UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES
ESCUELA DE ECONOMÍA

Simulación del precio de opciones sobre ADRs de CANTV utilizando un Perceptrón Multicapa: Una aplicación de las Redes Neuronales Artificiales a las finanzas.

Autora:
Irene Sierraalta
Tutor:
Ronald Balza G.

Caracas, 06 de Noviembre del 2006

ÍNDICE

Introducción……..…1

Capítulo I

Instrumentos Derivados, Black-Scholes y Redes Neuronales Artificiales: Conceptos Básicos…….3

Instrumentos Derivados:Opciones……...3

Fórmula de Black-Scholes……...5

Redes Neuronales Artificiales……..7

Redes Biológicas……...8

Estructura de la red……..8

Funciones…….....……10

Función de Suma…….……..10

Función de Transferencia.……10

Capas Ocultas…….....11

Perceptrón Multicapa……...12

Proceso de Aprendizaje……..13

Métodos de entrenamiento……..14

CapítuloII

Modelo de Redes Neuronales Artificiales: Construcción y Análisis de Resultados…...15

Generación de Datos……..15

Creación de opciones: Fecha de Expiración……..16

Precio de Ejercicio…….17

Volatilidad……...18

Tiempo de Maduración……...19

Tasa Libre de Riesgo (LIBOR)……...20

Precio de los call options……20

Construcción del modelo……...21

Medidas de Desempeño…….24

Resultados Obtenidos…….25

Conclusiones……..27

Apéndices……...……...28
Derivación de la fórmula de Black-Scholes……....28
Proceso de aprendizaje de una red……..…31
Precios de cierre del ADR de CANTV 1996-2006……..33
Calendario de Fechas de Expiración…….34
Matriz de Datos……..35
Tabla de Ponderaciones obtenidas.…….36
Bibliografía……...……....37

INTRODUCCIÓN

En 1973, Fisher Black y Myron Scholes determinaron una fórmula para valorar los precios de las opciones, cuya formación presenta características distintas a la de otros derivados tales como los *forwards* o los futuros. Dicha fórmula es capaz de aproximar bastante bien los precios estimados de las opciones europeas a los precios observados en el mercado, sin embargo, para que la fórmula funcione existen ciertas características que deben cumplirse, tales como la no existencia de costos de transacción por venta o compra del activo, volatilidad constante, distribución de los precios de los activos lognormal, entre otras. Estos supuestos hacen, que si bien la fórmula aproxima bastante bien los valores observados en el mercado, no tiene un buen desempeño donde dichas condiciones no se cumplen, como mercados pequeños o poco desarrollados.

Las Redes Neuronales Artificiales (RNA), por su parte, son modelos no lineales y no paramétricos que ofrecen la posibilidad de estimar resultados sin hacer suposiciones sobre las distribuciones de probabilidades de las variables aleatorias. Así, es posible establecer un modelo de RNA para estimar el precio de las opciones que no necesite de ningún supuesto previo sobre las variables. Esto es lo que se pretende desarrollar en este trabajo: un modelo de RNA para valorar los precios de los *call options* sobre ADRs (*American Depositary Receipts*) de CANTV[1] alternativo a la fórmula de Black-Scholes. Sin embargo para la realización de este trabajo, no se contó con un registro disponible de los precios de los *call options* sobre ADRs, por lo que se debió simular parte de los datos necesarios para la construcción del modelo, utilizando la fórmula de Black-Scholes para simular los precios de los *call option*.

Temas relacionados han sido estudiados anteriormente. Entre los estudios más resaltantes, se encuentran:

- Hutchinson (1994) es uno de los primeros en comparar un modelo de RNA con la fórmula de Black-Scholes en la valoración de opciones; utilizando como variables el precio del activo subyacente normalizado por el precio de ejercicio

[1] Los ADRs equivalen a 7 acciones de CANTV: si se posee un ADR en el mercado de Nueva York, se poseen 7 acciones de CANTV en el mercado venezolano.

de la opción, la volatilidad histórica y el tiempo de maduración. Concluye que el modelo de RNA da una mejor aproximación a los precios de mercado.

- Amilon (2003), al igual que Hutchinson (1994), establece una comparación entre un modelo de RNA y la fórmula de Black-Scholes. La diferencia radica, sin embargo, en que este estudio se realizó utilizando índices, tanto para las opciones como para los precios de los activos. Compararon el modelo de RNA obtenido con la fórmula de Black-Scholes con volatilidad histórica e implícita. Sus estudios concluyen que las RNA supera a la fórmula de Black-Scholes en la estimación de los precios.
- Herrmann y Narr (1997) determinan qué tan bien un modelo de RNA es capaz de interpolar la fórmula de Black-Scholes. Así mismo, tratan de determinar cuál es el mecanismo implícito de formación de precios en los mercados. Sus estudios concluyen que un modelo de RNA es capaz de interpolar muy bien la fórmula de Black-Scholes, así como sus derivadas parciales. Igualmente concluyen que las RNA explican los precios del mercado mejor que Black-Scholes.

En el capítulo 1 se da una breve introducción a la teoría de instrumentos derivados, la fórmula de Black-Scholes y las Redes Neuronales Artificiales. En el capítulo 2 se describe la metodología utilizada para generar los datos necesarios para entrenar al modelo de redes, así como la construcción del mismo y los resultados empíricos obtenidos. Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas. En el apéndice se puede observar la derivación de la fórmula de Black-Scholes, así como un ejemplo detallado del proceso de aprendizaje de una RNA.

CAPÍTULO I

Instrumentos Derivados, Black-Scholes y Redes Neuronales Artificiales: Conceptos básicos

En este capítulo se van a repasar algunos conceptos básicos pertenecientes a los instrumentos derivados, particularmente a las opciones. Así mismo se pasará a desarrollar el modelo de Black-Scholes, el resumen de las ideas detrás de la fórmula, los supuestos y la derivación de la misma. Por último, se desarrollará la teoría correspondiente a las Redes Neuronales Artificiales (RNA), sus componentes y su funcionamiento.

1.1 Instrumentos Derivados: Opciones

Con algunos contratos el poseedor del documento tiene la obligación o la alternativa de comprar o vender un activo financiero en un tiempo futuro. El precio de cualquier contrato de estos deriva su valor del precio del activo financiero subyacente. En consecuencia, son llamados instrumentos derivados. Los principales instrumentos derivados son los contratos a futuro y los contratos de opciones. Los contratos derivados proporcionan a los inversionistas y emisores de títulos una forma para controlar algunos riesgos mayores (Fabozzi 1996).

Una opción es un derivado que da el derecho de comprar o vender un activo, sujeto a ciertas condiciones, en un periodo de tiempo especifico. Hay dos tipos básicos de opciones. Un *Call Option* le da al tenedor la opción de comprar el activo subyacente a un precio determinado en una fecha específica. Un *Put Option* le da al tenedor el derecho de vender el activo subyacente a un precio determinado en una fecha determinada. Existen opciones que pueden ser ejercidas en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento, como son las opciones americanas. Otras opciones se pueden ejercer solamente en la fecha de vencimiento, y son las llamadas opciones europeas. Existen dos partes en un contrato de opciones: el comprador y el escritor (también llamado el vendedor). En un contrato de opciones, el escritor de la opción otorga al comprador del instrumento el derecho, más no la obligación, de comprar o vender al escritor algo a una fecha especificada en un periodo especificado. El escritor otorga este derecho al

comprador a cambio de cierta cantidad de dinero, el cual es llamado el *precio de opción.* El precio al cual da derecho la opción de comprar o vender el sustentante (esto es, el activo subyacente) se le llama *precio de ejercicio* o *strike price*. La fecha después de la cual una opción es inválida se le llama *fecha de maduración o fecha de vencimiento.*

La máxima cantidad que un comprador de opciones puede perder es el precio de la opción. La ganancia máxima que el escritor de la opción (vendedor) puede realizar es el precio de la opción. El comprador de la opción tiene un potencial de rendimiento sustancialmente alto, mientras que el escritor de la opción tiene un riesgo sustancialmente alto.

No existen requerimientos de margen para el comprador de una opción una vez que el precio de la opción ha sido totalmente pagado. Ello obedece a que el precio de la opción es la cantidad máxima que el inversionista puede perder, no importando que tan adverso sea el movimiento del precio del activo sustentante, ningún margen es necesario. Como el cambio de precio ocurre de tal manera que afecta la posición del escritor, se necesita que éste deposite un margen adicional cuando la posición es ajustada al valor del mercado.

Las opciones como cualquier otro instrumento financiero pueden ser transadas en una casa de bolsa organizada o en el mercado de mostrador (*over the counter*). Su valor puede ser afectado, entre otras cosas, por el valor del activo subyacente, y más importante, por la volatilidad del activo.

