - \frac{Wo}{2Qo}$$

$$W1 = Wo\sqrt{1 + \frac{1}{(2Qo)^2}} - \frac{Wo}{2Qo}$$

lo que se quería demostrar
Para W2,tenemos las ecuaciones 9, 21 y 47

$$W2 = \frac{1}{2LC}\sqrt{(RC)^2 + 4LC} + \frac{R}{2L}$$

$$\frac{R}{L} = \frac{Wo}{Qo}$$

Repitiendo el procedimiento utilizado para obtener W1 se demuestra la ecuación 56.

En un circuito RLC paralelo, si consideramos la expresión de la frecuencia de resonancia en radianes/seg

$$Wo^2 = \frac{1}{LC} \tag{57}$$

la expresión de W1,(ecuación 32), puede reescribirse, si multiplicamos y dividimos por L, luego sustituimos por la ecuación

$$W1 = -\frac{LWo^2}{2R} + \sqrt{\frac{L^2Wo^2Wo^2}{4R^2} + Wo^2}$$

en función del factor de calidad, recordando (ecuación 53)

$$Qo = \frac{R}{LWo}$$

$$W1 = -\frac{Wo}{2Qo} + \sqrt{\frac{Wo^2}{(2Qo)^2} + Wo^2}$$

$$W1 = -\frac{Wo}{2Qo} + Wo\sqrt{\frac{1}{(2Qo)^2} + 1}$$

lo que se quería demostrar.
Para W2 ,consideramos la ecuación 33 y repetimos el procedimiento anterior llegando a

$$W2 = \frac{Wo}{2Qo} + \sqrt{\frac{Wo^2}{(2Qo)^2} + Wo^2}$$

$$W2 = \frac{Wo}{2Qo} + Wo\sqrt{\frac{1}{2Qo^2} + 1}$$

lo que se quería demostrar
Cabe destacar que las expresiones de las frecuencias de corte en función de la frecuencia de resonancia y el factor de calidad para un circuito RLC serie y paralelo son las mismas, considerando, las distintas expresiones del factor de calidad para cada uno de ellos (ecuaciones 47,48, 52 y 53).

2.FILTROS PASIVOS

Se llama filtro a una red que discrimina frecuencias, permitiendo pasar o transmitir algunas y rechazar o atenuar otras.
Los filtros se clasifican según los componentes utilizados en filtros activos y filtros pasivos. Los filtros pasivos son aquellos que utilizan condensadores resistores y bobinas.Los filtros pasivos y activos más comunes son el Pasabanda, el Pasaalto y el Pasabajo.

2.1.FILTRO PASABANDA

Los filtros Pasabanda permiten el paso de las señales en un rango determinado entre dos frecuencias.
El filtro Pasabanda es muy utilizado en los receptores de radio, permitiendo al oyente sintonizar la frecuencia de la estación elegida.
Un circuito RLC serie se comporta como un filtro pasabanda si se toma como salida a la resistencia. En el circuito RLC la frecuencia de resonancia es la frecuencia central en el filtro pasabanda, en la cual se obtiene un valor máximo de corriente (ver figura 2 y figura 3). Las frecuencias W1 y W2 son las frecuencias de corte en las cuales se obtiene 0.707 del valor máximo de corriente. Por debajo de la frecuencia inferior W1 y por encima de la frecuencia superior W2 los valores de corriente se atenuan (ver ejemplo 3).

Ejemplo 21:

Determine la relación de la respuesta de salida Vo a la señal de entrada Vi,A(w)=Vo/Vi o función de transferencia del circuito de la figura 1, (magnitud y fase).

Respuesta:
Por el teorema de divisor de tensión:

$$\mathbf{Vo} = R\frac{\mathbf{Vi}}{R + \mathbf{Zc} + \mathbf{Zl}}$$

$$\mathbf{Zc} = -jXc = -j\frac{1}{WC} = -j\frac{1}{2\Pi fC}$$

$$Zl = jWL = j2\Pi fL$$

$$\mathbf{Vo} = \frac{R\mathbf{Vi}}{R + \frac{1}{jWC} + jWL}$$

donde:

$$\mathbf{Vi} = \mathbf{V}$$

$$\mathbf{A(w)} = \frac{\mathbf{Vo}}{\mathbf{Vi}} = \frac{RCjW}{RCjW - W^2LC + 1}$$

dividiendo el numerador y el denominador entre RCWj resulta:

$$\mathbf{A(w)} = \frac{1}{1 + \frac{WLj}{R} - \frac{j}{RCW}}$$

La magnitud es:

$$/\mathbf{A(w)}/ = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{WL}{R} - \frac{1}{RCW})^2}}$$

La fase es:

$$\emptyset\mathbf{A(w)} = 0 - arctg(\frac{WL}{R} - \frac{1}{RCW})$$

$$\emptyset\mathbf{A(w)} = -arctg(\frac{WL}{R} - \frac{1}{RCW})$$

Ejemplo 22:

Dibuje la respuesta en frecuencia de la magnitud y la fase para el filtro pasabanda del ejemplo anterior con R=1.5K ohm, L=11mH y C=1nf

Respuesta:
La respuesta en magnitud es similar a la figura 3 del ejemplo 3, se muestra la respuesta en la figura 7 (obtenida con el Programa Mathematica 5.1).Se observa que a la frecuencia central wo=301.5Krad/seg aproximadamente, la magnitud es máxima.

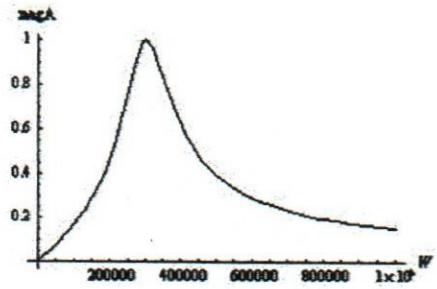


Figura 7. Respuesta en frecuencia de la magnitud (magA) de un Filtro Pasabanda RLC con wo=301.5Krad/seg

La respuesta en fase es mostrada en la figura 8 (trazada con el Programa Mathematica 5.1). Se observa que a la frecuencia central wo=301.5Krad/seg, aproximadamente, la fase es cero grados.

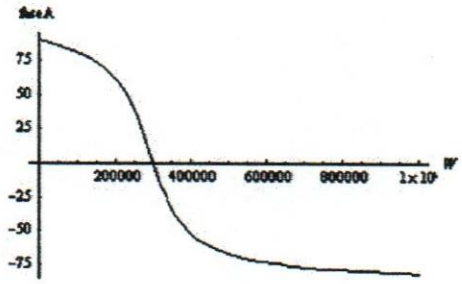


Figura 8. Respuesta en frecuencia de la fase (faseA) de un Filtro Pasabanda RLC con wo=301.5Krad/seg

2.2.FILTRO PASAALTO

Un filtro Pasaalto permite el paso de frecuencias altas. Atenua y/o rechaza las frecuencias bajas.
Un circuito RLC serie se comporta como un filtro pasaalto si la tensión de salida se toma en la bobina. La tensión se irá anulando a frecuencias bajas.

Ejemplo 23:

Determine la relación de la respuesta de salida Vo a la señal de entrada Vi A(w)=Vo/Vi o Función de transferencia del circuito de la figura 9 (magnitud y fase).

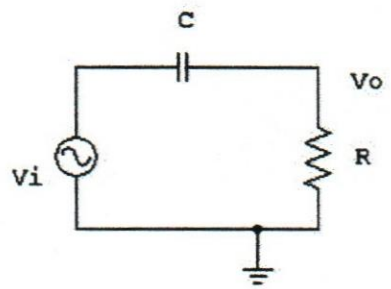


Figura 9. Filtro RC Pasaalto.

Respuesta:
Por el Teorema de Divisor de tensión

$$\mathbf{Vo} = R\frac{\mathbf{Vi}}{R + \mathbf{Zc}}$$

$$\mathbf{Zc} = -jXc = -j\frac{1}{WC} = -j\frac{1}{2\Pi fC}$$

$$\frac{\mathbf{Vo}}{\mathbf{Vi}} = \mathbf{A(w)} = \frac{R}{R - j\frac{1}{WC}}$$

dividiendo al numerador y al denominador entre R

$$\mathbf{A(w)} = \frac{\mathbf{Vo}}{\mathbf{Vi}} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{WCR}} \tag{58}$$

La magnitud es

$$/\mathbf{A(w)}/ = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(WCR)^2}}} \tag{59}$$

La fase es

$$\emptyset\mathbf{A}(\mathbf{w}) = 0 - arctg\frac{-1}{WCR}$$

$$\emptyset\mathbf{A}(\mathbf{w}) = arctg\frac{1}{WCR} \tag{60}$$

Ejemplo 24:

En el circuito de la figura 9 determine la magnitud de A(w) y la frecuencia para la cual la parte imaginaria de A(w) (ecuación 58) es igual a 1.

Respuesta:
Cuando la parte imaginaria de A(w) es igual a 1, la magnitud

$$/\mathbf{A}(\mathbf{w})/ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$/\mathbf{A}(\mathbf{w})/ = 0.707$$

La frecuencia a la cual la magnitud/A(w)/ cae a 0.707 de su valor máximo es la frecuencia de corte, Wc, del filtro pasaalto.

$$\frac{1}{WcCR} = 1$$

$$Wc = \frac{1}{CR} \tag{61}$$

en radianes/segundo

$$fc = \frac{1}{2\Pi CR} \tag{62}$$

en Hz

Ejemplo 25:

Escriba la expresión de la relación de voltajes A(w)para un filtro RC Pasaalto en función de f y la frecuencia de corte fc.

Respuesta
De la ecuación 58 y la ecuación 62 que expresan a A(w) y fc para un filtro pasaalto, reescribo

$$\mathbf{A}(\mathbf{f}) = \frac{1}{1 - j\frac{fc}{f}} \tag{63}$$

La magnitud (ecuación 59)en función de las frecuencias f y fc

$$/\mathbf{A(f)}/ = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{fc}{f})^2}} \tag{64}$$

La fase (ecuación 60) en función de las frecuencias f y fc

$$\emptyset\mathbf{A(f)} = arctag\frac{fc}{f} \tag{65}$$

Ejemplo 26:

Para el circuito de la figura 9 con C=10nf, calcule el valor de R, que permita se comporte como un filtro Pasaalto con una frecuencia de corte de 10KHz.

Respuesta:
De la ecuación 62, despejo R:

$$R = \frac{1}{2\Pi Cfc}$$

R=1.6K Ohms

Ejemplo 27:

Para el circuito de la figura 9 con R=32 Ohm a)calcule el valor del condensador para que la frecuencia de corte sea de 5 KHz b)Calcule /A(f)/ y la fase para 100Hz, 0.5 KHz, 5Khz, 50KHz y 100Khz.

Respuesta:
a)Utilizando la ecuación 62 despejo C:

$$C = \frac{1}{2\Pi Rfc}$$

C=1microf
b)utilizando las ecuaciones 59 y 60 resulta:

f(Hz) 100 0.5KHz 5KHz 50KHz 100KHz

/A(f)/ 0.02 0.0995 0.707 0.995 0.999

fase(grados)88.9 84.28 45 5.7 2.6

Ejemplo 28:

Dibuje la respuesta en frecuencia de la magnitud y la fase para el filtro RC Pasaalto de la figura 9 con los valores de R y C del ejemplo 26 (C=10nf,R=1.6KOhm fc=10Khz).

Respuesta:
Analizando las ecuaciones 59 y 60, determinamos que :
A frecuencias muy por debajo de la frecuencia de corte, la magnitud tiende a cero y la fase tiende a 90 grados.
A la frecuencia de corte, la magnitud es igual a 0.707 y la fase es de 45 grados.
A frecuencias muy por encima de la frecuencia de corte, la magnitud tiende a 1 y la fase tiende a 0 grados. (ver figuras 10 y 11, obtenidas con el Programa Mathematica 5.1)

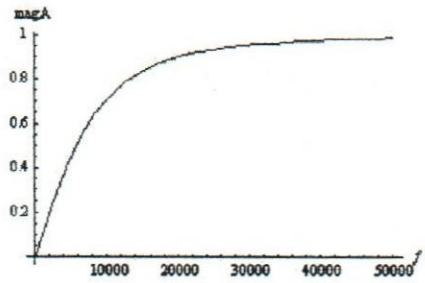


Figura 10. Respuesta en frecuencia de la magnitud (magA) de un Filtro Pasaalto RC con fc=10Khz

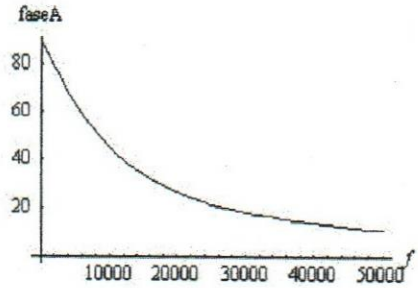


Figura 11. Respuesta en frecuencia de la fase (faseA) de un Filtro Pasaalto RC con fc=10Khz

2.3.FILTRO PASABAJO

Un filtro Pasabajo permite el paso de frecuencias bajas. Atenua y/o rechaza las frecuencias altas.
Un circuito RLC serie se comporta como filtro pasabajo si la tensión de salida se toma en el condensador. La tensión se irá anulando a frecuencias altas.

Ejemplo 29:

Determine la relación de la respuesta de salida Vo a la señal de entrada Vi A(w)=Vo/Vi o Función de transferencia del circuito de la figura 12 (magnitud y fase).

