UNIVERSIDAD CATOLICA ANDRES BELLO

Facultad de Ingeniería

Escuela de Ingeniería Informática

GUÍA TEÓRICA PARA LA CÁTEDRA DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES DE LA ESCUELA DE INFORMÁTICA, DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, DE LA UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

TRABAJO DE ASCENSO

presentado ante la

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

como parte de los requisitos para optar al escalafón de

ASISTENTE

REALIZADO POR: Ing. Simy Blomer
FECHA: 13 de Febrero del 2006

Tabla de Contenido

1. Prólogo

Una de las materias que más he disfrutado su estudio es Investigación de Operaciones. Y más aun, estoy encantada dictando la materia en la Universidad Católica Andrés Bello. Por eso he escogido este tema para desarrollar mi primer trabajo de ascenso.

El objetivo de esta guía teórica es darle al estudiante, que cursa la materia de Investigación de Operaciones en la UCAB, en la carrera de Ingeniería de Informática, material sintetizado de cada uno de los tópicos tratados en esta materia, con algoritmos para la resolución de problemas, explicación y deducción de fórmulas, y ejemplos que ilustren la resolución de los problemas.

En la carrera de Ingeniería Informática de la Universidad Católica Andrés Bello se ve una única materia llamada Investigación de Operaciones. Dado todos los temas que esta materia podría abarcar y lo amplio de cada uno de ellos, se diseñó un contenido que presente al estudiante una visión general de los temas más importantes, como son Simulación, Teoría de Colas, Optimización en Redes y Modelos de Inventario; y que, por último, explique, más profundamente, la Programación Lineal.

En este último tópico, Programación Lineal, se enseña los diferentes métodos de resolución, como son, la resolución gráfica y el método algebraico Simplex. Para el Método Simplex se presenta, también, el método de las Dos Fases y el método de la M. Luego se expone el análisis de la Dualidad, incluyendo el método Dual Simplex. Como conclusión de este tema se realiza todas las posibles sensibilidades a este tipo de problemas, incluyendo el análisis requerido para tomar decisiones. Por último, se muestra un caso particular de la Programación Lineal, Modelo de Transporte.

2. Introducción

2.1. Origen:

La Investigación de Operaciones se inició en la época de la Segunda Guerra Mundial, cuando se solicitó el estudio del a utilización óptima de materiales bélicos. Hoy en día es utilizada en la gran mayoría de las áreas, ayudando en la toma de decisiones.

2.2. Metodología:

Los pasos a seguir para resolver un problema con Investigación de Operaciones es muy similar al estudiado en el colegio, el método científico. Inicialmente, necesitamos observar y analizar el problema. Luego se utiliza un modelo matemático para simular el comportamiento del sistema que se está estudiando. Una vez comprobado que el modelo se comporta similar a la situación real se busca la o las soluciones óptimas. Y por último, se puede sensibilizar el problema, buscando las diferentes alternativas y sus soluciones óptimas.

2.3. Temario:

Los tópicos a revisar en esta guía son los siguientes

2.3.1. Teoría de Colas: Los modelos de colas o líneas de espera estudia el comportamiento de las líneas de espera. Identifica ¿cuánto tiempo debe se esperar por un servicio o recurso?

2.3.2. Optimización en Redes: Aunque en esta área hay diferentes problemas a estudiar, aquí solo vamos a revisar la problemática del Control de Proyectos, utilizando las metodologías de Pert y CPM. Cuando uno busca controlar un proyecto tiene como objetivo minimizar los retrasos, optimizando los recursos a asignar a cada actividad.

2.3.3. Modelos de Inventarios: Podemos encontrarnos diferente modelos que estudian la teoría de inventarios. Pero solo vamos a revisar el modelo clásico de cantidad económica de pedido, para darle una base al estudiante y pueda entender el desarrollo de los demás modelos.

2.3.4. Programación Lineal: Al igual que los modelos mencionados, con programación lineal se genera un modelos, con objetivos y restricciones, pero estrictamente lineales. Vamos a darnos cuenta que uno puede aplicar este modelos a diversas situaciones como transporte, industria, agricultura, trabajos, etc.

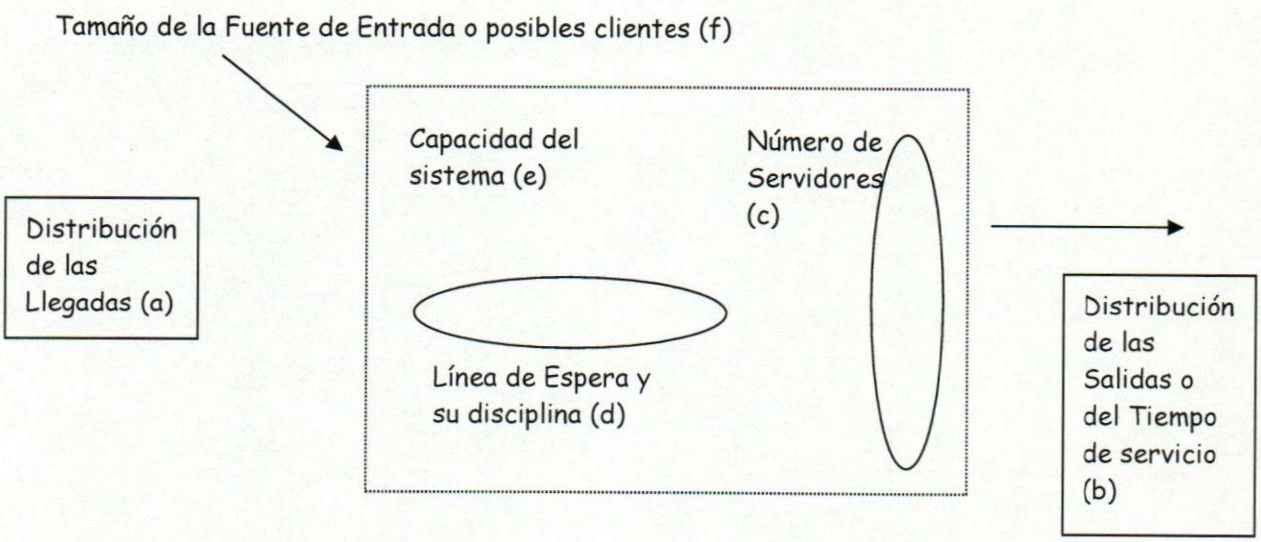
3. Teoría de Colas

3.1. Introducción:

Es común que en cualquier actividad cotidiana se presenten líneas de espera o colas. Por ejemplo: cajeros bancarios, estaciones de gasolina, peajes, servicio de fotocopiados, los trabajos en el computador esperando por CPU, por impresión, etc., restaurantes de comida rápida, etc. Para cada uno de estos sistemas es importante lograr un balance económico entre el costo de servicio y el costo asociado con la espera por ese servicio. Vamos a identificar diferentes elementos que participan en un sistema de colas y que dependiendo de sus valores se generan diferentes modelos matemáticos. Dentro de un sistema de 'Líneas de Espera' lo más difícil de predecir es cuándo llega un cliente y cuándo sale, por lo tanto se van a determinar según un patrón estadístico, entonces, vamos a llamar λ al número promedio de clientes que llegan al sistema por unidad de tiempo y μ al número promedio de clientes que salen del sistema por unidad de tiempo. Por ejemplo, uno podría decir algo como lo siguiente: 'Al centro de copiado llegan, en promedio, 2 personas por minuto, solicitando una copia; y tomando en cuenta las diversidad de trabajos que solicitan, el centro de copiado atiende 4 clientes por minutos, porque cuenta con 3 operadores.' En este ejemplo, λ vale 2 personas por minuto y μ equivale a 4 personas por minuto, y en el sistema hay 3 servidores trabajando de forma paralela.

3.2. Elementos Básicos:

Un Sistema de Línea de Espera se puede identificar los siguientes elementos:



a: Distribución de las Llegadas: patrón estadístico mediante el cual se genera la llegada de los clientes a través del tiempo. Vamos a estudiar los modelos donde la función de distribución de llegadas sea POISSON, con media 'λ'. Por lo tanto, el tiempo entre llegadas tiene una distribución Exponencial con media '$1/\lambda$'. Donde λ es el número de clientes que llegan por unidad de tiempo.

b: Distribución de las Salidas o del tiempo de servicio: patrón estadístico mediante el cual se genera la salida de los clientes a través del tiempo. Vamos a estudiar los modelos donde la la función de distribución de salidas sea POISSON, con media 'μ'. Por lo tanto, el tiempo de servicio tiene una distribución Exponencial con media '$1/\mu$'. Donde μ es el número de clientes que salen por unidad de tiempo.
c: Número de Servidores: pueden estar en paralelos o en serie y pueden ser uno o varios. En los modelos que vamos a estudiar manejaremos uno o varios servidores en paralelo.
d: Disciplina de la Línea de Espera: es decir, el orden en que se escoge el siguiente cliente a ser atendido; puede manejarse según las disciplinas: FIFO (first in first out) o PEPS (primero que entra primero que sale), LIFO (last in first out) o UEPS (último que entra primero que sale), aleatoria, por prioridades, etc. En los modelos que vamos a estudiar solo trabajaremos con la disciplina FIFO o PEPS.
e: Capacidad del sistema: Cantidad máxima de clientes admisible dentro del sistema, tomando en cuenta los que se encuentran en la cola y en servicio. Puede ser finito o infinito.
f: Tamaño de la Fuente de entrada: Se refiere a la cantidad de personas o entes que podrían ser clientes del sistema. Puede ser finita o infinita, pero vamos a estudiar sólo los modelos con una fuente potencial infinita.

Vamos a identificar cada uno de los elementos mencionados anteriormente en el caso de la 'inscripción en la universidad':
Distribución de las llegadas (a): se refiere a cuántas planillas por hora llegan a la Escuela para ser procesada como inscripción de un estudiante
Distribución de las salidas (b): se refiere a cuántas planillas de inscripción por hora puede procesar la Escuela de forma efectiva.
Número de servidores (c): se refiere al número de personas que están, al mismo tiempo (paralelamente) procesando las inscripciones
Disciplina de la línea de espera (d): lo más probable es que las inscripciones se almacenen en una cola y se tome de primero la más vieja, por lo que la disciplina será FIFO.
Capacidad del sistema (e): Cada Escuela maneja un número máximo de estudiantes que puede manejar sin desmejorar la educación, por ejemplo, 1200 ó 1500.
Tamaño de la fuente de entrada (f): Son todo los estudiantes que se reinscriben y todo joven que tenga aprobado el quinto año de bachillerato, prácticamente es una cantidad infinita.

3.3. Comportamiento de las variables aleatorias de un Sistema de Colas:

En cualquier sistema de colas es usual que las llegadas y salidas de clientes se comporten de forma aleatoria, es decir, no depende del tiempo transcurrido desde el evento anterior. Dicho de otra forma, el sistema sufre de amnesia, porque si enumeramos los eventos cronológicamente, el evento i no depende del evento i-1. Por lo tanto, los tiempos entre llegadas de clientes y tiempos de servicio (tiempo entre salida de clientes) se describe con la distribución exponencial, que se define, si recordamos de Probabilidades y Estadísticas :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$P\{t <= T\} = 1 - e^{-\lambda T}$$; donde t es el tiempo entre llegadas

Modelos de Nacimiento y Muerte: Vamos a empezar a ver los diferentes modelos matemáticos que podrían describir un sistema de colas. Cuando hablamos de **Nacimiento** nos referimos a llegadas de clientes al sistema y **Muerte** se refiere a salidas de clientes del sistema por haber terminado su servicio. Veamos primero los modelos de **Nacimiento y Muerte Pura**.

3.3.a.1. **Modelo de Nacimientos Puros:** Un ejemplo de un sistema donde ocurren solamente llegadas de clientes es la 'emisión de cédulas de identidad'. Aunque la persona muera su número de cédula de identidad no sale del sistema. El sistema comienza con 0 clientes.

Definamos lo siguiente:

$P_0(t)$ = Probabilidad que no haya llegadas en un período de tiempo t,

Por lo tanto, podemos decir que $P_0(t)$ equivale a:

$P_0(t) = 1 - P\{\text{tiempo entre llegadas} <= t\} = 1 - (1 - e^{-\lambda t})$;

$P_0(t) = e^{-\lambda t}$

También definamos:

$Pn(t)$ = Probabilidad de ocurrir n llegadas durante el tiempo 't'

$$Pn(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Por lo tanto, hablamos de una distribución POISSON con media $\underline{\lambda}t$ llegadas en promedio durante el período de tiempo t.

Ejemplo: Si hablamos de la emisión de Cédulas de Identidad, y decimos que duran en emitir una cédula 10 minutos. Entonces hallemos lo siguiente:

- Cantidad promedio de cédulas emitidas en un día trabajo (8 horas):
  Razonamiento: una cédula se emite en 10 minutos, cuántas cédulas se emiten en una hora: $\lambda = \frac{60\min./hora \times 1CI}{10\min} = 6$ CI/hora

  8 horas * 6 CI/hora = 48 CI se emiten en 8 horas (en promedio)
- Probabilidad de no emitir cédulas en media hora:
  $P_0(0.5 \text{ horas}) = e^{-6*0.5} = 0.05$

- Probabilidad de emitir 15 cédulas en 45 minutos:
  $$P_{15}(1.5 \text{ horas}) = \frac{e^{-6\times1.5}\times(6\times1.5)^{15}}{15!} = 0.019$$

3.3.a.2. **Modelo de Muertes Puras:** Un ejemplo de un sistema donde ocurren solamente salidas de clientes es el 'carrito de helados'. El heladero comienza el día con el carrito lleno de helados y los va vendiendo en el transcurso del día, sin reponerlos. El sistema comienza con N helados.

Definamos lo siguiente:

$P_0(t)$ = Probabilidad que no haya salidas en un período de tiempo t, por lo tanto, quedan N clientes en el sistema
$P_0(t) = e^{-\mu t}$

Pn(t) = Probabilidad de ocurrir n salidas durante el tiempo 't', por lo tanto quedan N-n clientes en el sistema

$$Pn(t) = \frac{e^{-\mu t}(\mu t)^n}{n!}$$

Ejemplo: Si hablamos de un carrito de helados que comienza con 100 piezas y decimos que, en promedio, el heladero vende una pieza cada 20 minutos. Entonces hallemos lo siguiente:

- Cantidad promedio de helados vendidos en un día trabajo (8 horas):
  Razonamiento: un helado sale en 20 minutos, cuántas helados se venden en una hora: $\mu = \dfrac{60\,\text{min}/hora \times 1 helado}{20\,\text{min}}$ = 3 helados/hora
  8 horas * 3 helados/hora = 24 helados se venden en 8 horas (en promedio)
- Probabilidad de no vender helados en una hora:
  $P_0(1 \text{ hora}) = e^{-3*1} = 0.05$

- Probabilidad de vender 10 helados en media hora:
  $$P_{10}\,(0.5 \text{ horas}) = \frac{e^{-3\times 0.5}\times(3\times 0.5)^{10}}{10!} = 0.0008$$

3.3.a.3. **Modelo de Nacimientos y Muertes:** También llamado Modelos Generalizado de Colas de POISSON. En este modelo se combinan llegadas y salidas, asumiendo que los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio tienen una distribución exponencial.

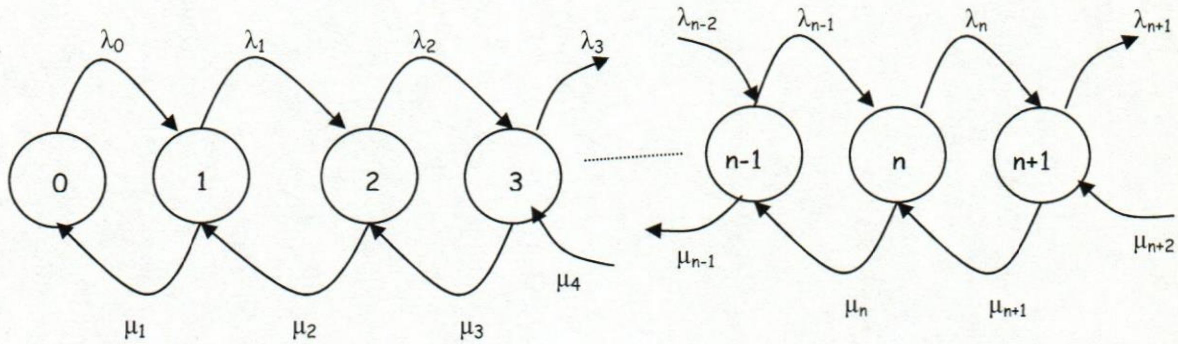
Este modelo se basa en el comportamiento de un estado estable, el cual se alcanza después que un sistema ha estado funcionando por un período largo de tiempo. En estos modelos las entradas y salidas dependen del estado. Por ejemplo, en una peluquería es natural que los peluqueros apuren el paso cuando la peluquería está llena de gente, y cuando hay poca, se toman el trabajo con más calma, haciéndolo más lento.

Antes de continuar definamos ciertos términos que vamos a utilizar a partir de ahora:

n: cantidad de clientes dentro del sistema, incluyendo a los que se están sirviendo.
λ_n: cantidad de clientes que entran cuando hay n clientes en el sistema
μ_n: cantidad de clientes que salen cuando hay n clientes en el sistema
Estado: el estado describe el momento en que se encuentra el sistema y viene dado por la cantidad de clientes que hay dentro del sistema. Por ejemplo, cuando hablamos del estado 0, decimos que el sistema está vacío, no hay clientes. En forma general, el estado n indica que n clientes en el sistema, incluyendo a los que se están sirviendo.

Pn: Probabilidad en un sistema de estados estables de haber n clientes dentro del sistema, incluyendo a los que se están sirviendo.

Este modelo se basa en el comportamiento estable o de un estado estacionario, el cual se alcanza después que un sistema ha estado funcionando normalmente por un período largo de tiempo, sin grandes novedades. En estos modelos las entradas y salidas dependen del estado. Por ejemplo, en una peluquería es natural que los peluqueros apuren el paso cuando la peluquería está llena de gente, y cuando hay poca, se toman el trabajo con más calma, haciéndolo más lento.
La gráfica que se muestra a continuación representa el diagrama de transición entre estados en un sistema de colas estable.