En general, parece claro que mientras más alto el precio del activo, mayor es el valor de la opción, particularmente del *call option* (Hull 2002). Cuando el precio del activo es mucho mayor que el precio de ejercicio, es casi seguro que la opción será ejercida, se dice por lo tanto que la opción está *"in the money"*. Por otra parte, si el precio del activo (*stock*) es mucho menor que el precio de ejercicio, es casi seguro que la opción expirará antes de ser ejecutada, así que su valor será cercano a cero; es decir, la opción se encuentra *"out of the money"*. En el caso en el que el precio de ejercicio y el precio del activo coincidan, se dice que la opción está *"at the money"*.

Si la fecha de expiración de la opción está muy lejos en el futuro, el valor de la opción será aproximadamente igual al precio del activo. Por otra parte, si la fecha de expiración está muy cerca, el valor de la opción será aproximadamente igual al precio del

activo menos el precio de ejercicio, o cero, si el precio del activo es menor que el precio de ejercicio. Normalmente el valor de una opción declina en la medida en que su fecha de maduración se acerca, si el valor del activo no cambia.

El precio de la opción no puede ser mayor que el precio del activo, así como no puede ser negativo (su valor mínimo es cero, cuando está muy (*deep*) "*out of the money*"), ni menor que el precio del activo menos el precio de ejercicio. Esto origina que la curva que representa el precio de la opción en función del precio del activo, en vez de ser una línea recta como en el caso de los futuros, sea una curva convexa.

Estas propiedades generales de la relación entre el valor de la opción y el precio del activo fue lo que originó que Black y Scholes (1973) trataran de buscar una fórmula para estimar el precio de dicho derivado.

1.2 La fórmula de Black-Scholes

A principio de los años 70, Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton presentaron su famosa fórmula para valorar derivados. Black y Scholes basan su fórmula sobre la siguiente premisa:

"Si las opciones están correctamente valoradas en el mercado, no debería ser posible hacer ninguna ganancia segura creando un portafolio (sintético) de posiciones largas y cortas". (Black y Scholes, 1973, p 637)

Lo anteriormente dicho deja claro que Black y Scholes suponen que el arbitraje no es posible, es decir, suponen la eficiencia del mercado. Así mismo, en la derivación de la fórmula de valoración de la opción en función del precio del activo, asumieron lo que ellos llamaron "condiciones ideales" en el mercado del activo para la opción. Éstas son:

- La tasa de interés en el corto plazo es conocida y constante en el tiempo
- El precio del activo sigue una caminata aleatoria (*random walk*) en tiempo continuo con una tasa de varianza proporcional al cuadrado del precio del activo. Así la distribución de precios de activos posibles al final de cualquier intervalo finito es lognormal. La tasa de varianza de retorno del activo (lo que ellos

definieron como volatilidad) es constante. El retorno del activo está definido como el cambio porcentual en el precio del activo.

- El activo no paga dividendos u otras distribuciones
- La opción es Europea, es decir, que sólo puede ser ejercida en la maduración.
- No hay costos de transacción en comprar o vender el activo o la acción.
- Es posible pedir prestada una fracción del precio de un activo para comprarlo o mantenerlo, a la tasa de interés de corto plazo.
- No hay penalidades por venta en corto.

Bajo esas premisas, el valor de la opción sólo dependerá del precio del activo, del tiempo y de variables que son asumidas como conocidas y constantes.

A pesar de lo cuestionable de dichos supuestos, incluyendo el más crucial de todos, la "lognormalidad" de los precios y el intercambio (*trading*) continuo, lo precios de Black-Scholes están bastante cerca de aquellos observados en el mercado. La aproximación de la volatilidad como un movimiento estocástico es el supuesto del trabajo original que más se ha tratado de levantar en otras investigaciones (Scott 1987, citado por Amilon, 2003).

La fórmula de Black-Scholes para valorar un *call option* europeo, sobre un activo que no paga dividendos, en el momento cero, se define así:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \qquad (1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Donde la función $N(x)$ es la función de probabilidad acumulada para una distribución normal estandarizada. (La probabilidad de que una variable con una distribución normal estándar, $\varphi(0,1)$ sea menor que x).

La variable *C* es el precio del *call option*, S_0 es el precio del activo en el momento cero, *K*, es el precio de ejercicio, *r* es la tasa libre de riesgo, σ es la volatilidad del activo y *T* es el tiempo de maduración de la opción. Con esta fórmula Black y Scholes lograron finalmente obtener una aproximación bastante adecuada a los precios de las opciones observados en el mercado[2]

A pesar de las aparentes ventajas de esta fórmula, tiene, como todo modelo, ciertas limitaciones, no teniendo muy buenos resultados en mercados donde las "condiciones ideales" no se cumplen. Por este motivo, se ha tratado de obtener modelos alternativos para la valoración de opciones, entre los cuales se pueden contar los modelos de Redes Neuronales Artificiales.

1.3 Redes Neuronales Artificiales

Las Redes Neuronales Artificiales (RNA) son una tecnología de procesamiento de información inspirada por los estudios del cerebro y del sistema nervioso. Las investigaciones en este tema disminuyeron en los años 70 y resurgieron nuevamente en los años 80.

Una diferencia esencial entre las redes neuronales y otros modelos matemáticos que se usan con más frecuencia, reside en el proceso de construcción. En los modelos matemáticos es necesario especificar *a priori* la función que sigue cualquier proceso que se pretenda modelizar, mientras que una red neuronal desarrolla una aproximación a la relación funcional desconocida que liga unas variables con otras.

A continuación se hace una breve introducción sobre las Redes Neuronales Artificiales, sus componentes y funcionamiento. Esta descripción se va a realizar siguiendo a Turban y Trippi (1993) y Peña (2002)

[2] La derivación detallada de la fórmula de Black-Scholes puede verse en el Apéndice A

1.3.1 *Redes Biológicas*

El cerebro humano y animal está compuesto de células llamadas neuronas. Éstas funcionan en grupos llamados redes; cada grupo contiene miles de neuronas interconectadas, así el cerebro puede ser visto como una colección de redes neuronales.

Una Red Neuronal Artificial es un modelo que simula una red neuronal biológica. Una neurona artificial recibe una entrada análogo a los impulsos electroquímicos que las neuronas biológicas reciben de otras neuronas. La salida (*output*) de la neurona artificial corresponde con las señales enviadas por una neurona biológica.

Los elementos que componen una Red Neuronal Artificial se pueden resumir en:

a) Elementos de Procesamiento: Una RNA está compuesta de neuronas artificiales o nodos; estás son los elementos de procesamiento. Cada una de las neuronas recibe unas variables de entrada, las procesa y entrega una(s) variable(s) de salida. La variable de entrada puede arrojar un dato u otro elemento de procesamiento. La variable de salida puede ser el producto final o la entrada de otra neurona.

b) Capas: Cada RNA está compuesta por una colección de neuronas agrupadas en capas. Se distinguen tres tipos de capas, una capa de entrada, también llamada *capa input*, otra capa de salida o *capa output* y una o varias capas intermedias o *capas ocultas*.

1.3.2 *Estructura de La Red*

Similarmente a las redes biológicas, una RNA puede ser organizada en diversas formas (topologías); esto es, las neuronas pueden ser interconectadas de distintas maneras, por lo que las RNA aparecen en varias formas, tal como se puede apreciar en la figura 1. En el procesamiento de la información, muchos de los elementos de procesamiento realizan sus cálculos simultáneamente.

Una vez que la estructura de la red está establecida, la información relevante puede ser procesada. Los elementos que participan en el procesamiento son las entradas, las salidas y las ponderaciones (*weights*), recordando que las neuronas o nodos son las que realizan dicha operación.

- Entradas: Cada entrada corresponde a un solo atributo. El valor de un atributo es la entrada de la red. La data cualitativa puede ser representada numéricamente.
- Salidas: La salida es la solución del problema. El propósito de la red es calcular el valor de la salida.
- Ponderaciones (*weights*): El elemento clave de una RNA son las ponderaciones, las cuales expresan la fuerza relativa (o el valor matemático) de la data inicial o las varias conexiones que transfieren data de capa a capa. En otras palabras, las ponderaciones expresan la importancia relativa de cada entrada a un elemento de procesamiento. Las redes aprenden a través de ajustes en las ponderaciones.