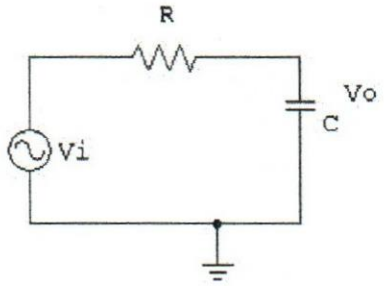


Figura 12. Filtro RC Pasabajo.

Respuesta:
Por el Teorema del Divisor de Tension la tensión a la salida Vo es

$$\mathbf{Vo} = \mathbf{Zc}\frac{\mathbf{Vi}}{R + \mathbf{Zc}}$$

$$\mathbf{Zc} = -jXc = -j\frac{1}{WC}$$

$$\frac{\mathbf{Vo}}{\mathbf{Vi}} = \frac{\mathbf{Zc}}{R + \mathbf{Zc}}$$

dividiendo numerador y denominador entre Zc

$$\frac{\mathbf{Vo}}{\mathbf{Vi}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\mathbf{Zc}}}$$

$$\frac{\mathbf{Vo}}{\mathbf{Vi}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{-jXc}}$$

$$\mathbf{A(w)} = \frac{\mathbf{Vo}}{\mathbf{Vi}} = \frac{1}{1 + jRWC} \tag{66}$$

La magnitud es

$$/\mathbf{A(w)}/ = \frac{1}{\sqrt{1 + (RWC)^2}} \tag{67}$$

La fase es

$$\emptyset\mathbf{A(w)} = 0 - arctgRWC$$

$$\emptyset\mathbf{A(w)} = -arctgRWC \tag{68}$$

Ejemplo 30:

En el circuito de la figura 12, determine la magnitud de A(w) y la frecuencia para la cual la parte imaginaria de A(w) (ecuación 66) es igual a 1.

Respuesta:
Se sigue el mismo procedimiento utilizado con el Filtro Pasaalto,pero aplicado a la ecuación 67
Cuando la parte imaginaria de A(w) es igual a **1**, la magnitud

$$/\mathbf{A(w)}/ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$/\mathbf{A(w)}/ = 0.707$$

La frecuencia a la cual la magnitud/A(w)/ cae a 0.707 de su valor máximo es la frecuencia de corte, Wc, del filtro pasabajo.

$$WcCR = 1$$

$$Wc = \frac{1}{CR} \tag{69}$$

en radianes/segundo

$$fc = \frac{1}{2\Pi CR} \tag{70}$$

en Hz

Ejemplo 31:

Escriba la expresión de la relación de voltajes A(w)para un filtro RC Pasabajo en función de f y la frecuencia de corte fc.

Respuesta
De la ecuación 66 y la ecuación 70 que expresan a A(w) y fc para un filtro pasabajo, reescribo

$$\mathbf{A(f)} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{fc}} \tag{71}$$

La magnitud (ecuación 67)en función de las frecuencias f y fc

$$/\mathbf{A(f)}/ = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{fc})^2}} \tag{72}$$

La fase (ecuación 68) en función de las frecuencias f y fc

$$\emptyset\mathbf{A(f)} = arctag\frac{f}{fc} \tag{73}$$

Ejemplo 32:

Para el circuito de la figura 12, con C=10nf, calcule el valor de R, que permita se comporte como un filtro Pasabajo con una frecuencia de corte de 10KHz.

Respuesta:
De la ecuación 70, despejo R:

$$R = \frac{1}{2\Pi Cf}$$

R=1.6K Ohms

Ejemplo 33:

Para el circuito de la figura 12, con R=16 Ohm a)calcule el valor del condensador para que la frecuencia de corte sea de 10 KHz b)Calcule /A(f)/ y la fase de A para 1000Hz, 5KHz, 10Khz, 50KHz y 500Khz.

Respuesta:
a)Utilizando la ecuación 70, despejo C:

$$C = \frac{1}{2\Pi Rfc}$$

C=1microf
b)utilizando las ecuaciones 67 y 68, resulta:
f(Hz) 1000 5KHz 10KHz 50KHz 500KHz

/A(f)/ 1 0.894 0.707 0.196 0.0199

fase(grados)-5.7 -26.51 -45 -78.68 -88.85

Ejemplo 34:

Para el filtro RC Pasabajo de la figura 12, si R=8KOhm y C=10nf:
a)Calcule la frecuencia de corte en Hz.
b)Dibuje la respuesta en frecuencia de la magnitud y la fase.

Respuesta a):
Con la ecuación 70, calculamos fc=2Khz.
Respuesta b):
Analizando las ecuaciones 67 y 68 se determina que:
A frecuencias muy por debajo de la frecuencia de corte, la magnitud tiende a uno y la fase tiende a 0 grados.
A la frecuencia de corte, la magnitud es igual a 0.707 y la fase es de -45 grados.
A frecuencias muy por encima de la frecuencia de corte, la magnitud tiende a 0 y la fase tiende a -90 grados,(ver figuras 13 y 14, dibujadas con el Programa Mathematica 5.1).

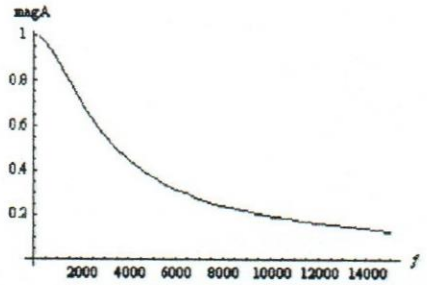


Figura 13. Respuesta en frecuencia de la magnitud (magA) de un Filtro Pasabajo RC con fc=2Khz

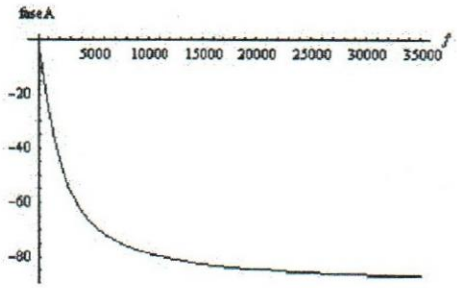


Figura 14. Respuesta en frecuencia de la fase (faseA) de un Filtro Pasabajo RC con fc=2Khz

3.DIAGRAMA DE BODE

El Diagrama de Bode es la representación aproximada mediante rectas o asíntotas de la respuesta en frecuencia de un circuito electrónico.
En general una función de red o respuesta de un circuito puede expresarse como el cociente de dos polinomios en la variable S. Si la función de red es de la forma:

$$H(S) = \frac{1 + a1S + a2S^2 + ...an^n}{1 + b1S + b2S^2 + ...bmS^m} \tag{74}$$

En el Diagrama de Bode la magnitud y la fase de la función H(S) de una red con S=jw , se dibujan separadamente como funciones de la variable w o f.
Para trabajar con grandes rangos de frecuencia se usa una escala logarítmica para la variable w o f.
La magnitud de la función de la red se expresa en decibelios y se representa en el eje y, sobre una escala lineal.

$$Hdb = 20logH(jw) \tag{75}$$

La fase de la función de la red se expresa en grados y también, se representa en el eje y, sobre una escala lineal.
Los polinomios del numerador y del denominador se pueden factorizar y la función puede representarse por:

$$H(S) = K\frac{(1 + \frac{S}{Z1})(1 + \frac{S}{Z2})...(1 + \frac{S}{Zn})}{(1 + \frac{S}{P1})(1 + \frac{S}{P2})...(1 + \frac{S}{Pm})} \tag{76}$$

donde -Z1,-Z2,...-Zn,-P1,-P2,...-Pm son las raíces de los polinomios del numerador y del denominador respectivamente, se les conoce a los términos Z como ceros y a los términos P como polos de la función de red. K es una constante, resultante de la manipulación de la ecuación 74 para obtener la ecuación 76.
La gráfica de la respuesta en frecuencia se encuentra haciendo S=jw, lo que resulta en:

$$H(jw) = K\frac{(1 + \frac{jw}{Z1})(1 + \frac{jw}{Z2})...(1 + \frac{jw}{Zn})}{(1 + \frac{jw}{P1})(1 + \frac{jw}{P2})...(1 + \frac{jw}{Pm})} \tag{77}$$

La ecuación anterior muestra que H(jw) es el producto de una constante K y un grupo de términos que tienen la forma de:

$$1 + \frac{jw}{wo}$$

o

$$\frac{1}{1 + \frac{jw}{wo}}$$

donde wo corresponde a un cero o a un polo según el término.
Cada uno de estos términos puede considerarse como un fasor individual. La función H(jw) resultante tiene una magnitud que es el cociente entre productos de magnitudes. La fase es la suma algebraica de los ángulos individuales.
Si la función H(w) se expresa en decibelios, entonces la representación de la magnitud es una función logarítmica, de modo que el cociente entre productos se convierte en una suma algebraica, cuando los términos individuales se expresan en decibelios.

$$(1+\frac{jw}{Z1})db+(1+\frac{jw}{Z2})db+...+(1+\frac{jw}{Zn})db-(1+\frac{jw}{P1})db-...-(1+\frac{jw}{Pm})db$$

Como resultado las gráficas de magnitud y fase del Diagrama de Bode se pueden considerar como sumas algebraicas resultantes de los factores individuales.

Ejemplo 35:

Determinar el Diagrama de Bode en magnitud y fase para la función H(S)=K, donde K:a)es una constante positiva, mayor que 1 , K=2;b)es una constante positiva,menor que 1,K=0.5.

Respuesta:
En magnitud H(jw)db=20logK
a)Si K>1, ejemplo K=2, H(jw)db=6.021db, es una linea recta sobre el origen en todo rango de frecuencia,(ver figura 15).
b)Si K<1, ejemplo K=0.5, H(jw)db=-6.021db, es una linea recta por debajo del origen en todo rango de frecuencia, (ver figura 16).
Si K=1, H(jw)db=0db, es una linea recta sobre el origen.
La fase es 0 grados, no hay parte imaginaria.

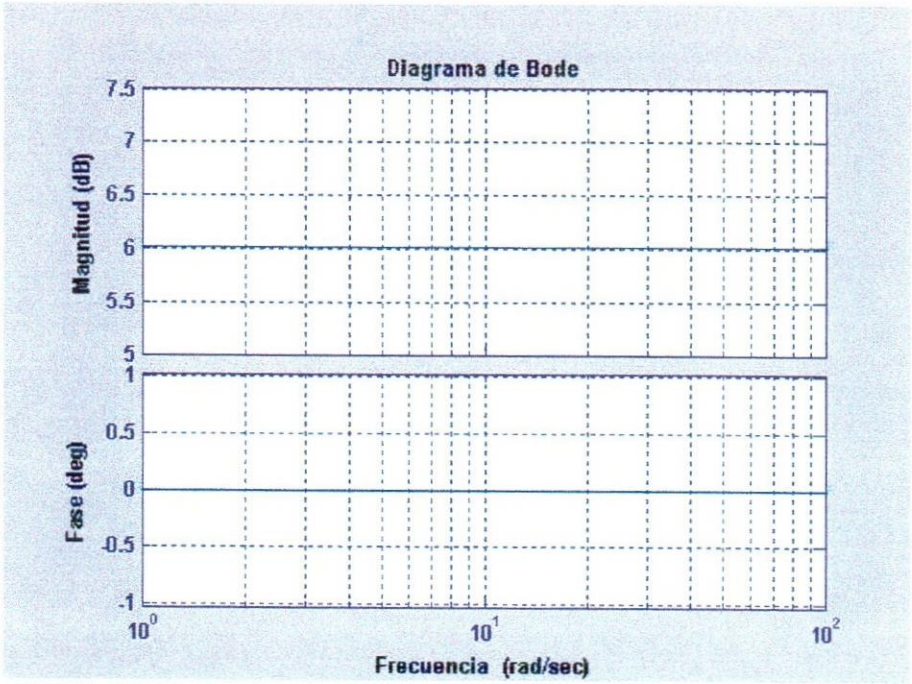


Figura 15. Diagrama de Bode en magnitud y fase para la función H(w)=K, con K=2.

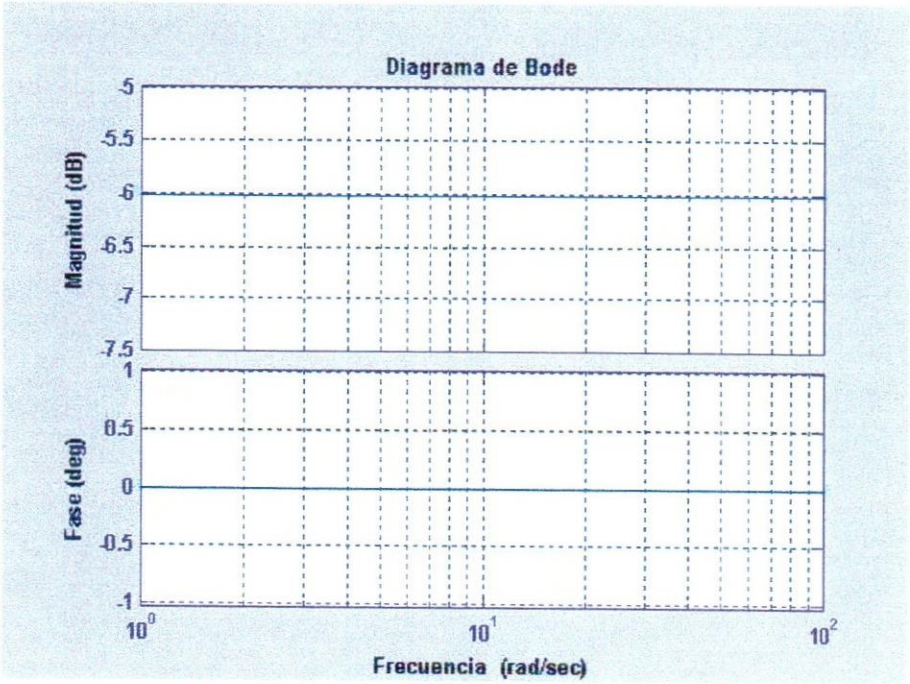


Figura 16. Diagrama de Bode en magnitud y fase para la función H(w)=K, con K=0.5

Ejemplo 36:

Determinar el Diagrama de Bode en magnitud y fase para las funciones H1(S)=S (cero en el origen) y H2(S)=1/S (polo en el origen).

