



UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES  
ESCUELA DE ECONOMÍA

## TESIS DE GRADO

“VALORACIÓN DE UN VEBONO CON REDENCIÓN ANTICIPADA UTILIZANDO  
EL MODELO DE NO-ARBITRAJE HULL Y WHITE”

**Tesistas:**

Pedro Pablo Martínez

José Miguel Nascimento

**Tutor:**

Gonzalo Paredes

Caracas, 02 de octubre de 2006

## RESUMEN

El objetivo de este trabajo es demostrar que actualmente existe un diferencial en el precio al que se cotizan en el mercado venezolano los Vebonos con redención anticipada, ya que no se está tomando en cuenta ni la flotabilidad del cupón ni la opción de compra que posee estos títulos. Para ello, utilizamos un Modelo de No Arbitraje de Hull y White (1990) que permite calcular un precio justo para el Vebono con redención anticipada (Vebono Callable) y a su vez un valor teórico para la opción de compra implícita en este. Para realizar los cálculos pertinentes, se utilizó el procedimiento numérico de árboles trinomiales recomendado en la literatura, el cual fue programado en el Software Mathematica 5.0 mediante una serie de algoritmos computacionales. Los inputs del modelo se calibraron con data del mercado para lograr reflejar un escenario lo más cercano a la realidad financiera venezolana. Los resultados arrojados por el modelo se compararon con los precios de cotización en el mercado para la fecha de elaboración de esta investigación, constatándose una diferencia importante que refleja la sobrevaloración del Vebono en el mercado.

## ÍNDICE

	N° de Pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>4</b>
<b>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b>	<b>7</b>
<b>OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN</b>	<b>9</b>
<b>HIPÓTESIS</b>	<b>10</b>
<b>CAPÍTULO I: EL VEBONO</b>	<b>11</b>
1.- INTRODUCCIÓN	11
2.- VALORACIÓN DEL VEBONO	12
3.- VEBONO COMO BONO CUPÓN FLOTANTE	14
4.- VEBONO COMO BONO OPCIÓN DE COMPRA	14
5.- IMPLICACIONES DEL VALOR DE LA OPCIÓN	17
<b>CAPÍTULO II: CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE VALORACIÓN DE OPCIONES</b>	<b>20</b>
1.- INTRODUCCIÓN	20
2.- VALORACIÓN DE UNA OPCIÓN: MODELO BLACK Y SCHOLES	21
3.- VALORACIÓN DE DERIVADOS DE TASAS DE INTERÉS	24
4.- ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS	25
<b>CAPÍTULO III: MODELOS DE ESTRUCTURA TEMPORAL DE LA TASA INTERÉS</b>	<b>29</b>
1.-INTRODUCCIÓN	29
2.-MODELOS DE EQUILIBRIO	30
3.-MODELOS DE NO ARBITRAJE	32
<b>CAPÍTULO IV: ÁRBOL TRINOMIAL HULL Y WHITE</b>	<b>37</b>
1.- INTRODUCCIÓN	37
2.- ÁRBOL HULL Y WHITE	38
<b>CAPÍTULO V: APLICACIÓN DEL ÁRBOL DE HULL Y WHITE</b>	<b>47</b>
1.- INTRODUCCIÓN	47
2.- DATOS	47

3.- INTUICIÓN DEL CÓDIGO	52
<b>CAPÍTULO VI: ANÁLISIS DE RESULTADOS</b>	<b>54</b>
1.- VALORACIÓN VEBONO CALLABLE	54
2.- COMPORTAMIENTO DEL CALL OPTION	59
3.- SENSIBILIDAD DEL PRECIO DEL VEBONO AL PERÍODO DE GRACIA	63
4.- SENSIBILIDAD DEL PRECIO DEL VEBONO A LOS PARÁMETROS DEL MODELO	64
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>69</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>71</b>
<b>ANEXOS:</b>	
<b>ANEXO A: RISK NEUTRAL VALUATION Y RISK NEUTRAL WORLD</b>	<b>74</b>
<b>ANEXO B: CARACTERÍSTICAS DE LA DINÁMICA DE LAS TASAS DE INTERÉS</b>	<b>76</b>
<b>ANEXO C: MODELACIÓN DE LA ESTRUCTURA TEMPORAL DE LAS TASAS DE INTERÉS</b>	<b>80</b>
<b>ANEXO D: CÓDIGOS PARA LA IMPLEMENTACIÓN DEL ÁRBOL HULL Y WHITE EN EL SOFTWARE MATHEMATICA 5.0</b>	<b>83</b>

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años, los mercados financieros internacionales han experimentado un enorme auge, hasta convertirse en una de las industrias de mayor crecimiento. Este período de apogeo ha impulsado el estudio riguroso de estos mercados mediante la creación e implementación de modelos matemáticos para valorar instrumentos financieros, uno de los mayores problemas en las finanzas.

Nuestra Investigación tiene como objetivo valorar una Opción de Compra Americana de tipo Bermuda (*Bermuda American Call Option*) cuyo activo subyacente es un Vebono, utilizando el modelo de valoración de no-arbitraje propuesto por Hull y White (1990).

La opción de compra le da derecho al emisor, que en este caso es la República de Venezuela, de recomprar la deuda en cualquier momento antes de la fecha de maduración a un precio equivalente al valor facial de dicha deuda. Esta característica viene definida por la Redención Anticipada del Vebono.

El campo de valoración de opciones es altamente científico. Sus fundamentos se remontan a comienzos del siglo 20 con la tesis doctoral sobre la teoría de la especulación del físico Bachelier, donde luego Black y Scholes (1973) derivaron una fórmula analítica para el precio de una opción de compra europea sobre una acción, y ya para el año de 1975 dicha fórmula era ampliamente usada en el *Chicago Board Options Exchange*.

En nuestro caso, no es viable la aplicación de la fórmula de Black y Scholes para valorar los Vebonos y su opción de compra americana, ya que los Vebonos son un activo cuya dinámica de precios no se alinea con los supuestos de Black y Scholes. La diferencia principal está en que el comportamiento de los precios de un activo de renta variable como una acción puede ser asumida como un proceso aleatorio conocido como *Geometric Brownian Motion*,

mientras que un activo de renta fija como los Vebonos no posee esa característica, ya que el precio de un bono va convergiendo a su valor facial cada vez que se acerca la fecha de maduración.

Para resolver este tipo de problemas y poder valorar correctamente derivados de activos de renta fija, surgieron los modelos de estructura temporal de tasas de interés (*Term structure models*). En los últimos 15 años numerosos modelos de estructura temporal de tasas de interés han sido comúnmente utilizados para valorar bonos con opciones. En esta tesis se utilizó el modelo de Hull y White, logrando resolver el problema que presentaba el modelo de Black y Scholes para valorar derivados de activos de renta fija. El modelo de Hull y White forma parte de los llamados modelo de no-arbitraje. Estos modelos intentan valorar cierto grupo de activos tomando como referencia otros activos cuyo valor es conocido.

Para la implementación del modelo de Hull y White se desarrollaron los procedimientos numéricos propuestos en la literatura por los autores del modelo, específicamente la construcción de un árbol trinomial, para poder resolver la ecuación diferencial y lograr el resultado final: valorar el Vebono y el precio de la opción de compra americana.

El software que se utilizó para programar y correr el modelo fue Matemática 5.0. La programación estuvo basada en el trabajo de algoritmos computacionales de Leippol y Wiener (2000).

Finalmente se analizan los resultados arrojados por el Modelo implementado de Hull y White para valorar los Vebonos y se comparan con los precios de cotización real expuestos en el mercado financiero Venezolano.

La estructura de esta memoria es la siguiente. En el Capítulo 1 se define qué es un Vebono y sus características como instrumento financiero. Posteriormente, en el Capítulo 2 se describe brevemente el modelo de Black y Scholes como origen de los modelos libres de arbitraje para valorar instrumentos derivados y la idea conceptual que hay detrás de ese

modelo. En el Capítulo 3 se explican qué son los Modelos de Estructura de Tasas de interés, su clasificación, se hace un breve recuento histórico de la evolución de los Modelos de Estructura Temporal de tasas de Interés libres de arbitraje, y se explica el Modelo Hull y White, concluyendo con el Marco Teórico de la Tesis. En el Capítulo 4 se explica el método numérico de Árboles Trinomiales. En el capítulo 5 se definen los datos utilizados para correr el modelo, la programación que se implementó en el software Mathematica y diferentes aspectos metodológicos. Finalmente en el Capítulo 6 se presentan y analizan los resultados obtenidos.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los Vebonos son bonos de cupón flotante o *floating rate bonds* que forman parte de la Deuda Pública Interna en Venezuela. Aproximadamente más del 60% de estos están sujetos a una redención anticipada a par, en favor del Estado. Hoy en día en el mercado financiero venezolano, estos tipos de Vebonos se están cotizando a prima, o sea por encima del 100%.

Esta situación representa un riesgo significativo para los tenedores de estos bonos, ya que si el estado decide cancelar su deuda al comprarlos, entonces se produciría una pérdida inmediata igual a la diferencia o *spread* entre el precio de mercado y el valor de redención.

Una explicación del por qué el mercado no ha logrado corregir el precio de estos bonos, puede encontrarse en la manera de establecer su valor. La metodología que el mercado utiliza para valorar estos bonos presenta dos problemas:

1. No considera la condición flotante del cupón, sino que proyecta el cupón actual como determinado hasta maduración. Para determinar el precio de un bono se utiliza el esquema de **flujo de caja descontado**. De esta manera, los inversionistas estiman los flujos futuros de cupones que recibirán hasta la fecha de maduración ( $C_1, C_2, C_3... C_n$ ) en los trimestres 1, 2, 3... n incluyendo el monto principal (P), y suponiendo que el rendimiento esperado para dichos trimestres sean  $y_1, y_2, y_3... y_n$ . Lo anterior se resume mediante la siguiente fórmula publicada por el Ministerio de Finanzas en su pagina web:

$$Vebono = \frac{Cupón_1}{(1+y)^1} + \frac{Cupón_2}{(1+y)^2} + \frac{Cupón_3}{(1+y)^3} + \dots + \frac{Cupón_n}{(1+y)^n} + \frac{Pr\ incipal}{(1+y)^n}$$

2. No toma en cuenta el riesgo de la Redención Anticipada presente en el VEBONO. Esta puede ser analizada como una **Opción de Compra Americana de tipo Bermuda** (*Bermuda Call Option*) por parte del emisor y tal característica debería influir en la percepción del mercado para fijar el precio del VEBONO. En consecuencia no se otorga ninguna prima por el riesgo de que el estado ejerza dicha opción.

El problema del precio de los Vebonos con redención anticipada es de amplia discusión en la actualidad financiera venezolana. En una visita a las tesorerías del Banco del Caribe y de U21 Casa de Bolsa a principios de 2006, los corredores o *traders* de estos títulos mostraban incertidumbre al diferenciar la valoración entre los Vebonos sujetos a redención y aquellos que no la poseían. Incluso el software de información y cotización *Bloomberg*, que presenta “calculadoras” para valorar estos tipos de instrumentos a nivel mundial, no concedía este beneficio para los Vebonos. También se percató la incapacidad del mercado de manejar el riesgo que asumía al cotizar por encima del valor de redención. La evidencia empírica mostraba que la solución que ofrecía el mercado financiero venezolano a este problema era la subasta a subvaloración.

Cómo mejorar el modelo para valorar correctamente estos bonos, incorporando sus aspectos estocásticos, la tasa de cupón flotante y la opción de compra americana, es un problema de gran relevancia para el entorno financiero venezolano. Son estos hechos y discusiones lo que han motivado el inicio de ésta investigación, en la cual se pretende responder a la pregunta:

*¿Cuál es el valor de los Vebonos si se toma en cuenta el aspecto flotante del cupón y el factor de la opción de compra americana (american call bond option) implícito en el título?*

## OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

### Objetivo General

Calcular el precio de los Vebonos sujetos a redención anticipada emitidos por el Ministerio de Finanzas de Venezuela, tomando en cuenta la flotabilidad del rendimiento y el factor de compra o *callable*, utilizando el modelo de estructura temporal de tasas de interés Hull y White (1990).

### Objetivos Específicos

1. Calcular el precio teórico de los Vebonos tomando en cuenta la flotabilidad del rendimiento a través de una programación en el software Mathematica.
2. Calcular el precio teórico de la Opción de Compra Americana de tipo Bermuda (*Bermudan American Call Option*) basado en el modelo de árboles trinomiales Hull y White (1994) a través de una programación en el software Mathematica.
3. Hacer un análisis de sensibilidad simulando varios precios teóricos para la Opción de Compra en función de distintas tasas de interés posibles, distintos factores de reversión a la media y distintas volatilidades para las tasas de interés.
4. Estimar el precio correcto de los Vebonos con Opción de Compra.
5. Comparar el precio actual de los Vebonos con redención anticipada en el mercado con el precio teórico calculado.

## **HIPÓTESIS**

El mercado no incluye la opción de compra por el ente emisor para la valoración de los Vebonos, por lo que el mercado financiero inversionista en Venezuela está sobrevalorando el precio de estos títulos.

# CAPÍTULO I

## EL VEBONO

### 1.1 Introducción:

“Los Vebonos son títulos de deuda pública interna negociables de acuerdo a lo contemplado en la Ley Orgánica de Administración Financiera del Sector Público. Inicialmente estos bonos fueron emitidos por El Gobierno de Venezuela con el objetivo de cancelar los Pasivos Laborales de los Profesores Universitarios provenientes de la Homologación de Sueldos y Salarios realizada durante los años 1998 y 1999 en una cantidad cercana a los trescientos mil millones de bolívares y también las acreencias no canceladas en otros períodos fiscales” (Ministerio de Finanzas, 2001)

Los Vebonos tienen el respaldo de la República y por tanto se consideran deuda soberana con bajo nivel de riesgo de crédito. Los Vebonos pueden ser considerados un instrumento de inversión, porque generan intereses con el respaldo de la República además de que son negociables en el mercado financiero venezolano a través de Sistemas Transaccionales Electrónicos, lo cual quiere decir que pueden comprarse o venderse a precios de mercado, además de estar electrónicamente registrados en la cuenta de clientes de la Caja Venezolana de Valores.

Estos títulos devengan cupones trimestrales, tomando como base el promedio del rendimiento de las últimas tres semanas de las Letras del Tesoro a 91 días de plazo más una

prima adicional nominal fija de 2,5% de interés. Por lo tanto, según un cronograma regular de pagos específico de cada título, cada tres meses se ajusta o resetea el cupón haciéndolo variable en el tiempo. Las Letras del Tesoro son instrumentos emitidos por la Tesorería Nacional para el financiamiento de corto plazo y cada semana se subastan públicamente en el mercado financiero a través del Banco Central de Venezuela. Con respecto al principal, el Estado tiene la obligación de pagar el 100% del valor facial del Vebono en la fecha de maduración o vencimiento.

Actualmente existen en circulación 45 Vebonos cuyos plazos varían entre vencimientos para el año 2007 hasta para el año 2010 y 28 de estos poseen la particularidad de tener una Redención Anticipada. Esta característica le da la capacidad al Estado como ente emisor, de cancelar la deuda en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento, a través del pago de la misma a un precio del 100% del valor facial del bono.

## 1.2 Valoración del Vebono:

El precio al cual puede ser cotizado en el mercado puede variar desde por debajo del valor facial o “a descuento” (<100%), igual a su valor facial (=100%) o por encima de este o “a prima” (>100%). En la actualidad existen dos métodos de valoración de un Vebono. Uno propuesto por el Ministerio de Finanzas (MF) y otro efectuado por Casas de Bolsas, Bancos u otras organizaciones financieras.

- **La del MF:** Para determinar el precio de un bono, esta institución recomienda utilizar el esquema de flujo de caja descontado. De esta manera, los inversionistas estiman los flujos futuros de cupones que recibirán hasta la fecha de maduración ( $C_1, C_2, C_3 \dots C_n$ ) en los trimestres 1, 2, 3... n incluyendo el monto principal (P), y suponiendo que el rendimiento esperado para dichos trimestres sean  $y_1, y_2, y_3 \dots y_n$ . Lo anterior se resume mediante la siguiente fórmula:

$$Vebono = \frac{Cupón_1}{(1 + y)^1} + \frac{Cupón_2}{(1 + y)^2} + \frac{Cupón_3}{(1 + y)^3} + \dots + \frac{Cupón_n}{(1 + y)^n} + \frac{Pr\ principal}{(1 + y)^n}$$

Cuando un Vebono paga los intereses de sus cupones, se establece el interés que devengará el próximo cupón a pagar, sumando al rendimiento de las Letras del Tesoro de esa semana 250 puntos base. Esto se conoce como reseteo del cupón o “*coupon reset*”.

La inexactitud de este esquema proviene de la asunción de que tanto la tasa de descuento como el valor de los cupones son iguales desde el momento en que se calculan hasta la fecha de maduración y a pesar de que se pueda actualizar el precio del bono y el valor de los cupones a las cotizaciones del mercado en cada aniversario del cupón, la incógnita proviene desde ese momento hasta el futuro. Esto escapa de la realidad ya que la tasa de interés no es constante en el tiempo.

- **La de las Organizaciones Financieras.** Estas tratan de acoplar el mismo esquema más hacia la realidad, sobre todo a la venezolana. En vez de fijar el cupón como constante en el tiempo, lo calculan en función de las expectativas que tenga el mercado sobre la tasa a que está fijado el cupón o el *benchmark*, que para el caso del Vebono serían las Letras del Tesoro, y lo descuentan a una tasa o *yield to maturity* también esperada o haciendo un análisis de sensibilidad del precio estimado en función de varios *yields to maturities*, haciendo simplemente menos impreciso este esquema de valoración.

La propuesta de esta tesis es asumir que existen ciertos instrumentos financieros cuya valoración es más sencilla (por ejemplo bonos de cupón fijo o TIF) sobre los cuales se puede extraer una curva cero. Luego, utilizando ciertas premisas sobre la evolución estocástica de las tasas de interés, se construye un árbol de tasas según el modelo de Hull y White y se valora tanto el VEBONO con y sin redención anticipada utilizando el método de *backward induction*.

Sin embargo, primero hay que conocer la naturaleza del Vebono. Este al tener las características mencionadas en la sección 1.1, la teoría financiera lo clasifica por la naturaleza de sus cupones como un *Floating Rate Bond* y como un *Callable Bond* por su redención anticipada.

### 1.3 Vebono como Bono Cupón Flotante o *Floating Rate Bond*

Entre los distintos tipos de bonos que existen en los mercados financieros, los más conocidos son los de cupón fijo, los que no tienen cupón y los flotantes. Los bonos cero cupón o *Zero Coupon Bonds* son aquellos cuyo rendimiento para el tenedor proviene de la diferencia entre el precio de compra y el principal pagado por el emisor. Los fijos prometen pagar en unos períodos establecidos un rendimiento igual a una tasa fija desde la emisión del bono hasta su maduración. En los flotantes también conocidos como *Floating Rate Bonds*, el cupón se basa en la indexación a una tasa referencial o *benchmark rate* y usualmente se le adiciona una prima, haciendo inconstante en el tiempo la tasa y por lo tanto el valor del cupón.

Dos de los principales riesgos que posee un bono son el riesgo de crédito y el de tasas. El riesgo de crédito se refiere a la capacidad de pago del emisor de la obligación o solvencia. El riesgo de tasas describe las consecuencias desventajosas, tanto para el emisor como para el tenedor del bono, de un cambio en el valor de las tasas. Para aquel un aumento de las mismas se materializa en un aumento del costo de su deuda. Para este una disminución de las tasas significa una caída en el rendimiento de la inversión. Un bono de cupón fijo se somete a estos dos riesgos. Por el contrario, un bono flotante sólo se enfrenta al riesgo de crédito, ya que es prácticamente inmune al riesgo de tasas por la naturaleza indexada de sus cupones.

A primera vista, podemos dar una hipótesis de que los Vebonos al ser un *Floating Rate Bond (FRB)*, poseen un riesgo bajo ya que la solvencia del emisor, que es el Estado, es percibido de una manera favorable por el mercado, reduciendo así el riesgo de crédito del Vebono.

### 1.4 Vebono como Bono con Opción de Compra o *Callable Bond*

El Vebono con redención anticipada ciertamente puede ser visto como un Bono con Opción de Compra o *Callable Bond*, donde la capacidad de redención o *call provision* hace que el inversionista o *bond holder*, que en este caso es el mercado financiero venezolano, le otorga una opción a llamar o comprar el bono a un precio de redención o *call price* acordado

al emisor o *bond issuer* representado aquí por el Estado venezolano. El *call price* para el Vebono es a par del valor facial, o sea, 100%.

Este *call provision* puede ser ejercido de varias maneras según lo establecido por Hull (1999). Si la opción de llamar o recobrar sólo se limita a un momento específico se conoce como Opción Europea o *European Option*; si es en cualquier momento antes de la fecha de maduración sería una Opción Americana o *American Call Option*; o si es en ciertos momentos preestablecidos, por ejemplo en cada aniversario del cupón. Dentro de esta última clasificación conocida como Opción Americana tipo Bermuda o *Bermuda American Option*, entraría la opción de compra del Vebono.

¿Para qué emitir un *Callable Bond*? Este tipo de bonos presentan mayores ventajas para el emisor que para el tenedor o inversionista<sup>1</sup>, lo que hace muy común su existencia en mercados de deuda pública, donde el poder de mercado de una organización privada, usualmente es mucho menor que el de un ente público.

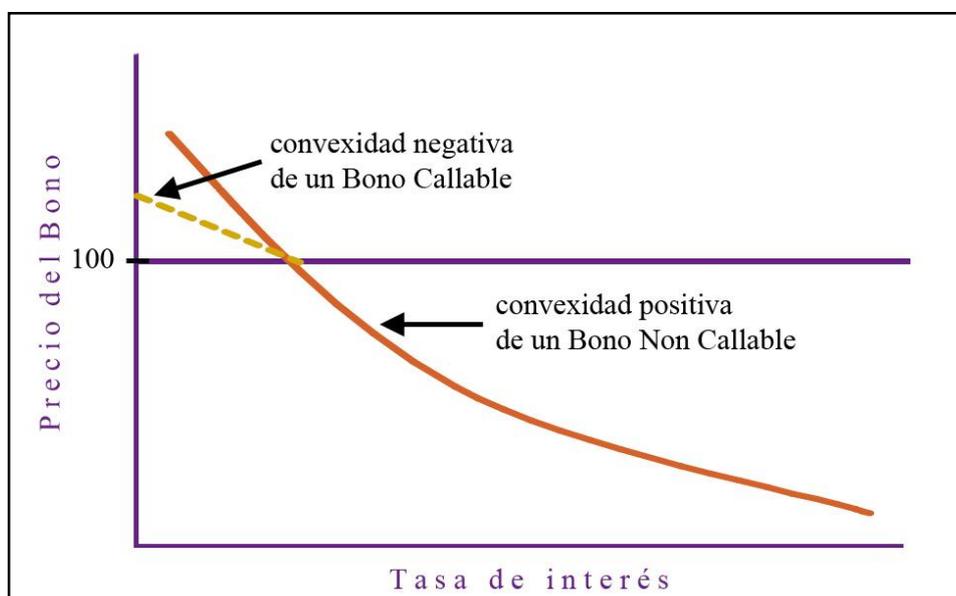
Un *call provision* le da libertad al emisor de renovar o reestructurar su deuda por cualquier motivo, ya sea político o económico. Sin embargo, cuando la provisión es sobre un bono de cupón fijo la razón más significativa es refinanciar la deuda en un ambiente de tasas de interés bajas o decrecientes. Por ejemplo, si la tasa del cupón de un *callable bond* es 10% y a su vez en el mercado prevalece un rendimiento del 5%, el emisor le conviene ejercitar la opción o redimir anticipadamente el bono y reemitir la deuda con un cupón del 5%. Según Fabozzi (2003), este tipo de riesgo se conoce como Riesgo de Reinversión o *Reinvestment Risk*. El Vebono aparenta no poseer este riesgo ya que prácticamente es inmune al riesgo de tasas por su característica de ser un *FRB* como se explicó anteriormente. Esto se evidencia en la práctica ya que hasta el momento de redacción de esta tesis, ningún Vebono ha sido redimido o llamado antes de su vencimiento; estrategia que ha asumido el mercado venezolano como *conocida y constante*. Sin embargo, el *Reinvestment Risk* para el Vebono puede darse ya que en un escenario actual de tasas de interés bajas, la proporción que representa el factor fijo del cupón es mayor (2,5 %) que en un escenario de tasas altas, por lo

---

<sup>1</sup> Para mayor información ver “*An Introduction to Callable Debt Securities*”(Fannie Mae, 2005)

que el Estado puede cancelar la deuda antes de la fecha de vencimiento y reemitiéndola nuevamente con el factor fijo distinto, por ejemplo un 1%.