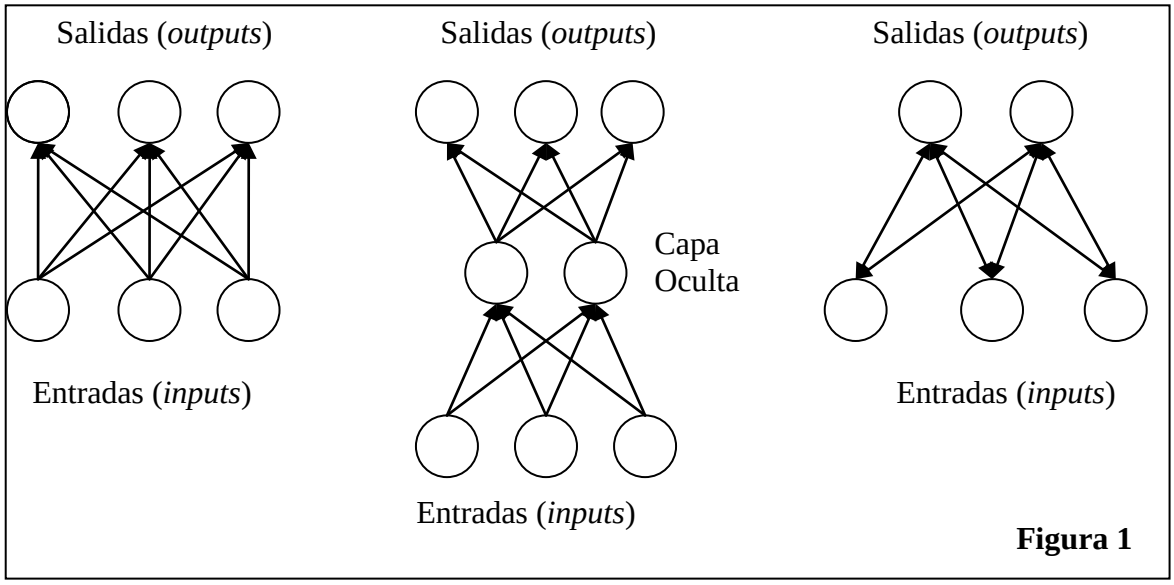


Figura 1

1.3.2.1 *Funciones*

La funcionalidad de las distintas neuronas está representada por las siguientes funciones:

1. Función de Suma

La información que recibe una neurona de una capa oculta o de salida es el resultado de ponderar la salida de cada neurona de la capa previa y agregarla, esto es lo que se conoce como la función de suma.

La función de suma encuentra la ponderación promedio de todas las entradas a cada neurona. Multiplica el valor de la entrada (*Xs*) por las ponderaciones (*Ws*) y los totaliza juntos por la suma de las ponderaciones, *Y*. Así, para *N* entradas *i* en una neurona *j*, tenemos:

$$Y_j = \sum_{j}^{n} X_i W_{ij} \qquad (2)$$

2. Función de Transformación (o Transferencia)

La función de suma calcula la simulación interna, o el nivel de activación, de la neurona. Basado en este nivel, la neurona puede o no producir una salida. La relación entre el nivel de activación interna y la salida puede ser lineal o no lineal. Dichas relaciones son expresadas por una función de transformación (o transferencia) y las hay de distintos tipos; la selección de la función específica determina la operación de la red. El propósito de estas transformaciones es modificar las salidas para obtener un valor razonable, por ejemplo un valor entre 0 y 1, y son hechas antes de que las salidas alcancen el siguiente nivel. También, en vez de una función de transformación, se utiliza un umbral. Por ejemplo, cualquier número por encima de 0,5 se iguala a 1 y cualquier número por debajo se iguala a cero.

Las funciones de transformaciones más conocidas utilizadas en las redes neuronales llamadas *feed forwards* (aquellas que procesan la información hacia delante: las neuronas sólo mantienen conexión con las neuronas de la capa siguiente), son la sigmoide y la función de tangente hiperbólica (tanh). La primera arroja valores entre 0 y 1 y la segunda valores entre -1 y 1.

La estructura de una neurona artificial, puede verse en la figura 2

Estructura Básica de un nodo o elemento de procesamiento

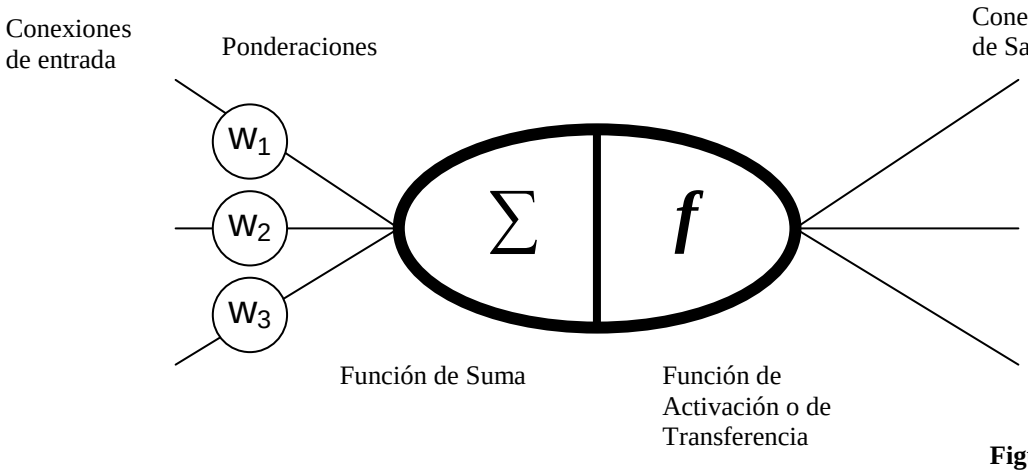


Figura 2

1.3.2.2. *Capas Ocultas*

Para la construcción de una RNA hay que tener en cuenta dos cosas fundamentales: El número de capas ocultas adecuado y el número de neuronas de las mismas. Lo primero puede resolverse haciendo uso del teorema de Kolmogorov que dice que cualquier función continua creciente en *n* variables puede ser calculada usando sólo sumas lineales y una función no lineal continua y creciente en una variable. Esto demuestra que el conjunto de redes neuronales con tres capas es denso en el espacio de todas las funciones continuas en *n* variables. Como consecuencia, una red neuronal con tres capas puede aproximar cualquier función.

Respecto al número de neuronas en la capa oculta, la teoría existente no dice cuál debe ser. La elección de cuántas neuronas deben utilizarse depende de distintos factores, como la naturaleza del problema o el tamaño y calidad de los datos. Dos o menos neuronas ocultas pueden simplificar demasiado la red y no tener suficiente capacidad para aprender. Así mismo, demasiadas neuronas en la capa puede dar lugar a la "*memorización*". Este problema puede explicarse siguiendo un ejemplo: suponiendo que la red tratara de ajustar una curva a un grupo de puntos (datos), a medida que la red aprende, la curva se ajusta cada vez mejor, pero en algún momento la curva empieza a ajustar todos los puntos, tanto los que están por arriba como los que están por debajo de la curva óptima. Esto es lo que se llama *"memorización", o "sobre-aprendizaje" (overfitting).* Una vez que la red empieza a "memorizar" la data, no es capaz de tener un buen desempeño con nuevos datos a la cual no ha sido expuesta; es decir, la curva no encaja bien en los nueva data porque la red ha perdido la idea general de los datos viejos.

Decidir el número de capas y neuronas, así como las variables de entrada y salida, es decir, determinar la topología o estructura de la red, es el primer paso para implementar este tipo de modelos.

1.3.2.3 *Perceptrón Multicapa* (*Multicapa Perceptron*)

Un caso particular de las redes *feed forwards* es la Perceptrón Multicapa (*Multilayer Perceptron).* Este tipo de red consiste en múltiples capas de neuronas, usualmente interconectadas hacia delante. Cada neurona en una capa tiene conexión directa a la neurona de la capa subsiguiente. Así la forma funcional típica de una red de este tipo, con una capa oculta y una neurona de salida es:

$$net(\vec{\mathrm{I}}) = f\left[\sum_{j=1}^{J}\omega_2(j,k)\, f\left[\sum_{i=1}^{I}\omega_1(i,j)\vec{\mathrm{I}}(i)+\theta_1(j)\right]+\theta_2(k)\right]$$

Donde

f :función de transferencia monotónicamente creciente

$\omega_1(i, j)$:ponderación entre la unidad *i* de la capa de entrada y la unidad *j* de la capa oculta.

$\omega_2(j, k)$:ponderación entre la unidad *j* de la capa oculta y la unidad *k* de la capa de salida

$\vec{I}$ (i) :parámetro *i* del vector de entrada, $\vec{I}$

$\theta_1(j)$:sesgo de la unidad *j* de la capa oculta

$\theta_2(k)$:sesgo de la unidad de salida

1.3.3 *Proceso de Aprendizaje*

Una RNA aprende de sus errores. El proceso de aprendizaje o entrenamiento de la red involucra tres tareas: Calcular las salidas, comparar las salidas con las respuestas deseadas, ajustar las ponderaciones y repetir el proceso.

El proceso de aprendizaje usualmente empieza colocando las ponderaciones al azar. La diferencia entre la salida efectiva y la salida deseada es el error. La idea es minimizar (o eliminar) el error y esto se hace mediante un cambio incremental de las ponderaciones. El procesamiento de información de las RNA consiste en analizar patrones de actividad con información aprendida y almacenada en las ponderaciones de la conexión de las neuronas.