Respuesta a):
H(S)=S Cero en el origen

$$H(S) = S/Z$$

$$H(jw) = jw/wo$$

donde wo=1rad/seg es la frecuencia de corte asociada al cero de la función.

Diagrama de magnitud aproximado mediante rectas o asíntotas:

$$Hdb = 20log\frac{w}{wo}$$

Para

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=wo/10, en este caso w=0.1rad/seg Hdb=20log0.1=-20db
Para

$$\frac{w}{wo} >> 1$$

w=10wo, en este caso w=10rad/seg Hdb=20db
En el caso particular w=wo, en este caso w=1rad/seg, H1db=0db.
Se tienen tres puntos que al unirlos resulta en una linea recta o asíntota con una pendiente de 20 db por década, tal como se muestra en la figura 17.

Diagrama de fase:

$$\emptyset H = arctag\frac{\frac{w}{wo}}{0}$$

$$\emptyset H = 90grados$$

El numerador no tiene parte real

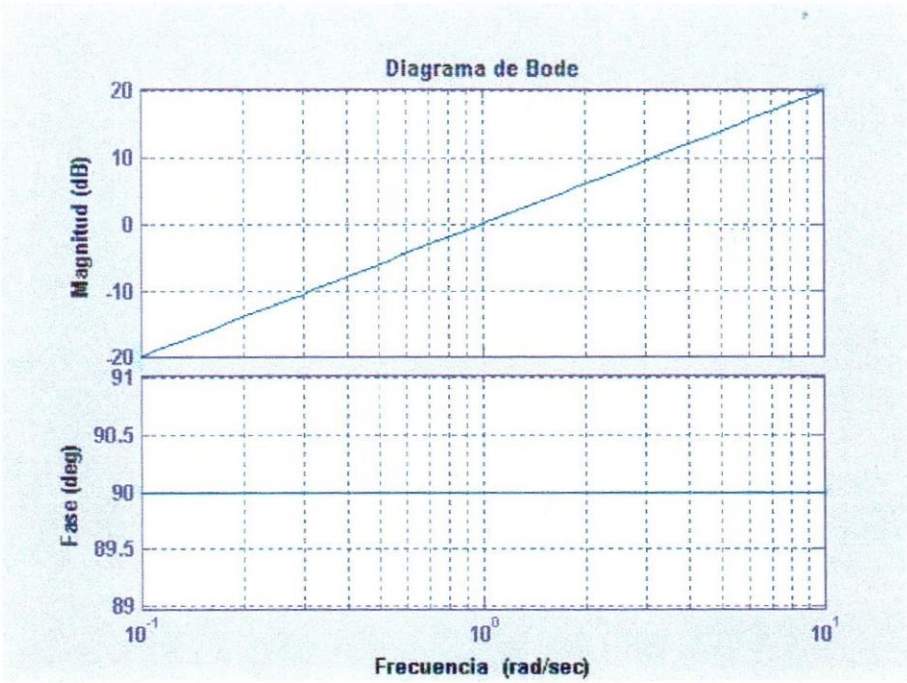


Figura 17. Diagrama de Bode en magnitud y fase para la función H(S)=S

Respuesta b):
H(S)=1/S polo en el origen

$$H(S) = \frac{1}{\frac{S}{P}}$$

$$H(jw) = \frac{1}{\frac{jw}{wo}}$$

donde wo=1rad/seg es la frecuencia de corte asociada al polo.

Diagrama de magnitud aproximado mediante rectas o asíntotas:

$$Hdb = 20log1 - 20log\frac{w}{wo} = -20log\frac{w}{wo}$$

Para

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=wo/10, en este caso w=0.1rad/seg Hdb=-20log0.1=20db
Para

$$\frac{w}{wo} >> 1$$

w=10wo, en este caso w=10rad/seg Hdb=-20log10=-20db
Para el caso particular w=wo Hdb=0db

Se tienen tres puntos que al unirlos resulta una recta con pendiente de -20db por década, tal como lo muestra la figura 18.

Diagrama de fase:

$$\emptyset H = arctag0 - arctag\frac{\frac{w}{wo}}{0}$$

$$\emptyset H = -90grados$$

No hay parte real, en el denominador.

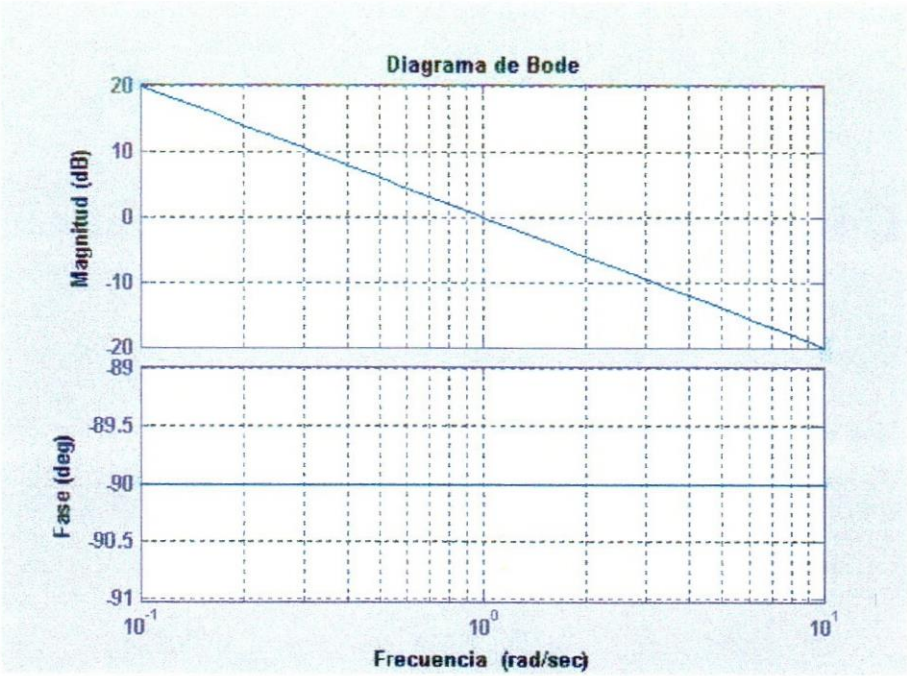


Figura 18.Diagrama de Bode en magnitud y fase para la función H(S)=1/S

Ejemplo 37:

Determinar el Diagrama de Bode para la función:
a)

$$H(S) = 1 + \frac{S}{Z}$$

término de primer orden en el numerador.
b)

$$H(S) = \frac{1}{1 + \frac{S}{P}}$$

término de primer orden en el denominador.

Respuesta a):

$$H(jw) = 1 + \frac{jw}{wo}$$

con wo asociado al cero Z. Si por ejemplo wo=1rad/seg

$$H(S) = 1 + S$$

$$H(jw) = 1 + jw$$

Diagrama de magnitud:

La magnitud en db de H es:

$$Hdb = 20log\sqrt{1 + w^2}$$

Para

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=wo/10, en este caso w=0.1rad/seg Hdb=20log1=0db
Para

$$\frac{w}{wo} >> 1$$

$$Hdb = 20logw$$

Conw=10wo, en este caso w=10rad/seg Hdb=20log10=20db
Para el caso particular w=wo, considerando la expresión anterior Hdb=20logwo=20log1=0
Se tienen tres puntos , que al unirlos resulta la gráfica de la figura 19.
Hay una recta de 0 db hasta la frecuencia wo=1rad/seg y a partir de
ésta hay otra recta con una pendiente de 20 db/década

Diagrama de fase:

$$\emptyset H = arctg\frac{img}{real}$$

$$\emptyset H = arctg\frac{w}{wo}$$

Para el caso en el que wo=1 rad/seg

$$\emptyset H = arctgw$$

Con

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=0.1wo, w=0.1

$$\emptyset H = 5.7grados$$

tiende a cero grados
Con w=wo

$$\emptyset H = 45 grados$$

Con

$$\frac{w}{wo} >> 10$$

w=10wo,w=10

$$\emptyset H = 84.3 grados$$

tiende a 90 grados.

La figura 19 muestra el diagrama de fase.

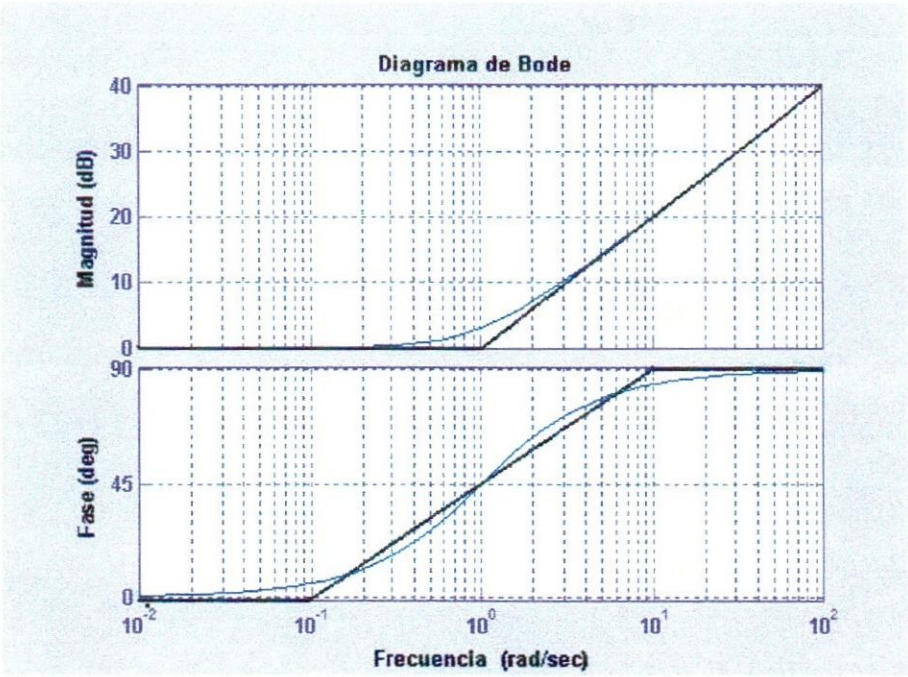


Figura 19.Diagrama de Bode en magnitud y fase para la función H(S)=(1+S/Z) con Z=1

Se muestra también, la gráfica real, que se obtiene dando valores a w en el rango de 0.1 a 10 rad seg.

Respuesta b):

$$H(jw) = \frac{1}{1 + \frac{jw}{wo}}$$

con wo asociado al polo P. Por ejemplo si wo=1rad/seg

$$H(jw) = \frac{1}{1+jw}$$

Diagrama de magnitud:
La magnitud en db de H es:

$$Hdb = 20log1 - 20log\sqrt{1+w^2}$$

Para

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=wo/10, en este caso w=0.1rad/seg Hdb=-20log1=0db
Para

$$\frac{w}{wo} >> 1$$

$$Hdb = -20logw$$

Conw=10wo, en este caso w=10rad/seg Hdb=20log10=-20db
Para el caso particular w=wo, considerando la expresión anterior Hdb=-20logwo=-20log1=0db
Se tienen tres puntos , que al unirlos resulta la gráfica de la figura 20. Hay una recta de 0 db hasta la frecuencia wo=1rad/seg y a partir de ésta hay otra recta con una pendiente de -20 db/década.

Diagrama de fase:

$$\emptyset H = 0 - arctg\frac{img}{real}$$

$$\emptyset H = -arctg\frac{w}{wo}$$

Para el caso en el que wo=1 rad/seg

$$\emptyset H = -arctgw$$

Con

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=0.1wo, w=0.1

$$\emptyset H = -5.7grados$$

tiende a cero grados
Con w=wo

$$\emptyset H = -45grados$$

Con

$$\frac{w}{wo} >> 10$$

w=10wo,w=10

$$\emptyset H = -84.3 grados$$

tiende a 90 grados.

La figura 20 muestra el diagrama de fase.

