PRQ1321

TRAB
ED2004
P4

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN

UCAB Universidad Católica Andrés Bello
CENTRO CULTURAL PADRE CARLOS G. PLAZA S.J.
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA SALA P. PLAZA S.J.
PLANTA BAJA REFERENCIA

TRABAJO DE ASCENSO PARA ACCEDER A LA CATEGORÍA DE PROFESOR ASISTENTE

154 PROBLEMAS DE ELECTROSTÁTICA

Realizado por:
Lic. Francisco José Peraza Cabello
Septiembre 2004

Ley de Coulomb - Ley de Gauss - Campo eléctrico - Potencial eléctrico

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

154

PROBLEMAS DE ELECTROSTÁTICA

$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \|\vec{r} - \vec{r}'\|$$

$$\Delta V = -\oint_\ell \vec{E} \circ d\vec{l}$$

Francisco Peraza C.

Ley de Coulomb - Ley de Gauss - Campo eléctrico - Potencial eléctrico

FÍSICA

154 Problemas de Electrostática de:

- *Ley de Coulomb*
- *Campo Eléctrico*
- *Aplicaciones del Campo Eléctrico*
- *Ley de Gauss*
- *Aplicaciones de la Ley de Gauss*
- *Potencial Eléctrico*

PROF. FRANCISCO PERAZA C.

Universidad Católica Andrés Bello

"Dios concede la victoria a la perseverancia".

INTRODUCCIÓN

Este problemario está dirigido a estudiantes del curso universitario "Fundamentos de la Física Eléctrica", en específico, para la primera parte de dicho curso que comprende la "*Electrostática*". El objeto de esta obra, es presentar al estudiante una colección de problemas que le permitan ejercitar y poner a prueba sus conocimientos adquiridos.

No se pretende sustituir al libro de texto, porque considero que existen excelentes libros en el área, su único propósito es complementarlos, ayudando al estudiante a usar las leyes físicas como herramienta para la resolución de problemas.

El problemario se encuentra divido en tres capítulos, los cuales a su vez están divididos en tres partes, estas son:

a.) *Problemas resueltos*: esta parte tiene como finalidad modelar al estudiante los procesos mentales involucrados a la hora de resolver un "*problema físico*", como también de ilustrar y concretar cada uno de los aspectos teóricos de una manera metodológica y didáctica.

b.) *Preguntas*: el objetivo de esta sección es que el estudiante ponga a prueba todo su conocimiento teórico, en su mayoría no hace falta sacar cuentas o son cuentas muy sencillas, pero no por ello dejan de ser una herramienta adicional para la resolución de ejercicios.

c.) *Problemas*: Es una selección de problemas que tienen sus respuestas pero no el procedimiento para llegar a ellas, en algunos casos se presentan ayudas u orientaciones y hay un gran número de ellos que engloban conceptos para impedir que el estudiante los resuelva de una manera mecánica.

Sinceramente espero que esta obra contribuya a elevar el nivel de los estudiantes en la resolución de problemas, como también facilitarle la búsqueda de este material que aparece tan extenso en una amplia bibliografía, pero la destreza necesaria sólo se alcanza trabajando con mucho ahínco. Tengo la creencia que mientras más problemas se realicen, las probabilidades de éxito del estudiante van aumentado proporcionalmente, pero por sobre todas las cosas se debe disfrutar de la Física!