Durante las etapas de aprendizaje, las ponderaciones de las interconexiones cambian en respuesta a la data entrenada presentada al sistema. Diferentes RNA calculan el error de diferentes formas, dependiendo del algoritmo de aprendizaje que este siendo usado. Cuando se entrena una red, la data se divide en dos categorías: el conjunto de prueba y el conjunto de entrenamiento[3].

Las RNA, al igual que otros modelos estadísticos y matemáticos, tienen sus ventajas y desventajas. Una de sus principales ventajas es que no requieren conocimiento sobre las variables para ser formalizadas, son apropiadas para casos donde el

[3] El proceso detallado de aprendizaje de una red se encuentra en el apéndice B

conocimiento es escaso. Por otro lado, las RNA son útiles para resolver problemas no lineales, son capaces de deducir probabilidades con el entrenamiento. A diferencia de algunos modelos estadísticos convencionales, no presentan problemas al trabajar con data histórica altamente correlacionada. Así mismo, las redes tienen otros beneficios tales como: el fallo de una neurona o conexión no hace que el sistema falle, genera una respuesta razonable cuando la entrada presenta ruido o está incompleta y las RNA son adaptables a nuevos ambientes y a cambios en patrones de los datos, lo cual les da una enorme capacidad predictiva.

Sin embargo, a pesar de todas sus ventajas aparentes, las RNA presentan también algunas debilidades o desventajas. La más importante de todas es la difícil explicación de los resultados, debido a que las ponderaciones no siempre tienen interpretaciones obvias. Por otro lado, las RNA no pueden ofrecer siempre una solución óptima a un problema. Incluso, establecer la mejor arquitectura de la red así como la mejor manera de suministrar los datos de entrada, está sujeto a ensayo y error. Por último, usualmente las RNA requieren grandes cantidades de datos y largos períodos de entrenamiento.

1.3.4 *Métodos de entrenamiento*

La manera como una RNA aprende a mejorar su desempeño depende principalmente del método de entrenamiento que se utilice. Los hay de varios tipos.

a) Propagación Reversa (*Back Propagation*)

Es el método más simple y básicamente lo que hace es determinar si al aumentar o disminuir el valor de la ponderación, disminuye el error de salida pero no puede determinar cuánto necesita cambiar la misma, sólo puede hacer una aproximación. Este método supone que el error es una parábola: desde cualquier punto en que se encuentre el error, sólo mejora si se consigue una ponderación que lo haga moverse en dirección al fondo de la parábola. El método es un ejercicio de minimización del error.

b) Percolación Reversa (*Back Percolation*)[4]

El método de Propagación Reversa realiza una asignación secuencial de ponderaciones a las neuronas por cada ciclo hasta llegar a las salidas. Esto se hace sin evaluar el error cometido durante la ejecución del ciclo. En contraste, la Percolación Reversa, se vale de un mecanismo de rebalanceo de las ponderaciones de las neuronas de entrada, observando en cada ciclo el efecto que tal rebalanceo tiene sobre las salidas de la red. De esta manera, durante la ejecución del ciclo, se buscan nuevas ponderaciones que disminuyan la diferencia existente entre el valor pronosticado por la red y el valor real observado.

CAPÍTULO II

Modelo de Redes Neuronales Artificiales: Construcción y Análisis de Resultados

En este apartado se procederá a explicar cómo se generaron los datos necesarios para entrenar a la RNA. Como datos base se utilizaron los precios de los ADR de CANTV, así como las tasas LIBOR a 3 y 6 meses. Los precios de las opciones, así como el precio de ejercicio y el tiempo de maduración se simularon siguiendo las reglas de la *Chicago Board Option Exchage* (CBOE), uno de los *exchange trading stock options* en los Estados Unidos, así como la fórmula de Black-Scholes. Seguidamente se explicarán las medidas de desempeño utilizadas para determinar cuál estructura es la más adecuada y finalmente se procederá a analizar los resultados obtenidos.

2.1 Generación de los Datos

El propósito de este trabajo es modelar una Red Neuronal Artificial (RNA) para estimar los precios de los *call options* de ADRs de CANTV a partir de datos simulados. Debido a que no existe registro histórico disponible de los precios de las opciones y las

[4] Para mayor información, ver Jurik (1996)

RNA son modelos data-intensivos, se tuvo que simular parte de los datos para contar con la información suficiente para entrenar la red.

Los datos que se van a utilizar en el modelo son los mismos utilizados en el modelo de Black-Scholes, a saber, el precio de ejercicio, el tiempo de maduración, la volatilidad, la tasa libre de riesgo (tasa LIBOR en este caso), el precio del activo subyacente (precio del ADR de CANTV[5]) y el precio del *call option*. Este último se obtuvo a partir de la fórmula de Black-Scholes utilizando los mismos datos referidos arriba. Se pasará a explicar a continuación cómo se construyeron cada una de las opciones.

2.1.1 *Creación de las opciones: Fecha de expiración*

La creación de las opciones se hará siguiendo las reglas de la CBOE, reseñadas en Hull (2002) y Hutchinson (1994)

Una opción vence exactamente a las 10:59pm del sábado siguiente al tercer viernes del mes de expiración. El último día en que las opciones se transan es el tercer viernes del mes de expiración, específicamente hasta las 4.30pm, fecha límite que tiene un poseedor de la opción para indicarle a su corredor que la ejerza; éste tiene entonces hasta las 10:59pm del sábado siguiente para completar los trámites respectivos (ver Hull 2002).

Las opciones pueden estar en 3 ciclos distintos: El ciclo de Enero, de Febrero o de Marzo. El ciclo de Enero consiste en los meses de Enero, Abril, Julio y Octubre. El ciclo de Febrero consiste en los meses de Febrero, Mayo, Agosto y Noviembre. Y el ciclo de Marzo consiste en los meses de Marzo, Junio, Septiembre y Diciembre. Si la fecha de expiración del mes en curso aún no ha sido alcanzada, las opciones que se transan tienen fechas de expiración en ese mes, el mes siguiente y los siguientes dos meses del ciclo. Si la fecha de expiración del mes en curso ya pasó, las opciones que se transan tienen fecha de expiración el mes siguiente, el mes siguiente a ese y los dos meses siguientes en el ciclo. Por ejemplo, si un activo está en el ciclo de Enero, al principio del mes, las

[5] Los precios de los ADR de CANTV se obtuvieron de http://finance.yahoo.com

opciones que se transan tienen fecha de expiración en Enero, Febrero, Abril y Julio; ya a finales de Enero, cuando la fecha de expiración de este mes pasó, las opciones se transan con fechas de expiración en Febrero, Marzo, Abril y Julio. Cuando las opciones alcanzan su expiración, empiezan a transarse otras de forma inmediata. De esta forma, para cualquier momento del tiempo, las opciones sobre un activo tienen únicamente cuatro fechas de expiración.

Los ADRs de CANTV se mueven en el ciclo de Enero. Basándose en las reglas anteriormente descritas se procedió a crear un calendario de expiración[6]. El horizonte temporal escogido fue de dos años, del 1ro de Enero de 1997 al 17 de Diciembre de 1999 fecha en que vence la última opción simulada. La escogencia de este período se hizo debido a que durante estos dos años los precios del ADR mostraron altas fluctuaciones; lo cual resulta importante para lidiar con el *"problema de la ponderación"* (*peso problem*). Éste se presenta generalmente en las series de tiempo, puesto que éstas no son lo suficientemente grandes como para representar adecuadamente la distribución del activo subyacente y la probabilidad de que ocurran eventos extremos (caídas o alzas del precio muy grandes) no está representada en el período de tiempo escogido. Para tratar de solucionar ese problema, se escogió un período de prueba que captura los estados volátiles de los mercados financieros (Amilon 2003).

2.1.2 *Precio de Ejercicio*

El *Chicago Board Options Exchange* (CBOE), normalmente escoge precios de ejercicio para las opciones con un espacio de 2,5$, 5$ ó 10$ entre ellos. Cuando una nueva fecha de expiración es introducida, los dos o tres precios de ejercicios más cercanos al precio del activo en ese momento son los que usualmente se escogen para ser transados. Si el precio del activo se mueve fuera del rango definido entre el precio de ejercicio más alto y el más bajo, usualmente se incorpora una nueva opción con un nuevo precio de ejercicio de forma que el precio del activo quede nuevamente dentro del rango. Así mismo, para precios de activo entre 25$ y 200$, el CBOE escoge precios de ejercicios múltiplos de 5 (Hutchinson 1994).