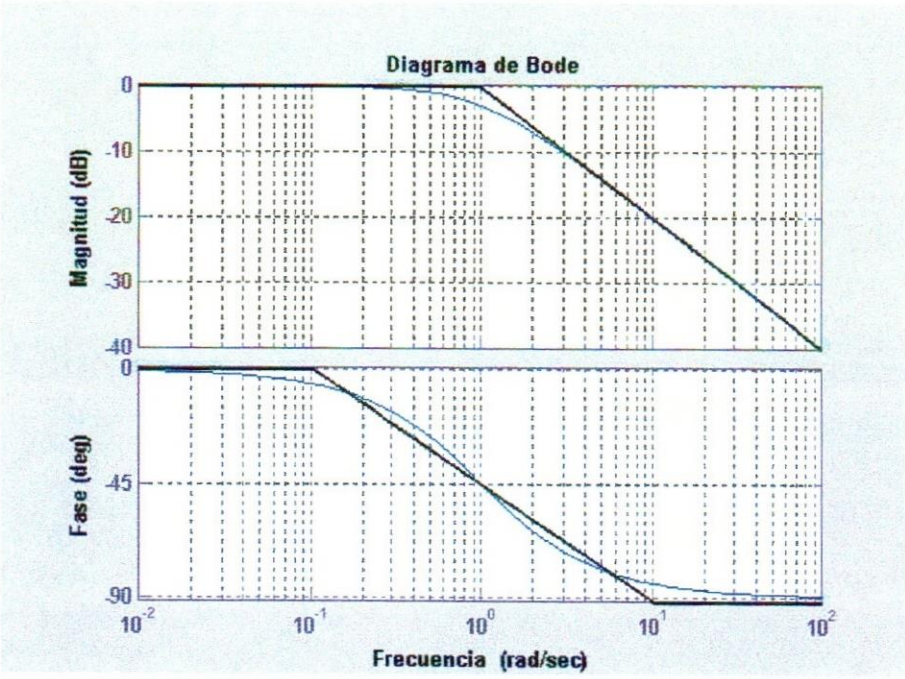


Figura 20.Diagrama de Bode en magnitud y fase para la función H(S)=1/(1+S/P), con P=1

Se muestra también, la gráfica real, que se obtiene dando valores a w en el rango de 0.1 a 10 rad seg.

Ejemplo 38:

Determinar el Diagrama de Bode para la función:
a)

$$H(S) = (1 + \frac{S}{Z})^2$$

término cuadrático en el numerador.
b)

$$H(S) = \frac{1}{(1 + \frac{S}{P})^2}$$

término cuadrático en el denominador.

Respuesta a):

$$H(jw) = [1 + \frac{jw}{wo}]^2$$

con wo asociado al cero Z. Si por ejemplo wo=1rad/seg

$$H(S) = (1 + S)^2$$

$$H(jw) = (1 + jw)^2$$

Diagrama de magnitud:

La magnitud en db de H es:

$$Hdb = 40log\sqrt{1 + w^2}$$

Para

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=wo/10, en este caso w=0.1rad/seg Hdb=40log1=0db
Para

$$\frac{w}{wo} >> 1$$

$$Hdb = 40logw$$

Conw=10wo, en este caso w=10rad/seg Hdb=40log10=40db
Para el caso particular w=wo, considerando la expresión anterior Hdb=40logwo=40log1=0
Se tienen tres puntos , que al unirlos resulta la gráfica de la figura 21.
Hay una recta de 0 db hasta la frecuencia wo=1rad/seg y a partir de
ésta hay otra recta con una pendiente de 40 db/década

Diagrama de fase:

$$\emptyset H = 2arctg\frac{img}{real}$$

$$\emptyset H = 2arctg\frac{w}{wo}$$

Para el caso en el que wo=1 rad/seg

$$\emptyset H = arctgw$$

Con

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=0.1wo, w=0.1

$$\emptyset H = 11.4grados$$

tiende a cero grados
Con w=wo

$$\emptyset H = 90 grados$$

Con

$$\frac{w}{wo} >> 10$$

w=10wo,w=10

$$\emptyset H = 168.6 grados$$

tiende a 180 grados.

La figura 21 muestra el diagrama de fase.
Se muestra también, la gráfica real, que se obtiene dando valores a w en el rango de 0.1 a 10 rad seg.

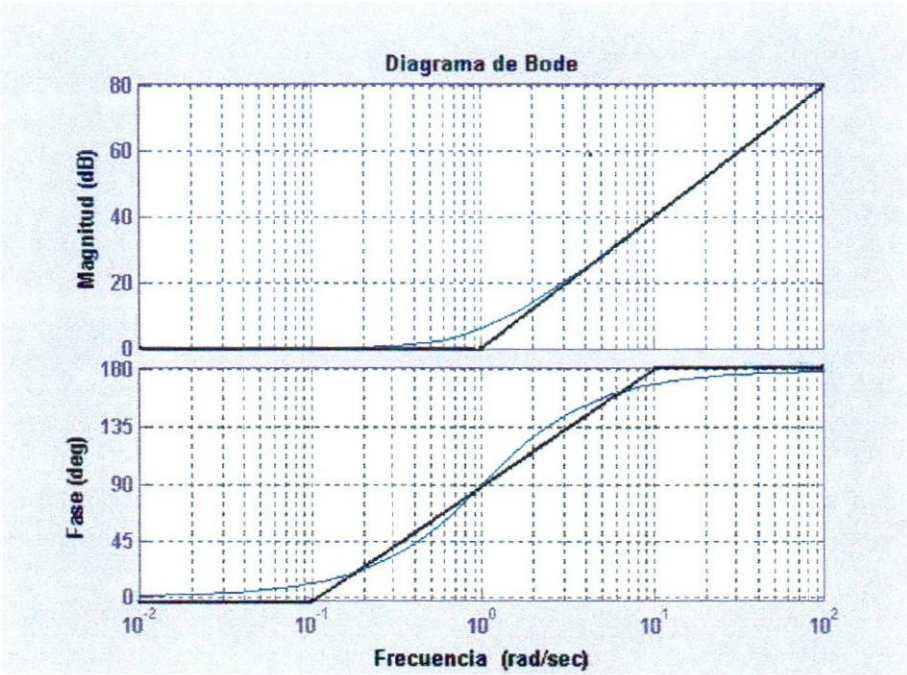


Figura 21.Diagrama de Bode en magnitud y fase para la función H(S)

$$H(S) = (1 + \frac{S}{Z})^2$$

con Z=1

Respuesta b):

$$H(jw) = \frac{1}{[1 + \frac{jw}{wo}]^2}$$

con wo asociado al polo P. Por ejemplo si wo=1rad/seg

$$H(jw) = \frac{1}{[1+jw]^2}$$

Diagrama de magnitud:
La magnitud en db de H es:

$$Hdb = 20log1 - 40log\sqrt{1+w^2}$$

Para

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=wo/10, en este caso w=0.1rad/seg Hdb=-40log1=0db
Para

$$\frac{w}{wo} >> 1$$

$$Hdb = -40logw$$

Conw=10wo, en este caso w=10rad/seg Hdb=-40log10=-40db
Para el caso particular w=wo, considerando la expresión anterior Hdb=-40logwo=-40log1=0db
Se tienen tres puntos , que al unirlos resulta la gráfica de la figura 22. Hay una recta de 0 db hasta la frecuencia wo=1rad/seg y a partir de ésta hay otra recta con una pendiente de -40 db/década.

Diagrama de fase:

$$\emptyset H = 0 - 2arctg\frac{img}{real}$$

$$\emptyset H = -2arctg\frac{w}{wo}$$

Para el caso en el que wo=1 rad/seg

$$\emptyset H = -2arctgw$$

Con

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=0.1wo, w=0.1

$$\emptyset H = -11.4grados$$

tiende a cero grados
Con w=wo

$$\emptyset H = -90grados$$

Con

$$\frac{w}{wo} >> 10$$

w=10wo,w=10

$$\emptyset H = -168.6 grados$$

tiende a -180 grados.
La figura 22 muestra el diagrama de fase.

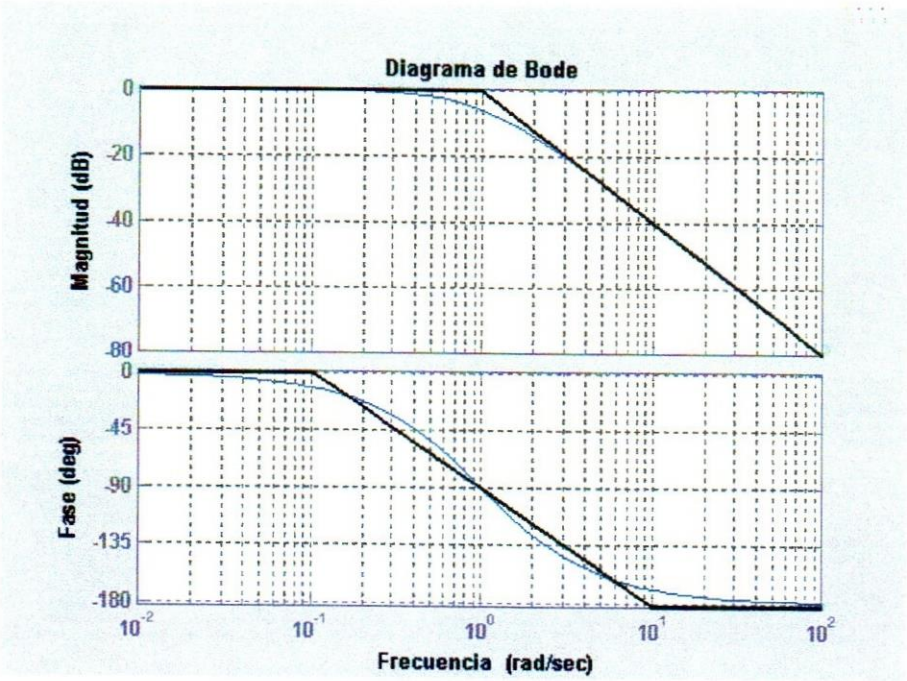


Figura 22.Diagrama de Bode en magnitud y fase para la función H(S)

$$H(S) = \frac{1}{(1+\frac{S}{P})^2}$$

con P=1

Ejemplo 39:

Determinar el Diagrama de Bode para la función:
a)

$$H(S) = (1+\frac{S}{a+bj})(1+\frac{S}{a-bj})$$

término cero número complejo
b)

$$H(S) = \frac{1}{(1+\frac{S}{a+bj})(1+\frac{S}{a-bj})}$$

término polo número complejo.

Respuesta a):

$$H(S) = (1 + \frac{jw}{a+bj})(1 + \frac{jw}{a-bj})$$

se define la frecuencia asociada al cero complejo como

$$wo = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$H(jw) = (1 + \frac{jw(a-bj)}{a^2+b^2})(1 + \frac{jw(a+bj)}{a^2+b^2})$$

$$H(jw) = (1 + \frac{bw + jaw}{a^2+b^2})(1 + \frac{-bw + jaw}{a^2+b^2})$$

como

$$a^2 + b^2 = wo^2$$

$$H(jw) = (1 + \frac{bw + jaw}{wo^2})(1 + \frac{-bw + jaw}{wo^2})$$

$$H(jw) = (1 + \frac{bw}{wo^2} + \frac{jaw}{wo^2})(1 + \frac{-bw}{wo^2} + \frac{jaw}{wo^2})$$

Diagrama de magnitud:

$$Hdb = 20log\sqrt{(1 + \frac{bw}{wo^2})^2 + (\frac{aw}{wo^2})^2} + 20log\sqrt{(1 + \frac{-bw}{wo^2})^2 + (\frac{aw}{wo^2})^2}$$

Si

$$\frac{w}{wo} << 1$$

$$Hdb = 20log\sqrt{1 + (\frac{aw}{wo^2})^2} + 20log\sqrt{1 + (\frac{aw}{wo^2})^2}$$

$$Hdb = 40log1 = 0db$$

Si

$$\frac{w}{wo} >> 1$$

$$Hdb = 20log\sqrt{(\frac{bw}{wo^2})^2 + (\frac{aw}{wo^2})^2} + 20log\sqrt{(\frac{-bw}{wo^2})^2 + (\frac{aw}{wo^2})^2}$$

$$Hdb = 40log\sqrt{(\frac{bw}{wo^2})^2 + (\frac{aw}{wo^2})^2}$$

$$Hdb = 40log\sqrt{\frac{(bw)^2 + (aw)^2}{(wo^2)^2}}$$

$$Hdb = 40log\sqrt{\frac{w^2(a^2+b^2)}{(wo^2)^2}}$$

$$Hdb = 40log\sqrt{\frac{w^2(wo)^2}{(wo^2)^2}}$$

$$Hdb = 40log\sqrt{\frac{w^2}{wo^2}}$$

$$Hdb = 40log\frac{w}{wo}$$

con w=10wo

$$Hdb = 40db$$

en el caso particular con w=wo

$$Hdb = 0db$$

Si por ejemplo a=1=b, wo=1.41rad/seg, se tienen dos rectas, una que va desde 0.1wo a wo en 0db y la otra recta que va desde wo a 10wo con una pendiente de 40db/década. La figura 23 muestra el Diagrama en magnitud para tal frecuencia.

Diagrama de fase:

$$\emptyset H = arctg\frac{\frac{wa}{wo^2}}{1+\frac{wb}{wo^2}} + arctg\frac{\frac{wa}{wo^2}}{1+\frac{-wb}{wo^2}}$$

con

$$\frac{w}{wo} << 1$$

w=0.01wo, la relación de fase

$$\emptyset H = 0grados$$

tiende a 0 grados.

con

$$\frac{w}{wo} >> 1$$

w=100wo la relación de fase, tiende a 180 grados.

con w=wo, la relación de fase tiende a 90 grados .

La figura 23 muestra el diagrama de fase.