Francisco Peraza
fperaza@ucab.edu.ve

ÍNDICE

CAPÍTULO I ----------*Pág. 1*

Ley de Coulomb, Campo Eléctrico y la Ley de Gauss

Biografía de Charles A. Coulomb ----------*Pág. 2*

Problemas resueltos ---------- *Pág. 3*

Preguntas ----------*Pág. 22*

Problemas ----------*Pág. 24*

CAPÍTULO II ---------- *Pág. 33*

Aplicaciones del Campo Eléctrico, Aplicaciones de la Ley de Gauss

Biografía de Carl F. Gauss ----------*Pág. 34*

Problemas resueltos ----------*Pág. 35*

Preguntas ----------*Pág. 54*

Problemas ----------*Pág. 50*

CAPÍTULO III ---------- *Pág. 65*

Potencial Eléctrico

Biografía de Alessandro Volta ----------*Pág. 66*

Problemas resueltos ----------*Pág. 67*

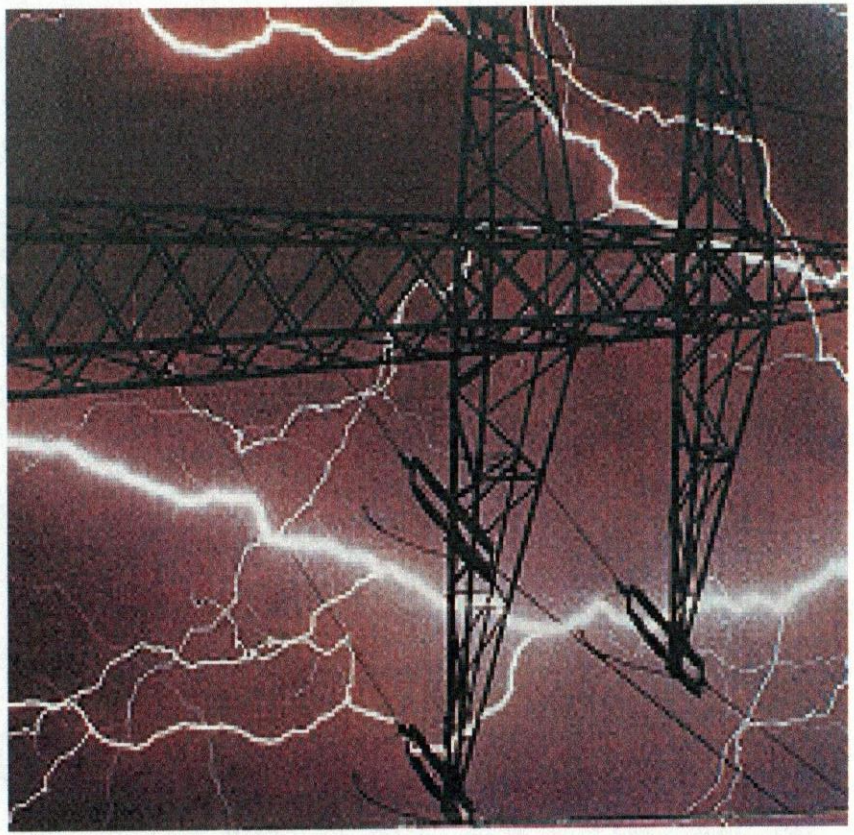
Preguntas ----------*Pág. 81*

Problemas ----------*Pág. 83*

DATOS NUMÉRICOS Y ALGUNAS INTEGRALES ----------*Pág. 91*

BIBLIOGRAFÍA ---------- *Pág. 92*

CAPÍTULO I



LEY DE COULOMB – CAMPO ELÉCTRICO – LEY DE GAUSS

Coulomb, Charles de (1736-1806)

Nació el 14 de junio de 1736 en Angulema, Francia. La formación intelectual y el medio social de Coulomb fueron los habituales en muchos de los científicos franceses de su época. Nacido en una familia que gozaba de una buena posición económica, pero no perteneciente a la aristocracia, fue educado en la *École du Génie* en *Mézieres* y se graduó en 1761 como ingeniero militar con el grado de primer teniente. Coulomb sirvió en las Indias Occidentales durante nueve años, donde supervisó la construcción de fortificaciones en la *Martinic.*

A diferencia de lo sucedido a otros colegas suyos, la Revolución Francesa no alteró excesivamente su trayectoria científica. En 1774, Coulomb se convirtió en un corresponsal de la Academia de Ciencias de París. Compartió el primer premio de la Academia por su artículo sobre las brújulas magnéticas y recibió también el primer premio por su trabajo clásico acerca de la fricción, un estudio que no fue superado durante 150 años. De hecho, en 1801 fue nombrado presidente del *Institut*, el organismo que vino a sustituir a la antigua *Académie.*

Coulomb aprovechó plenamente los diferentes puestos que tuvo durante su vida. Por ejemplo, su experiencia como ingeniero lo llevó a investigar la resistencia de materiales y a determinar las fuerzas que afectan a objetos sobre vigas, contribuyendo de esa manera al campo de la mecánica estructural. También hizo aportaciones en el campo de la ergonomía. Su investigación brindó un entendimiento fundamental de las formas en que la gente y los animales pueden trabajar mejor e influyó de manera considerable en la investigación subsiguiente de Gaspard Coriolis (1792-1843).