[6] Ver Apéndice D

Para efectos de este trabajo, se empezó con dos precios de ejercicio (es decir, dos opciones con precios de ejercicio distintos) para cada una de las fechas de expiración. Así, para la fecha entre el 1ro de Enero de 1997 y el 17 de Enero de ese año (1ra fecha de expiración), se tienen 8 opciones (2 por mes de expiración). Los precios de ejercicio originales se escogieron estableciendo un rango de 5$ por arriba y por debajo del precio del activo en el momento y a partir de ahí se siguieron las reglas descritas. Para valores del ADR por encima de 25$, los precios de ejercicio se establecieron con espacios de 5$ entre ellos, mientras que para valores por debajo de 25$, se establecieron precios de ejercicios con espacio de 2,5$ entre ellos. Esto último se hizo basándose en una observación previa del comportamiento de las opciones sobre ADR en los últimos meses del año en curso (2006), en el cual para valores por debajo de 25$, los precios de ejercicio siguen dicho comportamiento. Los precios de ejercicio obtenidos van desde 10$ hasta 47,5$ por opción.

2.1.3 *Volatilidad*

En la valoración de opciones, quizás la variable más importante es la volatilidad (σ). Existen dos tipos de aproximación para estimar y predecir la volatilidad: el enfoque histórico y el enfoque de la volatilidad implícita.

El enfoque histórico (también conocido como la volatilidad histórica) es la más sencilla de calcular, porque asume que la volatilidad del período *t+1* es un estimado obtenido de una muestra, de un tamaño determinado, de precios pasados del activo subyacente (éstos son usualmente observados en intervalos fijos de tiempo, cada día, cada semana, cada mes). Suponiendo una muestra de tamaño *n* y:

$$S_{t-n+1},...,S_{t-1},S_t$$

sean los precios históricos diarios del activo subyacente. Para obtener un estimado para σ_{t+1}, primero se calculan los retornos diarios, $r_{t-i} = \ln(S_{t-i}) - \ln(S_{t-i-1})$, $i = 0,...,n-2$.

Para una muestra de *n* precios históricos, obtenemos *n*-1 tasas de retorno diarias. La desviación estándar anualizada de esas tasas de retorno es lo que se define como la volatilidad histórica y puede ser usada como una estimación de σ_{t+1}. Uno de los principales problemas con esta aproximación es que asume que la volatilidad futura no va a cambiar y que la historia se va a repetir, sin embargo, la experiencia muestra que esto no sucede así en los mercados.

El enfoque de la volatilidad implícita supone que la volatilidad de mañana σ_{t+1}, sólo puede ser calculada mañana, es decir, en tiempo real. Los precios de las opciones son formados por la oferta y la demanda. Cada agente estima una volatilidad antes de hacer su oferta o demanda y de esta forma, aceptando el precio de mercado del *call option* como un precio que refleja las opiniones de los participantes, se resuelve el modelo de Black-Scholes para la volatilidad que lleva al precio observado. Esta volatilidad es la que se conoce como "volatilidad implícita", llamada así porque se estima resolviendo la fórmula de Black-Scholes.

Cómo ya se mencionó anteriormente, no se tiene registro histórico disponible de los precios de los *call options* y por lo tanto el cálculo de la volatilidad implícita no es posible en este trabajo, razón por la cual se tuvo que usar la volatilidad histórica teniendo en cuenta las debilidades de la misma. Se utilizó un horizonte de 20 días anteriores, para el cálculo de la volatilidad cada día. Se escogió esta medida por considerarse un horizonte cercano (Malliaris y Salchenberger, 1993), ya que mientras más lejos, mayor error de estimación.

2.1.4. *Tiempo de Maduración*

El tiempo de maduración depende de cada opción. Los tiempos de maduración de las opciones simuladas oscilan entre 1 y 169 días, donde la mayoría está ubicada entre 39 y 45 días.

2.1.5 *Tasa libre de riesgo (LIBOR)*

LIBOR significa *London Inter-Bank Offered Rate* por sus siglas en inglés. Es la tasa promedio que queda fijada por las operaciones realizadas por los euro-bancos más importantes en el mercado de Londres, diariamente a las 11:00am (Hora Greenwich); por lo que se puede generalizar que la tasa LIBOR refleja el costo de los bancos para financiar sus recursos en dólares en el euro-mercado. Hay cientos de tasas LIBOR reportadas cada mes en diversas divisas.

De las tasas LIBOR reportadas en dólares (US$), las más comunes son la LIBOR a un mes, 3 meses, 6 meses y un año. En este trabajo se utilizaron las tasas LIBOR a 3 y 6 meses, dependiendo de la duración de las opciones; para las opciones con una duración menor a 3 meses (90 días), se utilizo la LIBOR a 3 meses y para las opciones con una duración mayor se utilizó la LIBOR a 6 meses (ninguna opción utilizada en este trabajo supera los 6 meses). La escogencia de estas dos tasas se baso en el promedio de duración de las opciones simuladas.

2.1.6 *Precios de los call options*

Para obtener los posibles precios de los *call options* se aplicó la fórmula de Black-Scholes explicada en el capítulo anterior, a cada una de las opciones simuladas, obteniendo así un registro de precios para cada opción para cada momento del tiempo.

En general, casi todas las opciones transadas en los mercados americanos son opciones americanas, sin embargo, si la opción no paga dividendos, puede ser tratada como una opción europea, ya que no resulta racional en este caso ejercer la opción antes de la fecha de maduración (Hull 2002). A efectos de este trabajo, las opciones serán tratadas como opciones americanas que no pagan dividendos, razón por la cual el cálculo de su precio con la fórmula de Black-Scholes es válido.

Se asume que todas las opciones generadas de acuerdo a las reglas mencionadas son transadas todos los días, aún y cuando en la práctica, las opciones muy "*out of the money*" o con fecha de vencimiento muy lejos son usualmente muy ilíquidas.

2.2 Construcción del Modelo

El objetivo principal de este trabajo es obtener un modelo de RNA que sirva para calcular y predecir los precios de los *call option*, para lo cual se realizaron varios modelos de redes y, utilizando unas medidas de desempeño (Herrmann y Narr 1997) se determinó la mejor estructura de red.

Las redes escogidas fueron Perceptrón Multicapa con cinco nodos de entrada, una capa oculta de 2, 3, 4, 5 y 11 nodos respectivamente y un nodo de salida. La escogencia del número de nodos responde al número de entradas y salidas con los que se trabajaron.

Como parámetros de entrada se usaron:

- El precio del activo subyacente (S)
- El precio de ejercicio (X)
- Tiempo de maduración (T)
- La tasa LIBOR (r)
- La volatilidad (σ)

La forma funcional de la red utilizada, se define así:

$$net(\vec{\mathrm{I}}) = f\left[\sum_{j=1}^{J} \omega_2(j,1)\, f\left[\sum_{i=1}^{5} \omega_1(i,j)\vec{\mathrm{I}}(i) + \theta_1(j)\right] + \theta_2(1)\right]$$

La estructura de la red escogida es la que se presenta en la figura 3

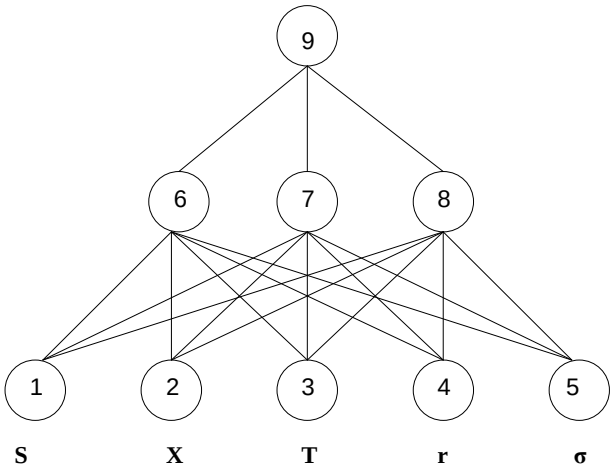


Figura 3

Se usó una función de transferencia logística (sigmoide) de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$

Esta es la función es transferencia más común, como Friedman (1994) (citado por Herrmann y Narr, 1997) destaca. Así mismo, establece que la escogencia de la función de transferencia es raramente crucial.

Cada conjunto de entrenamiento consistió en cinco variables de entrada $\vec{\mathrm{I}} = (S, X, T, r, \sigma)$ y una variable de salida **O**, correspondiente a los precios de los *call options*.

Para encontrar las ponderaciones correspondientes a la mejor red posible, se procedió a minimizar la siguiente función:

$$\sum_{i=1}^{N} (net^i(\vec{\mathrm{I}}) - O^i)^2$$

escogiendo un margen de error de hasta 5% para la misma.

Para implementar las redes se utilizó el programa Braincell. Este programa, anexo de Excel, dispone de los algoritmos de propagación reversa y percolación reversa. El primero es utilizado para manejar problemas que involucran información contradictoria o incompleta, es decir, trabaja con datos muy ruidosos. A través de su análisis los organiza y modifica, en la medida en que nueva información es suministrada a la red; esta flexibilidad para adaptarse es una de las fortalezas más importantes que ofrecen las redes neuronales. Por su parte, el algoritmo de percolación reversa utiliza algunos de los resultados de los cálculos desarrollados por el algoritmo anterior: es capaz de identificar cuál es el error individual de salida de cada neurona y cuál es el ajuste necesario para modificar su peso. Para este trabajo se utilizó el algoritmo de percolación reversa.