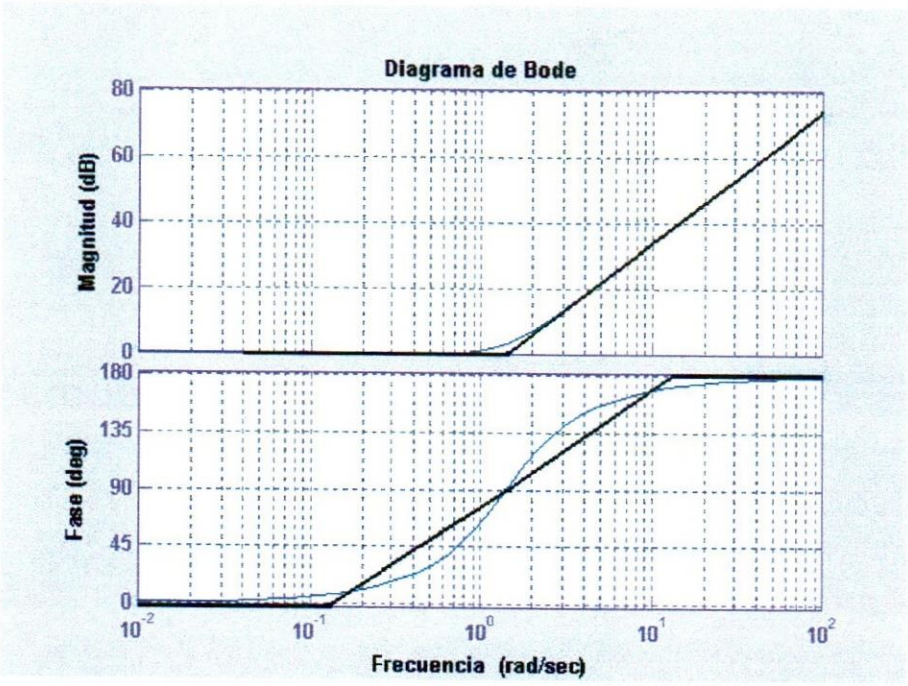


Figura 23.Diagrama de Bode en magnitud y fase para el término cero número complejo con wo=1.41rad/seg

Respuesta b):
Aplicando la metodología del ejercicio anterior se demuestra que el Diagrama de Bode de un término polo complejo es el mostrado en la figura 24.

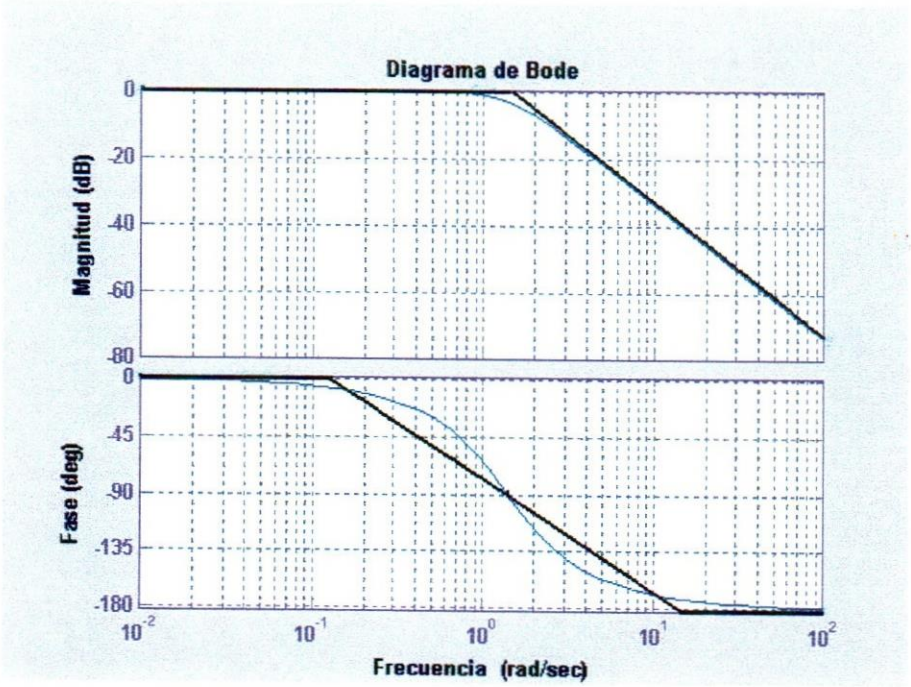


Figura 24.Diagrama de Bode en magnitud y fase para el término polo complejo con wo=1.41rad/seg

Ejemplo 40:

Determinar el Diagrama de Bode de un filtro Pasabajo RC con frecuencia de corte fc=10Khz.

Respuesta:
La función de transferencia de un filtro pasabajo fue determinada en el ejemplo 29 (ecuación 66) y viene dada por las siguientes expresiones, si consideramos que S=jw y

$$wc = \frac{1}{RC}$$

$$A(S) = \frac{1}{1 + \frac{S}{wc}}$$

$$A(f) = \frac{1}{1 + \frac{jf}{fc}}$$

con fc=10Khz, wc=62.83Krad/seg

$$A(S) = \frac{1}{1 + \frac{S}{62.83K}}$$

A(S) es una función con un término de primer orden en el denominador, es decir con un polo. Considerando lo explicado en el ejemplo 34b resulta el Diagrama de Bode de la figura 25. Se muestra el Diagrama de fase y el de magnitud real.

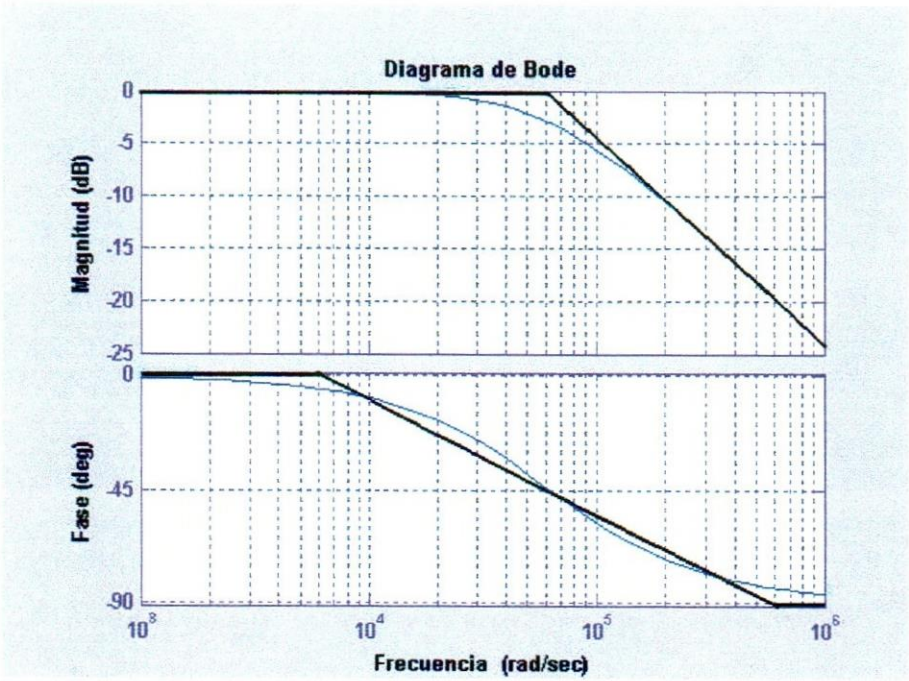


Figura 25.Diagrama de Bode (real y con asíntotas) de un filtro Pasabajo RC con Wc=62.83Krad/seg

Ejemplo 41:

Determinar el Diagrama de Bode de un filtro Pasalto RC con fc=10Khz

Respuesta:
La función de transferencia de un filtro pasaalto fue determinada en el ejemplo 23,(ecuación 58) y viene dada por las siguientes expresiones , si consideramos que S=jw y

$$wc = \frac{1}{RC}$$

$$A(jw) = \frac{1}{1 + \frac{wc}{jw}}$$

$$A(f) = \frac{1}{1 + \frac{fc}{jf}}$$

Con fc=10Khz, wc=62.83Krad/seg

$$A(S) = \frac{1}{1 + \frac{wc}{S}}$$

$$A(S) = \frac{S}{S + wc}$$

Escribiendo la expresión anterior, de manera tal, se pueda utilizar la metodología explicada en ejercicios previos, resulta:

$$A(S) = \frac{\frac{S}{wc}}{\frac{s}{wc} + 1}$$

Hay un cero simple con una frecuencia asociada wc y un polo de un término de primer orden con una frecuencia asociada wc. Al sumar las pendientes de cada término resulta el Diagrama de Bode en magnitud de la figura 26. (odb +20db hasta wc y 20db-20db a partir de wc).Se muestra también el diagrama de fase y la curva real.

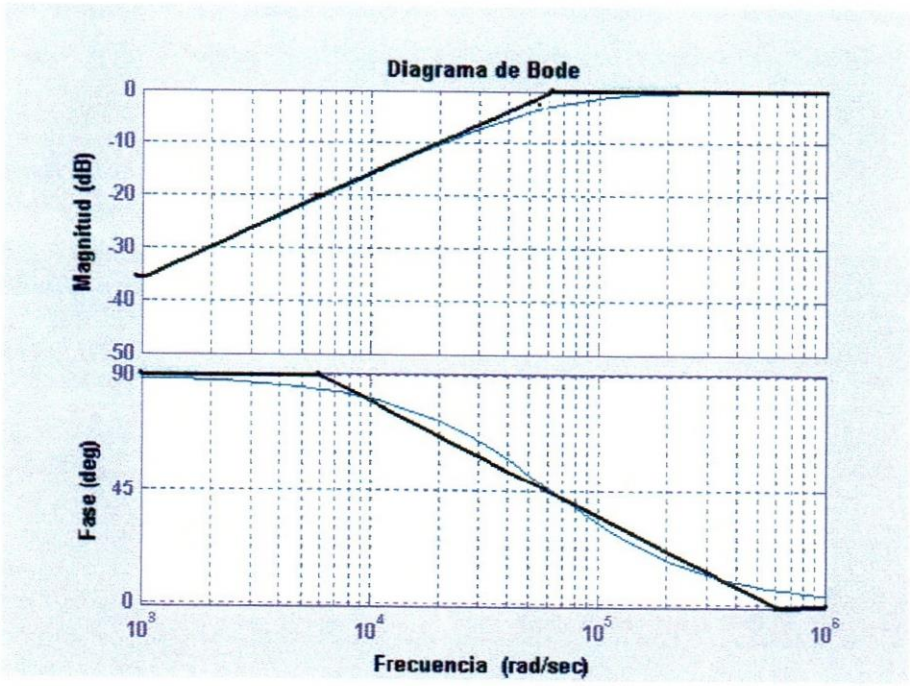


Figura 26.Diagrama de Bode (real y con asíntotas) de un filtro Pasaalto RC con wc=62.83Krad/seg

Ejemplo 42:
Determinar el Diagrama de Bode de un filtro Pasabanda (ver figura 1) con R=2.2K Ohm, L=11mH, C=10nf

Respuesta:
La función de transferencia obtenida es :

$$H(S) = \frac{S}{0.000005S^2 + S + 45450}$$

Utilizando la metodología de los ejemplos anteriores obtenga el Diagrama de Bode con asíntotas. La figura 27 muestra la respuesta en frecuencia real en magnitud y fase.
La frecuencia central viene dada por :

$$wo = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Con los valores dados de L y C obtenemos:

$$wo = 95.35 Krad/seg$$

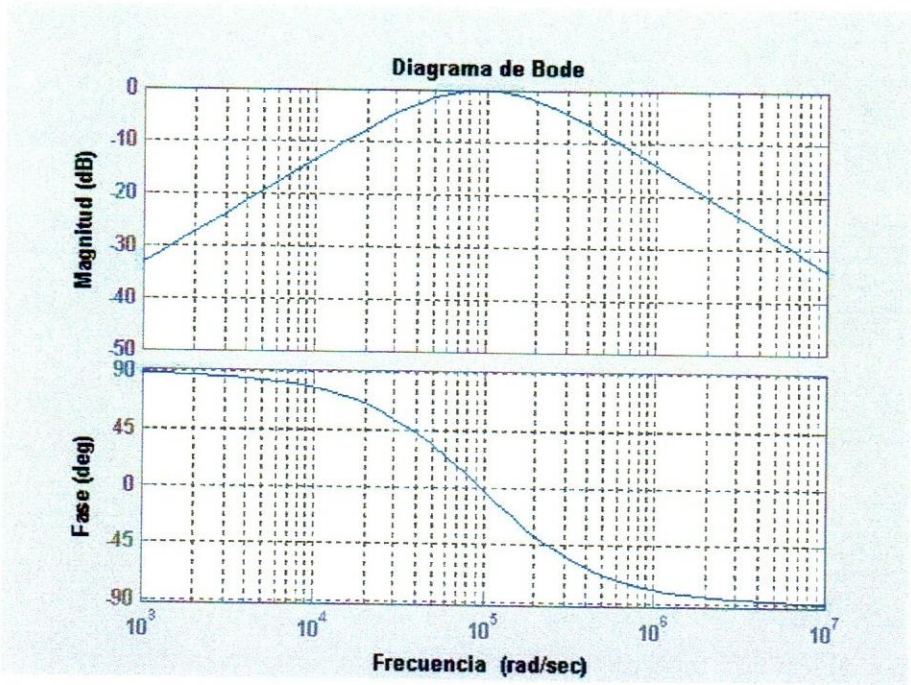


Figura 27.Diagrama de Bode (real) de un filtro Pasabanda con wo=95.35 Krad/seg

Ejemplo 43:

Determinar el Diagrama de Bode de la siguiente función:

$$H(S) = \frac{4S+8}{S^2+4S+3}$$

Respuesta:
Determinamos las raices de los polinomios del numerador y del denominador, resultando:

$$H(S) = \frac{4(S+2)}{(S+1)(S+3)}$$

reescribiendo la expresión anterior, sacando factor común en el numerador a 2 y en el denominador a 3, resulta:

$$H(S) = \frac{8(\frac{S}{2}+1)}{3(\frac{S}{1}+1)(\frac{S}{3}+1)}$$

La magnitud en decibelios es la suma algebraica de la magnitud en db de cada término :

$$Hdb = 20log\frac{8}{3} + 20log\sqrt{\frac{w^2}{2^2}+1} - 20log\sqrt{\frac{w^2}{1^2}+1} - 20log\sqrt{\frac{w^2}{3^2}+1}$$

La función H(S) tiene un término constante y tres términos de primer orden , uno en el numerador y dos en el denominador.

$$20log\frac{8}{3} = 8.5db$$

Hay tres frecuencias de corte wo:
wo=1rad/seg (-20db/década)
wo=2rad/seg (20db/década)
wo=3rad/seg (-20db/década)
Sobre papel semilogarítmico se traza el Diagrama de Bode de cada término. El Diagrama de la función H(S) se obtiene sumando algebraicamente las pendientes. Se muestra en Anexo 1.
Se destacan en el eje Y tres valores en db, 8.5db, 2.5db y -17.5db
2.5db es el punto donde cambia la pendiente de 20db/dec a odb
Si y1=8.5db resulta:

$$y1 - y2 = 20logw2 - 20logw1$$

donde w2=2rad/seg y w1=1rad/seg

$$y2 = y1 - 20log\frac{w2}{w1}$$

$$y2 = 8.5 - 20log\frac{2}{1}$$

y2=2.5db

Este valor permanece hasta wo=3rad/seg donde predomina una pendiente de -20db/dec ,podemos determinar el valor en w=30rad/seg

$$y2 - y3 = 20logw3 - 20logw2$$

donde w3=30rad/seg y w2=3rad/seg

$$y3 = y2 - 20log\frac{w3}{w2}$$

$$y3 = 2.5 - 20log\frac{30}{3}$$

y3=-17.5db

Si se utiliza el programa Matlab se obtiene la figura 28.