Por otro lado, el *call provision* presenta ciertamente desventajas para el tenedor. El principal de ellos es el de poseer un *callable bond* cuyo valor sea mayor al *call price*. Una vez que el emisor ejercita la opción, esta diferencia o *spread* de precios es sinónimo exacto de pérdida para el tenedor del bono. Otra desventaja nombrada por Fabozzi (2003), es lo que se conoce como Compresión del Precio o *Price Compression*. Este consiste en que a medida que declinan las tasas en el mercado, la apreciación en el precio de un *callable bond* será menor al de un *non-callable bond* una vez sobrepasado el *call price*. Esto se debe por estar presente el riesgo del *call provision* en el bono *callable*. La gráfica 1 ilustra esta idea.



Gráfica 1.1 Relación Precio/Tasa de interés para un Bono Callable

Retomando el concepto de la opción implícita en el Vebono, el poseedor de este título con una redención anticipada entra en dos transacciones separadas. Primero compra un Vebono al emisor sin redención o *Non-Callable*, por el que paga un respectivo precio. Después le vende al emisor una Opción de Compra o *Call Option*, por el cual recibe el Precio de la Opción conocido a veces en la literatura financiera como *Prima*. En otras palabras, el Estado emisor ejercerá una posición en largo y el mercado inversionista actuará en una

posición en corto. Podemos resumir la posición del tenedor mediante la siguiente fórmula expuesta por Fabozzi (2003):

$$\begin{array}{rcccl} \text{Tenedor del Vebono} & = & \text{Tenedor de un Vebono} & + & \text{Venta de una} \\ \text{Callable} & & \text{Non Callable}^2 & & \text{Opción Compra} \end{array}$$

En términos del precio, que es el fin de nuestra investigación, el precio de un Vebono Callable es igual al precio de los siguientes dos componentes:

$$\text{Vebono Callable} = \text{Vebono Non Callable} - \text{Opción de Compra}$$

La razón por la cual el Precio de la Opción es sustraído del precio del *callable* es porque al venderse la Opción de Compra, el tenedor del bono *callable* recibe el Precio de la Opción.

Ahora bien, la práctica refleja que esta posición es un poco más compleja. Como el Gobierno tiene la capacidad de ejercer la opción en cualquier momento antes del vencimiento, el tenedor del Vebono *callable* le ha vendido implícitamente al Estado un paquete de opciones de compra, por lo que el Precio *Callable* variará según la fecha de recompra pronosticada.

## 1.5 Implicaciones del Valor de la Opción

Si consideramos que el precio futuro de la opción y el valor de las tasas de interés en el tiempo se conocen con exactitud, podemos analizar las implicaciones de la opción de compra del bono según el siguiente enfoque (Pye ,1986).

Suponemos que  $p$  es el precio de mercado de un *non-callable bond* con las mismas características de maduración y cupón que el de un *callable-bond*  $p^*$ . Al *precio call* lo identificaremos como  $c$ .

---

<sup>2</sup> El Vebono Non-Callable se refiere al bono y sus respectivos pagos de cupones hasta la fecha de vencimiento si el Emisor no ejerciera la Opción de Compra.

Si  $p > c$  y el emisor llama el bono a  $c$  y emite por otro lado un *non-callable* idéntico a  $p$ , hace una ganancia de  $p - c$ .

Se supone que con esta nueva emisión, las obligaciones contractuales con respecto al pago del de intereses y el del principal, no cambian para el emisor. De esta manera el valor presente tanto del pago de intereses como del principal no varían independientemente si la opción es ejercida. Esta aclaratoria se hace por el hecho que en la práctica el precio de un *callable bond* varía al saberse que el emisor ejercerá la opción.

Por lo tanto, el valor de la opción, denotado por  $V$ , es dependiente del tiempo. El momento óptimo para ejercer la opción es aquel donde el valor presente de  $p - c$  esté en su máximo. Sin embargo, el análisis visto desde la perspectiva del inversionista es inverso. Este asume que la opción se ejercería en el momento óptimo para el emisor. El valor de inversión para el tenedor del *callable bond* será  $p^* = p - V$ . Por esta relación, el emisor del bono no ejercerá la opción mientras el valor de ejercerla sea mayor que la ganancia de ejercerla inmediatamente,  $V > p - c$ . Si combinamos esta inecuación con el hecho de que un *callable bond* es igual al valor de un *non-callable bond* menos la opción,  $p^* = p - V$ , tenemos que si  $V = p - p^*$ , entonces  $p - p^* > p - c$ , que es igual a la  $c > p^*$ .

Cuando el precio del *callable bond* se venda por debajo de su precio *call*, no se ejercerá la opción. Inversamente, si el *callable bond* se vende por encima de  $c$ , el emisor puede hacer ganancia inmediata ejercitando la opción y reemitiendo un bono nuevo idéntico. Esto se conoce como Regla de Ejercicio o *Call Rule*. El siguiente esquema resume lo dicho anteriormente:

ejerce la opción ( <i>call</i> )	$p^* > c$	ganancia del emisor > costo del <i>call provision</i>
no ejerce la opción	$c > p^*$	costo del <i>call provision</i> > ganancia del emisor

Sin embargo, recordamos que este análisis se hizo suponiendo que el precio futuro del bono y el valor de las tasas de interés en el tiempo eran conocidas. Lamentablemente ambos valores en la práctica son desconocidos. El propósito de esta investigación es resolver este

problema utilizando los fundamentos que encierra la teoría financiera para el análisis de opciones junto con técnicas computacionales para estimar un posible valor correcto para el Vebono, tomando en cuenta la flotabilidad tanto de sus cupones como el de las tasas al cual se descuenta, junto con la estimación del precio de la opción de compra que subyace en aquellos Vebonos sujetos a redención anticipada que se cotizan actualmente en el mercado financiero venezolano. En el siguiente capítulo presentamos los conceptos básicos que enmarcan el análisis de opciones.

## CAPÍTULO II

### CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE VALORACION DE OPCIONES

#### 2.1 Introducción:

La opción es un contrato cuya dinámica de precios ha sido estudiada por importantes personalidades del mundo financiero y económico. Samuelson, Baumol, Malkiel, Quandt, Merton, y Black, Scholes (1973), entre los más destacados.

Todos estos trabajos, con excepción de Black y Scholes (1973), produjeron fórmulas para valorar opciones a través de la **Valoración por Expectativas**. Esta teoría considera que el precio futuro de una Opción debería reflejar el valor esperado de su precio en el presente. De manera similar, inversamente se explica que el Valor Presente de una Opción debería ser igual al precio futuro esperado de este, descontado en función del valor del dinero en el tiempo a través de una determinada tasa.

Sin embargo, Black y Scholes (1973) utilizaron el principio de **Ausencia de Arbitraje** para establecer precios de los derivados. Este concepto nos dice que el precio de un contrato derivado (forward, opción, swap, etc.) debe ser tal que no sea posible ninguna oportunidad de arbitraje, o sea obtener ganancias inmediatas con la compra (posiciones largas) y venta (posiciones cortas) de un mismo activo, o de su sintético, en dos mercados distintos.

De esta manera, Black y Scholes encontraron derivar una fórmula analítica de valorar el precio de una opción, específicamente una Opción de Compra o *Call* que es el que utilizaremos durante toda nuestra investigación. El término “analítica” refiere al hecho que su

estimación no se deriva de métodos estadísticos o numéricos, sino que se deriva de formulaciones matemáticas.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera. En la Sección 2.2 presentamos el *modelo de Black y Scholes* y los conceptos teóricos detrás que encierran la valoración de una opción, entre ellos principios muy importantes conocido como la *Valoración por Ausencia de Arbitraje* y el *risk-neutral valuation*. En la sección 2.3 explicamos las consecuencias de aplicar este modelo a derivados de tasas de interés. Finalizamos en la sección 2.4 desarrollando uno de los conceptos más estudiados en las últimas décadas por la teoría financiera para el estudio de estos tipos de instrumentos, la *Estructura Temporal de tasas de interés*.

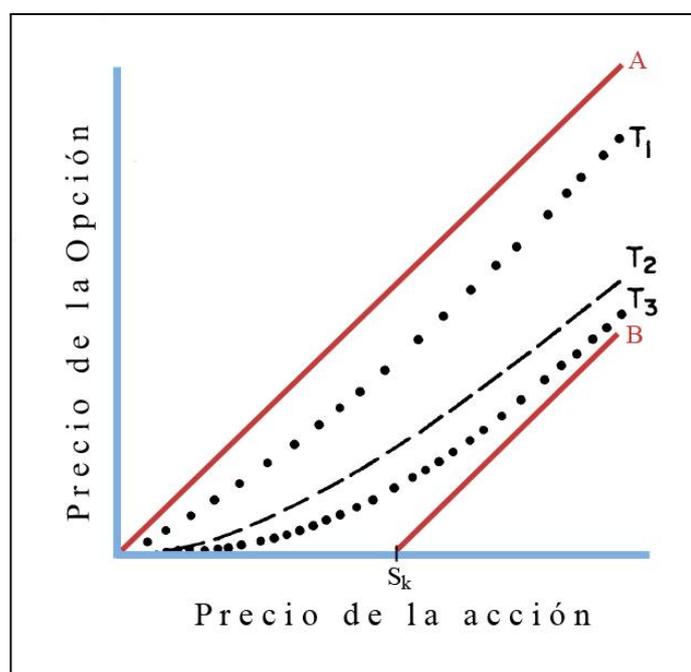
## 2.2 Valoración de una Opción y el Modelo de Black y Scholes:

En general, parece claro que mientras más alto es el precio de una acción, mayor será el precio de la opción. Cuando el precio de la acción es mucho más grande que el precio de ejercicio, la opción es casi segura (mayor probabilidad) que sea ejercida. El valor corriente de la acción será de esta manera aproximadamente igual al precio de un portafolio compuesto por la acción menos el precio de un bono a descuento que madura es la misma fecha de la opción con un valor facial igual al *strike price* de la opción. Por otro lado, si el precio de una acción es mucho menos que el precio de ejercicio, la opción es casi segura (mayor probabilidad) que expire sin ser ejercida, por lo que su valor estará cerca de cero.

Si la fecha de expiración de la opción está muy lejos en el futuro ( $T_1$ ), entonces el precio de un bono que paga el precio de ejercicio en la fecha de maduración será muy bajo y el valor de la opción será aproximadamente igual al precio de la acción. Por otro lado si la fecha de expiración está muy cerca, el valor de la opción será aproximadamente igual al precio de la acción menos el precio de ejercicio, o cero si el precio de la acción es menor al precio de ejercicio. Normalmente el valor de una opción decrece a medida que su fecha de maduración se acerca, si el valor de la acción no cambia.

Dado un cambio porcentual en el precio de la acción, manteniendo constante la maduración, dará un cambio porcentual mayor en el valor de la opción. Sin embargo, la volatilidad relativa de la opción no es constante, depende tanto en el precio de la acción como de la maduración.

La gráfica 2.1 da una idea intuitiva de estos argumentos. La línea A representa el valor máximo de la opción, ya que no puede valer más que la acción. La línea B representa el valor mínimo de la opción, ya que su valor no puede ser ni negativo ni menor al precio de la acción menos el precio de ejercicio o *strike price*. Las líneas T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub> y T<sub>3</sub> representan el valor de la opción para maduraciones sucesivamente más cortas.



Gráfica 2.1 Relación entre el valor de la opción y el precio de la acción

Resumiendo, el valor de la opción depende del precio en el mercado o *spot price* de la acción (*Spot*), el *strike price* ( $S_k$ ), la tasa de interés ( $r$ ), la fecha de maduración ( $t-T$ ) y la volatilidad de la acción ( $\sigma$ ). Matemáticamente resumimos esto mediante la siguiente función:

$$\text{Valor Opción} = f(\text{Spot}, S_k, r, t-T, \sigma).$$

Black y Scholes (1973) desarrollan un modelo donde se valora el precio de una opción en función de la dinámica del precio de la acción en el tiempo. Utilizando el principio general de Valoración por Ausencia de Arbitraje en el modelo, se afirma que si una opción está correctamente valorada en el mercado, no debe ser posible realizar ganancias creando portafolios con posiciones cortas y largas de la opción y del activo subyacente o principal, que en este caso es la acción. Usando este principio, se puede derivar una fórmula analítica<sup>3</sup> que valore el precio de una opción.

Adicionalmente el modelo establece ciertas premisas, llamadas “condiciones ideales” del mercado según Black y Scholes (1973):

1. La tasa de interés es conocida y constante en el tiempo.
2. El precio del activo principal sigue una “caminata aleatoria” (random walk) en un tiempo continuo, con una varianza del cambio porcentual proporcional al cuadrado del precio de la acción.
3. La varianza del cambio porcentual en tiempo continuo es constante.
4. La acción no paga dividendos u otro ingreso.
5. La opción es europea.
6. No hay costos transaccionales.
7. Endeudamiento es ilimitado.
8. La venta corta es posible y sin penalidad.

Dentro de estas premisas, el valor de una opción dependerá sólo del precio de la acción, el tiempo y ciertas variables que son consideradas como constantes. Así, es posible crear un portafolio libre de riesgo (*hedge position*) que consiste de una posición larga en la acción y una posición corta en la opción, cuyos valores no dependerán en el precio de la acción sino del tiempo y de valores conocidos y constantes. A medida que el precio de la acción y la fecha de maduración cambian, el número de opciones que se tiene que vender para crear un portafolio libre de riesgo con una acción comprada, cambia. Un (incremento) en el *equity* tiende a balancear la posible pérdida dado por la acción en el portafolio libre de riesgo

---

<sup>3</sup> Para profundizar los resultados se recomienda al lector “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”(Black y Scholes, 1973)

y reflejándose en el precio de la opción. Igual viceversa. Si el portafolio libre de riesgo es mantenido constantemente, entonces las aproximaciones mencionadas anteriormente se convierten en exactas y el retorno del portafolio libre de riesgo es completamente independiente del cambio en el valor de la acción. De hecho, el retorno sobre el portafolio libre de riesgo se hace conocido. Así, el costo de creación de este portafolio en cualquier momento futuro, debe ser igual al precio de la opción por inexistencia de oportunidades de arbitraje.

Otra manera utilizada para describir el método de valoración sin arbitraje es el principio de *Risk Neutral Valuation*<sup>4</sup>, donde el retorno esperado del principal y la tasa de descuento es la tasa libre de riesgo,  $r$ . Este supuesto simplifica considerablemente el análisis de los derivados y es el que utilizaremos cuando valoremos opciones a través de métodos numéricos.

### 2.3 Valoración de Derivados de tasas de interés:

Los Derivados de tasas de interés, como un Bono con Opción de Compra (*Callable Bond*), son aquellos instrumentos cuyos pagos dependen de alguna manera del nivel de tasas de interés. Inicialmente se intentó aplicar el modelo de Black y Scholes (1973) para la valoración de estos activos, sin embargo varios problemas surgieron al tratar de aplicar este modelo directamente, principalmente porque el comportamiento o dinámica de las tasas de interés en el tiempo es distinto a la que sigue el precio de una acción<sup>5</sup>.

Entre algunas razones expuestas por Hull (1999) que justifican este argumento y que difieren de las asunciones de Black y Scholes están:

- En estos tipos de derivados la variable subyacente, la tasa de interés, no es un activo negociable, lo cual los hace más difíciles de valorar que aquellos donde lo es una acción.

---

<sup>4</sup> Para una explicación del *Risk Neutral Valuation* ver Anexo A.

<sup>5</sup> En el Anexo B se diferencian el comportamiento de las tasas de interés y el comportamiento del precio de una acción.

- El comportamiento o dinámica de la tasa de interés en el tiempo es más complicado que el precio de una acción. Aquella aparenta regresar a un nivel medio de largo plazo. Este fenómeno se conoce como Reversión a la Media (*Mean Reversion*).
- Para la valoración de este tipo de derivados, es necesario desarrollar un modelo que describa el comportamiento o dinámica de la **curva de rendimiento cero-cupón**.
- La volatilidad a distintos puntos de la curva de rendimiento es distinta.
- En el modelo de Black y Scholes, al descontarse un flujo de pagos en el tiempo, no se toma en cuenta el hecho de que la tasa varía en este, ignorando la propiedad de que las tasas son estocásticas cuando se descuentan.

En síntesis, modelos analíticos de valoración como el de Black y Scholes presentan limitaciones y no proveen una descripción de cómo varían las tasas de interés en el tiempo. Nuevos enfoques de la Teoría Financiera en los últimos años han tratado de superar estas limitaciones desarrollando lo que se conoce como Modelos de la Estructura Temporal de Tasas de Interés (*Term Structure Models*).

## 2.4 Estructura Temporal de Tasas de Interés:

La estructura temporal explica la dinámica estocástica de las tasas de interés y se origina de la relación entre las tasas proporcionadas por los bonos libres de riesgo y sus diferentes plazos en un instante determinado. Se trata por tanto, de una función cuya variable dependiente es el tipo de interés y cuya variable independiente es la tasa de interés<sup>6</sup>.

La estructura temporal se puede representar gráficamente de forma que en el eje de ordenadas se miden las diferentes tasas y en el eje de abscisas el período de vencimiento. La representación gráfica de la estructura temporal se suele denominar **Curva de Tasas de Interés** o **Curva de Rendimientos** (*yield curve*). En general, dependiendo de las características existentes en la economía en cada momento se distinguen diferentes tipos de curva.

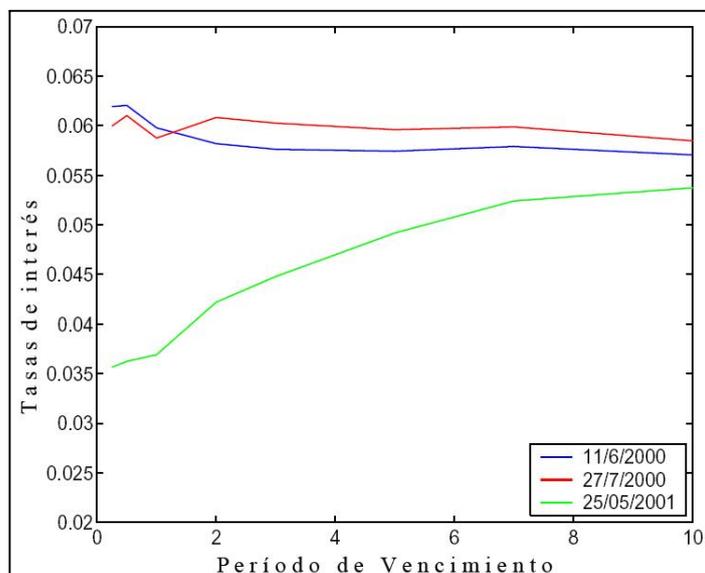
---

<sup>6</sup> La deducción de los Modelos de Estructuras de Tasas de Interés se explica más detalladamente en el Anexo C.

- Creciente o positiva, cuando las tasas de interés son mayores a medida que el plazo al que se refieren se va ampliando.
- Decreciente o negativa, cuando las tasas de interés a corto plazo son más elevadas que las de largo plazo, lo que se conoce también como curva invertida.
- Plana, cuando las tasas de interés son iguales o con escasas diferencias, independientemente del plazo.
- Oscilante, cuando la curva presenta unos tramos ascendentes y otros descendentes.

Desafortunadamente, la estructura temporal de las tasas de interés no se puede observar directamente en el mercado ya que ésta informa, exclusivamente, de la relación tasa-plazo, y en el mercado no se dispone de esta información para todos los plazos que se pueden considerar en un horizonte temporal determinado. Además, es posible encontrar diferentes tasas de interés asociados a un mismo plazo debido a los distintos efectos que reflejan las tasas y a la variedad de factores que influyen en su determinación. El efecto más importante es el de insolvencia del emisor, que hace referencia al riesgo de impago que comporta el título. Los agentes de mercado valoran este riesgo y si lo consideran elevado, solo están dispuestos a prestar su financiamiento si se les compensa a través de un mayor rendimiento. De esta manera para no incorporar el riesgo de insolvencia en la estimación de la estructura temporal, se utilizan rendimientos de títulos de renta fija emitidos por el estado para obtener tasas de interés libres de riesgo. En definitiva, se trata de disponer de rendimientos de títulos de renta fija estatales, cupón cero o emitidos al descuento, que sean los más homogéneos posible y que estén libres de otros factores (fiscalidad, liquidez, características propias del título, etc.) que distorsionan la relación tasa-plazo. La ventaja de utilizar Deuda del Estado es que, aparte de proporcionar tasas libres de riesgo de insolvencia, se negocia en mercados secundarios suficientemente líquidos para una amplia gama de plazos. En la gráfica 2.2 recogemos curvas de tasas de interés para instantes de tiempo diferentes. La curva de tasas para la fecha del 11 de junio de 2000 es en general decreciente, lo cual suele ser indicativo de que los mercados apuestan por el corto plazo, ya que los niveles de tasas de interés existentes se consideran elevados. Estos valores son próximos al 6%. En la del 27 de julio del año 2000, observamos tramos crecientes y tramos decrecientes, lo cual suele denotar situaciones de

inestabilidad en los mercados. Además, en general sus valores son ligeramente superiores a los registrados en junio.

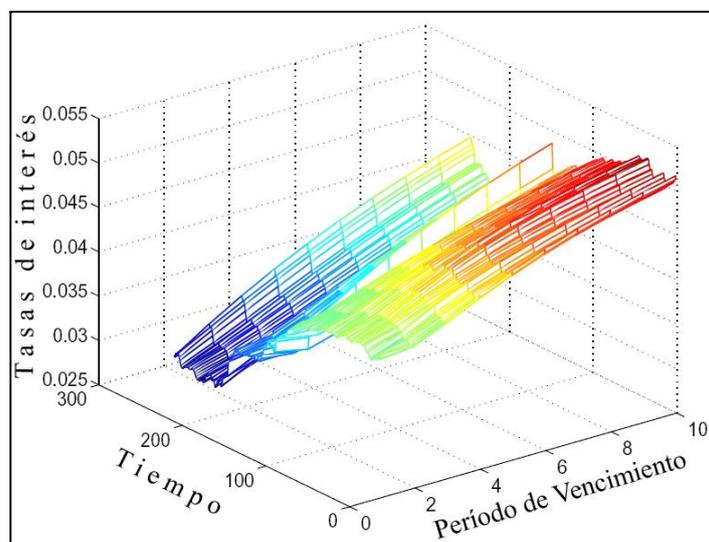


**Gráfica 2.2** Estructura temporal de las tasas de interés para distintas maduraciones en Estados Unidos.  
**Fuente:** Federal Reserve Statistical Release

Finalmente, representamos la curva de tasas de interés del 25 de mayo de 2001. En este caso, las tasas de interés toman valores comprendidos entre el 3.5% y el 5.5%, inferiores a los observados en junio y julio, y la curva es en general creciente. Como anteriormente comentamos, esta situación es normal en la economía ya que a mayor plazo, mayor riesgo y este hecho se ve reflejado en la curva de tasas de interés.

