UNIVERSIDAD CATOLICA ANDRES BELLO
Urb. Montalbán - La Vega - Apartado 29068
Teléfono: 407-41-50 Fax: 442-38-97
Caracas, 1021 - Venezuela
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

PROBLEMAS RESUELTOS

Trabajo de Ascenso presentado ante la ilustre
Universidad Católica Andrés Bello,
por el profesor Luis E. Estrada
para optar a la categoría de
Profesor Agregado.

Julio, 2006

Introducción

Las ecuaciones diferenciales son un componente fundamental para la formación del ingeniero, debido a sus múltiples aplicaciones en las áreas del ciclo profesional de las distintas escuelas de ingeniería. La mayoría de los textos existentes actualmente tratan este tema dejando la resolución de los problemas sin orientación detallada que refuerce el aprendizaje. He considerado oportuno presentar este trabajo, producto de un cúmulo de experiencias en la asignatura de Cálculo IV de Ingeniería.

El propósito del presente trabajo es proporcionar una introducción a las ecuaciones diferenciales para estudiantes de ingeniería. Para alcanzar este propósito, el trabajo ha sido escrito con los siguientes objetivos:

1. Motivar a los estudiantes de modo que resolviendo problemas, ordenados de acuerdo a la dificultad, consiga un entendimiento de los tópicos y se desarrolle su interés. Esto se hace por medio de problemas resueltos con todos los detalles planteados para su discusión.
2. Proporcionar métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden que se pueden aplicar a un grupo grande de problemas.
3. Suministrar un conjunto de problemas con un enfoque ordenado y lógico, ideal para la aplicación de técnicas pedagógicas, tales como la Resolución de Problemas .
4. Introducir los conceptos de transformación de variables, para la solución de múltiples tipos de ecuaciones diferenciales.

La exposición esta hecha de forma ordenada y en un lenguaje sencillo, pensando precisamente en aquellos alumnos que se acercan por primera vez a este tema, usando un pequeño resumen teórico y conceptual, seguido de una amplia gama de problemas resueltos.

ÍNDICE

Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Muchas veces es difícil resolver algunas ecuaciones diferenciales de primer orden, ya que no existe un método general que permita integrar en todos los casos. En este trabajo se estudian los métodos más útiles para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden y se muestran un gran número de problemas resueltos con muchos detalles con el fin de servir de apoyo al estudio de los contenidos teóricos correspondientes.

Ecuaciones Diferenciales de Variables Separables

Definición I. Una ecuación diferencial de la forma

$$f(y)dy = g(x)dx$$

se denomina ecuación diferencial de variables separadas.

Para resolverlas es necesario integrar

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + c.$$

Definición II. Una ecuación diferencial es de variables separables si se puede transformar en una ecuación de la forma

$$f(y)h(x)dy = g(x)u(y)dx.$$

La integral general de esta ecuación exige separar las variables de forma tal que

$$\int \frac{f(y)}{u(y)}dy = \int \frac{g(x)}{h(x)}dx + c.$$

Es importante notar que las divisiones realizadas pueden dar lugar a pérdida de soluciones particulares que anulan el divisor $h(x)u(y)$.

Teorema. La ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

donde a, b y c son constantes, se puede transformar en una ecuación diferencial de variables separadas con el cambio separadas con el cambio

$$u = ax + by + c.$$

Problemas Resueltos

1. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{1+x^2}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = -1.$$

Solución: Separando las variables e integrando

$$(1+x^2)dy = -(1+y^2)dx \Rightarrow \quad \frac{dy}{(1+y^2)} = -\frac{dx}{1+x^2}$$

integrando

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)} = -\int \frac{dx}{1+x^2} + c \Rightarrow \quad \arctan y = -\arctan x + c$$

despejamos la constante c y aplicamos tangente a ambos lados de la igualdad

$$\arctan y + \arctan x = c \Rightarrow \quad \tan(\arctan y + \arctan x) = \tan c$$

como $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha + \tan\beta}$, entonces la ecuación anterior se transforma en:

$$\frac{\tan(\arctan y) + \tan(\arctan x)}{1 - \tan(\arctan y)\tan(\arctan x)} = c$$

simplificando

$$\frac{y+x}{1-xy} = c \Rightarrow \quad y + x = c(1-xy).$$

2. Determinar la solución de la ecuación

$$1 + y^2 + xy\,y' = 0.$$

Solución: Separando las variables e integrando

$$xydy = -(1 + y^2)dx \Rightarrow \frac{ydy}{1 + y^2} = \frac{dx}{x}$$

integrando

$$\int \frac{ydy}{1 + y^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|1 + y^2| = -\ln|x| + \ln c$$

despejamos la constante $\ln c$ y aplicamos propiedades de los logaritmos

$$\tfrac{1}{2}\ln|1 + y^2| + \ln|x| = \ln c \Rightarrow \ln\left|\sqrt{1 + y^2}\right| + \ln|x| = \ln c \Rightarrow \ln\left|x\sqrt{1 + y^2}\right| = \ln c$$

despejamos la constante c

$$x\sqrt{1 + y^2} = c$$

elevamos ambos miembros de la igualdad al cuadrado

$$x^2(1 + y^2) = c^2 \Rightarrow x^2(1 + y^2) = k.$$

3. Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{1}{1 + y^2}dx + \frac{1}{x^2 - yx^2}dy = 0.$$

Solución: Despejando

$$(y^2 + xy^2)dy = (yx^2 - x^2)dx$$

hallamos factor común en ambos lados de la ecuación y separamos variables

$$y^2(1 + x)dy = x^2(y - 1)dx \Rightarrow \frac{y^2}{(y-1)}dy = \frac{x^2}{(1+x)}dx$$

integrando ambos lados de la igualdad

$$\int \frac{y^2}{(y-1)}dy = \int \frac{x^2}{(1+x)}dx + c.$$

Resolviendo las integrales de la ecuación por separado

a. Integrando el lado izquierdo de la igualdad

$$\int \frac{y^2}{(y-1)}dy$$

sumamos y restamos 1 al numerador

$$\int \frac{y^2}{(y-1)}dy = \int \frac{y^2+1-1}{y-1}dy$$

separamos la integral anterior en

$$\int \frac{y^2-1}{y-1}dy + \int \frac{1}{y-1}dy$$

factorizamos y resolvemos cada integral

$$\int \frac{y^2-1}{y-1}dy + \int \frac{1}{y-1}dy = \int \frac{(y-1)(y+1)}{y-1}dy = \int (y+1)dy = \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1|.$$

b. Integrando el lado derecho de la igualdad $\int \frac{x^2}{(1+x)}dx$ (análogo al procedimiento anterior)

$$\int \frac{x^2-1+1}{(1+x)}dx = \int \frac{(x+1)(x-1)}{1+x}dx + \int \frac{dx}{1+x} \Rightarrow \int \frac{x^2}{(1+x)}dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

así, la ecuación diferencial tiene una solución

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$$

despejamos la constante c

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| - \frac{x^2}{2} + x - \ln|1+x| = c$$

aplicamos propiedades de los logaritmos, multiplicamos y dividimos por dos

$$y^2 + 2y - x^2 + 2x + 2\ln\left|\tfrac{x+1}{y-1}\right| = 2c \Rightarrow\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 2\ln\left|\tfrac{x+1}{y-1}\right| = k$$

finalmente factorizando

$$(x-y)(x+y) - 2(x+y) + 2\ln\left|\tfrac{x+1}{y-1}\right| = k \Rightarrow\ (x+y)(x-y-2) + 2\ln\left|\tfrac{x+1}{y-1}\right| = k.$$

---

4. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{(1+y^2)}{x}.$$

Solución:Separando variables e integrando ambos miembros de la igualdad

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln c \Rightarrow\ \arctan y = \ln|x| + \ln c$$

aplicamos propiedades de los logaritmos, y despejamos y

$$\arctan y = \ln|xc| \quad y = \tan(\ln|xc|).$$

5. Hallar la solución de la ecuación

$$y\sqrt{1+x^2}\,dy + \left(x\sqrt{1+y^2}\right)dx = 0.$$

Solución: Separando variables e integrando ambos lados de la igualdad

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

luego

$$\int \frac{2ydy}{2\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{2xdx}{2\sqrt{1+x^2}} + c \Rightarrow \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c$$

entonces la solución es

$$c = \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+x^2}$$

6. Resolver el problema de valor inicial

$$y' = -\left(\frac{y\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-y^2}}\right)^{-1} \qquad y|_{x=0} = 1.$$

Solución: Separamos variables e integramos

$$y\sqrt{1-x^2}\,dy = -x\sqrt{1-y^2}\,dx \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

luego

$$c - \int \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}}dy = \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$c - \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2}$$

despejamos c e imponemos la condición inical $(x,y) = (0,1)$

$$c = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \Rightarrow c = \sqrt{1-0^2} + \sqrt{1-1^2} = 1$$

finalmente sustituimos $c = 1$ en la solución general para tener la solución

$$1 = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}.$$

7. Determinar la solución para la ecuación diferencial

$$1 + y' = e^{y}.$$

Solución: Separando variables e integrando

$$y' = e^{y} - 1 \Rightarrow \frac{dy}{e^{y} - 1} = dx \Rightarrow \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}} dy = dx$$

integrando por sustitución

$$\ln c + \ln|1 - e^{-y}| = x$$

aplicamos propiedades de los logaritmos

$$\ln c(1 - e^{-y}) = x \Rightarrow c(1 - e^{-y}) = e^{x}.$$

8. Determinar la solución particular de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial

$$xy' + y\ln y = 0 \qquad y|_{x=1} = 1.$$

Solución: Separando variables e integrando

$$xdy = -y\ln ydx$$

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = -\int \frac{dx}{x} + \ln c$$

integrando por sustitución

$$\ln|\ln y|. = -\ln x + \ln c$$

aplicamos propiedades de los logaritmos

$$\ln|\ln y| = \ln\frac{c}{x} \Rightarrow \ln y = \frac{c}{x} \Rightarrow c = x\ln y$$

considerando que la solución debe satisfacer el valor inicial $y|_{x=1} = 1$

$$c = 1\ln 1 = 0$$

sustituimos en la solución general $c = 0$

$$0 = x\ln y \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1$$

entonces la solución particular es

$$y = 1.$$

9. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$x' = a^{-(x+y)}.$$

sabiendo que $a > 0$, $a \neq 1$.

Solución: Separando variables e integrando ($x' = \frac{dx}{dy}$)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a^{x+y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^x a^y \Rightarrow a^{-y}dy = a^x dx$$

integrando

$$c + \int a^{-y}dy = \int a^x dx.$$

Como

$$\int a^x dx = \int e^{\ln a^x} dx = \frac{e^{\ln a^x}}{\ln a} = \frac{a^x}{\ln a}$$

entonces

$$\int a^{-y}dy = \int e^{\ln a^{-y}} dy = -\frac{e^{\ln a^{-y}}}{\ln a} = -\frac{a^{-y}}{\ln a}$$

así, tenemos que la solución es de la forma

$$c + \int a^{-y}dy = \int a^x dx \Rightarrow c - \frac{a^{-y}}{\ln a} = \frac{a^x}{\ln a}$$

reordenando

$$c = \frac{a^x + a^{-y}}{\ln a} \quad k = a^x + a^{-y}$$

con $k = c\ln a$.

10. Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2x(1+e^y)}{e^y(1+x^2)}.$$

Solución: Separando variables e integrando

$$e^y(1+x^2)dy = 2x(1+e^y)dx \Rightarrow \frac{e^y}{(1+e^y)}dy = \frac{2x}{(1+x^2)}dx$$

luego

$$\int \frac{e^y}{(1+e^y)}dy = \int \frac{2x}{(1+x^2)}dx + \ln c$$

estas integrales son directas, dado que en el numerador se encuentra la derivada del denominador, por tanto la solución a la ecuación es

$$\ln|1+e^y| = \ln|1+x^2| + \ln c$$

aplicamos propiedades de los logaritmos

$$1 + e^y = c(1+x^2).$$

11. Encontrar la solucion de la ecuación diferencial

$$yy' = \frac{e^y}{(1+e^x)}.$$

que satisface la condición inicial $y|_{x=0} = 0$
Solución: Separando variables

$$\frac{ydy}{e^y} = \frac{dx}{1+e^x}$$

integrando

$$\int \frac{ydy}{e^y} = \int \frac{dx}{1+e^x} + c$$

a. Integramos por parte $\int \frac{ydy}{e^y}$

$$\int \frac{ydy}{e^y} = -ye^{-y} - e^{-y}$$

b. Hacemos el cambio de variable $t = 1 + e^x$,en la integral $\int \frac{dx}{1+e^x}$, tal que $dt = e^x dx$. Obteniendo así

$$\int \frac{dt}{t(t-1)}$$

usando el método de fracciones simples,

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1}$$

tenemos que $A = -1$, $B = 1$, y podemos escribir la ecuación como

$$-\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} = -\ln t + \ln|t-1|$$

devolviendo los cambios tenemos que

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = -\ln|1+e^x| + x$$

de esta manera, la solución de la ecuación será

$$-ye^{-y} - e^{-y} = -\ln|1+e^x| + x + c$$

despejamos c, y evaluamos con $x = 0$ y con $y = 0$

$$c = -0e^{-0} - e^0 + \ln|1+e^0| - x \Rightarrow \quad c = \ln 2 - 1$$

sustituimos c en la solución general y simplificamos, obteniendo así

$$-e^{-y}(y+1) = -\ln|1+e^x| + x + \ln 2 - 1 \Rightarrow \quad e^{-y}(y+1) = \ln\left|\tfrac{1+e^x}{2}\right| + 1 - x.$$

12. Hallar la solución general

$$e^{2x}dx - e^{y}dy = \frac{1+y}{1+y^2}dy.$$

Solución: Separando variables e integrando

$$e^{2x}dx = \tfrac{1+y}{1+y^2}dy + e^{y}dy \Rightarrow \int e^{2x}dx = \int \tfrac{1+y}{1+y^2}dy + \int e^{y}dy + c$$

separando e integrando

$$\int e^{2x}dx = \int \tfrac{1}{1+y^2}dy + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{2y}{1+y^2} + \int e^{y}dy + c \Rightarrow \tfrac{e^{2x}}{2} = \arctan y + \tfrac{1}{2}\ln|1+y^2| + e^{y} + c$$

luego la solución:

$$c = \frac{e^{2x}}{2} - e^{y} - \ln\sqrt{1+y^2} - \arctan y.$$

13. Determinar la solución general

$$y' = -\frac{xy^2 - y^2 + x - 1}{x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2}.$$

Solución: Factorizamos cada uno de los paréntesis, obteniendo factor común

$$[y^2(x-1) + (x-1)]dx + [x^2(y+1) - 2x(y+1) + 2(y+1)]dy = 0$$

$$(y^2+1)(x-1)dx + (x^2-2x+2)(y+1)dy = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{y+1}{y^2+1}dy = -\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$$

$$\int \frac{y+1}{y^2+1}dy = -\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx + \ln c$$

entonces

$$\frac{1}{2}\int \frac{y}{y^2+1}dy + \int \frac{1}{y^2+1}dy = -\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx + \ln c$$

para calcular la integral $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$, multiplicamos numerador y denominador por dos 2, de manera que en el numerador se tenga la derivada del denominador. Así

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2|$$

luego la solución a la ecuación es

$$\frac{1}{2}\ln|y^2+1| + \arctan y = -\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + \ln c$$

simplificando y aplicando propiedades de los logaritmos

$$\ln|y^2+1| + 2\arctan y = -\ln|x^2-2x+2| + \ln c$$

$$\ln|(y^2+1)(x^2-2x+2)| + 2\arctan y = \ln c$$

luego la solución

$$(y^2+1)(x^2-2x+2)e^{2\arctan y} = c.$$

14. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$x' = \csc(x-y).$$

Solución: Si $y' = \sin(x-y)$, entonces $x-y = u$, tal que $1 - dy = du$.
Luego

$$1 - u' = \sin u$$

separamos variables e integramos

$$\frac{du}{dx} = 1 - \sin u$$

$$\frac{du}{1-\sin u} = dx$$

integrando

$$\int \frac{du}{1-\sin u} = \int dx + c$$

para calcular la integral $\int \frac{du}{1-\sin u}$, multiplicamos y dividimos por la conjugada del denominador

$$\int \frac{1}{1-\sin u}\,\frac{1+\sin u}{1+\sin u}du = \int \frac{1+\sin u}{1-\sin^2 u}du = \int \frac{1+\sin u}{\cos^2 u}du$$

$$\int \sec^2 u du + \int \sec u \tan u du = \tan u + \sec u + c$$

entonces

$$\tan u + \sec u = x + c$$

devolviendo los cambios

$$\tan(x-y) + \sec(x-y) = x + c$$

por otra parte, como

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right)}$$

aplicamos la fórmula de $\tan(\theta + \beta)$ al segundo lado de la ecuación anterior (al denominador) y luego simplificamos al máximo

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{\dfrac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{x-y}{2}}{1 + \tan\frac{x-y}{2}}} \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right) = \frac{1 + \tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}{1 - \tan\frac{x-y}{2}}$$

usando la equivalencia trigonométrica

$$\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right) = \frac{1 + \dfrac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}}{1 - \dfrac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}} \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

multiplicamos y dividimos por la conjugada del denominador:

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)-\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}\,\frac{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

por tanto

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)=\frac{\left[\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]^2}{\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

entonces

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)=\frac{\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)+2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

aplicando la fórmula del coseno de un ángulo doble en el denominador y la de seno de un ángulo doble en el numerador (y recordando que $\sin^2 x+\cos^2 x=1$) tenemos que

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)=\frac{1+\sin 2\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos 2\left(\frac{x-y}{2}\right)}\Rightarrow\ \cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)=\frac{1+\sin(x-y)}{\cos(x-y)}$$

por tanto

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)=\sec(x-y)+\tan(x-y)$$

por tanto la solución puede escribirse como

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x-y}{2}\right)=x+c\Rightarrow\ \cot\left(\frac{y-x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=x+c.$$

15. Resolver la ecuación diferencial

$$dy-bydx=axdx+cdx.$$

donde a,b,c son constantes.

Solución: Agrupando para transformar a la notación de Newton y hacemos el cambio

$$ax + by = t \Rightarrow \quad a + by' = t' \Rightarrow \quad y' = \tfrac{t'-a}{b}$$

sustituyendo en $y' = bt + bc + a$ que se deriva de la ecuación original tenemos que

$$\tfrac{t'-a}{b} = t + c \Rightarrow \quad t' - a = bt + bc \Rightarrow \quad t' = bt + bc + a$$

separando variables e integrando

$$\frac{dt}{bt + bc + a} = dx \Rightarrow \quad \tfrac{1}{b}\int \frac{b\,dt}{bt + bc + a} = \int dx + k_1 \Rightarrow \quad \tfrac{1}{b}\ln|bt + bc + a| = x + k_1$$

luego

$$\ln|bt + bc + a| = bx + k_2 \Rightarrow \quad bt + bc + a = e^{bx}e^{k_2} \Rightarrow \quad bt + bc + a = Ke^{bx}$$

con $k_2 = k_1 b$ y $K = e^{k_2}$.

Devolviendo los cambios, tenemos que:

$$b(ax + by) + bc + a = Ke^{bx} \Rightarrow \quad bax + b^2y + bc + a = Ke^{bx} \Rightarrow \quad b(ax + by + c) + a = Ke^{bx}$$

16. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$a^2dx - (x + y)^2dy = 0.$$

Solución: Utilizando la notación de Newton y Haciendo el cambio $x + y = t$, tal que $dx + dy = dt$. Luego

$$a^2dx - t^2dt + t^2dx = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{t^2dt}{a^2 + t^2} = dx$$

$$c + \int \frac{t^2dt}{a^2 + t^2} = \int dx$$

$\int \frac{t^2dt}{a^2 + t^2}$ (sumando y restando a^2 al numerador)

$$\int \frac{t^2 + a^2 - a^2}{a^2 + t^2} dt = \int \frac{a^2 + t^2}{a^2 + t^2} dt - a^2 \int \frac{dt}{a^2 + t^2} \Rightarrow \int \frac{t^2 + a^2 - a^2}{a^2 + t^2} dt = \int dt - \int \frac{dt}{1 + (\frac{t}{a})^2}$$

luego

$$\int \frac{t^2 + a^2 - a^2}{a^2 + t^2} dt = t + a \arctan\left(\frac{t}{a}\right)$$

por tanto

$$c + t - a \arctan\left(\frac{t}{a}\right) = x$$

devolviendo los cambios

$$c + x + y - a \arctan(\tfrac{x+y}{a}) = x \Rightarrow c + y - a \arctan(\tfrac{x+y}{a}) = 0$$

en consecuencia

$$y + c = a \arctan(\tfrac{x+y}{a}) \Rightarrow \tfrac{y+c}{a} = \arctan(\tfrac{x+y}{a})$$

haciendo $k = \frac{c}{a}$

$$\tfrac{y}{a} + k = \arctan(\tfrac{x+y}{a}) \Rightarrow \tan(\tfrac{y}{a} + k) = \tfrac{x+y}{a} \Rightarrow a \tan(\tfrac{y}{a} + k) = x + y.$$

17. Determine la solución de la ecuación diferencial

$$(1 - y)e^y y' = \frac{-y^2}{x \ln x}.$$

Solución: Separando variables e integrando

$$(1 - y)e^y y' = -\frac{y^2}{x \ln x} \Rightarrow \frac{(1 - y)e^y}{y^2} dy = -\frac{dx}{x \ln x} \Rightarrow \frac{e^y}{y^2} dy - \frac{e^y}{y} dy = -\frac{dx}{x \ln x}$$

$$\int \frac{e^y}{y^2} dy - \int \frac{e^y}{y} dy = -\int \frac{dx}{x \ln x}$$

Integrando por partes $\int \frac{e^y}{y} dy$ se obtiene que

$$\int \frac{e^y}{y}dy = \frac{e^y}{y} + \int \frac{e^y}{y^2}dy$$

luego la solución se transforma en

$$\int \frac{e^y}{y^2}dy - \frac{e^y}{y} - \int \frac{e^y}{y^2}dy = -\ln \ln x + c \Rightarrow \ -\frac{e^y}{y} + \ln \ln x = c \Rightarrow \ \ln \ln x = c + \frac{e^y}{y}.$$

18. Hallar la solución

$$\left(y - \sqrt{1+y^2}\right)\sqrt{(1+x^2)^3}\,dy - (1+y^2)dx = 0.$$

Solución:Separamos variables e integramos

$$\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{\left(y - \sqrt{1+y^2}\right)}{1+y^2}dy \Rightarrow \ c + \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{\left(y - \sqrt{1+y^2}\right)}{1+y^2}dy$$

en consecuencia

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{y}{1+y^2}dy - \int \frac{\sqrt{1+y^2}}{1+y^2}dy \Rightarrow \ c + \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy - \int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$$

a. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, hacemos el cambio $x = \tan\theta$, tal que: $dx = \sec^2\theta$. Luego

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)^3}}$$

$$\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)^3}} = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}d\theta = \int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \int \cos\theta d\theta = \sin\theta.$$

Devolviendo los cambios

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

b. $\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$, hacemos el cambio $y = \tan\beta$, tal que: $dx = \sec^2\beta$. Luego

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{\sec^2\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} d\beta$$

$$\int \frac{\sec^2\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} d\beta = \int \frac{\sec^2\beta}{\sec\beta} d\beta$$

$$\int \sec\beta d\beta = \ln|\sec\beta + \tan\beta|.$$

Devolviendo los cambios

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \ln\left|\sqrt{y^2+1} + y\right|$$

luego, la solución es

$$c + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\ln|1+y^2| - \ln\left|\sqrt{y^2+1} + y\right| \Rightarrow c + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{y^2+1}+y}$$

19. Resolver la ecuación diferencial

$$xy' + y = \frac{a^2}{xy^2}.$$

Haciendo el cambio

$$x^3y^3 = t.$$

Solución: Hacemos el cambio $x^3y^3 = t$ en la ecuación diferencial, derivando implicitamente

$$3x^2y^3 + 3y^2y'x^3 = t' \Rightarrow xy^2(y + xy') = \frac{t'}{3x}$$

en la ecuación diferencial $xy^2(xy' + y) = a^2$

$$\frac{t'}{3x} = a^2$$

separando variables e integrando

$$dt = a^2 3xdx \Rightarrow \int dt = \int a^2\, 3x\, dx \Rightarrow t = 3a^2\tfrac{x^2}{2} + c$$

luego

$$2t = 3a^2x^2 + 2c \Rightarrow 2t = 3a^2x^2 + k$$

con $k = 2c$. Devolvemos el cambio se tiene que la solución es

$$2x^3y^3 = 3a^2x^2 + k.$$

20. Encontrar la solución de

$$y' = -\frac{(x^2y^2 + 1)}{2x^2}$$

Haciendo el cambio $xy = t$.

Solución: Despejando de la ecuación diferencial,

$$(x^2y^2 + 1)dx + 2x^2dy = 0.$$

Si hacemos el cambio $xy = t$, (derivando implicitamente),

$$xy = t \Rightarrow y + xy' = t' \Rightarrow y' = \frac{t' - y}{x} \Rightarrow y' = \frac{xt' - t}{x^2}$$

en la ecuación diferencial se tiene que

$$(t^2 + 1) = -2x^2y' \Rightarrow (t^2 + 1) = -2x^2\left(\frac{xt' - t}{x^2}\right)$$

entonces

$$t^2 + 1 = -2xt' + 2t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = -2xt' \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{2dt}{(t-1)^2}$$

integramos

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2dt}{(t-1)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2dt}{(t-1)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln x = \frac{1}{t-1} + c$$

devolvemos el cambio

$$\frac{1}{2}\ln x = \frac{1}{xy-1} + c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{xy-1} = c$$

entonces la solución es

$$\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{1-xy} = c.$$

21. Determinar la solución de

$$(xy-1)^2 x dy + (1 + x^2y^2) y dx = 0$$

haciendo el cambio $xy = t.$

Solución: Despejando y' se tiene que

$$y' = -\frac{(1+t^2)y}{(t-1)^2 x}$$

haciendo el cambio

$$xy = t \Rightarrow y + xy' = t' \Rightarrow y' = \frac{xt' - t}{x^2}$$

de manera que la ecuación se transforma en

$$\frac{xt' - t}{x^2} = -\frac{(1+t')t}{(t-1)x^2} \Rightarrow xt' - t = -\frac{(1+t^2)t}{(t-1)^2} \Rightarrow xt' = -\frac{t+t^3}{(t-1)^2} + t$$

separando variables

$$xt' = \frac{-t - t^3 + t^3 - 2t^2 + t}{(t-1)^2} \Rightarrow xt' = -\frac{2t^2}{(t-1)^2} \Rightarrow \frac{(t-1)^2}{2t^2}dt = -\frac{2dx}{x}$$

integrando

$$\int \frac{t^2-2t+1}{2t^2}dt = -\int \frac{2}{x}dx + \ln c \Rightarrow \ \frac{1}{2}\int dt - \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\int \frac{2}{x}dx + \ln c$$

en consecuencia

$$\frac{1}{2}t - \ln t - \frac{1}{2t} = -2\ln x + \ln c$$

devolviendo los cambios y simplificando

$$\frac{xy}{2} - \ln xy - \frac{1}{2xy} = -2\ln x + \ln c \Rightarrow \ xy - 2\ln xy - \frac{1}{xy} = -\ln x^2 + \ln c$$

por tanto

$$xy - 2\ln xy - \frac{1}{xy} + \ln x^2 = \ln c \Rightarrow \ xy - \frac{1}{xy} = \ln \frac{cx^2y^2}{x^2}$$

la solución es

$$e^{xy-\frac{1}{xy}} = y^2c$$

22. Determinar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{(x^2y^3+y+x-2)}{(x^3y^2+x)}.$$

Solución: Haciendo el cambio

$$xy = t \Rightarrow \ y + xy' = t' \Rightarrow \ y' = \frac{xt'-t}{x}$$

de manera que la ecuación se transforma en

$$\frac{xt'-t}{x} = -\frac{\frac{t}{x}t^2 + \frac{t}{x} + x - 2}{xt^2+x} \Rightarrow \ \frac{xt'-t}{x} = -\frac{t^3+t+x^2-2x}{x(t^2+1)} \Rightarrow \ xt' - t = -\frac{t^3+t+x^2-2x}{t^2+1}$$

entonces

$$xt' = \frac{-t^3-t-x^2+2x}{t^2+1} + t \Rightarrow \ xt' = \frac{-t^3-t-x^2+2x+t^3+t}{t^2+1} \Rightarrow \ xt' = \frac{2x-x^2}{t^2+1}$$

por tanto

$$t' = \frac{2-x}{t^2+1}$$

separando variables e integramos

$$(t^2+1)dt = (2-x)dx \Rightarrow \int (t^2+1)dt = \int (2-x)dx + c \Rightarrow \frac{t^3}{3} + t = -\frac{x^2}{2} + 2x + c$$

en consecuencia

$$2t^3 + 6t = -3x^2 + 12x + c$$

devolviendo los cambios

$$2x^3y^3 + 6xy + 3x^2 - 12x = c.$$

23. Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{x^6 - 2x^5 + 2x^4 - y^3 + 4x^2y}{xy^2 - 4x^3}.$$

Solución: Haciendo el cambio

$$y = tx \Rightarrow y' = t'x + t$$

de manera que la ecuación será

$$t'x + t = \frac{2x^5 - x^6 - 2x^4 + t^3x^3 - 4x^3t}{t^2x^3 - 4x^3} \Rightarrow t'x + t = \frac{x^3(2x^2 - x^3 - 2x + t^3 - 4t)}{x^3(t^2-4)}$$

en consecuencia

$$t'x = \frac{2x^2 - x^3 - 2x + t^3 - 4t - t^3 + 4t}{t^2 - 4} \Rightarrow (t^2-4)dt = \frac{2x^2 - x^3 - 2x}{x}dx$$

integrando

$$\int (t^2-4)dt = \int \frac{2x^2-x^3-2x}{x}dx + c \Rightarrow \frac{t^3}{3} - 4t = x^2 - \frac{x^3}{3} - 2x + c$$

devolviendo los cambios y simplificando tenemos que

$$\frac{y^3}{3x^3} - \frac{4y}{x} = x^2 - \frac{x^3}{3} - 2x + c$$

luego, la solución es

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + \frac{y^3}{3x^3} - \frac{4y}{x} = c.$$

24. Efectuar un cambio de variables para resolver las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = \frac{(x+y)^m - (x+y)^n - (x+y)^p}{((x+y)^n + (x+y)^p)}$$

Con $n - m \neq -1, p - m \neq -1$.