La fase es la suma algebraica de los ángulos de cada término. En la figura 28 se muestra la respuesta en frecuencia real de la fase

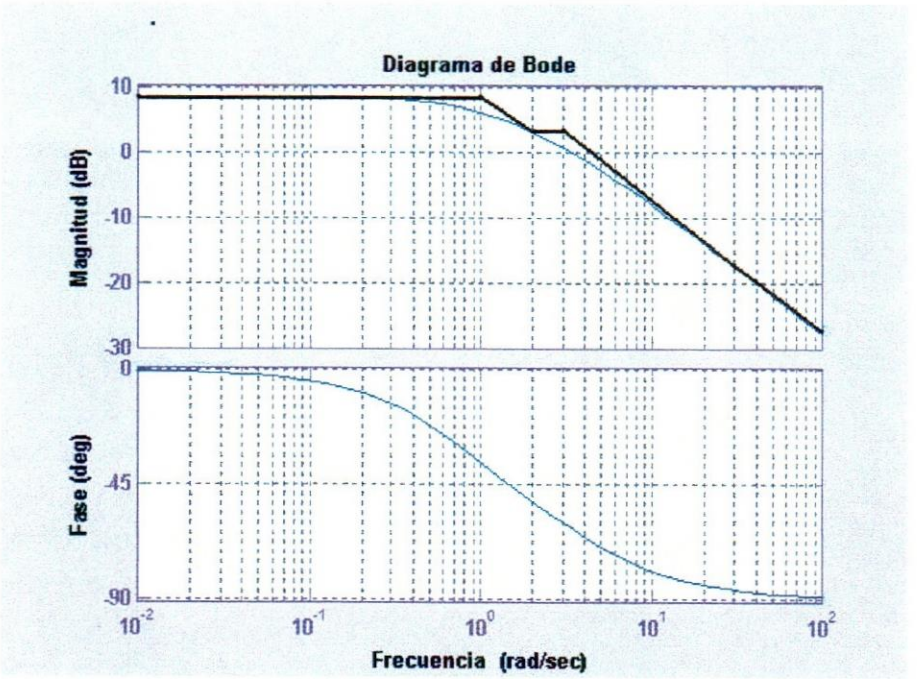


Figura 28.Diagrama de Bode en magnitud (real y con asíntotas) y fase (real) de la función H(S) del ejemplo 43.

Ejemplo 44:
Determinar el Diagrama de Bode de la siguiente función:

$$H(S) = \frac{50S + 150}{S^2 + 11S + 10}$$

Respuesta:
Utilizando la misma metodología del ejemplo anterior, se obtiene el Diagrama de Bode (real y con asíntotas) de la figura 29, compruébelo sobre papel semilogarítmico.

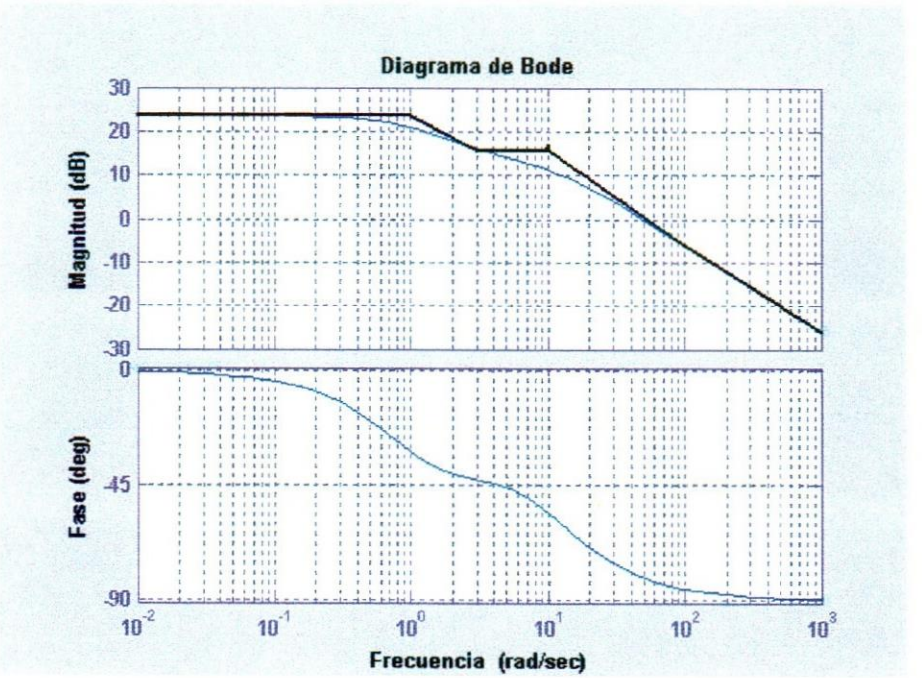


Figura 29.Diagrama de Bode en magnitud (real y con asíntotas) y fase (real) de la función H(S) del ejemplo 44.

Ejemplo 45:
Determinar el Diagrama de Bode de la siguiente función:

$$H(S) = \frac{8(S + 20)}{(S + 1)^2(S + 4)}$$

Respuesta:
Sacando factor común a 20 en el numerador y a 4 en denominador, se obtiene la expresión, de manera tal, se pueda utilizar la metodología explicada en ejercicios previos, resultando:

$$H(S) = \frac{40(\frac{S}{20} + 1)}{(\frac{S}{1} + 1)^2(\frac{S}{4} + 1)}$$

La magnitud en decibelios es la suma algebraica de la magnitud en db de cada término :

$$Hdb = 20log40 + 20log\sqrt{\frac{w^2}{20^2}+1} - 40log\sqrt{\frac{w^2}{1^2}+1} - 20log\sqrt{\frac{w^2}{4^2}+1}$$

La función H(S) tiene un término constante, dos términos de primer orden , uno en el numerador y otro en el denominador, más untérmino cuadrático.

$$20log40 = 32db$$

Hay tres frecuencias de corte wo:
wo=1rad/seg (-40db/década)
wo=4rad/seg (-20db/década)
wo=20rad/seg (20db/década)
Sobre papel semilogarítmico se traza el Diagrama de Bode de cada término. El Diagrama de la función H(S) se obtiene sumando algebraicamente las pendientes. Se muestra en Anexo 1.

Ejemplo 46:
Determinar el Diagrama de Bode de la siguiente función:

$$H(S) = \frac{120(1+0.2S)}{(S+1)(S^2+2S+10)}$$

Respuesta:
Se determina las raices del polinomio de segundo grado:

$$S^2 + 2S + 10 = 0$$
$$S1 = -1 + j3 = P1$$
$$S2 = -1 - j3 = P2$$

P1 y P2 polos de la función H(s)
Escribiendo la expresión anterior, de manera tal, se pueda utilizar la metodología explicada en ejercicios previos, resulta:

$$H(S) = \frac{120(\frac{S}{5}+1)}{(S+1)(S+1-3j)(S+1+3j)}$$

Sacando factor común en el denominador a los números complejos, 120 se divide entre 10 que es el producto de los números complejos.

$$H(S) = \frac{12(\frac{S}{5}+1)}{(\frac{S}{1}+1)(\frac{S}{1-3j}+1)(\frac{S}{1+3j}+1)}$$

La magnitud en decibelios es la suma algebraica de la magnitud en db de cada término.
Se tienen cinco términos, una constante, dos de primer orden, y un par correspondiente a un número complejo y su conjugado.

$$20log12 = 21.6db$$

Hay tres frecuencias de corte wo:
wo=1rad/seg (-20db/década)
wo=3.16rad/seg (-40db/década)
wo=5rad/seg (20db/década)
Sobre papel semilogarítmico se traza el Diagrama de Bode de cada término. El Diagrama de la función H(S) se obtiene sumando algebraicamente las pendientes. Se muestra en Anexo 1.

Ejemplo 47:

Determinar el Diagrama de Bode de la siguiente función:

$$H(S) = \frac{(S+1)(S^2+2S+10)}{120(1+0.2S)}$$

Respuesta:
Siguiendo la metodología del ejemplo anterior, obtenga el Diagrama de Bode en magnitud con asíntotas. Se determina: ceros complejos, un cero de un término de primer orden y un polo de un término de primer orden. La figura 30 muestra la respuesta en frecuencia real.

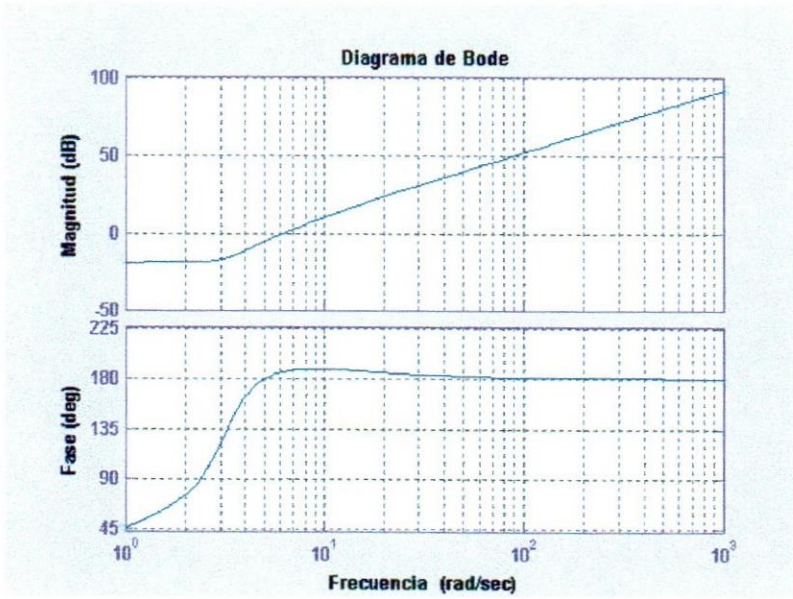


Figura 30.Diagrama de Bode en magnitud y fase (real) de la función H(S) del ejemplo 47.

Ejemplo 48:

Determinar el Diagrama de Bode de la siguiente función:

$$H(S) = \frac{S^2 + 2S + 10}{S^2 + 2S + 17}$$

Respuesta:
Siguiendo la metodología de ejemplos anteriores, obtenga el Diagrama de Bode en magnitud con asíntotas. Se determina: ceros complejos y polos complejos. La figura 31 muestra la respuesta en frecuencia real.

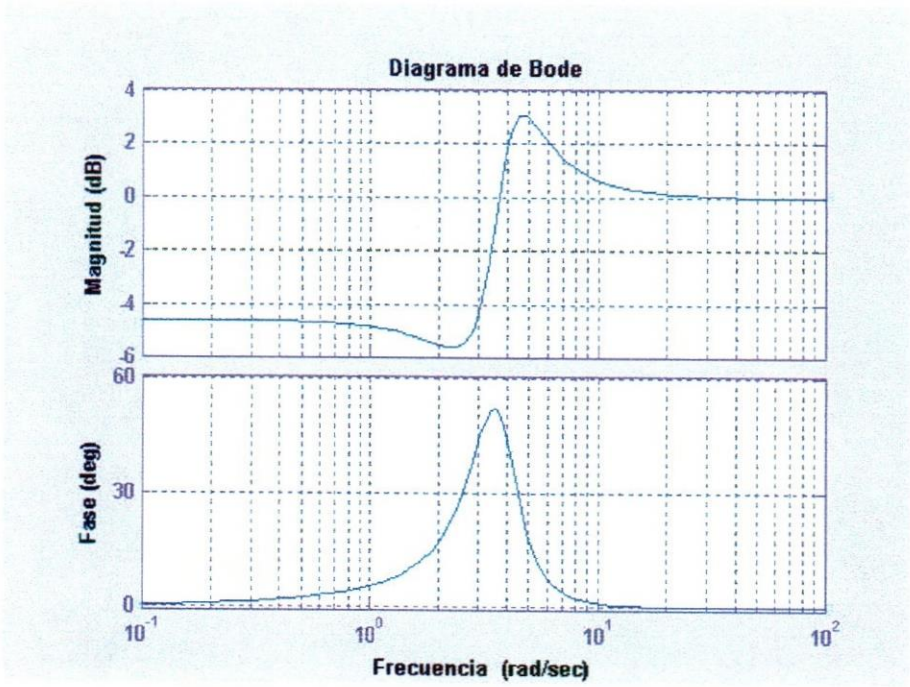


Figura 31.Diagrama de Bode en magnitud y fase (real) de la función H(S) del ejemplo 48.