La negociación en los mercados financieros se considera que se realiza en tiempo continuo, por lo que por otra parte, se puede analizar la estructura temporal desde un punto de vista dinámico en vez de estático. Si añadimos un tercer eje que recoja los diferentes instantes de tiempo de observación de la relación tasa-plazo, se obtiene una representación tridimensional de la estructura temporal de las tasas de interés que informa para un horizonte temporal determinado, de su evolución en el tiempo.

La Figura 2.3 recoge la evolución de la estructura temporal de las tasas de interés para el mercado de Estados Unidos durante el período comprendido entre el 11 de junio de 2000 y el 25 de mayo de 2001.



**Gráfica 2.3** Estructura temporal de las tasas de interés para distintas maduraciones en Estados Unidos en tiempo continuo  
**Fuente:** Federal Reserve Statistical Release

Uno de los aportes más importantes en la modelación de la estructura temporal de tasa fue realizado por Vasicek (1977). Vasicek encontró un método donde la Estructura Temporal de tasa de interés se puede modelar si sabemos la respectiva tasa de interés instantánea (tiempo continuo) para cada período de vencimiento. Esto se logra expresando a través de una ecuación diferencial estocástica que trate de explicar la dinámica de la tasa de interés en el tiempo:

$$dr(t) = \alpha(t, r)dt + \rho(t, r)dW(t)$$

Donde  $\alpha(t, r)$  es el factor *drift* o tendencia del proceso y  $\rho(t, r)$  es el factor *diffusion* o la volatilidad del proceso, ambos dependientes del tiempo y de la tasa de interés instantánea.

Puede haber distintas interpretaciones sobre las variables que definen la estructura temporal, encerrando un marco conceptual y matemático distinto para cada uno de estas. Cada uno de estas es lo que se conoce como un Modelo de Estructura Temporal de Tasas de Interés.

## CAPÍTULO III

### MODELOS DE ESTRUCTURA TEMPORAL DE TASAS DE INTERÉS

#### 3.1 Introducción

Un modelo de tasas de interés promueve una estructura cuantitativa para describir movimientos en las tasas de interés y valorar instrumentos financieros derivados de la tasa de interés, o sea, propone entender el comportamiento de la tasa de interés en el tiempo. Al tener un modelo apropiado a la tasa disponible, se busca descubrir las dinámicas de la tasa y la forma en que las tasas y el precio de derivados se relacionan entre sí, ambas para entender y permitirnos valorar derivados de tasas de interés<sup>7</sup>.

Aunque es muy difícil determinar qué modelo es el mejor además de que no existe un consenso sobre cuál de ellos es el más adecuado, ciertamente es posible decir qué características generales debe tener un modelo de tasas de interés.

- Valoración precisa de Instrumentos sencillos del mercado.
- Facilidad de Calibración al Mercado (rapidez y precisión).
- Parámetros relativamente fáciles de estimar e interpretar.
- Robustez. Capacidad de desenvolverse en cualquier mercado.
- Extensibilidad a nuevos instrumentos.

Las distintas interpretaciones sobre las variables que explican la tasa de interés, generan la existencia de distintos modelos para explicar la estructura temporal.

---

<sup>7</sup> Para una descripción mas detallada de la Dinámica de la Estructura Temporal revisar Anexo C.

En este capítulo desarrollamos los distintos enfoques que han tratado de explicar el comportamiento en el tiempo de las tasas de interés. Está estructurado de la siguiente manera. La sección 3.2 desarrollamos los principales *Modelos de Equilibrio* y el por qué de sus deficiencias para valorar instrumentos derivados de las tasas de interés. En la sección 3.3 mostramos los primeros equilibrios consistentes con la estructura temporal observada en el mercado, los *Modelos de Arbitraje*. Además presentamos el modelo escogido en esta investigación para valorar los Vebonos con Opción de Compra presentado en el Capítulo 4: *el Modelo Hull y White*.

### 3.2 Modelos de Equilibrio:

Los Modelos de Equilibrio comienzan con premisas sobre variables económicas, de tal manera de derivar un proceso para la tasa de interés,  $r$ . El siguiente esquema ilustra este argumento:



Entre los modelos más conocidos, están:

- **Modelo de Vasicek**

Vasicek (1977) fue uno de los pioneros en el desarrollo de la Estructura Temporal. Utilizando el mismo argumento de Black y Scholes para valorar una opción en función de la dinámica en el tiempo del precio de una acción y junto con la Valoración por Ausencia de Arbitraje. Oldrich Vasicek estudió el comportamiento estocástico de la tasa de interés para valorar el precio de un bono, pudiendo describir esta dinámica a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr = a(b - r) dt + \sigma dz$$

Este proceso se caracteriza por poseer reversión a la media (*mean reversion*) en donde  $a$  es la tendencia del proceso de reversión a la media (velocidad para ajustarse a la media) y  $b$

es el nivel histórico de la tasa de interés. La volatilidad  $\sigma$  es constante. Entre los inconvenientes de este modelo está la interpretación de la volatilidad, que parece más adecuada que dependa del nivel de la tasa de interés instantánea en alguna medida, en vez de ser constante.

Dentro de las asunciones que rodean a este modelo, Vasicek explica que:

- 1) La tasa spot de interés sigue un proceso *Wiener* definido por  $dz$
- 2) El precio de un bono a descuento en el tiempo sólo depende de la tasa spot.
- 3) El mercado es eficiente: todos los inversionistas son racionales, no hay costos de transacción y la información es perfecta entre todos los inversionistas simultáneamente.
- 4) A diferencia de la dinámica de una acción, el *Wiener process* que posee la tasa de interés se ve afectado por  $a$  hacia una media histórica de largo plazo,  $b$ .

- **Modelo de Rendleman and Bartter.**

Rendleman y Bartter (1980) suponen que la tasa de interés sigue un movimiento Geométrico Browniano con tendencia y volatilidad constante al igual que Black y Scholes al modelar el comportamiento del precio de una acción. Un defecto de este modelo es que no proporciona resultados adecuados en la práctica.

- **Modelo de Cox, Ingersoll and Ross (CIR)**

Cox, Ingersoll y Ross (1985) plantean un modelo de equilibrio general en el que el tipo de interés es un proceso de tipo raíz cuadrada. Este proceso, al igual que el planteado por Vasicek, supone que la tasa de interés instantánea posee una reversión a la media y que la volatilidad depende de esta, lo cual es una hipótesis más realista que la de volatilidad constante. Y a diferencia de Vasicek, la tasa,  $r$ , no puede tener valores negativos. Este modelo ha sido ampliamente desarrollado y aplicado en la literatura, ya que proporciona una solución analítica para la estructura temporal y para diversos derivados de tasas de interés.

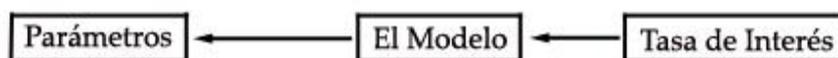
Es razonable inducir que en algunas situaciones, las expectativas acerca del futuro de las tasas de interés implicarían el diseño de modelos con parámetros tiempo-dependientes. En otras palabras, el factor tendencial y la volatilidad de la tasa deberían estar en función tanto del tiempo como de  $r$ . La justificación de una dependencia del tiempo emerge de la naturaleza cíclica de la economía, expectativas concernientes acerca del impacto futuro de políticas monetarias y las tendencias esperadas en otras variables económicas.

De esta manera, la desventaja de los modelos de equilibrio es que no se ajustan automáticamente a la estructura temporal actual de tasa de interés, trayendo fallas e inconsistencias una vez usados en la práctica. Al escoger los parámetros juiciosamente, los modelos de equilibrio pueden proveer un ajuste aproximado de la estructura temporal que se encuentra en la realidad. Sin embargo es una aproximación, por lo que su inexactitud en algunos casos genera errores significativos que llevan a los *traders* o corredores de instrumentos de derivados, a encontrar estos modelos insatisfactorios. Según Hull (1999), un 1% de error en el precio de un bono puede llevar a un 25% de error en la valoración del precio de la opción.

### 3.3 Modelos de No-Arbitraje:

Un modelo de No Arbitraje es un modelo diseñado para ser exactamente consistente con la estructura temporal actual de tasas de interés. Estos modelos establecen por hipótesis la evolución estocástica de las variables de estado, siendo una de las principales la tasa de interés instantánea. Posteriormente deduce la estructura temporal y los precios de los diferentes activos derivados de tasas de interés, suponiendo que no existen oportunidades de arbitraje en el mercado.

La diferencia esencial entre ambos modelos es que en los de equilibrio, la estructura temporal actual es un *output* (variable endógena), mientras que en los modelos de no arbitraje es un *input* (variable exógena). El siguiente esquema ilustra esta idea.



Entre los modelos más conocidos están:

- **Modelo de Ho-Lee (1986)**

Ho y Lee fueron los pioneros en mostrar cómo un modelo de tasas de interés estuviese diseñado de tal manera de ser consistente con la estructura temporal de tasas de interés inicial.

$$dr = \theta(t) dt + \sigma dz$$

El modelo asume que la tasa sigue un proceso que se distribuye normalmente. La variable  $\theta(t)$  define la dirección promedio que seguirá  $r$  en el momento  $t$ . Esta es independiente de  $r$ .

$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t$$

Donde  $F(0, t)$  es la tasa de interés instantánea *forward* para el momento  $t$  (*instantaneous forward rate*). El subíndice  $t$  denota la derivada parcial con respecto a  $t$ .

Observemos que si aproximamos esta fórmula eliminando el segundo término, nos quedaría que la dirección promedio en que la *short rate* se mueve en el futuro es aproximadamente igual a la pendiente de la *instantaneous forward curve*. O sea, la pendiente de la *forward curve* definirá la dirección en que la tasa se está moviendo en cualquier momento dado. Implícito a esta pendiente, está la asunción de un valor futuro aleatorio distribuido normalmente.

La principal desventaja del modelo Ho-Lee es la ausencia de reversión a la media. El modelo, independientemente de que tan alta o baja este la tasa de interés en un momento determinado, justifica que la dirección en que la tasa de interés se moverá en el siguiente período es siempre la misma. Otro defecto del modelo es la poca flexibilidad escogiendo la estructura de la volatilidad. Cambios en la *spot rate* y *forward rate* durante un período corto de tiempo, tienen la misma desviación estándar.

- **Modelo Black, Derman and Toy (1990):** La principal ventaja de este modelo es que considera LogNormal, tanto  $r$  como la volatilidad, capturando una volatilidad realista para la Estructura Temporal de tasas de interés.

$$d\ln(r) = [\theta(t) + \rho(t)\ln(r) dt]dt + \sigma(t) dz$$

Aunque el componente Reversión a la Media (*mean reversion*) no está modelado explícitamente, está introducido dentro de la estructura temporal de la volatilidad,  $\rho(t)$ . De esta manera el grado de dependencia de la tendencia con el nivel de tasas, dependerá del proceso de la volatilidad. En otras palabras, el factor *mean reversion* es endógeno al modelo.

Algunos investigadores, Buetow, Hanke y Fabozzi (2001), han criticado el modelo diciendo que el factor *mean reversion* debería ser independiente de la volatilidad y aunque puede solucionarse el problema, se sacrificaría la simplicidad de la solución numérica del modelo.

- **Modelo Hull and White (1990):** John Hull y Alan White describieron la dinámica de la estructura temporal de tasas de interés mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma dz$$

Obsérvese que el modelo puede ser visto como una Extensión del Vasicek si se hace dependiente del tiempo al nivel de reversión; o también puede ser visto como el Modelo Ho-Lee si el *mean reversion* es igual a cero.

La función que describe cómo  $r$  se mueve en  $t$  agregándole consistencia al modelo con el nivel de tasas inicial, se calcula a través de la siguiente ecuación:

$$\theta(t) = F_t(0, t) + a F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

El último término de esta ecuación es pequeño Si lo ignoramos implicaría que la tendencia del proceso para  $r$  en el momento  $t$  es igual a  $F(t,0,t) + a[F(0,t) - r]$ . Esto demuestra que en promedio, sigue la pendiente de la *Inicial Instantaneous Forward Rate*. Y cuando se desvía de esta curva, se regresa a una tasa  $a$ .

El precio de un Pure Discount Bond según Hull y White (1990) bajo este modelo, sería:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$\log A(t, T) = \log \frac{P(0, t)}{P(0, T)} + B(t, T) F(0, t) - \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a}) B(t, T)^2$$

La estructura de la volatilidad en el modelo Hull y White está determinada tanto por  $\sigma$  como por  $a$ . Este modelo puede representar un mayor rango en la estructura de volatilidades que el modelo de Ho Lee.

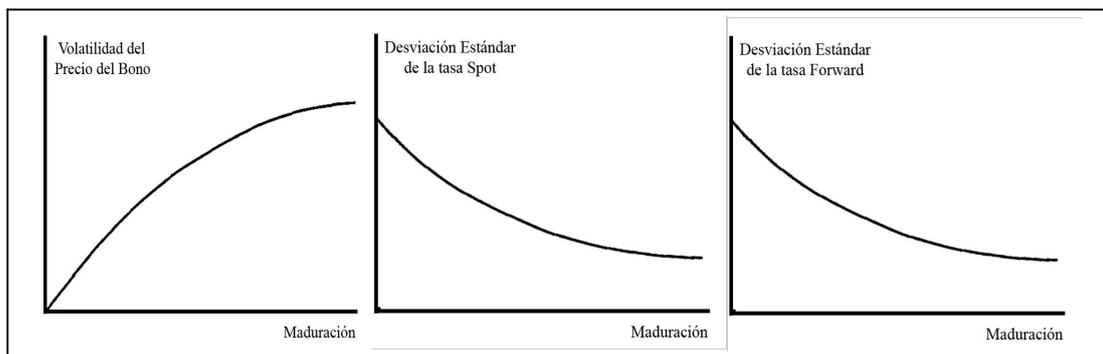
La volatilidad en el período  $t$  del Precio de un Bono Cero Cupón que madura en T es:

$$\frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(t-t)})$$

La desviación estándar instantánea en el período  $t$  de la tasa cero cupón con maduración en T es:

$$\frac{\sigma}{a(T-t)} (1 - e^{-a(T-t)})$$

El parámetro  $\sigma$  determina la desviación estándar de la tasa de interés instantánea. El parámetro de reversión,  $a$ , determina la tasa en que la volatilidad del precio del bono crece a medida que se acerca a maduración y la tasa en que la desviación estándar de la tasa de interés decrece en el tiempo, como lo muestra la siguiente gráfica:



**Gráfica 3.1** Comportamiento de los parámetros de volatilidad en el modelo Hull y White

Hay que destacar que el factor *mean reversion* permite corregir crecimientos o decrecimientos descontrolados por parte de la tasa. El coeficiente reduce la probabilidad de tasas negativas, aunque no elimina completamente esta posibilidad. Sin embargo, aunque esta característica presenta una desventaja para el modelo, el Modelo de Hull y White provee un balance entre buenas valoraciones de derivados de tasas de interés, sencillez y tratabilidad analítica, justificando la elección de este modelo para el desarrollo de nuestra investigación.

## CAPÍTULO IV

### ÁRBOL TRINOMIAL HULL Y WHITE

#### 4.1 Introducción

Una vez modelado la dinámica estocástica (comportamiento en el tiempo) de la tasa de interés es necesario el uso de Métodos de Valoración Numéricos para hallar los precios de instrumentos derivados. En nuestro caso de estudio, la naturaleza de redención anticipada libre u opción americana del Vebono hace que no haya una solución analítica para su valoración. Los métodos numéricos son técnicas computacionales que permiten aproximar el resultado de un problema cuando una solución analítica no es fácil de calcular.

Los tres métodos o técnicas más conocidos son:

- ***Finite Difference Methods***: Son usados en su mayoría para valorar opciones de estilo americanas y *path dependents*, sin embargo son muy difíciles de implementar y su uso se ha abandonado en los últimos años.
- ***Monte Carlo***: para su efectiva implementación requiere de dos factores que a su vez son sus principales desventajas. Métodos para generar *good simple paths* y gran tiempo para su aplicación.
- ***Lattice o Árboles***: Es el método más simple de implementar y se considera como un intermedio ente los dos métodos anteriores ya que posee características propias que lo conecta tanto con Monte Carlo como con *Finite Difference Methods*.

En los últimos años el método lattice ha sido vital para el mercado de derivados, especialmente para aquellos instrumentos dependientes de la tasa de interés. Varios académicos incluso han presentado distintas versiones de árboles, entre ellos Black Derman Toy, Schmidt y el Árbol de Hull y White (1994). Este último posee la ventaja de ser relativamente más sencillo de implementar y mucho más eficiente en su aplicación desde un punto de vista computacional, además que tiene la capacidad de adaptarse a otros modelos de tasas de interés distintos al de Hull y White, principalmente el de Ho-Lee y Black-Karisinski. Es por ello que el método de Valoración Numérico elegido en esta investigación para valorar Vebonos sujetos a Redención Anticipada es el Árbol de Hull y White.

Este capítulo ilustra el procedimiento numérico de los Árboles Trinomiales desarrollado por Hull y White y explica cómo el modelo puede ser calibrado a la data del mercado para valorar opciones de tasas de interés. En la sección 4.2 definimos lo que es un árbol de tasas de interés y sus diferencias con los árboles de precio de acciones. Se presenta e ilustra detalladamente mediante dos etapas el árbol trinomial Hull y White. Finalizamos construyendo un árbol que simula la dinámica estocástica de las tasas y ajustándose a las cotizaciones del mercado mediante data hipotética.

## 4.2 Árbol Hull y White (*Hull & White Tree*)

Un árbol de tasas de interés, con el mismo principio de un árbol del precio de una acción, es una representación en tiempo discreto del proceso estocástico que sigue la tasa a corto plazo. El objetivo principal de un árbol es modelar el valor de la variable en cada momento del tiempo o *time step* para así calcular el valor en el nodo inicial. Este procedimiento se conoce como *backward induction*.

La principal diferencia entre un árbol del precio de una acción y uno de tasas de interés es la manera en que se descuenta los valores futuros. En el de una acción usualmente se asume que es igual siempre. En el de tasas de interés el descuento varía en cada momento. Otra diferencia es el uso de una rama o *branch* adicional en el de tasas de interés. Un

*trinomial tree* a diferencia de un *binomial tree* utilizado en la valoración de acciones, puede representar mejor características propias de las tasas de interés como el *mean reversion*.

El procedimiento de Hull y White se basa en crear un árbol que es simétrico al valor esperado de la variable, en este caso, la tasa de interés. La implementación se divide en dos etapas. Una primera donde se crea un árbol “preliminar” que simula no la dinámica estocástica de la tasa sino la proporción de la misma, además de fijar los valores máximos y mínimos que pueda tener en el tiempo. Esto se logra limitando el comportamiento en cada momento a sólo tres posibles formas o *branching methods* y cuyas probabilidades cumplan el valor esperado y la varianza de la tasa de interés en cada intervalo de tiempo. La segunda etapa calibra el árbol ajustándolo a las tasas de interés del mercado del momento de tal manera que sea consistente con la estructura temporal inicial.

### ***Primera Etapa (First Stage)***

La primera etapa en la implementación del árbol es la construcción de un árbol para la variable  $R^*$  cuyo valor inicial es cero y sigue el siguiente proceso:

$$dR^* = -a \cdot R^* dt + \sigma dz$$

donde  $R^*$  es la tasa para el período  $\delta t$ .

Es fácil observar que el proceso que sigue esta variable es igual al de la tasa  $R$  del modelo Hull y White, sólo omitiendo la variable que explica la dirección en que la tasa se mueve en el tiempo y que asegura que el modelo se consistente con la estructura temporal inicial,  $\theta(t)$ . Según Hull y White, la tasa  $R$  sigue el siguiente proceso:

$$dR = [\theta(t) - a \cdot R] dt + \sigma dz^8$$

Para construir el árbol se necesita especificar los siguientes valores:

---

<sup>8</sup> Este proceso será igual al modelo original para la tasa de interés instantánea  $r$  ( $dr = [\theta(t) - a \cdot r] dt + \sigma dz$ ) en el límite que  $\delta t$  tienda a cero.

1. Step Up y sep down
2. Probabilidad up, down y medium.
3. Para que el árbol corresponda a la dinámica aleatoria propuesta por Vasicek y Hull y White, precisamos que el valor esperado y la varianza del cambio en  $R^*$  sobre el próximo intervalo de tiempo es  $R^*(t) \cdot M$  y  $V$  respectivamente <sup>9</sup>.

Ahora bien, especificamos cada unidad de tiempo como  $\delta t$  y cada salto de la tasa como  $\delta R$ , donde:

$$\delta R = \sigma \sqrt{3 \delta t}^{10}$$

donde este valor es una buena elección desde el punto de vista de minimización de error.

Definiremos  $(i, j)$  como el nodo donde  $i = t/\delta t$  y  $j = R^*/\delta R$ . La variable  $i$  es un número entero positivo y  $j$  es un número entero positivo o negativo.

El *branching method* usado en cada nodo debe conducir a que las probabilidades de las tres ramas o *branches* sean positivas. Describiremos tres tipos de *branching methods*.

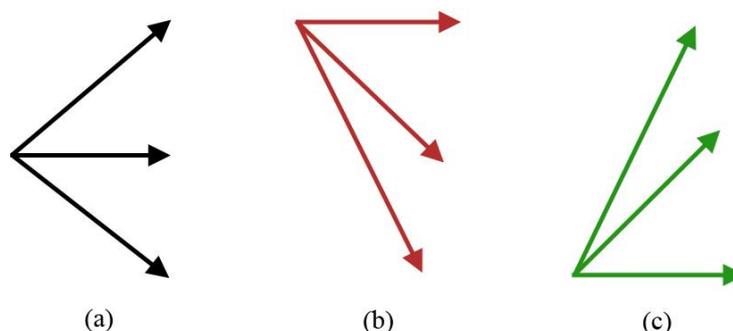
- a. El usual que consiste en “un step arriba/un step neutral/un step abajo”.
- b. Un segundo apropiado para valores muy altos y donde el factor *mean reversion* sea positivo: “un step neutral/un step abajo/dos steps abajo”.
- c. Un tercero apropiado para valores muy bajos y donde el factor *mean reversion* sea negativo: “dos steps arriba/un step arriba/un step neutral”.

La gráfica 4.1 ilustra los *branching methods*.

---

<sup>9</sup>  $M = e^{-a\Delta t} - 1$ ;  $V = \sigma^2 \frac{(1 - e^{-2a\Delta t})}{2a}$

<sup>10</sup> La fórmula exacta que plantea Hull y White es  $\sqrt{3M}$ . Sin embargo utilizamos la anterior en esta sección con fines ilustrativos.



Gráfica 4.1 Branching Process

Definimos  $j_{max}$  como aquel valor de  $j$  en el que cambiamos del *branching a* al *b* y  $j_{min}$  como aquel valor de  $j$  donde cambiamos del *branching a* al *c*. Hull y White muestran que las probabilidades siempre son positivas si definimos  $j_{max}$  como el número entero menor más grande que  $[1 - \sqrt{(2/3)}]/(a \cdot \delta t) \approx 0.184/(a \cdot \delta t)$ .