La mayor aportación de Coulomb a la ciencia fue en el campo de la electrostática y el magnetismo, en el cual utilizó la balanza de torsión desarrollada por él. El artículo que describía esta invención contenía también un diseño para una brújula utilizando el principio de la suspensión de torsión. Su siguiente artículo brindó una prueba de la Ley del inverso al cuadrado para la fuerza electrostática entre dos cargas. En un sentido amplio de la expresión, podemos decir que Coulomb articuló y extendió la teoría newtoniana de las fuerzas, a la electricidad y el magnetismo, para lo cual era necesaria una cuantificación exacta de las leyes de atracción y repulsión. En una primera etapa, revestía especial importancia derribar la teoría cartesiana de los vórtices, que había cobrado renovadas fuerzas con Leonhard Euler, Daniel y Johann Bernoulli II y François Dutour, quienes defendían la existencia de vórtices magnéticos. Por su parte, Franz Aepinus, John Michell y el propio Coulomb basaron la explicación de los fenómenos eléctricos y magnéticos en el concepto newtoniano de la acción a distancia.

Coulomb murió el 23 de agosto de 1806 en París, Francia., cinco años después de convertirse en presidente del Instituto de Francia (antiguamente la Academia de Ciencias de París). Su investigación sobre la electricidad y el magnetismo permitió que esta área de la física saliera de la filosofía natural tradicional y se convirtiera en una ciencia exacta. En su honor la unidad de carga eléctrica **C** se denomina Coulomb.

CAPITULO I

LEY DE COULOMB - CAMPO ELÉCTRICO-LEY DE GAUSS

"Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor, la electricidad y la energía atómica: la voluntad."

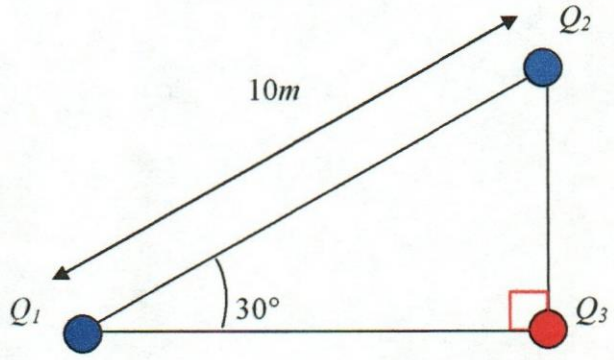
A.Einstein

Problemas resueltos

Problema 1:

Se colocan tres cargas en los vértices de un triángulo rectángulo, $Q_1 = Q_2 = 5\mu C$, $Q_3 = -2\mu C$. Calcule con los datos de la figura:

a. – La fuerza eléctrica que ejerce Q_1 y Q_2 sobre Q_3.
b. – La fuerza eléctrica que ejerce Q_1 y Q_3 sobre Q_2.
c. – El módulo de la fuerza eléctrica que ejerce Q_1 y Q_2 sobre Q_3.

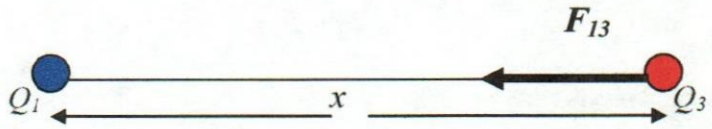


Solución

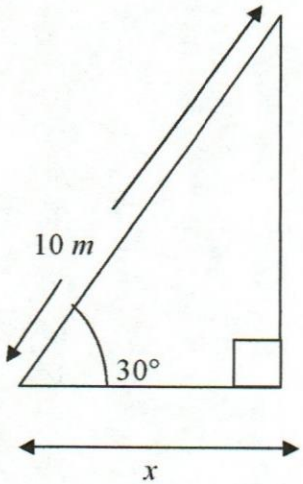
Parte a.)

Debemos hallar la fuerza resultante sobre la carga Q_3, para ello utilizaremos la Ley de Coulomb, y el hecho de que la fuerza resultante es la **suma vectorial** de la fuerza que ejerce Q_1 a Q_3 como si estuvieran ellas dos solas, más la fuerza que ejerce Q_2 a Q_3 como si estuvieran ellas dos solas, esto es, aplicar el **"principio de superposición"**.