Ejemplo 49:

Determinar el Diagrama de Bode de la siguiente función:

$$H(S) = \frac{5(S+1)(S+2)}{S(S+3)}$$

Respuesta:
Siguiendo la metodología de ejemplos anteriores, obtenga el Diagrama de Bode en magnitud con asíntotas. La figura 32 muestra la respuesta en frecuencia real.

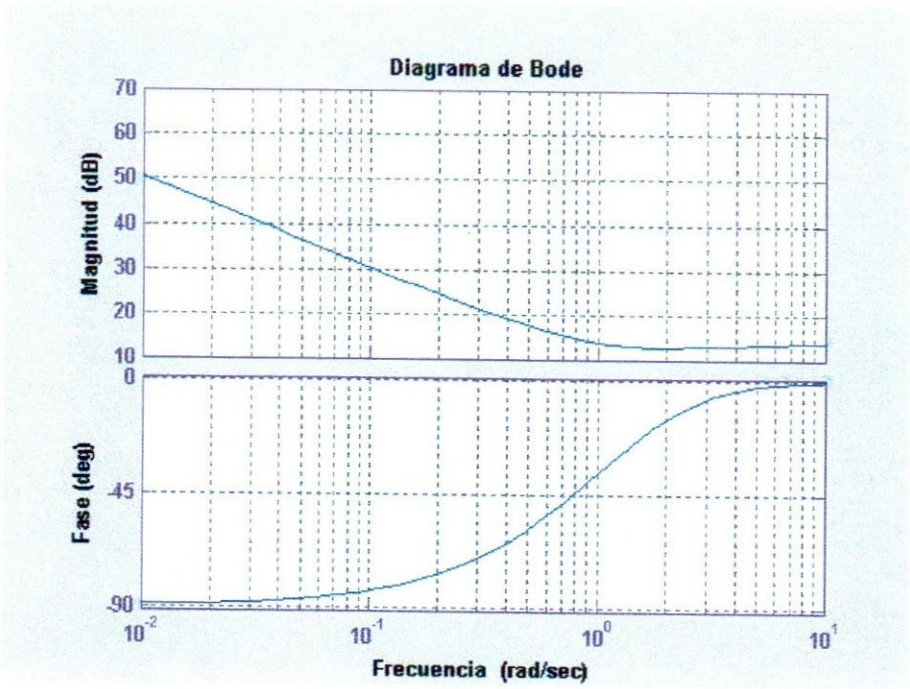


Figura 32.Diagrama de Bode en magnitud y fase (real) de la función H(S) del ejemplo 49.

Ejemplo 50:
Determinar el Diagrama de Bode de la siguiente función:

$$H(S) = \frac{S(S+0.5)^2}{(S+4)(S+2)}$$

Respuesta:
Siguiendo la metodología de ejemplos anteriores, obtenga el Diagrama de Bode en magnitud con asíntotas. La figura 33 muestra la respuesta en frecuencia real.

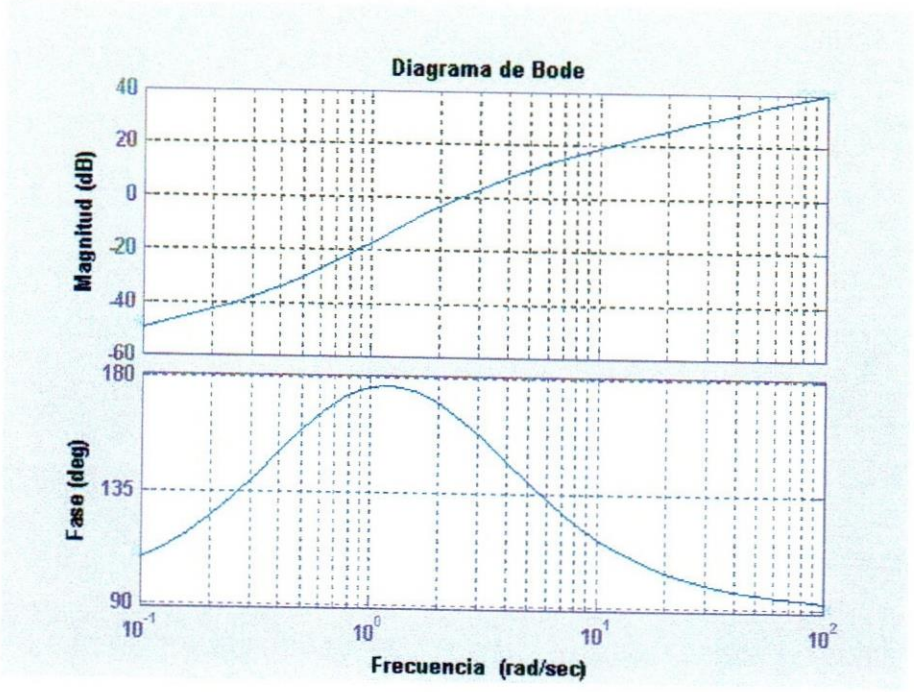


Figura 33.Diagrama de Bode en magnitud y fase (real) de la función H(S) del ejemplo 50.

BIBLIOGRAFÍA

ALVAREZ C.Angel Luis. Nociones sobre filtros analógicos elementales y transformada de Fourier trigonométrica.Ingeniería de Telecomunicacion. Area de Tecnología Electrónica. Universidad Rey Juan Carlos. Available:http://dac.escet.urjc.es/docencia/foton-teleco/practicafotonica.pdf

BOYLESTAD Robert L. NASHELSKY Louis. Fundamentos de Electrónica. Prentice Hall.Mexico. 1997,cuarta edición.

BUONANNO Nicola. Diagrama de Bode. Facultad de Ingeniería, UCAB.Caracas.2006

ESCUELA de Ingeniería de Telecomunicaciones. Guías de Laboratorio de Circuitos y Sistemas Electrónicos II. Facultad de Ingeniería.UCAB. Caracas.2006.

DORF Richard C.Circuitos Eléctricos. Introducción al Análisis y al Diseño. Alfaomega. México,D.F. 1995, segunda edición.

NISE Norman S.Control Systems Engineering.Wiley.USA,2000,Third edition.

ANEXO 1

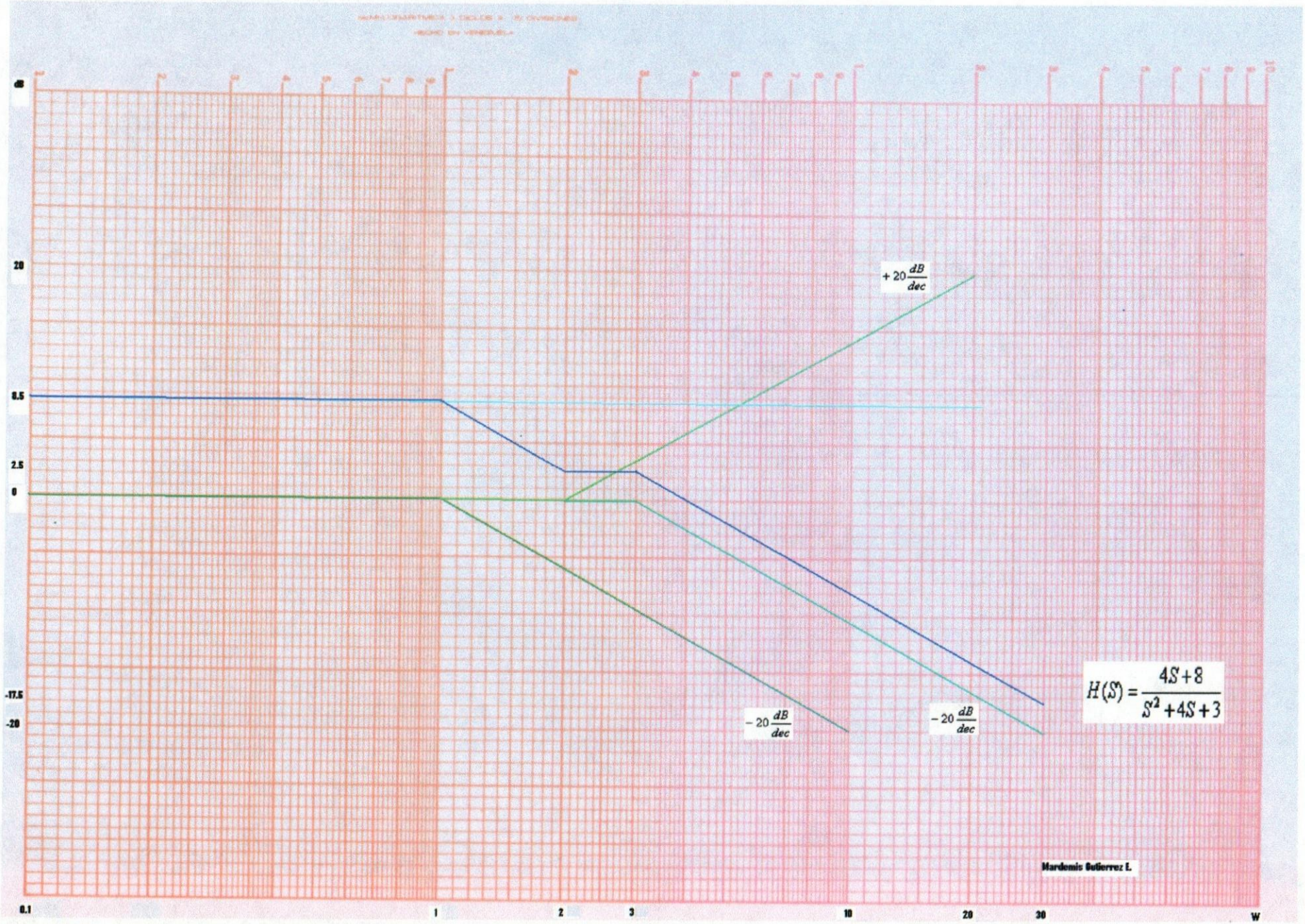
Diagrama de Bode de magnitud, de la función del ejemplo 43 sobre papel semilogarítmico de tres décadas.

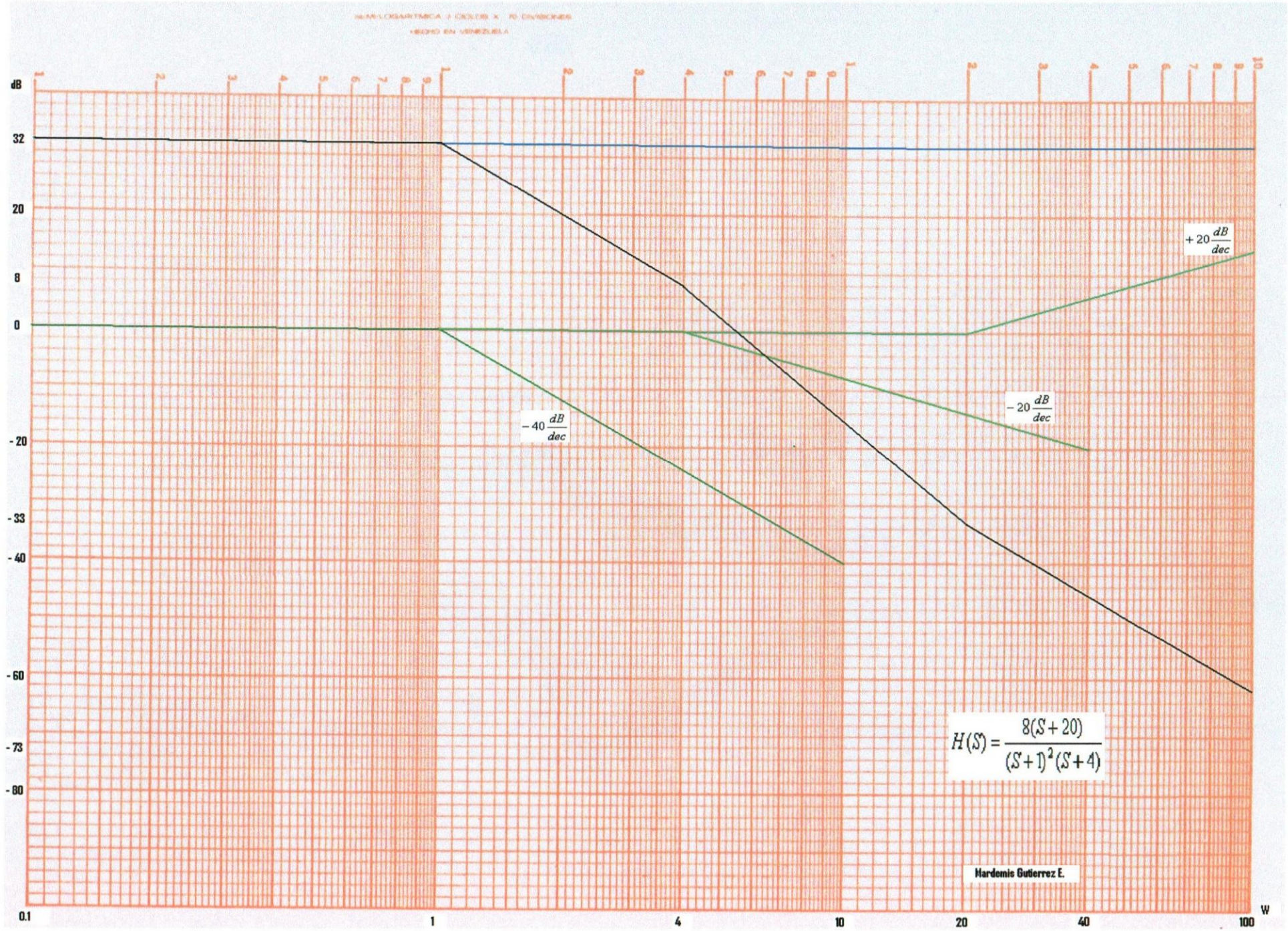
Diagrama de Bode de magnitud, de la la función del ejemplo 45.