Una vez obtenidos los datos se procedió a construir la matriz[7]. Ésta quedó conformada por 9472 filas por cinco columnas, cada una representando las distintas variables de entrada. Cada fila contiene los datos para una opción en un momento del tiempo. Por ejemplo, la primera fila contiene los datos para una opción que fue escrita el 01/01/1997, lo mismo que las siguientes 7 filas, todas ellas siendo distintas opciones escritas en la misma fecha.

Para implementar una red se requiere un conjunto de entrenamiento y un conjunto que se utiliza en la fase de prueba de datos con entrenamiento simultáneo, conocido como prueba-mientras-entrena *(test-while-train*) y un conjunto de prueba. Para la prueba de entrenamiento se utilizó el 60% de los datos, de este 60% se escogió un 30% para conformar el conjunto de la prueba-mientras-entrena y el 40% restante de los datos totales conforman el conjunto de prueba.

La prueba-mientras-entrena se utiliza para evitar la memorización por parte de la red. Normalmente, si sólo se está entrenando a la red, se corre el riesgo de que ésta se

[7] Ver Apéndice E

memorice la data, perdiendo así su generalidad y no siendo capaz de responder bien a datos a los cuales no ha sido expuesta. Una forma de prevenir esto es, a medida que la red se está entrenando, ir chequeando qué tan bien responde ante nuevos datos. Cuando el desempeño de la red con la nueva información empeora, aún y cuando el desempeño en el conjunto de entrenamiento parece ir mejorando, el entrenamiento se detiene.

Es importante tener en cuenta la distribución de los datos al momento de escoger los conjuntos tanto de entrenamiento como los de prueba. Si, por ejemplo, los ADRs presentasen una caída continua en el precio los primeros meses y luego una subida constante en los últimos, un conjunto de entrenamiento que esté constituido por los primeros meses estaría siendo sobre representado por opciones "*out of the money*", mientras que el conjunto de prueba (en este caso, los últimos meses), estaría siendo sobre representado por opciones "*in the money*", lo que puede originar un mal desempeño por parte de la red al momento de ser probada. En estos casos es mejor escoger meses intercalados para construir los conjuntos respectivos, lo que ayuda también a lidiar con el problema de las ponderaciones.

2.3 Medidas de Desempeño

El proceso anteriormente descrito se realizó para cada una de las redes entrenadas. A partir de ahí se aplicaron las siguientes medidas de desempeño y se escogieron las redes con mejores resultados. Se utilizaron 6 medidas de desempeños, que son las más comúnmente utilizadas (Herrmann y Narr, 1997). Se definen como sigue:

La Media del Error (ME)	$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{O}_t - O_t)$
El Porcentaje Medio De Error (PME)	$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\hat{O}_t - O_t}{O_t}$
La Media de los Errores al Cuadrado (MEC)	$\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\hat{O}_t - O_t)^2}$
La Media del Error Absoluto (MEA)	$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left\|\hat{O}_t - O_t\right\|$
La Media del Porcentaje del Error Absoluto (MPEA)	$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{\left\|\hat{O}_t - O_t\right\|}{O_t}$
R^2	$\frac{\sum_{t=1}^{T}(\hat{O}_t - \overline{O})^2}{\sum_{t=1}^{T}(O_t - \overline{O})^2}$

ME, MEA y MEC miden la diferencia absoluta entre la salida y el valor observado, mientas que el PME y el MPEA estandarizan dicho error. El R^2 mide la cercanía a la variación entre la salida de la red y los valores observados. ME y PME son capaces de detectar sesgos en el precio, mientras que los otros, a excepción del $R^{2,}$ miden la dispersión de la salida respecto a los valores observados. Se debe tomar en cuenta, que a efectos de este trabajo, los valores observados son los obtenidos por la fórmula de Black-Scholes. De tenerse acceso a los registros históricos de precios, es posible aplicar este mecanismo para observar el comportamiento de los mercados.

2.4 Resultados Obtenidos

Se entrenaron las distintas redes con los valores simulados, obteniendo así los siguientes resultados para las medidas de desempeño de cada una:

Resultados de las Medidas de Desempeño para cada una de la RNA entrenadas

	ME	PME	MEA	MPEA	MEC	R^2
2 Nodos	-0.629	0.297	1.503	0.411	2.295	0.794
3 Nodos	-1.625	0.119	2.160	0.337	2.833	0.962
4 Nodos	-0.014	0.358	1.456	0.436	2.290	0.801
5 Nodos	2.349	0.633	3.674	0.705	4.529	1.110
11 Nodos	3.305	0.561	3.728	0.584	4.710	1.393

El promedio de error de las redes para de 2, 3 y 4 nodos son de -0,629, -1,625 y -0,014 dólares respectivamente, mientras que para las redes de 5 y 11 nodos, el error promedio es de 2,349 y 3,305 dólares respectivamente. Esto pone en evidencia que, a efectos de este trabajo, las redes con un menor número de nodos son las que presentan mejores resultados. De las redes estudiadas, ninguna presenta una superioridad absoluta en todas las medidas de desempeño, sin embargo, la red con una capa oculta de cuatro nodos, es la que muestra un mejor resultado, al menos en términos de medida de errores absolutos: no sólo es la que tiene un promedio de error más bajo, sino un promedio de error absoluto más bajo, así como un promedio de los errores al cuadrado más bajo. En otras palabras, esta RNA es la que mejor es capaz de emular la fórmula de Black-Scholes.

Una RNA podría, por lo tanto, ser utilizada como una fórmula de valoración de opciones alternativa a la fórmula de Black-Scholes, puesto que, como se observa, es capaz de simular los resultados obtenidos por la misma. Sin embargo, puesto que no se cuenta con un registro histórico disponible de los precios de las opciones, no se puede establecer una comparación entre el desempeño de las RNA y la fórmula de Black-Scholes. Así mismo, de contarse con dicho registro, se podría obtener una visión sobre el mecanismo de precios en el mercado de las opciones.

CONCLUSIONES

Las Redes Neuronales Artificiales representan un método alternativo a los modelos estadísticos usualmente utilizados para predecir y simular. Al ser modelos no paramétricos y no requerir así que se defina *a priori* la distribución de los datos, son modelos sumamente flexibles.

Las RNA no sirven únicamente para sustituir o complementar modelos estadísticos, sino que su capacidad de predicción les ofrece una ventaja sobre los demás modelos. Teniendo en cuenta esto, se decidió utilizar un modelo de RNA para evaluar *call options* sobre ADRs de CANTV, para lo cual se simularon los precios de ejercicios, las fechas de maduración, así como los precios de los *call options* (por no contarse con un registro histórico disponible de los mismos). Las primeras dos variables se simularon siguiendo las reglas de la CBOE, mientras que los precios se simularon utilizando la fórmula de Black-Scholes.

Se obtuvo un total de 137 opciones simuladas; y con estos datos se procedió a implementar distintas redes, de tres capas cada una, diferenciándose entre sí por el número de nodos de la capa oculta. Los modelos de RNA implementados acá fueron de 2, 3, 4,5 y 11 nodos en la capa oculta, utilizando en todas un margen de 5% de error de aproximación. Se le aplicaron a cada uno de los modelos 6 medidas de desempeño, resultando la RNA de 4 nodos en la capa oculta la red con mejores resultados.

Para futuras investigaciones, se puede implementar un modelo de RNA para valoración de *call options* sobre ADRs de CANTV, utilizando los datos observados en el mercado, lo cual puede dar una idea más clara sobre el mecanismo de fijación de precios en el mismo, así como podría establecerse una comparación en el desempeño de las RNA con respecto al modelo de Black-Scholes para la predicción de los precios de las opciones.

APÉNDICE A

Derivación de la fórmula de Black-Scholes

Siguiendo a Hull (2002), se explicará a continuación la derivación de la fórmula de Black-Scholes.

El modelo del comportamiento del precio de la acción usado por Black y Scholes asume que el cambio porcentual en el precio de la acción en un corto período de tiempo se distribuye normalmente. Definiendo así:

μ: retorno esperado de la acción
σ: Volatilidad del precio de la opción

La media del cambio porcentual en el momento δt es $\mu\delta t$ y la desviación estándar de este cambio porcentual es $\sigma\sqrt{\delta t}$, así:

$$\frac{\delta S}{S} \sim \phi(\mu\delta t, \sigma\sqrt{\delta t}) \qquad (1)$$

Donde δS es el cambio en el precio de la opción S al momento (in time) δt, y $\phi(m, s)$ denota la distribución normal con media m y desviación estándar s.