Solución: Haciendo el cambio

$$x + y = t \Rightarrow \; 1 + y' = t' \Rightarrow \; y' = t' - 1$$

de manera que la ecuación $y' = \dfrac{(x+y)^m}{(x+y)^n + (x+y)^p} - 1$ se transforma en

$$t' - 1 = \frac{t^m}{t^n + t^p} - 1 \Rightarrow \; t' = \frac{t^m}{t^n + t^p}$$

separando variables e integrando

$$\frac{t^n + t^p}{t^m} dt = dx \quad \int \frac{t^n + t^p}{t^m} dt = \int dx + c$$

por tanto

$$\int t^{n-m} dt + \int t^{p-m} dt = \int dx + c \quad \frac{t^{n-m+1}}{n-m+1} + \frac{t^{p-m+1}}{p-m+1} = x + c$$

devolviendo los cambios, tenemos que

$$\frac{(x+y)^{n-m+1}}{n-m+1} + \frac{(x+y)^{p-m+1}}{p-m+1} = x + c$$

Con $n - m \neq -1, p - m \neq -1$.

25. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{\ln x + y^3}{3xy^2}.$$

Solución: Despejando se tiene que

$$3xy^2y' = \ln x + y^3$$

haciendo el cambio

$$\ln x + y^3 = t \Rightarrow \ \tfrac{1}{x} + 3y^2y' = u' \Rightarrow \ 1 + 3xy^2y' = xu'$$

luego

$$3xy^2y' = xu' - 1$$

sustituyendo el cambio en la ecuación se obtiene

$$xu' - 1 = \ln x + u - \ln x$$

$$xu' - 1 = u$$

separando variables, integrando y simplificando

$$xu' = u + 1 \Rightarrow \ \frac{du}{u+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ \int \frac{du}{u+1} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

entonces

$$\ln|u + 1| = \ln x + \ln c \Rightarrow \ u + 1 = cx$$

devolviendo los cambios

$$\ln x + y^3 + 1 = cx \quad y^3 = cx - 1 - \ln x.$$

26. Resolver la ecuación

$$y' = -\frac{xy + 2xy\ln^2 y + y\ln y}{2x^2\ln y + x}.$$

Solución: Factorizando

$$y' = -\frac{y(x + 2x\ln^2 y + \ln y)}{x(2x\ln y + 1)}$$

$$\frac{x}{y}y' = -\frac{x + 2x\ln^2 y + \ln y}{2x\ln y + 1}$$

haciendo el cambio

$$x\ln y = t \Rightarrow \quad \ln y + \frac{x}{y}y' = t' \Rightarrow$$

$$\frac{x}{y}y' = t' - \ln y \Rightarrow \quad \frac{x}{y}y' = t' - \frac{t}{x}$$

de manera que la ecuación se transforma en

$$t' - \frac{t}{x} = -\frac{\frac{(x+2)t^2}{x} + \frac{t}{x}}{2t+1} \Rightarrow \quad \frac{xt' - t}{x} = -\frac{x^2 + 2t^2 + t}{x(2t+1)} \Rightarrow$$

$$xt' - t = -\frac{(x^2 + 2t^2 + t)}{2t+1} \Rightarrow \quad xt' = \frac{-x^2 - 2t^2 - t}{2t+1} + t \Rightarrow$$

$$xt' = \frac{-x^2 - 2t^2 - t + 2t^2 + t}{2t+1} \Rightarrow \quad xt' = \frac{-x^2}{2t+1}$$

separando variables e integrando

$$(2t+1)dt = -xdx$$

$$\int (2t+1)dt = -\int xdx + c$$

$$\frac{1}{4}(2t+1)^2 = -\frac{x^2}{2} + c$$

devolviendo los cambios, tenemos que

$$(2x\ln y + 1)^2 + 2x^2 = c.$$

27. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y = xy' + a(1 + x^2y').$$

Solución: Despejando y', separando variables e integrando

$$y - xy' = a + ax^2y' \Rightarrow y - a = ax^2y' + xy'$$

$$y - a = y'(ax^2 + x) \Rightarrow y' = \frac{y-a}{ax^2+x}$$

luego

$$\frac{dy}{y-a} = \frac{dx}{ax^2+x}$$

integrando

$$\int \frac{dy}{y-a} = \int \frac{dx}{ax^2+x} + \ln c$$

aplicando el método de fracciones simples, sobre la integral $\int \frac{dx}{ax^2+x}$, se obtiene

$$\int \frac{dx}{ax^2+x} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{a}{ax+1}dx$$

$$\int \frac{dx}{ax^2+x} = \ln x - \ln|ax+1|$$

por tanto

$$\ln|y-a| = \ln x - \ln|ax+1| + \ln c$$

$$\ln|y-a| = \ln\frac{cx}{ax+1}$$

$$y-a = \frac{xc}{ax+1}$$

entonces la solución es

$$y = a + \frac{xc}{ax+1}.$$

28. Determinar la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{(a^2+y^2)}{2x\sqrt{ax-x^2}}$$

Sujeta a la condición inicial $y|_{x=a} = 0$.

Solución: Separando variables e integrando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2+y^2}{2x\sqrt{ax-x^2}}$$

$$\frac{dy}{a^2+y^2} = -\frac{dx}{2x\sqrt{ax-x^2}}$$

entonces

$$\int\frac{dy}{a^2+y^2} = -\int\frac{dx}{2x\sqrt{ax-x^2}} + c$$

a. $\int\frac{dy}{a^2+y^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dy}{\frac{y^2}{a^2}+1} = \frac{1}{a}\arctan\frac{y}{a}$

b. $\int\frac{dx}{2x\sqrt{ax-x^2}}$, haciendo el cambio

$$x = a\sin^2 t$$
$$dx = 2a\sin t\cos t\,dt$$

sustituimos y resolvemos

$$\int \frac{2a\sin t\cos t}{2a\sin^2 t\sqrt{a\sin^2 t(a-a\sin^2 t)}}dt = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{a}\cot t$$

devolviendo el cambio

$$\int\frac{dx}{2x\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{ax}}$$

entonces, la solución general de la ecuación es

$$\frac{1}{a}\arctan\frac{y}{a} = \frac{1}{\sqrt{ax}} + c$$

$$\arctan\frac{y}{a} = \frac{a}{\sqrt{xa}} + c$$

$$\frac{y}{a} = \tan\left(\sqrt{\frac{a}{x}} + c\right)$$

luego

$$y = a\tan\left(\sqrt{\frac{a}{x}} + c\right)$$

evaluando con $x = a$ y con $y = 0$, tenemos

$$0 = a\tan(1+c) \Rightarrow \ 0 = \tan(1+c)$$

$$0 = 1+c \Rightarrow \ c = -1$$

con $c = -1$, obtenemos la solución particular

$$y = a\tan\left(\sqrt{\frac{a}{x}} - 1\right).$$

29. Resolver la ecuación diferencial

$$x' = \frac{1}{\sin\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}}$$

Solución: Despejamos y'

$$y' = \sin\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}$$

naturalmente la fórmula: $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$, nos permite escribir

$$\sin\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2} = -2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}$$

sustituyendo se tiene que

$$y' = -2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}$$

separando variables e integrando

$$\frac{dy}{-\sin\frac{y}{2}} = 2\cos\tfrac{x}{2}dx \Rightarrow \ c + \int\frac{dy}{-\sin\frac{y}{2}} = 2\int\cos\tfrac{x}{2}dx$$

$$c + \int -\csc\tfrac{y}{2}dy = 2\int\cos\tfrac{x}{2}dx \Rightarrow \ c + 2\ln\left|\csc\tfrac{y}{2} + \cot\tfrac{y}{2}\right| = 4\sin\tfrac{x}{2}$$

por tanto

$$\frac{c}{2} + \ln\left|\csc\frac{y}{2} + \cot\frac{y}{2}\right| = 2\sin\frac{x}{2}$$

donde $k = \frac{c}{2}$

$$c - 2\sin\frac{x}{2} = -\ln\left|\csc\frac{y}{2} + \cot\frac{y}{2}\right|$$

$$c - 2\sin\frac{x}{2} = \ln\left|\frac{1}{\csc\frac{y}{2} + \cot\frac{y}{2}}\right|$$

si sabemos que $\dfrac{1}{\csc\frac{y}{2} + \cot\frac{y}{2}} = \tan\dfrac{y}{4}$, ya que

$$\frac{1}{\csc\frac{y}{2}+\cot\frac{y}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{\sin\frac{y}{2}}+\frac{\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{\csc\frac{y}{2}+\cot\frac{y}{2}}=\frac{\sin\frac{y}{2}}{1+\cos\frac{y}{2}}$$

luego

$$\frac{1}{\csc\frac{y}{2}+\cot\frac{y}{2}}=\frac{2\sin\frac{y}{4}\cos\frac{y}{4}}{1+\cos^2\frac{y}{4}-\sin^2\frac{y}{4}} \Rightarrow \frac{1}{\csc\frac{y}{2}+\cot\frac{y}{2}}=\frac{2\sin\frac{y}{4}\cos\frac{y}{4}}{2\cos^2\frac{y}{4}}$$

en consecuencia

$$\frac{1}{\csc\frac{y}{2}+\cot\frac{y}{2}}=\tan\frac{y}{4}$$

Por tanto la solución es

$$c-2\sin\frac{x}{2}=\ln\left|\tan\frac{y}{4}\right|.$$

Problemas propuestos

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $e^x dx - 2y dy = 0.$
2. $x dy - 3y dx = 0,\ y(2) = 5.$
3. $(e^y + x^2 e^y)y' - e^y x = 0.$
4. $(x\cos y)dx - dy = 0;\ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
5. $r^2 dr + r^2 z^2 dr - dz = 0.$
6. $y dx + dy = y\left(xe^{x^2}+1\right)dx;\ \ y(0) = 1.$
7. $\frac{dR}{dQ} = R(\cos Q + \sin Q).$
8. $z^2(x^2 + x^2 z^2)dx - dz = 0.$
9. $y' + \frac{x}{y} = 0;\ y = 2$ cuando $x = 1.$
10. $z' + \frac{z}{x} = 0;\ z(1) = 3.$
11. $3\sin x\cos x(y^2+1)dx + y(\sin^2 x + 2)dy = 0.$
12. $2y + e^{-3x}y' = 0.$
13. $\frac{x+xy^2}{4y}dx - dy = 0;\ y(1) = 0.$

14. $r^2 \dfrac{d\phi}{dr} - r\phi^2 = r.$

15. $ds + 2sdt = st^2dt;\ s(0) = 1.$

16. $\sqrt{1-y^2}\,dx - dy = 0.$

17. $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{1+x}{3y};\ y(6) = 7.$

18. $x' + (\cos t)e^x = 0.$

19. $\cot x dy + (y+3)dx = 0.$

20. $x(1-\sin t)dt - dx = 0;\ \ x(0) = 1.$

21. $\tan y dy + \tan x dx = 0; y(0) = 0.$

22. $y^2dx + x^2dy = 0;\ y(1) = 1.$

23. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{e^x} - 1;\ t(0) = 1.$

24. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{rs - s - 2r - s^2 + rs^2 + 2}{r^3 - 3r^2 - 6r + 8};\ s(0) = 0.$

25. $ydx = y(xe^x + 1)dx - dy.$

26. $xdy - y(3-x)dx = 0.$

27. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x^2y + x^3 - xy^3 + x^2y^2 + xy - x^2 + y^3 - xy^2}{x^2y - xy^2 - y^4 + xy^3}.$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(y+1) - xy}{y(y+1)};\ y(0) = 1.$

29. $\cos^2 x y' + \sin^2 y = 0;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$

30. $\sqrt{x^2y^2 + x^2}\,dx = \sqrt{y^2 + y^2x^2}.$

31. $3\sin x y' + 2y\cos x dx = 0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

32. $y' = \dfrac{3y^2 - 8xy - 3y + 8xy^2}{y-1}.$

33. $y' = -\left(x\dfrac{y}{x^2+2} + 3\dfrac{x}{y(x^2+2)}\right);\ \ y(1) = 2.$

34. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y-1)(3x - 2y + xy - 6)}{(xy - y - 2x + 2)(x+3)}.$

35. $y^3e^{-x^2-2y^2}y' = x^3e^{2x^2+3y^2}.$

36. $\left(\sqrt{s} + \sqrt{sU}\right)dU = (U+1)ds.$

37. $4xydy = (4y^2 - x^4)dx$ con la sustitución $y = ux$.

38. $xg(xy)y' + [f(x) + yg(xy)] = 0$ con la sustitución $u = xy$.

39. $x\sin(xy)y' + (x^2 + y\sin(xy)) = 0.$

40. $m\dfrac{dy}{dt} + gt - v_0 = 0.$

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Definición I. Una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n, si verifica la propiedad

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

Definición II. Una ecuación diferencial es homogénea si tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

y $f(x,y)$ es una función homogénea de grado cero.

Teorema I. Una ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

se puede transformar en una ecuación diferencial de variables separables con la sustitución

$$u = \frac{y}{x}.$$

Teorema II. Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

se puede transformar en una ecuación diferencial homogénea, si las rectas

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

se intersectan en el punto (x_0, y_0), haciendo la sustitución

$$x = X + x_0$$
$$y = Y + y_0.$$

o en una ecuación diferencial de variables separables, si las rectas

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

son paralelas, haciendo el cambio

$$u = a_1x + b_1y.$$

Problemas Resueltos

1. Determinar la solución de

$$2yy' = 3y - 4x + 3xy'.$$

Solución: Asociando términos semejantes tenemos que

$$y' = \frac{3y - 4x}{2y - 3x}$$

es una ecuación diferencial homogénea, con $f(x,y) = \dfrac{3y - 4x}{2y - 3x}$, función homogénea de grado cero,haciendo el cambio

$$y = ux \Rightarrow \; y' = u + xu'$$

y sustituyendo éste en la ecuación diferencial se obtiene

$$u + xu' = \frac{3xu - 4x}{2xu - 3x}$$

luego simplificando

$$u + xu' = \frac{3u - 4}{2u - 3}$$

$$xu' = \frac{-2u^2 + 6u - 4}{2u - 3}$$

entonces

$$\int \frac{2u - 3}{-2u^2 + 6u - 4}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

integrando, se obtiene

$$-\frac{1}{2}\ln(u^2 - 3u + 2) = \ln|x| + \ln|c|$$

devolviendo el cambio

$$\frac{y^2}{x^2} - \frac{3y}{x} + 2 = \frac{1}{c^2x^2}$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial

$$y^2 - 3xy + 2x^2 = \frac{1}{c^2}.$$

2. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}.$$

Solución: Como $f(x,y) = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$, es una función homogénea de grado cero, entonces

$$y' = \frac{y + \sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

es una ecuación homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$

$$y' = u + xu'$$

en la ecuación diferencial se tiene que

$$u + xu' = \frac{xu + \sqrt{u^2x^2 - x^2}}{x}$$

simplificando se obtiene

$$u + xu' = \frac{3u - 4}{2u - 3}$$

$$xu' = \sqrt{u^2 - 1}$$

entonces

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x}$$

haciendo el cambio

$$u = \sec t$$

$$u' = \sec t \tan t dt$$

para resolver la integral $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}$ y sustituyendo resulta

$$\int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t|$$

devolviendo los cambio se obtiene

$$\ln\left|u + \sqrt{u^2 - 1}\,\right| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = xc$$

simplificando se obtiene la solución a la ecuación diferencial dada

$$2cy = 1 + x^2c.$$

3. Hallar la solución general de la ecuación

$$x^2(y' + 4) - y(x + 5y - xy')y' = 0.$$

Solución: Despejando y' se tiene que

$$y' = \frac{4x^2 - xy + y^2}{xy - x^2 - 4y^2}$$

donde $f(x,y) = \dfrac{4x^2 - xy + y^2}{xy - x^2 - 4y^2}$ es una función homogénea de grado cero. Entonces la ecuación diferencial es homogénea.Haciendo el cambio

$$y = ux$$
$$y' = u + xu'$$

en la ecuación diferencial

$$u + xu' = \frac{4x^2 - x^2u + u^2x^2}{x^2u - x^2 - 4x^2u^2}$$

simplificando se obtiene

$$u + xu' = \frac{4 - u + u^2}{-1 + u - 4x^2}$$

$$xu' = \frac{-4(1 + u^3)}{1 - u + 4x^2}$$

luego separando variables y factorizando

$$\frac{-1}{4}\int \frac{(1 - u + u^2)}{(1 + u)(1 - u + u^2)}du - \frac{1}{4}\int \frac{3u^2}{1 + u^3} = \int \frac{dx}{x}$$

integrando se obtiene

$$\frac{-1}{4}\ln(u+1) - \frac{1}{4}\ln(u^3+1) = \ln|x| + \ln|c|$$

aplicando propiedades de la función logaritmo

$$(u+1)(1+u^3) = \frac{1}{x^4C^4}$$

devolviendo el cambio

$$1 + \frac{y^3}{x^3} + \frac{y}{x} + \frac{y^4}{x^4} = \frac{1}{x^4C^4}$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación dada

$$(x+y)(x^3+y^3) = \frac{1}{C^4}.$$

4. Determinar la solución de la ecuación

$$y' = \frac{(4x-3y)(x+y)}{5x^2-2xy-y^2}$$

Solución: Como la función $f(x,y) = \dfrac{(4x-3y)(x+y)}{5x^2-2xy-y^2}$ es una función homogénea de grado cero, entonces la ecuación diferencial es homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$
$$y' = u + xu'$$

sustituyendo y simplificando

$$u + xu' = \frac{-4x^2 - x^2u + 3u^2x^2}{-5x^2 + 2x^2u + x^2u^2} \Rightarrow u + xu' = \frac{-4 - u + 3u^2}{-5 + 2u + x^2}$$

despejando

$$xu' = \frac{u^2 + 4u - u^3 - 4}{u^2 + 2u - 5}$$

entonces

$$\int \frac{u^2+2u-5}{u^3-u^2-4u+4}\,du = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|$$

integrando por fracciones simples se obtiene

$$\frac{2}{3}\ln(u-1)+\frac{3}{4}\ln(u-2)-\frac{5}{12}\ln(u+2) = \ln x+\ln|C|$$

devolviendo el cambio

$$\sqrt[12]{\frac{\dfrac{(y-x)^8(y-2x)^9}{x^8}}{\dfrac{(y+2x)^5}{x^5}}} = \frac{1}{cx}$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$(y-x)^8(y-2x)^9 = k(y+2x)^5.$$

5. Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{2}{3}y+\frac{2}{3}\frac{y^3}{3x^2-y^2}$$

Solución:Como $f(x,y) = \frac{2}{3}y+\frac{2}{3}\frac{y^3}{3x^2-y^2}$ es una función homogénea de grado cero, entonces la ecuación diferencial es homogénea

$$y' = \frac{2xy}{3x^2-y^2}$$

haciendo el cambio

$$y = ux$$
$$y' = u+xu'$$

sustituyendo y simplificando se obtiene

$$u+xu' = \frac{2x^2u}{3x-x^2u^2}$$

$$u+xu' = \frac{2u}{3-u^2}$$

$$xu' = \frac{2u+u^3-3u}{3-u^2}$$

entonces

$$\int\frac{3-u^2}{u^3-u}du = \int\frac{dx}{x}+\ln c$$

integrando por fracciones simples se obtiene

$$\int \frac{3-u^2}{u^3-u}du = -\int \frac{3}{u}du + \int \frac{1}{u-1}du + \int \frac{1}{u+1}du$$

por tanto

$$-3\ln u + \ln(u-1) + \ln(u+1) = \ln(cx)$$

aplicando las propiedades de los logaritmos y devolviendo el cambio

$$\frac{\frac{y^2-x^2}{x^2}}{\frac{y^3}{x^3}} = cx$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial

$$(y^2-x^2) = cy^3.$$

6. Encontrar la solución general de la ecuación

$$y^2(y-2xy') + 2x^2y - 2x^3y' = 0.$$

Solución: Despejando y' de la ecuación diferencial se obtiene

$$y' = \frac{y^3+2x^2y}{2x^3+2xy^2}$$

donde $f(x,y) = \dfrac{y^3+2x^2y}{2x^3+2xy^2}$ es una función homogénea de grado cero, entonces la ecuación diferencial es homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$

$$y' = u + xu'$$

sustituyendo y simplificando en la ecuación diferencial se tiene que

$$u + xu' = \frac{u^3x^3+2ux^3}{2x^3+2x^3u^2}$$

$$u + xu' = \frac{u^3+2u}{2+2u^2}$$

$$xu' = \frac{-u^3}{2(u^2+1)}$$

luego

$$-2\int \frac{u^2+1}{u^3}du = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

$$2\ln|u| - \frac{1}{u^2} = -\ln|cx|$$

devolviendo el cambio

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{cx}e^{\frac{x^2}{y^2}}$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$y^2 = kxe^{\frac{x^2}{y^2}}$$

con $k = \frac{1}{c}$.

7. Resolver la ecuación diferencial

$$xdy - \sqrt{y^2 - x^2}\,dx = 0.$$

Solución: Despejando y'

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$$

donde $f(x,y) = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{x}$ es una función homogénea de grado cero, entonces la ecuación diferencial es homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$

$$y' = u + xu'$$

sustituyendo y simplificando se obtiene

$$u + xu' = \frac{\sqrt{y^2u^2 - x^2}}{x}$$

$$u + xu' = \sqrt{u^2 - 1}$$

$$xu' = \sqrt{u^2 - 1} - u$$

luego

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

resolviendo la integral

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}-u} = \int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}-u} \times \frac{\sqrt{u^2-1}+u}{\sqrt{u^2-1}+u}du$$

$$= -\int \left(\sqrt{u^2-1}+u\right)du = -\int \sqrt{u^2-1}\,du - \int udu$$

para resolver la integral

$$I = \int \sqrt{u^2-1}\,du$$

se hace el cambio

$$u = \sec t$$

$$du = \sec t \tan t dt$$

luego resulta

$$I = \int \tan^2 t \sec t dt = \int (\sec^2 t - 1)\sec t dt = \int \sec^3 t dt - \int \sec t dt$$

$$I = \frac{1}{2}\sec t \tan t + \frac{1}{2}\ln(\sec t + \tan t)$$

devolviendo los cambios se tiene

$$\frac{-u\sqrt{u^2-1} + \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| - u^2}{2} = \ln|cx|$$

$$\frac{-\frac{y}{x}\sqrt{\frac{y^2-x^2}{x^2}} + \ln\left|\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2-x^2}{x^2}}\right| - \frac{y^2}{x^2}}{2} = \ln|xc|$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$y + \sqrt{y^2-x^2} = x^3C^2e^{\frac{y}{x^2}\left(y+\sqrt{y^2-x^2}\right)}.$$

8. Determinar la solución de las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = \frac{-2bxy - ax^2 - cy^2}{bx^2 + 2cxy + fy^2}.$$

Solución: Como $f(x,y) = \dfrac{-2bxy - ax^2 - cy^2}{bx^2 + 2cxy + fy^2}$ es una función homogénea de grado cero, entonces la ecuación diferencial es homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$

$$y' = u + xu'$$

en la ecuación resulta

$$u + xu' = \frac{-(ax^2 + 2bx^2u + cu^2)}{bx^2 + 2cx^2u + fx^2u^2}$$

$$u + xu' = \frac{-(a + 2bu + cu^2)}{b + 2cu + fu^2}$$

$$xu' = \frac{-(a + 3bu + 3cu^2 + fu^3)}{b + 2cu + fu^2}$$

luego

$$\int \frac{b + 2cu + fu^2}{a + 3bu + 3cu^2 + fu^3} du = -\int \frac{dx}{x} + \ln c$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{3b + 6cu + 3fu^2}{a + 3bu + 3cu^2 + fu^3} du = -\int \frac{dx}{x}$$

integrando se obtiene

$$\frac{1}{3} \ln(a + 3bu + 3cu^2 + fu^3) = -\ln|cx|$$

devolviendo el cambio

$$a + 3b\frac{y}{x} + 3c\frac{y^2}{x^2} + f\frac{y^3}{x^3} = \frac{1}{x^3C^3}$$

Simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$fy^3 + 3cxy^2 + 3bx^2y + ax^3 = k$$

donde $k = \frac{1}{C^3}$.

9. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-xy}{(y^4 - 3x^2)}.$$

Solución: Observemos que $f(x,y) = \frac{-xy}{(y^4 - 3x^2)}$ no es una función homogénea, por lo que la ecuación diferencial no es homogénea pero podría transformarse en una de ellas, haciendo el siguiente cambio

$$y = z^\alpha$$

$$y' = \alpha z^{\alpha-1}z'$$

sustituyendo

$$\alpha z^{\alpha-1}z' = \frac{-xz^\alpha}{z^{4\alpha} - 3x^2}$$

$$z' = \frac{-xz^\alpha}{\alpha(z^{5\alpha-1} - 3x^2z^{\alpha-1})}$$

si buscamos un α apropiado para que la ecuación anterior sea homogénea, entonces

$$\begin{cases} \alpha + 1 = 5\alpha - 1 \\ \alpha + 1 = 2 + \alpha - 1 \end{cases}$$

este sistema es equivalente a $\alpha + 1 = 5\alpha - 1$ luego $\alpha = \frac{1}{2}$. Entonces la ecuación se puede transformar en homogénea haciendo el cambio $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$z' = \frac{-2xz^{\frac{1}{2}}}{(z^{\frac{3}{2}} - 3x^2z^{\frac{1}{2}})}$$

donde $f(x,y) = \frac{-2xz^{\frac{1}{2}}}{(z^{\frac{3}{2}} - 3x^2z^{\frac{1}{2}})}$ es una función homogénea de grado cero. Haciendo el cambio

$$z = ux$$
$$z' = u + xu'$$

sustituyendo en la ecuación diferencial

$$u + xu' = \frac{-2x^{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}u - 3x^{\frac{3}{2}}u^{\frac{-1}{2}}}$$

$$xu' = \frac{2u - 3u + u^3}{3 - u^2}$$

luego

$$\int \frac{3-u^2}{u^3-u}du = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

integrando por fracciones simples se obtiene

$$\int \frac{3-u^2}{u^3-u}du = -\int \frac{3}{u}du + \int \frac{1}{u-1}du + \int \frac{1}{u+1}du$$

$$-3\ln u + \ln(u-1) + \ln(u+1) = \ln|x| - \ln|c|$$

devolviendo los cambios es decir haciendo $u = \frac{y^2}{x}$ se tiene

$$\ln\left|\frac{\frac{y^2-x^2}{x^2}}{\frac{y^6}{x^3}}\right| - \ln|x| = \ln|c|$$

simplificando, se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$y^2 - x^2 = Cy^6.$$

10. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{y^3}{(x^2 - xy^2)}dx + 2dy = 0.$$

Solución: Despejando y' se tiene que

$$y' = \frac{-y^3}{2(x^2 - xy^2)}$$

que no es una ecuación diferencial homogénea, dado que $f(x,y) = \dfrac{-y^3}{2(x^2 - xy^2)}$ no es una función homogénea, pero podría transformarse haciendo el siguiente cambio

$$y = z^\alpha$$

$$y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$$

sustituyendo en la ecuación

$$\alpha z^{\alpha-1} z' = \frac{-z^\alpha}{2(x^2 - xz^{2\alpha})}$$

$$z' = \frac{-z^{3\alpha}}{2\alpha(x^2 z^{\alpha-1} - xz^{3\alpha-1})}$$

si buscamos un α apropiado para que la ecuación anterior sea homogénea, entonces

$$\begin{cases} 3\alpha = \alpha + 1 \\ 3\alpha = 2 + \alpha - 1 \\ 3\alpha = 1 + 3\alpha - 1 \end{cases}$$

luego $\alpha = \frac{1}{2}$ para que la ecuación diferencial sea homogénea, entonces cambiando $\alpha = \frac{1}{2}$ resulta

$$z' = \frac{-z^{\frac{3}{2}}}{(x^2 z^{-\frac{1}{2}} - xz^{\frac{1}{2}})}$$

que es homogénea. Haciendo el cambio

$$z = ux$$
$$z' = u + xu'$$

sustituyendo

$$u + xu' = \frac{-x^{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}}}{x^2u^{\frac{-1}{2}}x^{\frac{-1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}x}$$

$$xu' = \frac{-u^2 - u + u^2}{1-u}$$

entonces

$$\int \frac{1-u}{-u}du = \int \frac{dx}{x}\ln c$$

integrando se obtiene

$$\int \frac{1-u}{-u}du = -\ln u + u = \ln|cx|$$

devolviendo los cambios es decir haciendo $u = \frac{y^2}{x}$ se tiene

$$-\ln\left|\frac{y^2}{x}\right| + \frac{y^2}{x} = \ln|cx|$$

simplificando, se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$y^2 = x\ln|cy^2|.$$

11. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$\left(y - \sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xdy = 0.$$

Solución: Despejando y' se tiene que

$$y' = \frac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

como $f(x,y) = \frac{y - \sqrt{x^2+y^2}}{x}$ es una función homogénea de grado cero, entonces la ecuación diferencial es homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$

$$y' = u + xu'$$

sustituyendo y simplificando se obtiene

$$u + xu' = \frac{xu - \sqrt{x^2 + u^2x^2}}{x}$$

$$xu' = -\sqrt{1 + u^2}$$

luego

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = -\int \frac{dx}{x} + \ln c$$

haciendo el cambio, para resolver la primera integral,

$$u = \tan t$$
$$u' = \sec^2 t dt$$

resulta

$$\int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t|$$

devolviendo el cambio, $u = \tan t$, nos resulta

$$\ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| = -\ln|x| + \ln|c|$$

con el cambio inicial se tiene

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = \frac{c}{x}$$

simplificando se obtiene la solución a la ecuación

$$c^2 - x^2 = 2cy.$$

12. Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Solución: Despejando y' se tiene que

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

como $f(x,y) = \dfrac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$ es una función homogénea de grado cero, entonces la ecuación diferencial es homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$

$$y' = u + xu'$$

sustituyendo y simplificando se obtiene

$$u + xu' = \frac{xu + \sqrt{x^2 + u^2x^2}}{x}$$

$$xu' = \sqrt{1+u^2}$$

entonces

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

haciendo el cambio

$$u = \tan t$$

$$du = \sec^2 t dt$$

para resolver la primera integral y sustituyendo resulta

$$\int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t|$$

devolviendo el cambio se obtiene

$$\ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| = \ln|x| + \ln|c|$$

con el cambio inicial se tiene

$$\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}}{x}} = \ln|c|$$

simplificando se obtiene la solución a la ecuación diferencial dada

$$c^2x^2 = 1 + 2cy.$$

13. Resolver

$$(x-1)dy+(3x+y-2)dx = 0.$$

Solución: Determinando el punto donde se intersecta la recta $3x+y-2 = 0$ con $x-1 = 0$

$$\begin{cases} 3x+y-2 = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases}$$

por tanto se cortan en $(x_0, y_0) = (1,-1)$. Hacemos el siguiente cambio, traslación de ejes,

$$x = t+1 \quad \Rightarrow dx = dt$$

$$y = z-1 \quad \Rightarrow dy = dz$$

sustituyendo y simplificando se obtiene

$$3(t+1)+z-1-2+z'(t+1-1) = 0$$

$$3t+z+z't = 0$$

$$z' = \frac{-3t-z}{t}$$

como $f(x,y) = \frac{-3t-z}{t}$ es una función homogénea de grado cero, entonces la ecuación anterior es homogénea. Haciendo el cambio

$$z = ut$$

$$z' = u+tu'$$

sustituyendo y simplificando se obtiene:

$$u+tu' = \frac{-3t-ut}{t}$$

$$tu' = -3-2u$$

luego

$$-\int \frac{du}{3+2u} = \int \frac{dt}{t} + \ln c$$

resolviendo la integral, resulta

$$-\frac{1}{2}\ln(3+2u) = \ln|t| - \ln|c|$$

devolviendo los cambios

$$-\frac{1}{2}\ln\left(3+2\frac{(y+1)}{(x-1)}\right) = \ln|c(x-1)|$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$(x-1)(3x+2y-1) = \frac{1}{c^2}.$$

14. Determinar la solución de la ecuación

$$y' = \frac{2x+2y-1}{2-y-x}.$$

Solución: Como las rectas $2x+2y-1=0$ y $2-y-x=0$ son paralelas, pues las pendientes de ambas rectas son iguales, entonces haciendo el cambio

$$x+y=z$$

$$y' = z'-1$$

obtenemos la ecuación

$$z'-1 = \frac{2z-1}{2-z}$$

$$z' = \frac{z+1}{2-z}$$

entonces

$$\int \frac{z-2}{z+1}dz = -\int dx + \ln c$$

la primera integral

$$\int \frac{z-2}{z+1}dz = \int \frac{z+1-3}{z+1}dz = \int \frac{z+1}{z+1}dz - 3\int \frac{dz}{z+1}$$

Entonces se tiene que

$$z - 3\ln(z+1) = -x + \ln|c|$$

devolviendo el cambio y simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$x + y - 3\ln(x+y+1) = -x + \ln|c|$$

$$x + y + 1 = ke^{\frac{2x+2y}{3}}.$$

15. Encontrar la solución de la ecuación

$$y' = \frac{3y - 7x + 7}{3x - 7y - 3}.$$

Solución: Determinando el punto de intersección de las rectas $3y - 7x + 7 = 0$; $3x - 7y - 3 = 0$, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} -7x + 3y + 7 = 0 \\ 3x - 7y - 3 = 0 \end{cases}$$

resulta que se intersectan en $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, como son rectas que se cortan en un punto hacemos el cambio

$$x = t + 1 \quad \to dx = dt$$

$$y = z \quad \to dy = dz$$

sustituyendo y simplificando se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = \frac{3z - 7(t+1) + 7}{3(t+1) - 7z - 3}$$

$$z' = \frac{3z - 7t}{3t - 7z}$$

que es una ecuación diferencial homogénea. Hacemos el cambio

$$z = ut$$

$$z' = u + tu'$$

sustituyendo y simplificando se obtiene

$$u + tu' = \frac{3ut - 7t}{3t - 7ut}$$

$$tu' = \frac{7u^2 - 7}{3 - 7u}$$

luego

$$-\int \frac{3 - 7u}{7u^2 - 7} du = \int \frac{dt}{t} + \ln c$$

como

$$\frac{1}{7}\int \frac{3 - 7u}{u^2 - 1} du = -\frac{1}{7}\int \frac{2}{u - 1} du - \frac{1}{7}\int \frac{5}{u + 1} du$$

$$\frac{1}{7}\int \frac{3 - 7u}{u^2 - 1} = -\frac{2}{7}\ln(u - 1) - \frac{5}{7}\ln(u + 1) = \ln|ct|$$

usando el método de fracciones simples.Devolviendo los cambios se tiene

$$\frac{(y - x + 1)^2(y + x - 1)^5}{(x - 1)^2(x - 1)^5} = \frac{1}{c(x - 1)^7}$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$(y - x + 1)^2(x + y - 1) = \frac{1}{c^7}.$$

16. Determinar la solución general de la ecuación

$$2xy' + y + y\sqrt{x^2y^4 + 1} = 0.$$

Solución: Despejando y' se tiene que

$$y' = \frac{-\left(y + y\sqrt{x^2y^4 + 1}\right)}{2x}$$

como $f(x,y) = \dfrac{-\left(y + y\sqrt{x^2y^4 + 1}\right)}{2x}$ no es una función homogénea, pero la ecuación diferencial puede transformarse en homogénea. Haciendo el siguiente cambio

$$y = z^{\alpha}$$

$$y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$$

sustituyendo y simplificando se obtiene

$$z' = \frac{-\left(z^{\alpha} + \sqrt{x^2 z^{6\alpha} + z^{2\alpha}}\right)}{2\alpha x z^{\alpha-1}}$$

si esta ecuación diferencial es homogénea, entonces

$$\begin{cases} \alpha = 3\alpha + 1 \\ \alpha = \frac{6\alpha+2}{2} \\ \alpha = \frac{2\alpha}{2} \\ \alpha = 1 + \alpha - 1 \end{cases}$$

como el sistema equivalente es $3\alpha + 1 = \alpha$ entonces $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Cambiando $\alpha = -\frac{1}{2}$ en la ecuación diferencial, se obtiene la ecuación diferencial homogénea

$$z' = \frac{\left(z^{\frac{-1}{2}} + \sqrt{x^2 z^{-3} + z^{-1}}\right)}{x z^{-\frac{3}{2}}}$$

haciendo el cambio

$$z = ux$$

$$z' = u + xu'$$

sustituyendo y simplificando se obtiene

$$u + xu' = \frac{\left(z^{\frac{-1}{2}} u^{\frac{-1}{2}} + \sqrt{x^2 u^{-3} x^{-3} + u^{-1} x^{-1}}\right)}{x x^{-\frac{3}{2}} u^{-\frac{3}{2}}}$$

$$xu' = \sqrt{1 + u^2}$$

luego

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

haciendo el cambio, para resolver la integral

$$u = \tan t$$

$$u' = \sec^2 t dt$$

entonces

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t|$$

devolviendo el cambio se obtiene

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| = \ln|x| + \ln|c|$$

como $u = \frac{1}{y^2}$ la solución se transforma en

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{y^4}} + \frac{1}{y^2 x} = cx$$

simplificando, se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$\sqrt{x^2 y^4 + 1} = x^2 y^2 c - 1.$$

17. Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-4xy^2}{3x^2 y - 1}.$$

Solución: Como $f(x,y) = \frac{-4xy^2}{3x^2y-1}$ no es una función homogénea, podría transformarse haciendo el siguiente cambio

$$y = z^{\alpha}$$
$$y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$$

sustituyendo

$$\alpha z^{\alpha-1}z' = \frac{-4xz^{2\alpha}}{3x^2z^\alpha - 1}$$

$$z' = \frac{-4xz^{2\alpha}}{\alpha(3x^2z^{2\alpha-1} - z^{\alpha-1})}$$

si esta ecuación diferencial es homogénea, entonces

$$\begin{cases} 2\alpha + 1 = 2 + 2\alpha - 1 \\ 2\alpha + 1 = \alpha - 1 \end{cases}$$

como el sistema equivalente es $2\alpha + 1 = \alpha - 1$ entonces $\alpha = -2$. cambiando $\alpha = -2$ en la ecuación diferencial, se obtiene la ecuación diferencial homogénea

$$z' = \frac{-4xz^{-4}}{-2(3x^2z^{-5} - z^{-3})}$$

hacemos el cambio

$$z = ux$$

$$z' = u + xu'$$

sustituyendo

$$u + xu' = \frac{4xu^{-4}x^{-4}}{2(3x^2u^{-5}x^{-5} - u^{-3}x^{-3})}$$

$$xu' = \frac{-2u + 2u^3}{6 - 2u^2}$$

luego

$$\int \frac{6 - 2u^2}{2u^3 - 2u}du = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

integrando por fracciones simples se obtiene

$$\int \frac{6 - 2u^2}{2u^3 - 2u}du = -\int \frac{3}{u}du + \int \frac{1}{u-1}du + \int \frac{1}{u+1}du$$

por tanto

$$-3\ln u + \ln(u-1) + \ln(u+1) = \ln|x| + \ln|c|$$

devolviendo los cambios siendo $u = \dfrac{1}{x\sqrt{y}}$ se tiene

$$\frac{x}{y} - x^3 = \frac{xc}{y\sqrt{y}}$$

simplificando, se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$y(1 - yx^2)^2 = c.$$

18. Determinar la solución de la ecuación

$$(x + y^3 + (3y^5 - 3y^2x)y' = 0$$

Solución: Despejando y'

$$y' = \frac{-(x + y^3)}{3y^5 - 3y^2x}$$

como $f(x,y) = \dfrac{-(x + y^3)}{3y^5 - 3y^2x}$ no es una función homogénea, podría transformarse haciendo el siguiente cambio

$$y = z^\alpha$$

$$y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$$

sustituyendo

$$\alpha z^{\alpha-1} z' = \frac{-(x + z^{3\alpha})}{3z^{5\alpha} - 3xz^{2\alpha}}$$

$$z' = \frac{-(x + z^{3\alpha})}{\alpha(3z^{6\alpha-1} - 3z^{3\alpha-1}x)}$$

si esta ecuación diferencial es homogénea, entonces

$$\begin{cases} 1 = 3\alpha \\ 1 = 6\alpha - 1 \\ 1 = 3\alpha - +1 \\ \alpha = 1 + \alpha - 1 \end{cases}$$

como el sistema equivalente es $1 = 3\alpha$ entonces $\alpha = \frac{1}{3}$. Cambiando $\alpha = \frac{1}{3}$ en la ecuación diferencial, se obtiene la ecuación diferencial homogénea

$$z' = \frac{x+z}{x-z}$$

hacemos el cambio

$$z = ux$$

$$z' = u + xu'$$

sustituyendo

$$u + xu' = \frac{x+uz}{x-uz}$$

$$xu' = \frac{1+u^2}{1-u}$$

luego

$$\int \frac{1-u}{1+u^2}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + c$$

devolviendo los cambios, haciendo $u = \frac{y^3}{x}$ se tiene

$$\arctan\left(\frac{y^3}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^6}{x^2}\right) = \ln|x| + c$$

simplificando, se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$\arctan\left(\frac{y^3}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^6) + c.$$

19. Resolver la ecuación diferencial

$$x^3y' = -2\left(x^2y + \sqrt{1+x^4y^2}\right).$$

Solución: Como

$$y' = \frac{-2\left(x^2y + \sqrt{1+x^4y^2}\right)}{x^3}$$

no es una ecuación diferencial homogénea, entonces haciendo el siguiente cambio

$$y = z^{\alpha}$$

$$y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$$

puede encontrarse el valor α para transformarla en homogénea. Sustituyendo

$$\alpha z^{\alpha-1} z' = \frac{-2\left(x^2 z^{\alpha} + \sqrt{1 + x^4 z^{2\alpha}}\right)}{x^3}$$

luego se tiene que

$$z' = \frac{-2\left(x^2 z^{\alpha} + \sqrt{1 + x^4 z^{2\alpha}}\right)}{\alpha z^{\alpha-1} x^3}$$

$$z' = \frac{-2\left(x^2 z + \sqrt{z^{-2\alpha+2} + x^4 z^2}\right)}{\alpha x^3}$$

si esta ecuación diferencial es homogénea, entonces

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{-2\alpha + 2}{2} \\ 3 = \dfrac{4+2}{2} \\ 3 = 3 \end{cases}$$

como el sistema equivalente es $3 = \dfrac{-2\alpha + 2}{2}$ entonces $\alpha = -2$.

Cambiando $\alpha = -2$ en la ecuación diferencial, se obtiene la ecuación diferencial homogénea

$$z' = \quad z' = \frac{\left(x^2 z + \sqrt{z^6 + x^4 z^2}\right)}{x^3}$$

haciendo el cambio

$$z = ux$$
$$z' = u + xu'$$

en la ecuación diferencial resulta

$$u + xu' = \frac{\left(x^3u + \sqrt{u^6x^6 + x^6u^2}\right)}{x^3}$$

$$u + xu' = u + u\sqrt{u^4 + 1}$$

$$xu' = u\sqrt{u^4 + 1}$$

luego

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^4 + 1}} = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

haciendo el cambio

$$u^2 = t$$

$$2udu = dt$$

en la primera integral se tiene que

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^4 + 1}} = \int \frac{dt}{2t\sqrt{t^2 + 1}}$$

haciendo el cambio

$$t = \tan\theta$$
$$dt = \sec^2\theta d\theta$$

se tiene que

$$\int \frac{dt}{2t\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta}{\tan\theta\sec\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int \csc\theta d\theta = \frac{1}{2}\ln|\csc\theta - \cot\theta|$$

devolviendo el cambio resulta

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1 + t^2} - 1}{t}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1 + u^4} - 1}{u^2}\right|$$

como $u = \frac{1}{x\sqrt{y}}$, entonces, se tiene que la solución es

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4y^2}}-1}{x^2y}\right| = \ln|x| + \ln|c|$$

Simplificando se obtiene

$$\sqrt{1+x^4y^2} - x^2y = x^6y^2c.$$

20. Encontrar la solución a la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{2x-4y}{y+x-3}.$$

Solución: Como las rectas $2x-4y=0$; $y+x-3=0$ se intersectan en $x_0=2$, $y_0=1$, en efecto resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -x+3 \end{cases}$$

resulta que la solución es: $x_0=2$, $y_0=1$. Hacemos el cambio

$$x = t+2 \quad \Rightarrow dx = dt$$

$$y = z+1 \quad \Rightarrow dy = dz$$

en la ecuación diferencial, obteniendo

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2t+4-4z-4}{z+1+t+2-3}$$

$$z' = \frac{4z-2t}{t+z}$$

que es una ecuación diferencial homogénea, por lo que haciendo el cambio

$$z = ut$$

$$z' = u + tu'$$

en la ecuación se tiene que

$$u + tu' = \frac{4ut - 2t}{ut + t}$$

$$tu' = \frac{3u - u^2 - 2}{u + 1}$$

entonces

$$-\int \frac{(u+1)du}{u^2 - 3u + 2} = -\int \frac{dt}{t} + \ln c$$

integrando por fracciones simples

$$\int \frac{(u+1)}{u^2 - 3u + 2}du = -2\ln(u-1) + 3\ln(u-2) - \int \frac{2}{u-1}du + \int \frac{3}{u-2}du$$

resolviendo la integral, resulta

$$-2\ln(u-1) + 3\ln(u-2) = -\ln|t| + \ln|c|$$

devolviendo los cambios resulta

$$\frac{(y-1-2x+4)^3}{(y-1-x+2)^2} = c$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial dada

$$(y - 2x + 3)^3 = c(y - x + 1)^2.$$

21. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-x + 2y + 1}{3x - 6y + 2}.$$

Solución: Como las pendientes de las rectas $-x + 2y + 1 = 0$; $3x - 6y + 2 = 0$ son iguales entonces las rectas son paralelas por lo tanto haciendo el cambio

$$z = x - 2y$$

$$y' = -\frac{1}{2}z' - \frac{1}{2}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando se obtiene

$$x = t - 1 \quad \Rightarrow dx = dt$$

$$y = z + 2 \quad \Rightarrow dy = dz$$

sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{(t - 1 - z - 2 + 3)}{(3t - 3 + z + 2 + 1)}$$

$$z' = \frac{z - t}{3t + z}$$

que es una ecuación diferencial homogénea. Hacemos el cambio

$$z = ut$$
$$z' = u + tu'$$

sustituyendo y simplificando en la ecuación homogénea

$$u + tu' = \frac{ut - t}{3t + ut}$$

$$tu' = \frac{-2u - u^2 - 1}{u + 3}$$

luego

$$\int \frac{(u+3)du}{u^2 + 2u + 1} = -\int \frac{dt}{t} + \ln c$$

como

$$\int \frac{(u+3)du}{u^2 + 2u + 1} = \int \frac{(u+1) + 2du}{(u+1)^2} = \int \frac{du}{(u+1)} + 2\int \frac{du}{(u+1)^2}$$

entonces

$$\ln(u+1) - \frac{2}{u+1} = -\ln|t| + \ln|c|$$

devolviendo los cambios y simplificando se obtiene

$$\ln\left|\frac{y + x - 1}{x + 1}\right| - \ln\left|\frac{1}{x+1}\right| = \ln|c| + \frac{2x+2}{y+x-1}$$

$$y = 1 - x + ce^{\frac{2x+2}{y+x-1}}.$$

23. Resolver la ecuación diferencial

$$(1-y-x)y' = x+y.$$

Solución: Despejando y'

$$y' = \frac{-(x+y)}{x+y-1}$$

como las pendientes de rectas $x+y=0$; $x+y-1=0$ son iguales entonces las rectas son paralelas, entonces hacemos el cambio

$$x+y-1 = z$$

$$y' = z'-1$$

en la ecuación diferencial $y' = \frac{-(x+y)}{x+y-1}$,

$$z'-1 = \frac{-(z+1)}{z}$$

$$z' = \frac{-1}{z}$$

integrando

$$\int z dz = -\int dx + k$$

$$\frac{1}{2}z^2 = -x$$

devolviendo el cambio

$$\frac{(x+y-1)^2}{2} = -x+k$$

simplificando obtenemos la solución de la ecuación diferencial

$$(x+y-1)^2 + 2x = c.$$

24. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$(\sin x - 2y)y' = y\cos x.$$

Solución: Haciendo el cambio

$$\sin x = u$$

$$\cos x dx = du$$

en la ecuación diferencial

$$ydu + (2y - u)dy = 0$$

$$y' = \frac{-y}{2y - u}$$

que es una ecuación diferencial homogénea. Haciendo el cambio

$$y = vu$$

$$y' = v + uv'$$

en la última ecuación diferencial , obteniendo

$$v + uv' = \frac{-uv}{2vt - u}$$

$$v + uv' = \frac{-v}{2v - 1}$$

$$uv' = \frac{-2v^2}{2v - 1}$$

integrando

$$\int \frac{2v-1}{2v^2}dv = -\int \frac{du}{u} + k \Rightarrow \int \frac{dv}{v} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2} = -\ln|u| + k$$

$$\ln v + \tfrac{1}{2v} = -\ln|u| + k \Rightarrow \ln v + \ln|u| + \tfrac{1}{2v} = k \Rightarrow \ln|vu| + \tfrac{1}{2v} = k$$

devolviendo los cambios $\sin x = u$; $y = vu$ o lo que es lo mismo $v = \frac{y}{\sin x}$ se obtiene

$$\ln|y| + \frac{\sin x}{2y} = k$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación diferencial

$$2y\ln|y| + \sin x - yc = 0$$

donde $c = 2k$.

25. Encontrar la solución de la ecuación

$$\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy + \left(1 - \frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx = 0.$$

Solución:Reordenando la ecuación obtenemos

$$xdx + \cos\left(\frac{y}{x}\right)[xdx - ydx] = 0$$

realiza el cambio

$$\frac{y}{x} = u$$

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = du$$

$$xdy - ydx = x^2du$$

sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$xdx + \cos(u)[x^2du] = 0.$$

Integrando

$$\int \frac{dx}{x} + \int \cos u du = \ln c$$

$$\ln x + \sin u = \ln|c|$$

devolviendo el cambio y simplificando se obtiene

$$x = ce^{-\sin\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

26. Resolver la ecuación diferencial

$$3yxdx + 2\frac{x^3}{y}dx + y^2dy = 0.$$

Solución: Despejando la derivada y'

$$y' = \frac{-(3y^2x + 2x^3)}{y^3}$$

resulta una ecuación homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$
$$y' = u + xu'$$

en la ecuación diferencial resulta

$$u + xu' = \frac{-(3u^2x^3 + 2x^3)}{u^3x^3}$$

$$xu' = \frac{-3u^2 - u^4 - 2}{u^3}$$

integramos

$$\int \frac{u^3}{u^4 + 3u^2 + 2}du = -\int \frac{dx}{x} + \ln c.$$

Separando en fracciones simples

$$\frac{u^3}{u^4 + 3u^2 + 2} = \frac{-u}{u^2 + 1} + \frac{2u}{u^2 + 2}$$

obtenemos

$$\int \frac{-u}{u^2+1}du + 2\int \frac{u}{u^2+2}du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \ln(u^2+2) = -\ln x + \ln|c|$$

devolviendo el cambio se tiene

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right) + \ln\left(\frac{y^2+2x^2}{x^2}\right) = -\ln x + \ln|c|$$

simplificando se obtiene la solución de la ecuación

$$y^2 + 2x^2 = c\sqrt{y^2+x^2}.$$

27. Determinar la solución de la ecuación

$$y' = \frac{-y}{2\sqrt{xy} - x}.$$

Solución: Como $f(x,y) = \dfrac{-y}{2\sqrt{xy} - x}$ es una función homogénea de grado cero, hacemos cambio

$$y = ux$$
$$y' = u + xu'$$

en la ecuación diferencial resulta

$$u + xu' = \frac{-ux}{2\sqrt{ux^2} - x}$$

simplificando se obtiene

$$xu' = \frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u} - 1}$$

$$\int \frac{2\sqrt{u} - 1}{2u\sqrt{u}}du = -\int \frac{dx}{x} + \ln c$$

como la integral

$$\int \frac{2\sqrt{u}-1}{2u\sqrt{u}}du = \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \ln u + \frac{1}{\sqrt{u}}$$

entonces

$$\ln u + \frac{1}{\sqrt{u}} = -\ln x + \ln|c|$$

devolviendo el cambio

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right|\frac{1}{\sqrt{\frac{y}{x}}} = -\ln|x| + \ln|c|$$

simplificando se obtiene la solución

$$ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}} = c$$

y

$$x = 0.$$

28. Hallar una curva que posea la propiedad de que la magnitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de contacto.

Solución:Como la ecuación de la recta tangente de una curva viene dada por $y = m(x - x_o) + y_o$ donde la pendiente de dicha recta es la derivada de la curva evaluada en el punto de tangencia, entonces la ecuación de la recta tangente genérica se representará de la siguiente manera $Y = y'(X - x) + y$ donde x, y son las coordenadas genéricas del punto de tangencia.

Escrita en su forma general es

$$Y - y'X + (y'x - y) = 0.$$

ahora la distancia del punto $(0, 0)$ a la recta tangente es

$$d = \frac{y'x - y}{\sqrt{y'^2 + 1}}$$

y de acuerdo a la condición dada se obtiene

$$\frac{y'x - y}{\sqrt{y'^2 + 1}} = x$$

que simplificando resulta

$$-2xyy' + y^2 = x^2$$

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{-2xy}$$

que es una ecuación homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$

$$y' = u + xu'$$

en la ecuación diferencial y simplificando resulta

$$u + xu' = \frac{x^2 - x^2u^2}{-2x^2u}$$

$$u + xu' = \frac{1 - u^2}{-2u}$$

$$xu' = \frac{1 + u^2}{-2u}$$

integrando se obtiene

$$-\int \frac{2u}{1 + u^2} du = \int \frac{dx}{x} + \ln c$$

$$\ln(u^2 + 1) = -\ln x - \ln|c|$$

devolviendo el cambio y simplificando se obtiene que la curva buscada

$$\ln\left|\frac{y^2}{x^2} + 1\right| = -\ln x - \ln|c|$$

$$x^2 + y^2 = cx.$$

29. Hallar la curva para la cual la razón del segmento intersectado por la tangente en el eje OY y el radio vector es una cantidad constante.