Principio de estado estable: tasa o flujo de entrada a un estado es igual a la tasa o flujo de salida del mismo estado (Ecuación de Balance):

Para el estado 0, las entradas se dan cuando el sistema se encuentra en el estado 1 y surge una salida ($\mu_1 P_1$). Y las salidas se dan cuando el sistema se encuentra en el estado 0 y surge una llegada ($\lambda_0 P_0$), por lo tanto:
$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$ **Ecuación 0**
Para el estado 1, las entradas se dan de dos formas: cuando el sistema se encuentra en el estado 0 y surge una entrada ($\lambda_0 P_0$) o cuando el sistema se encuentra en el estado 2 y surge una salida ($\mu_2 P_2$). Por lo tanto el flujo de entrada se define como la suma de las dos anteriores ($\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$). Las salidas del estado 1 se dan cuando el sistema se encuentra en el mismo estado 1 y surge una salida o una entrada ($\{\lambda_1 + \mu_1\}P_0$), por lo tanto:
$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) P_0$ **Ecuación 1**
De igual forma sucede para el estado 2:
$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 = (\lambda_2 + \mu_2) P_0$ entrada y salida del estado 2 **Ecuación 2**

En forma general, para el estado n, también sucede similar:
$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) P_n$ entrada y salida del estado n **Ecuación 3**

Al despejar de la **Ecuación 0**, nos queda:

$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \times P_0$ **Ecuación 4**

Definamos el multiplicador: $C_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}$

Por lo que la **Ecuación 4** queda:

$P_1 = C_1 \times P_0$ **Ecuación 4.1**

Al despejar, igualmente, de la **Ecuación 1** y utilizar al **Ecuación 4** para sustituir P_1 nos queda:

$P_2 = \dfrac{\lambda_1 \times \lambda_0}{\mu_2 \times \mu_1} \times P_0$ **Ecuación 5**

Igualmente, definamos el multiplicador: $C_2 = \dfrac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1}$

Por lo que la **Ecuación 5** queda:

$P_2 = C_2 \times C_1 \times P_0$ **Ecuación 5.1**

Al realizar el mismo procedimiento con cada una de las ecuaciones de balance, nos queda en forma general:

$P_n = \dfrac{\lambda_{n-1} \times \lambda_{n-2} \times ..... \times \lambda_1 \times \lambda_0}{\mu_n \times \mu_{n-1} \times ..... \times \mu_2 \times \mu_1} \times P_0$ **Ecuación 6**

Y definamos también el multiplicador: $C_n = \dfrac{\lambda_{n-1} \times \lambda_{n-2} \times ..... \times \lambda_1 \times \lambda_0}{\mu_n \times \mu_{n-1} \times ..... \times \mu_2 \times \mu_1}$

Por lo que la **Ecuación 6** queda:

$P_n = C_n \times C_{n-1} \times ..... \times C_1 \times C_0 \times P_0$ **Ecuación 6.1**

Como sabemos, la suma de todas las probabilidades es 1, por lo que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

Si reemplazamos los P_n por sus equivalentes, antes deducidos, obtenemos:

$$P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \times P_0 = 1$$

Al despejar P_0, conseguimos:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n}$$

Podemos concluir que para hallar la probabilidad de encontrarse en cualquier estado del sistema, necesitamos conocer P_0 y las tasas de llegada y de salida para cada estado (λ_n , μ_n).

Veamos un ejemplo donde tenemos una cola finita, dos servidores y el comportamiento del servidor es diferente para cada estado: En una barbería, en la que los barberos demoran 15 minutos en promedio para cada corte de cabello, los clientes llegan a una tasa promedio de 16 clientes/hora. Sin embargo, cuando los dos barberos están ocupados y no hay clientes esperando, la cuarta parte de los clientes que llegan a la barbería no entran, porque no desean tener que esperar. Cuando un cliente está esperando, 3/8 de los clientes no llegan a entrar. Debido a que hay solamente dos sillas donde sentarse los clientes pueden sentarse a esperar; nunca hay más de dos personas esperando por servicio.

Razonamiento: Nos podemos dar cuenta que la capacidad máxima del sistema es 4, por lo que tendremos solo 5 estados (n = 0, 1, 2, 3, 4). Según el estado que se encuentre el sistema tendrá las siguientes tasas de entrada y salida:

Estado	0	1	2	3	4
λ_n	16	16	12	10	0
μ_n	0	4	8	8	8

Para determinar cada una de las probabilidades, necesitamos hallar primero los multiplicadores para obtener P_0:

$$C_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{16}{4} = 4$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1 \times \lambda_0}{\mu_2 \times \mu_1} = C_1 \times \frac{\lambda_1}{\mu_2} = 4 \times \frac{16}{8} = 8$$

$$C_3 = \frac{\lambda_2 \times \lambda_1 \times \lambda_0}{\mu_3 \times \mu_2 \times \mu_1} = C_2 \times \frac{\lambda_2}{\mu_3} = 8 \times \frac{12}{8} = 12$$

$$C_4 = \frac{\lambda_3 \times \lambda_2 \times \lambda_1 \times \lambda_0}{\mu_4 \times \mu_3 \times \mu_2 \times \mu_1} = C_3 \times \frac{\lambda_3}{\mu_4} = 12 \times \frac{10}{8} = 15$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n} = \frac{1}{1+4+8+12+15} = \frac{1}{36} = 0.025$$

Lo que nos dice que los peluqueros permanecen desocupados el 2.5% del tiempo.

$P_1 = C_1 \times P_0 = 4 \times 0.025 = 0.1$ (en la barbería hay una sola persona el 10% del tiempo)

$P_2 = C_2 \times P_0 = 8 \times 0.025 = 0.2$

$P_3 = C_3 \times P_0 = 12 \times 0.025 = 0.3$

$P_4 = C_4 \times P_0 = 15 \times 0.025 = 0.375$

(la barbería está llena el 37,5% del tiempo y no pueden entrar más clientes)

b. **Modelos de Colas Especializadas de POISSON:** A continuación vamos a estudiar modelos matemáticos de Colas que cumplen con que la tasa de llegada (λ) y de salida (μ) son las mismas para cualquier estado, es decir, son independientes del número de personas (n) que se encuentren en el sistema. Existen muchísimos modelos que cumplen con esta condición, pero aquí sólo vamos a revisar los modelos matemáticos que cumplan con las siguientes características:

- el patrón estadístico que rige las tasas de llegada y de salida es POISSON,
- puede haber uno o más servidores trabajando en paralelo, y con igual tiempo de servicio, en promedio,
- la fuente de entrada va a ser infinita,
- la disciplina de la cola va a ser siempre FIFO,
- la capacidad del sistema puede ser finita o infinita.

Retomando la nomenclatura que vimos al principio, vamos a identificar cada modelo como se describe a continuación:

(a / b / c) : (d / e / f)

donde:

a : Distribución de llegada
b : Distribución de salida o servicio
$\}$ Para ambas usaremos la distribución de Harkov o Poisson (M)

c : Número de servidores en paralelo (s)
d : Disciplina (FIFO)
e : Número de clientes admitidos en sistema (cola + servidores)
f : Tamaño de la Fuente de Entrada

Para poder evaluar un Sistema de Colas vamos a contar con las siguientes medidas de desempeño o eficiencia:

ρ : Utilización del Sistema. El cual se halla con la fórmula: $\rho = \lambda / (\mu * s)$. Si este valor es mayor que 1 diremos que el sistema colapsa (a menos que el sistema sea cola finita), porque nunca se van a poder satisfacer a todos los clientes que llegan al sistema, Por lo tanto, no tiene sentido calcular las medidas de eficiencia.

P_n : Probabilidad de tener n clientes en el sistema (n = cola + servidores)

W_s : Valor esperado del tiempo en el sistema

W_q : Valor esperado del tiempo de espera en la cola

L_s : Valor esperado del número de clientes en el sistema

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} n \times P_n = \lambda_{ef} \times W_s$$

L_q : Valor esperado del número de clientes en la cola

$$L_q = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) \times P_n = \lambda_{ef} \times W_q$$

Donde λ_{ef} es la frecuencia efectiva de llegada al sistema. Coincide con λ cuando la capacidad del sistema es infinita y todos los clientes que llegan al sistema pueden entrar. En caso contrario es $\lambda_{ef} < \lambda$.

3.3.b.1. Modelos con un servidor y capacidad infinita:

(M / M / 1) : (FIFO / ∞ / ∞)

Fórmulas:

$\lambda_{ef} = \lambda,$ y no hay pérdidas porque todo cliente que llega puede entrar

$\lambda_n = \lambda,$ para n ≥ 0

$\mu_n = \mu,$ para n ≥ 0

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$P_0 = 1 - \rho,$ siempre que $\rho < 1$

$$P_n = (1-\rho) \times \rho^n$$

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \rho \times W_s$$

Ejemplo: El departamento para caballeros de un gran almacén tiene a un sastre para ajustes a la medida. Parece que el número de clientes que solicitan ajustes sigue una distribución Poisson con tasa media de llegada de 24 por hora. Los ajustes se realizan con un orden del tipo primero en llegar, primero en atenderse y los clientes siempre desean esperar, ya que las modificaciones son gratis. Aparentemente el tiempo que toma realizar el ajuste para un cliente se distribuye exponencialmente, con media de 2 minutos.

Resolución: Estamos hablando de un sistema con un solo servidor, una cola infinita.

- La tasa de llegada, λ, es 24 clientes/hora.
- La tasa de salida esta representada por el tiempo de servicio, por lo que se calcula aplicando el siguiente razonamiento: 'si un servidor demora 2 minutos en atender a una persona, cuantas personas se atienden en una hora (60 minutos)? Entonces, μ equivale a 60/2, lo cual equivale a 30 clientes/hora.
- La efectividad del sistema la calculamos de la siguiente manera:

  $$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{30} = 0.8,$$

  es decir, el sistema esta ocupado el 80% del tiempo, por lo que es estable y hay pocas probabilidades que colapse.
- La probabilidad de no tener clientes en el sistema es:
  $P0 = 1 - \rho = 0.2,$

lo que significa que la tienda esta ociosa el 20% del tiempo.

- La probabilidad de tener 5 clientes en el sistema los hallamos de la siguiente forma:

  $$P_5 = (1 - \rho) \times \rho^5 = 0.2 \times 0.8^5 = 0.065536,$$

  lo cual indica que apenas en el 7% de las oportunidades que uno asiste a la tienda encuentra 5 clientes.

- Para determinar el numero promedio de personas que se encontraran en el sistema utilizamos la formula:

  $$Ls = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{0.8}{0.2} = 4$$

  Por lo tanto, en promedio, habrá 4 clientes en la tienda, incluyendo al que se esta sirviendo.

- Para determinar el numero promedio de personas que se encontraran esperando (en cola) en el sistema utilizamos la formula:

  $$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{0.8^2}{0.2} = 3.2$$

  Por lo tanto, en promedio, habrá, más o menos, 3 clientes esperando en la tienda.

- Para determinar el tiempo promedio que un cliente debe permanecer en la tienda (desde que entra hasta que sale ya atendido) utilizamos la formula:

  $$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{4}{24} = \frac{1}{30 - 24} = \frac{1}{6}\text{horas} = 10\text{minutos}$$

- Para determinar el tiempo promedio que un cliente debe esperar para ser atendido utilizamos la formula:

  $$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \rho \times W_s = \frac{3.2}{24} = 0.8 \times \frac{1}{6} = 0.1333...horas = 8\text{minutos}$$

3.3.b.2. Modelos con un servidor y capacidad finita o limitada: (M / M / 1) : (FIFO / N / ∞)

Fórmulas:

$\lambda_n = \lambda, \text{ si } n < N$

$\lambda_n = 0, \text{ si } n \geq N$

$\lambda_{ef} = \lambda \times (1 - P_N), \quad$ y hay pérdidas : $\lambda_{perdidas} = \lambda \times P_N \quad$ (los que no pueden entrar)

$\mu_n = \mu, \text{ para } n \leq N$

$\mu_n = 0, \text{ para } n > N$

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}, \quad$ no tiene que ser < 1 porque el sistema nunca va a colapsar porque las entradas están controladas al haber una capacidad máxima

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, \quad \text{si } \rho \neq 1$$

$$P_0 = \frac{1}{N+1}, \quad \text{si } \rho = 1$$

$$P_n = \frac{(1-\rho) \times \rho^n}{1-\rho^{N+1}}, \quad \text{si } \rho \neq 1$$

$$P_n = \frac{1}{N+1} \quad \text{si } \rho = 1$$

$$L_s = \frac{\rho \times [1 - (N+1) \times \rho^N + N \times \rho^{N+1}]}{(1-\rho) \times (1-\rho^{N+1})} \quad \text{si } \rho \neq 1$$

$$L_s = \frac{N}{2}, \quad \text{si } \rho = 1$$

$$L_q = L_s - (1 - P_0)$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}}$$

Ejemplo: Una estación de servicio en un camino rural tiene sólo una bomba para despachar gasolina. Los automóviles llegan a comprar gasolina siguiendo un proceso de Poisson, con una tasa promedio de 10 por hora. Aparentemente el tiempo necesario para dar servicio a un automóvil se distribuye exponencialmente, con una media de 2 minutos. En la estación cabe un máximo de 4 automóviles y las leyes locales de tránsito prohíben que los autos esperen en la vía pública.

Resolución: Estamos hablando de un sistema con un solo servidor, una cola finita.

- La tasa de llegada, λ, es 10 automóviles/hora.
- La tasa de salida esta representada por el tiempo de servicio, 2 minutos/automóvil, entonces, μ equivale a 60/2, lo cual equivale a 30 automóviles/hora.

- Como la capacidad del sistema es 4 automóviles, entonces N=4, lo que quiere decir que tendremos hasta 5 estados para representar el sistema, desde cuando esta vació (n=0) hasta cuando esta copado (n=4).
- La efectividad del sistema la calculamos:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{30} = 0.333...$$

pero no podemos concluir a partir de este valor que tan ocupado esta el sistema porque la cola es finita.

- La probabilidad de no tener automóviles en el sistema es

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{4+1}} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5} = 0.66942...$$

lo que significa que la bomba esta ociosa el 67% del tiempo.

- La probabilidad de tener 2 automóviles en el sistema los hallamos de la siguiente forma:

$$P_2 = \frac{(1-\rho)\times\rho^2}{1-\rho^{4+1}} = \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5} = 0.07438...$$

lo cual indica que apenas en el 7,4% de las oportunidades que uno asiste a la tienda encuentra 2 automóviles.

- Para calcular el λ_{ef}, es decir, la cantidad de automóviles que entran a la bomba, realmente, dado que existe una capacidad, utilizaremos la formula

$$\lambda_{ef} = \lambda \times (1-P_N);$$

Entonces, necesitamos hallar primero P_4:

$$P_4 = \frac{(1-\rho)\times\rho^4}{1-\rho^{4+1}} = \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5} = \frac{1}{121} = 0.00826... = 0.8\%$$

$$\lambda_{ef} = 10\times\left(1-\frac{1}{121}\right) = 9.917...$$

Por lo tanto, λ_{ef} es muy parecido a λ, son muy pocos los automóviles que dejan de entrar a la bomba.

- La cantidad de automóviles que dejan de entrar a la bomba se calcula:

$$\lambda_{perdidas} = \lambda \times P_N = 10\times\frac{1}{121} = 0.0826...$$

Es decir, la perdida es insignificante.

- Para determinar el numero promedio de automóviles que se encontraran en el sistema utilizamos la formula:

$$L_s = \frac{\rho\times[1-(N+1)\times\rho^N + N\times\rho^{N+1}]}{(1-\rho)\times(1-\rho^{N+1})}$$

$$L_s = \frac{\frac{1}{3}\times[1-(4+1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4\times\left(\frac{1}{3}\right)^{4+1}]}{(1-\left(\frac{1}{3}\right))\times(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{4+1})} = 0.4793$$

Por lo tanto, en promedio, habrá 0.5 automóviles en la bomba, incluyendo al que se esta sirviendo, es decir, a veces un automóvil y otras ninguno.

- Para determinar el numero promedio de personas que se encontraran esperando (en cola) en el sistema utilizamos la formula
  $L_q = L_s - (1 - P_0) = 0.14876...$
  Lo que significa que casi nunca se ven automóviles esperando porque el promedio es 0.15.
- Para determinar el tiempo promedio que un automóvil debe permanecer en la bomba (desde que entra hasta que sale ya atendido) utilizamos la formula
  $$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}} = 0.0483...horas = 2.9\text{minutos}$$
  Por lo tanto, un automóvil pasa aproximadamente 3 minutos en la bomba, desde que llega hasta que se va, después de haber sido servido.
- Para determinar el tiempo promedio que un automóvil debe esperar para ser atendido utilizamos la formula
  $$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = 0.015horas = 0.9\text{minutos} = 54\text{segundos}$$
  Por lo tanto, un automóvil espera menos de un minuto (54 segundos) en promedio para ser servido.

3.3.b.3. Modelos con varios servidores y capacidad infinita:
(M / M / s) : (FIFO / ∞ / ∞)

Fórmulas:

$\lambda_{ef} = \lambda,$ *no hay perdidas porque todos cliente que llega puede entrar*

$\lambda_n = \lambda,$ *para* $n \geq 0$

$\mu_n = n \times \mu,$ *para* $n \leq s$

$\mu_n = s \times \mu,$ *para* $n \geq s$

$$\rho = \frac{\lambda}{s \times \mu},$$

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s! \times (1-\rho)} \right\}^{-1} \quad \text{si } \rho < 1$$

$$P_n = \frac{P_0 \times \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \quad \text{si } 0 \leq \text{n} \leq \text{s}$$

$$P_n = \frac{P_0 \times \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! \times s^{n-s}} \quad \text{si n} \geq \text{s}$$

$$L_q = \frac{P_0 \times \rho^{s+1}}{(s-1)! \times (s-\rho)^2}$$

$$L_s = L_q + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda / \mu}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Ejemplo: Un pequeño banco tiene dos cajeros, igualmente eficientes y capaces de atender un promedio de 60 operaciones/cliente por hora, con los tiempos reales de servicio distribuidos exponencialmente. Los clientes llegan al banco siguiendo un proceso de Poisson, a una tasa promedio de 100 por hora.

Resolución: Estamos hablando de un sistema con dos servidores y una cola infinita.

- La tasa de llegada, λ, es 100 operaciones/hora.
- La tasa de salida, μ, es 60 operaciones/hora.
- El numero de servidores es 2, por lo que s=2
- La efectividad del sistema la calculamos de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{\lambda}{s \times \mu} = \frac{100}{2 \times 60} = 0.833...$$

es decir, el sistema esta ocupado el 83.3% del tiempo, por lo que es estable y hay pocas probabilidades que colapse.

- La probabilidad de no tener clientes en el sistema es:

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{2-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!\times(1-\rho)} \right\}^{-1}$$

$$P_0 = \left\{ 1 + \frac{100}{60} + \frac{\left(\frac{100}{60}\right)^2}{2!\times\left(1 - \frac{100}{2\times 60}\right)} \right\}^{-1} = \frac{1}{11} = 0.0909...$$

lo que significa que el banco esta ocioso el 9% del tiempo.

- La probabilidad de tener 3 operaciones en el sistema los hallamos de la siguiente forma:

$$P_3 = \frac{P_0 \times \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{2!\times 2^{3-2}} = \frac{\frac{1}{11}\times\left(\frac{100}{60}\right)^3}{2\times 2} = 0.1052...$$

lo cual indica que el 10% de las oportunidades que uno asiste al banco encuentra 3 operaciones, 2 procesándose y una esperando.

- Para determinar el numero promedio de operaciones que se encontraran esperando (en cola) en el sistema utilizamos la formula:

$$L_q = \frac{P_0 \times \rho^{2+1}}{(2-1)!\times(2-\rho)^2} = \frac{\frac{1}{11}\times\left(\frac{100}{2\times 60}\right)^3}{\left(2 - \frac{100}{2\times 60}\right)^2} = 0.161186...\,operaciones$$

Por lo que se puede decir que, en promedio, no hay operaciones esperando por ser procesadas.

- Para determinar el numero promedio de operaciones que se encontraran en el sistema utilizamos la formula:

$$L_s = L_q + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 0.161186... + \frac{100}{60} = 1.82785...$$

Por lo tanto, en promedio, habrá 2 operaciones en el banco, pero ambas siendo procesadas porque se cuenta con 2 servidores. Por eso, existe poca probabilidad de ver una operación esperando por ser procesada.