Hagámoslo detenidamente, primero calculemos la fuerza que ejerce Q_1 a Q_3.



$F_{13} = \dfrac{KQ_1Q_3}{x^2}$ **(Ley de Coulomb)**, donde "x" es la distancia que las separa, nótese que esta distancia puede ser calculada por trigonometría, ya que "x" es el cateto adyacente del ángulo de 30°, podemos utilizar la relación Cosθ :



$$Cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{x}{10}, \text{ pero: } \theta = 30°, \Rightarrow$$

$$Cos30° = \frac{x}{10}, \text{ despejamos "}x\text{": } x = 10\ Cos30°$$

$$\Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ m, \text{ ahora procedamos a sustituir}$$

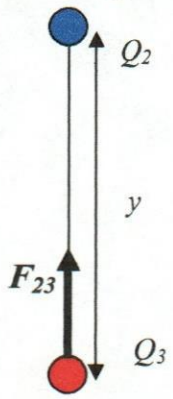
los datos en la Ley de Coulomb:

$$F_{13} = K\frac{Q_1Q_3}{x^2} = K\frac{(5x10^{-6})(2x10^{-6})}{\left(5\sqrt{3}\right)^2} = K\frac{10x10^{-12}}{75} = \frac{2K}{15}x10^{-12} = \frac{2(9x10^9)(10^{-12})}{15} = \frac{6}{5}x10^{-3}\,N$$

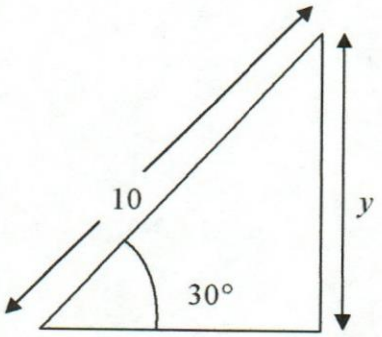
Nótese que hasta el momento hemos calculado el *módulo del vector fuerza*, la dirección es 0°, sentido W (oeste), eso lo podemos escribir en función de los vectores unitarios $e_1 = \mathbf{i}$ (vector unitario a lo largo del eje "x") y $e_2 = \mathbf{j}$ (vector unitario a lo largo del eje "y"), como:

$\vec{F}_{13} = -\dfrac{6}{5}x10^{-3}e_1\ N$ El signo negativo se le asigna, ya que esta fuerza apunta en el sentido opuesto del vector e_1 (Recuerde: cargas de distintos signo se atraen).

Ahora calculemos la fuerza que ejerce la carga Q_2 sobre la carga Q_3:



$F_{23} = \dfrac{KQ_2Q_3}{y^2}$ **(Ley de Coulomb),** pero debemos hallar la distancia "y" que separa las cargas, para ello utilizaremos la relación trigonométrica Senθ.



$\text{Sen}\theta = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{y}{10}$, despejamos "$y$" y tomando en cuenta que: $\theta = 30°$, tenemos que: $\text{Sen}30° = \dfrac{y}{10} \Rightarrow$

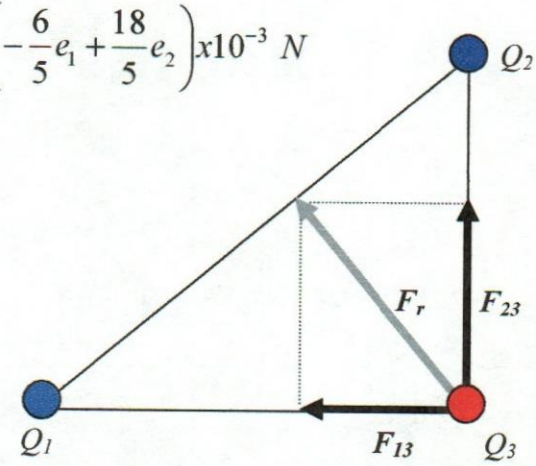
$y = 10\ \text{Sen}30° = 5m.$

$$\Rightarrow\ F_{23} = K\frac{(5x10^{-6})(2x10^{-6})}{5^2} = K\frac{10x10^{-12}}{25} = \frac{2}{5}Kx10^{-12} = \frac{2(9x10^9)}{5}x10^{-12} = \frac{18}{5}x10^{-3}N$$