Solución:Como se sabe que la ecuación de la recta tangente de una curva viene dada por $y = m(x - x_o) + y_o$ donde la pendiente de dicha recta es la derivada de la curva evaluada en el punto de tangencia $P(x_o, y_o)$, luego la ecuación de la recta tangente genérica se representará de la siguiente manera $Y = y'(X - x) + y$ donde x, y son las coordenadas genéricas del punto de tangencia.

Entonces para hallar el punto de intersección entre la recta tangente y el eje de las ordenadas, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} Y = y'(X - x) + y \\ x = 0 \end{cases}$$

por lo que resulta $P(0, y - xy')$ entonces la longitud del segmento es $l = y - xy'$.

Por otro lado se tiene que la longitud del radio vector viene dado por $\sqrt{x^2 + y^2}$ donde x, y son las coordenadas genéricas del punto de tangencia (radio vector= vector que tiene su origen en el punto $(0,0)$ y su extremo en el punto de tangencia (x,y)).

Entonces

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k$$

$$y' = \frac{y - k\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

que es una ecuación homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$

$$y' = u + xu'$$

sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificandose tiene que

$$u + xu' = \frac{ux - k\sqrt{x^2 + u^2x^2}}{x}$$

$$xu' = -k\sqrt{1 + u^2}$$

integrando se obtiene

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -k\int \frac{dx}{x} + \ln c.$$

Para calcular la integral $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$ hacemos el cambio

$$u = \tan t$$

$$u' = \sec^2 t dt$$

en la integral. Resultando $\int \sec t dt = \ln|\sec t + \tan t|$

devolviendo el cambio se obtiene

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right|$$

entonces

$$\ln\left|u + \sqrt{u^2+1}\right| = -k\ln|x| + \ln|c|$$

devolviendo el cambio

$$\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right| - \ln\left|\frac{1}{x^k}\right| = \ln|c|$$

simplificando se obtiene la curva que cumple la condición dada es

$$y = \frac{1}{2}\left(c^2x^{1-k} - \frac{1}{c}x^{k+1}\right).$$

30. Empleando coordenadas rectangulares, hallar la forma del espejo si los rayos que parten de un punto dado, al reflejarse, son paralelos a una dirección dada.

Solución:La solucion no depende de la posición referencial tomada. El punto dado que se eligirá será $P(0,0)$ y la dirección dada será la correspondiente a la recta $y = k$.

Las tres rectas presentes en este problema son, la recta incidente, la recta dirección y la recta normal a la tangente en el punto de contacto con el espejo.

Como el ángulo entre la recta incidente y la recta normal es igual al ángulo formado por la recta normal y la dirreción dada para cualquier reflexión del rayo, entonces

$$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{m_3 - m_2}{1 + m_2 m_3}$$

donde

$$m_1 = \frac{y}{x}$$

pendiente de la recta incidente

$$m_2 = \frac{-1}{y'}$$

pendiente de la recta normal

$$m_3 = 0$$

pendiente de la recta direción, luego

$$\frac{\frac{-1}{y'} - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{y'x}} = \frac{1}{y'} \Rightarrow \frac{-1}{y'} - \frac{y}{x} = \frac{1}{y'} - \frac{y}{y'^2 x}$$

$$-y' - \frac{y y'^2}{x} = y' - \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y'^2 y}{x} + 2y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado y simplificando se obtiene

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

que es una ecuación diferencial homogénea.
Caso I

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

haciendo el cambio

$$y = ux$$
$$y' = u + xu'$$

sustituyendo

$$u + xu' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + u^2x^2}}{ux}$$

$$u + xu' = \frac{-1 + \sqrt{1 + u^2}}{u}$$

$$xu' = \frac{-1 + \sqrt{1 + u^2} - u^2}{u}$$

integrando

$$\int \frac{u}{\sqrt{1 + u^2} - (u^2 + 1)} du = \int \frac{dx}{x} + \ln c.$$

Para resolver la integral hacemos el cambio

$$u = \tan t$$

$$du = \sec^2 t dt$$

devolviendo el cambio resulta

$$\int \frac{\tan t \sec t}{1 - \sec t} dt = -\ln|1 - \sec t|$$

$$\int \frac{u}{\sqrt{1 + u^2} - (u^2 + 1)} du = -\ln\left|1 - \sqrt{1 + u^2}\right|$$

entonces

$$x - \sqrt{x^2 + y^2} = c$$

de lo que resulta

$$y^2 = 2cx + c^2.$$

Nota de ínteres: Es debido a ésto, que los faros de los carros tiene forma parabólica.

Caso 2, $y' = \dfrac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$ es análogo.

31. Hallar la curva para la cual la longitud del segmento intersectado en el eje de las ordenadas por la normal a cualquiera de sus puntos, es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.

Solución: Naturalmente, la ecuación de la recta normal de una curva viene dada por

$y = m(x - x_o) + y_o$ donde la pendiente de dicha recta es el inverso negativo de la pendiente de la recta tangente a dicha curva por el mismo punto, entonces la ecuación de la recta normal, genérica, se representará de la siguiente manera $Y = \frac{-1}{y'}(X - x) + y$ donde (x,y) son las coordenadas genéricas del punto de la curva por donde pasa la recta normal.

Entonces, para hallar el punto de intersección entre la recta normal y el eje de las ordenadas, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} Y = \frac{-1}{y'}(X - x) + y \\ x = 0 \end{cases}$$

de lo que resulta $P\left(0, \frac{x}{y'} + y\right)$ entonces la longitud del segmento es

$$l = \frac{x}{y'} + y$$

como la distancia del punto Q, (punto de contacto con la curva) al origen viene dado por

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

entonces debe cumplirse que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{y'} + y$$

de lo que resulta

$$x + yy' = y'\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} - y}$$

que es una ecuación diferencial homogénea.Haciendo el cambio

$$y = ux$$

$$y' = u + xu'$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$u + xu' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + u^2x^2} - ux}$$

simplificando se obtiene

$$xu' = \frac{1 - u\sqrt{1 + u^2} + u^2}{\sqrt{1 + u^2} - u}$$

integrando

$$\int \frac{\sqrt{1 + u^2} - u}{(1 + u^2) - u\sqrt{1 + u^2}} du = \int \frac{dx}{x} + \ln c.$$

haciendo el cambio

$$u = \tan t$$

$$u' = \sec^2 t dt$$

para resolver la primera integral y sustituyendo resulta

$$\int \frac{(\sec t - \tan t)\sec^2 t}{\sec^2 t - \tan t \sec t} dt = \int \sec t dt = \ln(\sec t + \tan t)$$

luego la solución de la ecuación diferencial es

$$\ln(\sec t + \tan t) = \ln|x| + \ln|c|$$

devolviendo los cambios se obtiene

$$\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}\right| - \ln|x| = \ln|c|$$

simplificando se tiene que la curva buscada es

$$y = \frac{1}{2}\left(cx^2 - \frac{1}{c}\right).$$

32. Hallar la curva para la cual el producto de la abscisa de cualquiera de sus puntos por la magnitud del segmento intersectado en el eje OX por la normal, es igual al duplo del cuadrado de la distancia desde este punto al origen de coodenadas.

Solución. Como la ecuación de la recta normal a una curva viene dada por

$y = m(x - x_o) + y_o$ donde la pendiente de dicha recta es el inverso negativo de la pendiente de la recta tangente a dicha curva por el mismo punto, entonces la ecuación de la recta normal, genérica, se representará de la siguiente manera $Y = \frac{-1}{y'}(X - x) + y$ donde x, y son las coordenadas genéricas del punto de la curva por el cual pasa la recta normal.

Por tanto, para hallar el punto de intersección entre la recta normal y el eje de las abscisas, se tiene el siguiente sistema

$$\begin{cases} Y = \frac{-1}{y'}(X - x) + y \\ y = 0 \end{cases}$$

de lo que resulta $P(y'y + x, 0)$ entonces la longitud del segmento es $l = y'y + x$. como la distancia del punto Q, (punto de contacto con la curva) al origen viene dado por

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

entonces

$$x(y'y + x) = 2\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$$

de lo que resulta

$$xyy' + x^2 = 2x^2 + 2y^2$$

$$y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$$

que es una ecuación homogénea. Haciendo el cambio

$$y = ux$$

$$y' = u + xu'$$

en la ecuación diferencial

$$u + xu' = \frac{x^2 + 2u^2x^2}{x^2u}$$

$$xu' = \frac{1 + 2u^2}{u}$$

integrando

$$\int \frac{u}{(1+u^2)} du = \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \ln x$$

$$\frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \ln x + \ln|k|$$

devolviendo el cambio

$$\ln\left|\frac{y^2}{x^2} + 1\right| = \ln|c^2x^2|$$

simplificando se obtiene que la curva buscada es

$$x^2 + y^2 = cx^4.$$

Problemas Propuestos

1 $xdy - ydx = \sqrt{xy}\,dx.$

2. $x' - \frac{x}{t} = \cosh\frac{x}{t}.$

3. $xy' - y = xe^{y/x}.$

4. $(x^2 + y^2)dx - 2xdy = 0.$

5. $y' - \frac{y}{x} = 1.$

6. $(2x + 3y)dx - xdy = 0.$

7. $(2x + y)y' = -(x + 2y).$

8. $\left(y - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0.$

9. $xy^2y' = x^3 + y^3.$

10. $\left(\frac{y}{x} + \sec^2\frac{y}{x}\right)dx - dy = 0.$

11. $y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}.$

12. $2xyy' = x^2 - y^2.$

13. $y' - \frac{y}{x} = \cos^2(y/x).$

14. $(2x + 3y)y' = y.$

15. $y' - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 0.$

16. $(3x - 2y)y' + (x - 4y) = 0.$

17. $\frac{y^2 + xy}{x^2}dx - dy = 0.$

18. $(x + v)dx - xdv = 0.$

19. $(2xy - x^2)y' = 2xy - y^2.$

20. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}.$

21. $3xydy = (x^2 + y^2)dx.$

22. $(2x - y)y' = 2x + 5y.$

23. $(6x^2 - 8xy + y^2)y' = 6x^2 - 5xy - 2y^2.$

24. $xdy - ydx - \sqrt{x^2 + y^2}\,dx = 0.$

25. $(2y^3 - xy^2 + x^3)y' = x^2y + 2xy^2 - y^3.$

26. $9dy + (x + y - 1)^2dx = 0.$

27. $(x + y)dy = (2x + 2y - 3)dx.$

Haga la sustitución apropiada para resolver

28. $2dy = (4xy + x^2 + 4y^2 + 3)dx.$

29. $dy + dx = \sqrt{x + y + 2}\,dx.$

30. $dy + \sin^2(x + y)dx = 0.$

31. $dy = \left(\frac{e^y}{e^x} - 1\right)dx.$

32. $y' = (x + y)^2.$

33. $\sqrt{2x + 3y}\,dx - dy = 0 \operatorname{arctanh}\left(\frac{3}{2}(2x + 3y)^{1/2}\right) + C = 0.$

34. $ydx = (xy)^3dx - xdy.$

35. $(e^{xy} - y)dx - xdy = 0.$

36. $\left(\sqrt{1 - x^2y^2} - y\right)dx - xdy = 0.$

37. $((x + y)\ln(x + y) - 1)dx - dy = 0.$

38. $y(\ln y + x^2 - 2x)dx - dy = 0.$

39. $(x + y - 1)y' = x - y - 5.$

40. $(x + 2y + 2)dx - (y - 2x)dy = 0.$

41. $x' = \frac{y + x}{-x + y - 1}.$

42. $(x + t)x' = x + 1.$

43. $(4x + y - 6)y' = 2x - 3y + 4.$

44. $(x + y - 5)y' = 3x - y - 3.$

45. $\dfrac{1 - xy^2}{2x^2y}dx - dy = 0.$

46. $(t + xt^2)dx = (x - tx^2)dt.$

47. $y' = -\dfrac{2x + 2y + 1}{x + y - 1}.$

48. $\left[2x\sin\frac{y}{x} + 2x\tan\frac{y}{x} - y\cos\frac{y}{x} - y\sec^2\frac{y}{x}\right]dx + \left[x\cos\frac{y}{x} + x\sec^2\frac{y}{x}\right]dy = 0.$

49. $\left(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\right)dx - \left(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\right)dy = 0.$

50. $y' - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x^3}{y} + x\tan\dfrac{y}{x^2}$; **haciendo la sustitución $x=u^p$, $y=v^q$ con los valores de p yq apropiados.**

51. $(x - 3y - 5)^2dx - (x + y - 1)^2dy = 0.$

52. $4x^2yy' = 2 + 3xy^2$; haciendo la sustitución $y = vx^n$, con un n apropiado.

Ecuaciones Exactas

Definición. Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta si

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

u otra forma, si su primer miembro es un diferencial total de una función $u(x,y)$.
La integral de esta ecuación diferencial se puede realizar mediante

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = k$$

o mediante

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = k$$

siendo (x_0,y_0) un punto donde sea integrable.

Teorema. Si una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

no es exacta, pero admite una función $\mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

es exacta, entonces se dice que la ecuacion es reducible a exacta mediante un factor de integración $\mu(x,y)$ que debe verificar la expresión

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - \frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

a Si el factor solo depende de x entonces $\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = 0$ y

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\ln\mu = \int \frac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N}dx$$

b Si el factor solo depende de y entonces $\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} = 0$ y

$$-\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

$$\ln \mu = \int \frac{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}{M} dy$$

Problemas Resueltos

1. Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{-x(2x^2+y^2)}{y(x^2+2y^2)}.$$

Solución: Esta ecuación diferencial es evidentemente homogénea. Pues $f(x,y) = \frac{-x(2x^2+y^2)}{y(x^2+2y^2)}$ es una función homogénea de grado cero. Si la escribimos usando diferenciales dx y dy, obtenemos

$$(2x^3+y^2x)dx + (x^2y+2y^3)dy = 0.$$

Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$, funciones tales que la ecuación diferencial, anteror, se pueda escribir de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Veamos si la ecuación diferencial dada es exacta

$$M(x,y) = 2x^3+y^2x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$$

$$N(x,y) = x^2y+2y^3 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy.$$

Como $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ entonces la ecuación es exacta, y como además es homogénea y el grado de homogeneidad es $\neq -1$, entonces se resuelve con el borrador

$$(2x^3 + y^2x)x + (x^2y + 2y^3)y = C$$

$$2x^4 + y^2x^2 + x^2y^2 + 2y^4 = C$$

$$2x^4 + 2y^2x^2 + 2y^4 = C$$

entonces la solución a la ecuación diferencial dada es

$$x^4 + y^2x^2 + y^4 = C.$$

2. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2y + 4y^3}.$$

Solución: Esta ecuación diferencial evidentemente no es homogénea. Pues $f(x,y) = -\dfrac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2y + 4y^3}$ no es una función homogénea. Si la escribimos usando diferenciales dx y dy, obtenemos

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$, funciones tales que la ecuación diferencial, anterior, se pueda escribir de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Veamos si la ecuación diferencial dada es exacta

$$M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 12xy$$

$$N(x,y) = 6x^2y + 4y^3 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy.$$

Como $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ entonces la ecuación es exacta, si hacemos $(x_o,y_o) = (0,0)$ e integramos

$$\int_o^x (3x^2 + 6xy_o)dx + \int_o^y (6x^2y + 4y^3)dy = K$$

$$3\int_o^x x^2dx + 6x^2\int_o^y ydy + 4\int y^3dy = K$$

$$3(\frac{x^3}{3})\Big|_o^x + 6x^2(\frac{y^2}{2})\Big|_o^y + 4(\frac{y^4}{4})\Big|_o^y = K$$

evaluando nos resulta la solución a la ecuación diferencial dada

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = K.$$

3. Resolver la ecuación diferencial

$$y' = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}{\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

Solución: Reordenando

$$y' = \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)}{\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} \Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$, funciones tales que la ecuación diferencial, anterior, se pueda escribir de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

veamos si la ecuación diferencial dada es exacta

$$M = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{yx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{y^2}$$

$$N = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{y^2}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial es exacta, si hacemos $(x_o y_o) = (1,1)$ e integramos

$$\int_1^x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \int_1^y \left(\frac{y}{\sqrt{x_o^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x_o}{y^2}\right)dy = K$$

$$\int_1^x \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^x \frac{1}{y}dx + \int_1^y \frac{ydy}{\sqrt{x_o^2+y^2}} + \int_1^y \frac{dy}{y} - \int_1^y \frac{x_o}{y^2}dy = K.$$

Para calcular la integral $\int_1^x \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ hacemos el cambio

$$x^2+y^2 = t$$

$$2xdx = dt$$

y cambiando los límites de integración

si $x = 1$ entonces $t = y^2+1$

si $x = x$ entonces $t=x^2+y^2$

resultando

$$\frac{1}{2}\int_{y^2+1}^{x^2+y^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\frac{(t)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}}\Big|_{y^2+1}^{x^2+y^2} = \sqrt{t}\Big|_{y^2+1}^{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}\Big|_1^x = \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{1+y^2}.$$

Para calcular la integral $\int_1^x \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}$ hacemos el cambio

$$1+y^2 = t$$

$$ydy = \frac{dt}{2}$$

y cambiando los límites de integración

si $y = 1$ entonces $t = 1$

si $y = y$ entonces $t=1+y^2$

resultando

$$\int_1^y \frac{ydy}{\sqrt{x_o^2+y^2}} = \frac{1}{2}\int_1^{1+y^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_1^{1+y^2} = -\sqrt{1+y^2}\Big|_1^y = \sqrt{1+y^2} - \sqrt{2}.$$

Por tanto la solución de la ecuación diferencial es

$$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{1+y^2} + \sqrt{1+y^2} - \sqrt{2} + \ln|y| + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} + \ln|y| - \frac{1}{y} + 1 = K$$

$$\sqrt{x^2+y^2} + \ln|xy| + \frac{x}{y} = C.$$

4. Encontrar la solución de la ecuación

$$\left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = \left(\frac{2y^3}{x^3} - 3x^2\tan y\right)dx.$$

Solución: Reordenando la ecuación diferencial

$$\left(3x^2 tg\, y - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3\sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0.$$

Sean $M(x,y)$ y $N(x,y)$, funciones tales que la ecuación diferencial, anterior, se pueda escribir de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

veamos si la ecuación diferencial dada es exacta

$$M = 3x^2 tg\, y - \frac{2y^3}{x^3} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \sec^2 y 3x^2 - \frac{6y^2}{x^3}$$

$$N = x^3\sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2\sec^2 y - \frac{6y^2}{x^3}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial es exacta, si hacemos $(x_o, y_o) = (1,0)$ e integramos

$$\int_1^x (3x^2\tan y - \frac{2y_o{}^3}{x^3})dx + \int_o^y (x^3\sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^3}{x^2})dy = K$$

$$x^3\int_o^y \sec^2 y dy + 4\int_o^y y^3 dy + \frac{3}{x^2}\int_o^y y^2 dy = K$$

$$x^3 \tan y \,\Big|_o^y + 4\frac{y}{4}\Big|_o^y + \frac{3}{x^2}\frac{y^3}{3}\Big|_o^y = K$$

por tanto la solución es

$$x^3\tan y + y^4 + \frac{y^3}{x^2} = K.$$

5. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{x^2+y^2}{xy^2}y' = 2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y}.$$

Solución: Como

$$\frac{x^2+y^2}{xy^2}y' = 2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y} \;\Rightarrow\; (2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y})dx - \frac{x^2+y^2}{xy^2}dy = 0.$$

Sean $M(x,y) = 2x + \dfrac{x^2+y^2}{x^2y}$ y $N(x,y) = -\dfrac{x^2+y^2}{xy^2}$, funciones tales que la ecuación diferencial, anterior, se pueda escribir de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

veamos que la ecuación diferencial dada es exacta, como

$$M = 2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$N = -\frac{x^2+y^2}{xy^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$

entonces $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Por tanto la ecuación diferencial es un diferencial total.

Haciendo $(x_o y_o) = (1,1)$ e integrando

$$\int_1^x \left(2x + \frac{x^2 + y_o^2}{x^2 + y_o}\right)dx - \int_1^y \left(\frac{x^2 + y^2}{xy^2}\right)dy = K$$

$$2\int_1^x xdx + \int_1^x \frac{x^2}{x^2}dx + \int_1^x \frac{1}{x^2}dx - x\int_1^y \frac{dy}{y^2} - \frac{1}{x}\int_1^y dy = K$$

$$2\frac{x^2}{2}\Big|_1^x + x\Big|_1^x - \frac{1}{x}\Big|_1^x dx + \frac{x}{y}\Big|_1^y - \frac{y}{x}\Big|_1^y = K$$

evaluando

$$x^2 - 1 + x - 1 - \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{y} - x - \frac{y}{x} + \frac{1}{x} = C$$

$$x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = C$$

$$\frac{x^3y + x^2 + y^2}{xy} = C$$

entonces la solución de la ecuación diferencial es

$$x^3y + x^2 - y^2 = Cxy.$$

6. Encontrar la solución de la ecuación

$$y' = \frac{x + \frac{\sin 2x}{y}}{\frac{\sin^2 x}{y^2} - y}.$$

Solución: Escribiendo la ecuación con los diferenciales

$$\left(x + \frac{\sin 2x}{y}\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$$

si hacemos $M = x + \frac{\sin 2x}{y}$ y $N = y - \frac{\sin^2 x}{y^2}$ entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\sin 2x}{y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2\sin x\cos x}{y^2} = -\frac{\sin 2x}{y^2}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial es exacta. Tomando $(x_o, y_o) = (0,1)$ e integrando

$$\int_o^x \left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \int_1^y \left(y - \frac{\sin^2 x_o}{y^2}\right)dy = K$$

$$\frac{1}{y}\int_o^x \sin 2x dx + \int_o^x x dx + \int_1^y y dy = K$$

$$-\frac{1}{y}\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_o^x + \frac{x^2}{2}\Big|_o^x + \frac{y^2}{2}\Big|_1^y = K$$

evaluando

$$-\frac{\cos 2x}{2y} + \frac{1}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = K$$

$$\frac{-\cos^2 x + \sin^2 x}{2y} + \frac{1}{2y} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = K$$

$$\frac{2\sin^2 x}{2y} + \frac{x^2 y}{2y} + \frac{y^3}{2y} - \frac{y}{2y} = K$$

entonces la solución de la ecuación es

$$\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = C.$$

7. Resolver la ecuación diferencial

$$(y(3y+2) - x)dy + (-x(2-3x) - y)dx = 0.$$

Solución: Sean $M(x,y) = 3x^2 - 2x - y$ y $N(x,y) = 2y - x + 3y^2$, funciones tales que la ecuación diferencial, anterior, se pueda escribir de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Veamos si la ecuación diferencial dada es exacta

$$M(x,y) = 3x^2 - 2x - y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -1$$

$$N(x,y) = 2y - x + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial es exacta, si hacemos $(x_o, y_o) = (0,0)$ e integramos

$$\int_o^x (3x^2 - 2x - y_o)dx + \int_o^y (2y - x + 3y^2)dy = K$$

$$3\int_o^x x^2 dx - 2\int_o^x x dx + 2\int_o^y y dy - x\int_o^y dy + 3\int_o^y y^2 dy = K$$

$$3(\frac{x^3}{3})\Big|_o^x - 2(\frac{x^2}{2})\Big|_o^x + 2(\frac{y^2}{2})\Big|_o^y - xy\Big|_o^y + 3(\frac{y^3}{3})\Big|_o^y = K$$

por tanto la solución es

$$x^3 - x^2 + y^2 - xy + y^3 = K.$$

8. Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{xy + 2xy\sqrt{1+x^2} - \frac{y}{x}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right)dx = \left(\ln x - x^2 - \sqrt{x^2+1} \right)dy.$$

Solución: Reordenando la ecuación

$$(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x)dy + \left(\frac{xy + 2xy\sqrt{1+x^2} - \frac{y}{x}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right)dx = 0.$$

Si hacemos $M(x,y) = \dfrac{xy + 2xy\sqrt{1+x^2} - \frac{y}{x}\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ y $N = \sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x$

entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + 2x - \frac{1}{x}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial es exacta. Haciendo $(x_o y_o) = (1,0)$ e integrando

$$\int_1^x \left(\frac{xy_o}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy_o - \frac{y_o}{x}\right)dx + \int_o^y (\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x)dy = K$$

$$\sqrt{1+x^2}\int_o^y dy + x^2\int_o^y dy - \ln x\int_o^y dy = K$$

evaluando

$$\sqrt{1+x^2}\,y + x^2 y - y\ln|x| = K.$$

9. Determinar la solución de la ecuación

$$\frac{xdx + \sqrt{x^2+y^2}\,dy}{x\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{yx^2dy - y\sqrt{x^2+y^2}\,dx}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Solución: Reordenando

$$\frac{x^3dx + x^2ydy + (x\sqrt{x^2+y^2}\,dy) - y\sqrt{x^2+y^2}\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,x^2} = 0$$

$$\frac{(x^3 - y\sqrt{x^2+y^2})dx}{\sqrt{x^2+y^2}\,x^2} + \frac{(x^2y + x\sqrt{x^2+y^2})dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,x^2} = 0$$

Veamos si la ecuación diferencial es un diferencial total:Si

$$M(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{x^2}$$

$$N(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{x^2}.$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial es exacta, si hacemos $(x_o y_o) = (1,0)$ e integramos

$$\int_1^x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y_o^2}} - \frac{y_o}{x^2}\right)dx + \int_o^y \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x}\right)dy = K$$

$$\int_1^x dx + \int_o^y \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy + \frac{1}{x}\int_o^y dy = K.$$

Para calcular la integral $\int_o^y \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$ hacemos el cambio

$$x^2+y^2 = t \Rightarrow ydy = \frac{dt}{2}$$

cambiando los límites de integración

$$\begin{array}{ll} \text{si } y = 0 \text{ entonces} & t = x^2 \\ \text{si } y = y \text{ entonces} & t = x^2+y^2 \end{array}$$

en la integral, resulta

$$\frac{1}{2}\int_{x^2}^{x^2+y^2} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}(2\sqrt{t})\Big|_{x^2}^{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}\Big|_o^{y_o} = \sqrt{x^2+y^2} - x$$

luego

$$x - 1 + \sqrt{x^2+y^2} - x + \frac{y}{x} = K$$

$$\sqrt{x^2+y^2} + \frac{y}{x} = C.$$

10. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{y\cos x - xy\cos y - 1}{y}y' = \frac{x\sin y + xy\sin x + 1}{x}.$$

Solución: Escribiendo con los diferenciales

$$(\sin y + y\sin x + \tfrac{1}{x})dx + (x_o\cos y - \cos x_o + \tfrac{1}{y})dy = 0$$

entonces

$$M = \sin y + y\sin x + \tfrac{1}{x}$$

$$N = x\cos y - \cos x + \tfrac{1}{y}$$

veamos que la ecuación diferencial es exacta en efecto, como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos y + \sin x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \cos y + \sin x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Hacemos $(x_o y_o) = (1,1)$ e integramos

$$\int_1^x(\sin y + y\sin x + \tfrac{1}{x})dx + \int_1^y(x_o\cos y - \cos x_o + \tfrac{1}{y})dy = K$$

$$\sin y\int_1^x dx + y\int_1^x \sin x dx + \int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \cos y dy - (\cos 1)\int_1^y dy + \int_1^y \frac{dy}{y} = K$$

$$\sin y x\Big|_1^x - y\cos x\Big|_1^x + \ln|x| + \sin y\Big|_1^y - (\cos 1)y\Big|_1^y + \ln|y|\Big|_1^y = K$$

evaluando

$$(x\sin y - \sin y) - (y\cos x - y\cos 1) + \ln|x| + (\sin y - \sin 1) - (\cos y - \cos 1) + \ln|y| = K$$

$$x\sin y - y\cos x + \ln|xy| = C.$$

11. Determinar la solución general de la ecuación

$$\frac{ydx + xdy}{\cos^2 xy} + \sin x dx + \sin y dy = 0.$$

Solución: Asociando expresiones con diferenciales iguales

$$\frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right) dy = 0.$$

Si hacemos

$$M = \frac{y}{\cos^2 xy} + \sin x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2(xy)} - \frac{2xy\sin(xy)}{\cos^{3(}xy)}$$

$$N = \frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2(xy)} - \frac{2xy\sin(xy)}{\cos^3(xy)}$$

entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ por lo que podemos asegurar que la ecuación diferencial es exacta. Haciendo $(x_o, y_o) = (0, 0)$ e integrando

$$\int_o^x \left(\frac{y_o}{\cos^2(xy_o)} + \sin x\right) dx + \int_o^y \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right) dy = K$$

$$\int_0^x \sin x dx + x\int_o^y \left(\frac{dy}{\cos^2(xy)} + \int_o^y \sin y dy = K\right.$$

$$-\cos x\Big|_o^x + x\int_o^y \sec^2(xy)dy - \cos y\Big|_o^y = K$$

luego

$$-\cos x\Big|_o^x + \tan(xy) - \cos y\Big|_o^y = K$$

$$\tan xy - \cos x - \cos y = C.$$

12. Hallar la solución particular de la ecuación

$$\frac{(y^2 - 3x^2)}{y^4}y' = \frac{2x}{y^3}$$

si $y|_{x=1} = 1$.