- Para determinar el tiempo promedio que una operación debe esperar para ser procesada utilizamos la formula:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda/\mu} = \frac{0.161186...}{100/60} = 0.0967...\,horas = 5.8 \text{ minutos}$$

- Para determinar el tiempo promedio que una operación debe permanecer en el banco (desde que entra hasta que sale ya procesado) utilizamos la formula:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.0967... + \frac{1}{60} = 0.018...horas = 1.0967...\text{ minutos}$$

3.3.b.4. Modelos con varios servidores y capacidad finita o limitada: (M / M / s) : (FIFO / N / ∞)

Fórmulas:

$\lambda_n = \lambda \quad$ si n < N

$\lambda_n = 0 \quad$ si n ≥ N

$\lambda_{ef} = \lambda \times (1 - P_N)$

$\lambda_{perdidas} = \lambda \times P_N$

$\mu_n = n \times \mu \quad$ para n < s

$\mu_n = s \times \mu \quad$ para s ≤ n ≤ N

$\mu_n = 0 \quad$ para n > N

$$\rho = \frac{\lambda}{s \times \mu}$$

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \right] + \frac{\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \right) \times \left(1 - \rho^{N-s+1}\right)}{1 - \rho} \right\}^{-1} \qquad \text{si } \rho \neq 1$$

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \right] + \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \right) \times (N - s + 1) \right\}^{-1} \qquad \text{si } \rho = 1$$

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \times P_0 \qquad \text{si n} \le \min\{\text{s, N}\}$$

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! \times s^{n-s}} \times P_0 \qquad \text{si s} \le \text{n} \le N$$

$$P_n = 0 \qquad \text{si n} > N$$

$$L_q = P_0 \times \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}}{(s-1)! \times \left(s - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \times \left(1 - \rho^{N-s+1} - (1-\rho) \times \rho^{N-s} \times (N - s + 1)\right) \qquad \text{si } \rho \neq 1$$

$$L_q = \frac{\rho^s \times (N - s) \times (N - s + 1)}{2 \times s!} \times P_0 \qquad \text{si } \rho = 1$$

$$L_s = \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}}$$

Ejemplo: Un autoservicio de lavado de autos tiene cuatro secciones. En cada una, los clientes pueden lavar y encerar sus autos. Por otro lado, se tiene espacio para un máximo de tres automóviles adicionales cuando las secciones de lavado están ocupadas. Los clientes llegan al servicio siguiendo un proceso de Poisson, a una tasa promedio del 15 automóviles/hora. Si no hay espacio para que esperen en terrenos del servicio de lavado, los clientes que llegan deberán irse. Aparentemente el tiempo necesario para dar servicio a un automóvil se distribuye exponencialmente, con una media de 12 minutos.

Resolución: Estamos hablando de un sistema con cuatro servidores y una cola finita.

- La tasa de llegada, λ, es 15 clientes/hora.
- La tasa de salida, μ, es 60/12 = 5 clientes/hora.
- El numero de servidores es 4, por lo que s=4
- Como hay capacidad de tener 3 automóviles adicionales para cuando las estaciones de lavados están ocupadas, entonces la capacidad del sistema es 7, 4 en servicio y 3 esperando, entonces N=7, lo que quiere decir que tendremos hasta 8 estados para representar el sistema, desde cuando esta vació (n=0) hasta cuando esta copado (n=7).
- La efectividad del sistema la calculamos de la siguiente manera:

  $$\rho = \frac{\lambda}{s \times \mu} = \frac{15}{4 \times 5} = 0.75$$

  pero no podemos concluir a partir de este valor que tan ocupado esta el sistema porque la cola es finita.
- La probabilidad de no tener clientes en el sistema es:

$$P_0 = \left\{ \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \right] + \frac{\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \right) \times \left(1 - \rho^{N-s+1}\right)}{1-\rho} \right\}^{-1} \qquad \text{si } \rho \neq 1$$

$$P_0 = \left\{ 1 + \frac{15}{5} + \frac{\left(\frac{15}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{15}{5}\right)^3}{3\times 2} + \frac{\frac{\left(\frac{15}{5}\right)^4}{4\times 3\times 2}\times\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^4\right)}{1-\frac{3}{4}} \right\}^{-1} = \frac{512}{15755} = 0.032...$$

lo que significa que el autolavado esta ocioso, aproximadamente, el 3% del tiempo.

- La probabilidad de tener 2 automóviles en el sistema lo hallamos de la siguiente forma:

$$P_2 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2!}\times P_0 \qquad \text{si } 2 \le \min\{4,7\}$$

$$P_2 = \frac{\left(\frac{15}{5}\right)^2}{2!}\times\frac{512}{15755} = 0.1462...$$

lo cual indica que, aproximadamente, el 14.6% de las oportunidades que uno asiste al autolavado ve dos automóviles en el local.

- Para calcular el λ_{ef} , es decir, la cantidad de automóviles que entran al autolavado, realmente, dado que existe una capacidad, utilizaremos la formula $\lambda_{ef} = \lambda\times(1-P_7)$

Entonces, necesitamos hallar primero P_7:

$$P_7 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!\times s^{7-s}}\times P_0 \qquad \text{si } 4 \le 7 \le 7$$

$$P_7 = \frac{\left(\frac{15}{3}\right)^7}{4!\times 4^{7-4}}\times\frac{512}{15755} = 0.046...$$

$$\lambda_{ef} = \lambda\times(1-P_7) = 15\times(1-0.046...) = 14.3...$$

Por lo tanto, entran al autolavado, aproximadamente, 14 automóviles/hora.

- La cantidad de automóviles que dejan de entrar al autolavado se calcula:

$\lambda_{perdidas} = \lambda * P_7 = 0.694...$

Es decir, es muy probable que un carro que llegue al autolavado no podrá entrar porque esta copado (hay 4 carros en servicio y 3 esperando).

- Para determinar el numero promedio de operaciones que se encontraran esperando (en cola) en el sistema utilizamos la formula:

$$L_q = P_0\times\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1}}{(s-1)!\times\left(s-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}\times\left(1-\rho^{N-s+1}-(1-\rho)\times\rho^{N-s}\times(N-s+1)\right)$$

$$L_q = \frac{512}{15755} \times \frac{\left(\frac{15}{5}\right)^{4+1}}{(4-1)! \times \left(4 - \frac{15}{5}\right)^2} \times \left(1 - 0.75^{N-s+1} - (1-0.75) \times 0.75^{7-4} \times (7-4+1)\right)$$

$$L_q = \frac{512}{15755} \times \frac{3^5}{6} \times \left(1 - 0.75^4 - 0.25 \times 0.75^3 \times 4\right) = 0.2798754\ldots \text{ automóviles}$$

Por lo que se puede decir que, eventualmente, encontraremos un automóvil esperando.

- Para determinar el numero promedio de operaciones que se encontraran en el sistema utilizamos la formula:

  $L_s = \frac{\lambda_{ef}}{\mu} = \frac{14.3\ldots}{5} = 2.86\ldots$

  Por lo tanto, en promedio, habrá 3 operaciones en el banco, dos siendo procesadas porque se cuenta con 2 servidores.
- Para determinar el tiempo promedio que una operación debe esperar para ser procesada utilizamos la formula:

  $W_q = \frac{L_q}{\lambda_{ef}} = \frac{0.2798754\ldots}{14.3\ldots} = 0.01957\ldots horas = 1.17\,\text{min}.$

- Para determinar el tiempo promedio que una operación debe permanecer en el banco (desde que entra hasta que sale ya procesado) utilizamos la formula:

  $W_s = \frac{L_s}{\lambda_{ef}} = \frac{1}{5} = 0.2 horas = 1.2\,\text{min}.$

3.4. Bibliografia:

- Hamdy A. Taha. 'Investigación de Operaciones', 7ma. Edición
- http://www.eio.uva.es/~lourdes/aio/res_colas.doc

4. Optimización en Redes

4.1. Introducción:

Existe una gran cantidad de situaciones que se pueden modelar a través de una red (nodos y aristas) y luego aplicar algún algoritmo para dar la solución óptima al problema. La representación en redes proporciona una ayuda conceptual poderosa para visualizar las relaciones entre los componentes de sistemas complicados que con frecuencia se tienen que analizar en la Investigación de Operaciones. Algunos ejemplos pueden ser:

1. Conexión de computadoras a través de redes o cableados, buscando que todas las computadoras puedan comunicarse con las demás, pero utilizando la menor cantidad de cable, para instalar una red lo más económica posible. Para este problema utilizaríamos el modelo de ***Árbol de Expansión mínima (Algoritmos de Prim o Kruskal).***
2. Determinar la ruta más corta para ir de una ciudad a otra. Aquí recomendaríamos utilizar el algoritmo de ***Ruta más corta (Algoritmo de Dijkstra).***
3. Calcular la capacidad máxima de una de tuberías de gas, que une ciertas ciudades con la refinería, donde se produce el gas. Para resolver este problema utilizamos el Algoritmo de ***Flujo Máximo.***
4. Dado un proyecto, con sus actividades, prelaciones entre ellas y duración de cada actividad, identificar las actividades críticas y determinar la duración total del proyecto. Para resolver este problema contamos con el algoritmo de ***Rutas críticas (Pert-CPM).***

Las primeras tres (3) situaciones se estudian, con mucho detalle, en una materia llamada Algoritmos y Programación III, donde se explica profundamente la Teoría de Grafos. En esta materia se da el Algoritmo de Rutas Críticas como un ejemplo de Grafos. Por lo tanto, nuestro objetivo va a ser estudiar con más detalle el Algoritmo de Rutas críticas.

4.2. Conceptos básicos:

Repasemos ciertos conceptos de Grafos, que vamos a utilizar en este capítulo.

a. ***Grafo***: conjunto de punto de unión llamados nodos, en donde algunos pares de nodos están unidos por líneas llamadas ramas (o arcos, aristas).
b. ***Red***: Grafo con un flujo de algún tipo en las ramas.
c. ***Cadena*** del nodo i al j: sucesión de ramas que conectan estos dos nodos.
d. ***Camino o Ruta***: Cadena en la cual se especifica la dirección del viaje a lo largo de la misma.
e. ***Ciclo***: Cadena que conecta a un nodo consigo mismo sin retroceder sobre sus pasos.
f. ***Grafo conexo***: Grafo en el cual existe una cadena que conecta a todo par de nodos.
g. ***Árbol***: Grafo conexo que no contiene ciclos.
h. ***Aristas o Ramas orientadas***: Rama a la cual se le atribuye un sentido de dirección tal que un nodo puede considerarse punto de origen y el otro punto de destino.
i. ***Grafo orientado o dirigido***: Grafo con todas las ramas orientadas.
j. ***Capacidad de flujo de una rama***: límite superior de la cantidad de flujo factible

4.3. Algoritmo para la planeación y control de proyectos (Pert-CPM):

La buena administración de proyectos a gran escala requiere planeación, programación y coordinación cuidadosas de muchas actividades interrelacionas. Al principio de la década de los 1950 se desarrollaron procedimientos formales basados en el uso de redes y de las técnicas de redes para ayudar en estas tareas. Entre los más sobresalientes de estos procedimientos se encuentran el PERT (técnica de evaluación y revisión de programas) y el CPM (método de la ruta crítica). La última tendencia es unir ambos enfoques llamándolo PERT-CPM.

Los sistemas Pert-CPM ayudan en la planeación y el control. Se emplea una red de proyecto para visualizar las interrelaciones entre sus elementos (precedencias).

Los objetivos específicos del Algoritmo Pert-CPM son:

a. Determinar la probabilidad de cumplir con fechas de entrega específicas.
b. Identificar aquellas actividades que son más probable que se conviertan en cuello de botella y señalar las situaciones donde poner mayor atención para no tener retrasos.
c. Evaluar el efecto de los cambios en el programa (cambios en asignación de recursos, desvío de lo programado).

Vamos a utilizar cierta terminología para darle nombre a cada uno de los componentes de una Red de Control de proyectos:

a. ***Rama***: representa una actividad o tarea del proyecto.
b. ***Nodo***: representa un evento (momento de término de todas las actividades que llegan a ese nodo y/o momento de inicio de todas las actividades que sales de ese nodo).
c. ***Actividades ficticias***: líneas punteadas que muestran relaciones de precedencias, mas no son actividades reales, y evitan violar reglas para la representación gráfica de proyectos
d. ***Tiempo más próximo para un evento***: tiempo estimado en el que ocurrirá el evento si las actividades que lo preceden comienzan lo más pronto posible. Se obtienen al efectuar un paso hacia delante a través de la red, comenzando en el origen, hacia el evento final, calculando sucesivamente el tiempo en el que ocurrirá cada evento, si el precedente inmediato ocurre en su tiempo más próximo y cada actividad que interviene consume exactamente su tiempo estimado. La iniciación del proyecto se debe etiquetar con el tiempo 0.
e. ***Tiempo más lejano para un evento***: último momento estimado en el que puede ocurrir un evento sin retrasar la terminación del proyecto. Se obtienen al efectuar un paso hacia atrás a través de la red, comenzando en el evento final, hacia el evento inicial, calculando sucesivamente el tiempo final en el que puede ocurrir un evento, si los que lo siguen de forma inmediata ocurren en su tiempo más lejano y cada actividad que interviene consume exactamente su tiempo estimado.
f. ***Holgura para una actividad (i,j)***: diferencia entre el *tiempo más lejano del evento j* y el *tiempo más próximo del evento i* más el *tiempo estimado para la actividad*. Indica cuánto retraso se puede tolerar para culminar la actividad, sin retrasar el fin del proyecto.
g. ***Ruta crítica de un proyecto***: es una ruta cuyas actividades tienen holgura cero (0).

4.4. ¿Cómo se representa una red?

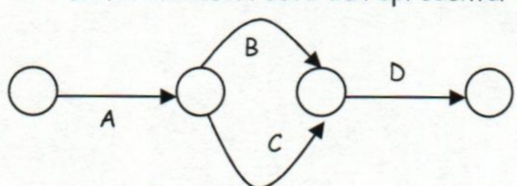
La forma correcta de graficar un proyecto debe cumplir con las siguientes reglas:

a. Cada actividad se presenta con un solo arco,

b. No puede haber dos actividades con ambos extremos iguales. Para estos casos utilizamos las actividades ficticia, de la siguiente forma:

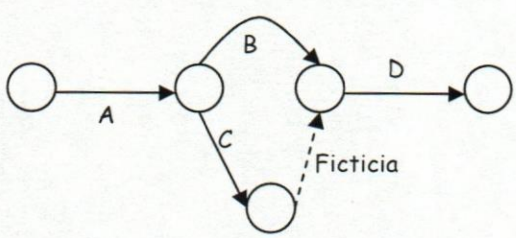
Actividades	Actividades que deben ser precedentes
A	Ninguna
B	A
C	A
D	B y C

La forma incorrecta de representar sería:



Las actividades B y C tienen ambos extremos iguales.

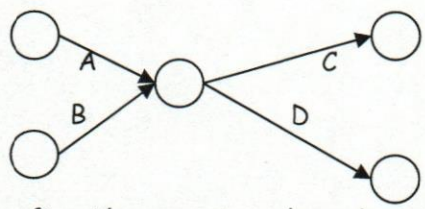
Una graficación correcta, utilizando actividades ficticias, sería:



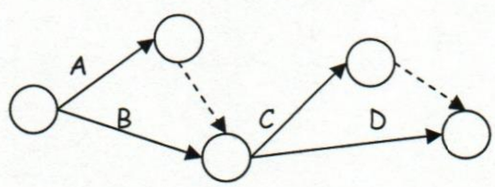
c. Debe haber un solo evento o nodo inicial y un solo evento o nodo final para todo el grafo. Del evento inicial parten las actividades que no tienen precedentes, por lo tanto pueden comenzar el primer día del proyecto; y al nodo final llegan las actividades que no son precedentes de otras actividades, ya que son las actividades finales.

Actividades	Actividades que deben ser precedentes
A	Ninguna
B	Ninguna
C	A y B
D	A y B

La forma incorrecta de graficar esta red sería:



La graficación correcta, colocando un único evento inicial y un único evento final es:



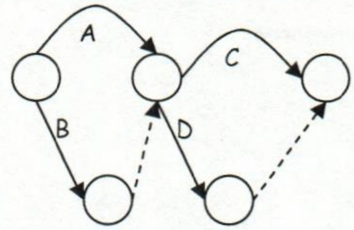
d. Al agregar una actividad a las red, se debe considerar que las siguientes preguntas puedan contestarse correctamente al ver la graficación:

- ¿Qué actividades anteceden inmediatamente a la actividad actual?
- ¿Qué actividades siguen inmediatamente después de la actividad actual?
- ¿Qué actividades pueden ejecutarse paralelamente con la actividad actual?

Si la graficación realizada no responde correctamente estas preguntas, seguramente se necesitará actividades ficticias:

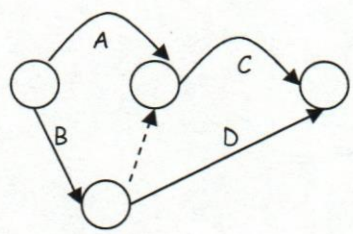
Actividades	Actividades que deben ser precedentes
A	Ninguna
B	Ninguna
C	A y B
D	B

La forma incorrecta de graficar es:



Porque a la actividad D la precede la actividad A, y no es lo indicado en el enunciado del problema.

La forma correcta de graficar es:



4.5. Algoritmo Pert-CPM

Los pasos a seguir para resolver un problema a través de las técnicas de Pert-CPM es el siguiente:

1. Dada una tabla de actividades, donde aparecen los predecesores y duración en tiempo para cada actividad, graficar la red, considerando las reglas antes mencionadas.
2. Enumerar los eventos ascendentemente según el orden topológico. El orden topológico enumera los eventos de tal forma que para cada actividad, o flecha, el evento inicial obtendrá un número menor al del evento final.
3. Para cada evento j, hallar su ***tiempo más próximo***, t_j. Para esto comenzamos desde el primer evento, asignándole $t_1=0$. Siguiendo el orden topológico, se va asignando t_j a cada evento, con la siguiente formula:
   $t_j = \max\{t_i + d_{ij}\} \forall i \text{ predecesor de j}$
4. Para cada evento i, hallar su ***tiempo más lejano***, T_i. Para esto comenzamos desde el último evento, asignándole $T_n=t_n$. Siguiendo el orden topológico descendentemente, se va asignando T_j a cada evento, con la siguiente formula:
   $T_i = \min\{t_j - d_{ij}\} \forall j \text{ sucesor de i}$
5. Para cada actividad (i,j) hallar su holgura según la siguiente fórmula:
   $h_{ij} = T_j - (t_i + d_{ij})$
6. Identificar las rutas críticas, encontrando los caminos con actividades sin holgura, h_{ij}

4.6. Enfoque de las tres (3) estimaciones:

La técnica de PERT, a diferencia de CPM, considera el tiempo de cada actividad como una variable aleatoria, por lo que usa tres tipos de estimaciones para dichos tiempos:

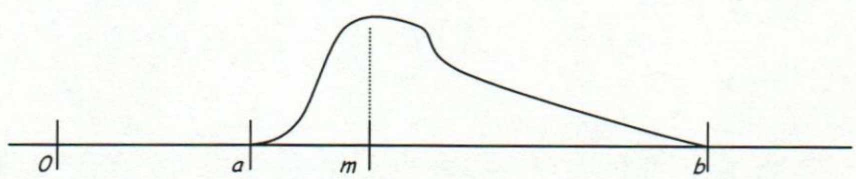
a. Más probable (m): estimación más realista (la moda).
b. Optimista (a): poco probable pero posible si todo sale bien (cota inferior).

c. Pesimista (b): poco probable pero posible si todo sale mal (cota superior). Donde el intervalo (a,b) abarca todas las estimaciones posibles en la duración de una actividad. Por lo tanto, el valor m debe encontrarse dentro del intervalo $(a \leq m \leq b)$

Suposiciones:

a. La desviación estándar (raíz cuadrada de la varianza) es igual a un sexto del intervalo de los requerimientos de tiempo razonablemente posible:
$$\sigma^2 = \left[\frac{1}{6}\times(b-a)\right]^2$$

b. La distribución es, aproximadamente, una distribución beta:



Tiempo transcurrido

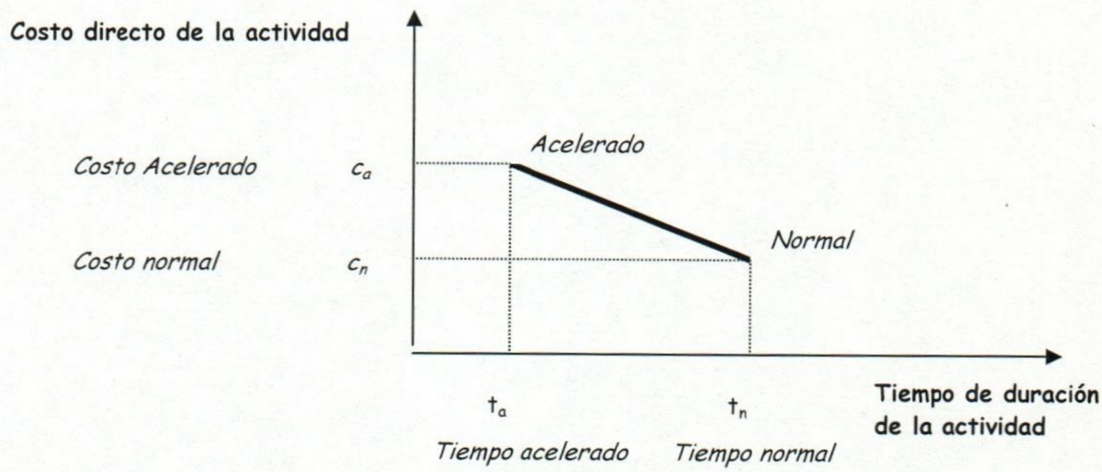
c. Valor esperado del tiempo de una actividad es aproximadamente:
$$t_e = \frac{1}{3}\left[2\times m + \frac{1}{2}(a+b)\right]$$

Por lo tanto, para las actividades que presenten tres estimaciones, se sustituye su duración por el valor esperado, es decir, $d_{ij} = t_e$

Ejemplo: Si una actividad tiene una duración normal 5 días y se indica que por alguna razón ajena al proyecto esta actividad puede verse afectada, por lo que hay que considerar una duración optimista de 4 días y una duración pesimista de 8 días. Entonces el valor a utilizar en la red será el tiempo esperado:
$$t_e = \frac{1}{3}\left[2\times m + \frac{1}{2}(a+b)\right] = \frac{1}{3}\left[2\times 5 + \frac{1}{2}(4+8)\right] = \frac{16}{3} = 5.\hat{3}\,días$$

4.7. Asignación de costos a las actividades:

EL método CPM considera la opción de hacer trueques en tiempo y costo, ya que le da igual importancia al tiempo y al costo. Por lo que construye la curva de tiempo-costo, tomando en cuenta que hay una duración normal y una duración acelerada. Esta última duración tiene un mayor costo, ya que es menor a la duración normal y al reducir el tiempo de la actividad, seguramente se incurrió en gastos adicionales por mano de obra, maquinarias, etc.:



De esta gráfica se puede deducir que hay un ***costo directo incremental*** para cada actividad (i,j), el cual corresponde a la inversión adicional a realizar por cada unidad de tiempo en que se disminuye dicha actividad. La fórmula para hallar este ***costo directo incremental***, c, es la siguiente:

$$c = \frac{c_a - c_n}{t_n - t_a}$$

Por lo tanto, si tenemos un problema de Control de proyectos, donde la información de entrada para cada actividad incluye costos normales y acelerados, y nos solicitan reducir la duración total del proyecto a una inversión mínima adicional, debemos resolverlo siguiendo el algoritmo que mostramos a continuación:

1. Graficar el diagrama de actividades y hallar la ruta crítica, como se enseñó anteriormente.
2. Para cada actividad crítica, hallar el costo directo incremental, ya que la reducción del tiempo total solo viene dada por acelerar las actividades críticas.
3. En caso de tener una sola ruta crítica, seleccionar la actividad crítica con menor costo directo incremental.
4. En caso de tener más de una ruta crítica, seleccionar la combinación de actividades críticas que participan en cada ruta críticas, que dé el menor costo directo incremental total. Este costo total se calcula sumando los costos particulares.
5. Disminuir la duración de cada actividad crítica seleccionado, considerando que pueden surgir nuevas rutas críticas, las cuales formarán parte de las actividades candidatas a acelerar

4.8. Ejemplo:

Dada la siguiente tabla de actividades responder las preguntas planteadas al final:

Actividad	Predecesor	Tiempo normal t_n	Costo normal c_n	Tiempo acelerado t_a	Costo acelerado c_a
A	-	3	30	1	50
B	A	3	20	3	20
C	B	3	40	2	50
D	B, E	1	25	1	25
E	A	2	40	2	40
F	E	3	25	1	45
G	F	2	30	1	35

Nota: La actividad A es sensible al tiempo, por lo que puede durar menos o más según las condiciones climáticas. Entonces hay que considerar que tiene una duración optimista de 2 días y una pesimista de 6 días.

a) Hallar la duración total del proyecto.

b) Hallar el costo total del proyecto.

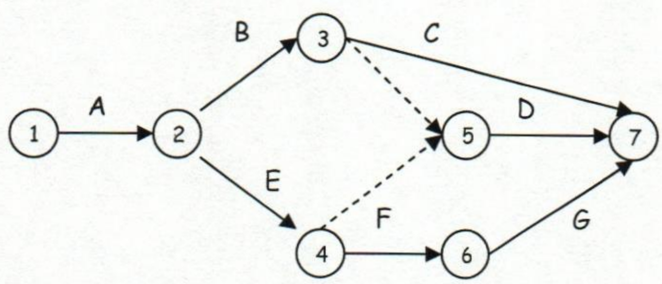
c) Hallar el costo mínimo total del proyecto si le disminuimos un día.

Resolución:

1. Hallar tiempo esperado de la actividad A

$$t_e=\frac{1}{3}\left[2\times m+\frac{1}{2}(a+b)\right]=\frac{1}{3}\left[2\times 3+\frac{1}{2}(2+6)\right]=\frac{10}{3}=3.\hat{3}\,días$$

2. Graficar la red y enumerar los eventos (nodos) según orden topológico:



3. Hallar tiempo mínimo y tiempo máximo para cada evento:

Evento	Tiempo mínimo (t)
1	$t_1=0$
2	$t_2=t_1+d_A=0+3.\hat{3}=3.\hat{3}$
3	$t_3=t_2+d_B=3.\hat{3}+3=6.\hat{3}$
4	$t_4=t_2+d_E=3.\hat{3}+2=5.\hat{3}$
5	$t_5=\max\{t_3+d_{ficticia};t_4+d_{ficticia}\}=\{6.\hat{3};5.\hat{3}\}=6.\hat{3}$
6	$t_6=t_4+d_F=5.\hat{3}+3=8.\hat{3}$
7	$t_7=\max\{t_3+d_c;t_6+d_G;t_5+d_D\}=\{9.\hat{3};10.\hat{3};7.\hat{3}\}=10.\hat{3}$

Evento	Tiempo máximo (T)
7	$T_7 = 10.\hat{3}$
6	$T_6 = T_7 - d_G = 10.\hat{3} - 2 = 8.\hat{3}$
5	$T_5 = T_7 + d_D = 10.\hat{3} - 1 = 9.\hat{3}$
4	$T_4 = \min\{T_5 - d_{ficticia}; T_6 - d_F\} = \{9.\hat{3}; 5.\hat{3}\} = 5.\hat{3}$
3	$T_3 = \min\{T_5 - d_{ficticia}; T_7 - d_C\} = \{9.\hat{3}; 7.\hat{3}\} = 7.\hat{3}$
2	$T_2 = \min\{T_3 - d_B; T_4 - d_E\} = \{4.\hat{3}; 3.\hat{3}\} = 3.\hat{3}$
1	$T_1 = T_2 - d_A = 3.\hat{3} - 3.\hat{3} = 0$

4. Hallar la holgura para cada actividad:

Actividad	Holgura (H)
A	$H_A = T_2 - (t_1 + d_A) = 3.\hat{3} - (0 + 3.\hat{3}) = 0$
B	$H_B = T_3 - (t_2 + d_B) = 7.\hat{3} - (3.\hat{3} + 3) = 1$
C	$H_C = T_7 - (t_3 + d_C) = 10.\hat{3} - (6.\hat{3} + 3) = 1$
D	$H_D = T_7 - (t_5 + d_D) = 10.\hat{3} - (6.\hat{3} + 1) = 3$
E	$H_E = T_4 - (t_2 + d_E) = 5.\hat{3} - (3.\hat{3} + 2) = 0$
F	$H_F = T_6 - (t_4 + d_F) = 8.\hat{3} - (5.\hat{3} + 3) = 0$
G	$H_G = T_7 - (t_6 + d_G) = 10.\hat{3} - (8.\hat{3} + 2) = 0$

5. Hallar el Costo directo Incremental para cada actividad crítica:

$$c = \frac{c_a - c_n}{t_n - t_a}$$

Actividad	t_n	c_n	t_a	c_a	c
A	3	30	1	50	$\frac{c_a - c_n}{t_n - t_a} = \frac{50-30}{3-1} = 10$
E	2	40	2	40	No se puede reducir
F	3	25	1	45	$\frac{c_a - c_n}{t_n - t_a} = \frac{45-25}{3-1} = 10$
G	2	30	1	35	$\frac{c_a - c_n}{t_n - t_a} = \frac{35-30}{2-1} = 5$

6. Escoger la actividad con menor Costo directo incremental para reducir el día al proyecto total: Actividad G.
7. La duración del proyecto sin acelerar es 10,3 días.
8. El costo total del proyecto, sin acelerar, es:

$$CT = \sum_{\forall actividad} c_n = 210$$

9. El costo del proyecto, al reducir un día, aumenta en 5. Por lo tanto, el costo total con la aceleración es 215.

4.9. Bibliografia:

- Hamdy A. Taha. 'Investigación de Operaciones', 7ma. Edición
- http://www.monografias.com/trabajos2/caminocritico/caminocritico.shtml
- http://www.monografias.com/trabajos13/planeco/planeco.shtml#meto

5. Inventarios

5.1. Introducción:

Para cualquier empresa es usual pensar en que necesita tener un inventario. Para mantener un inventario se necesita espacio físico y condiciones adecuadas, según el tipo de productos, lo cual trae consigo gastos. Por otro lado, el no tener inventario puede traer como consecuencia pérdidas, por no poder satisfacer al cliente en el momento o costos elevados para obtener el producto al instante. Entonces el objetivo de estudiar diferentes modelos de Inventarios es buscar el equilibrio donde se minimicen los gastos. Tener mucho inventario puede significar pérdida de capital y tener poco puede significar gastos adicionales, como ya explicamos.

Existen diferentes modelos para el estudio de Inventarios:

- La demanda puede ser una variable determinística (que se conozca con certidumbre) o probabilística (que se pueda describir con una distribución de probabilidades, como lo vimos en el capítulo de Teoría de Colas para la tasa de llegada y de salida).
- La demanda puede ser constante o variable por períodos.
- La obtención del producto puede ser instantánea, mediante la adquisición a un tercero, o por producción propia. Con esta última opción se va produciendo mientras se va consumiendo.
- La reposición del inventario puede ser inmediatamente después que se agote, antes o un tiempo después.
- Se puede permitir faltantes o no, es decir, que exista un período en el tiempo donde no hay existencia del producto.

Con todas estas variables, un problema de Inventario se resume en determinar:

- ¿Cuánto pedir del producto?, lo que llamaremos el tamaños del pedido o 'Q',
- ¿Cuándo pedir?, lo que llamaremos 'duración del ciclo de pedido' o 't'.

En nuestro curso estudiaremos un solo modelo, que por ser el más sencillo es ideal más no real, pero sirve de base para entender los otros modelos. El nombre de este modelo es '***Modelo clásico de cantidad económica de pedido***'.

5.2. Modelo general de Inventario:

Como ya mencionamos, los que van a determinar las respuestas a las dos preguntas, tamaño del pedido y duración del ciclo de pedido, es el costo de cada componente que interviene en una situación de inventario:

- **Costo por comprar o producir el producto (c):** Diremos que es un costo 'variante' porque depende del tamaño del pedido. Se refiere al precio del producto, el cual puede ser constante o con descuentos por cantidad.
- **Costo de preparación de la orden (K):** Diremos que es un costo 'fijo', porque independiente del tamaño del pedido habrá un gasto mínimo a incurrir, donde puede intervenir el transporte, los pagos a servicio del local como electricidad, teléfono, etc., empleados, y otros más, dependiendo siempre del tipo del producto.
- **Costo por almacenamiento (h):** Diremos, también, que es un costo variable porque depende de qué cantidad del producto se adquirió. Se refiere al costo de mantener

en existencia el inventario. Puede incluir el interés sobre capital y costo del almacén por unidad, el mantenimiento y manejo del mismo.

- **Costo por faltante (s):** Se refiere a la penalización que se incurre cuando se agota la existencia. Esta pérdida puede venir dada, por ejemplo, porque el cliente lo compra en otro lugar, lo que realmente representa una pérdida de ingreso; demanda del cliente, según los compromisos adquiridos; o un costo subjetivo dado por el empresario.

El costo total del pedido se calcula sumando cada uno de los identificados anteriormente:

$$CostoTotal = CostoFijo + CostoCompra + CostoAlmamcen + Costo\text{Faltante}$$

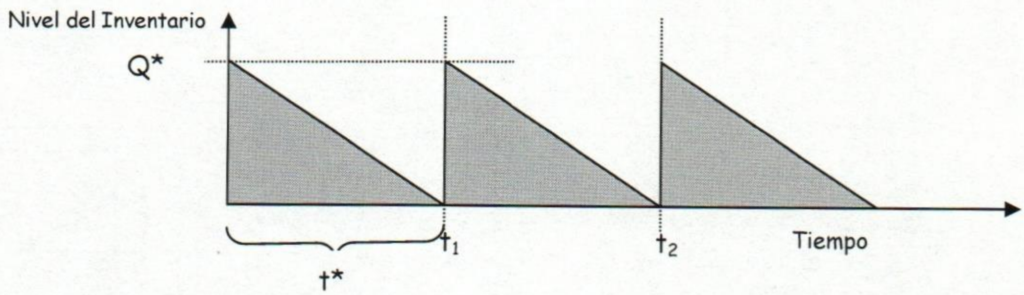
$$CT = K + c \times Z1 + h \times Z2 + s \times Z3$$

Donde Z1 es el tamaño del pedido, Z2 se refiere a la cantidad que se queda en el almacén y Z3 es la cantidad de productos que demanda en el período de tiempo donde no hay existencia.

5.3. Descripción del Modelo clásico de cantidad económica de pedido:

En este modelo la demanda es constante y determinística, la reposición inmediatamente y no se permite faltante.

El nivel del inventario sigue el patrón que se muestra en la figura:



Llamemos, como ya mencionamos, al tamaño óptimo del pedido 'Q*' y la duración del ciclo de pedido 't*', es decir, la cantidad de Q* se consume en un período t*.

La fórmula de Costo Total del pedido es:

$$CostoTotal = CostoFijo + CostoCompra + CostoAlmamcen$$

$$CT = K + c \times Z1 + h \times Z2$$

Donde Z1 corresponde al tamaño del pedido, Q; y Z2 representa los productos en inventario. Esta cantidad vale Q al comienzo del período y termina valiendo 0, por lo tanto, corresponde al área del triángulo:

Área del triángulo= $\frac{Q \times t}{2}$

Ya que la existencia se consume uniformemente a la tasa constante de demanda 'a', el ciclo de pedido para este comportamiento es $\frac{Q}{a}$, por lo tanto, $t=\frac{Q}{a}$. Entonces, reemplazando 't' en la fórmula del área:

Área del triángulo = $\frac{Q\times Q}{2\times a}=\frac{Q^2}{2a}$

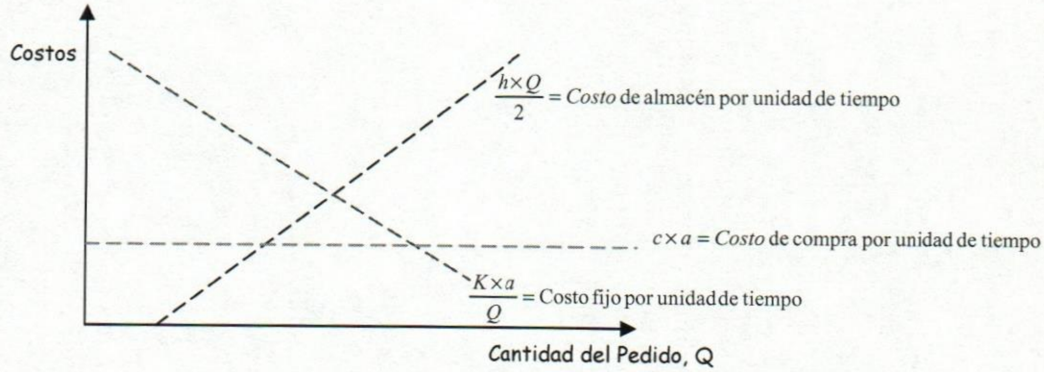
Entonces, el Costo Total del pedido resulta ser:

$$CT = K + c\times Q + h\times\frac{Q^2}{2a}$$

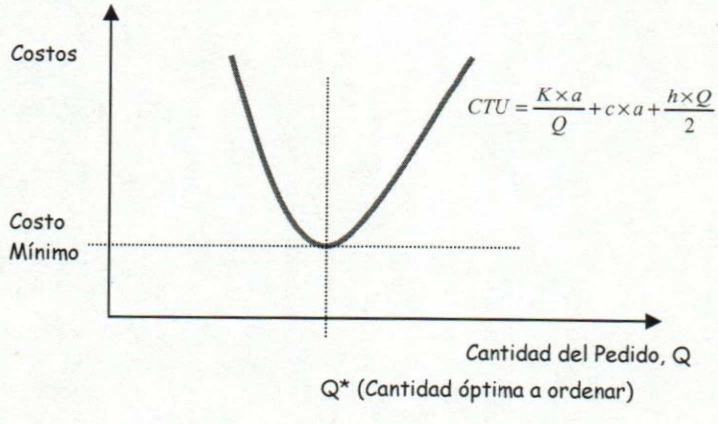
El Costo por unidad de tiempo es:

$$\frac{CT}{t} = CTU = \frac{K + c\times Q + h\times\frac{Q^2}{2a}}{\frac{Q}{a}} = \frac{K\times a}{Q} + c\times a + \frac{h\times Q}{2}$$

Si graficamos cada uno de los componentes de la ecuación del Costo Total por unidad de tiempo:



Al sumar los tres componentes, nos queda una curva como la que se muestra en la siguiente gráfica:



Para obtener el valor óptimo de la cantidad de pedido, Q*, hay que minimizar la ecuación CTU con respecto a Q. Suponiendo que Q es continua, para determinar el valor mínimo (óptimo) es derivar con respecto a Q e igualar a 0, ya que CTU es convexa:

$$\frac{\partial CTU}{\partial Q} = \frac{K \times a}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

Al despejar Q obtenemos:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h}}$$

$$t^* = \frac{Q}{a} = \sqrt{\frac{2Ka}{h \times a^2}} = \sqrt{\frac{2K}{ha}}$$

El número de pedidos que se va a realizar en el período de tiempo dado para la demanda se calcula:

$$\# \, pedidos = \frac{a}{Q}$$

5.4. Ejemplo:

Una ensambladora de computadoras, fabrica también el kit de multimedia (cornetas). Los computadores se ensamblan en una línea continua de 8.000, es decir, la demanda (a) es 8.000, computadores al mes. Las cornetas se producen por lote. Para determinar cuándo hacer un pedido de cornetas y cuántas producir, se toman los siguientes costos:

a. Costo por producir o preparación de un lote (k): $12.000,
b. Costo de mantenimiento en inventarios por unidad o costo de almacenamiento (h), incluye: 30 centavos/mes.
c. Costo de producción por artículo, (es independiente al tamaño del lote) c :10 $/por unidad
d. Costo por desgaste (i): 5%

Este ejemplo cumple con las características del modelo clásico de cantidad económica de pedido porque no permite faltantes, es de reposición inmediata del inventario y la demanda es constante y determinística.