El modelo implica que:

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}\right] \qquad (2)$$

De aquí se sigue que:

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \phi\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}\right] \qquad (3)$$

Y

$$\ln S_T \sim \phi\left[\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma\sqrt{T}\right] \quad (4)$$

Donde S_T es el precio de la acción en el tiempo futuro T y S_0 es el precio de la acción en el momento cero. La ecuación (4) muestra que ln(S_T) está normalmente distribuido, esto quiere decir que S_T tiene un distribución lognormal[8]

De la ecuación anterior y de las propiedades de una distribución lognormal, se puede demostrar que el valor esperado E(S_T) de S_T es dado por:

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T} \quad (5)$$

La varianza, var(S_T), de S_T, es dada, por lo tanto, por:

$$\text{var}(S_T) = S_o^2 e^{2\mu T}(e^{\sigma^2 T} - 1) \quad (6)$$

El retorno esperado de una acción, μ, requerido por los inversionistas depende del riesgo de la acción. Mientras más alto el riesgo, más alto el retorno esperado. También depende del nivel de la tasa de interés en la economía; mientras más alto el nivel de la tasa de interés, más alto será el retorno esperado. El valor de una opción sobre una acción no depende de μ cuando es expresado en términos del activo subyacente.

La volatilidad de una acción, σ, es la medida de incertidumbre sobre los retornos de la acción. La volatilidad puede ser definida como la desviación estándar de los retornos de una acción en un año. Cuando *T* es pequeño, $\sigma\sqrt{T}$ es aproximadamente igual a la desviación estándar del cambio porcentual en el precio de la acción en *T*. Así, nuestra incertidumbre sobre el precio futuro de una acción, medida por su desviación estándar,

[8] Para mayor información ver Hull (sf)

aumenta, al menos aproximadamente, con la raíz cuadrada de cuán lejos estamos mirando. Así, la desviación estándar del precio de una acción en 4 semanas es mayor que la desviación estándar en una semana.

De aquí se obtiene lo que se conoce como la ecuación diferencial de Black-Scholes que expresa:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\delta t = r\left(f-\frac{\partial f}{\partial S}S\right)\delta t \text{ Así}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf \qquad (7)$$

De esta ecuación, Black y Scholes derivan finalmente la fórmula para valorar un *Call Option* europeo, sobre un activo que no paga dividendos en el momento cero; se define así:

.

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2) \qquad (8)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Donde la función $N(x)$ es la función de probabilidad acumulada para una distribución normal estandarizada. (La probabilidad de que una variable con una distribución normal estándar, $\varphi(0,1)$ sea menor que x).

La variable C es el precio del *call*, S_0 es el precio del activo en el momento cero, K, es el precio de ejercicio, r es la tasa libre de riesgo, σ es la volatilidad del activo y T es el tiempo de maduración de la opción.

APENDICE B Proceso de entrenamiento de una Red

Ejemplo de un entrenamiento supervisado

Parámetros: α = 0.2; Umbral =0.5

Iteración		X_1	X_2	Z	Ponderaciones (*Weights*) iniciales W_1	W_2	Y	Δ	Ponderaciones finales W_1	W_2
	1	0	0	0	0.1	0.3	0	0.0	0.1	0.3
		0	1	1	0.1	0.3	0	1.0	0.1	0.5
		1	0	1	0.1	0.5	0	1.0	0.3	0.5
		1	1	1	0.3	0.5	1	0.0	0.3	0.5
	2	0	0	0	0.3	0.5	0	0.0	0.3	0.5
		0	1	1	0.3	0.5	0	1.0	0.3	0.7
		1	0	1	0.3	0.7	0	1.0	0.5	0.7
		1	1	1	0.5	0.7	1	0.0	0.5	0.7
	3	0	0	0	0.5	0.7	0	0.0	0.5	0.7
		0	1	1	0.5	0.7	1	0.0	0.5	0.7
		1	0	1	0.5	0.7	0	1.0	0.7	0.7
		1	1	1	0.7	0.7	1	0.0	0.7	0.7
	4	0	0	0	0.7	0.7	0	0.0	0.7	0.7
		0	1	1	0.7	0.7	1	0.0	0.7	0.7
		1	0	1	0.7	0.7	1	0.0	0.7	0.7
		1	1	1	0.7	0.7	1	0.0	0.7	0.7

X_1 y X_2: Variables de entrada

Z: Resultado deseado (observado)

Δ: Medida de error, definida como la diferencia entre el resultado(salida) obtenido y el resultado deseado.

La neurona debe ser entrenada para reconocer los parámetros de entrada y clasificarlos de acuerdo a las salidas correspondientes. El procedimiento consiste en presentarle a la neurona la secuencia de patrones de entrada (en este caso 4), de forma que las ponderaciones (*weights*) sean ajustados por la red después de cada iteración. Esta operación se repite hasta que las ponderaciones convergen a un conjunto de valores que le permite a la neurona clasificar correctamente cada una de las entradas.

La medida de error, Δ, es utilizada para acomodar las ponderaciones subsecuentemente. En cualquier iteración, para la neurona *j*, se tiene:

$$\Delta = Z_j - Y_j$$

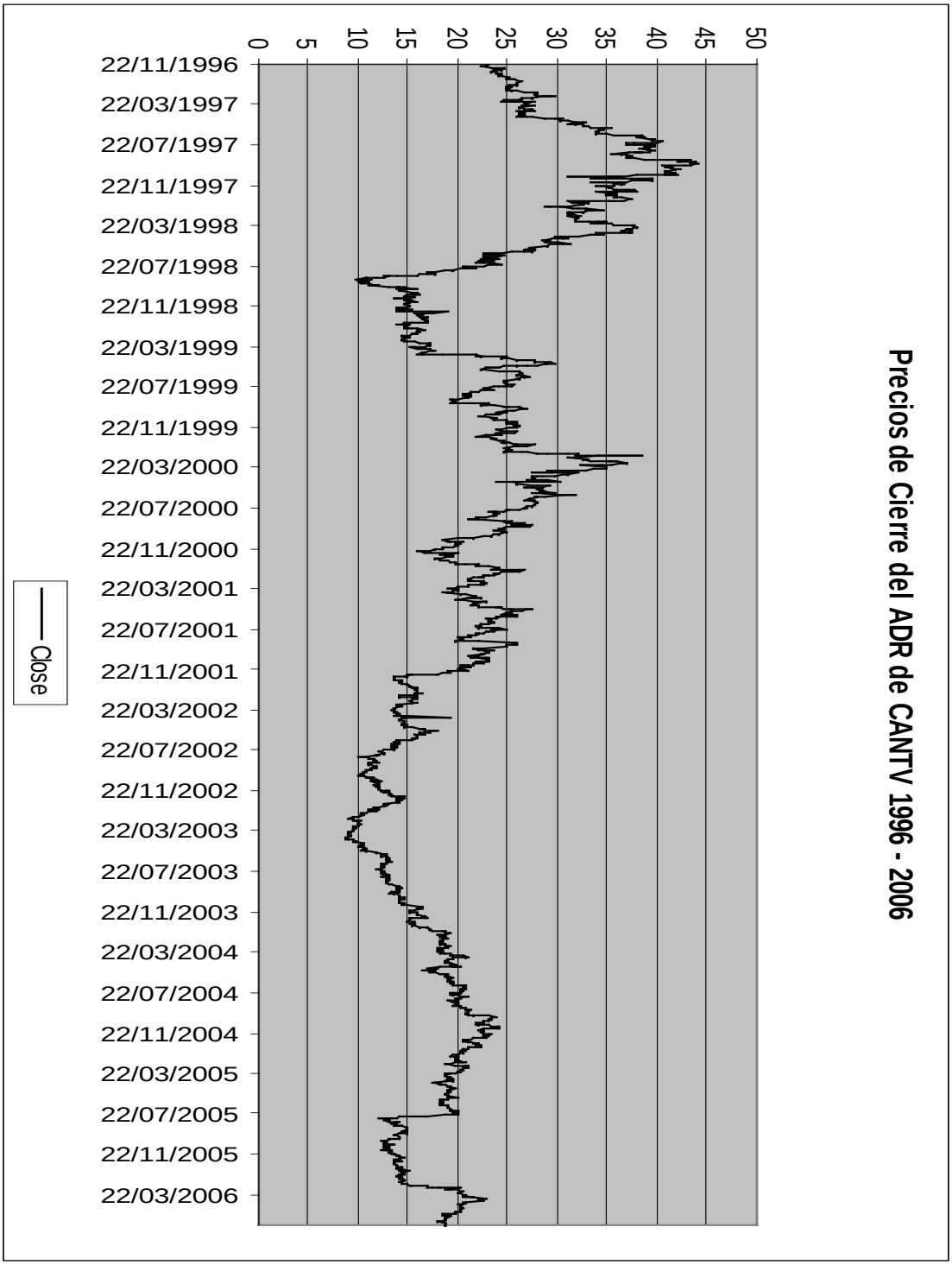
Donde Z y Y son el valor observado y resultado obtenido, respectivamente. Las ponderaciones finales quedan como siguen:

$$W_i(\text{final}) = W_i(\text{Inicial}) + \alpha \Delta X_i$$

Donde α es el parámetro que controla qué tan rápido aprende la red.