Solución: escribiendo la ecuación con diferenciales

$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{(y^2 - 3x^2)}{y^4}dy = 0$$

veamos si la ecuación es exacta,

$$M = \frac{2x}{y^3} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}$$

$$N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial es exacta. Haciendo $(x_o, y_o) = (0, 1)$ e integrando

$$\frac{2}{y^3}\int_o^x xdx + \int_1^y (\frac{y^2 - 3x_o^2}{y^4})dy = K$$

$$\frac{2}{y^3}\frac{x^2}{2}\Big|_o^x + \Big|_1^y \frac{dy}{y^2} = K \rightarrow \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + 1 = K$$

$$\frac{x^2}{y^3} = \frac{1}{y} + C.$$

Evaluando la condicion $y|_{x=1} = 1$, en la solución general

$$1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

entonces

$$x^2 = y^2$$

y la solución particular es

$$x = y.$$

13. Resolver la ecuación diferencial

$$\cos(nx+my)(ndx+mdy)-\sin(mx+ny)(ndy-mdx) = 0.$$

Solución: Asociando expresiones con diferenciales iguales

$$[n\cos(nx+my_o)-m\sin(mx+ny_o)]dx+[m\cos(nx+my)-n\sin(mx+ny)]dy = 0.$$

Haciendo

$$M = n\cos(nx+my)-m\sin(mx+ny) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -n\sin(nx+my)(m)-m\cos(mx+ny)(n)$$

$$N = m\cos(nx+my)-n\sin(mx+ny) \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -m\sin(nx+my)n-n\cos(mx+ny)m$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial es exacta. Si $(x_o,y_o) = (0,0)$ entonces

$$\int_o^x[n\cos(nx+my_o)-m\sin(mx+ny_o)]dx+[m\cos(nx+my)-n\sin(mx+ny)]dy = K$$

$$n\int_o^x \cos nxdx - m\int_o^x \sin mxdx + m\int_o^y \cos(nx+my)dy - n\int_o^y \sin(mx+ny)dy = K$$

$$\frac{n\sin(nx)}{n}\Big|_o^x + \frac{m\cos(mx)}{m}\Big|_o^x + \frac{n\sin(nx+my)}{m}\Big|_o^y + \frac{n\cos(mx+ny)}{m}\Big|_o^y = K$$

evaluando

$$\sin(nx)+\cos(mx)+\cos(0)+\sin(nx+my)-\sin(nx)+\cos(mx+ny)-\cos(mx) = K$$

$$\sin(nx+my)+\cos(mx+ny) = C.$$

14. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + (x,y)dy = 0$$

sabiendo que

como $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial es exacta.

Haciendo $(x_o, y_o) = (0,1)$ e integrando

$$\int_o^x \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}} + \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} \right) dx +$$

$$+\int_1^y \left(\frac{y}{\sqrt{(x_o^2+y^2)(1-x_o^2-y^2)}} - \frac{x_o}{y\sqrt{y^2-x_o^2}} - \frac{x_o e^{\frac{x_o}{y}}}{y^2} \right) dy = K$$

$$= \underbrace{\int_o^x \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}} + \underbrace{\int_o^x \frac{dx}{\sqrt{y^2-x^2}}} + \underbrace{\frac{1}{y}\int_o^x e^{\frac{x}{y}} dx} + \underbrace{\int_1^y \frac{ydy}{\sqrt{y^2(1-y^2)}}} = K$$

A $\qquad$ B $\qquad$ C $\qquad$ D

Calculando las integrales:

$A = \displaystyle\int_o^x \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)}}$, hacemos el cambio

$$t = x^2 + y^2 \quad dt = 2xdx$$

cambiando los límites de integración

$$x = 0 \Rightarrow t = y^2$$

$$x = x \Rightarrow t = x^2 + y^2$$

$A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{y^2}^{x^2+y^2} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ haciendo otro cambio

$$t = \sin^2\theta \Rightarrow \; dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

y los límites de integración

$$t = y^2 \Rightarrow \theta = \arcsin\sqrt{y^2}$$

$$t = x^2 + y^2 \Rightarrow \theta = \arcsin\sqrt{x^2+y^2}$$

entonces

$$A = \frac{1}{2}\int_{\arcsin\sqrt{y^2}}^{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}} \frac{2\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sqrt{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}} = \int_{\arcsin\sqrt{y^2}}^{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\sin\theta\cos\theta d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \int_{\arcsin\sqrt{y^2}}^{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}} d\theta$$

$$A = \theta\Big|_{\arcsin\sqrt{y^2}}^{\arcsin\sqrt{x^2+y^2}} = \arcsin\sqrt{x^2+y^2} - \arcsin\sqrt{y^2} = \arcsin\sqrt{x^2+y^2} - \arcsin\sqrt{y}$$

$B = \int_o^x \frac{dx}{\sqrt{y^2-x^2}}$ haciendo cambio

$$x = y\sin t \Rightarrow dx = y\cos t dt$$

cambiando los límites de integración

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$
$$x = x \Rightarrow t{=}\arcsin(\tfrac{x}{y})$$

$$B = \int_o^{\arcsin(\frac{x}{y})} \frac{y\cos t dt}{\sqrt{y^2-y^2\sin^2 t}} = y\int_o^{\arcsin(\frac{x}{y})} \frac{\cos t dt}{y\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_o^{\arcsin(\frac{x}{y})} \frac{\cos t dt}{\cos t}$$

$$= t\Big|_o^{\arcsin(\frac{x}{y})} = \arcsin(\tfrac{x}{y}).$$

$$C = \frac{1}{y}\int_o^x e^{\frac{x}{y}} dx = \frac{1}{y}\frac{e^{\frac{x}{y}}}{\frac{1}{y}}\Big|_o^x = e^{\frac{x}{y}} - e^o = e^{\frac{x}{y}} - 1.$$

$D = \int_1^y \frac{y dy}{\sqrt{y^2(1-y^2)}} = \int_1^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ haciendo cambio

$$y = \sin t \Rightarrow dy = \cos t dt$$

cambiando los límites de integración

$$y = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$y = y \Rightarrow t{=}arcsin(y)$$

$$D=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(y)}\frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(y)}dt=t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\arcsin(y)}=\arcsin y-\frac{\pi}{2}.$$

Finalmente, sumando $A+B+C+D$:

$$\arcsin\sqrt{x^2+y^2}-\arcsin\sqrt{y}+\arcsin(\tfrac{x}{y})+e^{\frac{x}{y}}-1+\arcsin y-\frac{\pi}{2}=K$$

$$\arcsin\sqrt{x^2+y^2}+\arcsin(\tfrac{x}{y})+e^{\frac{x}{y}}=C.$$

15. Resolver la ecuación diferencial

$$y'=\frac{\left[\frac{y}{x^2}\cos(\frac{y}{x})+1-\frac{1}{y}\sin(\frac{x}{y})\right]}{\left[\frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x})-\frac{x}{y^2}\sin(\frac{x}{y})+\frac{1}{y^2}\right]}.$$

Solución: Escribiendo con los diferenciales

$$\left[\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos(\frac{y}{x})-1+\right]dx+\left[\frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x})-\frac{x}{y^2}\sin(\frac{x}{y})+\frac{1}{y^2}\right]dy=0$$

haciendo

$$M=\frac{1}{y}\sin(\frac{x}{y})-\frac{y}{x^2}\cos(\frac{y}{x})-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\cos(\frac{x}{y})(-\frac{x}{y^2})y-\sin(\frac{x}{y})}{y^2}-\frac{\left[\cos(\frac{y}{x})-\sin(\frac{y}{x})(\frac{x}{x^2})y\right]x^2}{x^4}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\cos(\frac{y}{x})x}{y^3}-\frac{\sin(\frac{x}{y})}{y^2}-\frac{\cos(\frac{y}{x})}{x^2}+\frac{\sin(\frac{y}{x})y}{x^3}$$

y

$$N = \frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x}) - \frac{x}{y^2}\sin(\frac{x}{y}) + \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-\sin(\frac{x}{y})(-\frac{y}{x^2})x - \cos(\frac{y}{x})}{x^2} - \frac{\left[\sin(\frac{x}{y}) + \cos(\frac{x}{y})(\frac{1}{y})x\right]y^2}{y^4}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\sin(\frac{y}{x})x}{x^3} - \frac{\cos(\frac{y}{x})}{x^2} - \frac{\sin(\frac{x}{y})}{y^2} - \frac{\cos(\frac{x}{y})x}{y^3}$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación es exacta. Haciendo $(x_o, y_o) = (1,1)$ e integrando

$$\int_1^x \left[\frac{1}{y_o}\sin(\frac{x}{y_o}) - \frac{y_o}{x^2}\cos(\frac{y_o}{x}) + 1\right]dx + \int_1^y \left[\frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x}) - \frac{x}{y^2}\sin(\frac{x}{y}) + \frac{1}{y^2}\right]dy = K$$

$$\int_1^x \sin x dx - \int_1^x \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2}dx + \int_1^x dx + \frac{1}{x}\int_1^y \cos(\frac{y}{x})dy - x\int_1^y \frac{\sin(\frac{x}{y})}{y^2}dy + \int_1^y \frac{dy}{y^2} = K.$$

Calculando las integrales: $A = -\int_1^x \frac{\cos(\frac{1}{x})}{x^2}dx$ haciendo el cambio

$$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2}dx$$

cambiando los límites de integración

$$y = 1 \Rightarrow u = 1$$
$$y = y \Rightarrow u = \frac{1}{x}$$

$$A = -\int_1^{\frac{1}{x}} \cos u du = \sin u|_1^{\frac{1}{x}} = \sin(\frac{1}{x}) - \sin 1$$

$B = -x\int_1^y \frac{\sin(\frac{x}{y})}{y^2}dy$ haciendo el cambio

$$t = \frac{x}{y} \Rightarrow dt = -\frac{x}{y^2}dx$$

cambiando los límites de integración

$$y = 1 \ \Rightarrow t = x$$

$$y = y \Rightarrow t = \frac{x}{y}$$

$$B = \int_{x}^{\frac{1}{x}} \sin t dt = -\cos t|_{x}^{\frac{x}{y}} = -\cos(\tfrac{x}{y}) + \cos x.$$

Finalmente,

$$\int_{1}^{x} \sin x dx + A + \int_{1}^{x} dx + \frac{1}{x}\int_{1}^{y} \cos(\tfrac{y}{x})dy + B + \int_{1}^{y} \frac{dy}{y^2} = K$$

$$-\cos x|_{1}^{x} + \sin(\tfrac{1}{x}) - \sin 1 + x|_{1}^{x} + \frac{1}{x}\frac{\sin(\frac{y}{x})}{\frac{x}{x^2}}|_{1}^{y} - \cos(\tfrac{x}{y}) + \cos x - \frac{1}{y}|_{1}^{y} = K$$

$$-\cos x + \cos 1 + \sin(\tfrac{1}{x}) - \sin 1 + x - 1 + \sin(\tfrac{y}{x}) - \sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{x}{y}) + \cos x - \frac{1}{y} + 1 = K$$

luego la solución

$$\sin(\tfrac{y}{x}) - \cos(\tfrac{x}{y}) + x - \frac{1}{y} = C.$$

16. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x(a^2 - x^2 - y^2)}{y(x^2 + y^2 + a^2)}.$$

Solución: Usando diferenciales

$$x(x^2 + y^2 - a^2)dx + y(x^2 + y^2 + a^2)dy = 0.$$

Sean

$$M = x^3 + xy^2 - xa \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2yx$$

$$N = yx^2 + y^3 + ya^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$$

entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, por tanto la ecuación diferencial es exacta. Hacemos $(x_o, y_o) = (0,0)$ e integrando

$$\int_o^x (x^3 + xy_o^2 - xa^2)dx + \int_o^y (yx^2 + y^3 + ya^2)dy = K$$

$$\int_o^x x^3 dx - a^2 \int_o^x xdx + x^2 \int_o^y ydy + \int_o^y y^3 dy + a^2 \int_o^y ydy = K$$

$$\frac{x^4}{4}\Big|_o^x - \frac{a^2x^2}{2}\Big|_o^x + \frac{x^2y^2}{2}\Big|_o^y + \frac{y^4}{4}\Big|_o^y + \frac{a^2y^2}{2}\Big|_o^y = K$$

evaluando

$$\frac{x^4}{4} - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{a^2y^2}{2} = K$$

multiplicando por 4

$$x^4 - 2a^2x^2 + 2x^2y^2 + y^4 + 2a^2y^2 = K$$

entonces la solución de la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = K.$$

17. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x^2 + y^2 + 1}{2xy}$$

sabiendo que admite un factor de integración$\mu = \varphi(x^2 + y^2)$.
Solución: Usando los diferenciales

$$(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0.$$

Haciendo el cambio

$$z^2 = y^2 - x^2$$

en la fórmula general de factor integrante

$$\frac{N \partial \ln \mu}{\partial x} - \frac{M \partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

como

$$M = x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$N = -2xy \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -2y$$

efectuando el cambio

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(-2x)$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(2y).$$

Sustituyendo en la fórmula general

$$(-2xy)\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(2x) - (x^2 + y^2 + 1)\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(2y) = 2y - (-2y)$$

$$4x^2y\frac{\partial \ln \mu}{\partial z} - (2x^2y + 2y^3 + 2y)\frac{\partial \ln \mu}{\partial z} = 4y$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}[4x^2y - 2x^2y - 2y^3 - 2y] = 4y$$

entonces

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}[2x^2y - 2y^3 - 2y] = 4y \Rightarrow \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}[x^2 - y^2 - 1] = \frac{4y}{2y}$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z} = \frac{2}{x^2 - y^2 - 1}$$

$$\frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{-2}{z+1}$$

integrando

$$ln\mu = -2\ln|z+1|$$

$$\mu = \frac{1}{|z+1|^2}$$

$$\mu = \frac{1}{(y^2 - x^2 + 1)^2}.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante se convierte en exacta

$$\frac{(x^2 + y^2 + 1)}{(y^2 - x^2 + 1)^2}dx - \frac{2xy}{(y^2 - x^2 + 1)^2}dy = 0$$

que es una ecuación exacta. Hacemos $(x,y) = (0,0)$ e integramos

$$\int_o^x \frac{(x^2 + y_o^2 + 1)}{(y_o^2 - x^2 + 1)^2}dx - \int_o^y \frac{2xy}{|y^2 - x^2 + 1|^2}dy = K.$$

Calculando las integrales:

$$I = \int_o^x \frac{x^2 + 1}{(-x^2 + 1)^2}dx = \int_o^x \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}dx$$

integrando por fracciones simples

$$\frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2} = \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2}$$

$$\int_o^x \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int_o^x \frac{dx}{(1-x)^2} + \frac{1}{2}\int_o^x \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{(1-x)^{-2+1}}{-1} + \frac{1}{2}\frac{(1+x)^{-2+1}}{-1} = \frac{1}{2(1-x)}\Big|_o^x - \frac{1}{2(1+x)}\Big|_o^x$$

evaluando

$$I = \frac{(1+x) - (1-x)}{2((1-x^2)} = \frac{1 + x - 1 + x}{2(1-x^2)} = \frac{2x}{2(1-x^2)} = \frac{x}{(1-x^2)}$$

como

$$II = -2x\int_o^y \frac{ydy}{(y^2-x^2+1)^2} = -2x\left[-\frac{1}{2(y^2-x^2+1)}\right]$$

$$= \frac{x}{y^2-x^2+1}\Big|_o^y = \frac{x}{y^2-x^2+1} - \frac{x}{-x^2+1}$$

luego, sumando I y II

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{x}{y^2-x^2+1} - \frac{x}{1-x^2} = K$$

$$\frac{x}{y^2-x^2+1} = K$$

$$x = K(y^2-x^2+1).$$

18. Resolver la ecuación diferencial

$$(1-x^2y)dx + x^2(y-x)dy = 0$$

sabiendo que admite un factor de integración $\mu = \varphi(x)$.

Solución: Como la ecuación diferencial no es exacta, pues

$$M = 1-x^2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -x^2$$

$$N = x^2y - x^3 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2$$

evidentemente $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces buscamos el factor integrante

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

calculando la integral $\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx$

$$\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx = \int \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2y - x^3} dx$$

$$= \int \frac{2x^2 - 2xy}{x^2(y-x)} dx = -\int \frac{2}{x} dx$$

entonces

$$\mu = e^{\ln\left|\frac{1}{x^2}\right| dx}$$

$$\mu = \frac{1}{x^2}$$

multiplicando la ecuación por este factor integrante

$$\frac{1 - x^2y}{x^2} dx + \frac{x^2(y-x)}{x^2} dy = 0$$

que es exacta. Haciendo $(x_o, y_o) = (1, 0)$ e integrando

$$\int_1^x \left(\frac{1 - x^2y_0}{x^2} \right) dx + \int_o^y \frac{x^2(y-x)}{x^2} dy = K$$

$$\int_1^x \left(\frac{1}{x^2} \right) dx + \int_0^y (y-x) dy = K$$

$$\left(-\frac{1}{x} \right)\Big|_1^x - xy\Big|_0^y = K$$

entonces

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{x} - xy + 1 = K$$

$$xy^2 - 2x^2y - 2 = Cx.$$

19. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2y + y^3}{-x^3 - 3xy^2}.$$

Solución: Usando los diferenciales

$$(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$$

sean

$$M = 3x^2y + y^3 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$$

$$N = x^3 + 3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2$$

evidentemente $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación es exacta, y como además es homogénea.como el grado de homogeneidad de las funciones M y N es diferente de -1, entonces, se puede resolver con el borrador

$$(3x^2y + y^3)x + (x^3 + 3xy^2)y = C$$

$$3x^3y + xy^3 + x^3y + 3xy^3 = C$$

$$4x^3y + 4xy^3 = C$$

y la solución de la ecuación diferencial es

$$x^3y + xy^3 = C.$$

20. Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$x^2dy - xydx = -(xdx + ydy),$$

sabiendo que admite un factor de integración $\mu = \varphi(x^2 + y^2)$.

Solución: Asociando términos con diferenciales iguales

$$(x - xy)dx + (y + x^2)dy = 0$$

haciendo

$$M = x - xy \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -x$$

$$N = y + x^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

observamos que $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial no es exacta. Pero haciendo el cambio

$$z = x^2 + y^2$$

en efecto

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(2x)$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(2y)$$

en la fórmula general para el factor integrante

$$\frac{N\,\partial \ln \mu}{\partial x} - \frac{M\,\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(y + x^2)\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(2x) - (x - xy)\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(2y) = -x - 2x$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}[2xy + 2x^3 - 2xy + 2xy^2] = -3x$$

luego

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(2x^2 + 2y^2) = -3$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z} = \frac{-3}{2(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z} = -\frac{3}{2z}$$

integrando

$$\ln \mu = -\frac{3}{2} \ln z$$

$$\mu = \frac{1}{Z^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mu = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante, se convierte en exacta

$$\frac{(x - xy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx + \frac{(y + x^{2})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = 0$$

haciendo $(x_o y_o) = (0, 1)$ e integrando

$$\int_0^x \frac{(x - xy)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx + \int_1^y \frac{y + x_0^2}{(x_0^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = K$$

$$(1 - y) \int_0^x \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx + \int_1^y \frac{y}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = K$$

$$(1 - y) \left(\frac{-1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \Big|_0^x + \left(\frac{-1}{|y|} \right) \Big|_1^y = K$$

evaluando

$$(1 - y) \left(\frac{-1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + (1 - y) \left(\frac{-1}{(y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + \left(\frac{-1}{y} + 1 \right) = K$$

$$(1 - y) \left(\frac{-1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + (1 - y) \left(\frac{-1}{|y|} \right) + \left(\frac{-1 + y}{|y|} \right) = K$$

entonces la solución de la ecuación diferencial es

$$\frac{y - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = K.$$

21. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{x^2 + y}{x}$$

sabiendo que admite un factor de integración $\mu = \varphi(x)$.

Solución: Escribiendo la ecuación con diferenciales

$$(x^2 + y)dx - xdy = 0$$

sean

$$M = x^2 + y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N = -x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial no es exacta. Buscando el factor integrante

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

$$\mu = e^{\int \frac{1-(-1)}{-x} dx}$$

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{x} dx}$$

entonces

$$\mu = \frac{1}{x^2}$$

multiplicando la ecuación por este factor integrante

$$\frac{1}{x^2}(x^2 + y)dx - \frac{1}{x^2}xdy = 0$$

que es exacta. Haciendo $(x_0,y_0) = (1,0)$ e integrando

$$\int_1^x (1 + \frac{y_0}{x^2})dx - \int_0^y (\frac{1}{x})dy = K$$

$$\int_1^x dx - \int_0^y (\frac{1}{x})dy = K$$

$$x - \frac{y}{x} = C.$$

22. **Determinar la solución de**

$$x(dx - 2ydy) + y^2 dx = 0$$

sabiendo que el factor integrante $\mu = \varphi(x)$.
Solución: Separando diferenciales

$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0$$

si hacemos

$$M = x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$

$$N = -2xy \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -2y$$

entonces $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ por tanto la ecuación diferencial no es exacta. Buscando el factor integrante

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

$$= e^{\int \frac{2y - (-2y)}{-2xy} dx}$$

$$\mu = e^{-2\ln|x|}$$

luego el factor de integración

$$\mu = \frac{1}{x^2}$$

multiplicando por este factor integrante, se convierte en exacta

$$\frac{1}{x^2}(x + y^2)dx - \frac{1}{x^2}(2xy)dy = 0$$

$$\int_1^x \left(\frac{1}{x} + \frac{y_o{}^2}{x^2}\right)dx - \int_o^y \frac{2y}{x}dy = K$$

$$\ln|x|\Big|_1^x - \frac{2}{x}\frac{y^2}{2}\Big|_o^y = K$$

evaluando

$$\ln|x| - \frac{y^2}{x} = K.$$

23. Resolver la ecuación diferencial

$$5dx + 2x^3dy + 2xdy + 2x^2ydx + 2ydx += 0$$

si tiene un factor de integración que depende de x.

Solución: Separando los diferenciales

$$(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0$$

como

$$M = 2x^2y + 2y + 5 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2 + 2$$

$$N = 2x^3 + 2x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2 + 2$$

Como $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces no es exacta. Buscando el factor integrante

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

$$\mu = e^{-\int \frac{4}{2} \int \frac{x^2}{x^3 + x} dx}$$

$$\mu = e^{\ln\left|\frac{1}{x^2+1}\right|}$$

luego

$$\mu = \frac{1}{x^2+1}$$

multiplicando la ecuación doferencial por este factor integrante,

$$\frac{1}{x^2+1}(\,2x^2y + 2y + 5)dx + \frac{1}{x^2+1}(2x^3 + 2x)dy = 0$$

haciendo $(x_o y_o) = (0,0)$ e integrando

$$\int_o^x \frac{2x^2y_o + 2y_o + 5}{x^2+1} dx + \int_o^y \frac{(2x^3 + 2x)}{x^2+1} dy = K$$

$$5\int_o^x \frac{dx}{x^2+1} + \frac{2x(x^2+1)}{x^2+1} \int_o^y dy = K$$

$$5 \arctan x + 2xy = K.$$

24. Encontrar la solución de la ecuación

$$3x^2y^2dy = (2xy^3x - x^4 \ln)dx$$

si admite un factor de integración $\mu = \varphi(x)$.

Solución: Como

$$M = x^4 \ln x - 2xy^3 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -6y^2x$$

$$N = 3x^2y^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

evidentemente $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial no es exacta. Buscando el factor integrante

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

$$= e^{\int \frac{-12y^2x}{3x^2y^2} dx}$$

$$= e^{-4\ln|x|}$$

por tanto, el factor de integración es:

$$\mu = \frac{1}{x^4}$$

multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante

$$\frac{1}{x^4}(x^4 \ln x - 2xy^3)dx + \frac{1}{x^4}(3x^2y^2)dy = 0$$

haciendo $(x_o y_o) = (1,0)$ e integrando

$$\int_1^x (\ln x - \frac{2y_o^3}{x^3})dx + \int_o^y (\frac{3y^2}{x^2})dy = K$$

$$(x\ln|x| - x)\Big|_1^x + \frac{3}{x^2}\frac{y^3}{3}\Big|_o^y = K$$

$$x\ln|x| - x + \frac{y^3}{x^2} = K$$

entonces la solución de la ecuación diferencial es:

$$x^3(\ln|x| - 1) + y^3 = Kx^2.$$

25. Hallar la solución de la ecuación

$$y' = -\frac{x + \sin x + \sin y}{\cos y}$$

sabiendo que el factor de integración depende de x.

Solución: Escribiendola ecuación con diferenciales

$$(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$$

haciendo

$$M = x + \sin x + \sin y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \cos y$$

$$N = \cos y dy \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

evidentemente $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$. Buscando el factor integrante

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} = e^{\int \frac{\cos y - 0}{\cos y} dx}$$

$$\mu = e^{x}$$

multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante

$$(xe^{x} + e^{x}\sin x + e^{x}\sin y)dx + e^{x}\cos y dy = 0$$

haciendo $(x_o, y_o) = (0,0)$ e integrando

$$\int_{o}^{x}(xe^{x} + e^{x}\sin x + e^{x}\sin y_o)dx + \int_{o}^{y} e^{x}\cos y dy = K$$

$$\int_{o}^{x} xe^{x}dx + \int_{o}^{x} e^{x}\sin x dx + e^{x}\int_{o}^{y}\cos y dy = K$$

$$(xe^{x} - e^{x})\Big|_{o}^{x} + \left(\frac{e^{x}\sin x - e^{x}\cos x}{2}\right)\Big|_{o}^{x} + e(^{x}\sin y)\Big|_{o}^{y} = K$$

luego la solución a la ecuación diferencial es

$$2e^{x}(x-1) + 2e^{x}\sin y + +e^{x}(\sin x - \cos x) = C.$$

26. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$xy^2(2dx - 3dy) - 3y^3dx + 7dy = 0$$

sabiendo que tiene un factor de integración $\mu = \varphi(y)$.

Solución: Separando diferenciales

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$$

haciendo

$$M = 2xy^2 - 3y^3 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 9y^2$$

$$N = 7 - 3xy^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2$$

para buscar el factor integrante

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}$$

$$\mu = e^{\int \frac{-3y^2 - 4xy + 9y^2}{2xy^2 - 3y^3} dy}$$

$$\mu = e^{\int \frac{2y(3y - 2x)}{y^2(2x - 3y)} dy}$$

entonces

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{y} dy}$$

$$\mu = \frac{1}{y^2}$$

multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante

$$\frac{2xy^2-3y^3}{y^2}dx+\frac{7-3xy^2}{y^2}dy=0$$

haciendo $(x_o y_o)=(0,1)$ e integrando

$$\int_o^x \frac{2xy_o-3y_o^3}{y_o^2}dx+\int_1^y \frac{7-3xy^2}{y^2}dy=K$$

$$2\int_o^x xdx-3\int_o^x dx+7\int_1^y \frac{dy}{y^2}-3x\int_1^y dy=K$$

$$2\frac{x^2}{2}\Big|_o^x-3x\Big|_o^x-\frac{7}{y}\Big|_1^y-3x\Big|_1^y dy=K$$

evaluando

$$x^2-3x-\frac{7}{y}+7-3xy+3x=C$$

$$x^2-\frac{7}{y}-3xy=C.$$

27. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$y'=\frac{x-3y^2}{2y^3-6xy}$$

sabiendo que el factor de integración es una función de $x+y^2$.