Cada tipo de *branching* posee una distribución de probabilidades distintas. Definimos  $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$  respectivamente como las probabilidades arriba (up), medio (medium) y abajo (down), de cada *branch* del nodo. Las probabilidades son escogidos de tal manera que igualen el Valor Esperado y la Varianza del cambio de  $R^*$ . Junto con el principio de que la suma de las probabilidades es la unidad, esto nos lleva a un sistema de tres ecuaciones:

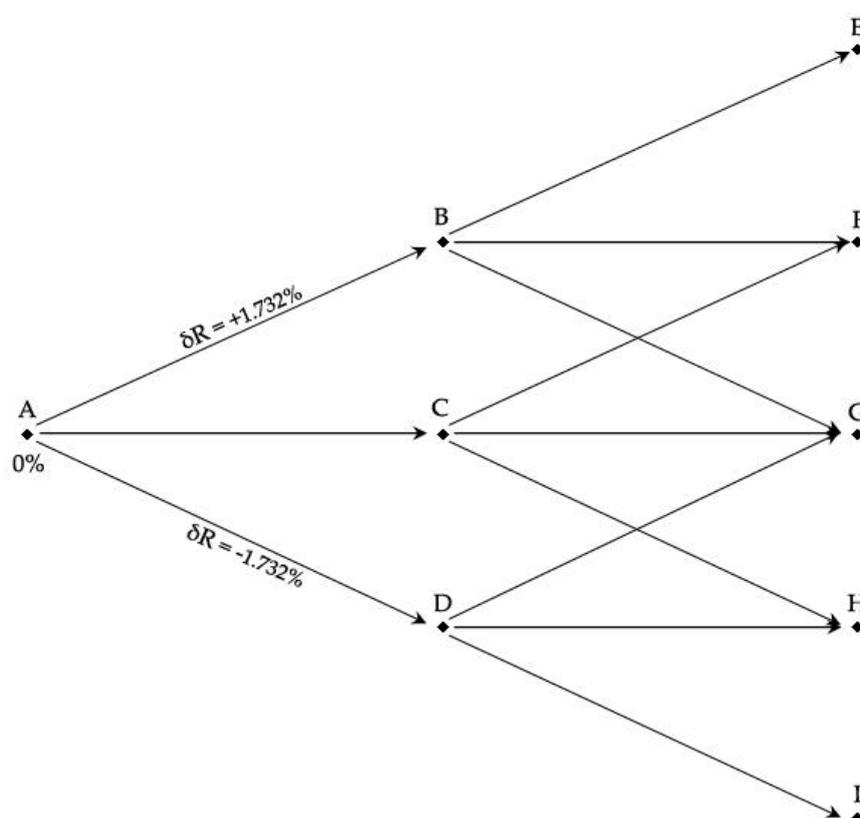
$$\begin{aligned}
 p_u \delta R - p_d \delta R &= R(t) (e^{-a\Delta t} - 1) && \text{Valor Esperado} \\
 p_u \delta R^2 - p_d \delta R^2 &= \sigma^2 \frac{(1 - e^{-2a\Delta t})}{2a} && \text{Varianza} \\
 p_u + p_m + p_d &= 1 && \text{Unidad de las probabilidades}
 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuación, Hull y White calculan las probabilidades asociadas a cada *branching process*, cuya solución para los *branch methods a, b y c* respectivamente son:

$$\begin{array}{lll}
 p_u = \frac{1}{6} + \frac{j^2 M^2 + jM}{2} & p_u = \frac{7}{6} + \frac{j^2 M^2 - 3jM}{2} & p_u = \frac{1}{6} + \frac{j^2 M^2 - jM}{2} \\
 p_m = \frac{2}{3} - j^2 M^2 & p_m = -\frac{1}{3} - j^2 M^2 - 2jM & p_m = -\frac{1}{3} - j^2 M^2 + 2jM \\
 p_d = \frac{1}{6} + \frac{j^2 M^2 - jM}{2} & p_d = \frac{1}{6} + \frac{j^2 M^2 - jM}{2} & p_d = \frac{7}{6} + \frac{j^2 M^2 - 3jM}{2}
 \end{array}$$

Es importante resaltar que las probabilidades que definen el árbol no se establecen en base a las expectativas del modelador, sino que se derivan de un sistema de ecuación definido bajo un ambiente de risk neutral valuation. Esta primera etapa puede ser ilustrada mediante la gráfica 4.2.

Gráfica 4.2 Árbol para  $R^*$  en el modelo Hull-White (primera etapa).



Nodo:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$R^*$	0.000%	1.732%	0.000%	-1.732%	3.464%	1.732%	0.000%	-1.732%	-3.464%
$p_u$	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
$p_m$	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
$p_d$	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

$$\sigma = 0.01; a = 0.1; \delta t = 1 \text{ año}; \delta R = \sigma\sqrt{3} = 0.01732; j_{\max} = \text{entero inmediato a } 0.184/0.1 = 1.84 \rightarrow 2; j_{\min} = -2$$

Observemos que las probabilidades en cada nodo dependen sólo de  $j$ . Por ejemplo las probabilidades en el nodo **B** son las mismas que en el nodo **F**. Más aún, el árbol es simétrico. Las probabilidades en el nodo **D** es el espejo de las probabilidades del nodo **B**.

### *Segunda Etapa (Second Stage)*

La segunda etapa consiste en ajustar el árbol de  $R^*$  para  $R$ . Esto se logra desplazando los nodos en el árbol  $R^*$  de tal manera que se adapten exactamente a la estructura temporal de tasas de interés inicial.

Para ajustar el árbol, Hull y White adaptan el árbol de la etapa 1 de tal manera que su estructura sea cónsone con el precio de algunos bonos del mercado.

El procedimiento es el siguiente. Se establecen que las tasas de interés en el árbol- $R$  en el momento  $i.\delta t$  son iguales a las tasas correspondientes al árbol- $R^*$  más un valor  $\alpha$  en el mismo momento  $i.\delta t$ , manteniendo las probabilidades igual.

Especificamos que  $\alpha$  sigue el siguiente proceso:

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t)$$

porque

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz$$

y

$$dR^* = -aR^* dt + \sigma dz$$

se deduce que

$$d\alpha = [\theta(t) - a\alpha(t)]dt$$

Definimos  $\alpha_i$  como  $\alpha(i.\delta t)$ , el valor de  $R$  en el momento  $i.\delta t$  del árbol- $R$  menos el correspondiente valor de  $R^*$  en el momento  $i.\delta t$  del árbol- $R^*$ . Definimos  $Q_{i,j}$  como el valor presente de activo que paga Bs. 1 si el nodo  $(i,j)$  se alcanza u Bs. 0 de manera contraria.

### *Ilustración de la Segunda Etapa*

Supongamos que la estructura temporal de tasas de interés viene determinado por el rendimiento de los bonos cero cupón con distintas fechas de maduración, tal como lo muestra la tabla 4.3.

<i>Maduración</i>	<i>Tasa (%)</i>
0.5	3.430
1	3.824
1.5	4.183
2	4.512

**Tabla 4.3**  
**Tasas cero cupón hipotéticas**

El valor presente del pago de Bs. 1 el día de hoy es 1 ( $Q_{0,0} = 1$ ). El valor de  $\alpha_0$  se iguala a la tasa de interés del período  $\delta t$ . Si  $\delta t = 1$ ,  $\alpha_0 = 3.824\%$ . Este valor define la posición inicial del nodo en el *árbol-R*. El siguiente paso es calcular los valores de todos los Q para el siguiente *time step*.

Hay una probabilidad de 0.1667 que el nodo (1,1) se alcance y la tasa para el primer *time step* es 3.824%. De esta manera:

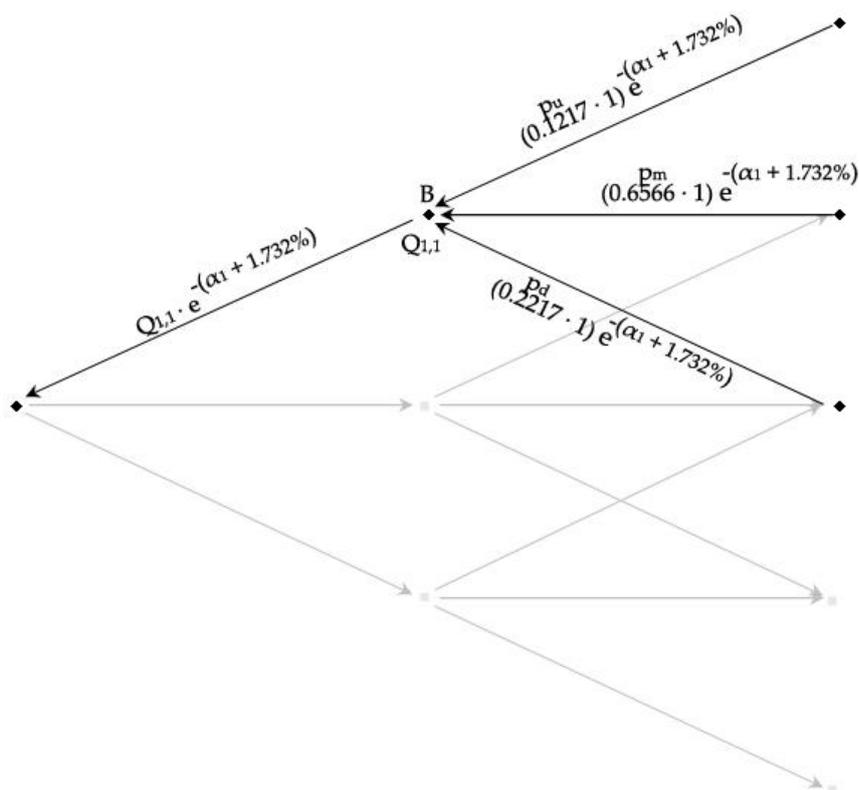
$$Q_{1,1} = (0.1667 \times 1) e^{-3.284\% \cdot 1} = 0.1604$$

Similarmente:

$$Q_{1,0} = 0.6417$$

$$Q_{1,-1} = 0.1604$$

El siguiente paso es calcular el precio “correcto” de un bono cero cupón que madura en el momento  $2\delta t$ . El valor de este bono visto en el nodo B se calcula siguiendo el proceso que se ilustra en la siguiente gráfica.



Gráfica 4.3 Backward Induction de un Pure Discount Bond

Análogamente, el precio de este bono visto en C es igual a  $e^{-(\alpha_1 + 0)}$  y en el nodo D es  $e^{-(\alpha_1 - 1.732\%)}$ . El precio visto en el nodo inicial A es el siguiente:

$$Q_{1,1} \cdot e^{-(\alpha_1 + 1.732\%)} + Q_{1,0} \cdot e^{-(\alpha_1 + 0)} + Q_{1,-1} \cdot e^{-(\alpha_1 - 1.732\%)}$$

El término correcto definido anteriormente se refiere a que este bono debe valer igual al valor presente de Bs. 1 descontado a la tasa de la estructura temporal de tasas de interés:  $e^{-(4.512\% \cdot 2)} = 0.9137$

Sustituyendo los valores de Q, obtenemos el valor  $\alpha$

$$0.1604 \cdot e^{-(\alpha_1 + 1.732\%)} + 0.6417 \cdot e^{-(\alpha_1 + 0)} + 0.1604 \cdot e^{-(\alpha_1 - 1.732\%)} = 0.9137$$

despejando  $\alpha_1$ , obtenemos que su valor es 0.05205.

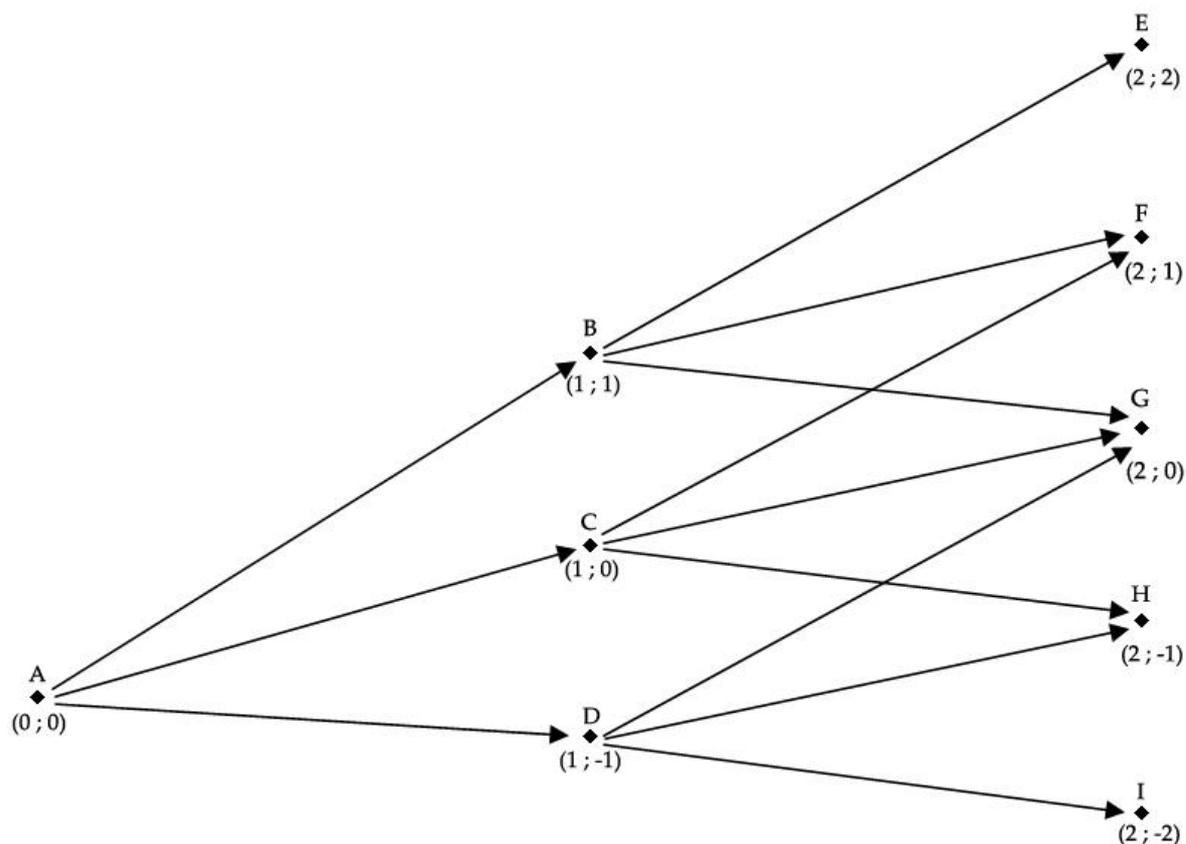
De esta manera, los nodos en el momento  $\delta t$  del *árbol-R* poseen las siguientes tasas:

$$B = \alpha_1 + \delta R = 5.205\% + 1.732\% = 6.937\%.$$

$$C = \alpha_1 = 5.205\%.$$

$$D = \alpha_1 - \delta R = 5.205\% - 1.732\% = 3.473\%.$$

Si hacemos el mismo procedimiento para todos los distintos momentos del tiempo obtenemos el *árbol-R* calibrado, tal como lo ilustra la siguiente gráfica.



Nodo:	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$R$	3.824%	6.937%	5.205%	3.473%	9.716%	7.984%	6.252%	-4.520%	2.788%
$P_u$	0.1667	0.1217	0.1667	0.2217	0.8867	0.1217	0.1667	0.2217	0.0867
$P_m$	0.6666	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266	0.6566	0.6666	0.6566	0.0266
$P_d$	0.1667	0.2217	0.1667	0.1217	0.0867	0.2217	0.1667	0.1217	0.8867

Gráfica 4.4 Árbol para  $R$  en el modelo Hull-White (segunda etapa)

## CAPÍTULO V

### APLICACIÓN DEL ÁRBOL HULL y WHITE

#### 5.1 Introducción

La aplicación del árbol trinomial de Hull y White se llevó a cabo en el software Mathematica 5.0, mediante algoritmos computacionales basados en el trabajo de Leippold y Wiener (2000) junto con modificaciones elaboradas por Gonzalo Paredes<sup>11</sup>. Este trabajo presenta una serie de códigos que implementa los fundamentos teóricos detrás del modelo de tasas de interés junto con la metodología de los árboles trinomiales de Hull y White (1994) presentada en el capítulo anterior, haciendo posible la modelación de la dinámica estocástica de las tasas, valorar el precio de un Vebono tomando en cuenta la flotabilidad de su cupón y estimar el precio para la opción implícita en un Vebono con redención anticipada.

En la sección 5.2 especificaremos el conjunto de datos que calibraran nuestro modelo a las condiciones del mercado real venezolano haciendo posible nuestro análisis presentado en el Capítulo 6. La sección 5.3 dará una idea intuitiva detrás de la codificación de los algoritmos en Mathematica.

#### 5.2 Datos

Después de la implementación del código, se eligió una serie de parámetros y variables que encerraban la aplicación del árbol Hull y White ajustándolo a las condiciones del mercado financiero venezolano de tal manera de desarrollar nuestro análisis de valoración de opciones implícitas en los Vebonos Callable. Estos son:

---

<sup>11</sup> En el Anexo D se presenta dicho código.

### *El Vebono*

El Vebono elegido para su estudio fue el **Vebono102008**. Este Vebono presenta las siguientes características:

<b>Vencimiento</b>	<b>16 Octubre 2008</b>
<b>Plazo</b>	<b>107</b>
<b>Cupón</b>	<b>9.51%</b>
<b>Precio</b>	<b>107.425</b>

**Tabla 5.1 Características del Vebono al 16/09/2006**

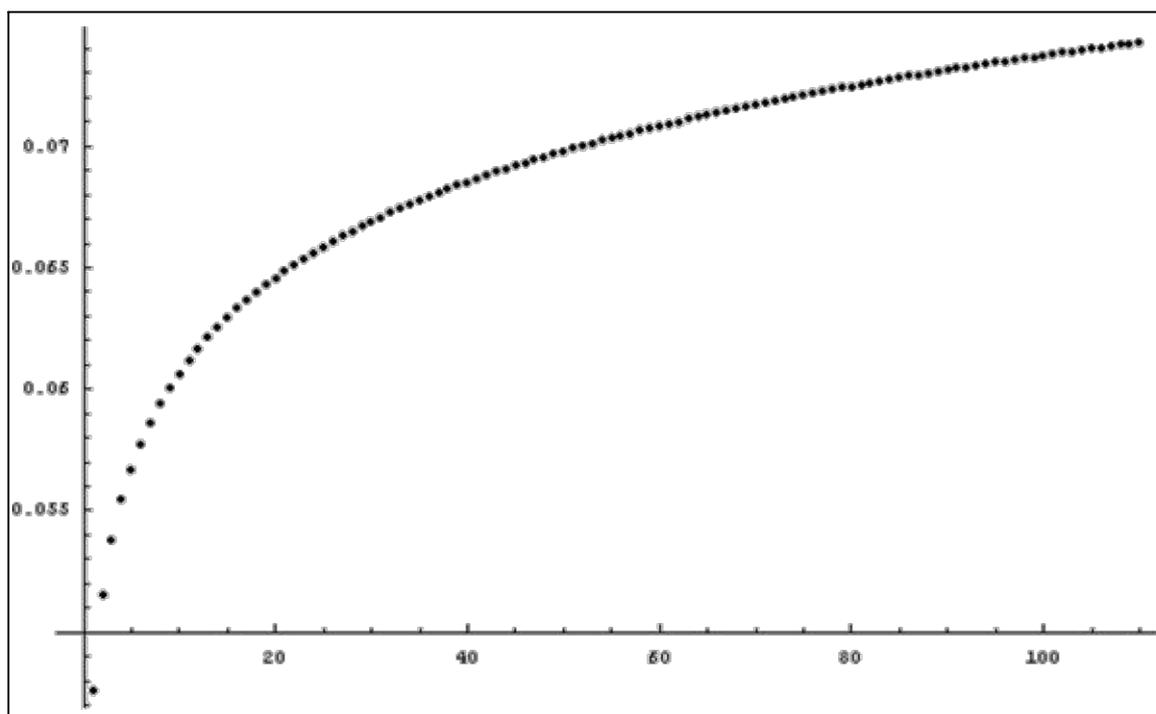
El año de vencimiento a mediano plazo de este Vebono en particular, da la posibilidad de que surtan efecto los distintos parámetros generando un estudio más amplio. A su vez su mes de vencimiento ilustra con mayor facilidad su comportamiento, tanto en precio como en cupones, debido a la proximidad con el momento en que se realizó esta tesis.

### *La yield curve*

Para la *yield curve* que definirá la dinámica estocástica de las tasas, se eligió dos escenarios distintos:

#### **1. Escenario de tasas estables (*yield curve flat*)**

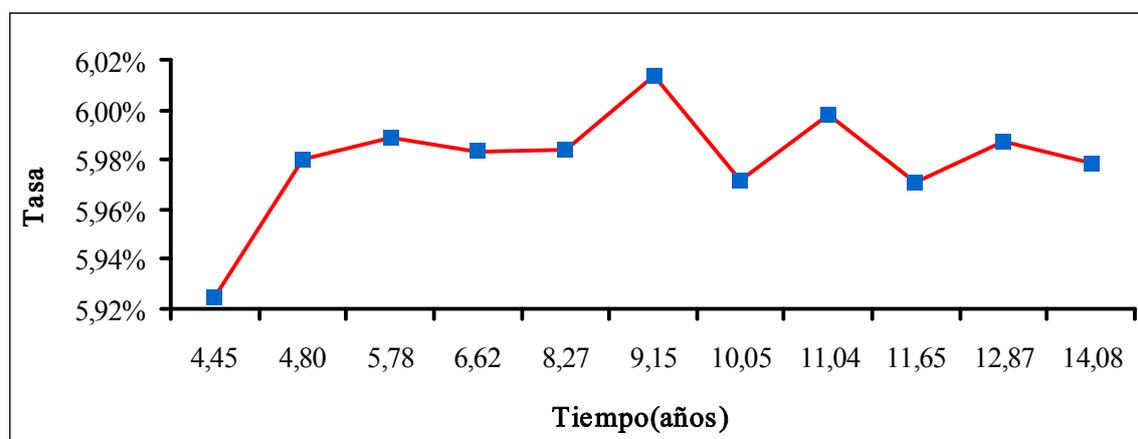
Esta *yield curve* plantea movimientos moderados en las tasas con respecto al escenario actual. Se puede interpretar como una coyuntura macroeconómica relativamente estable desde el presente a dos años en que se venza el Vebono seleccionado. La siguiente gráfica ilustra la estructura temporal de las tasas en este período bajo este escenario:



Gráfica 5.1 Escenario de tasas estables (*yield curve flat*).

$$i = 0.07 + 0.0056789 \ln [t]$$

La fórmula analítica que define esta *yield curve* es la polarización aproximada de los rendimientos a distintos plazos de los TIF para el 16 de septiembre de 2006:



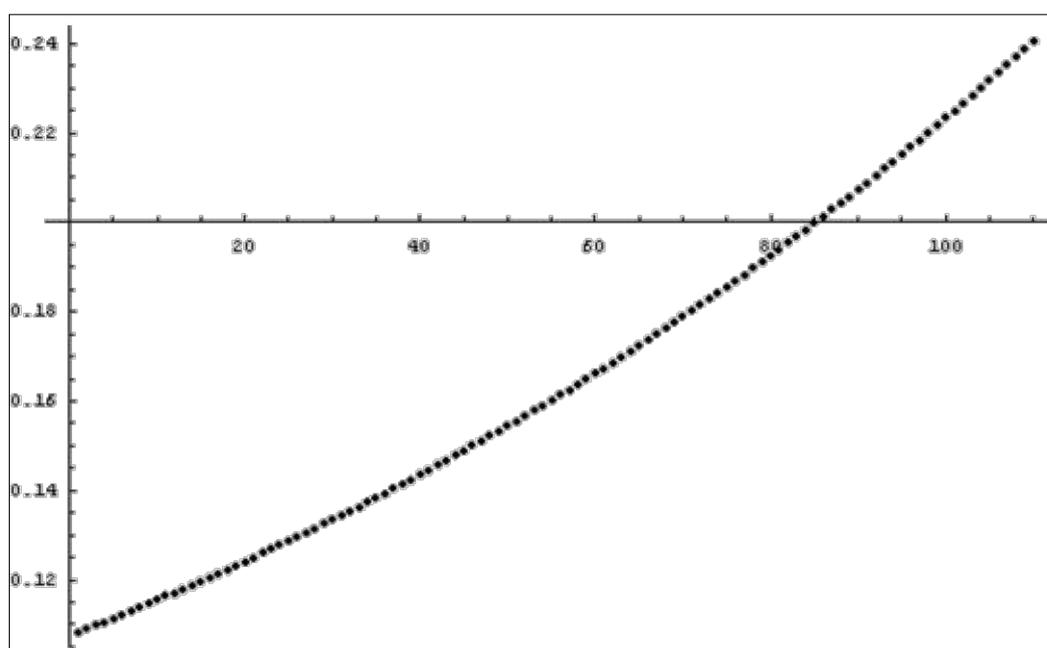
Gráfica 5.2 Rendimiento de los TIF a distintas maduraciones.