Los valores iniciales de las ponderaciones para cada variable de entrada son transformados (usando la ecuación anterior), en valores que son usados con la siguiente entrada (fila). En este ejemplo, el valor del umbral (otro parámetro), hace que Y tenga un valor igual a 1 en la siguiente fila si la suma ponderada de las entradas es mayor que 0,5, en caso contrario, Y, vale 0.

APÉNDICE C


Precios de Cierre del ADR de CANTV 1996 - 2006
Close
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
22/11/1996
22/03/1997
22/07/1997
22/11/1997
22/03/1998
22/07/1998
22/11/1998
22/03/1999
22/07/1999
22/11/1999
22/03/2000
22/07/2000
22/11/2000
22/03/2001
22/07/2001
22/11/2001
22/03/2002
22/07/2002
22/11/2002
22/03/2003
22/07/2003
22/11/2003
22/03/2004
22/07/2004
22/11/2004
22/03/2005
22/07/2005
22/11/2005
22/03/2006

APÉNDICE D: Calendario de Fechas de Expiración

Fecha	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
01/01/97 - 17/01/97	17/01/1997	21/02/1997		18/04/1997			18/07/1997					
18/01/97 - 21/02/97		21/02/1997	21/03/1997	18/04/1997			18/07/1997					
22/02/97 - 21/03/97			21/03/1997	18/04/1997			18/07/1997			17/10/1997		
22/03/97 - 18/04/97				18/04/1997	16/05/1997		18/07/1997			17/10/1997		
19/04/97 - 16/05/97					16/05/1997	20/06/1997	18/07/1997			17/10/1997		
17/05/97 - 20/06/97	16/01/1998					20/06/1997	18/07/1997			17/10/1997		
21/06/97 - 18/07/97	16/01/1998						18/07/1997	15/08/1997		17/10/1997		
19/07/97- 15/08/97	16/01/1998							15/08/1997	19/09/1997	17/10/1997		
16/08/97 - 19/09/97	16/01/1998			17/04/1998					19/09/1997	17/10/1997		
20/09/97 - 17/10/97	16/01/1998			17/04/1998						17/10/1997	21/11/1997	
18/10/97 - 21/11/97	16/01/1998			17/04/1998							21/11/1997	19/12/1997
22/11/97 - 19/12/97	16/01/1998			17/04/1998			17/07/1998					19/12/1997

Las opciones se mueven en el ciclo de Enero y vencen el tercer viernes de cada mes. Si la fecha del mes en curso no ha pasado, se transan opciones con fecha de vencimiento ese mes, el mes que viene y los dos meses siguientes del ciclo. Si la fecha del mes en curso ya pasó, se transan opciones con fecha de vencimiento el mes que viene, el siguiente a ese, y los dos meses siguientes del ciclo

APENDICE E: Matriz de datos

Fecha	Precio del Activo	Precio de Ejercicio	Tiempo de Maduración	Volatilidad	LIBOR	Precio *Call Option*
02-Ene-97	24.76	22.50	12	0.25	0.06	13.26
	24.76	27.50	12	0.25	0.06	10.77
	24.76	22.50	36	0.25	0.06	21.76
	24.76	27.50	36	0.25	0.06	21.09
	24.76	22.50	75	0.25	0.06	24.42
	24.76	27.50	75	0.25	0.06	24.35
	24.76	22.50	138	0.25	0.06	24.75
	24.76	27.50	138	0.25	0.06	24.75
03-Ene-97	24.99	22.50	11	0.23	0.06	12.82
	24.99	27.50	11	0.23	0.06	10.12
	24.99	22.50	35	0.23	0.06	21.81
	24.99	27.50	35	0.23	0.06	21.10
	24.99	22.50	74	0.23	0.06	24.63
	24.99	27.50	74	0.23	0.06	24.55
	24.99	22.50	137	0.23	0.06	24.98
	24.99	27.50	137	0.23	0.06	24.98
06-Ene-97	25.55	22.50	10	0.24	0.06	12.67
	25.55	27.50	10	0.24	0.06	9.87
	25.55	22.50	34	0.24	0.06	22.17
	25.55	27.50	34	0.24	0.06	21.42
	25.55	22.50	73	0.24	0.06	25.17
	25.55	27.50	73	0.24	0.06	25.08
	25.55	22.50	136	0.24	0.06	25.54
	25.55	27.50	136	0.24	0.06	25.54
07-Ene-97	25.21	22.50	9	0.24	0.06	11.59
	25.21	27.50	9	0.24	0.06	8.92
	25.21	22.50	33	0.24	0.06	21.64
	25.21	27.50	33	0.24	0.06	20.85
	25.21	22.50	72	0.24	0.06	24.80
	25.21	27.50	72	0.24	0.06	24.71
	25.21	22.50	135	0.24	0.06	25.20
	25.21	27.50	135	0.24	0.06	25.20
08-Ene-97	25.66	22.50	8	0.24	0.06	11.26
	25.66	27.50	8	0.24	0.06	9.02
	25.66	22.50	32	0.24	0.06	21.88
	25.66	27.50	32	0.24	0.06	21.05
	25.66	22.50	71	0.24	0.06	25.23
	25.66	27.50	71	0.24	0.06	25.14
	25.66	22.50	134	0.24	0.06	25.65
	25.66	27.50	134	0.24	0.06	25.65

Matriz utilizada para entrenar y probar la red. Cada fila representa las variables para una opción particular.

APÉNDICE F: Tabla de Ponderaciones obtenidas en un modelo de RNA de una capa oculta con 4 neuronas

i,j: Ponderación										
w1(i,6)	**1**	0.360	**2**	-0.115	**3**	-0.220	**4**	-0.473	**5**	0.022
w1(i,7)	**1**	-0.705	**2**	-0.067	**3**	0.489	**4**	-0.592	**5**	0.013
w1(i,8)	**1**	-0.590	**2**	0.129	**3**	1.540	**4**	0.921	**5**	-0.018
w1(i,9)	**1**	-1.304	**2**	0.262	**3**	1.327	**4**	0.011	**5**	-0.034

w2(j,10)	**6**	4.431	**7**	-2.606	**8**	30.586	**9**	1.495

$w_1(i,j)$: Ponderación entre la neurona *i* de la capa de entrada y la neurona *j* de la capa oculta.

$w_{2(}j,k)$: Ponderación entre la neurona *j* de la capa oculta y la neurona *k* de la capa de salida.

BIBLIOGRAFÍA

1. Amilon, H (2003). "A Neural Network versus Black – Sholes: A Comparison of Princing and Hedging Performances". *En Journal of Forecasting*, N°22; p 317-335.
2. Bennell, J. y C. Sutcliffe (2003) *Black-Scholes versus Artificial Neural Networks in Pricing FTSE 100 Options*. 23 p.
3. Black, F y M. Scholes (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" en *Journal of Political Economy* **(81)** Nº3; p 637-654.
4. Delgado, D y M. Villafañe (2004) *Determinantes de la Fragilidad Bancaria en Venezuela: Una aproximación con Redes Neuronales Artificiales* Tesis de Maestría. IESA, p 69
5. Fabozzi F. J, F. Modigliani y M. G. Ferri. (1996). *Mercados e Instituciones Financieras*, México, Pretince – Hall Hispanoamericana, 697 p.
6. Herrmann, R y A. Narr (1997), "Neural Networks and the valuation of derivatives – Some insights into the implies pricing mechanism of German Stock Index Options" 45 p
7. Hull, J. (2002). *Options, Futures and Other Derivatives*, New Jersey, Pretince Hall, 744 p.
8. Hutchinson, J , A. Lo y T. Poggio (1994) "A nonparametric approach to pricing and hedging derivatives securities via learning networks" en *Journal of Finance* Nº49, 851-889.
9. Jurik Research and Consulting (1996); www.jurikres.com
10. Malliaris, M. y L. Salchenberger (1996) "Using neural Networks to forecast de S&P 100 implied volatility" en *Neurocomputing* **(10),** Nº 2; p. 183-195
11. Molera, L. y M.V. Caballero. "Predicción del éxito en estudios universitarios mediante Redes Neuronales". En *X Jornadas de la Asociación de Economía de la Educación;* p. 505-513.
12. Peña, D (2002). *Análisis de Datos Multivariantes*, España, Mc Graw Hill; p 539

13. Scott L. (1987) “Option Pricing when the variance changes randomly: theory, estimation and an application. En *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (**22)** p 419-487.
14. Turban, E, R. Trippi y L. Medsker (1993). “Neural Networks fundamentals for financial analysts” en *Neural Networks in Finance and Investing*; p.59-68