Solución: Separando con el uso de los diferenciales

$$(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0$$

haciendo

$$M=3y^2-x\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=6y$$

$$N=2y^3-6xy\Rightarrow\frac{\partial N}{\partial x}=-6y$$

observamos que $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ entonces la ecuación diferencial no es exacta.

Haciendo el cambio

$z = x + y^2$ para buscar el factor integrante

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(2y)$$

Sustituyendo en la fórmula general para el factor

$$\frac{N\,\partial \ln \mu}{\partial x} - \frac{M\,\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(2y^3 - 6xy)\frac{\partial \ln \mu}{\partial z} - (3y^2 - x)\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}(2y) = 6y - (-6y)$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z}[2y^3 - 6xy - 6y^3 + 2xy] = 12y$$

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial z} = \frac{12y}{(-4)y(x + y^2)} = -\frac{3}{z}$$

entonces el factor de integración

$$\ln \mu = -3 \ln z$$
$$\mu = \frac{1}{(x + y^2)^3}$$

multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante

$$\frac{3y^2 - x}{(x + y^2)^3}dx + \frac{2y^3 - 6xy}{(x + y^2)^3}dy = 0$$

que es exacta. Haciendo $(x_o y_o) = (0, 1)$ e integrando

$$\int_o^x \frac{3y^2 - x}{(x + y^2)^3}dx + \int_1^y \frac{2y^3 - 6x_o y}{(x_o + y^2)^3}dy = K$$

$$-\frac{3y^2}{2(x + y^2)^2}\Big|_0^x - \int_o^x \frac{x dx}{(x + y^2)^3} + \int_1^y \frac{2y^3}{y^6}dy = K$$

calculando la integral:

$$I = \int_o^x \frac{xdx}{(x+y^2)^3}.$$

Hacemos el cambio de variable

$$u = x + y^2 \Rightarrow du = dx$$

y los límites de integración

$$x = 0 \Rightarrow u = y^2$$

$$x = x \Rightarrow u = x + y^2$$

se tiene que

$$I = \int_{y^2}^{x+y^2} \frac{u - y^2 du}{u^3}$$

$$= \int_{y^2}^{x+y^2} \frac{du}{u^2} - y^2 \int_{y^2}^{x+y^2} \frac{du}{u^3}$$

$$= \frac{-1}{(x+y^2)} + \frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{2(x+y^2)^2} - \frac{1}{2y^2}.$$

Sustituyendo en la solución de la ecuación diferencial es

$$-\frac{3y^2}{2(x+y^2)^2} + \frac{3}{2y^2} + \frac{1}{(x+y^2)} - \frac{1}{y^2} - \frac{y^2}{2(x+y^2)^2} + \frac{1}{2y^2} - \frac{1}{y^2} + 1 = K$$

$$\frac{2(x+y^2) - y^2 - 3y^2}{2(x+y^2)^2} = K$$

$$\frac{2(x-y^2)}{2(x+y^2)^2} = K$$

simplificando

$$(x - y^2) = K(x+y^2)^2 .$$

Problemas Propuestos

Resuelva las siguiente ecuaciones diferenciales

1. $y' = \frac{-3x}{4y}$.
2. $(x^2 - y^2)dx - 2xdy = 0$.
3. $(x + y)y' = x - y$.
4. $(2r\cos\phi - 1)dr = r^2 \sin\phi d\phi$.
5. $(x - y\cos x)dx - (y + \sin x +)dy = 0$.
6. $y' = \frac{ye^{-x} - \sin x}{e^{-x} + ey}$.
7. $(\ln x + 2y)y' + \left(x^2 + \frac{y}{x}\right) = 0$.
8. $y(y - e^x)dx - (e^x - 2xy)dy = 0$.
9. $2xyy' = -(3x + 2y^2)$.
10. $xy' + (2x^3 - y) = 0$.
11. $y' = -\frac{y^2\cos x - y}{x + y^2}$.
12. $(x + x^3\sin(2y))y' - 2y = 0$.
13. $(x\cos y - \sin^2 y)dy = \sin y dx$.
14. $(2y\sin x - \cos^3 x) + \cos x y' = 0$.
15. $y' + \frac{4y}{x} = x$.
16. $ydx - y^3 3xdy = 0$.
17. $\frac{dT}{dt} - \frac{t - tT}{t^2 + 1} = 0$.
18. $y' = -\frac{(y^3 + 2e^x)}{e^x + 3y^2}$.
19. $(y - 2x)dx - (2y - x)dy = 0$.
20. $(2x - \sin y)dx - x\cos y dy$.
21. $(x^2 + 1)y' + 2xy = 0$.
22. $(\sin 2x - \tan y)dx = x\sin^2 y dy$.
23. $xyy' = -y^2 - 2x^2; \mu = \phi(x)$.
24. $(4x - y^2)y' + y = 0; \mu = \phi(y)$.
25. $(\cos x)y' - 2y\sin x = 3; \mu = \phi(x)$.
26. $y' = -\frac{x - y}{x + y}; \mu = \phi(x^2 + y^2)$.
27. $y' = -\frac{\tan y}{\tan t}$.

28. $y' = \dfrac{1 - \frac{y}{(x+y)^2}}{1 - \frac{x}{(x+y)^2}}.$

29. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0; \mu = \phi(y^2).$

30. $(y\sin x + x^2y - \sec y)dx + N(x,y)dy = 0;$ sabiendo que es exacta.

31. $(x^2 + y^2 - y)dx + xdy = 0; \mu = \phi(x^2 + y^2).$

32. $(4xy + 3x^3)y' = -2y^2 - 4x^2y;$ sabiendo que $\mu = x^p y^q.$

33. $y' = \dfrac{-y^2\cos x}{4 + 5y\sin x}; \mu = \phi(y).$

34. $(x + x^3\sin 2y)dy - 2ydx = 0.$

Ecuaciones Lineales de Primer Orden.

Ecuaciones de Bernoulli y Riccati

Definición. Una ecuación diferencial de primer orden es lineal, si se puede escribir de la forma

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

donde $a_1(x); a_0(x)$ y $f(x)$ son funciones que dependen de x solamente. Si $a_1(x) = 1$ entonces la ecuación se califica como lineal de primer orden normalizada.

Teorema. Una ecuación lineal de primer orden, escrita en forma diferencial,

$$dy + [p(x)(x)y - f(x)]dx = 0$$

admite un factor de integración

$$\mu = e^{\int p(x)dx}.$$

Teorema. Una ecuación lineal de primer orden,

$$y' + p(x)(x)y = f(x)$$

tiene una solución general

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right].$$

Teorema. Sea la ecuación lineal de primer orden,

$$y' + p(x)(x)y = f(x)$$

entonces su solución general tiene la forma

$$y_g = y_h + y_p$$

donde $y_h = cy_1$ es la solución de la ecuación, homogénea asociada,

$$y' + p(x)(x)y = 0$$

y la solución particular tiene la forma

$$y_p = c(x)y_1.$$

Definición. Una ecuación diferencial de la forma

$$y' + p(x)(x)y = y^n f(x)$$

con $n \neq 0, 1$, se denomina ecuación de Bernoulli.

Teorema. Una ecuación diferencial de Bernoulli

$$y' + p(x)(x)y = y^n f(x)$$

se puede transformar en una ecuación lineal de primer orden con el cambio

$$z = y^{1-n}.$$

Definición. Una ecuación diferencial de la forma

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y = c(x)$$

con $a(x) \neq 0$, se denomina ecuación de Riccati.

Teorema. Una ecuación diferencial de Riccati

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y = c(x)$$

se puede transformar en una ecuación de Bernoulli con el cambio

$$z = y_0(x) + z.$$

Y con el cambio

$$z = y_0(x) + \frac{1}{z}$$

a una ecuación lineal de primer orden, siendo y_0 una solución particular de esta la ecuación diferencial.

Problemas Resueltos

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(2y - x^2 - 2x)dx + dy = 0 .$$

Solución: Escribiendo la ecuación diferencial con la notación de Newton

$$y' + 2y = x^2 + 2x$$

observamos que la ecuación es lineal de primer orden. La ecuación homogénea asociada a esta ecuación se obtiene haciendo $f(x)$ identicamente nulo en la ecuación

$$y' + p(x)y = f(x)$$

es decir

$$y' + 2y = 0$$

que es una ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

integrando

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx + \ln c$$

$$\ln y = -2x + \ln c$$

$$y = e^{-2x}.e^{\ln c}$$

entonces la solución homogénea

$$y_h = c.e^{-2x}.$$

La solución particular la encontramos usando variación del parámetros. Hacemos

$$c = c(x)$$

en la solución anterior para tener la forma de la solución particular,

$$y_p = c(x)e^{-2x}$$

derivando

$$y_p' = c'(x)e^{-2x} - 2e^{-2x}c(x)$$

sustituyendo la ecuación diferencial, no homogénea, tenemos

$$c'(x)e^{-2x} - 2e^{-2x}c(x) + 2c(x)e^{-2x} = x^2 + 2x$$

$$c'(x) = \frac{x^2 + 2x}{e^{-2x}}$$

$$c(x) = \int (x^2 + 2x)e^{2x}dx$$

integrando por partes

$$c(x) = \frac{1}{4}(e^{2x})(2x + 2x^2 - 1)$$

sustituyendo en la forma de la solución particular

$$y_p = c(x)e^{-2x}$$

$$y_p = \frac{1}{4}(e^{2x})(2x + 2x^2 - 1)e^{-2x}$$

$$y_p = \frac{1}{4}(2x + 2x^2 - 1)$$

luego la solución general

$$y_g = y_h + y_p$$

$$y_g = c.e^{-2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

2. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$(x^2 + 2x - 1)dy + (1 - y - xy - x)dx = 0.$$

Solución: Reordenando los diferenciales

$$(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$$

normalizando

$$y' - \frac{x+1}{x^2 + 2x - 1}y = \frac{x-1}{x^2 + 2x - 1}$$

que es una ecuación lineal, por tanto la ecuación

$$dy - \left(\frac{x+1}{x^2 + 2x - 1}y + \frac{x-1}{x^2 + 2x - 1}\right)dx = 0$$

admite un factor de integración que depende de x,

$$\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} = e^{\int p(x) dx}$$

$$\mu = e^{-\int \frac{1+x}{x^2+2x-1} dx}$$

$$\mu = e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x-1)}$$

luego

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$$

multiplicando el factor integrante por la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dy - \left(\frac{x+1}{(x^2+2x-1)\sqrt{x^2+2x-1}} y + \frac{x-1}{(x^2+2x-1)\sqrt{x^2+2x-1}} \right) dx = 0$$

que es una ecuación diferencial exacta. Haciendo $(x_0, y_0) = (1, 0)$ e integrando

$$\int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dy - \int_1^x \left(\frac{x+1}{(x^2+2x-1)\sqrt{x^2+2x-1}} y_0 + \frac{x-1}{(x^2+2x-1)\sqrt{x^2+2x-1}} \right) dx = k$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}} y - \int_1^x \frac{x-1}{(x^2+2x-1)\sqrt{x^2+2x-1}} dx = k$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}} y - \frac{x}{\sqrt{2x+x^2-1}} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = k$$

luego

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-1}} y - \frac{x}{\sqrt{2x+x^2-1}} = c$$

entonces la solución general

$$y_g = c\sqrt{x^2+2x-1} + x.$$

3. Determinar la solución general de la ecuación

$$(y + x^3(3\ln x - 1))dx - x\ln x dy = 0.$$

Solución: Usando la notación de Newton

$$y' - \frac{y}{x\ln x} = \frac{x^3(3\ln x - 1)}{x\ln x}$$

como la ecuación diferencial es lineal hacemos la sustitución

$$p(x) = -\tfrac{1}{x\ln x} \text{ y } q(x) = \tfrac{x^2}{\ln x}(3\ln x - 1)$$

en la fórmula

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\int \frac{1}{x\ln x}dx}\left[\int\left[\frac{x^2}{\ln x}(3\ln x - 1)\right]e^{-\int \frac{1}{x\ln x}dx}dx + c\right].$$

Como

$$e^{\int \frac{1}{x\ln x}dx} = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$$

entonces

$$y_g = \ln x\left[\int \frac{x^2}{\ln x}(3\ln x - 1)\frac{1}{\ln x}dx + c\right]$$

$$y_g = \ln x\left[\int 3\frac{x^2}{\ln x}dx - \int \frac{x^2}{\ln^2 x}dx + c\right].$$

Integrando por parte

$$\int 3\frac{x^2}{\ln x}dx = \frac{x^3}{\ln x} - \int\left(-\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)dx$$

sustituyendo

$$y_g = \ln x\left[\frac{x^3}{\ln x} - \int\left(-\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)dx - \int \frac{x^2}{\ln^2 x}dx + c\right]$$

como $\int\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)dx$ coverge, tenemos que la solución es:

$$y_g = \ln x\left(\frac{x^3}{\ln x} + c\right).$$

4. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales del tipo

$$y' + \frac{xy}{(a^2 - x^2)} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)}.$$

Solución: Como la ecuación diferencial es lineal de primer orden, buscamos la ecuación homogénea asociada

$$y' + \frac{xy}{(a^2 - x^2)} = 0$$

luego

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{(a^2 - x^2)}dx$$

integrando

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{(a^2 - x^2)}dx$$

$$\ln y = \ln\sqrt{(a^2 - x^2} + \ln c$$

por tanto la solución homogénea es

$$y_h = c\sqrt{(a^2 - x^2}.$$

Usando el método de variación del parámetro, $c = c(x)$, podemos asegurar que la solución particular es de la forma

$$y_p = c(x)\sqrt{(a^2 - x^2}$$

derivando

$$y_p' = c'(x)\sqrt{(a^2 - x^2} - \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2}}c(x)$$

sustituyendo la ecuación diferencial, no homogénea, obtenemos la expresión:

$$c'(x)\sqrt{(a^2-x^2}-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2}}c(x)+\frac{x\sqrt{(a^2-x^2}}{a^2-x^2}c(x)=\frac{a^2}{a^2-x^2}$$

$$c'(x)=\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integrando

$$c(x)=\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

sustituyendo $c(x)$ an la expresión de la forma de la solución particular

$$y_p=\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\sqrt{(a^2-x^2)}=x$$

por lo que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y_g=c\sqrt{(a^2-x^2)}+x.$$

5. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$(3x^2+y)dx-2xdy=0.$$

Solución: Como $(3x^2+y)dx-2xdy=0$ se puede escribir de la forma $y'-\frac{y}{2x}=\frac{3x}{2}$ entonces se puede asegurar que la ecuación diferencial es lineal de primer orden y admite un factor de integración que depende de x. transformando la ecuación diferencial en

$$\left(\frac{3x}{2}+\frac{y}{2x}\right)dx-dy=0$$

y usando el factor de integrante, $p(x)=-\frac{1}{2x}$,

$$\mu = e^{\int p(x)dx}$$

$$\mu = e^{-\int \frac{1}{2x}dx}$$

$$\mu = e^{-\frac{1}{2}\ln x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

tenemos

$$\left(\frac{3x}{2\sqrt{x}} + \frac{y}{2x\sqrt{x}}\right)dx - \frac{1}{\sqrt{x}}dy = 0$$

que es una ecuación exacta. Haciendo $(x_0, y_0) = (1, 0)$ e integrando obtenemos la solución

$$\int_1^x \left(\frac{3x}{2\sqrt{x}} + \frac{y_0}{2x\sqrt{x}}\right)dx - \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x}}dy = k$$

$$\int_1^x \frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx - \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x}}dy = k$$

$$x^{\frac{3}{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}y = k$$

entonces la solución general es

$$y_g = x^2 + c\sqrt{x}.$$

6. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$(x+1)y' - 2y = (x+1)^4.$$

Solución : Como la ecuación diferencial es lineal de primer orden, normalizando

$$y' - \frac{2y}{(x+1)} = (x+1)^3$$

podemos resolverla usando la fórmula

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

como

$$p(x) = -\frac{2}{(x+1)} \text{ y } q(x) = (x+1)^3$$

entonces

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\int \frac{2}{(x+1)}dx}\left[\int (x+1)^3 e^{-\int \frac{2}{(x+1)}dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{2\ln(x+1)}\left[\int (x+1)^3 e^{-2\ln(x+1)}dx + c\right]$$

luego

$$y_g = (x+1)^2\left[\int (x+1)^3 \frac{1}{(x+1)^2}dx + c\right]$$

$$y_g = (x+1)^2\left[\int (x+1)dx + c\right]$$

$$y_g = (x+1)^2\left[\frac{(x+1)^2}{2} + c\right]$$

entonces

$$y_g = c(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}.$$

7. Determinar la solución de la ecuación

$$dx - (x\sin y + 2\sin 2y)dy = 0.$$

Solución: Usando la notación de Newton

$$y' = \frac{1}{x\sin y + 2\sin 2y}$$

que no es una ecuación lineal en y, pero

$$x' = x\sin y + 2\sin 2y \quad \Rightarrow x' - x\sin y = 2\sin 2y$$

es una ecuación lineal en x. Buscando la homogénea asociada a esta última

$$x' - x\sin y = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{dx}{x} = \sin y dy$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \sin y dy + \ln c$$

$$\ln x = -\cos y + \ln c$$

por lo que la solución homogénea es:

$$x_h = ce^{-\cos y}.$$

Usando el método de variación del parámetro, $c = c(y)$, obtenemos la forma de la solución particular

$$x_p = c(y)e^{-\cos y}$$

derivando

$$x_p' = c'(y)e^{-\cos y} + c(y)e^{-\cos y}\sin y$$

y sustituyendo la ecuación diferencial, no homogénea, tenemos que

$$c'(y)e^{-\cos y} + c(y)e^{-\cos y}\sin y - c(y)e^{-\cos y}\sin y = 2\sin 2y$$

$$c'(y) = 2\sin 2y.e^{\cos y}$$

haciendo el cambio $t = \cos y$ e integrando por partes

$$c(y) = 4e^{\cos y} - 4(\cos y)e^{\cos y}$$

entonces

$$x_p = (4e^{\cos y} - 4(\cos y)e^{\cos y})e^{-\cos y}$$

$$x_p = 4 - 4\cos y$$

$$x_p = 8\sin^2\frac{y}{2}$$

por tanto la solución general

$$x_g = x_h + x_p$$

$$x_g = ce^{-\cos y} + 8\sin^2\frac{y}{2}.$$

8. Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$\left(2xe^{x^2} + 2xy\right)dx - dy = 0.$$

Solución: Despejando y' obtenemos

$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Si la escribimos de la forma

$$dy - \left(2xy + 2xe^{x^2}\right)dx = 0$$

entonces la podemos transformar en una ecuación exacta, usando un factor de integración que depende de x, $p(x) = -2x$

$$\mu = e^{-\int 2xdx}$$

$$\mu = e^{-x^2}$$

luego multiplicando la ecuación diferencial por el factor de integración

$$e^{-x^2}dy - \left(2xy + 2xe^{x^2}\right)e^{-x^2}dx = 0.$$

Haciendo $(x_0, y_0) = (0,0)$ e integrando

$$\int_0^y e^{-x^2}dy - \int_0^x \left(2xy_0 + 2xe^{x^2}\right)e^{-x^2}dx = K$$

$$\int_0^y e^{-x^2}dy - \int_0^x 2xdx = K$$

$$ye^{-x^2} - x^2 = K$$

luego

$$ye^{-x^2} = Ke^{x^2} + x^2e^{x^2}.$$

9. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y' + \frac{2x^3 - 1}{x(x^3 + 1)}y = \frac{x^3 - 2}{x^2(x^3 + 1)}.$$

Solución:Como la ecuación diferencial es lineal de primer orden, normalizada, podemos hallar la solución usando la fórmula

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

con

$$p(x) = \tfrac{2x^3-1}{x(x^3+1)} \text{ y } q(x) = \frac{x^3 - 2}{x^2(x^3 + 1)}$$

en efecto

$$y_g = e^{-\int \frac{2x^3-1}{x(x^3+1)}dx}\left[\int \frac{x^3-2}{x^2(x^3+1)} e^{\int \frac{2x^3-1}{x(x^3+1)}dx} dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\ln x - \ln(x^3+1)}\left[\int \frac{x^3-2}{x^2(x^3+1)} e^{\ln(x^3+1)-\ln x} dx + c\right]$$

$$y_g = \frac{x}{x^3+1}\left[\int \frac{x^3-2}{x^2(x^3+1)} \frac{1}{x}(x^3+1)dx + c\right]$$

simplificando e integrando

$$y_g = \frac{x}{x^3+1}\left[\int \frac{1}{x^3}(x^3-2)dx + c\right]$$

$$y_g = \frac{x}{x^3+1}\left[x + \frac{1}{x^2} + c\right]$$

$$y_g = \frac{x}{x^3+1}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) + c\frac{x}{x^3+1}$$

entonces la solución general es

$$y_g = c\frac{x}{x^3+1} + \frac{1}{x}.$$

10. Hallar la solución de la ecuación

$$\frac{1}{\sin x \cos x}y' + y\frac{1}{\sin x} = 1$$

que satisface la condición inicial $y|_{x=0} = 1$.

Solución: Despejando y'

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya ecuación homogénea asociada

$$y' + y\cos x = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{dy}{y} = -\cos x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x dx + \ln c$$

$$\ln y = -\sin x + \ln c$$

entonces la solución homogénea es

$$y_h = ce^{-\sin x}.$$

Usando el método de variaciòn del paràmetro, $c = c(x)$. La forma de la solución particular es

$$y_p = c(x).e^{-\sin x}$$

derivando

$$y_p' = c'(x)e^{-\sin x} + c(x)e^{-\sin x}(-\cos x)$$

sustituyendo en la ecuación diferencial, no homogénea,

$$c'(x)e^{-\sin x} - c(x.e^{-\sin x}(\cos x) + c(x)e^{-\sin x}(\cos x) = \sin x \cos x$$

$$c(x) = \int \sin x \cos x e^{\sin x} dx$$

haciendo el cambio $u = \sin x$ e integrando por partes

$$c(x) = (\sin x)e^{\sin x} - e^{\sin x}$$

sustituyendo en la expresión de la forma de la solución particular

$$y_p = ((\sin x)e^{\sin x} - e^{\sin x})e^{-\sin x}$$

$$y_p = \sin x - 1$$

entonces la solución general es

$$3xy^2y' - 2y^3 = x^3.$$

Hacemos el cambio

$$z = y^3 \Rightarrow z' = 3y^2y'$$

en la ecuación diferencial

$$xz' - 2z = x^3$$

que es lineal, despues de normalizar tenemos que

$$p(x) = \frac{-2}{x} \text{ y } q(x) = x^2$$

aplicando la fórmula para resolver las ecuaciones lineales

$$z_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$z_g = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left[\int x^2 e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx + c\right]$$

$$z_g = e^{2\ln x}\left[\int x^2 e^{-2\ln x}dx + c\right]$$

luego

$$z_g = x^2\left[\int dx + c\right]$$

$$z_g = x^2[x + c]$$

entonces la solución es:

$$y^3 = cx^2 + x^3.$$

12. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$x\sqrt{x+1}\,y' - \frac{\sqrt{x+1}}{8}y = -\frac{1}{8y^3}.$$

Solución:Organizando la ecuación diferencial de Bernoulli

$$8y^3y' - \frac{1}{x}y^4 = -\frac{1}{x\sqrt{x+1}}$$

haciendo el cambio

$$z = y^4 \quad \frac{z'}{4} = 4y^3y'$$

en la ecuación diferencial

$$2z' - \frac{z}{x} = -\frac{1}{x\sqrt{x+1}}$$

como esta ecuación es lineal de primer orden, buscamos la ecuación homogénea asociada

$$z' - \frac{z}{2x} = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{2x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{2x} + \ln c$$

$$\ln z = \ln(c\sqrt{x})$$

entonces la solución homogénea es

$$z_h = c\sqrt{x}.$$

Usando el método de variación del parámetro, $c = c(x)$. La forma de la solución particular es

$$z_p = c(x)\sqrt{x}$$

derivando

$$z_p' = k'(x)\sqrt{x} + \frac{k(x)}{2\sqrt{x}}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial, no homogénea, tenemos

$$k'(x)\sqrt{x} + \frac{k(x)}{2\sqrt{x}} - \frac{k(x)\sqrt{x}}{2x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}$$

$$k'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}.$$

Para calcular la integral

$$k(x) = -\int \frac{1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x+1}}dx$$

efectuamos el cambio

$$\frac{1+x}{x} = t^2 \Rightarrow \frac{-1}{2x^2}dx = tdt$$

en la integral

$$k(x) = \int \frac{-1}{x^2\sqrt{\frac{x+1}{x}}}dx = \int \frac{tdt}{t}\Big|_{t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}} =$$

$$k(x) = t\Big|_{t=\sqrt{\frac{1+x}{x}}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}$$

luego, sustituyendo en la expresión de la forma de z_p, se tiene

$$z_p = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}\sqrt{x}$$

$$z_p = \sqrt{1+x}$$

entonces la solución general es:

$$z_g = z_h + z_p$$

$$y^4 = c\sqrt{x} + \sqrt{1+x}.$$

13. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$dx - (xy + x^2y^3)dy = 0.$$

Solución: Despejando x', se tiene

$$x' = xy + x^2y^3$$

$$x' - xy = x^2y^3$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli en x. Haciendo el cambio

$$z = x^{-1} \Rightarrow -z = x^{-2}x'$$

en la ecuación diferencial

$$x'x^{-2} - x^{-1}y = y^3$$

$$-z' - yz = y^3$$

como esta última ecuación diferencial es lineal de primer orden, la normalizamos y aplicamos la fórmula para encontrar la solución. En efecto, la ecuación normalizada

$$z' + yz = -y^3$$

con

$$p(y) = y \quad q(y) = -y^3$$

usando la fórmula

$$z_g = e^{-\int p(y)dy}\left[\int q(y)e^{\int p(y)dx}dy + c\right]$$

$$z_g = e^{-\int ydy}\left[-\int y^3 e^{\int ydy}dy + c\right]$$

$$z_g = e^{-\frac{1}{2}y^2}\left[-\int y^3 e^{\frac{1}{2}y^2}dy + c\right]$$

integrando por partes

$$z_g = e^{-\frac{1}{2}y^2}\left[y^2 e^{\frac{1}{2}y^2} - 2e^{\frac{1}{2}y^2} + c\right]$$

$$z_g = \left[y^2 - 2 + ce^{-\frac{1}{2}y^2}\right]$$

luego la solución general

$$\frac{1}{x} = c.e^{\frac{-y^2}{2}} + 2 - y^2.$$

14. Hallar la solución de la ecuación

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = 2xe^{x^2}.$$

Solución:Como la ecuación diferencial es lineal de primer orden. Buscamos la ecuación homogénea asociada

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx + \ln c$$

$$\ln y = x + \ln c$$

entonces la solución homogénea

$$y_h = ce^x.$$

Usando el método de variaciòn del parámetro, haciendo $c = c(x)$, obtenemos la forma de la solución particular

$$y_p = c(x)e^x$$

derivando

$$y_p' = c'(x).e^x + e^x.c(x)$$

sustituyendo la ecuación diferencial, no homogénea, tenemos

$$c'(x) + c(x) - c(x) = 2x.e^{x^2}$$

integrando

$$c(x) = \int 2x.e^{x^2}dx$$
$$c(x) = e^{x^2}$$

efectuando la sustitución de $c(x) = e^{x^2}$ en la expresión de la forma de la solución particular

$$y_p = c(x)e^x$$

$$y_p = e^{x^2}e^x$$

entonces la solución general es

$$y_g = c.e^x + e^{x^2+x}.$$

15. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(y + x^2\sin x)dx - xdy = 0.$$