Datos:

a=8.000 unidades/mes
K=12.000 $/pedido
h=0.30 $/unidad*mes
c=10 $/unidad
i=5%

Resolución:

$$h = h + i \times c = 0.30 + 0.05 \times 10 = 0.8$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2Ka}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 12.000 \times 8.000}{0.8}} = 15.491{,}93... \approx 15.492$$

$$t^* = \frac{Q}{a} = \frac{15.492}{8000} = 1{,}9365 meses \approx 58 días$$

$$\#\,pedidos = \frac{a}{Q} = \frac{8.000}{15.492} = 0.5\,pedidos \text{ al mes}$$

$$CT = K + c \times Q + h \times \frac{Q^2}{2a} = 12.000 + 10 \times 15.492 + \frac{0.8 \times (15.492)^2}{2 \times 8.000} = 12.000 + 154.920 + 12.000{,}1032 = 178.920{,}1032$$

$$CT = 178.920 \text{ \$ por pedido}$$

$$CTU = \frac{K \times a}{Q} + c \times a + \frac{h \times Q}{2} = \frac{12.000 \times 8.000}{15.492} + 10 \times 8.000 + \frac{0.8 \times 15.492}{2} = 92.393{,}546... \$$$

$$CTU = 92.393{,}55 \text{ \$/mes}$$

5.5. Modelo Silver-Meal:

Este modelo sólo es valido para los casos de Inventario en los que los costos unitarios de producción son constantes e idénticos para todos los períodos. Por eso solo se consideran los costos de almacén y de preparación.

Objetivo: Minimizar los costos de preparación y almacenamiento por período. El algoritmo identifica los períodos sucesivos cuya demanda se puede satisfacer con la demanda de un primer período. Por lo tanto, hay que Determinar ¿Cuándo hacer los pedidos? y ¿De cuánto debe ser cada pedido? Si la demanda no es la misma para cada período.

Descripción: Si se determina que en el período i se produce para los períodos i, i+1, i+2,...,t, con i≤t; entonces diremos que el Costo Total del pedido, CT(i,t) es:

$$CT(i,t) = K_i \qquad \text{Si } t = i$$
$$\mathrm{CT(i,t)} = \mathrm{K_i} + \mathrm{h_i} \times a_{i+1} + (h_i + h_{i+1}) \times a_{i+2} + ... + (h_i + h_{i+1} + ... + h_{t-1}) \times a_t \qquad \text{Si } t > i$$

Una forma recursiva de ver estos cálculos es la siguiente:

$$CT(i,i) = K_i$$
$$\mathrm{CT(i,t)} = \mathrm{CT(i,t-1)} + (h_i + h_{i+1} + ... + h_{t-1}) \times a_t \qquad \text{para } t > i$$

Y el Costo por unidad de tiempo:

$$CTU(i,t) = \frac{CT(i,t)}{t - i + 1}$$

El algoritmo se puede describir de la siguiente manera:

Paso 0: $i = 0$

Paso 1: Determinar el t^* tal que satisfaga las siguientes condiciones:

$$CTU(i,t^* - 1) \geq CTU(i,t^*)$$
$$CTU(i,t^* + 1) \geq CTU(i,t^*)$$

Si se satisfacen las condiciones entonces el tamaño del pedido será:

$$Q_i = \sum_{j=i}^{t^*} a_j$$

Paso 2: $i = t^* + 1$. Si i>n entonces parar el algoritmo porque ya se cubrieron todos los períodos; sino continuar en el Paso 1.

Ejemplo:

K = 270 Bs./orden

h = 1.5 Bs./unidad (costo por almacenamiento)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Demanda (a_t)	10	62	12	130	154	129	88	52	124	160	238	41

Resolución:

t	Demanda (a_t)	Demanda acumulada ($\sum a_t$)	Costos adicionales	Costos acumulados (CT)	Costo promedio mensual (CTU)	Análisis
1	10	10	270	270	**270**	Inicio
2	62	10+62=72	1.5*62=93	270+93=363	363/2=**181.5**	181.5 < 270 √
3	12	72+12=84	2*1.5*12=36	363+36=399	399/3=**133**	133 < 197 √
4	130	84+130=214	3*1.5*130=585	399+585=984	984/4=**246**	246 > 147.33 ×
4	130	130	270	270	**270**	Inicio
5	154	130+154=284	1.5*154=231	270+231=501	501/2=**250.5**	250.5 < 270 √
6	129	284+129=413	2*1.5*129=387	501+387=888	888/3=**296**	296 > 250.5 ×
6	129	129	270	270	**270**	Inicio
7	88	129+88=217	1.5*88=132	270+132=402	402/2=201	201 > 270 √
8	52	217+52=269	2*1.5*52=156	402+156=558	558/3=**186**	186 < 201 √
9	124	269+124=393	3*1.5*124=558	558+558=1116	1116/4=**279**	279 > 186 ×
9	124	124	270	270	**270**	Inicio
10	160	124+160=284	1.5*160=240	270+240=510	510/2=**255**	255 < 270 √
11	238	284+238=522	2*1.5*238=714	510+714=1224	1224/3=**408**	408 > 255 ×
11	238	238	270	270	**270**	Inicio
12	41	238+41=279	1.5*41=61.5	270+61.5=331.5	331.5/2=**165.75**	FIN

Conclusión:

Mes a realizar el pedido	**Cantidad óptimo del pedido**	**Costo Total**	**Meses a cubrir**
Enero	84	399=133*3	Enero, Febrero y Marzo
Abril	284	501=250.5*2	Abril y Mayo
Junio	269	558=186*3	Junio, Julio y Agosto
Septiembre	284	510=255*2	Septiembre y Octubre
Noviembre	279	331.5=165.75*2	Noviembre y Diciembre

5.6. Bibliografía

- Hamdy A. Taha. 'Investigación de Operaciones', 7ma. Edición
- http://www.eio.uva.es/~lourdes/aio/res_colas.doc

6. Programación Lineal

6.1. Objetivo:

Con Programación Lineal se busca representar una situación real mediante un modelo con funciones objetivos y restricciones estrictamente lineales. Asignar recursos limitados entre actividades competitivas de la mejor manera posible (forma óptima). Planeación de las actividades para obtener un resultado óptimo, el resultado que mejor alcance la meta especificada entre todas las opciones de solución.

6.2. Componentes:

Todo modelo de Programación lineal va a tener:

- Variables de decisión: representa los valores, inicialmente desconocidos, que se quieren determinar para optimizar la situación planteada.
- Función Objetivo: Puede ser maximizar o minimizar. Generalmente, estaremos hablando de maximizar beneficios económicos o minimizar gastos operativos. La función objetivo va a dar la dirección del problema, es decir, hacia dónde debe ir la tendencia de los valores a asignar a las variables de decisión.
- Restricciones: con las restricciones delimitamos el universo de valores que pueden tomar las variables de decisión. Por lo general, si queremos maximizar las restricciones representan un techo para las variables de decisión, y por el contrario, si buscamos minimizar, las restricciones representarán un piso, es decir que es lo mínimo que se permite asignar como valor a las variables de decisión.

6.3. Problemas con dos variables de decisión:

Al tener solo dos variables de decisión se puede graficar en un plano las restricciones y la función objetivo para entender más fácilmente el funcionamiento de este tipo de modelos.

Estudiemos el modelo mediante un ejemplo:

En una fábrica existen tres (3) procesos por lo cuales los productos pueden pasar. Para cada proceso se cuenta con un espacio limitado. En la siguiente tabla se representa, para cada proceso, de qué espacio dispone y cuánto ocupa cada unidad, si requiere ese proceso:

PROCESOS	PRODUCTO 1 (P1)	PRODUCTO 2 (P2)	CAPACIDAD
1	5	0	15
2	0	3	12
3	4	2	16
PVP	3	4	

Se quiere hallar qué cantidad producir de cada producto para obtener la mayor ganancia.

Formulación del problema:

1. Variables de decisión: valores a determinar
   a. X1: cantidad a producir del producto 1
   b. X2: cantidad a producir del producto 2

2. Función Objetivo: meta que se busca satisfacer de la mejor manera
   Max Z= 3*X1 + 4*X2

3. Restricciones: limitantes del problema.
   Proceso 1: 5*X1 <= 15
   Proceso 2: 3*X2 <= 12
   Proceso 3: 4*X1 + 2*X2 <= 16

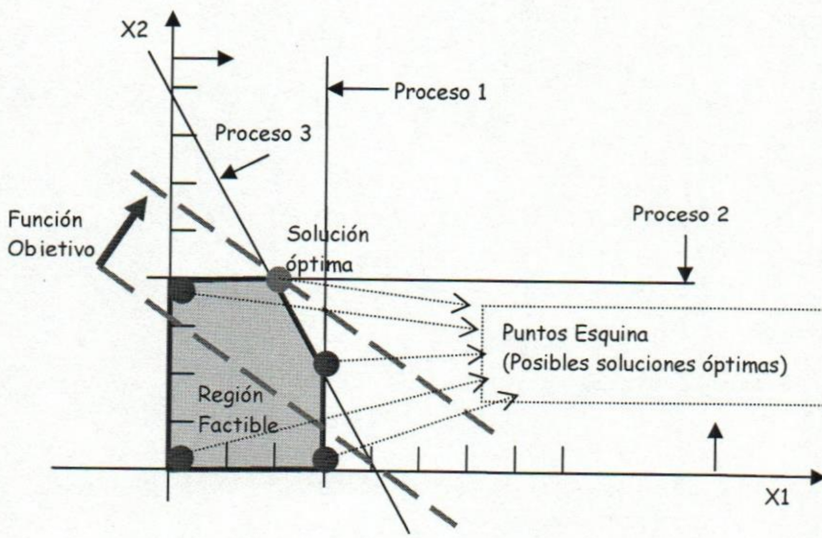
4. Restricciones de signo de las variables:
   X1, X2 >= 0

Revisemos unos conceptos importantes antes de graficar el problema:

Solución Factible: punto de la gráfica donde todas las restricciones se satisfacen

Solución Óptima: punto de la gráfica factible que conlleva el valor más favorable de la función objetivos (más grande o más pequeño)

Al graficar obtenemos:



La solución óptima resulta de interceptar las rectas del proceso 2 con la del proceso 3:
3*X2 = 12; 4*X1 + 2*X2 = 16; entonces X2 = 4; X1 = 2 y Z= 3*2+4*4= 22

6.4. Casos de Estudio:
Cuando se resuelve un problema de programación lineal puede resultar diferentes situaciones como soluciones al problema planteado:

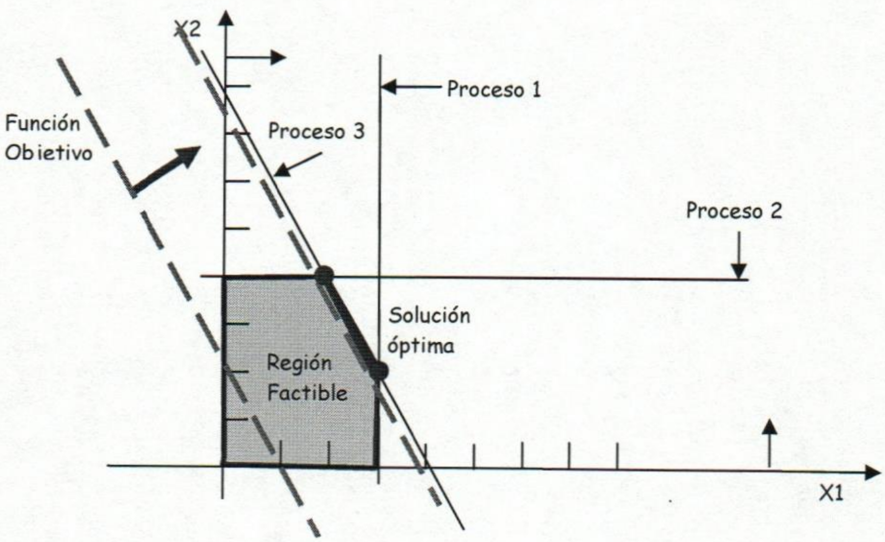
6.4.1.
Una única solución óptima: Sucede cuando la función objetivo pasa por un solo punto factible al trasladarse hasta donde la función Z toma el óptimo valor. Un ejemplo de esta situación es el problema planteado anteriormente.

6.4.2.
Múltiples soluciones óptimas, representada por un vector delimitado por ambos extremos: se presenta cuando la función objetivo es paralela a una restricción, quien a su vez coincide con ser el lugar donde la función Z toma su óptimo valor.

Ejemplo:

$$MaxZ = 2X_1 + X_2$$
$$S.a: 5X_1 \le 15$$
$$3X_2 \le 12$$
$$4X_1 + 2X_2 \le 16$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

$$Solución: \left[(X_1 = 2, X_2 = 4), \left(X_1 = 3, X_2 = \frac{4}{3} \right) \right]$$

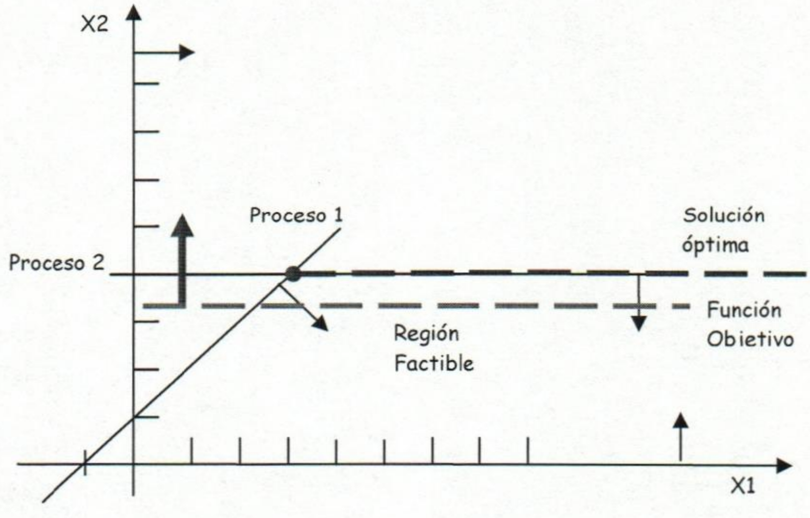


6.4.3.
Múltiples soluciones óptimas, representada por un vector delimitado por un extremo pero ilimitado por el otro extremo: se presenta cuando la función objetivo es paralela a una restricción, quien a su vez coincide con ser el lugar donde la función Z toma su óptimo valor, pero la región es no acotada.

Ejemplo:

$$MaxZ = 2X_2$$
$$S.a: 3X_2 \le 12$$
$$X_2 - X_1 \le 1$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

$$Solución: [(X_1 = 3, X_2 = 4), \infty)$$

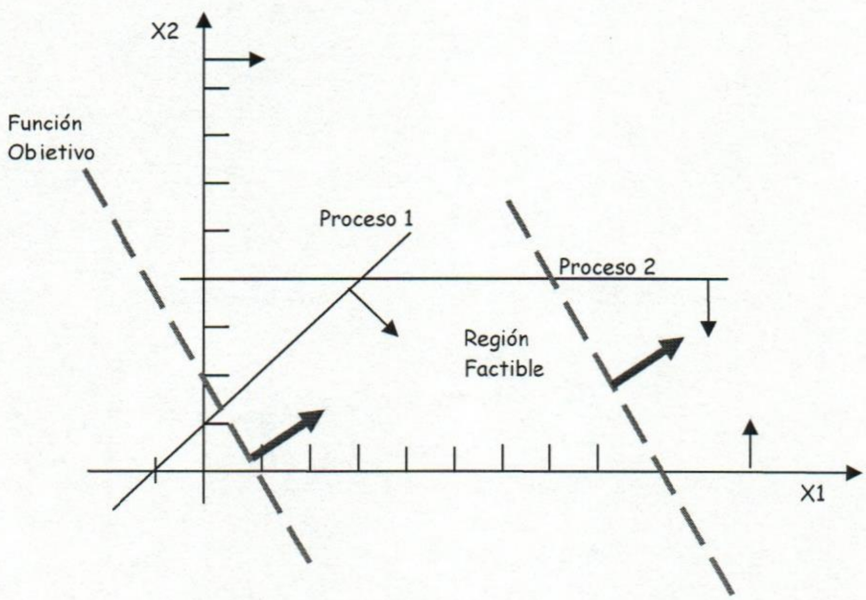


6.4.4. No hay solución óptima: ocurre cuando la región factible es no acotada y la función objetivo se optimiza mientras se traslada hacia el extremo no acotado de la región. Por lo tanto, hay soluciones factibles pero es imposible determinar la mejor u óptima.

Ejemplo:

$$MaxZ = 2X_1 + X_2$$
$$S.a: 3X_2 \leq 12$$
$$X_2 - X_1 \leq 1$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Hay solución factible pero no hay solución óptima

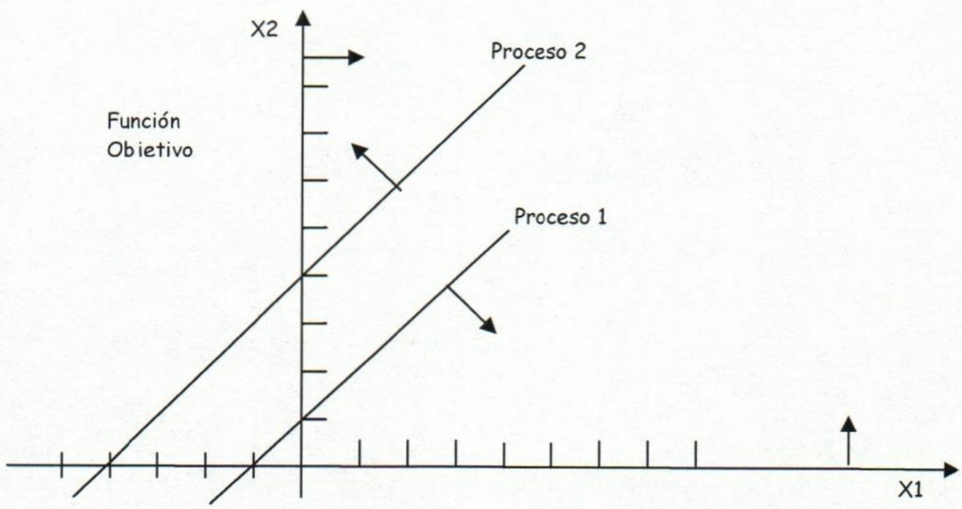


6.4.5. No hay solución factible: Esta situación se presenta cuando no hay región factible ya que ningún punto del plano satisface todas las restricciones.

Ejemplo:

$$MaxZ = 2X_1 + X_2$$
$$S.a: 3X_2 - 3X_1 \geq 12$$
$$X_2 - X_1 \leq 1$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

No hay solución factible porque no hay Región Factible, por lo tanto, tampoco hay solución óptima



6.5. Bibliografía

- Hamdy A. Taha. 'Investigación de Operaciones', 7ma. Edición

7. El Método Simplex

7.1. Objetivo:

Es un método matemático desarrollado por George Dantzig, en 1947. Es considerado como un método extraordinariamente eficiente. Se basa en un procedimiento algebraico, donde cada iteración contiene una solución del sistema de ecuaciones (un punto esquina), y busca obtener una nueva solución, a la cual se le aplica la prueba de optimalidad, para asegurarse de obtener, cada vez, una solución más cercana a la óptima. Si una solución en un vértice de la región factible es igual o mejor que todas las soluciones adyacentes (según el valor de la función objetivo, Z) entonces es, también, igual o mejor que todas las demás soluciones en los vértices, por lo tanto es la óptima. O dicho de otra forma, el método Simplex resuelve los problemas de Programación Lineal mediante iteraciones. En cada iteración va desplazando la solución a un nuevo punto esquina, el cual escoge porque tiene un potencial mayor a los otros puntos adyacentes para mejorar el valor de la función objetivo. El proceso algebraico termina cuando ya no se puede obtener mejoras.