Cotización al 16/09/2006

## 2. Escenario de tasas crecientes (*yield curve upward*)

Esta *yield curve* expone movimientos crecientes en el nivel actual de tasas. Una posible explicación económica de esto sería una coyuntura relativamente inestable con presiones inflacionarias por un incremento en la demanda agregada o de la demanda monetaria por un aumento de la liquidez.

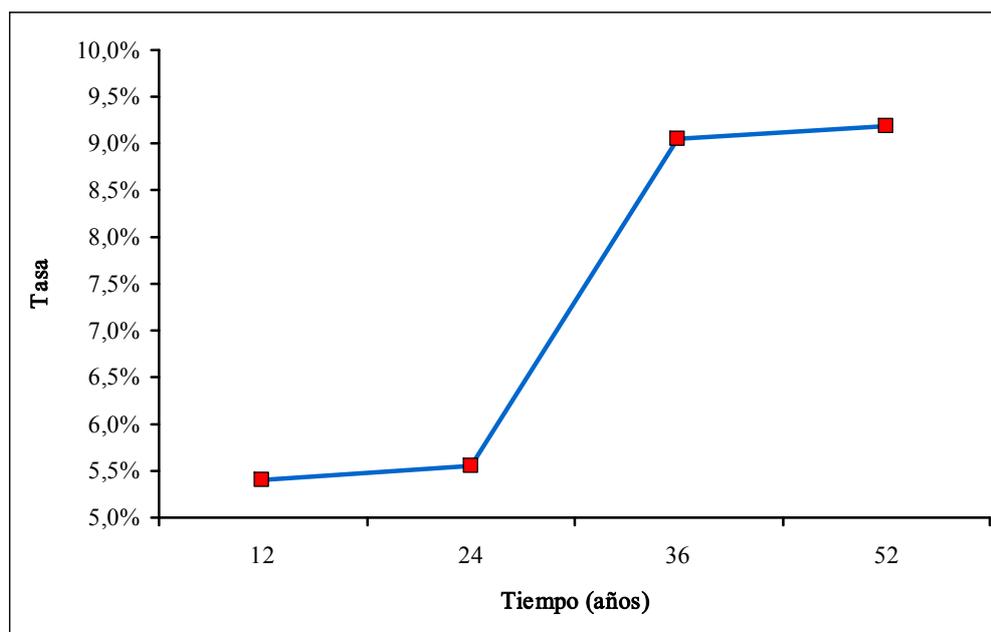
La siguiente gráfica ilustra la estructura temporal de las tasas en este período bajo este escenario:



Gráfica 5.3 Escenario de tasas crecientes (*yield curve upward*).

$$i = 0.075 + 0.10 e^{[0.40 t]}$$

La fórmula analítica que define esta *yield curve* es la polarización aproximada de los rendimientos a distintos plazos de las Letras del Tesoro a 91 días para el 16 de septiembre de 2006:



Gráfica 5.2 Rendimiento de las Letras del Tesoro a 91, 182, 273 y 365 días.  
Cotización al 16/09/2006

### *Los Períodos de Gracia*

El período de gracia o *lookout period* es aquel en que el mercado asume que el Estado no ejercerá la opción de redención anticipada o *call provision*. Los períodos asumidos serán:

Período de Gracia (años)	Período de Gracia (semanas)
0	0
En este caso se asume que el Estado puede ejecutar el <i>call provision</i> inmediatamente.	
0.5	26
1	52
1.5	78
2	104
Debido que la fecha de maduración del Vebono escogido es aproximadamente a 2 años de hoy, este período de gracia equivale a asumir que el bono no posee <i>call provision</i> .	

### ***Volatilidad***

El parámetro de volatilidad sobre las tasas de interés  $\sigma$ , se estimó como la desviación estándar de las tasas históricas desde el 2003 hasta el presente sobre las Letras del Tesoro a 91 días para el escenario de tasas crecientes, y sobre el promedio de las desviaciones típicas de los rendimientos de los TIF actualmente en circulación para el escenario de tasas estables.

### ***Reversión a la Media***

El parámetro de mean reversión  $a$ , se estimó como una proporción de 10 veces la volatilidad para cada escenario<sup>12</sup>.

## **5.3 Intuición del Código**

La codificación mediante una serie de *inputs* o valores escogidos por el usuario genera tres *outputs* en forma de árboles trinomiales. Uno explicando la dinámica estocástica de las tasas de interés; otro con los precios esperados del Vebono hasta su maduración, tomando en cuenta la flotabilidad de su cupón pero sin asumir su *call provision* o redención anticipada (*Vebono Non Callable*); y un último igual al anterior pero incluyendo la posibilidad que el Estado ejerza la opción para distintos períodos de gracia. Los *inputs* definidos por el usuario son aquellas variables detrás del modelo de árboles trinomiales que hacen posible adaptar el modelo a los precios y condiciones del mercado real. Estos *inputs* son:

- Estructura Temporal de tasas de interés (*yield curve*)
- Factor de *Mean Reversión (a)*
- Volatilidad de las tasas de interés ( $\sigma$ )
- Vencimiento del Vebono ( $t$ )
- Cupón del Vebono (*Cupón*)
- *Call Rule*
- Período de gracia

---

<sup>12</sup> Destacamos que estos cálculos no son los más adecuados para aproximaciones reales, sin embargo se hará un análisis de sensibilidad del Precio del Vebono para distintos valores de  $\sigma$  y  $a$ .

Ahora bien, ¿cómo se valora el precio del Vebono tomando en cuenta la flotabilidad de los cupones y el precio de la Opción Americana de tipo Bermuda implícita en el Vebono? Al conocerse los valores de ambos instrumentos en el vencimiento, Mathematica aplica el principio explicado en el Capítulo 3 de *backward induction*. Los valores en cada nodo se descuentan a una tasa específica tal como lo describe el árbol que la modela, de tal manera de llegar a una solución numérica y valorando el precio del Vebono en un momento presente.

Para el cálculo de la Opción se realiza el mismo principio pero adicionándole un algoritmo que aplique el *call rule* explicado en el Capítulo 1. Detalladamente en cada nodo el algoritmo escoge el valor mayor entre el precio del Vebono y el precio esperado que tendrá en el *time step* siguiente. De esta manera se aplica el *call rule* en cada momento: el Estado evalúa entre ejercer la opción y obtener una ganancia de  $p^* - c$ ; o no ejercerla con la esperanza de que esta ganancia sea potencialmente mayor en el futuro. En otras palabras, el programa en cada aniversario del cupón aplica el *call rule*, siguiendo la siguiente regla:

**Valor Máximo (Precio de Mercado ; Valor Esperado del Precio en el próximo semestre)**

El cual equivale a decir que el Estado en cada nodo elige:

<b>Valor Máx.</b>	<b>( Ejercer la Opción ; No ejercer la Opción)</b>
con una ganancia igual a la diferencia del Precio del Mercado sobre 100	con la esperanza de obtener una ganancia mayor ejerciéndola el próximo semestre

En el siguiente capítulo mostramos estos resultados.

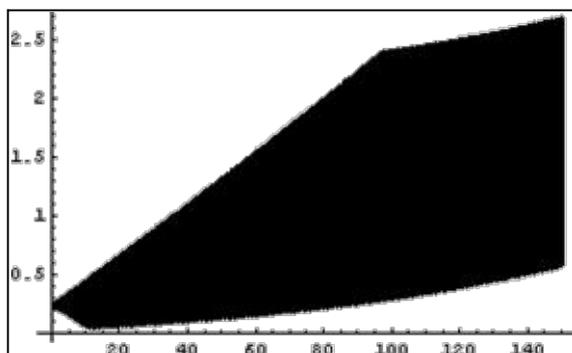
## CAPÍTULO VI

### ANÁLISIS DE RESULTADOS

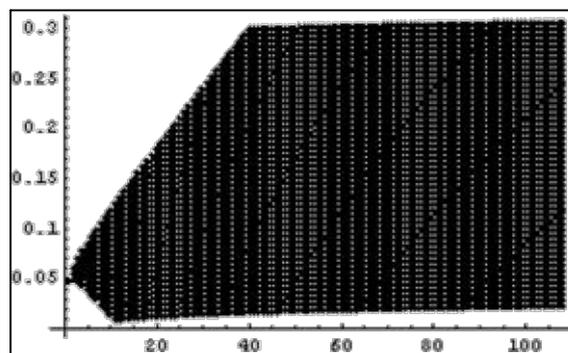
A continuación se presentan los resultados arrojados por el modelo Hull y White (1990) programado en Mathematica. En la sección 6.1 se exponen los resultados que demuestran la sobrevaloración de los Vebonos Callable en el mercado financiero venezolano. Luego en la sección 6.2 analizamos el comportamiento del precio de la opción de compra y su sensibilidad con respecto a diferentes períodos de períodos de gracia (*loockout period*). Posteriormente en la sección 6.3 se analiza el precio de un Vebono en función al período de gracia. Finalmente en la sección 6.4 explicamos como influyeron los parámetros de *mean reversion a* y volatilidad  $\sigma$ , en los precios de los Vebonos.

#### 6.1 Valoración del Vebono Callable

Los cupones y la tasa de descuento dependen de la estructura temporal que tendrán las tasas de interés hasta el Vencimiento del Vebono. Esta es representa por el árbol de tasas Hull y White construido bajo dos escenarios distintos explicados anteriormente: uno para tasas estables *flat* y otro para tasas crecientes o *upward*, ambas graficadas a continuación:



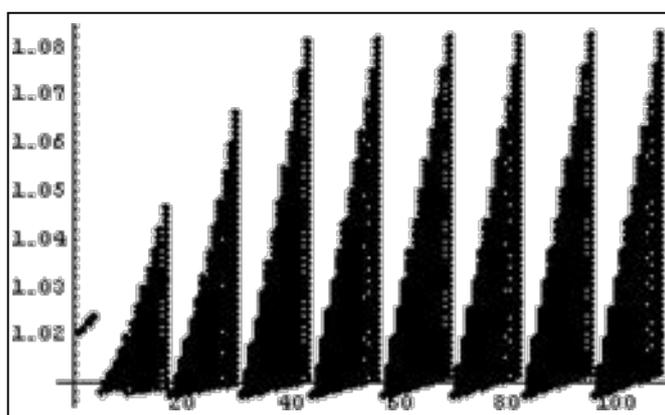
Gráfica 6.1 Árbol de Tasas  
en escenario Flat



Gráfica 6.2 Árbol de Tasas  
.....en escenario Upward

Para un determinado escenario de tasas, el precio esperado del Vebono tendrá valores conocidos en cada aniversario del cupón<sup>13</sup> y desconocidos para cualquier otro momento, especialmente el instante anterior antes del pago del cupón y a su vez para períodos más lejanos.

La gráfica 6.3 ilustra el precio esperado en el presente que tomará el Vebono a lo largo del tiempo hasta su maduración, bajo un escenario de tasas flat con una  $\sigma$  de 2.4%, un  $a$  de 25% y sin período de gracia:



**Gráfica 6.3 Precio Esperado del Vebono.**  
 $\sigma=2.4\%$  ;  $a = 25\%$  ; período de gracia = 0

Para períodos muy lejanos o cerca de la fecha de maduración, el rango de precios que puede tomar el Vebono es mayor a períodos más cercanos donde la tasa y a su vez el precio del instrumento son menos desconocidos. En cada aniversario del cupón, el precio se hace conocido y por lo tanto el rango de posibles precios debe ser desde casi único para períodos muy cercanos al presente, a rangos más grandes para períodos muy cercanos al vencimiento del bono. Esto se evidencia en la gráfica anterior por los precios esperados en forma de “velas”, con vértices más definidos y de menor altura para los precios más cercanos al presente.

<sup>13</sup> En teoría, en un *Floating Rate Bond* cuando se sabe el valor exacto del cupón, se conoce exactamente el precio del bono.

Ahora bien, los resultados obtenidos luego de realizar los diferentes cálculos bajo distintos escenarios y parámetros, reflejan *precios inferiores* a los cotizados hoy en día en el mercado financiero venezolano, tanto para los Vebonos No Callable (VNC) como para los Vebonos Callable (VC). Los resultados expuestos en las tablas 6.1 y 6.2 también reflejan que esta diferencia de precios, que puede llegar a ser de hasta 5 %, es causada principalmente por no tomar en cuenta el valor de la opción de compra que posee el Vebono en estudio.

**Tabla 6.1 Escenario Estable (*Flat Yield Curve*)**

<i>Período de Gracia</i>	<i>Ahora</i>	<i>6 meses</i>	<i>1 año</i>	<i>1.5 años</i>	<i>Maduración</i>	
Precio de Mercado	Precio VNC	Precio VC	Precio VC	Precio VC	Precio VC	
107,425	106,746	102,06	103,376	104,558	105,6778	
<i>Δ Precios</i>	-0,632%	-4,994%	-3,769%	-2,669%	-1,626%	-0,633%

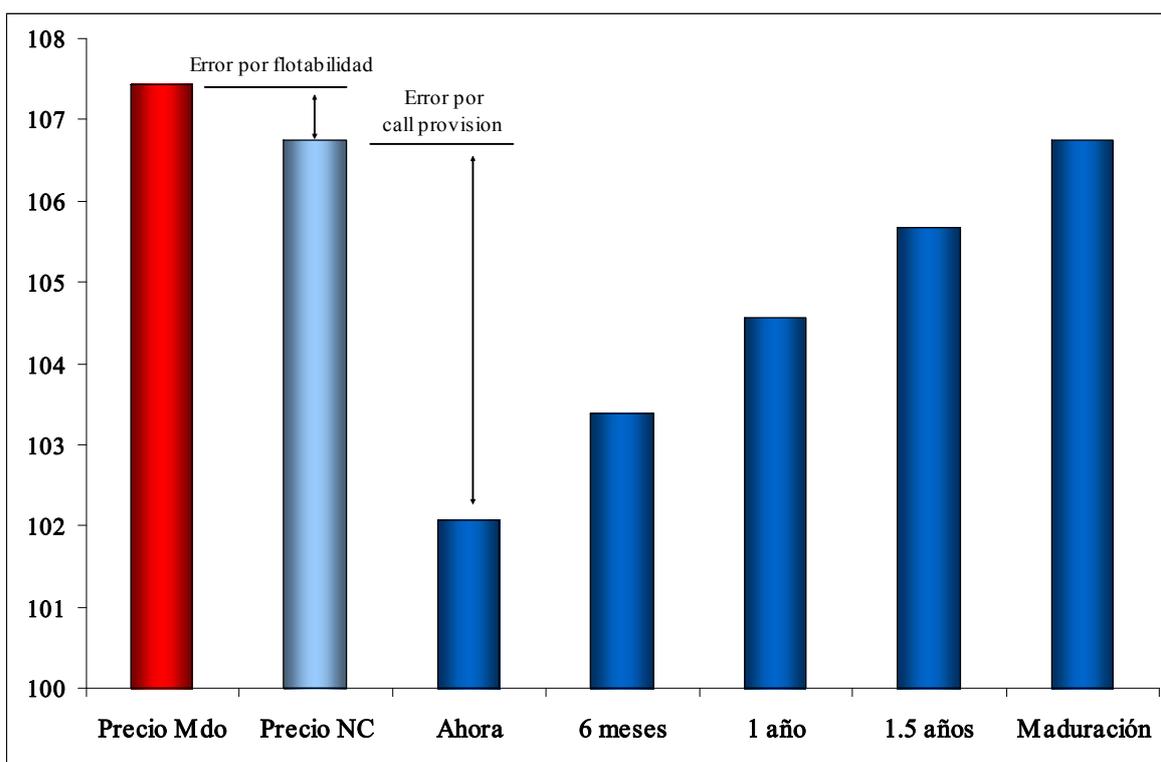
**Tabla 6.2 Escenario Tasas de Interés Crecientes (*Upward Yield Curve*)**

<i>Periodo de Gracia</i>	<i>Ahora</i>	<i>6 meses</i>	<i>1 año</i>	<i>1.5 años</i>	<i>Maduración</i>	
Precio Mercado	Precio VNC	Precio VC	Precio VC	Precio VC	Precio VC	
107,425	104,805	100,957	102,212	103,297	104,17	
<i>Δ Precios</i>	-2,439%	-6,021%	-4,853%	-3,843%	-3,030%	-2,443%

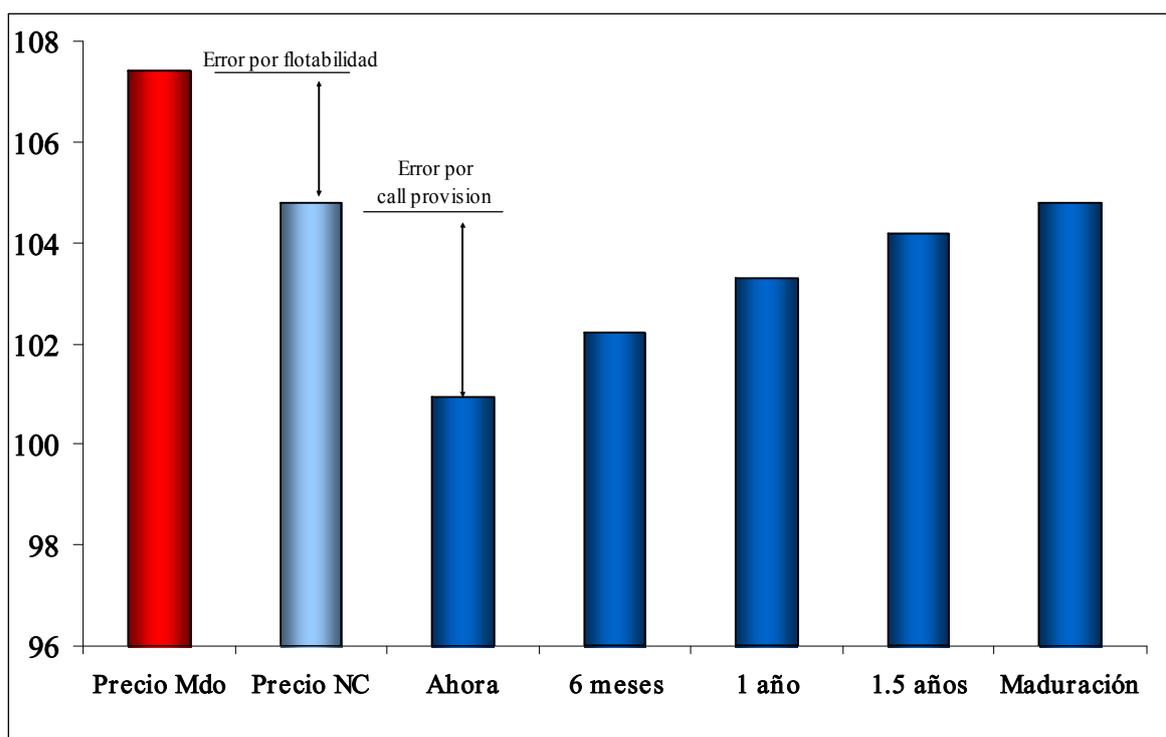
De estos resultados podemos resaltar dos aspectos muy importantes que causan la diferencia de precios entre el Vebono cotizado en el mercado y el VC calculado por el modelo. El primer aspecto y el de mayor relevancia en nuestra investigación es la omisión

por parte del mercado venezolano del valor de la opción de compra que se traduce en un riesgo que actualmente esta asumiendo el inversionista. El segundo aspecto que causa un *mispicing* en el mercado es el cálculo poco preciso de los cupones esperados a futuro. La diferencia entre el precio de mercado del VC y el precio del VNC refleja este error: 0.63% en un escenario estable hipotético de tasas y 2,44% en un escenario hipotético de tasas crecientes. Definimos que esta diferencia proviene de la diferencia entre el precio de mercado del VC y el precio del VNC como lo muestran las tablas 6.1 y 6.2.

Las gráficas 6.4 y 6.5 ilustran bajo estos escenarios, el error del mercado en la valoración del Vebono por omisión de la flotabilidad del cupón y por la omisión de la redención anticipada:



Gráfica 6.4 Precio del Vebono del Mercado, del Non Callable y del Callable con varios períodos de gracia, para un escenario de tasas flat.



Gráfica 6.5 Precio del Vebono del Mercado, del Non Callable y del Callable con varios períodos de gracia, para un escenario de tasas upward.

## 6.2 Comportamiento del Call Option

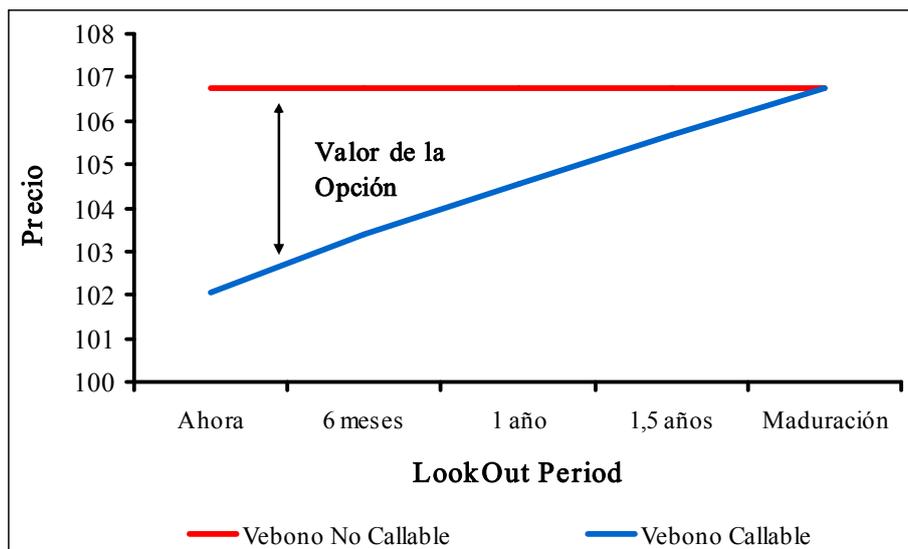
Los resultados demostraron que el valor de la opción también dependerá del período de gracia. Mientras mayor sea este, el precio de la opción será menor y por lo tanto el precio del VC será mayor si falta mucho tiempo para su redención. Inversamente, será menor si la opción puede ser ejercida en el muy corto plazo (gráficas 6.6 y 6.7). Esta relación se aplica en escenarios de tasas de interés estables como en escenarios donde estas aumentan en el tiempo.

La lógica que explica la relación inversa entre el precio del *call option* y los períodos de gracia es sencilla. Si la opción puede ser llamada inmediatamente, el riesgo del inversionista (*Bond Holder*) será mayor, y este exigirá una prima mayor haciendo que el precio del Vebono Callable sea menor. En cambio si el inversionista compra el Vebono Callable hoy y el emisor (Estado) sólo puede redimirlo a partir de un año, el inversionista tiene primero más tiempo de renegociar el bono en el mercado sujeto a sus expectativas. Por otro lado a medida que el bono se acerque a su vencimiento su precio tiende a converger a su valor facial, por lo que la probabilidad de que el estado ejerza la opción es menor. En la tabla 6.3 se muestran los valores arrojados por el modelo bajo el escenario estable.