Solución: Usando la notación de Newton

$$xy' - y = x^2\sin x$$

normalizando

$$y' - \frac{y}{x} = x\sin x$$

que es una ecuación lineal normalizada. Aplicando la fórmula, con $p(x) = \frac{-1}{x}$ y $q(x) = x\sin x$

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int(x\sin x)e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + c\right]$$

$$y_g = x\left[\int(x\sin x)\frac{1}{x}dx + c\right]$$

luego

$$y_g = x\left[\int \sin x dx + c\right]$$

$$y_g = cx - x\cos x.$$

16. Determinar la solución de la ecuación

$$y' + 2xy = \frac{y^2(1 + 2x^2)}{x^2}.$$

Solución: Como la ecuación diferencial es de Bernoulli, la transformamos a la forma

$$x^2y'y^{-2} + 2x^3y^{-1} = 1 + 2x^2$$

haciendo el cambio

$$z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2}y'$$

en la ecuación diferencial

$$-x^2z' + 2x^3z = 1 + 2x^2$$

normalizando

$$z' - 2xz = \frac{-1 - 2x^2}{x^2}$$

como $p(x) = -2x$ y $q(x) = \dfrac{-1 - 2x^2}{x^2}$, si aplicamos la fórmula

$$z_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$z_g = e^{\int 2xdx}\left[\int \frac{-1 - 2x^2}{x^2}e^{-\int 2xdx}dx + c\right]$$

$$z_g = e^{x^2}\left[\int \frac{-1 - 2x^2}{x^2}e^{-x^2}dx + c\right]$$

luego

$$z_g = e^{x^2}\left[\int \frac{-e^{-x^2}}{x^2}dx - 2\int e^{-x^2}dx + c\right].$$

Integrando por partes, derivando e^{-x^2},

$$-\int \frac{e^{-x^2}dx}{x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{x} + 2\int e^{-x^2}dx$$

en consecuencia

$$z_g = e^{x^2}\left[-\frac{e^{-x^2}}{x} + 2\int e^{-x^2}dx - 2\int e^{-x^2}dx + c\right]$$

$$\frac{1}{y_g} = e^{x^2}\left[-\frac{e^{-x^2}}{x} + c\right]$$

entonces la solución es:

$$\frac{1}{y_g} = ce^{x^2} - \frac{1}{x}.$$

---

17. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$2xydx - (x^2 - y^2 - a^2)dy = 0$$

Solución: Despejando x' tenemos la ecuación

$$x' = \frac{x}{2y} - \frac{1}{2x} - \frac{a^2}{2xy}$$

que es una ecuación de Bernoulli en x, transformandola es

$$x.x' - \frac{x^2}{2y} = -(\frac{y}{2} + \frac{a^2}{2y})$$

si hacemos el cambio de variable

$$z = x^2 \Rightarrow z' = 2xx'$$

en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{z'}{2} - \frac{z}{2y} = -(\frac{y}{2} + \frac{a^2}{2y})$$

$$z' - \frac{z}{y} = -\left(y + \frac{a^2}{y}\right).$$

Como esta ecuación es lineal de primer orden, se puede transformar en una ecuación exacta, si usamos el factor integrante

$$z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$$

tenemos que

$$-z' + \frac{\cos x}{\sin x}z = (x\frac{\cos x}{\sin x} - 1)$$

$$z' - \frac{\cos x}{\sin x}z = -x\frac{\cos x}{\sin x} + 1$$

que es una ecuación diferencial lineal. Buscando la homogénea asociada

$$z' - \frac{\cos x.z}{\sin x} = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{dz}{z} = \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} + \ln c$$

$$\ln z = \ln(\sin x) + \ln c$$

entonces la solución homogénea

$$z_h = c\sin x.$$

Usando el método de variación del parámetro, $c = c(x)$, tenemos que la solución particular tiene la forma

$$z_p = c(x)\sin x$$

derivando

$$z_p' = c'(x)\sin x + c(x)\cos x$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos que:

$$c'(x)\sin x + c(x)\cos x - \frac{\cos x}{\sin x}\sin x c(x) = \frac{-x\cos x}{\sin x} + 1$$

$$c'(x)\sin x = \frac{-x\cos x}{\sin x} + 1$$

$$c(x) = -\int \frac{x\cos x dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x}$$

para encontrar $\int \frac{dx}{\sin x}$ integrando por partes, derivando $\frac{1}{\sin x}$,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} + \int \frac{x\cos x dx}{\sin^2 x}$$

entonces

$$c(x) = -\int \frac{x\cos x dx}{\sin^2 x} + \frac{x}{\sin x} + \int \frac{x\cos x dx}{\sin^2 x}$$

$$c(x) = \frac{x}{\sin x}$$

por tanto la solución particular

$$z_p = c(x)\sin x$$

$$z_p = \frac{x}{\sin x}\sin x$$

y la solución general

$$z_g = c\sin x + x$$

$$\frac{1}{y^2} = c\sin x + x.$$

19. Determinar la solución de la ecuación

$$(x^3 + y + 1)dy - 3x^2 dx = 0.$$

Solución: Despejando x'

$$x' = \frac{x^3 + y + 1}{3x^2}$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli en x, que se puede transformar en

$$x^2 x' - \frac{x^3}{3} = \frac{y+1}{3}$$

haciendo el cambio

$$z = x^3 \quad z' = 3x^2 x'$$

en la ecuación diferencial se obtiene

$$z' - z = y + 1$$

que es una ecuación lineal de primer orden. Haciendo $p(y) = -1,\ q(y) = y + 1$ en la fórmula

$$z_g = e^{-\int p(y)dy}\left[\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy + c\right]$$

$$z_g = e^{\int dy}\left[\int (y+1)e^{-\int dy}dy + c\right]$$

$$z_g = e^{y}\left[\int (y+1)e^{-y}dy + c\right]$$

integrando por partes

$$z_g = e^{y}[e^{-y}(-y-2) + c]$$

$$x^3 = ce^{y} - y - 2.$$

20. Encontrar la solución de la ecuación

$$x(3x^2 - 3a^2)y' + y(x^2 + a^2) = \frac{1}{y^2}\frac{x(3x^2 - a^2)x(x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}.$$

Solución:Como la ecuación diferencial es de Bernoulli, la transformamos a la forma

$$3y^2y' + \frac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)}y^3 = \frac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}$$

efectuando el cambio

$$z = y^3 \quad z' = 3y^2y'$$

en la ecuación diferencial obtenemos

$$z' + \frac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)}z = \frac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden con

$$\mathrm{p}(x) = \frac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)} \ \text{ y } \ q(x) = \frac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}.$$

Usando la fórmula

$$z_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$z_g = e^{-\int \frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}dx}\left[\int \frac{x(3x^2-a^2)}{x^2-a^2}e^{\int \frac{x^2+a^2}{x(x^2-a^2)}dx}dx + c\right]$$

$$z_g = \frac{x}{x^2-a^2}\left[\int \frac{x(3x^2-a^2)}{x^2-a^2}\frac{1}{x}(x^2-a^2)dx + c\right]$$

simplificando e integrando

$$z_g = \frac{x}{x^2-a^2}\left[\int (3x^2-a^2)dx + c\right]$$

$$z_g = \frac{x}{x^2-a^2}[x(x-a)(a+x)+c]$$

$$z_g = x^2 + c\frac{x}{x^2-a^2}$$

luego

$$y^3 = c\frac{x}{x^2-a^2} + x^2$$

21. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y' - \frac{xy}{1+x^2} = \frac{xy+x^2y^2}{1+x^2}$$

Solución:Transformando la ecuación de Bernoulli dada

$$y'y^{-2} - \frac{xy^{-1}}{(1+x^2)} = \frac{x^2}{(1+x^2)}$$

y haciendo el cambio

$$z = y^{-1} \Rightarrow -z' = y^{-2}y'$$

en la ecuación diferencial nos resulta

$$z' - \frac{x}{1+x^2}z = -\frac{x^2}{(1+x^2)}$$

que es una ecuación lineal de primer orden, con $p(x) = \frac{x}{1+x^2}$ y

$q(x) = -\dfrac{x^2}{(1+x^2)}$. Si aplicamos la fórmula

$$z_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$z_g = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left[-\int\left(\frac{x^2}{(1+x^2)}\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)dx + c\right]$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left[\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + c\right]$$

22. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$(x+1)y' + y = -\frac{1}{2}(x+1)^4y^2$$

Solución:Como la ecuación diferencial es de Bernoulli, la transformamos en

$$y'y^{-2} + \frac{y^{-1}}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3$$

efectuando el cambio

$$z = y^{-1} \Rightarrow -z' = y^{-2}y'$$

en la ecuación diferencial tenemos que

$$z' - \frac{z}{x+1} = \frac{1}{2}(x+1)^3$$

que es lineal de primer orden, con $p(x) = -\dfrac{1}{x+1}$ y $q(x) = \frac{1}{2}(x+1)^3$. Usando la fórmula

$$z_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$z_g = e^{\int \frac{1}{x+1}dx}\left[\int \frac{1}{2}(x+1)^3e^{-\int \frac{1}{x+1}dx}dx + c\right]$$

$$z_g = e^{\ln(x+1)}\left[\int \frac{1}{2}(x+1)^3\frac{1}{x+1}dx + c\right]$$

luego

$$z_g = (x+1)\left[\int \frac{1}{2}(x+1)^2 dx + c\right]$$

$$z_g = (x+1)\left[\frac{(x+1)^3}{6} + c\right]$$

entonces la solución general es:

$$\frac{1}{y} = c(x+1) + \frac{(x+1)^4}{6}.$$

23. Resolver la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{xy}{x^2+y^2+1}.$$

Solución: Transformando la ecuación diferencial obtenemos

$$x' = -\frac{x^2+y^2+1}{xy}$$

$$x' + \frac{x}{y} = -\frac{y^2+1}{xy}$$

que es una ecuación diferencial de Bernoulli en x. Haciendo el cambio

$$z = x^2 \Rightarrow z' = 2xx'$$

en la ecuación diferencial

$$\frac{xx'}{2} + \frac{x^2}{y} = -\frac{y^2+1}{y}$$

se tiene que

$$z' + 2\frac{z}{y} = -2\frac{y^2+1}{y}.$$

Como esta ecuación es lineal de primer orden, podemos transformarla en una ecuación exacta con un factor de integración

$$\mu = e^{\int p(y)dy}$$

$$\mu = e^{\int \frac{2}{y}dy}$$

$$\mu = y^2.$$

Multiplicando el factor por la ecuación

$$dz + 2\left(\frac{z}{y} + \frac{y^2+1}{y}\right)dy = 0$$

resulta

$$y^2dz + 2\left(\frac{z}{y} + \frac{y^2+1}{y}\right)y^2dy = 0$$

que es una ecuación exacta. Haciendo $(y_0, z_0) = (1,0)$ e integrando

$$\int_0^z y^2dz + 2\int_1^y\left(\frac{z_0}{y} + \frac{y^2+1}{y}\right)y^2dy = k$$

$$\int_0^z y^2dz + 2\int_1^y (y+y^3)dy = k$$

$$y^2z + y^2 + \frac{1}{2}y^4 - \frac{3}{2} = k$$

luego

$$z = \frac{c}{y^2} - \frac{1}{2}y^2 - 1$$

$$x^2 = \frac{c}{y^2} - \frac{1}{2}y^2 - 1$$

por lo que la solución es

$$2x^2y^2 + y^4 + 2y^2 = c.$$

24. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$ydx - (2y\ln y + y - x)dy = 0.$$

Solución: Usando la notación de Newton, la ecuación diferencial se transforma en

$$x' + \frac{x}{y} = 2\ln y + 1$$

que es una ecuación lineal de primer orden,en x, normalizada, con $p(y) = \frac{1}{y}$ y $q(y) = 2\ln y + 1$. Si usamos la fórmula

$$x_g = e^{-\int p(y)dy}\left[\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy + c\right]$$

$$x_g = e^{-\int \frac{1}{y}dy}\left[\int (2\ln y + 1)e^{\int \frac{1}{y}dy}dy + c\right]$$

$$x_g = \frac{1}{y}\left[\int (2\ln y + 1)y dy + c\right]$$

luego

$$x_g = \frac{1}{y}(y^2\ln y + c)$$

$$x_g = \frac{c}{y} + y\ln y.$$

25. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$[y - x^2(2x - 1)]dx + x(x - 1)dy = 0.$$

Solución: Transformando la ecuación diferencial, obtenemos

$$y' + \frac{y}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{x-1}$$

que es una ecuacion diferencial lineal, normalizada, cuya ecuación homogénea asociada es

$$y' + \frac{y}{x(x-1)} = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x(x-1)}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x(x-1)} + \ln c$$

$$\ln y = \ln x - \ln(x - 1) + \ln c$$

entonces la solución homogénea es:

$$y_h = c\frac{x}{x-1}.$$

Aplicando el método de variación de parámetros, c=c(x). Como la forma de la solución particular es

$$y_p = c(x)\frac{x}{x-1}$$

y su derivada

$$y_p' = c'(x)\frac{x}{x-1} - c(x)\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, no homogénea,

$$y' + \frac{y}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{x-1}$$

obtenemos

$$c'(x)\frac{x}{x-1} - c(x)\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{c(x)\frac{x}{x-1}}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{x-1}$$

$$c'(x)\frac{x}{x-1} = \frac{x(2x-1)}{x-1}$$

$$c'(x) = 2x-1$$

integrando

$$c(x) = \int (2x-1)dx$$

$$c(x) = x^2 - x.$$

Sustituyendo $c(x) = x^2 - x$ en la forma de la solución particular, tenemos que

$$y_p = (x^2 - x)\frac{x}{x-1}$$

$$y_p = x^2$$

por tanto la solución general es

$$y_g = y_h + y_p$$

$$y_g = c\frac{x}{x-1} + x^2.$$

26. Resolver la ecuación diferencial

$$(\cos x)y' - y\sin x = 1$$

sujeta a la condición inicial $y|_{x=0} = 0$.

Solución: Normalizando la ecuación lineal

$$y' - (\tan x)y = \sec x.$$

Como $p(x) = -\tan x$ y $q(x) = \sec x$, si aplicamos la fórmula

$$y_g z = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\int \tan x dx}\left[\int (\sec x)e^{-\int \tan x dx}dx + c\right]$$

$$y_g = \frac{1}{\cos x}\left[\int (\sec x)\cos x dx + c\right] = \frac{1}{\cos x}[x + c]$$

entonces la solución general es

$$y_g = \frac{c}{\cos x} + \frac{x}{\cos x}.$$

Sustituyendo la condición inicial $(x_0, y_0) = (0,0)$ en la solución general obtenemos el valor de c

$$c = 0$$

entonces la solución de la ecuación es:

$$y = \frac{x}{\cos x}.$$

27. Encontrar la solución de la ecuación diferencial

$$(\cot y)y' - \frac{x+1}{\sin y} = -1.$$

Solución: Transformando la ecuación diferencial

$$(\cos y)y' - x + 1 = -\sin y$$

$$(\cos y)y' + \sin y = x + 1$$

haciendo el cambio

$$\sin y = u \Rightarrow \ (\cos y)y' = u'$$

en la ecuación diferencial obtenemos

$$u' + u = x + 1$$

que es una ecuación lineal, cuya ecuación homogénea asociada

$$u' + u = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{du}{u} = -dx$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int dx + \ln c$$

$$\ln u = -x + \ln c$$

entonces la solución homogénea es

$$u_h = ce^{-x}.$$

Usando el método de variación de parámetros, c=$c(x)$, obtenemos la solución particular

$$u_p = c(x)e^{-x}$$

derivando

$$u_p = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, no homogénea,

$$u' + u = x + 1$$

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = x + 1$$

$$c'(x)e^{-x} = x + 1$$

entonces

$$c'(x) = (x + 1)e^{x}$$

integrando

$$c(x) = \int (x + 1)e^{x}dx$$

$$c(x) = xe^{x}$$

y sustituyendo en la expresión de la forma de la solución particular

$$u_p = c(x)e^{-x}$$

$$u_p = xe^x e^{-x} = x$$

entonces la solución general

$$u = ce^{-x} + x$$
$$\sin y = ce^{-x} + x.$$

28. Determinar la solución general de la ecuación

$$(\sin y + x\cos y + x)dx + dy = 0$$

Solución: Escribiendo la ecuación diferencial con la notación de Newton

$$y' + \sin y + x\cos y + x = 0$$

$$\frac{y'}{\cos y + 1} + \frac{\sin y}{\cos y + 1} = -x.$$

Haciendo el cambio

$$u = \frac{\sin y}{1 + \cos y} \Rightarrow u' = \frac{\cos y(1 + \cos y) + \sin y \sin y}{(1 + \cos y)^2} y'$$

es decir

$$u' = \frac{y'}{1 + \cos y}$$

en la ecuación diferencial se tiene que

$$u' + u = -x$$

que es una ecuación lineal de primer orden, normalizada, con $p(x) = 1$ y $q(x) = -x$. Usando la fórmula

$$u_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$u_g = e^{-\int dx}\left[-\int xe^{\int dx}dx + c\right]$$

$$u_g = e^{-x}[e^x - xe^x + c]$$

entonces la solución es:

$$u_g = \frac{c}{e^x} - x + 1$$

$$\frac{\sin y}{1+\cos y} = \frac{c}{e^x} - x + 1$$

$$\tan\frac{y}{2} = ce^{-x} - x + 1.$$

29. Hallar la solución de las ecuación diferenciales de la forma

$$(x+1)y' - ny = e^x(1+x)^{n+1}.$$

Solución: Como la ecuación diferencial es lineal de primer orden, buscamos la ecuación homogénea asociada

$$(x+1)y' - ny = 0$$

Separando variables e integrando

$$\frac{dy}{y} = n\frac{dx}{x+1}$$

$$\int\frac{dy}{y} = n\int\frac{dx}{x+1} + \ln c$$

$$\ln y = n\ln(x+1) + \ln c$$

entonces la solución homogénea es

$$y_h = c\,(x+1)^n.$$

Aplicando el método de variacion de parámetro, c=c(x), obtenemos la forma de la solución particular

$$y_p = c(x)(x+1)^n$$

derivando

$$y_p' = c'(x)(x+1)^n + nc(x)(x+1)^{n-1}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, no homogénea,

$$(x+1)y' - ny = e^x(1+x)^{n+1}$$

$$(x+1)(c'(x)(x+1)^n + nc(x)(x+1)^{n-1}) - nc(x)(x+1)^n = e^x(1+x)^{n+1}$$

$$c'(x)(x+1)^{n+1} = e^x(1+x)^{n+1}$$

entonces

$$c'(x) = e^x$$
$$c(x) = e^x$$

sustituyendo en la expresión de la forma de la solución particular

$$y_p = c(x)(x+1)^n$$

$$y_p = e^x(x+1)^n$$

entonces la solución general es

$$y_g = y_h + y_p$$

$$y_g = (x+1)^n(c+e^x).$$

30. Resolver la ecuación integral

$$\int_0^1 \varphi(\alpha x)d\alpha = n\varphi(x).$$

Solución: Si hacemos el cambio

$$u = \alpha x \Rightarrow \ du = xd\alpha$$

y los respectivos límites de integración

$$\text{si } \alpha = 0 \text{ entonces } \quad u = 0$$

$$\text{si } \alpha = 1 \text{ entonces } \quad u = x$$

en la ecuación integral, obtenemos

$$\int_0^x \varphi(u)\frac{du}{x} = n\theta(x)$$

$$\int_0^x \varphi(u)du = nx\theta(x)$$

Derivando

$$\varphi(x) = n\varphi(x) + xn\varphi'(x)$$

$$xn\varphi'(x) - (1-n)\varphi(x) = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{1}{\varphi(x)}d\varphi(x) = \left(\frac{1-n}{n}\right)\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{\varphi(x)}d\varphi(x) = \left(\frac{1-n}{n}\right)\int \frac{1}{x}dx + \ln c$$

$$\ln\varphi(x) = \left(\frac{1-n}{n}\right)\ln x + \ln c$$

entonces

$$\varphi(x) = c\,x^{\frac{1-n}{n}}.$$

31. Encontrar la solución de la ecuación

$$e^{x^2}y' + xe^{x^2}\sin(2y) = x\cos^2 y.$$

Solución: Usando las identidades y reordenando los factores de la ecuación diferencial tenemos

$$\frac{y'}{\cos^2 y} + 2x\frac{\sin y\cos y}{\cos^2 y} = xe^{-x^2}$$

$$(\sec^2 y)y' + 2x\tan y = xe^{-x^2}$$

haciendo el cambio

$$u = \tan y \quad u' = (\sec^2 y)y'$$

en la ecuación diferencial se obtiene

$$u' + 2xu = xe^{-x^2}$$

que es una ecuación lineal de primer orden, con $p(x) = 2x$ y $q(x) = xe^{-x^2}$. Si aplicamos la fórmula

$$u_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$u_g = e^{-\int 2xdx}\left[\int xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx + c\right]$$

$$u_g = e^{-x^2}\left[\int xe^{-x^2}e^{x^2}dx + c\right]$$

luego

$$u_g = e^{-x^2}\left[\frac{1}{2}x^2 + c\right]$$

$$\tan y = \left(2c + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x^2}.$$

32. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{y'}{\cos x} - \frac{2xy}{\cos x} = 1 - 2x\tan x$$

tal que y es una funcion acotada cuando $x \to \infty$.

Solución: Como la ecuación diferencial es lineal de primer orden, buscamos la ecuación homogénea asociada

$$\frac{y'}{\cos x} - \frac{2xy}{\cos x} = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx + \ln c$$

$$\ln y = x^2 + \ln c$$

entonces la solución homogénea es

$$y_h = ce^{x^2}.$$

Usando el método de variación de parámetros, c=c(x), hallamos la forma de la solución particular

$$y_p = c(x)e^{x^2}$$

derivando

$$y_p' = c'(x)e^{x^2} + 2c(x)xe^{x^2}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, no homogénea, se obtiene

$$\frac{c'(x)e^{x^2} + 2c(x)xe^{x^2}}{\cos x} - \frac{2xc(x)e^{x^2}}{\cos x} = 1 - 2x\tan x$$

$$\frac{c'(x)e^{x^2}}{\cos x} = 1 - 2x\tan x$$

$$c'(x) = (1 - 2x\tan x)e^{-x^2}\cos x$$

simplificando

$$c'(x) = \cos x\, e^{-x^2} - 2x(\sin x)\, e^{-x^2}.$$

Como integrando por partes, derivando e^{-x^2},

$$\int \cos x\, e^{-x^2} dx = (\sin x)e^{-x^2} + 2\int \left(x(\sin x)e^{-x^2}\right) dx$$

entonces

$$c(x) = \int \cos x \, e^{-x^2} dx - 2\int x \sin x \, e^{-x^2} dx$$

$$c(x) = (\sin x)e^{-x^2} + 2\int x(\sin x)e^{-x^2}\, dx - 2\int x(\sin x)\, e^{-x^2} dx$$

$$c(x) = (\sin x)e^{-x^2}$$

y la solución general

$$y_g = y_h + y_p$$

$$y_g = ce^{x^2} + (\sin x)e^{-x^2}e^{x^2}$$

$$y_g = ce^{x^2} + \sin x$$

Como la función $\sin x$ es una función acotada,-1 $\leq \sin x \leq 1$, pero ce^{x^2} no es acotada para todo c$\neq$ 0, entonces c=0, por tanto la solución es:

$$y = \sin x.$$

33. Encontrar una función y, acotada cuando $x \to +\infty$, tal que:

$$y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Solución: Como esta es una ecuación diferencial de primer orden, con $p(x) = -\frac{y}{2\sqrt{x}}$ y $q(x) = -\dfrac{\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, entonces la solución general se puede hallar con la fórmula

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx}\left[-\int \frac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}e^{-\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\sqrt{x}}\left[-\int \frac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx + c\right].$$

Para calcular la integral I=$-\int \dfrac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx$ usamos el método de integración por sustitución, hacemos

$$u = \sqrt{x} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

en la integral

$$-\int \frac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}dx = -\int((\cos u)e^{-u} + (\sin u)e^{-u})\,du$$

$$I = -\int \frac{\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}}dx$$

$$= -\int(\cos u)e^{-u}du - \int(\sin u)e^{-u}du$$

ahora integrando por partes

$$I = -e^{-u}\left(\frac{1}{2}\sin u - \frac{1}{2}\cos u\right) - e^{-u}\left(-\frac{1}{2}\sin u - \frac{1}{2}\cos u\right)$$

$$I = (\cos u)e^{-u}$$

Devolviendo el cambio

$$I = (\cos\sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}$$

luego

$$y_g = ce^{\sqrt{x}} + \cos\sqrt{x}$$

como y_g es acotado cuando $x \to \infty$, solo si c=0, entonces la solución es:

$$y = \cos\sqrt{x}.$$

34. Hallar una función y es acotada cuando $x \to \infty$, tal que

$$(\ln 2)(y - 2^{\sin x} + (\cos x)2^{\sin x})dx - dy = 0.$$

Solución: Usando la notación de Newton, obtenemos

$$y' - \ln 2\, y = (\ln 2)(2^{\sin x})(\cos x - 1)$$

que es una ecuación lineal de primer orden. La ecuación homogénea asociada

$$y' - \ln 2\, y = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{dy}{y} = \ln 2dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln 2 \int dx + \ln c$$

$$\ln y = x \ln 2 + \ln c$$

entonces la solución homogénea

$$y_h = c\, 2^x$$

La solución particular la encontramos, usando el método de variación de parámetros, c=c(x). Sabiendo que la forma de la solución particular es

$$y_p = c(x)\, 2^x$$

derivando

$$y_p' = c'(x)2^x + \ln(2)c(x)2^x$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, no homogénea, nos resulta

$$c'(x)2^x + \ln(2)c(x)2^x - \ln 2c(x)\, 2^x = (\ln 2)(2^{\sin x})(\cos x - 1)$$

$$c'(x)2^x = (\ln 2)(2^{\sin x})(\cos x - 1)$$

luego

$$c(x) = \int (\ln 2)(2^{\sin x - x})(\cos x - 1)$$

integrando por sustitución

$$\int (\ln 2)(2^{\sin x - x})(\cos x - 1)dx = \int (\ln 2)2^u du|_{u = \sin x - x} = 2^{\sin x - x}$$

luego

$$c(x) = 2^{\sin x - x}$$

y sustituyendo $c(x)$ en la expresión de la forma de la solución particular, obtenemos

$$y_p = 2^{\sin x - x}\, 2^x = 2^{\sin x}.$$

Por tanto solución general

$$y_g = y_h + y_p$$

$$y_g = c2^x + 2^{\sin x}$$

y la solución y que es acotada cuando $x \to +\infty$, es $y = 2^{\sin x}$.

35. Resolver la ecuación diferencial

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{1}{x^2}\left(x\cos x - \frac{3}{2}\sin x\right)$$

y encuentre una función $y \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

Solución: Como la ecuación diferencial es lineal de primer orden, con $p(x) = -\frac{1}{2x}$ y $q(x) = \frac{1}{x^2}\left(x\cos x - \frac{3}{2}\sin x\right)$, usamos la fórmula para hallar la solución general

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\int \frac{1}{2x}dx}\left[\int \frac{1}{x^2}\left(x\cos x - \frac{3}{2}\sin x\right)e^{-\int \frac{1}{2x}dx}dx + c\right]$$

$$y_g = \sqrt{x}\left[\int \frac{1}{x^2}\left(x\cos x - \frac{3}{2}\sin x\right)\frac{1}{\sqrt{x}}dx + c\right]$$

luego

$$y_g = \sqrt{x}\left[\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cos x dx - \int \frac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}\sin x dx + c\right].$$

Para calcular la integral $\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cos x dx$, usamos el método de integración por partes, derivando $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\cos x dx = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\sin x + \int\left(\frac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}\sin x\right)dx$$

entonces

$$y_g = \sqrt{x}\left[\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\sin x + \int \frac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}\sin x dx - \int \frac{3}{2x^{\frac{5}{2}}}\sin x dx + c\right]$$

$$y_g = \sqrt{x}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\sin x + c\sqrt{x}$$

por lo que la solución general es

$$y_g = c\sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}.$$

Como $y \to 0$, cuando $x \to \infty$, entonces c=0, entonces

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

36. Determinar una solución de la ecuación diferencial

$$y' - y\cot x = \frac{-\sin x}{x^2}$$

tal que $y \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Solución: Como es una ecuacion diferencial lineal de primer orden, buscamos la ecuación homogénea

$$y' - y\cot x = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{dy}{y} = \cot x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cot x dx + \ln c$$

$$\ln y = \ln(\sin x) + \ln c$$

entonces la solución homogénea es:

$$y_h = c(\sin x).$$

Aplicando el método de variación de parametros, $c=c(x)$, obtenemos la forma de la solución particular

$$y_p = c(x)(\sin x)$$

derivando

$$y_p' = c'(x)(\sin x) + c(x)\cos x$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, no homogénea,

$$y' - y\cot x = \frac{-\sin x}{x^2}$$

$$c'(x)(\sin x) + c(x)\cos x - \cot x\, c(x)(\sin x) = \frac{-\sin x}{x^2}$$

$$c'(x)(\sin x) = \frac{-\sin x}{x^2}$$

luego

$$c'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$c(x) = \frac{1}{x}$$

sustituyendo $c(x)$ en la expresión de la forma de la solución particular

$$y_p = \frac{\sin x}{x}$$

por lo que la solución general es

$$y_g = y_h + y_p$$

$$y_g = c\sin x + \frac{\sin x}{x}.$$

Como $y \to 0$ cuando $x \to +\infty$, entonces c=0, por tanto la solución es:

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

37. Encontrar una solución a la ecuación

$$(\ln(1+x^2))y' - 2\frac{xy}{1+x^2} = \frac{\ln(1+x^2) - 2x\arctan x}{1+x^2}$$

que satisface la condición: $y \to -\frac{\pi}{2}$ cuando $x \to -\infty$.