7.2. Algoritmo:

e. Forma Standard:

1. Función Objetivo: debe estar en Maximizar. Min Z = Max (-Z). Y luego convertirla en una ecuación de igualdad, pasando las variables de decisión para la izquierda, junto a la Z, y las constantes a la derecha
2. Restricciones: debemos tener ecuaciones de igualdades. Para esto se deben introducir variables de holgura (h_i) para cada ecuación del tipo '≤'. La solución inicial va a ser el origen (variables de decisión iguales a cero y holguras distintas de cero).
3. Variables: las variables de decisión deben ser positivas ($X \geq 0$). Nos podemos encontrar varios casos:
   1. $X \leq 0$, entonces se sustituye X por una -X', tal que $X' \geq 0$ y $X = -X'$
   2. $X \geq c$, entonces se sustituye X por una X', tal que $X' \geq 0$ y $X = X' - c$
   3. $X \leq c$, entonces se sustituye X por una X', tal que $X' \geq 0$ y $X = c - X'$
   4. X S.R.S. (sin restricción de signo), entonces se sustituye X por dos variables, X^+ y X^- , tal que X^+ y $X^- \geq 0$ y $X = X^+ - X^-$

f. Llenar el tabloide inicial:

X_B : Variables Básicas	Z	X_1	X_2	...	X_n	h_1	h_2	...	h_m	b
Z	1	$-c_1$	$-c_2$		$-c_n$	0	0	0	0	0
h_1	0	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1	0	0	0	b_1
h_2	0	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1	0	0	b_2
.	0									
h_m	0	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0	0	1	b_m

Donde:

c_j: Coeficiente de costo de la variable X_j
b_i : Disponibilidad del recurso i
a_{ij}: Coeficientes de uso del recurso i por la variable X_j
X_B : Variables Básicas, son la variables que para cada iteración son distintas a 0. Con excepciones que veremos más adelante, como los casos de 'degeneración'.

Observaciones importantes:

a. La matriz de coeficientes de uso de recursos que acompaña a las X_B es la identidad
b. Los coeficientes de costo de las X_B es 0
c. Los b_i son positivos

Estas tres condiciones deben darse en cada iteración del Simplex.

g. Mientras exista $-c_i$ negativos (aun no hemos llegado al óptimo) hacer:

1. **Criterio de optimalidad**: escoger la variable con $-c_i$ más negativa, la llamaremos variable entrante. Busca la variable que aporte más al objetivo.

X_B	Z	X_1	X_2	...	X_n	h_1	h_2	...	h_m	b
Z	1	$-c_1$	$-c_2$		$-c_n$	0	0	0	0	0
h_1	0	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1	0	0	0	b_1
h_2	0	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1	0	0	b_2
.	0									
h_m	0	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0	0	1	b_m

Por ejemplo, si $-c_1$ es el más negativo, entonces X_1 es la variable entrante.

2. **Criterio de factibilidad**: escoger la variable básica con la mínima razón b_i/a_{ij}, con $a_{ij} > 0$, y la llamaremos variable saliente. Busca que la próxima solución que calcule el Simplex sea factible, se encuentre dentro de la Región Factible.

X_B	Z	X_1	X_2	...	X_n	h_1	h_2	...	h_m	b
Z	1	$-c_1$	$-c_2$		$-c_n$	0	0	0	0	0
h_1	0	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1	0	0	0	b_1
h_2	0	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1	0	0	b_2
.	0									
h_m	0	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0	0	1	b_m

Por ejemplo, si b_1/a_{11}, con $a_{11} > 0$, fue el menor de las razones ($b_1/a_{11}, b_2/a_{21}, \ldots, b_m/a_{m1}$), entonces h_1 es la variable saliente.

3. Operaciones de Renglón de Gauss-Jordan: Hay que manipular las ecuaciones del tabloide buscando la nueva solución factible del problema. Identifiquemos como ***pivote*** a a_{11}, coeficiente que quedó en la intersección de la columna de la variable entrante (X_1) y la fila de la variable básica saliente (h_1).

X_B	Z	X_1	X_2	...	X_n	h_1	h_2	...	h_m	b
Z	1	$-c_1$	$-c_2$		$-c_n$	0	0	0	0	0
h_1	0	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	1	0	0	0	b_1
h_2	0	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1	0	0	b_2
.	0									
h_m	0	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0	0	1	b_m

Entonces, realizar las siguientes operaciones en el tabloide, buscando obtener '1' en el pivote y '0' en el resto de la columna de la variable entrante (X_1):

1. Ecuación o fila de la variable saliente: dividirla entre el pivote:
$$Fila(X_1) = \frac{Fila(h_1)}{a_{11}}$$

X_B	Z	X_1	X_2	...	X_n	h_1	h_2	...	h_m	b
Z	1	$-c_1$	$-c_2$		$-c_n$	0	0	0	0	0
X_1	0	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$		$\frac{a_{1n}}{a_{11}}$	$\frac{1}{a_{11}}$	0	0	0	$\frac{b_1}{a_{11}}$
h_2	0	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	1	0	0	b_2
.	0									
h_m	0	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0	0	1	b_m

2. Ecuaciones i ó filas i de las variable restantes: restarles $a_{ij} * \text{Fila}(X_1)$
$$Fila(X_{Bi}) = Fila(X_{Bi}) - a_{i1} \times Fila(X_1)$$
3. Ecuación o fila de Z (de la función objetivo): sumarle $c_j * \text{Fila}(X_1)$
$$Fila(Z) = Fila(Z) + c_1 \times Fila(X_1)$$

X_B	Z	X_1	X_2	...	X_n	h_1	h_2	...	h_m	b
Z	1	0	$-c_2 + c_1 \times \frac{a_{12}}{a_{11}}$		$-c_n + c_1 \times \frac{a_{1n}}{a_{11}}$	$\frac{c_1}{a_{11}}$	0	0	0	$c_1 \times \frac{b_1}{a_{11}}$
X_1	0	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$		$\frac{a_{1n}}{a_{11}}$	$\frac{1}{a_{11}}$	0	0	0	$\frac{b_1}{a_{11}}$
h_2	0	0	$a_{22} - a_{21} \times \frac{a_{12}}{a_{11}}$		$a_{2n} - a_{21} \times \frac{a_{1n}}{a_{11}}$	0	1	0	0	$b_2 - a_{21} \times \frac{b_1}{a_{11}}$
etc	0	0					0	1	0	

4. Ir al paso c.

h. Se pueden presentar alguna de las siguientes situaciones:
   1. Una única solución óptima: coeficientes de costos de las variables no básicas son mayores a cero.
   2. Segmento acotado como solución óptima: un coeficiente de costo de una variable no básica es cero. La solución encontrada corresponde a un extremo del segmento, para hallar el otro extremo se introduce esta variable con coeficiente igual a cero como básica.
   3. Segmento no acotado como solución óptima: un coeficiente de costo de una variable no básica es cero, pero en la columna no hay coeficientes de uso positivos.
   4. No hay solución óptima (pero si factible): quedan coeficientes de costos negativos pero los coeficientes de uso de las columnas de dichos coeficientes negativos son menores o iguales a cero, es decir, tenemos una variable entrante pero no una variable saliente.
   5. Solución degenerada: Cuando una variable básica vale 0. Esto ocurre cuando ocurre un empate al aplicar el criterio de factibilidad.

7.3. Ejemplo:

$MaxZ = 3X_1 + 4X_2$

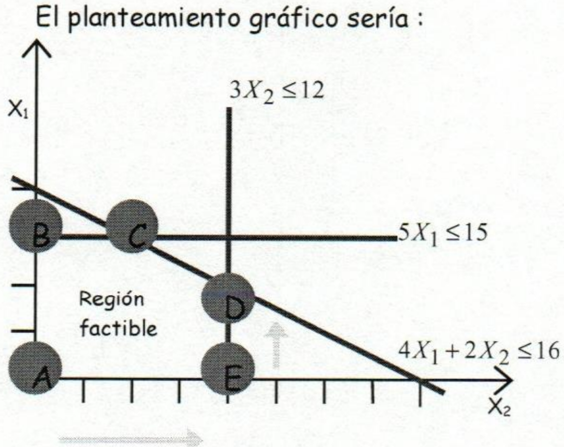
$5X_1 \le 15$

$3X_2 \le 12$

$4X_1 + 2X_2 \le 16$

$X_1, X_2 \ge 0$

El planteamiento gráfico sería :



7.3.1. Forma Standard:

$Z - 3X_1 - 4X_2 = 0$

$5X_1 + h_1 = 15$

$3X_2 + h_2 = 12$

$4X_1 + 2X_2 + h_3 = 16$

7.3.2. Tabloide: Iteración 1

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	h_3	b
Z	1	-3	-4	0	0	0	0
h_1	0	5	0	1	0	0	15
h_2	0	0	3	0	1	0	12
h_3	0	4	2	0	0	1	16

Esta solución factible inicial corresponde al punto A de la gráfica, el origen, donde todas las variables de decisión son nulas. Cada una de las holguras representa qué tan alejado está el punto de la restricción que representa. Por ejemplo, h_1 vale 15 porque el punto que estamos evaluando (el origen) no se encuentra sobre la restricción 1.

7.3.3. Criterio de Optimalidad: Aun no es óptimo porque hay $-c_j$ negativos

La variable entrante es X_2 porque contiene el $-c_j$ más negativo (-4)

7.3.4. Criterio de Factibilidad:

Para escoger la variable básica saliente hallamos el mínimo entre:

$$Min\left\{\frac{b_2}{a_{22}}=\frac{12}{3}=4, \frac{b_3}{a_{32}}=\frac{16}{2}=8\right\}=4$$

Por lo tanto, la variable saliente es h_2. La variable h_1 no es candidata porque $a_{12}=0$.

7.3.5. Operaciones de Renglón de Gauss-Jordan:

Pivote = a_{22} = 3

$$Fila(X_2)=\frac{Fila(h_2)}{a_{22}}=\frac{Fila(h_2)}{3}$$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	h_3	b
Z	1	-3	-4	0	0	0	0
h_1	0	5	0	1	0	0	15
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	4
h_3	0	4	2	0	0	1	16

$$Fila(h_3)=Fila(h_3)-a_{32}\times Fila(X_2)=Fila(h_3)-2\times Fila(X_2)$$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	h_3	b
Z	1	-3	-4	0	0	0	0
h_1	0	5	0	1	0	0	15
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	4
h_3	0	4	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	8

$$Fila(Z) = Fila(Z) + c_2 \times Fila(X_2) = Fila(Z) + 4 \times Fila(X_2)$$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	h_3	b
Z	1	-3	0	0	$\frac{4}{3}$	0	16
h_1	0	5	0	1	0	0	15
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	4
h_3	0	4	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	8

Esta segunda solución factible, resultado de la primera iteración, corresponde al punto E de la gráfica, donde la variable X_2 vale 4 y X_1 es nula. La variable h_2 es nula porque el punto que estamos evaluando (el punto E) se encuentra sobre la restricción 2.

7.3.6. Tabloide: Iteración 2

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	h_3	b
Z	1	-3	0	0	$\frac{4}{3}$	0	16
h_1	0	5	0	1	0	0	15
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	4
h_3	0	4	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	8

7.3.7. Criterio de Optimalidad: Aun no es óptimo porque hay $-c_j$ negativos

La variable entrante es X_1 porque contiene el $-c_j$ más negativo (-3)

7.3.8. Criterio de Factibilidad:

Para escoger la variable básica saliente hallamos el mínimo entre:

$$Min\left\{\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{15}{5} = 3, \frac{b_3}{a_{31}} = \frac{8}{4} = 2\right\} = 2$$

Por lo tanto, la variable saliente es h_3. La variable X_2 no es candidata porque a_{21}=0.

7.3.9. Operaciones de Renglón de Gauss-Jordan:

Pivote = a_{31} = 4

$$Fila(X_3) = \frac{Fila(h_3)}{a_{31}} = \frac{Fila(h_3)}{4}$$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	h_3	b
Z	1	-3	0	0	$\frac{4}{3}$	0	16
h_1	0	5	0	1	0	0	15
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	4
X_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	2

$$Fila(h_1) = Fila(h_1) - a_{11} \times Fila(X_1) = Fila(h_1) - 5 \times Fila(X_1)$$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	h_3	b
Z	1	-3	0	0	$\frac{4}{3}$	0	16
h_1	0	0	0	1	$-\frac{5}{6}$	0	5
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	4
X_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	2

$$Fila(Z) = Fila(Z) + c_1 \times Fila(X_1) = Fila(Z) + 3 \times Fila(X_1)$$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	h_3	b
Z	1	0	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	22
h_1	0	0	0	1	$-\frac{5}{6}$	0	5
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	4
X_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	2

Solución óptima:

$X_1=2$

$X_2=4$

$Z=22$

La solución óptima, resultado de la segunda iteración, corresponde al punto D de la gráfica, donde la variable X_2 vale 4 y X_1 vale 2. Las variables h_2 y h_3 son nulas porque el punto que estamos evaluando (el punto D) se encuentra sobre las restricciones 2 y 3.

En conclusión, lo que el método Simplex hace es empezar desde el origen a evaluar cada uno de los puntos extremos de la región factible hasta encontrar el óptimo. El criterio de optimalidad se encarga de escoger el camino más corto para llegar al punto óptimo (menos iteraciones) y el criterio de factibilidad evita seleccionar un punto fuera de la región factible.

7.4. Bibliografía

- Hamdy A. Taha. 'Investigación de Operaciones', 7ma. Edición

8. El Método de las Dos Fases

8.1 Objetivo:

Es el mismo método Simplex, pero trabaja con restricciones de ≥ y =. Como vimos anteriormente, el método Simplex, siempre comienza con el origen como solución factible, pero para estos problemas, el origen no está dentro de la Región Factible. Por lo tanto, se resuelve una primera fase donde se halla una solución factible inicial, y si se consigue pasamos a una segunda fase, donde se aplica el método Simplex, ya estudiado, para determinar la solución óptima.

8.2. Algoritmo:

i. Forma Standard para las restricciones (el resto del sistema se trata como se explicó en Simplex):

Restricciones: debemos tener ecuaciones de igualdades. Para esto se deben introducir variables de holgura (h_i) en caso de ser necesario, según el tipo de ecuaciones:

1. ' ≤ ' : agregar una variable de holgura sumando (+ h_i)
2. ' ≥ ' : agregar una variable de holgura restando y una variable artificial sumando (- h_i + a_i)
3. ' = ' : agregar, únicamente, una variable artificial sumando (+ a_j)

b. Si todas las ecuaciones tienen holguras sumadas (+ h_i) aplicar el método Simplex ya explicado

c. Si tenemos ecuaciones con variables artificiales aplicar el Método de las dos Fases:

Primera Fase:

1. Resolver el nuevo problema Min W = $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$; sujeto a las restricciones del problema original.
2. Llenar el tabloide inicial:

X_B	W	X_1	X_2	...	X_n	h_1	h_2	...	h_m	a_1	...	a_p	b
W	-1	0	0		0	0	0	0	0	1		1	0
a_1	0	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	-1	0	0	0	1		0	b_1
a_2	0	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	-1	0	0	0		0	b_2
.	0												
a_p	0	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0	0	-1	0		1	b_m

3. Eliminar los coeficientes de las variables artificiales. Como vemos en el tabloide, las variables básicas iniciales son las artificiales, pero contienen coeficiente de costo igual a 1, por lo que hay que aplicar operaciones de Renglón de Gauss-Jordan a la función objetivo, y hacer 0 dichos coeficientes:
$$Fila(W) = Fila(W) - Fila(a_1) - Fila(a_2) \ldots - Fila(a_p)$$
4. Aplicar método Simplex
5. Si no es posible llegar a una solución óptima sin variables artificiales como variables básicas entonces el problema no tiene solución factible

Segunda Fase:

1. Si llegamos a una solución óptima sin variables artificiales como básicas, entonces construir el siguiente problema, sustituyendo la función objetivo de W por la de Z.

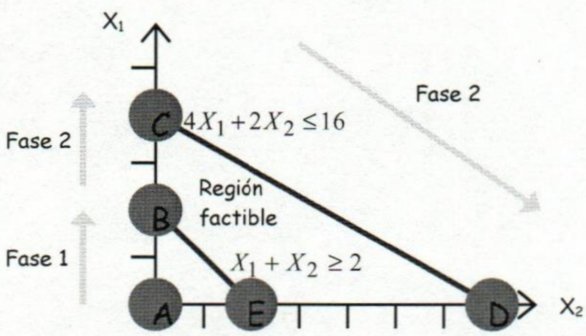
X_B	Z	...	X_i	...	X_k	...	X_n	...	h_j	...	h_m	b
Z	1		$-c_i$		$-c_k$		$-c_n$		0		0	0
h_j	0		0		0		a_{1n}		0		a	b_1
X_i	0		1		0		a_{2n}		1		a	b_2
.	0											
X_k	0		0		1		a_{mn}		0		a	b_m

2. Eliminar los coeficientes de las variables básicas. Como vemos en el tabloide, las variables básicas que resultaron de la primera fase, no tienen, necesariamente, 0 en los coeficientes de costos. por lo que hay que aplicar operaciones de Renglón de Gauss-Jordan a la función objetivo, y hacer 0 dichos coeficientes:
$$Fila(Z) = Fila(Z) - c_{B1} \times Fila(X_{B1}) - c_{B2} \times Fila(X_{B2}) \ldots - c_{Bm} \times Fila(X_{Bm})$$
3. Aplicar método Simplex

8.3. Ejemplo:

$$MaxZ = 3X_1 + 4X_2$$
$$X_1 + X_2 \geq 2$$
$$4X_1 + 2X_2 \leq 16$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

El planteamiento gráfico es :



8.3.1. Forma Standard:

$$Z - 3X_1 - 4X_2 = 0$$
$$X_1 + X_2 - h_1 + a_1 = 2$$
$$4X_1 + 2X_2 + h_3 = 16$$

8.3.2. Primera Fase:

$$MinW = a_1 \xrightarrow{f.Std.} -W + a_1 = 0$$
$$X_1 + X_2 - h_1 + a_1 = 2$$
$$4X_1 + 2X_2 + h_3 = 16$$

X_B	W	X_1	X_2	h_1	h_2	a_1	b

W	-1	0	0	0	0	1	0
a_1	0	1	1	-1	0	1	2
h_2	0	4	2	0	1	0	16

Esta solución inicial corresponde al punto A de la gráfica, el origen, donde todas las variables de decisión son nulas, pero no es factible ya que no cumple con la restricción 1. La variable artificial corresponde a esta restricción, representando que tan alejado está el punto de la restricción, pero en el área no factible.

8.3.3. Tabloide inicial: coeficientes de costos = 0

$Fila(W) = Fila(W) - Fila(a_1)$

X_B	W	X_1	X_2	h_1	h_2	a_1	b
W	-1	-1	-1	1	0	0	-2
a_1	0	1	1	-1	0	1	2
h_2	0	4	2	0	1	0	16

8.3.4. Criterio de Optimalidad: Aun no es óptimo porque hay $-c_j$ negativos

La variable entrante puede ser X_1 ó X_2. Seleccionamos X_1

8.3.5. Criterio de Factibilidad:

Para escoger la variable básica saliente hallamos el mínimo entre:

$$Min\left\{\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2, \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{16}{4} = 4\right\} = 2$$

Por lo tanto, la variable saliente es a_1

8.3.6. Operaciones de Renglón de Gauss-Jordan:

Pivote = a_{11} = 1

$$Fila(W) = Fila(W) - Fila(X_1)$$

X_B	W	X_1	X_2	h_1	h_2	a_1	b
W	-1	0	0	0	0	1	0
X_1	0	1	1	-1	0	1	2
h_2	0	4	2	0	1	0	16

$Fila(h_2) = Fila(h_2) - 4 \times Fila(X_1)$

X_B	W	X_1	X_2	h_1	h_2	a_1	b
W	-1	0	0	0	0	1	0
X_1	0	1	1	-1	0	1	2
h_2	0	0	-2	4	1	-4	8

Fin de la Fase 1. El problema es factible.