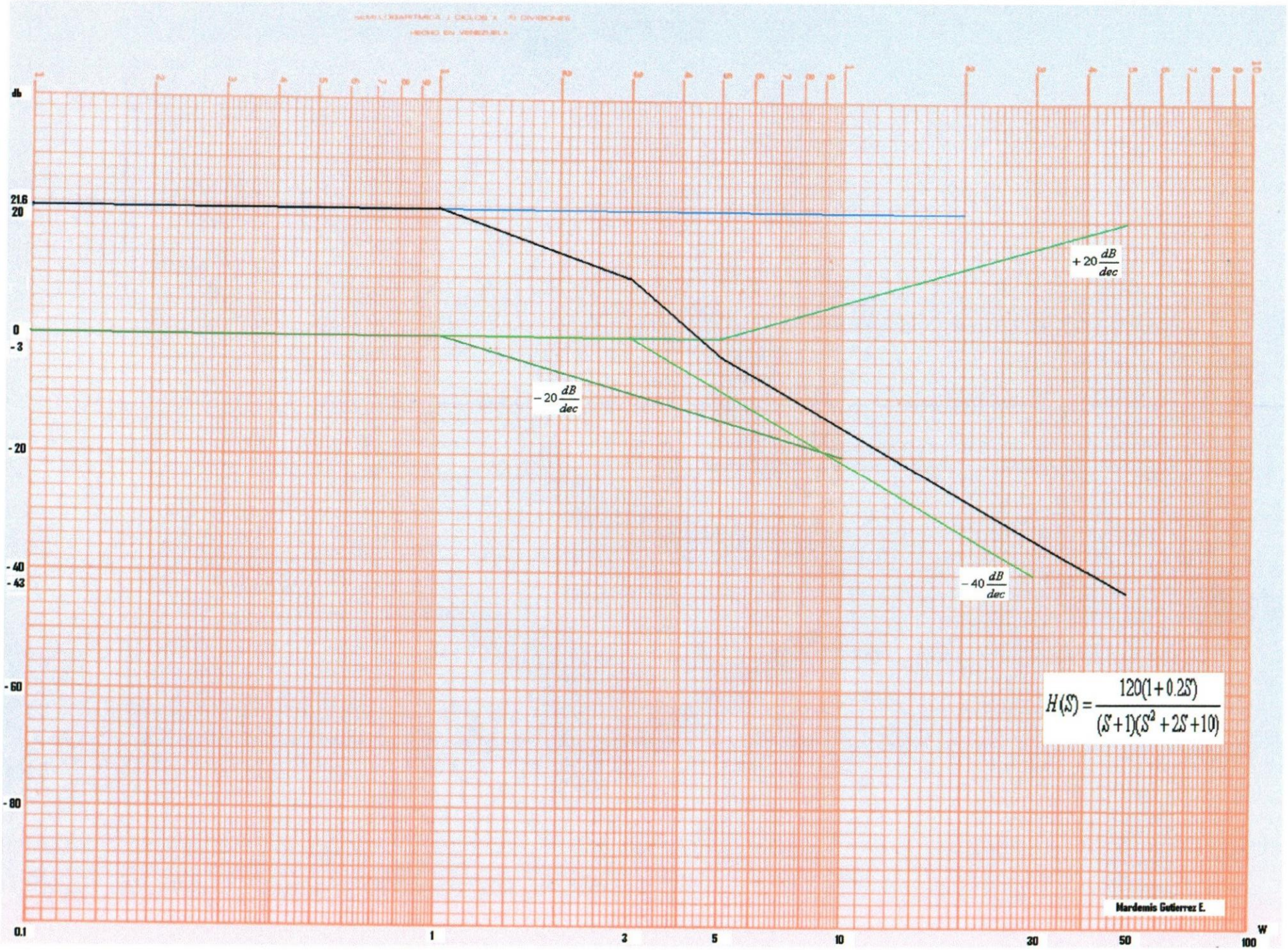
Diagrama de Bode de magnitud, de la función del ejemplo 46.

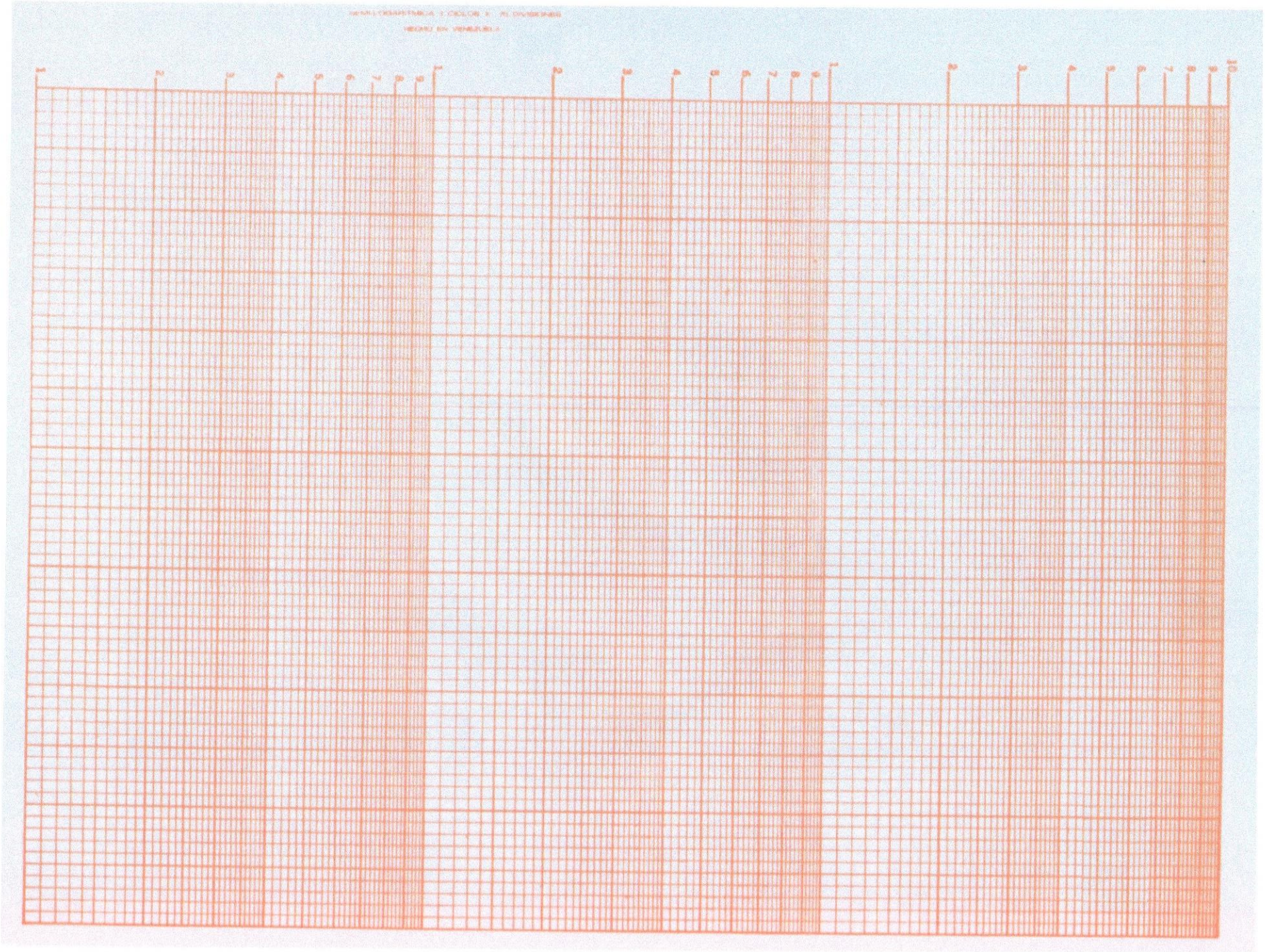
Papel semilogarítmico de tres décadas.

Resonancia,Filtros Pasivos y Diagrama de Bode.Problemas Resueltos.
M. Gutiérrez Estevanot.


dB
20
8.5
2.5
0
-17.5
-20
0.1
1
2
3
10
20
30
W
$+20\frac{dB}{dec}$
$-20\frac{dB}{dec}$
$-20\frac{dB}{dec}$
$H(S)=\frac{4S+8}{S^2+4S+3}$
Mardemis Gutierrez L.


dB
32
20
8
0
-20
-33
-40
-60
-73
-80
0.1
1
4
10
20
40
100
W
$+20\frac{dB}{dec}$
$-20\frac{dB}{dec}$
$-40\frac{dB}{dec}$
$H(S)=\frac{8(S+20)}{(S+1)^2(S+4)}$
Hardemis Gutierrez E.


db
21.6
20
0
-3
-20
-40
-43
-60
-80
0.1
1
3
5
10
20
50
100
W
$+20\frac{dB}{dec}$
$-20\frac{dB}{dec}$
$-40\frac{dB}{dec}$
$H(S)=\frac{120(1+0.2S)}{(S+1)(S^2+2S+10)}$
Hardemis Gutierrez E.



ANEXO 2

RECURSOS TECNOLÓGICOS UTILIZADOS

Para representar gráficas de las Respuestas en frecuencia:
Mathematica 5.1 2004 Wolfram Research, inc.
http://www.wolfram.com

Para representar Diagramas de Bode:
Matlab 6.5 2002 The Mathworks,inc.
http://www.mathworks.com

Para simular circuitos:
Psim 7.0 2006 Powersim, inc.
http://www.powersimtech.com

Resonancia,Filtros Pasivos y Diagrama de Bode.Problemas Resueltos.
M. Gutiérrez Estevanot.

ANEXO 3

FORMULARIO

CIRCUITO RLC SERIE EN RESONANCIA.

$$wo = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$fo = \frac{1}{2\Pi\sqrt{LC}}$$

$$W1 = \frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$W2 = \frac{RC + \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$W1 = Wo\sqrt{1 + \frac{1}{(2Qo)^2}} - \frac{Wo}{2Qo}$$

$$W2 = Wo\sqrt{1 + \frac{1}{(2Qo)^2}} + \frac{Wo}{2Qo}$$

$$F1 = \frac{W1}{2\Pi}$$

$$F2 = \frac{W2}{2\Pi}$$

$$Qo = \frac{fo}{AB}$$

$$ABw = W2 - W1$$

$$AB = F2 - F1$$

$$Qo = \frac{WoL}{R}$$

$$Qo = \frac{1}{WoCR}$$

$$Qo = \frac{/Vc/}{/Vg/}$$

Resonancia,Filtros Pasivos y Diagrama de Bode.Problemas Resueltos.
M. Gutiérrez Estevanot.

CIRCUITO RLC PARALELO EN RESONANCIA.

$$wo = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$fo = \frac{1}{2\Pi\sqrt{LC}}$$

$$W1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4(RC)^2} + \frac{1}{CL}}$$

$$W2 = \frac{1}{2CR} + \sqrt{\frac{1}{4(RC)^2} + \frac{1}{CL}}$$

$$W1 = Wo\sqrt{1 + \frac{1}{(2Qo)^2}} - \frac{Wo}{2Qo}$$

$$W2 = Wo\sqrt{1 + \frac{1}{(2Qo)^2}} + \frac{Wo}{2Qo}$$

$$F1 = \frac{W1}{2\Pi}$$

$$F2 = \frac{W2}{2\Pi}$$

$$Qo = \frac{fo}{AB}$$

$$ABw = W2 - W1$$

$$AB = F2 - F1$$

$$Qo = RWoC$$

$$Qo = \frac{R}{WoL}$$

$$Qo = \frac{/Ic/}{/Ig/}$$

Resonancia,Filtros Pasivos y Diagrama de Bode.Problemas Resueltos.
M. Gutiérrez Estevanot.

FILTRO RC PASAALTO

$$/A(w)/ = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(WCR)^2}}}$$

$$\emptyset A(w) = arctg\frac{1}{WCR}$$

$$Wc = \frac{1}{CR}$$

$$fc = \frac{1}{CR2\Pi}$$

$$/A(f)/ = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{fc}{f})^2}}$$

$$\emptyset A(f) = arctag\frac{fc}{f}$$

FILTRO RC PASABAJO

$$/A(w)/ = \frac{1}{\sqrt{1 + (RWC)^2}}$$

$$\emptyset A(w) = -arctgRWC$$

$$Wc = \frac{1}{CR}$$

$$fc = \frac{1}{CR2\Pi}$$

$$/A(f)/ = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{fc})^2}}$$

$$\emptyset A(f) = -arctag\frac{f}{fc}$$

Resonancia,Filtros Pasivos y Diagrama de Bode.Problemas Resueltos.
M. Gutiérrez Estevanot.