Solución:Normalizando la ecuacion diferencial lineal de primer orden

$$y' - \frac{2xy}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{2x\arctan x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}$$

tenemos que

$$p(x) = -\frac{2xy}{(1+x^2)\ln(1+x^2)} \quad y \quad q(x) = \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{2x\arctan x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}.$$

Usando la fórmula

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\int \frac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}dx}\left[\int \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{2x\arctan x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}e^{-\int \frac{2x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\ln(\ln(x^2+1))}\left[\int \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{2x\arctan x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}e^{-\ln(\ln(x^2+1))}dx + c\right]$$

luego

$$y_g = \ln(x^2+1)\left[\int\left(\frac{1}{(1+x^2)} - \frac{2x\arctan x}{(1+x^2)\ln(1+x^2)}\right)\frac{1}{\ln(x^2+1)}dx + c\right]$$

$$y_g = \ln(x^2+1)\left[\int \frac{dx}{(x^2+1)\ln(x^2+1)} - 2\int \frac{x\arctan x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)}dx + c\right].$$

integrando por partes, derivando $\ln^{-1}(x^2+1)$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\ln(x^2+1)} = \frac{1}{\ln(x^2+1)}\arctan x + 2\int \frac{x\arctan x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)}dx$$

entonces

$$y_g = \ln(x^2+1)(\frac{1}{\ln(x^2+1)}\arctan x + 2\int \frac{x\arctan x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)}dx +$$
$$- 2\int \frac{x\arctan x}{(x^2+1)\ln^2(x^2+1)}dx + c)$$

$$y_g = \ln(x^2+1)\left[\frac{1}{\ln(x^2+1)}\arctan x + c\right] = c\ln(x^2+1) + \arctan x$$

luego la solución general es:

$$y_g = c\ln(x^2+1) + \arctan x$$

Como $y \to -\frac{\pi}{2}$ cuando $x \to -\infty$, tenemos que

$$-\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to-\infty} c\ln(x^2+1) + \lim_{x\to-\infty} \arctan x$$

$$c = 0.$$

Por lo tanto

$$y = \arctan x$$

38. Resolver la ecuación diferencial

$$x^2y' - x^2e^xy = \sin(\tfrac{1}{x}) - x^2e^x\cos\tfrac{1}{x}$$

sabiendo que $y \to 2$ cuando $x \to -\infty$.

Solución: Como la ecuación es lineal de primer orden, buacamos la ecuación homogénea asociada

$$x^2y' - x^2e^xy = 0$$

separando variables e integrando

$$\frac{dy}{y} = e^xdx$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int e^xdx + \ln c$$

$$\ln y = e^x + \ln c$$

obtenemos la solución homogénea

$$y_h = ce^{e^x}.$$

Aplicando variacion de parametro, c=c(x), tenemos la forma de la solución particular

$$y_p = c(x)e^{e^x}$$

derivando

$$y_p' = c'(x)e^{e^x} + c(x)e^{e^x+x}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, no homogénea,

$$x^2(c'(x)e^{e^x} + c(x)e^{e^x+x}) - x^2e^xc(x)e^{e^x} = \sin(\tfrac{1}{x}) - x^2e^x\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$x^2c'(x)e^{e^x} = \sin(\tfrac{1}{x}) - x^2e^x\cos\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

$$c'(x) = \frac{\sin(\frac{1}{x}) - x^2e^x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2e^{e^x}}$$

entonces

$$c'(x) = \frac{e^{-e^x}}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - e^xe^{-e^x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

para calcular la integral $I = \int\left(\frac{e^{-e^x}}{x^2}\sin(\frac{1}{x}) - e^xe^{-e^x}\cos(\frac{1}{x})\right)dx$ hacemos

$$u = \tfrac{1}{x} \Rightarrow du = \tfrac{-1}{x^2}dx$$

$$I = \int\left(\frac{1}{u^2}(\cos u)e^{\frac{1}{u}}e^{-e^{\frac{1}{u}}} - e^{-e^{\frac{1}{u}}}\sin u\right)du = (\cos u)e^{-e^{\frac{1}{u}}}$$

y como integrando por partes

$$\int\left(\frac{1}{u^2}(\cos u)e^{\frac{1}{u}}e^{-e^{\frac{1}{u}}}\right)du = (\cos u)e^{-e^{\frac{1}{u}}} - \int\left(-(\sin u)e^{-e^{\frac{1}{u}}}\right)du$$

entonces

$$I = (\cos u)e^{-e^{\frac{1}{u}}} + \int\left((\sin u)e^{-e^{\frac{1}{u}}}\right)du - \int\left((\sin u)e^{-e^{\frac{1}{u}}}\right)du$$

$$I = (\cos u)e^{-e^{\frac{1}{u}}}$$

devolviendo el cambio

$$I = \left(\cos\frac{1}{x}\right)e^{-e^x}$$

entonces $c(x) = (\cos\frac{1}{x})e^{-e^x}$ y la solución particular

$$y_p = c(x)e^{e^x}$$

$$y_p = \left(\cos\frac{1}{x}\right)e^{-e^x}e^{e^x}$$

$$y_p = \cos\frac{1}{x}.$$

La solución general

$$y_g = ce^{e^x} + \cos\frac{1}{x}$$

pero como $y \to 2$ cuando $x \to -\infty$, entonces

$$2 = c + \cos 0$$

$$c = 1$$

y la solución es:

$$y = e^{e^x} + \cos(\tfrac{1}{x}).$$

39. Encontrar la solución a la ecuación

$$x^x y' - yx^x \ln x = -(1 + 2\ln x)$$

que verifique la condición: $y \to 0$ cuando $x \to \infty$.

Solución: Normalizando la ecuación

$$y' - y\ln x = -x^{-x}(1 + 2\ln x)$$

resulta una ecuación lineal de primer orden, con $p(x) = -\ln x$ y $q(x) = -x^{-x}(1 + 2\ln x)$. Usando la fórmula

$$y_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{\int \ln x dx}\left[-\int x^{-x}(1+2\ln x)e^{-\int \ln x dx}dx + c\right]$$

$$y_g = e^{x\ln x - x}\left[-\int e^{-x\ln x}(1+2\ln x)e^{x-x\ln x}dx + c\right].$$

Para calcular la integral, hacemos el cambio

$$u = x - 2x\ln x \quad du = -(2\ln x + 1)dx$$

en

$$-\int e^{-x\ln x}(1+2\ln x)e^{x-x\ln x}dx = \int (e^{u})\, du|_{u=x-2x\ln x} = e^{x-2x\ln x}$$

luego

$$y_g = e^{x\ln x - x}(e^{x-2x\ln x} + c)$$

$$y_g = ce^{x\ln x - x} + \frac{1}{x^x}.$$

Como $y \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces $c = 0$ y la solución es:

$$y = x^{-x}.$$

40. Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$$

Solución: Como la ecuación diferencial es de Riccati y una solución de la ecuación es $y_0(x) = x$, entonces el cambio

$$y = y_0 + z \Rightarrow \ y = x + z \Rightarrow \ y' = 1 + z'$$

transforma la ecuación diferencial en

$$1 + z' = \frac{x+z}{x} + x^3(x+z)^2 - x^5$$

$$1 + z' = \frac{1}{x}z + 1 + x^5 + 2x^4z + x^3z^2 - x^5$$

$$z' = x^{-1}(2x^5 + 1)z + x^3z^2$$

una ecuación de Bernoulli

$$z' - \left(\frac{2x^5+1}{x}\right)z = x^3z^2$$

$$-\frac{z'}{z^2} + \left(\frac{2x^5+1}{x}\right)\frac{1}{z} = -x^3$$

que haciendole el cambio

$$u = \frac{1}{z} \quad u' = \frac{-1}{z^2}z'$$

se obtiene

$$u' + \left(\frac{2x^5+1}{x}\right)u = -x^3$$

que es una ecuación lineal de primer orden, con $p(x) = \frac{2x^5+1}{x}$ y $q(x) = -x^3$. Si usamos la fórmula

$$u_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$u_g = e^{-\int \frac{2x^5+1}{x}dx}\left[-\int x^3e^{\int \frac{2x^5+1}{x}dx}dx + c\right]$$

$$u_g = e^{-\int\left(\frac{1}{x}+2x^4\right)dx}\left[-\int x^3e^{\int\left(\frac{1}{x}+2x^4\right)dx}dx + c\right]$$

integrando

$$u_g = e^{-\ln x-\frac{2}{5}x^5}\left[-\int x^3e^{\ln x+\frac{2}{5}x^5}dx + c\right]$$

$$u_g = \frac{1}{x}e^{-\frac{2}{5}x^5}\left[-\int x^3xe^{\frac{2}{5}x^5}dx + c\right]$$

$$u_g = \frac{c}{x}e^{-\frac{2}{5}x^5} - \frac{1}{2x}$$

devolviendo los cambios

$$\frac{1}{z} = \frac{c}{x}e^{-\frac{2}{5}x^5} - \frac{1}{2x}$$

entonces la solución es

$$\frac{1}{y-x} = \frac{c}{x}e^{-\frac{2}{5}x^5} - \frac{1}{2x}.$$

41. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x.$$

Solución: Obviamente es una ecuación diferencial de Riccati y $y_0 = 1$ es una solución, por lo que el cambio

$$y = y_0 + \tfrac{1}{z} \Rightarrow \ y = 1 + \tfrac{1}{z} \Rightarrow \ y' = \tfrac{-1}{z^2}z'$$

la transforma en una ecuación lineal. Sustituyendo y simplificando

$$\frac{-1}{z^2}z' = (1-x)(1+\tfrac{1}{z})^2 + (2x-1)(1+\tfrac{1}{z}) - x$$

$$\frac{-1}{z^2}z' = \left(\frac{2}{z} - x + \frac{1}{z^2} - 2\frac{x}{z} - \frac{x}{z^2} + 1\right) + \left(2x - \frac{1}{z} + 2\frac{x}{z} - 1\right) - x$$

$$\frac{-1}{z^2}z' = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{x}{z^2}$$

entonces

$$z' + z = x - 1$$

que es una ecuación lineal con $p(x) = 1$ y $q(x) = x - 1$. Usando la fórmula

$$z_g = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right]$$

$$z_g = e^{-x}\left[\int (x-1)e^x dx + c\right]$$

$$z_g = e^{-x}(xe^x - 2e^x + c)$$

devolviendo el cambio

$$\frac{1}{y-1} = \frac{c}{e^x} + x - 2.$$

42. Encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - 8x^3 - 4x^2 + 1$$

sabiendo que posee una solución que es un polinomio.

Solución: Como es una ecuación de Riccati y una solución de la ecuación diferencial es un polinomio

$$y = ax + b$$

derivando

$$y' = a$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$a = -8x(ax+b)^2 + 4x(4x+1)(ax+b) - 8x^3 - 4x^2 + 1$$

$$0 = x(4b - 8b^2) + x^3(16a - 8a^2 - 8) + x^2(4a + 16b - 16ab - 4) + 1 - a$$

igualando polinomios, se tiene

$$a = 1 \quad b = 0$$

por tanto $y_0 = x$. Haciendo el cambio

$$y = y_0 + \tfrac{1}{z} \Rightarrow \; y = x + \tfrac{1}{z} \Rightarrow \; y' = 1 - \tfrac{1}{z^2}z'$$

en la ecuación diferencial, la convierte en la ecuación lineal

$$1 - \frac{1}{z^2}z' = -8x\left(x + \frac{1}{z}\right)^2 + 4x(4x+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) - 8x^3 - 4x^2 + 1$$

$$1 - \frac{1}{z^2}z' = -8x^3 - 8\frac{x}{z^2} - 16\frac{x^2}{z} + 4x^2 + 16x^3 + 4\frac{x}{z} + 16\frac{x^2}{z} - 8x^3 - 4x^2 + 1$$

$$1 - \frac{1}{z^2}z' = 4\frac{x}{z} - 8\frac{x}{z^2} + 1$$

entonces se tiene

$$z' + 4xz = 8x$$

que también es una ecuación de variables separables. Separando variables

$$z' = (-4)x(z-2)$$

$$\frac{dz}{z-2} = -4xdx$$

integrando

$$\int \frac{dz}{z-2} = -4\int xdx + \ln c$$

$$\ln(z-2) = -2x^2 + \ln c$$

$$z - 2 = ce^{-2x^2}$$

devolviendo el cambio

$$\frac{1}{y-x} - 2 = ce^{-2x^2}.$$

43. Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$y' - y^2 + 2ty = t^2$$

sabiendo que posee una solución que es un polinomio.

Solución: Como es una ecuación de Riccati y una solución de la ecuación diferencial es un polinomio

$$y = at + b$$

derivando

$$y' = a$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$a - (at+b)^2 + 2t(at+b) = t^2$$

$$a - 2abt - b^2 - a^2t^2 + 2bt + 2at^2 = t^2$$

$$a - b^2 - 2b(a-1)t - (a-1)^2t^2 = 0$$

igualando polinomios

$$a = 1 \quad b = 1$$

ó

$$a = 1 \quad b = -1$$

entonces $y_0 = t + 1$ es una solución de la ecuación diferencial. Haciendo el cambio

$$y = y_0 + \tfrac{1}{z} \Rightarrow y = t + 1 + \tfrac{1}{z} \Rightarrow y' = 1 - \tfrac{1}{z^2}z'$$

convierte la ecuación en una lineal

$$1-\frac{1}{z^2}z'-\left(t+1+\frac{1}{z}\right)^2+2t\left(t+1+\frac{1}{z}\right)=t^2$$

$$t^2-\frac{2}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2}z'=t^2$$

$$z'+2z=1$$

que tambíen es una ecuación de variables separables, entonces

$$\frac{dz}{1-2z}=dx$$

$$\int\frac{dz}{1-2z}=\int dx+\ln c$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(z-\frac{1}{2}\right)=x+\ln c$$

por tanto

$$\frac{2}{2z-1}=ce^{2x}$$

despejando y devolviendo los cambios

$$\frac{2}{ce^{2x}}+1=2z$$

$$\frac{2}{ce^{2x}}+1=\frac{2}{y-t-1}.$$

Problemas Propuestos

Resuelva las siguiente ecuaciones diferenciales

1. $(x^3+x)dy+\left(y-x(x^2+1)^2\right)dx=0.$
2. $\frac{dr}{d\varphi}=\varphi-\frac{r}{3\varphi}.$
3. $y^3dx=x(x^2+y^2)dy.$
4. $z'-\frac{2z}{3x}=\frac{1}{3}\frac{x^2}{z^2}.$

5. $dT = \dfrac{\cos t(\sin t - T^2)}{T\sin t}dt.$

6. $(x+3)^2\dfrac{dy}{dx} = 5 - 4y - 8xy.$

7. $z' = \dfrac{2z}{t+1} + (t+1)^3.$

8. $\cos^2 y\ \sin y\,dx + (2x\cos^3 y - 1)dy = 0.$

9. $x^2 dy' - (xy + x + 1)dx = 0.$

10. $y' - y = \dfrac{1 - e^{-2t}}{e^t + e^{-t}}.$

11. $y' - \dfrac{yx^2}{x^2} = \dfrac{2e^{x^2}}{x}.$

12. $y' = \dfrac{1 - y\sin x}{\cos x}.$

13. $y' - y = xe^x y^2.$

14. $\left(\dfrac{u}{x+1} + \dfrac{(x+1)^3 u^3}{2}\right)dx + du = 0.$

15. $y' = \dfrac{1}{x^2}y + \dfrac{1}{x^3}y^4.$

16. $xyy' = 1 - x^2y^3y'.$

17. $u' = \sec^2 t - (\tan t)u + u^2$; si una solución es $y_1 = \tan x$.

18. $y' - (16x^2 + 4x)y + 8xy^2 + 4x^2(2x+1) - 1 = 0$

Sabiendo que posee una solución polinomica.

19. $y' = \dfrac{y}{\cos x} + \dfrac{y^2}{\cos x}\sin x.$

20. $\dfrac{di}{dt} = t^3 + \dfrac{2}{t}i - \frac{1}{t}i^2$

Sabiendo que posee una solución polinomica.

21. $y' = \dfrac{y}{x+1} + \dfrac{xe^x}{x+1}y^3.$

22. $(2\tan x\sec x - y^2\sin x)dx - dy = 0$

Sabiendo que $y = \sec x$ es una de las soluciones.

23. $y' = \dfrac{1 - \cos y + e^x(1 - 2\cos y + \cos^2 y)x}{\sin y}.$

$\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + e^{-2x}C\right)(1 - \cos y)e^x = 1$

24. $(\sin x\cos x)y' - (\cos x\sin^3 x)y^2 + y + \sin x\cos^3 x = 0$

si una solución es $y_1 = \cot x$.

25. $(e^{2y} + (1 + 2e^y)x + x^2)y' = 1$ si una solución es $y_1 = -e^x$.

26. $u' + u^2 - 2u + 1 = 0.$

27. $(\cos u - 1)u' = \dfrac{1 - \sin^3 u + 3u\sin^2 u - 3u^2 \sin u + u^3}{(-\sin u + u)^2 x}.$

28. $[y(y(-1 + x) + 2x - 1) + x]dx + dy = 0$ si una solución es $y_1 = 1$.

29. $e^u u' - \dfrac{e^u}{x+1} = \dfrac{xe^x}{x+1}e^{3u}.$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 - 3\sin^2 x + y^2}{2\cos x}$ si una solución es $y_1 = \sin x$.

Soluciones de los Problemas Propuestos.

Se presentan las respuestas de los ejercicios identificados con números impares.

Capítulo I

1. $y^2(x) = e^x + C.$
2.
3. $y(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$
4.
5. $z(r) = \tan\left(\frac{1}{3}r^3 + C\right).$
6.
7. $R(Q) = C_1 \exp(-\cos Q + \sin Q).$
8.
9. $y^2(x) = -x^2 + 5.$
10.
11. $y^2 + 1 = \dfrac{c}{(\sin^2 x + 2)^3}.$
12.
13. $y^2(x) = -1 + e^{\frac{1}{4}(x^2-1)}.$
14.
15. $e^{\frac{1}{3}t^3 - 2t} = s.$
16.
17. $(x+1)^3 = \frac{1}{y}7^4.$
18.
19. $y(x) = \dfrac{-3\sqrt{\cot^2 x + 1} + C(\cot x)}{\sqrt{\cot^2 x + 1}}.$
20.
21. $\cos y = \frac{1}{\cos x}.$
22.
23. $e^x = -e^{-t+1} + 1.$
24.

25. $y(x) = xe^x - e^x + C.$

26.

27. $y^2 = x^2 - 2x + C.$

28.

29. $-\dfrac{\cos y}{\sin y} = -\dfrac{1}{\cos x}\sin x.$

30.

31. $y(x) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{2}{3}\right)x}.$

32.

33. $y^2 + 3 = \dfrac{63}{(x^2+2)^2}.$

34.

35. $-\frac{1}{50}\dfrac{5y^2+1}{e^{5y^2}} = \frac{1}{18}e^{3x^2}(3x^2 - 1).$

36.

37. $(y/x)^2 = \frac{1}{2} - x^2 + 4C.$

38.

39. $xy = \arccos\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right).$

Capítulo II

1. $y(x) = \frac{1}{4}(\ln^2 x)x - \frac{1}{2}C(\ln x)x + \frac{1}{4}C^2 x.$

2.

3. $y(x) = -(\ln(-\ln x + C))x.$

4.

5. $y(x) = (\ln x)x + Cx.$

6.

7. $y(x) = -2x + \sqrt{3x^2 + e^{2C}}, y(x) = -2x - \sqrt{3x^2 + e^{2C}}.$

8.

9. $y^3(x) = (3\ln x + C)x^3.$

10.

11. $y(x) = \dfrac{x}{-\ln x + C}.$

12.

13. $y(x) = (\arctan(\ln x - C))x.$

14.

15. $y^2 = x^2 + Cx.$

16.

17. $y(x) = \dfrac{x}{-\ln x + C}.$

18.

19. $y(x) = \frac{1}{2x}\left(x^2 + \sqrt{x^4 + 4xe^{3C}}\right), y(x) = \frac{1}{2x}\left(x^2 - \sqrt{x^4 + 4xe^{3C}}\right).$

20.

21. $4y^2(x) = 2x^2 + 4x^{\frac{2}{3}}C.$

22.

23. $\dfrac{\sqrt{(\frac{y}{x} - 1)(\frac{y}{x} - 3)}}{(\frac{y}{x} - 2)^6}\left(\dfrac{y}{x} - 3\right)^4 = cx.$

24.

25. $e^{\frac{x}{2y}}\sqrt{\dfrac{y}{x} - 1}\sqrt{\frac{y}{x} + 1} = \frac{1}{x}c.$

26.

27. $\dfrac{1}{e^{x+y}(x + y - 3)^3} = ce^x.$

28.

29. $x + y = -2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}C_1x + \frac{1}{4}C_1^2.$

30.

31. $y = x + \ln\left(-\frac{2}{e^{2x-2C}-1}\right).$

32.

33. $x + \frac{2}{9}\ln(-4 + 9(2x + 3y)) - \frac{2}{3}(2x + 3y)^{1/2} + \frac{4}{9}\operatorname{arctanh}\left(\frac{3}{2}(2x + 3y)^{1/2}\right) + C = 0.$

34.

35. $y(x) = -\dfrac{\ln(-x - C)}{x}.$

36.

37. $x + y = e^{e^{x+C}}.$

38.

39. $y + 2 = -(x - 3) + \sqrt{2(x - 3)^2 + e^{2C}}, y + 2 = -x - \sqrt{2(x - 3)^2 + e^{2C}}.$

40.

41. $-\frac{1}{2}\ln\dfrac{(2y - 1)^2 + (-2x(y) - 1)^2}{(2y - 1)^2} - \arctan\dfrac{-2x(y) - 1}{2y - 1} - \ln(2y - 1) - C = 0.$

42.

43. $-\frac{1}{2}\ln\left(-2+7((y-2)/(x-1))+((y-2)/(x-1))^2\right)+$
$+\frac{1}{57}\sqrt{57}\,\operatorname{arctanh}\frac{1}{57}(7+2((y-2)/(x-1)))\sqrt{57} = \ln(x-1)+\ln c.$

44.

45. $yx^{3/2} = x^2\ln x + x^2 C.$

46.

47. $x+y-3\ln(x+y+2)+x = C.$

48.

49. $x = \frac{C_1}{y}x\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{(x^2)}}\operatorname{arctanh}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2)}\sqrt{(x^2-y^2(x))}}\right).$

50.

51. $-\ln\left(\frac{y+1}{x-2}-1\right)+\ln\left(\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2-6\frac{y+1}{x-2}+1\right)-$
$\sqrt{2}\,\operatorname{arctanh}\frac{1}{8}\left(2\frac{y+1}{x-2}-6\right)\sqrt{2} = -\ln(x-2)+\ln c.$

Capítulo III

1. $y^2 = 2C - \frac{3}{4}x^2.$

2.

3. $(y+x)^2 = 2x^2 - 2C.$

4.

5. $(y+\sin x)^2 = x^2 - 2C + \sin^2 x.$

6.

7. $\frac{1}{3}x^3 + y(x)\ln x + y^2(x) = C.$

8.

9. $y^2(x) = -\frac{x^3-C}{x^2}.$

10.

11. $\sin x - \frac{x}{y(x)} + y(x) = C.$

12.

13. $x\sin(y(x)) + \frac{1}{2}\sin(y(x))\cos(y(x)) - \frac{1}{2}y(x) = C.$

14.

15. $y(x) = \frac{1}{6}\frac{x^6+6C}{x^4}$.

16.

17. $T(t) = \frac{1}{\sqrt{(t^2+1)}}\left(\sqrt{(t^2+1)}+C\right)$.

18.

19. $xy(x) - x^2 - y^2(x) = C$.

20.

21. $\sin y = x - \frac{C}{x}$.

22.

23. $y(x) = \frac{1}{x^2+1}C$.

24.

25. $y^2(x) = \frac{1}{x^2}(-x^4 + C)$.

26.

27. $y(x) = \frac{1}{\cos^2 x}(3\sin x + C)$.

28.

29. $\sin t \sin y = C$.

30.

31. $x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = C$.

32.

33. $y = x\tan(C - x)$.

34.

35. $y^5 \sin x + y^4 = C$.

Capítulo IV

1. $y = \frac{C}{x}\sqrt{x^2+1} + \frac{(1+x^2)^2}{3x}$.

2.

3. $y = Ce^{-1/2(y/x)^2}$.

4.

5. $T^2 = 2/3\ \sin t + C/\sin^2 t$.

6.

7. $z = \frac{1}{2}(t+1)^2(t^2+2t+2C)$.

8.

9. $y(x) = \frac{1}{2}\frac{-2x-1+2Cx^2}{x}$.

10.

11. $y(x) = 2e^x \int \frac{1}{x}e^{x(x-1)}\,dx + Ce^x$.

12.

13. $\frac{1}{y(x)} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + e^{-2x}C_1\right)e^x$.

14.

15. $\frac{1}{y^3} = \frac{-1-\frac{1}{3}x+e^{\frac{3}{x}}Cx}{x}$.

16.

17. $\frac{1}{y-\tan t} = -\cos t \ln\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\right) + C(\cos t)$.

18.

19. $\frac{1}{y(x)} = \frac{-1-\sin x+(\cos x)x+C(\cos x)}{1+\sin x}$.

20.

21. $\frac{1}{y^2(x)} = \frac{2e^x x-2e^x-2e^x x^2+C}{x^2+2x+1}$.

22.

23. $\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+e^{-2x}C\right)(1-\cos y)e^x = 1$.

24.

25. $\frac{1}{x+e^y} = -1 + Ce^{-y}$.

26.

27. $(\cos u - 1)^3 = 1 + cx^{-3}$.

28.

29. $x^2+2x+1 = (\ln y)^2(-2e^x(x^2-x+1)+C)$.

BIBLIOGRAFÍA

Murria Spiegel: Ecuaciones Diferenciales Aplicadas. Mexico. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1983.

Sylvia Novo Rafael Obaya , Jesús Rojo: Ecuaciones y Sistemas Diferenciales. España. McGraw-Hill 1995.

Dennis G. Zill: Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. EE.UU. Editorial Iberomaméricana. 1982

C.H. Eduardo,Jr , David Penney: Ecuaciones Diferenciales Elementales. Mexico. Prentice-Hall. 1997.

Stephen Campbell , Richard Haberman: Introducción a las ecuaciones Diferenciales. Mexico. McGraw-Hill 1998.

Kiseliov, Krasnov, Makarenko: Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Moscú. Editorial MIR. 1979.

Glenn Ledder: Ecuaciones Diferenciales un Enfoque de Modelado. Mexico. McGraw-Hill 2006.