Esta solución corresponde al punto B de la gráfica. Ya es una solución factible, porque es un extremo de la región factible. Por eso se puede dar por completada la primera fase: Se encontró una primera solución factible al problema. Falta encontrar la solución óptima.

8.3.7. Segunda Fase

Armar el nuevo tabloide, sustituyendo la función W por la función Z, y eliminar las variables artificiales.

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	-3	-4	0	0	0
X_1	0	1	1	-1	0	2
h_2	0	0	-2	4	1	8

8.3.8. Hacer '0' los coeficientes de costos de las variables Básicas:

$Fila(Z) = Fila(Z) + 3 \times Fila(X_1)$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	0	-1	-3	0	6
X_1	0	1	1	-1	0	2
h_2	0	0	-2	4	1	8

8.3.9. Criterio de Optimalidad: Aun no es óptimo porque hay $-c_j$ negativos

La variable entrante es h_1

8.3.10. Criterio de Factibilidad:

La única variable candidata a salir es h_2

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	0	-1	-3	0	6
X_1	0	1	1	-1	0	2
h_2	0	0	-2	4	1	8

8.3.11. Operaciones de Renglón de Gauss-Jordan:

Pivote = a_{23} = 4

$Fila(h_2) = \frac{Fila(h_2)}{4}$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	0	-1	-3	0	6
X_1	0	1	1	-1	0	2
h_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	2

$Fila(X_1) = Fila(X_1) + Fila(h_1)$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	0	-1	-3	0	6
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	4
h_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	2

$Fila(Z) = Fila(Z) + 3 \times Fila(h_1)$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	12
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	4
h_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	2

Esta solución factible, resultado de la primera iteración de la segunda fase, corresponde al punto C de la gráfica, donde la variable X_1 vale 4 y X_2 es nula. La variable h_2 es nula porque el punto que estamos evaluando (el punto C) se encuentra sobre la restricción 2.

8.3.12. Criterio de Optimalidad: Aun no es óptimo porque hay $-c_j$ negativos

La variable entrante es X_2

8.3.13. Criterio de Factibilidad:

La única variable candidata a salir es X_1

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	12
X_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	4
h_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	2

8.3.14. Operaciones de Renglón de Gauss-Jordan:

Pivote = a_{23} = $\frac{1}{2}$

$Fila(X_1) = 2 \times Fila(X_1)$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	12
X_2	0	2	1	0	$\frac{1}{2}$	8
h_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	2

$Fila(h_1) = Fila(h_1) + Fila(X_1)$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	12
X_2	0	2	1	0	$\frac{1}{2}$	8
h_1	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	6

$Fila(Z) = Fila(Z) + \frac{5}{2} Fila(X_2)$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	5	0	0	2	32
X_2	0	2	1	0	$\frac{1}{2}$	8
h_1	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	6

Por criterio de optimalidad, el problema llegó a su solución final.

Solución: $X_1 = 0$; $X_2 = 8$; $Z = 32$

La solución óptima, resultado de la segunda iteración de la segunda fase, corresponde al punto D de la gráfica, donde la variable X_2 vale 8 y X_1 es nula. La variables h_2 es nula porque el punto que estamos evaluando (el punto D) se encuentra sobre la restricción 2.

8.4. Bibliografía

- Hamdy A. Taha. 'Investigación de Operaciones', 7ma. Edición

9. El Método de la M

9.1. Objetivo: Es exactamente igual al algoritmos de las dos Fases.

9.2. Algoritmo:

j. Forma Standard para las restricciones (el resto del sistema se trata como se explicó en Simplex):
Restricciones: debemos tener ecuaciones de igualdades. Para esto se deben introducir variables de holgura (h_i) en caso de ser necesario, según el tipo de ecuaciones:

   6. ' $\leq$ ' : agregar una variable de holgura sumando ($+ h_i$)
   7. ' $\geq$ ' : agregar una variable de holgura restando y una variable artificial sumando ($- h_i + a_i$)
   8. ' = ' : agregar, únicamente, una variable artificial sumando ($+ a_j$)

d. Si todas las ecuaciones tienen holguras sumadas ($+ h_i$) aplicar el método Simplex ya explicado

e. Si tenemos ecuaciones con variables artificiales aplicar el Método de M:

   1. Resolver el nuevo problema $MaxZ = \sum c_j \times X_j - M \times \sum a_{ij}$; sujeto a las restricciones del problema original. Las M representan un valor muy grande, por lo tanto, un beneficio de -M es muy negativo y no favorece al objetivo de maximizar, por lo tanto, el Simplex hará que estas variables salgan de la base, para que tomen un valor 0 y la -M no tome efecto en el objetivo.
   2. Llenar el tabloide inicial:

X_B	Z	X_1	X_2	...	X_n	h_1	h_2	...	h_m	a_1	...	a_p	b
Z	-1	$-c_1$	$-c_2$		$-c_n$	0	0	0	0	M		M	0
a_1	0	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	-1	0	0	0	1		0	b_1
a_2	0	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	0	-1	0	0	0		0	b_2
.	0												
a_p	0	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0	0	-1	0		1	b_m

   3. Eliminar los coeficientes M de las variables artificiales. Como vemos en el tabloide, las variables básicas iniciales son las artificiales, pero contienen coeficiente de costo igual a M, por lo que hay que aplicar operaciones de Renglón de Gauss-Jordan a la función objetivo, y hacer 0 dichos coeficientes:
   $Fila(Z) = Fila(Z) - M \times Fila(a_1) - M \times Fila(a_2) .... - M \times Fila(a_p)$
   4. Aplicar método Simplex
   5. Si no es posible llegar a una solución óptima sin variables artificiales como variables básicas entonces el problema no tiene solución factible

6. Si llegamos a una solución factible sin variables artificiales como básicas, entonces eliminamos las columnas de las variables artificiales, y aplicar Simplex.

9.3. Ejemplo: Realicemos el mismo ejemplo del capítulo anterior para ver las diferencias entre los dos métodos.

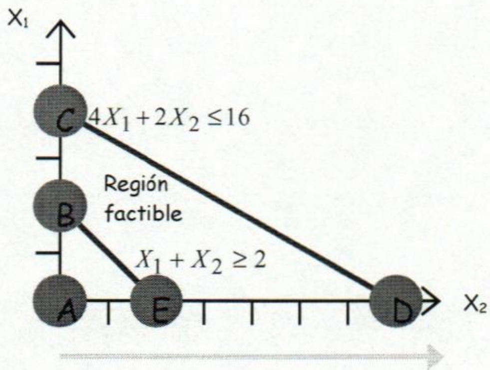
$MaxZ = 3X_1 + 4X_2$

$X_1 + X_2 \geq 2$

$4X_1 + 2X_2 \leq 16$

$X_1, X_2 \geq 0$

El planteamiento gráfico es :



9.3.1. Forma Standard:

$Z - 3X_1 - 4X_2 = 0$

$X_1 + X_2 - h_1 + a_1 = 2$

$4X_1 + 2X_2 + h_3 = 16$

9.3.2. Agregar las variables artificiales a la función objetivo:

$Z - 3X_1 - 4X_2 + Ma_1 = 0$

$X_1 + X_2 - h_1 + a_1 = 2$

$4X_1 + 2X_2 + h_3 = 16$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	a_1	b
Z	1	-3	-4	0	0	M	0
a_1	0	1	1	-1	0	1	2
h_2	0	4	2	0	1	0	16

9.3.3. Tabloide inicial: coeficientes de costos = 0

$Fila(Z) = Fila(Z) - M \times Fila(a_1)$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	a_1	b
Z	1	-3-M	-4-M	M	0	0	-2M
a_1	0	1	1	-1	0	1	2
h_2	0	4	2	0	1	0	16

Esta solución inicial corresponde al punto A de la gráfica, el origen, donde todas las variables de decisión son nulas, pero no es factible ya que no cumple con la restricción 1. La variable artificial corresponde a esta restricción, representando que tan alejado está el punto de la restricción, pero en el área no factible.

9.3.4. Criterio de Optimalidad: Aun no es óptimo porque hay $-c_j$ negativos
La variable entrante puede ser X_1 ó X_2. Seleccionamos X_2 por ser un poco más negativa, aunque al representar M un valor muy grande, se hace insignificante la diferencia de una unidad.

9.3.5. Criterio de Factibilidad:
Para escoger la variable básica saliente hallamos el mínimo entre:

$$Min\left\{\frac{b_1}{a_{12}}=\frac{2}{1}=2, \frac{b_2}{a_{22}}=\frac{16}{2}=8\right\}=2$$

Por lo tanto, la variable saliente es a_1

9.3.6. Operaciones de Renglón de Gauss-Jordan:
Pivote = a_{11} = 1

$$Fila(Z)=Fila(Z)+(4+M)\times Fila(X_2)$$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	a_1	b
Z	1	1	0	-4	0	4+M	8
X_2	0	1	1	-1	0	1	2
h_2	0	4	2	0	1	0	16

$$Fila(h_2)=Fila(h_2)-2\times Fila(X_2)$$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	a_1	b
Z	1	1	0	-4	0	4+M	8
X_2	0	1	1	-1	0	1	2
h_2	0	2	0	2	1	-2	12

Esta solución corresponde al punto E de la gráfica. Ya es una solución factible, porque es un extremo de la región factible y no hay variables artificiales dentro de la base. Falta encontrar la solución óptima.
Vamos a seguir ejecutando el problema, eliminando las variables artificiales.

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	1	0	-4	0	8
X_2	0	1	1	-1	0	2
h_2	0	2	0	2	1	12

9.3.7. Criterio de Optimalidad: Aun no es óptimo porque hay $-c_j$ negativos
La variable entrante es h_1

9.3.8. Criterio de Factibilidad:
La única variable candidata a salir es h_2

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	1	0	-4	0	8
X_2	0	1	1	-1	0	2
h_2	0	2	0	2	1	12

9.3.9. Operaciones de Renglón de Gauss-Jordan:
Pivote = a_{23} = 4

$$Fila(h_2)=\frac{Fila(h_2)}{2}$$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	1	0	-4	0	8
X_2	0	1	1	-1	0	2
h_1	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	6

$Fila(X_2) = Fila(X_2) + Fila(h_1)$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	1	0	-4	0	8
X_2	0	2	1	0	$\frac{1}{2}$	8
h_1	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	6

$Fila(Z) = Fila(Z) + 4 \times Fila(h_1)$

X_B	Z	X_1	X_2	h_1	h_2	b
Z	1	5	0	0	2	32
X_2	0	2	1	0	$\frac{1}{2}$	8
h_1	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	6

Por criterio de optimalidad, el problema llegó a su solución final.
Solución: $X_1 = 0$; $X_2 = 8$; $Z = 32$

La solución óptima, resultado de la segunda iteración, corresponde al punto D de la gráfica, donde la variable X_2 vale 8 y X_1 es nula. La variables h_2 es nula porque el punto que estamos evaluando (el punto D) se encuentra sobre la restricción 2.

9.4. Bibliografia:

- Hamdy A. Taha. 'Investigación de Operaciones', 7ma. Edición

10. Simplex Revisado

10.1. Objetivo: Resuelve los problemas con la misma teoría del Simplex, pero utilizando matrices y vectores.

10.2. Formulación:

Max Z = c*X
S.a: A*X <= b
X >= 0

Donde: $c = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$ Vector Costos

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_B = \begin{pmatrix} X_{B1} \\ X_{B2} \\ \vdots \\ X_{Bm} \end{pmatrix}$$

Vector Variables de Decisión

Vector Recursos

Vector Cero

Vector Variables Básicas (una por cada fila)

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

Vector Variables de holgura

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz de Distribución de Recursos

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{pmatrix}$$

Matriz Básica de Recursos

El **tabloide inicial** se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1, -C, 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Z \\ X \\ h \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} A, I \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ h \end{bmatrix} = b$$

$$X, h >= 0$$

Si desglosamos el problema en variables básicas, variables no básicas y variables de holgura, quedaría:

$$\begin{bmatrix} 1, -C_{NB}, , -C_B, 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Z \\ X_{NB} \\ X_B \\ h \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} A_{NB}, B, I \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_{NB} \\ X_B \\ h \end{bmatrix} = b$$

Entonces quedaría el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} Z - C_{NB} * X_{NB} - C_B * X_B + 0 * h &= 0 \\ A_{NB} * X_{NB} + B * X_B + I * h &= b \end{aligned}\right. \quad \text{Sistema de Ecuaciones 1}$$

En el tabloide óptimo, donde las variables X_B ya son básicas, por lo tanto se obtendría el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} Z - \hat{C}_{NB} * X_{NB} - 0 * X_B + \hat{C}_h * h &= Z^* \\ \bar{A}_{NB} * X_{NB} + I * X_B + \bar{A}_h * h &= b' \end{aligned}\right. \quad \text{Sistema de Ecuaciones 2}$$

La pregunta es ¿cómo llegar del Sistema de ecuaciones 1 al sistema de ecuaciones 2 a través de operaciones entre ellas?

1.- Para buscar la identidad, que acompaña a las X_B en el sistema de ecuaciones 2 hacemos lo siguiente:

$$B^{-1} * (A_{NB} * X_{NB} + B * X_B + I * h = b)$$
$$B^{-1} * A_{NB} * X_{NB} + B^{-1} * B * X_B + B^{-1} * I * h = B^{-1} * b$$
$$B^{-1} * A_{NB} * X_{NB} + I * X_B + B^{-1} * h = B^{-1} * b$$

2.- Para hacer 0 los coeficientes de costos de las variables básicas, C_B en el sistema de ecuaciones 2 se suman las siguiente ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} Z & - C_{NB} * X_{NB} - C_B * X_B + & 0 * h = 0 \\ + & C_B * (B^{-1} * A_{NB} * X_{NB} + I * X_B + & B^{-1} * h = B^{-1} * b) \\ \hline \end{array}$$

$$Z - (C_{NB} - C_B * B^{-1} * A_{nB}) * X_{NB} - 0 * X_B + C_B * B^{-1} * h = C_B * B^{-1} * b$$

Quizá sea más fácil visualizarlo en los tabloides:

Tabloide Inicial

Base	Z	X_{NB}	X_B	h	b
Z	1	$-C_{NB}$	$-C_B$	0	0
h	0	A_{NB}	B	I	b

Tabloide óptimo:

Base	Z	X_{NB}	X_B	h	b
Z	1	$-\hat{C}_{NB}=-(C_{NB} - C_B*B^{-1}*A_{nB})$	0	$\hat{C}_h=\Pi=C_B*B^{-1}$	$Z^*=C_B*B^{-1}*b$
X_B	0	$\bar{A}_{NB}=B^{-1} * A_{NB}$	I	B^{-1}	$b'= B^{-1} * b$

Fórmulas:

$X_B = b_{nuevo} = B^{-1} * b$

$\Pi=C_B*B^{-1}$

$Z_{nuevo} = C_B * B^{-1} * b = \Pi*b = C_B * b_{nuevo}$

$A_{NB\ (nuevo)} = B^{-1} * A_{NB}$

$-C_{NB\ (nuevo)} = -C_{NB} + C_B * B^{-1} * A_{NB} = -C_{NB} + \Pi * A_{NB} = -C_{NB} + C_B * A_{NB\ (nuevo)}$

10.3. Ejemplo:

Max Z = 3X1 + 5X2

S.a: X1 <= 4

2X2 <= 12

3X1 + 2X2 <= 18

X1, X2 >= 0

$c = [\,3\ \ 5\,]$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Iteración 0:

$$X_B = \begin{pmatrix} h1 \\ h2 \\ h3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Criterio de Optimalidad: ¿ $-C_{NB} \geq 0$?
   $-C_{NB} = [\,-3\ \ -5\,]$; $X_{NB} = [\,X1\ \ X2\,]$ -> Variable entrante es X2
2. Criterio de factibilidad:

$$\min_{i=1}^{i=3}\left\{\frac{b_i}{A_{i2}}\right\} = \min\left\{-,\frac{12}{2},\frac{18}{2}\right\} = 6$$ -> Variable saliente es h2

Iteración 1:

$$X_B = \begin{pmatrix} h1 \\ X2 \\ h3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{it1} = B^{-1} * b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} h1 \\ X2 \\ h3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$Z_{it1} = c_B * B^{-1} * b = \quad c_B * b_{it1} = [\,0 \;\; 5 \;\; 0\,] * \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 30$$

1. Criterio de Optimalidad: ¿ $-C_{NB} \geq 0$?
   $X_{nB} = [\,X1 \;\; h2\,]$
   $-C_{NB\,(nuevo)} = -C_{NB} + C_B * B^{-1} * A_{NB} =$
   $$-C_{NB\,(nuevo)} = -[\,3 \;\; 0\,] + [\,0 \;\; 5 \;\; 0\,] * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = [\,-3 \;\; 5/2\,]$$

   ➔ Variable entrante es X1 ($-C_{NB\,(nuevo)} = -3$)
   ➔
2. Criterio de factibilidad:
   $$A_{1\,nuevo} = B^{-1} * A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\min_{i=1}^{i=3}\left\{\frac{b_{(it1)i}}{A_{i1}}\right\} = \min\left\{\frac{4}{1}, -, \frac{6}{3}\right\} = 2 \quad \to \quad \text{Variable saliente es h3}$$

Iteración 2:

$$X_B = \begin{pmatrix} h1 \\ X2 \\ X1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$b_{it2} = B^{-1} * b = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} h1 \\ X2 \\ X1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Z_{it2} = C_B * B^{-1} * b = \quad C_B * b_{it1} = [\,0 \;\; 5 \;\; 3\,] * \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36$$

1. Criterio de Optimalidad: ¿ $- C_{NB} \geq 0$?
   $X_{NB} = [\, h2 \quad h3 \,]$
   $-C_{NB\,(nuevo)} = - C_{NB} + C_B * B^{-1} * A_{NB} =$
   $$-C_{NB\,(nuevo)} = - [\,0 \;\; 0\,] + [\,0 \;\; 5 \;\; 3\,] * \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [\,3/2 \quad 1\,]$$

   -> Solución Óptima ($-C_{NB\,(nuevo)} >= 0$)

10.4. Bibliografia:

- Hamdy A. Taha. 'Investigación de Operaciones', 7ma. Edición

11. Análisis de Dualidad y Dual Simplex

11.1. Definición del problema Dual:
Es un problema de P.L. auxiliar que se define directa y sistemáticamente a partir del modelo de P.L. original o Primal. Los dos problemas están relacionados de forma tan estrecha que la resolución óptima de uno de los problemas produce, de forma automática, la resolución óptima del otro. Por eso, cuando la formulación del problema dual es más sencilla que la del primal, uno puede trabajar con el problema dual en lugar del primal, para luego obtener la solución del primal

11.2. Reglas para la obtención del Dual, a partir del Primal:

- Para toda restricción primal hay una variable dual,
- Para toda variable primal hay una restricción dual,
- Los coeficientes de las restricciones de una variable primal forman los coeficientes del primer miembro de la restricción dual correspondiente; y el coeficiente de la función objetivo de la misma variable se convierte en el segundo miembro (vector recurso) de la restricción dual;
- El sentido de la optimización, el tipo de restricciones y signo de las variables se muestra en la siguiente tabla:

PRIMAL		**DUAL**	
Función Objetivo	Restricción	Función Objetivo	Signo de variables
Maximizar	$\leq$	Minimizar	Positivas
	$\geq$		Negativas
	$=$		S.R.S.
Función Objetivo	Signo de variables	Función Objetivo	Restricción
Maximizar	Positivas	Minimizar	$\geq$
	Negativas		$\leq$
	S.R.S.		$=$

11.3. Ejemplo:

Problema Primal

Max $Z = 5X1 + 12X2 + 4X3$

S.a $X1 + 2X2 + X3 \leq 10$

$2X1 - X2 + 3X3 = 8$

$4X1 + X2 - X3 \geq 9$

$X1 \geq 0$; $X2 \leq 0$; X3 S.R.S.