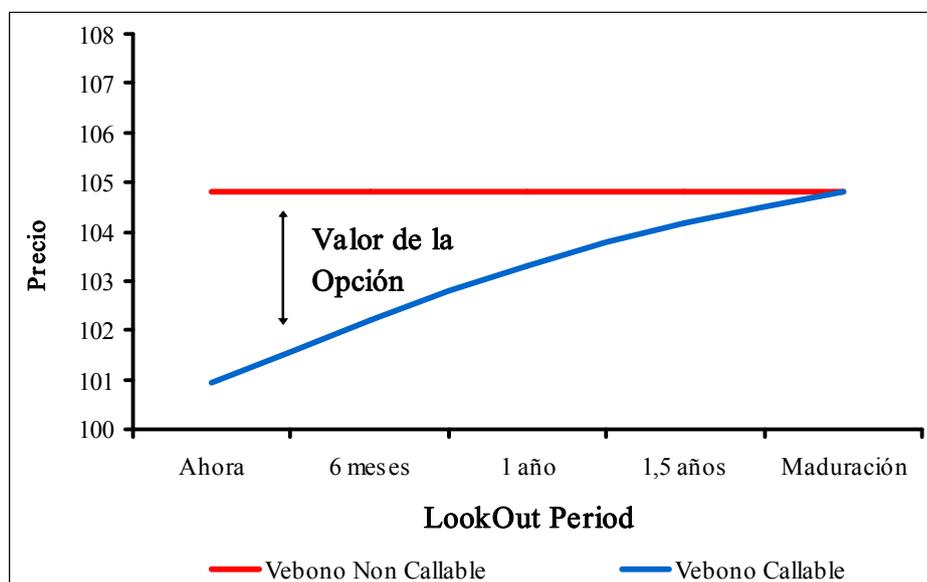
**Tabla 6.3 Escenario Estable (Flat Yield Curve)**

<i>Precio de Mercado:</i> 107.425	con $\sigma=2,4\%$ y $a=25\%$		
	<b>Vebono No Callable</b>	<b>Vebono Callable</b>	<b>Opción</b>
PG = 0	106,746	102,060	4,686
PG = 6 meses	106,746	103,376	3,370
PG = 1 año	106,746	104,558	2,188
PG = 1.5 años	106,746	105,678	1,0682
PG = 2 años	106,746	106,745	0,0001

En la gráfica 6.6 y 6.7 se muestra como el precio del Vebono Callable va convergiendo al precio del Vebono No Callable si el período de gracia es mayor, bajo distintos escenarios de tasas. Concluimos para este caso que vale igual un VC con un vencimiento y un período de gracia igual a 2 años, que un VNC que vence en 2 años.



Gráfica 6.6 Valor de la Opción en un escenario de Flat Yield Curve



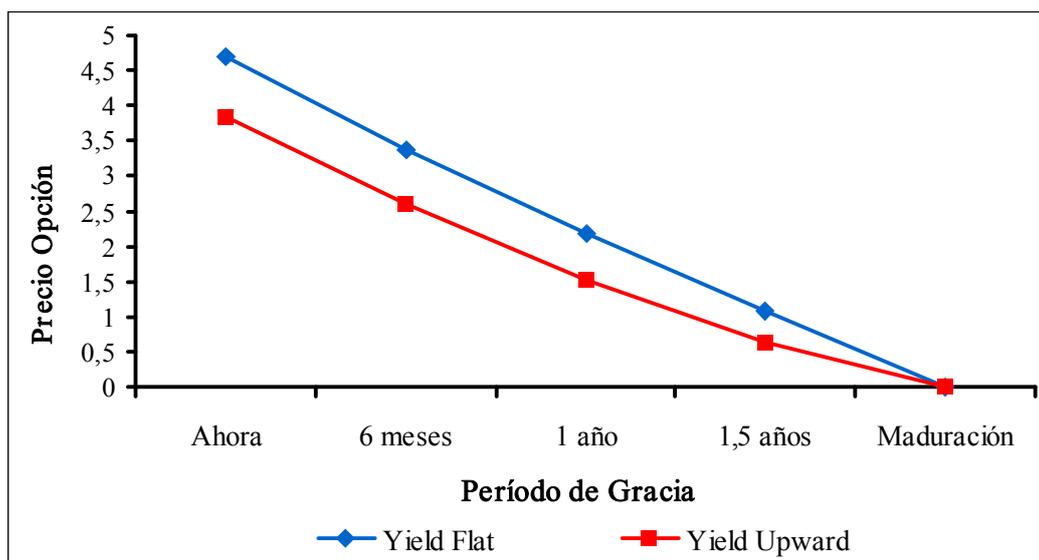
Gráfica 6.7 Valor de la Opción en un escenario de Upward Yield Curve

Ahora analizamos según los resultados obtenidos, cómo varía el precio de la opción del Vebono en un escenario de tasas de interés crecientes (*Upward yield curve*) y lo comparamos con los precios de las opciones en un escenario de tasas de interés estables (*Flat yield curve*).

**Tabla 6.4** Escenario de Tasas de Interés Crecientes (*Upward yield curve*)

<i>Precio de Mercado:</i> 107.425	<i>con <math>a = 10\%</math> y <math>\sigma = 8,22\%</math></i>		
<b>Período de Gracia</b>	<b>Vebono No Callable</b>	<b>Vebono Callable</b>	<b>Opción</b>
Ahora	104,805	100,957	3,848
6 meses	104,805	102,212	2,593
1 año	104,805	103,297	1,508
1,5 años	104,805	104,170	0,635
Maduración	104,805	104,801	0,004

Si observamos la tabla 6.3 y la comparamos con la tabla 6.4, deducimos que el precio de la opción de compra del Vebono en un escenario de tasas de interés crecientes será menor que en un escenario de tasas de interés estables. Decimos esto fundamentado en Fannie (2005): en un escenario donde se espera que los rendimientos aumenten en el tiempo (*upward yield curve*), la probabilidad de que el emisor (Estado) ejerza la opción de compra es menor reduciendo de esta manera la prima por riesgo de redención anticipada exigida por el inversionista. Esto se explica porque el riesgo de reinversión (*reinvestment risk*) al que está expuesto el inversionista (*Bond Holder*) es muy bajo, pues en un escenario de tasas altas los precios de los bonos tienden a bajar, y como en este caso el precio de mercado del Vebono está a descuento, el emisor (Estado) para poder redimirlos tendría que hacerlo a un precio más costoso ( $100\% >$  precio del mercado en que se demanda el bono), además de re-emitir la deuda con un cupón menor al anterior, aumentando de esta manera sus costos de endeudamiento. En el gráfico 6.8 se demuestra empíricamente que el precio de la opción del VC será menor en un escenario de *Upward Yield Curve* que en un escenario de *Flat Yield curve* ya que las expectativas de que la opción este “Out of the Money” con tasas de interés crecientes son mayores.

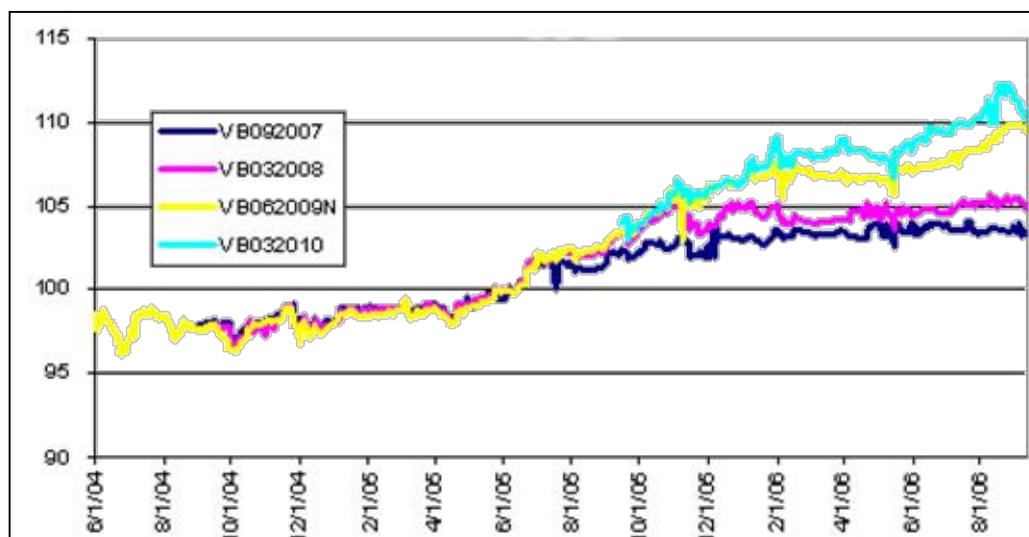


**Tabla 6.8** Comparación del Precio de la Opción en escenarios de tasas Flat y Yield para diferentes períodos de gracia.

Los resultados bajo este escenario (*Upward Yield Curve*) reflejaron precios menores para los Vebonos No Callable (VNC) y precios aún más bajos para los VC, comparados con los precios cotizados actualmente en el mercado, esto se puede observar en la tabla 6.4. Una explicación a esta caída en los precios se debe al supuesto de altas tasas de interés que se utilizó en este escenario, en donde una *yield curve* creciente implica dos cosas: 1) Los cupones para cada trimestre aumentarán su valor a medida que transcurre el tiempo, lo cual empuja el precio del bono hacia arriba y 2) si las tasas de interés van aumentando con el tiempo, se descontará cada cupón hasta el presente a una tasa más alta y este factor hace que el precio de los Vebonos disminuya.

Si hacemos un recuento histórico en el comportamiento del precio de los bonos y analizamos la grafica 6.9 podemos darnos cuenta de que para la fecha del 2004, los Vebonos se cotizaban a descuento y para mediados del 2005 se cotizaban a par (100%). Para el período (2004-2005) las letras del Tesoro a 91 días se encontraban entre un 14 % y 11 %, pero luego siguieron bajando las letras del tesoro y el precio del Vebono se empezó a cotizar a prima por varias razones. El argumento que se quiere mostrar es que ante un escenario en donde empiecen a crecer las tasas de interés (*Upward Yield Curve*) y lleguen a niveles como los del

2004 -2005, los precio del VC como del VNC debería disminuir, según los resultados obtenidos.

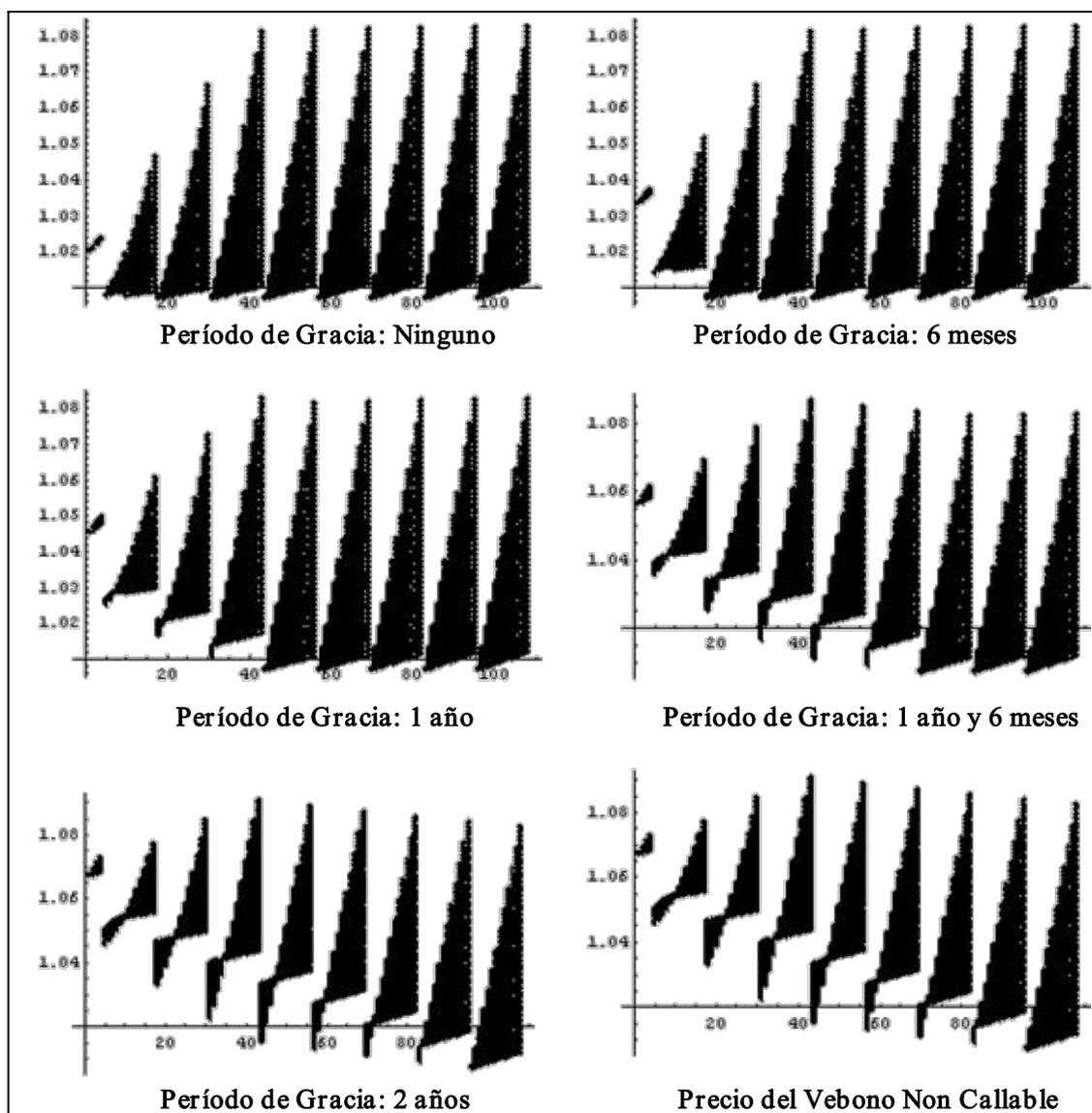


**Gráfica 6.9** Evolución de los precios históricos de los Vebonos con distintas maduraciones.

Fuente: Bloomberg

### 6.3 Sensibilidad del Precio del Vebono al Período de Gracia

Tal como se explicó en el Capítulo 1, a medida que aumenta la posibilidad de que el Estado recompre la deuda, menor será la capacidad de apreciación del Vebono Callable en un escenario de tasas bajas. Si el mercado percibe que el Estado ejercerá la opción, el precio del Vebono Callable será menor al precio del Non Callable. Por lo tanto a medida que aumenta el período de gracia, mayor será la apreciación del Vebono Callable hasta tal punto, que si el período de gracia es igual a la fecha de vencimiento del cupón (sería lo mismo que asumir que el Estado nunca ejercerá la opción) el precio del Vebono Callable sería igual al Vebono Non Callable. Esto se ilustra en la gráfica 6.10.



Gráfica 6.10 Precio Esperado del Vebono Callable para distintos períodos de gracia.

Se puede observar que para períodos de gracia muy cortos el valor presente del Vebono sería menor que para períodos de gracia mayores.

#### 6.4 Sensibilidad del Precio del Vebono a los Parámetros en el Modelo

Luego de haber realizado diferentes análisis de sensibilidad variando los *inputs* del modelo, nos encontramos con que el factor que logra mayor sensibilidad en las variaciones de los precios de los Vebonos, es la *Yield Curve*. Esto quedó demostrado con los diferentes

resultados arrojados por el modelo para los diferentes escenarios. Sin embargo los otros inputs necesarios para correr el modelo: *la volatilidad* y el *mean reversion*, no influyen en los resultados finales obtenidos, siendo completamente insensibles a las variaciones de los precios. Estos parámetros no modifican los valores finales arrojados por el modelo. Sin embargo, estos dos parámetros de volatilidad ( $\alpha$  y  $\sigma$ ), si afectan la estructuración del árbol trinomial y sus valores. A continuación presentaremos la poca sensibilidad de los parámetros  $\alpha$  (mean reversion) y  $\sigma$  (volatilidad).

#### 6.4.1 Mean Reversión

Uno de los resultados más inesperados fue la poca sensibilidad de los parámetros en el modelo. En este caso la constante de volatilidad *mean reversion*, no afectó los resultados. En las tablas 6.5 y 6.6 se demuestra que a distintas tasas de mean reversion, dejando constante los demás parámetros del modelo, No varían los precios del VNC, VC, ni de la opción de compra.

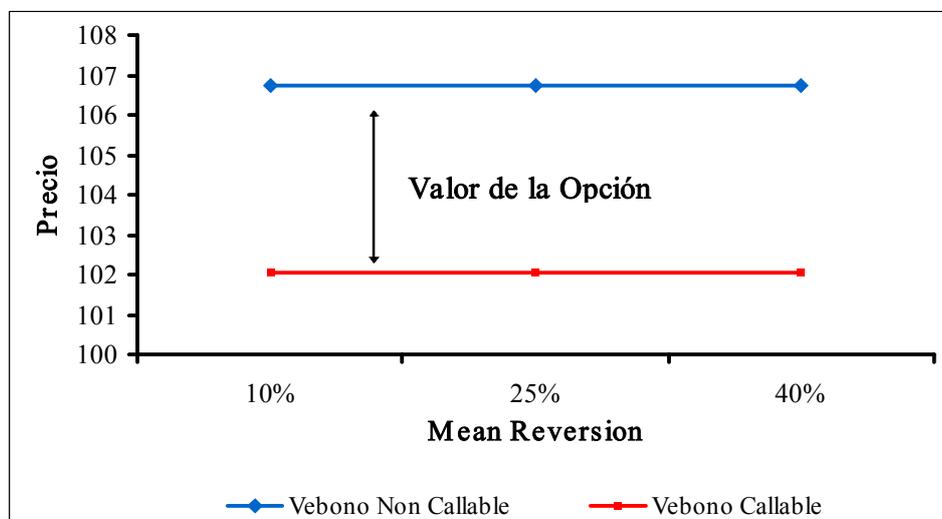
**Tabla 6.5** Análisis del Mean Reversión en un escenario de Flat yield Curve

<i>con <math>\sigma = 2,4\%</math> y LookOut = Ahora</i>			
<b>a</b>	<b>Vebono NC</b>	<b>Vebono C</b>	<b>Opción</b>
10%	106,746	102,06	4,686
<b>25%</b>	<b>106,746</b>	<b>102,06</b>	4,686
40%	106,746	102,06	4,686

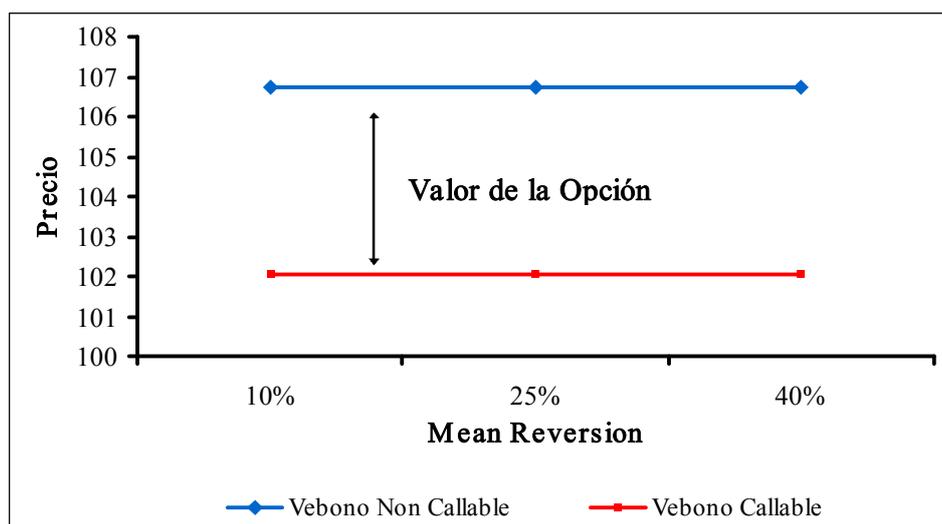
**Tabla 6.6** Análisis del Mean Reversión en un escenario de Upward yield Curve

<i>con <math>\sigma = 8,22\%</math> y LookOut = Ahora</i>			
<b>a</b>	<b>Vebono NC</b>	<b>Vebono C</b>	<b>Opción</b>
<b>10%</b>	<b>104,805</b>	<b>100,957</b>	3,848
25%	104,792	100,957	3,835
40%	104,783	100,957	3,826

En las gráficas 6.11 y 6.12 se observa la insensibilidad del Mean reversion en los precios del Vebono Callable y el Vebono Non Callable, para los distintos escenarios.



**Gráfica 6.11 Precio implícito de la Opción para distintos Mean Reversion. Escenario Flat Yield Curve**



**Gráfica 6.12 Precio implícito de la Opción para distintos Mean Reversion. Escenario Upward Yield Curve**

### 6.4.2 Parámetro de Volatilidad

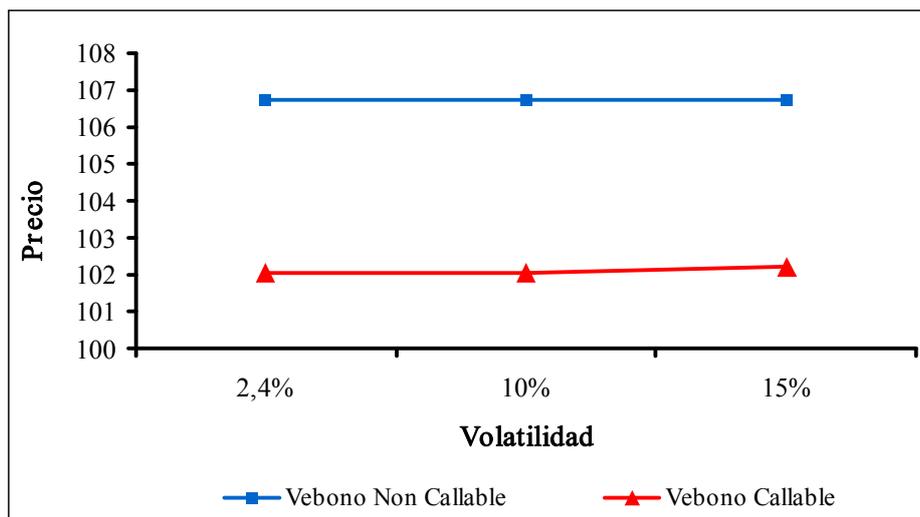
Los resultados reflejaron que a diferentes valores de  $\sigma$  (*volatilidad*), dejando los demás parámetros constantes, las variaciones en los precios de los VNC, VC y las opciones son mínimas. Por lo que la variable  $\sigma$  en este modelo no determinará si el precio es el correcto o no. En las tablas 6.7 y 6.8 se pueden observar los resultados que luego son representados en las gráficas 6.13 y 6.14 demostrando la insensibilidad de la volatilidad en el modelo.