Problema Dual

Min $Y = 10Y1 + 8Y2 + 9Y3$

S.a $Y1 + 2Y2 + 4Y3 \geq 5$

$2Y1 - Y2 + Y3 \leq 12$

$Y1 + 3Y2 - Y3 = 4$

$Y1 \geq 0$; $Y2 \leq 0$; Y3 S.R.S.

11.4. Interpretación Económica del Dual:

Problema Primal		Problema Dual	
Max Z = CX		Min Y = Yb	
S.a	$AX \leq b$	S.a	$YA \geq C$
	$X \geq 0$		$Y \geq 0$

- Variables duales: representan el valor por unidad de recurso (precios sombras). Siempre $Z \leq Y$, y el óptimo se encuentra cuando son iguales, donde se consigue el equilibrio entre la entrada y la salida.
- Restricciones duales: representan el costo aplicable de todos los recursos que se utilizan para producir una unidad de la actividad; supera a las ganancias.
- Nota importante: Los multiplicadores del Simplex se encuentran como los coeficientes de las variables básicas iniciales (variables de holgura) y corresponden a los valores de las variables del dual.

11.5. Método Dual Simplex: Nuevo método de solución para problemas lineales, que comienzan infactibles pero óptimos (mejor que). Conservará la optimalidad y las iteraciones sucesivas trabajarán sobre la factibildad. Finaliza cuando el problema se hace óptimo y factible.

Ejemplo: Expliquemos el algoritmo utilizando un ejemplo, ya que son pasos muy parecidos al Algoritmo del Simplex

Min Z = 2X1 + X2

S.a: $3X1 + X2 \geq 3$

$4X1 + 3X2 \geq 6$

$X1 + 2X2 \leq 3$

$X1, X2 \geq 0$

Al evaluar este problema en el punto origen (X1=0,X2=0), nos damos cuenta que no satisface las restricciones pero sería la mejor solución al problema. Por lo tanto, el Algoritmo Dual Simplex, comienza a buscar puntos solución lo más cercano a este punto óptimo, pero factible a las restricciones.

Algoritmo:

1.- Convertir el problema a: Función objetivo Maximizar y restricciones $\leq$.

- Para convertir una función objetivo de Max a Min se multiplica toda la función por -1.
- Para convertir una restricción $\geq$ en $\leq$ se multiplica toda la restricción por -1.
- Para convertir una restricción de igualdad (=) en desigualdad ($\geq$, $\leq$), se formulan dos restricciones, iguales a la original, pero una con $\geq$ y otra con $\leq$.
- pueden aparecer valores en el vector recurso negativos, y nunca se van a manejar variables artificiales.

Max $-Z = -2X1 - X2$

S.a: $-3X1 - X2 \leq -3$

$-4X1 - 3X2 \leq -6$

$X1 + 2X2 \leq 3$

$X1, X2 \geq 0$

2.- Convertir las restricciones en igualdades, agregando variables de holguras:

$-Z + 2X1 + X2 = 0$

$-3X1 - X2 + h1 = -3$

$-4X1 - 3X2 + h2 = -6$

$X1 + 2X2 + h3 = 3$

$X1, X2, h1, h2, h3 \geq 0$

3.- Llenar el tabloide como en Simplex:

Vb	Z	X1	X2	h1	h2	h3	b
Z	-1	2	1	0	0	0	0
h1	0	-3	-1	1	0	0	-3
h2	0	-4	-3	0	1	0	-6
h3	0	1	2	0	0	1	3

4.- Aplicar criterio de Factibilidad: La variable que sale es la más negativa. Si todas son no negativas el proceso termina y se alcanza la solución factible (y óptima).

Vb	Z	X1	X2	h1	h2	h3	b	
Z	-1	2	1	0	0	0	0	
h1	0	-3	-1	1	0	0	-3	
h2	0	-4	-3	0	1	0	-6	⟸ Sale h2
h3	0	1	2	0	0	1	3	

5.- Aplicar criterio de optimalidad: La variable que entra se elige como sigue: tomar los coeficientes en Z de las variables no básicas entre los coeficientes de la restricción de la variable que sale; ignorando los coeficientes mayores o iguales a 0 (positivos). La variable que entra es aquella con el cociente más pequeño: X1 obtuvo -2/4 y X2 obtuvo -1/3, por lo tanto entra X1.

6.- Se procede a transformar la tabla, al igual que en Simplex, buscando 1 en el pivote y 0 en el resto de la columna

Vb	Z	X1	X2	h1	h2	h3	b	Comentarios
Z	-1	2	1	0	0	0	0	
h1	0	-3	-1	1	0	0	-3	
h2	0	-4	-3	0	1	0	-6	
h3	0	1	2	0	0	1	3	
Vb	Z	X1	X2	h1	h2	h3	b	
Z	-1	2/3	0	0	1/3	0	-2	Ec.Z - Ec.X2
h1	0	-5/3	0	1	-1/3	0	-1	Ec.h1 + Ec.X2
X2	0	4/3	1	0	-1/3	0	2	Ec.h2 / -3
h3	0	-4/3	0	2	1/3	0	-1	Ec.h3 - Ec.X2
Vb	Z	X1	X2	h1	h2	h3	b	
Z	-1	0	0	2/5	1/5	0	-12/5	Ec.Z - 2*Ec.X1/3
X1	0	1	0	-3/5	1/5	0	3/5	Ec.h1 * 3 / -5
X2	0	0	1	4/5	-3/5	0	6/5	Ec.X2 - 4*Ec.X1/3
h3	0	0	0	-1	1	1	0	Ec.h3 - 4*Ec.X1/3

11.6. Bibliografia:

- Hamdy A. Taha. 'Investigación de Operaciones', 7ma. Edición

12. Análisis de Sensibilidad

12.1. Objetivo: Investigar el efecto que tiene sobre la solución óptima el hecho de hacer cambios en los valores de los parámetros del modelo (A_{ij}, b_j, c_i)

12.2. Problema Original:

Max Z = $c*X$

S.a: $A*X <= b$

$X >= 0$

12.3. Fórmulas:

$$X_B = b_{nuevo} = B^{-1} * b$$
$$Z_{nuevo} = c_B * B^{-1} * b$$
$$c_{nb\ (nuevo)} = c_{nb} - c_B * B^{-1} * A_{nB}$$
$$A_{nB\ (nuevo)} = B^{-1} * A_{nB}$$

12.4. Casos:

12.4.1. Cambios en b (vector recurso)

Afecta, únicamente, la factibilidad de la solución.

Solución:

- Halla los nuevos valores de $X_B = b_{nuevo} = B^{-1} * b$ y sustituirlos en el tabloide
- Hallar los valores de $Z_{nuevo} = c_B * B^{-1} * b$ y sustituirlos en el tabloide
- Si todos los valores de b_{nuevo} permanecen positivos (≥0) entonces la solución sigue siendo factible pero con nuevos valores para la función objetivo y para las variables. **FIN DEL ALGORITMO**
- Si algunos de los valores de b_{nuevo} da negativo (< 0) entonces la solución actual no es factible al problema, entonces hay que aplicar el algoritmo Dual Simplex.

12.4.2. Cambios en los coeficientes de una variable no básica (C_i y/o a_{ij})

Afecta la optimalidad de la solución actual. Si revisamos el dual del problema, entonces si la solución actual deja de ser óptima entonces el dual deja de ser factible.

Solución:

- Evaluar la restricción modificada en el dual, y determinar si dejó de ser factible, por lo que también deja de ser óptima en el primal.
- Si la satisface. Sigue siendo óptima en el primal. **FIN DEL ALGORITMO**
- Si no se satisface la restricción del dual
- Hallar nuevo coeficiente $-C_{NB\ (nuevo)} = -C_{NB} + C_B * B^{-1} * A_{NB}$, El cual debería dar negativo (no óptimo)
- Hallar nueva columna: $A_{NB\ (nuevo)} = B^{-1} * A_{NB}$
- Aplicar Simplex

12.4.3. Introducción de una nueva variable

Afecta la optimalidad, porque la variable debe entrar en la base. Al dejar de ser óptimo, deja de ser factible en el dual.

Solución:

- Evaluar las variables del dual en la restricción nueva
- Si la satisface. Sigue siendo óptima en el primal: **FIN DEL ALGORITMO**
- Si no la satisface:
- Hallar nuevo coeficiente: $-C_{NB\ (nuevo)} = -C_{NB} + C_B * B^{-1} * A_{NB}$, El cual debería dar negativo (no óptimo)
- Hallar nueva columna: $A_{NB\ (nuevo)} = B^{-1} * A_{NB}$
- Aplicar Simplex

12.4.4. Cambios en los coeficientes de una variable básica (c_{Bi} y/o a_{ij})

Afecta optimalidad y factibilidad.

Solución:

- Hallar la nueva B y B^{-1}, si modificó a_{ij}
- Hallar nuevos coeficientes $-C_{i\ (nuevo)} = -C_i + C_B * B^{-1} * A_i$, El cual debería dar negativo (no óptimo)
- Hallar nuevas columnas: $A_{NB\ (nuevo)} = B^{-1} * A_{NB}$
- Hallar nuevo $b_{nuevo} = B^{-1} * b$
- Hallar nuevo $Z_{nuevo} = C_B * B^{-1} * b$
- Reducir tabloide para forma Standard
- Aplicar Simplex

12.4.5. Introducción de unan nueva restricción

Afecta factibilidad, por la solución actual puede dejar de ser factible a la nueva restricción.

Solución:

- Probar la solución óptima en la restricción.
- Si da factible no impacta la solución: **FIN DEL ALGORITMO**
- Si no cumple la restricción:
- Se agrega al tabloide con las variables de holgura correspondiente
- Se reduce a la forma Standard
- Dual Simplex

12.5. Bibliografia:

- Hamdy A. Taha. 'Investigación de Operaciones', 7ma. Edición

13. Modelo de Transporte

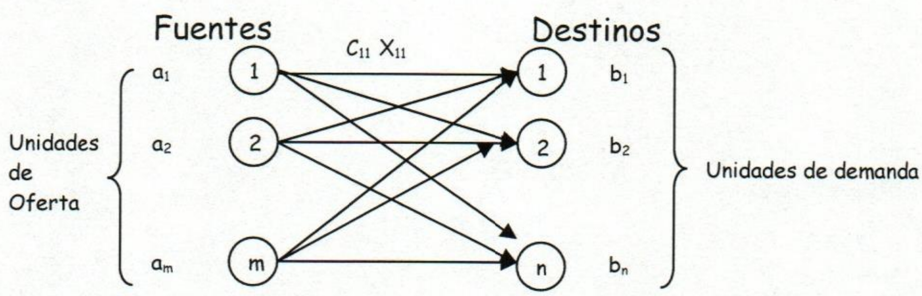
13.1. Objetivo: Determinar el plan de costo mínimo para transportar mercancía desde varias fuentes a varios destinos.

13.2. Formulación: Técnica de transporte

k. Datos de entrada:
   1. Nivel de oferta en cada fuente,
   2. Cantidad de demanda en cada destino,
   3. Costo de transporte unitario de la mercancía de cada fuente a cada destino.

l. Variables de decisión: cantidad de mercancía que se enviará de cada fuente a cada destino

m. Función Objetivo: Minimizar costos de transporte total



Modelo:

Minimizar $Z = \Sigma \Sigma C_{ij} X_{ij}$

Sujeto a:

$\Sigma X_{ij} \leq a_i \qquad i = 1,2,\dots, m$

$\Sigma X_{ij} \geq b_j \qquad j = 1,2,\dots, n$

$X_{ij} \geq 0 \qquad$ para toda i y j

Modelo de transporte balanceado:

$\Sigma a_i = \Sigma b_j$;

Entonces las restricciones son igualdades:

$\Sigma X_{ij} = a_i \qquad i = 1,2,\dots, m$

$\Sigma X_{ij} = b_j \qquad j = 1,2,\dots, n$

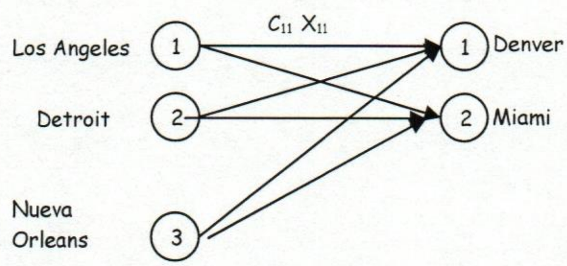
13.3. Ejemplo:

La Ford 2004 tiene plantas en Los Angeles, Detroit y Nueva Orleans. Sus centros de distribución principales están en Denver y Miami. Las capacidades de las tres plantas durante el próximo trimestre son de 1000, 1500 y 1200 automóviles, respectivamente. Las demandas trimestrales en los dos centros de distribución son 2300 y 1400 vehículos. El costro del transporte por tren es aproximadamente de 8 centavos por milla. El diagrama de distancias entre centros y plantas es el siguiente:

	Denver	**Miami**
Los Angeles	1000	800
Detroit	1250	1350
Nueva Orleáns	1275	850

Por lo tanto la tabla de costos es:

	Denver	**Miami**
Los Angeles	80	64
Detroit	100	108
Nueva Orleáns	102	68



Formulación:

Minimizar $Z = 80 X_{11} + 64 X_{12} + 100 X_{21} + 108 X_{22} + 102 X_{31} + 68 X_{32}$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
X_{11} + X_{12} &= 1000\\
X_{21} + X_{22} &= 1500\\
X_{31} + X_{32} &= 1200\\
X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 2300\\
X_{21} + X_{22} + X_{32} &= 1400
\end{aligned}
$$

$X_{ij} \geq 0$ para toda i y j

Resolución:

Tabla de transporte

		Destinos: Denver	Destinos: Miami	Oferta
Fuentes	Los Angeles	X_{11} [80]	X_{12} [64]	1000
	Detroit	X_{21} [100]	X_{22} [108]	1500
	Nueva Orleans	X_{31} [102]	X_{32} [68]	1200
	Demanda	2300	1400	

Algoritmo:

1. **Determinar solución factible inicial:** utilizando la regla de la esquina Nor-Oeste

		Denver	Miami	
Fuentes	Los Angeles	1000 [80]	[64]	1000
	Detroit	1300 [100]	200 [108]	1500
	Nueva Orleans	[102]	1200 [68]	1200
		2300	1400	

a. Empezar en X_{11}: $X_{11} = \min \{ a_1 , b_1 \}$
b. Si $X_{11} = a_1$ entonces
   i. Próxima var. Básica: X_{21}
   ii. $b_1 = b_1 - a_1$
   iii. $a_1 = 0$
c. Sino
   i. Próxima var. Básica: X_{12}
   ii. $a_1 = a_1 - b_1$
   iii. $b_1 = 0$
d. En forma general: $X_{ij} = \min \{ a_i , b_j \}$
e. Si $X_{ij} = a_i$ entonces

i. Próxima var. Básica: $X_{i+1,j}$
ii. $b_j = b_j - a_i$
iii. $a_i = 0$

f. Sino

i. Próxima var. Básica: $X_{i,j+1}$
ii. $a_i = a_i - b_j$
iii. $b_j = 0$

2. **Prueba de Optimalidad:** Si $C_{ij} - u_i - v_j \geq 0$ para toda variable no básica estamos en la solución óptima

u_i : multiplicador de la fila i original que se ha restado (directa o indirectamente) de la función objetivo (de la fila 0) durante todas las iteraciones del método Simplex y lo llevaron a la tabla actual.

v_j : multiplicador de la fila m+j original que se ha restado (directa o indirectamente) de la función objetivo (de la fila 0) durante todas las iteraciones del método Simplex y lo llevaron a la tabla actual.

Vb	Z	...	X_{ij}	...	a_i	...	a_{m+j}	...	b	
Z	-1		C_{ij}		M		M		0	
...										
a_i			1		1				b_i	$* u_i$
...										
a_{m+j}			1				1		b_{m+j}	$* v_j$
...										
a_{m+n}										

Para Calcular los $C_{ij} - u_i - v_j$ se trabaja con las variables básicas, ya que $C_{ij} - u_i - v_j = 0$ para ellas. Asignamos 0 al multiplicador más utilizado:

					u_i
	1000 -	80	-24 +	64	-20
	1300 +	100	200 -	108	0
	42	102	1200	68	-40
v_j	100		108		

No óptimo

3. **Identificar Variable entrante:** $C_{ij} - u_i - v_j$ más negativo $\rightarrow X_{12}$
4. **Identificar Variable saliente:** Se hace un circuito, desde la variable entrante, pasando por las variables básicas, y cerrando en la misma variable

entrante; con el cual se van a balancear las cargas sumando y restando, como se muestra en la figura. La variable saliente será la de menor valor, de los que tienen signo '-'.

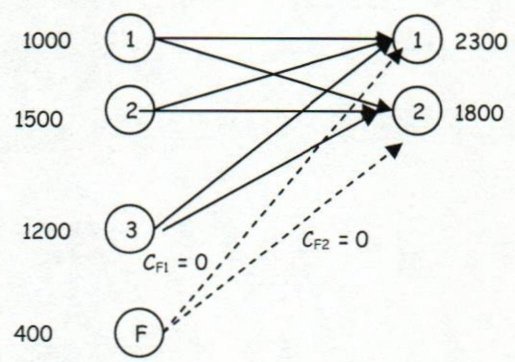
5. **Determinar la solución factible:** El valor de la variable entrante será el mismo de la saliente, y ese valor se sumará y restará a las variables básicas, para compensar la carga, según los signos asignados en el circuito.
6. Volver al paso 2

					u_i
	800	80	200	64	0
	1500	100	24	108	20
	18	102	1200	68	4
v_j	80		64		

Óptimo

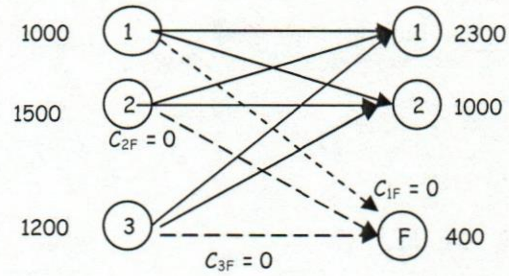
13.4. Cómo balancear cuando hay déficit o exceso:

a. Déficit: demanda mayor que oferta, $\Sigma a_i \leq \Sigma b_j$



Se agrega un nodo ficticio de Fuente, con la capacidad que falta por suplir, y los costos de transporte se representan con un valor muy alto, M.
Capacidad de nodo ficticio F = $\Sigma b_j - \Sigma a_i$ = 2300 + 1800 - 1000 - 1500 - 1200 = 400

b. Exceso: oferta mayor que demanda, $\Sigma\, b_j \leq \Sigma\, a_i$



Se agrega un nodo ficticio de Destino, con la demanda que sobra, y los costos de transporte se representan con un valor muy alto, 0.
Capacidad de nodo ficticio F = $\Sigma\, a_i - \Sigma\, b_j$ = 1000 + 1500 + 1200 - 2300 - 1000 = 400