**Tabla 6.7** Análisis de la Volatilidad en un escenario de Flat yield Curve

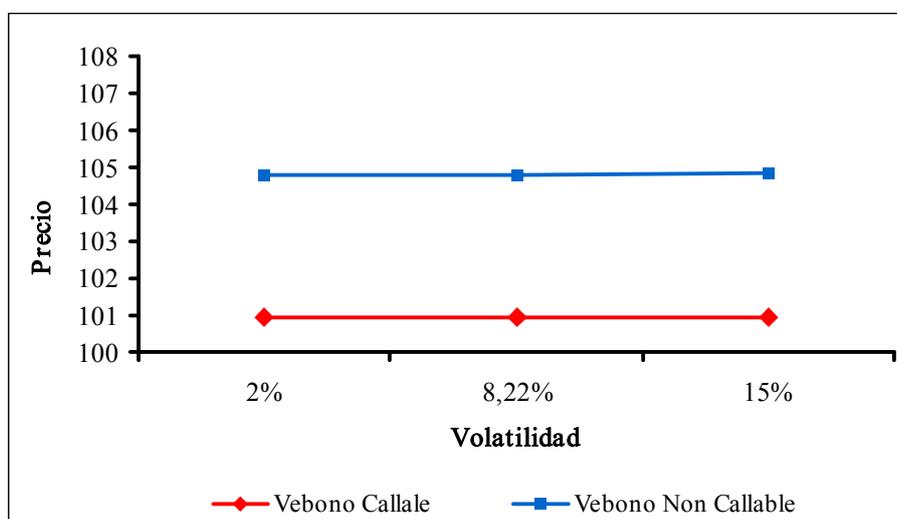
<i>con a = 25% y LookOut = Ahora</i>			
$\sigma$	Vebono NC	Vebono C	Opción
2,4%	106,746	102,06	4,686
10%	106,746	102,0675	4,6785
15%	106,746	102,2	4,546

**Tabla 6.8** Análisis de la Volatilidad en un escenario de Upward yield Curve

<i>con a = 10% y LookOut = Ahora</i>			
$\sigma$	Vebono NC	Vebono C	Opción
2%	104,796	100,957	3,839
8,22%	104,805	100,957	3,848
15%	104,819	100,957	3,862



**Gráfico 6.13 Precio de la Opción para distintas Volatilidades. Escenario Flat Yield Curve**



**Gráfico 6.14 Precio de la Opción para distintas Volatilidades. Escenario Upward Yield Curve**

## CONCLUSIONES

- El mercado financiero venezolano no valora el Vebono tomando en cuenta la flotabilidad de su cupón, sobrevalorándolo desde un 0.6% a un 2.4% para distintos escenarios de tasas.
- Actualmente la redención anticipada implícita en el Vebono no es tomada en cuenta en su valoración, la cual reduce el precio entre un 4% y un 6% con respecto al precio de mercado para distintos escenarios de tasas.
- Si el Estado como emisor del Vebono con redención anticipada recompra la deuda, el precio de la Opción de Compra implícita en el bono es aproximadamente entre un 3.8 y un 4.8% de su valor facial.
- La percepción del mercado sobre cuándo el Estado podrá ejecutar la redención anticipada del Vebono, afecta significativamente el precio de la Opción de Compra implícita en este. Para períodos de gracia menores, el precio de la opción aumenta. Para períodos de gracia mayores, el precio de la opción disminuye haciéndose casi nula si se espera que el Estado no ejecute la redención de la deuda anticipadamente.
- Al implementar el modelo, pudimos apreciar que el parámetro más significativo es la estructura temporal de tasas de interés. El precio de la Opción de Compra aumenta más en escenarios con niveles altos de tasas que con escenarios de tasas bajas.
- El precio del Vebono Callable en el mercado actual es mayor que el precio de un Vebono Non Callable con la misma maduración, debido a que no se incluye el riesgo de redención en el precio. Este escenario, aumenta la posibilidad de que el Estado como emisor ejecute la redención del bono anticipadamente, ya que los beneficios para el Estado por

ejercer la opción y reemitir nuevos papeles son altos; más aún en un escenario como el actual donde las tasas de interés son relativamente bajas (alto riesgo de reinversión) y en donde el mercado sobrevalúa el precio de estos bonos.

- El *mispicing* o valoración incorrecta del mercado se ve aumentada por condiciones financieras tales como: control de cambio, poca diversidad de instrumentos de renta fija, y niveles de tasas bajas, haciendo que el factor fijo del cupón del Vebono (2,5 %) en un escenario como este, tenga mayor proporción que en un escenario de tasas altas. Sin embargo se sigue subestimando completamente el riesgo de que el Estado llame a redención la deuda.

## BIBLIOGRAFÍA

“An Introduction to Callable Debt Securities”. *Fannie Mae*, (2005).

Black, F., and M. Scholes, (1973). “The Pricing of Options and Corporate Liabilities”. *Journal of Political Economy*, Volume 81, Issue 3, p. 637-654.

Bodie, Z., A. Kane, and A. Marcus, (2002). “Investments”. *Irwin, Second Edition*.

Bolder, D., (October 2001). “Affine Term-Structure Models: Theory and Implementation”. *Working Paper 2001-15. Bank of Canada*.

Buetow, G., B. hanke and F. Fabozzi, (December 2001). “Impact of Different Interest Rate Models on Bond Value Measures”. *The Journal of Fixed Income*, p. 41-52.

Fabozzi, F., (2003). “Bonds Markets: Analysis and Strategies”. *Editorial, Edition*.

Fama, E., (January-February 1995). “Random Walks in Stock Market Prices”. *Financial Analysts Journal*, p. 75-80.

Gómez, M., (2004). “Nuevos Planteamientos en Modelos Unifactoriales de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés”. *Tesis de Doctorado. Universidad de Valladolid*.

Hull, J. “Options Futures and other Derivatives Securities“. *Prentice Hall, Fifth Edition*.

Hull, J., and A. White, (1990). "Pricing Interest Rate Derivative Securities". *Review of Financial Studies, Volume 3, Number 4, p. 573-592.*

Hull, J., and A. White, (1993). "One-Factor Interest Rate Models" and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities". *Journal of Financial and Quantitative Analysis.*

Hull, J., and A. White, (Fall 1994). "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models". *The Journal of Derivatives, p. 7-16.*

James, J. and N. Webber, (2002). "Interest Rate Modelling". *John Wiley & Sons.*

Jamshidian, F., (March 1989). "An Exact Bond Option Formula". *Journal of Finance, Volume 44, Number 1, p. 205-209.*

Leippold, M., and Z. Wiener, (2000). "Algorithms Behind Term Structure Models of Interest Rates II: The Hull-White Trinomial Tree of Interest Rates". *Working Paper. Hebrew University.*

Leippold, M., and Z. Wiener, (2003). "Efficient Calibration of Trinomial Trees for One-Factor Short Rate Models". *Working Paper. Hebrew University.*

Luk, P., (November 2003). "Hong Kong Dollar Yield Curve (Term Structure)". *Working Paper.*

Mannolini, A. "Interest Rate Dynamics and the Pricing of Contingent Claims: A Review of the Models and Proposal". *Working Paper.*

Navarro, L., (Julio 2003). "Métodos Numéricos para la Valoración de Derivados sobre Tipos de Interés". *Trabajo de Investigación del Programa de Doctorado Interuniversitario en Finanzas Cuantitativas n° 006. Universidad del País Vasco.*

Pye, G. (1986). "The Value of the Call Option on a Bond". *Editorial*, p. 200-205.

Vasicek, O. (1977). "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

Venegas-Martínez, F. "Una guía completa para economistas en la valuación de opciones". *Gaceta de Economía*, Año 6, Número 12, p. 155-213.

Wall, L., (September 1988). "Callable Bonds: A Risk-Reducing Mechanism-A Comment. *Journal of Finance*, Volume 43, Number 4, p. 1057-1065.

## ANEXO A

### Risk Neutral Valuation y Risk Neutral World

La **Valoración Riesgo Neutral** argumenta que la preferencia al riesgo del inversionista, ya sea neutral, adversa o amante a esta, no influye en la valoración de la opción. Específicamente, todas las variables de la fórmula Black y Scholes son independientes de la preferencia al riesgo, ya que no incluye el retorno esperado de la acción,  $\mu$  ni una tasa de descuento ajustada a riesgo. Esto se debe a que el valor de *la tasa de descuento* depende de la preferencia al riesgo: mientras mayor sea el nivel de aversión al riesgo de los inversionistas, mayor será *la tasa de descuento* para cualquier activo subyacente.

Ross y Cox (1975) plantearon que valorar a través de Riesgo Neutral sería lo mismo que valorar a través del método convencional de expectativas aplicado por Samuelson (1968), pero haciendo las siguientes premisas:

- El retorno esperado del principal es la tasa libre de riesgo.
- La tasa de descuento es la tasa libre de riesgo.

Este resultado es conocido como **Risk Neutral World**. Un mundo donde todos los activos ganan la tasa libre de riesgo, y donde todas las personas demandan una misma tasa de descuento.

Este argumento puede ser derivado de la idea de que la ecuación diferencial de Black y Scholes es independiente a las preferencias de riesgo. Si estas no entran en la ecuación, no pueden afectar la solución. Un nuevo conjunto de preferencias al riesgo puede ser introducido, y es la asunción de que todos los inversionistas son riesgo-neutrales.

En un mundo donde todos los inversionistas son riesgo-neutrales, el Retorno Esperado del activo subyacente es la tasa libre de riesgo,  $r$ .

Es importante aclarar que la Valoración en un Mundo Riesgo Neutral es una herramienta artificial para obtener soluciones como la ecuación diferencial de Black y Scholes o de la tasa de interés a corto plazo, que incluso son válidas en un mundo donde las preferencias al riesgo de los inversionistas no son neutrales. En el caso de un mundo donde los inversionistas son adversos al riesgo, dos cosas pasan. La tasa esperada del retorno de un activo subyacente y la tasa de descuento de cualquier pago futuro que genere este activo, cambia. Resulta que estos dos cambios se compensan entre sí mismos de manera exacta.

## ANEXO B

### Características de la dinámica de las tasas de interés

Es necesario conocer las características propias que envuelven la dinámica estocástica de la tasa de interés.

#### *La Tasa de Interés sigue un Proceso Estocástico*

La tasa de interés sigue un Proceso Estocástico ya que su valor cambia en el tiempo de manera incierta. A su vez, este proceso puede clasificarse según el valor que pueda tomar en el futuro y los momentos en que puede variar. En la vida real la tasa de interés sigue un proceso estocástico con valores discretos y de tiempo discreto. La primera propiedad se debe a que la tasa toma ciertos valores restringidos (por ejemplo variaciones de 250 puntos bases para las Letras del Tesoro americano a un año, o múltiplos de una centésima). La propiedad de tiempo discreto se refiere a que la tasa sólo debe variar en ciertos momentos fijos en el tiempo (por ejemplo cada *Federal Open Market Committee mensual donde se decide el valor de las tasas de interés a un año americanas*).

Matemáticamente diferenciaremos la tasa de interés en tiempo discreto del de tiempo continuo a través del siguiente ejemplo:

Supongamos el valor presente de un Bono Cero Cupón,  
 $B$ , cuyo precio de maduración es 100 unidades monetarias  
a un período  $t$ :

**Tiempo Discreto:**

$$B = \frac{100}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

donde  $r$  es la tasa de interés compuesta  $n$  veces por cada período  $t$ .

**Tiempo Continuo:**

$$B = \frac{100}{e^{rt}} = 100 e^{-rt}$$

donde  $e$  se alcanza cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = e^{rt}$$

En esta investigación, se trata la tasa de interés como una variable continua (que puede tomar cualquier valor) en tiempo continuo (puede variar en cualquier momento) ya que facilita la modelación de la dinámica de tasa de interés.

***La Tasa de Interés se asume sigue un Proceso Markov***

Un Proceso Markov es un tipo de proceso estocástico donde el pasado o historia de la variable y la dinámica en que ha surgido el presente del pasado, es irrelevante y el valor en el presente de la variable (*tasa de interés*) es lo único importante para predecir valores futuros. Con esta propiedad, predicciones para el futuro son inciertas y deben ser expresadas en términos de distribución de probabilidades y donde esta, en cualquier momento  $t$  futuro, no depende de un determinado camino que haya seguido la variable (*tasa de interés*) en el pasado.

*La Tasa de Interés se asume sigue un Proceso Wiener Generalizado*

Un Proceso Wiener Generalizado es un tipo de proceso markov donde la variable (tasa de interés) tiene una dinámica en el tiempo en función de 2 componentes: uno tendencial y otro de variabilidad. Se puede definir un Proceso Wiener Generalizado mediante la siguiente ecuación diferencial.

$$dr = a dt + b dz \quad (1)$$

El término tendencial representado por  $adt$ , implica que la variable  $r$  (tasa de interés) tiene una tasa de crecimiento esperada de  $a$  por unidad de tiempo. Matemáticamente se puede visualizar, y omitiendo el segundo componente  $bdz$  de la siguiente forma:

$$dr = a dt$$

El cual implica que:

$$\frac{dr}{dt} = a$$

Integrando con respecto al tiempo, obtenemos

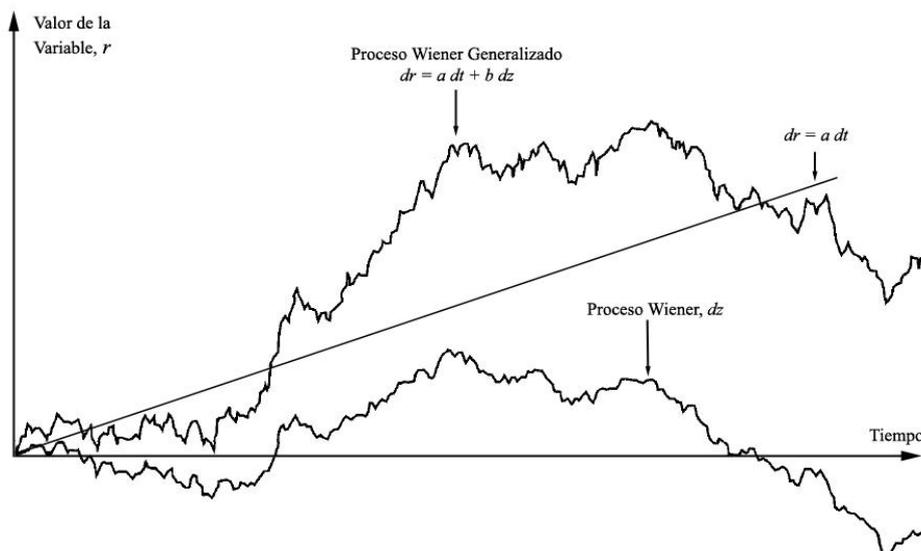
$$r = r_o + a t$$

Donde  $r_o$  es el valor de la variable en el momento  $t=0$

El término de variabilidad o ruido,  $bdz$ , es el proceso que sigue la variable (tasa de interés) que es considerado como Proceso Wiener, agregándole una distribución de probabilidades en cualquier instante de tiempo futuro, al valor de la variable (tasa de interés). O sea, un Proceso Wiener descrito por la variable  $z$  se alcanza en un instante de tiempo continuo: límite de  $\delta t \rightarrow 0$ .

La distribución de probabilidades tendrá una media de cero y una desviación estándar de 1 unidad. En este caso particular de Proceso Wiener Generalizado descrito por la fórmula (1), la variabilidad o ruido es  $b$  veces un Proceso Wiener.

Se puede representar en la gráfica B.1.



Gráfica B.1 Wiener Process

### *La Tasa de Interés posee una Reversión a la Media*

La asunción de que las tasas de interés aparentan ser empujadas a largo plazo a un determinado nivel no sólo es de naturaleza matemática, sino que descansa en fuertes fundamentos económicos. Cuando las tasas son altas, la economía tiende a desacelerar y a bajar la demanda de fondos por parte de prestatarios. Igual viceversa. A este fenómeno se le conoce como Reversión a la Media (*Mean Reversion*).

Cuando las tasas son altas, la Reversión a la Media tiende a causar que estas posean una pendiente negativa; cuando las tasas son bajas, la Reversión a la Media tiende a causar que estas posean una pendiente positiva.

## ANEXO C

### Modelación de la Estructura Temporal de las Tasas de Interés

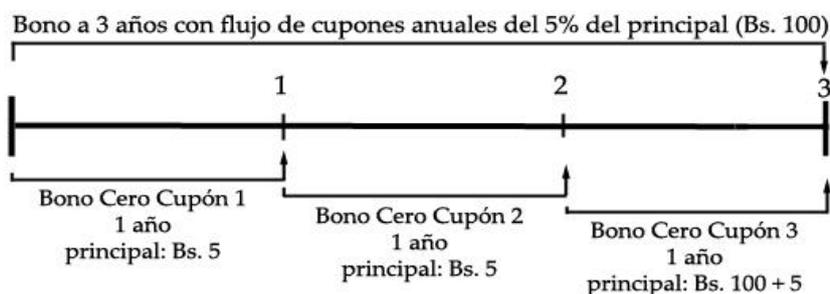
El primer paso para modelar la estructura temporal de tasas de interés, es introducir ciertos conceptos fundamentales que entran en juego dentro del marco de la modelación, específicamente, el Bono Cero Cupón. Un bono cero cupón es un bono en el cual durante su vida (*período de tiempo entre su fecha de emisión y su fecha de vencimiento*) no genera cupones y cuyo rendimiento se refleja por la diferencia proporcional entre el precio del bono a descuento en la fecha de emisión contra el precio en la fecha de maduración, supongamos, 1 unidad monetaria.

La razón porque introduciremos el Bono Cero Cupón es porque facilita la modelación de la estructura temporal de tasas de interés. Un bono cualquiera, tanto con un período de maduración como una serie de flujos de cupones determinados, puede ser visto como la suma de tantos bonos-cero-cupón como períodos se quiera dividir la vida del bono, preferiblemente por la periodicidad de cupones.

**Ejemplo.** Si tenemos un Bono a 3 años con un precio de maduración de Bs. 100 y un flujo de cupones fijos del 5% anual, es igual a tener 3 Bonos-Cero-Cupón con una fecha de maduración a doce meses.

Supongamos una tasa anual,  $r$ , de 10% Gráficamente:

$$\blacksquare \text{ Valor Actual Bono} = \text{Cupón} \cdot A_{\overline{3}|10\%} + 100 \cdot e^{-10\% \cdot 3} = 86,404$$



Donde

$$A = \frac{1 - e^{-t}}{r}$$

que es el tiempo continuo de

$$A = \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt}}{r}$$

- Por medio de flujo de Bonos Cero Cupón:

$$5e^{-10\% \cdot 1} + 5e^{-10\% \cdot 2} + 5e^{-10\% \cdot 2} + 105e^{-10\% \cdot 3} = 86,404$$

El precio de los bonos cero cupón viene determinado por la dinámica bajo la medida de probabilidad de la tasa de interés. De esta manera, por cada precio podemos calcular la respectiva tasa asociada a ese precio.

$$P(t, T) \cdot e^{(T-t)z(t, T)} = 1$$

y sabiendo que

$$P(T, T) = 1$$

despejamos

$$z(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}$$

Esta función representa la Curva Cero Cupón (*zero curve*) donde:

$P(t, T)$ : Precio del Bono cero cupón en el momento  $t$  con fecha de maduración  $T$ .

$z(t, T)$ : Tasa cero cupón

$t$ : cualquier momento entre la fecha de maduración y la fecha de emisión

$T$ : fecha de maduración

Esta tasa  $z(t, T)$  se encuentra en tiempo discreto, por lo que se necesita introducir un nuevo parámetro que permita darle continuidad en el tiempo facilitando el uso de matemáticas en tiempo continuo sobre los procesos estocásticos. La tasa de interés instantánea o *spot rate*,  $r(t)$ , se obtiene construyendo una tasa de interés spot para períodos muy cortos de tiempo, o sea:

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} z(t, T)$$

La tasa de interés instantánea es una variable fundamental para caracterizar la curva de rendimientos (*yield curve*). Conociendo esta variable, así como su distribución y probabilidades, es posible conocer los precios de los bonos cero cupón y reconstruir la curva de rendimientos en un instante corto de tiempo,  $t$ , de tal forma que la curva en su totalidad se caracteriza por una única variable  $r$ , la tasa de interés.

Ahora bien, lo que necesitamos saber o valorar es esa tasa de interés instantánea para cada *term to maturity*, o sea, cómo evoluciona la tasa en el tiempo. Esto es lo que se conoce como Estructura Temporal de tasa de interés y se puede modelar mediante una ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = \alpha(t, r)dt + \rho(t, r)dW(t)$$

Donde  $\alpha(t, r)$  es el factor *drift* o tendencia del proceso y  $\rho(t, r)$  es el factor *diffusion* o la volatilidad del proceso, ambos dependientes del tiempo y de la tasa de interés instantánea. Una vez definido la estructura temporal, el problema se centra en resolver la ecuación diferencial.

## ANEXO D

### Códigos para la implementación del Árbol Hull y White en el software Matemática 5.0

#### *Librerías*

El primer paso para programar el modelo es cargar las librerías necesarias.

```
<<Statistics`Master`
```

```
<<Statistics`DataManipulation`
```

Se carga esta librería para poder utilizar la función **ColumnDrop[]** y **Submatrix[]**

```
<<LinearAlgebra`MatrixManipulation`
```

```
<<Graphics`MultipleListPlot`
```

Se define la función  $\Pi[j, z, jmin, jmax]$  para calcular las probabilidades asociadas a cada proceso *branching*, donde:

$j$  = número del *step vertical* desde el origen

$z = \{-1, 0, 1\}$  dependiendo del *branch* {down, center, up}

$jmin$  = número de *step* máximo que desde el origen puede bajar el proceso

$jmax$  = número de *step* máximo que desde el origen puede subir el proceso  
(los *steps* alcanzables incluyen a  $jmax$  y  $jmin$  )

Los parámetros necesarios para implementar  $\Pi$  son:

$a$  = Parámetros de *mean reversion*

$\sigma$  = volatilidad anual de la tasa de corto plazo

$\Delta t$  = *time step* en el árbol

$\Delta x$  = incremento vertical del *branching process*,

$\mu[i, j]$  = Valor esperado del proceso analítico

$s[i, j]$  = Varianza del proceso analítico

```
Clear[ $\Delta x, j, \pi, \mu, v$ ];
```

#### *First Stage - Definición de las Probabilidades*

Se define función para cuantificar valor de cada nodo en un árbol con media 0. El valor del nodo esta totalmente definido por " $j$ " (la altura del nodo en el árbol).

```
x[j_] := j  $\Delta x$ ;
```

Se definen tres vectores. Cada vector contiene los valores (forward) de los nodos hacia los cuales derivan cada *branching process*.

```

transA = {x[j] - Δx, x[j], x[j] + Δx} (normal branching)
transB = {x[j] - 2 Δx, x[j] - Δx, x[j]} (branching on the top)
transC = {x[j], x[j] + Δx, x[j] + 2 Δx} (branching on the down)

```

Se define un vector que contiene las probabilidades (forward) de ir hacia cada nodo. Estas probabilidades son constantes a lo largo del árbol, pero difieren según el proceso de branching.

```

Unprotect[π];
π = {π3, π2, π1} (up, center, down)

```

Se definen dos fórmulas para multiplicar el vector de nodos (forward) por las probabilidades de ir a esos nodos. Una función calcula el valor esperado y la otra calcula la varianza asociada al proceso de branching.

```

auxE[x_] := π.x;
auxV[x_] := Apply[Plus, auxE[x^2] - auxE[x]^2];

```

Los siguientes sistemas de ecuaciones definen las probabilidades de cada branching process, a través de un sistema de ecuaciones basado en el valor esperado  $\mu$  y la varianza del proceso  $v$ . Donde  $\mu$  y  $v$  deben ser definidos explícitamente según el proceso asumido.

En el caso de un proceso normal, el siguiente procedimiento calcula un vector con las probabilidades (forward) asociadas a un determinado nodo (definido por  $j$ )

```

probA[j_] = Flatten[π /. Solve[
  { auxE[transA] == μ[i, j],
    auxV[transA] == s[i, j]^2,
    Apply[Plus, π] == 1 },
  π]];

```

En el caso de un proceso "on the top"

```

probB[j_] = Flatten[π /. Solve[
  { auxE[transB] == μ[i, j],
    auxV[transB] == s[i, j]^2,
    Apply[Plus, π] == 1 },
  π]];

```

En el caso de un proceso "on the down"

```

probC[j_] = Flatten[π /. Solve[
  { auxE[transC] == μ[i, j],
    auxV[transC] == s[i, j]^2,
    Apply[Plus, π] == 1 },
  π]];

```

Dependiendo del  $j$ , el siguiente procedimiento decide cuál sistema de ecuaciones resolver y da como output la probabilidad según sea el valor de  $z$  ( $-1 = \text{down}$ ,  $0 = \text{centro}$ ,  $+1 = \text{up}$ ).

```

Π[j_, z_, jmin_, jmax_] := Which[
  jmin < j < jmax, probA[j],
  jmax ≤ j, probB[j],
  j ≤ jmin, probC[j]] [[z+2]];

```

### *Second Stage – Construcción del árbol para los precios y las tasas de interés*

Ahora que hemos explicado cómo los nodos de nuestro árbol están contruidos, necesitamos definir las transiciones en el árbol. Esto se hace de tal manera que para cada nodo en el tiempo  $t$  la transición hacia el período  $t+1$  estén especificadas correctamente. Esto involucra no solamente la transición de los nodos sino que también las probabilidades correspondientes para cada nodo.

Se define la función **hh[q,jmin,jmax,a]**, la cual crea una matriz **XX** con todos los orígenes (backward) posibles relacionados con cada uno de los nodos a cierto momento del proceso. Esta función será utilizada para calcular las probabilidades asociadas a cada nodo, en un determinado tiempo.

**q** = time step sobre el cual se desean calcular las probabilidades asociadas a sus nodos {0,1,2,...};  
**jmin** = idem;  
**jmax** = idem;  
**a** = vector que recoge la historia acumulada (probabilidad acumulada) hasta al time step inmediatamente anterior.

Se calcula el valor de un proceso hasta q (para cada nodo), conociendo el valor del proceso hasta (q-1) y la historia desde (q-1) hasta (q).

```
hh[q_, jmin_, jmax_, a_] :=
  Module[{jtm, jtp, XX, YY},
    Clear[f];
```

La matriz YY cumple con la finalidad de especificar todas las posibles transiciones desde (q-1) hasta q. Cada origen a (q-1) representa una fila de la matriz. Cada columna representa una posible transición. Esta matriz tiene una banda diagonal de tres elementos, donde cada elemento es una de las transiciones. Cada origen trasciende a 3 destinos, pero la cantidad de columnas por fila recoge todos los posibles destinos.

Los destinos son iguales a  $(2q+1)$ , con la excepción que cuando los orígenes a (q-1), (por razones de los límites max y min) no sean iguales a  $(2(q-1)+1) = (2q-1)$  entonces la cantidad de destinos será igual a  $((jmax-jmin)+1+(2 \text{ o } 1))$ . El ajuste se hace para simplificar el proceso de construcción de una matriz cuya diagonal sean los tres destinos de cada origen.

```
jtm=Max[jmin-1, -q];
jtp=Min[jmax+1, q];
```

Cuando el origen llega a un determinado destino, entonces se reporta en el matriz XX la transición. La transición esta definida por la función  $g=[\text{tiempo de origen}, i=\text{nodo de origen (centro=0)}, \text{tipo de branching process desde origen a destino}=\{-1,0,1\}, a=\text{representa el valor de un proceso en el nodo de origen}] * z[\text{origen}] = \text{previsible process importante para la transición}$ . Cuando el origen no llega a un determinado destino, el elemento de la matriz es colocado en 0. Los destinos ficticios adicionados cuando los orígenes son menores a  $(2(q-1)+1)$  se colocan automáticamente en 0.

```
YY=
```

Origen {-3} llega a Destino {-4,-3,-2} o {(-3-1),(-2-1),(-1-1)}, por tanto cuando j-i sean -1,0, o 1 entonces eso quiere decir que la conexión es posible

```
Table[If[j-i>-2 && j-i<2,
      z[{1..jmax}]= historia del process;
      g[tiempo de origen, nodo origen, {-1,0,1}, a=filtration
      z[i-jtm] g[q-1, i, -i+j, a], 0],
      {i, jtm+1, jtp-1}, {j, jtm, jtp} para cada i correo j];
```

Lo que hemos logrado con la matriz YY es tener bien definida todas las posibles transiciones del (q-1) hasta (q), y además tener una función g[] que relaciona la información hasta el origen, con la información sobre la transición.

Como la matriz fue afectada al momento de definir el número de destinos, las columnas de YY no corresponden a un mismo destino. Esto lo resolveremos cuando calculemos la transpuesta de YY y formemos la matriz XX, en la cual cada fila ser.

```
XX={};
XX=Append[XX,
```

Caso en que el branching process hacia q sea normal

```
If[q ≤ jmax && q ≤ -jmin,
  DeleteCases[Transpose[YY],_0,{2}],
```

De lo contrario...

```
DeleteCases[Transpose[
  Which[
    q>jmax && q>-jmin,
    Prepend[Append[
      SubMatrix[YY,{2,2},{-jmin+jmax-1,-jmin+jmax+1}],
      Delete[YY[[-1]],{{1},{2}}]],Delete[YY[[1]],-{{1},{2}}]],
    q>jmax,
    Append[ColumnDrop[
      Transpose[ColumnDrop[Transpose[YY],-1]],-1],
      Delete[YY[[-1]][1]]],
    q>-jmin,
    Prepend[ColumnDrop[
      Transpose[ColumnDrop[Transpose[YY],1],1],
      Delete[YY[[1]][-1]]]
    ],_0,{2}]]];
XX];
```

Procedimiento que construye dos árboles. Uno **qq** que es un árbol donde cada nodo es el resultado de la probabilidad de estar en cada nodo, multiplicado por el factor de descuento asociado a ese nodo. Otro árbol representado por **rr** que muestra el valor de la tasa de interés de corto plazo en cada nodo.

```
TreeCalculation[t_,jmin_,jmax_]:=
Module[{ZZ,AA,b,v},
  Clear[QQ,α,j];
  z[n_]:=ZZ[[-1,n]];
  g[i_,j_,z_,m_]:= π[j,z,jmin,jmax] Exp[-ω[(+m[[-1]]+j Δx)] Δt];
  ZZ={1};
  RR={{-Log[P[Δt]]/Δt}};
  AA=w[RR[[-1]]];
  Do[
    ZZ=Append[ZZ,Apply[Plus,
      Flatten[hh[j,jmin,jmax,AA],1,1]];
    AA=Append[AA,
      α/.FindRoot[P[(j+1) Δt]==ZZ[[-1]] . Table[Exp[-ω[(α+h Δx)] Δt],
        {h,Max[jmin,-j],Min[jmax,j]},{α,AA[[-1]]}],
      {j,1,t}];
  Clear[z,g,r];
  QQ=ZZ;
  Do[RR=
    Append[RR,Table[ω[AA[[i+1]] + j Δx],{j,Max[-i,jmin],Min[i,jmax]}],
      {i,1,Length[AA]-1}];
  v=0;If[#<0,v++] & //@RR;
```

```
If[v>0,
  Print["Cuidado: El programa ha generado ",v," tasas de intereses negativas \n
  Considere ajustar los limites del árbol"]] ]
```

### ***Código para la graficación del árbol***

```
auxTree[T_, jmin_, jmax_] :=
Module[{jtm, jtp, XX},
  jtm=Max[jmin-1, -T] ;
  jtp=Min[jmax+1, T];

  XX=Table[If[j-i>-2 && j-i<2, f[T-1,i],0], {i,jtm+1,jtp-1},{j,jtm,jtp}];

  Which[
    T<=jmax && T<=-jmin, Return[XX], si no se ha llegado al límite
    T>jmax && T>=-jmin, si estamos en el límite superior
  ]
  Prepend[Append[
    SubMatrix[XX, {2,2}, {-jmin+jmax-1,-jmin+jmax+1}],
    Delete[XX[[-1]], {1}, {2}]], Delete[XX[[1]], -{1}, {2}]],
  T>jmax, Append[ColumnDrop[
    Transpose[ColumnDrop[Transpose[XX], -1]], -1],
    Delete[XX[[-1]], {1}]],
  T> -jmin, Prepend[ColumnDrop[
    Transpose[ColumnDrop[Transpose[XX], 1]], 1],
    Delete[XX[[1]], {-1}]] ] ]

precLevel[T_, jmin_, jmax_] :=
Module[{x, y},
  x=Max[jmin, -T];
  y=Min[jmax, T];
  Table[f[T, k], {k, x, y} ] ]

IntTreePlot[T_, jmin_, jmax_, list_] :=
Module[{LL, FF, HH},
  LL={};
  Do[
    FF=DeleteCases[Transpose[auxTree[u, jmin, jmax]], _0, 2];
    HH=precLevel[u, jmin, jmax];
    f[x_, y_] := {x, list[[x+1, y+Min[-jmin, x]+1]]};
    LL=Append[LL, Table[Line[{HH[[i]], #}]&/@ FF[[i]], {i, 1, Length[FF]}]];
    Clear[f],
    {u, 1, T/Δt}];
  Show[Graphics[Flatten[LL]], Frame -> True]]
```

### ***Configuraciones adicionales***

#### **Modelo Hull y White**

```
w[y_] := y;
ω[y_] := y;
```

#### **Modelo Black Karisinsky**

```
w[y_] := Log[y]
ω[y_] := Exp[y]
```

#### **Media y Varianza Teórica**

```
μ[i_, j_] := x[j] Exp[-aΔt]
s[i_, j_] := σ Sqrt[[1-Exp[-2aΔt]]/2a]]
```

#### **Rate Step, j máximo, j mínimo y M**

```
Δx=σ Sqrt[3] s[i, j]
jmax=IntegerPart[-0.184/M]+1
```

```
jmin=-jmax
M= Exp[-a Δt]-1
```

### *Inputs que deben ser definidos por el usuario*<sup>14</sup>

#### **Estructura Temporal de Interés interpolada**

```
AuxYieldCurve[t ]:=0.08-0.05 Exp[-0.18 t]
```

#### **mean reversion**

```
a=0.1
```

#### **volatilidad**

```
σ =0.01
```

#### **unidad de tiempo expresado en años**

```
Δt=1/52
```

#### **Time steps**

```
T=4
```

#### **factor de descuento**

```
P[t ]:=Exp[-(AuxYieldCurve[t/52]) t]
```

### *Outputs*

#### **Yield Curve para n períodos**

```
Ycurve=Table[AuxYieldCurve[t],{t,1,n}]
```

#### **Árbol de Tasas**

```
Print[RR//MatrixForm]
```

#### **Gráfica del Árbol de Tasas**

```
GG={}; Do[
  GG=Append[GG,{j}];
  GG[[j]]=Table[Append[GG[[j]],RR[[j,i]],{i,Length[RR[[j]]}],
    {j,1,T}]; MultipleListPlot[Flatten[GG,1]]
```

#### **Matriz de nodos ponderados por su probabilidad y descuentos**

```
Print[QQ//MatrixForm];
```

#### **Cálculo precio de pure discount bond para cada time step**

```
PDB=Table[Apply[Plus,QQ[[j]]],{j,1,T}]
AnaliticalPrice=Table[P[j Δt],{j,1,T}] (comprobación)
```

#### **Recuperando la curva intertemporal**

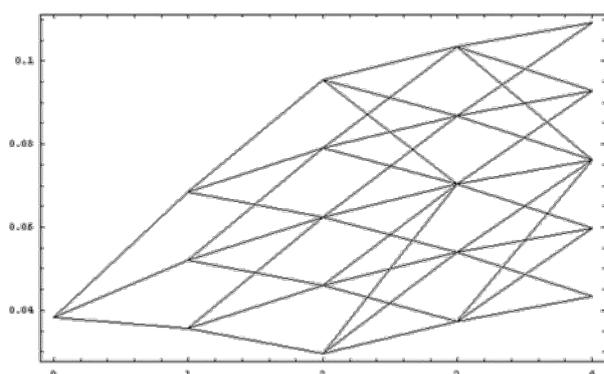
```
YIELD=Table[-Log[PDB[[j+1]]]/(j Δt),{j,1,T-1}]
AnaliticalYIELD=Table[AuxYieldCurve[j Δt],{j,1,T}] (comprobación)
```

#### **Graficación del Árbol**

```
TreeCalculation[T,jmin,jmax]
IntTreePlot[T,jmin,jmax,RR]
```

---

<sup>14</sup> Aquellos códigos subrayados son los *inputs* modificables por el usuario.



### Cálculo del precio de un Vebono Non Callable

```

BB={Vencimiento en Semanas, Próximo Cupón}

TT=Table[BB[[1]]-j*13,{j,0,IntegerPart[BB[[1]]/13]};

PRINCIPAL=PDB[ [BB[[1]]+1] ];

COUPONS=Table[ QQ[[TT[[j]]+1]] . (RR[[TT[[j]]+1]]+0.025), {j,1,Length[TT]};
COUPONS=COUPONS/4;
COUPONS[[-1]]=BB[[2]]/4*PDB[ [TT[[-1]]+1] ];
VPCupones=Apply[Plus,COUPONS];

VEBONO=PRINCIPAL*100+VPCupones*100;

Print[VEBONO]

```

### Cálculo del precio de un Vebono Non Callable por Backward Induction

(vencimiento en semanas, próximo cupón)

BB={107,0.0951};

```

TT=Table[BB[[1]]-j*13,{j,0,IntegerPart[BB[[1]]/13]}
VV={};
If[BB[[1]]<=13,
  VV=Append[VV,Table[1+BB[[2]]/4,{i,1,Length[RR[[BB[[1]]+1]]}],
  VV=Append[VV,Table[1+(RR[[TT[[1]]+1,i]]+.025)/4,{i,1,Length[RR[[BB[[1]]+1]]}],
  ];

Do[
  Which[
    (*1*)
    jmin<=-j>=-jmax,
    {
      VV=Append[VV,Table[
        VV[[-1,i]] Π[(-j)+(i-1),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
        VV[[-1,i+1]] Π[(-j)+(i-1),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
        VV[[-1,i+2]] Π[(-j)+(i-1),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]],
        {i,1,Length[RR[[j]]}]];

      If[MemberQ[TT,j-1]==True && j-1≠TT[[1]] && j-1≠0 ,
        {If[j-1==TT[[-1]],
          VV[[-1]]=VV[[-1]]+BB[[2]]/4,
          VV[[-1]]=VV[[-1]]+(RR[[j]]/4+0.025/4)}
        ];
    },
    (*2*)
    jmin>(-j)>=-jmax,
    {
      AuxVV={

```

```

VV[[-1,1]] Π[(jmin),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]+
VV[[-1,2]] Π[(jmin),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]+
VV[[-1,3]] Π[(jmin),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]
};

AuxVV=Append[AuxVV,Table[
  VV[[-1,i-1]] Π[(jmin)+(i-1),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
  VV[[-1,i]] Π[(jmin)+(i-1),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
  VV[[-1,i+1]] Π[(jmin)+(i-1),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]],
  {i,2,Length[RR[[j]]}]];

AuxVV=Flatten[AuxVV];

If[MemberQ[TT,j-1]==True && j-1≠TT[[1]],
  {If[j-1==TT[[-1]],
    AuxVV=AuxVV+BB[[2]]/4,
    AuxVV=AuxVV+(RR[[j]]/4+0.025/4)
  ]}
];

VV=Append[VV,AuxVV];
},

(*3*)
jmin<=(-j)<-jmax,
{
  AuxVV=Table[
    VV[[-1,i]] Π[(-j)+(i-1),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
    VV[[-1,i+1]] Π[(-j)+(i-1),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
    VV[[-1,i+2]] Π[(-j)+(i-1),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]],
    {i,1,Length[RR[[j]]]-1}];

  AuxVV=Append[AuxVV,{
    VV[[-1,-3]] Π[(jmax),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]+
    VV[[-1,-2]] Π[(jmax),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]+
    VV[[-1,-1]] Π[(jmax),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]
  }];
  AuxVV=Flatten[AuxVV];

  If[MemberQ[TT,j-1]==True && j-1≠TT[[1]],
    {If[j-1==TT[[-1]],
      AuxVV=AuxVV+BB[[2]]/4,
      AuxVV=AuxVV+(RR[[j]]/4+0.025/4);
    ]}
  ];

  VV=Append[VV,AuxVV];
},

(*4*)
jmin>(-j)<-jmax,
{
  AuxVV={
    VV[[-1,1]] Π[(jmin),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]+
    VV[[-1,2]] Π[(jmin),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]+
    VV[[-1,3]] Π[(jmin),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]
  };

  AuxVV=Append[AuxVV,Table[
    VV[[-1,i-1]] Π[(jmin)+(i-1),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
    VV[[-1,i]] Π[(jmin)+(i-1),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
    VV[[-1,i+1]] Π[(jmin)+(i-1),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]],
    {i,2,Length[RR[[j]]]-1}]];

  AuxVV=Append[AuxVV,{
    VV[[-1,-3]] Π[(jmax),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]+
    VV[[-1,-2]] Π[(jmax),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]+
    VV[[-1,-1]] Π[(jmax),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]
  }];
}

```

```

    });
    AuxVV=Flatten[AuxVV];

    If[MemberQ[TT,j-1]==True && j-1≠TT[[1]] && j-1≠0,
      {If[j-1==TT[[-1]],
        AuxVV=AuxVV+BB[[2]]/4,
        AuxVV=AuxVV+(RR[[j]]/4+0.025/4)}}];

    VV=Append[VV,AuxVV]; }],
  {j,BB[[1]],1,-1}
];

(*Print[VV//MatrixForm];*)
Print[VV[[-1]]];

```

## Cálculo Del Vebono Callable a través de Backward Induction (Plazo a vencimiento, Cupón)

```

BB={107,0.0951};
TRedem=104;

TT=Table[BB[[1]]-j*13,{j,0,IntegerPart[BB[[1]]/13]}

VV={};
If[BB[[1]]<=13,
  VV=Append[VV,Table[1+BB[[2]]/4,{i,1,Length[RR[[BB[[1]]+1]]}],
  VV=Append[VV,Table[1+(RR[[TT[[1]]+1,i]]+.025)/4,{i,1,Length[RR[[BB[[1]]+1]]}],
];

Do[
  Which[
    (*1*)
    jmin<=-j>=-jmax,
    {
      VV=Append[VV,Table[
        VV[[-1,i]]][[(-j)+(i-1),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
        VV[[-1,i+1]]][[(-j)+(i-1),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
        VV[[-1,i+2]]][[(-j)+(i-1),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]],
        {i,1,Length[RR[[j]]}]];

      If[MemberQ[TT,j-1]==True && j-1≠TT[[1]] && j-1≠0 ,
        {If[j-1==TT[[-1]],
          VV[[-1]]=Table[Min[
            VV[[-1,i]]+BB[[2]]/4,
            If[j<TRedem,VV[[-1,i]],1]+BB[[2]]/4],
            {i,1,Length[RR[[j]]}],
          VV[[-1]]=Table[Min[
            VV[[-1,i]]+(RR[[j,i]]/4+0.025/4),
            If[j<TRedem,VV[[-1,i]],1]+(RR[[j,i]]/4+0.025/4)],
            {i,1,Length[RR[[j]]}],
          ]}
        ]}
    ],
  (*2*)
  jmin>(-j)>=-jmax,
  {
    AuxVV={
      VV[[-1,1]]][[(jmin),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]+
      VV[[-1,2]]][[(jmin),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]+
      VV[[-1,3]]][[(jmin),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]
    };

    AuxVV=Append[AuxVV,Table[
      VV[[-1,i-1]]][[(jmin)+(i-1),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
      VV[[-1,i]]][[(jmin)+(i-1),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
      VV[[-1,i+1]]][[(jmin)+(i-1),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]],
      {i,2,Length[RR[[j]]}]];
  }
];

```

```

AuxVV=Flatten[AuxVV];

If[MemberQ[TT,j-1]==True && j-1≠TT[[1]] && j-1≠0 ,
  {If[j-1==TT[[-1]],
    AuxVV=Table[Min[
      AuxVV[[i]]+BB[[2]]/4,
      If[j<TRedem,AuxVV[[i]],1]+BB[[2]]/4],
      {i,1,Length[RR[[j]]}],
    AuxVV=Table[Min[
      AuxVV[[i]]+(RR[[j,i]]/4+0.025/4),
      If[j<TRedem,AuxVV[[i]],1]+(RR[[j,i]]/4+0.025/4)],
      {i,1,Length[RR[[j]]}]]];
  VV=Append[VV,AuxVV];},

(*3*)

jmin<=(-j)<-jmax,
{
  AuxVV=Table[
    VV[[-1,i]] [[(-j)+(i-1),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
    VV[[-1,i+1]] [[(-j)+(i-1),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
    VV[[-1,i+2]] [[(-j)+(i-1),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]],
    {i,1,Length[RR[[j]]]-1}];

  AuxVV=Append[AuxVV,{
    VV[[-1,-3]] [[(jmax),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]+
    VV[[-1,-2]] [[(jmax),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]+
    VV[[-1,-1]] [[(jmax),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]
    ]};
  AuxVV=Flatten[AuxVV];

  If[MemberQ[TT,j-1]==True && j-1≠TT[[1]] && j-1≠0 ,
    {If[j-1==TT[[-1]],
      AuxVV=Table[Min[
        AuxVV[[i]]+BB[[2]]/4,
        If[j<TRedem,AuxVV[[i]],1]+BB[[2]]/4],
        {i,1,Length[RR[[j]]}],
      AuxVV=Table[Min[
        AuxVV[[i]]+(RR[[j,i]]/4+0.025/4),
        If[j<TRedem,AuxVV[[i]],1]+(RR[[j,i]]/4+0.025/4)],
        {i,1,Length[RR[[j]]}]]
      ]};
    VV=Append[VV,AuxVV];

  },

(*4*)

jmin>(-j)<-jmax,
{
  AuxVV={
    VV[[-1,1]] [[(jmin),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]+
    VV[[-1,2]] [[(jmin),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]+
    VV[[-1,3]] [[(jmin),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,1]]]
    };

  AuxVV=Append[AuxVV,Table[
    VV[[-1,i-1]] [[(jmin)+(i-1),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
    VV[[-1,i]] [[(jmin)+(i-1),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]]+
    VV[[-1,i+1]] [[(jmin)+(i-1),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,i]]],
    {i,2,Length[RR[[j]]]-1}];

  AuxVV=Append[AuxVV,{
    VV[[-1,-3]] [[(jmax),-1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]+
    VV[[-1,-2]] [[(jmax),0,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]+
    VV[[-1,-1]] [[(jmax),+1,jmin,jmax] Exp[-Δt RR[[j,-1]]]
  }];
}

```

```

    });
    AuxVV=Flatten[AuxVV];

    If[MemberQ[TT,j-1]==True && j-1≠TT[[1]] && j-1≠0 ,
      {If[j-1==TT[[-1]],
        AuxVV=Table[Min[
          AuxVV[[i]]+BB[[2]]/4,
          If[j<TRedem,AuxVV[[i]],1]+BB[[2]]/4],
          {i,1,Length[RR[[j]]}],
        AuxVV=Table[Min[
          AuxVV[[i]]+(RR[[j,i]]/4+0.025/4),
          If[j<TRedem,AuxVV[[i]],1]+(RR[[j,i]]/4+0.025/4)],
          {i,1,Length[RR[[j]]}],
        VV=Append[VV,AuxVV]; }],
      {j,BB[[1]],1,-1}
    ];

    (*Print[VV//MatrixForm];*)
    Print[VV[[-1]]];

```

## Árbol - Vebono Callable Backward Induction

```

GG={};
Do[
  GG=Append[GG,{j}];
  GG[[j]]=Table[Append[GG[[j]],VV[[-j,i]],{i,Length[VV[[-j]]]},
    {j,1,108}]; (Plazo a vencimiento +1)
MultipleListPlot[Flatten[GG,1]]

```