La dirección de esta fuerza es 90° sentido: N (norte), escrito en función de los vectores e_1 y e_2 tenemos:

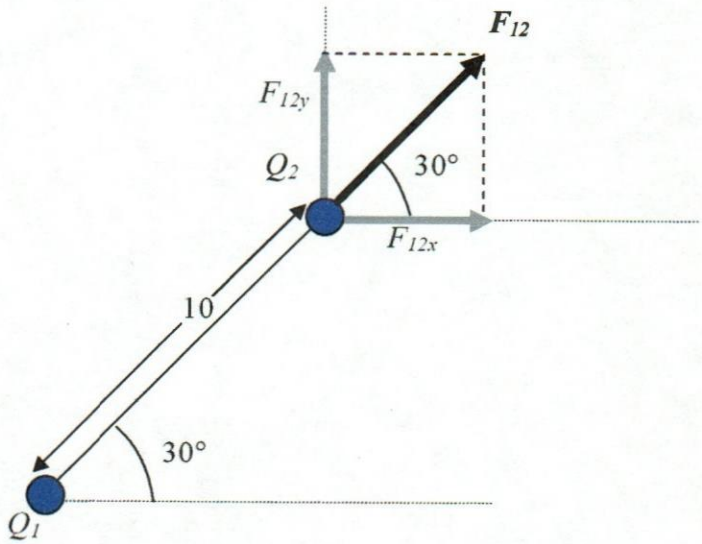
$\vec{F}_{23} = \dfrac{18}{5}x10^{-3}e_2\ N$, luego la fuerza resultante como ya se explicó, es la suma vectorial de $\boldsymbol{F_{13}}$ y $\boldsymbol{F_{23}}$:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \left(-\frac{6}{5}e_1 + \frac{18}{5}e_2\right)x10^{-3}\ N$$



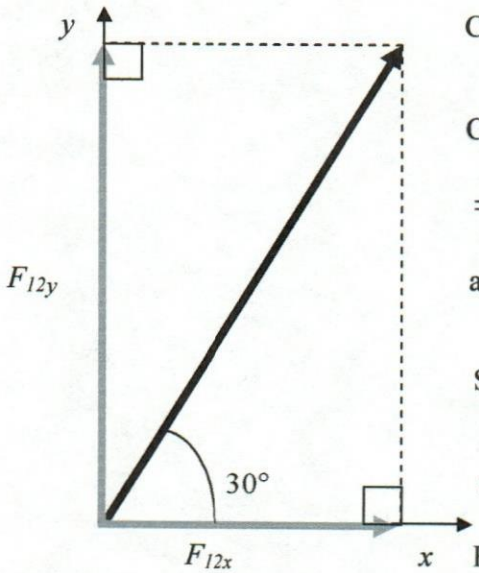
Sol a.) $\vec{F}_r = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \left(-\dfrac{6}{5}e_1 + \dfrac{18}{5}e_2\right)x10^{-3}\ N$

Parte b.) Apliquemos igual que en la parte a.) el principio de superposición, primero calculamos la fuerza entre Q_1 y Q_2.



$F_{12} = \dfrac{KQ_1Q_2}{d^2} = \dfrac{(9x10^9)(5x10^{-6})(5x10^{-6})}{10^2} = 2{,}25x10^{-3}\ N$, este valor calculado representa el módulo o tamaño del vector F_{12}, el cual tiene una dirección de 30°, sentido E – N, para escribirlo en función de los vectores unitarios e_1 y e_2 debemos hallar las componentes de dicho vector, esto es, calcular el valor de las proyecciones de F_{12} a lo largo de los ejes "x" y "y" respectivamente. A estas proyecciones las denominaremos F_{12x} (la del eje "x") y F_{12y} (la del eje "y"), entonces:

Aplicando la relación Cosθ:



$\text{Cos}\theta = \dfrac{F_{12x}}{F_{12}}$, despejamos F_{12x} : $\Rightarrow F_{12x} = F_{12}\,\text{Cos}\,\theta$

Con: θ = 30°, tenemos que: F_{12x}=2,25x10^{-3} Cos30°

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{F_{12x} = 1{,}95x10^{-3}}$ **N**, para hallar la F_{12y},

aplicaremos Senθ:

$\text{Sen}\,\theta = \dfrac{F_{12y}}{F_{12}}$, despejamos $F_{12y} \Rightarrow F_{12y} = F_{12}\,\text{Sen}\,\theta$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{F_{12y}}$ = 2,25x10^{-3} Sen 30° = **1,13x10^{-3} N.**

Finalmente:

$$\boldsymbol{F_{12}} = F_{12x}\, e_1 + F_{12y}\, e_2 = (1{,}95\, e_1 + 1{,}13 e_2)\ \text{x}10^{-3} N$$

Para calcular la fuerza que ejerce la carga Q_3 a la carga Q_2, no hace falta hacer este procedimiento, nos basaremos en el resultado obtenido en la parte a.) y en la tercera Ley de Newton (Ley de acción y reacción), la cual nos dice que en la naturaleza no existen fuerzas aisladas, esto es, toda fuerza tiene una pareja, si a una la llamamos acción, la otra la denominamos reacción, estas fuerzas tienen módulos iguales y sentidos opuestos.

Escrito en forma de ecuación lo anteriormente dicho:

$$\boldsymbol{F_{12}} = -\boldsymbol{F_{21}}$$

(fuerza que ejerce el cuerpo 1 sobre el 2 es igual y de sentido opuesto a la fuerza que ejerce el cuerpo 2 sobre el cuerpo 1).

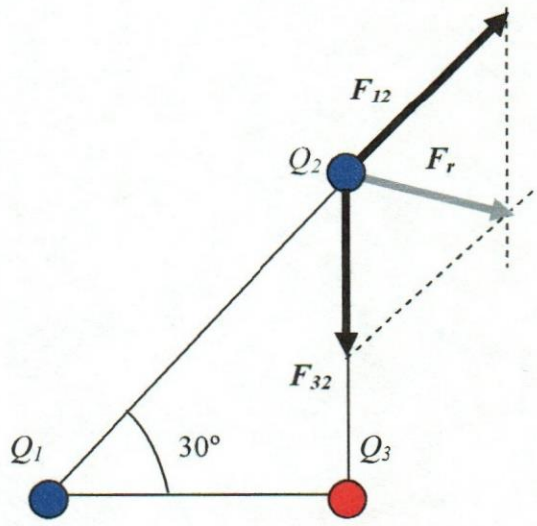
Ahora para aplicarlo al problema de nosotros, debemos darnos cuenta que en la parte a.) ya hemos calculado la fuerza que ejerce la carga Q_2 a Q_3, esta fue de $F_{23} = \frac{18}{5} x10^{-3}\ N$, por lo tanto, por la tercera Ley de Newton tenemos que: $\boldsymbol{F_{32}} = -\frac{18}{5} x10^{-3}\ e_2\ N$.

Ahora podemos calcular la fuerza resultante sobre la carga Q_2, esta es:

$$\boldsymbol{F_r} = \boldsymbol{F_{12}} + \boldsymbol{F_{32}} = (1{,}95\, e_1 + 1{,}13 e_2)\ \text{x}10^{-3}\ N + -\frac{18}{5} x10^{-3}\ e_2\ N$$

$$\boldsymbol{F_r} = [1{,}95\, e_1 + (1.13 - 18/5)\, e_2]\text{x}\ 10^{-3}\ N = (1{,}95\, e_1 - 2{,}47\, e_2)\ \text{x}\ 10^{-3}\ N.$$

En conjunto:



Sol b.) $\boldsymbol{Fr} = (1{,}95\, e_1 - 2{,}47\, e_2)\ \text{x}\ 10^{-3}\ N.$

Parte c.)

Para calcular el módulo de la fuerza que ejercen las cargas Q_1 y Q_2 sobre la carga Q_3, debemos calcular la fuerza resultante sobre Q_3 debidas a Q_1 y Q_2, pero ya este paso lo hicimos en la parte a.). Para calcular el módulo de un vector se utiliza la siguiente ecuación:

$|| \mathbf{A} || = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}}$, esto es: elevamos al cuadrado la componente "x" del vector **A**, luego elevamos al cuadrado la componente "y" del vector **A**, las sumamos y por último extraemos la raíz cuadrada del valor obtenido. Entonces:

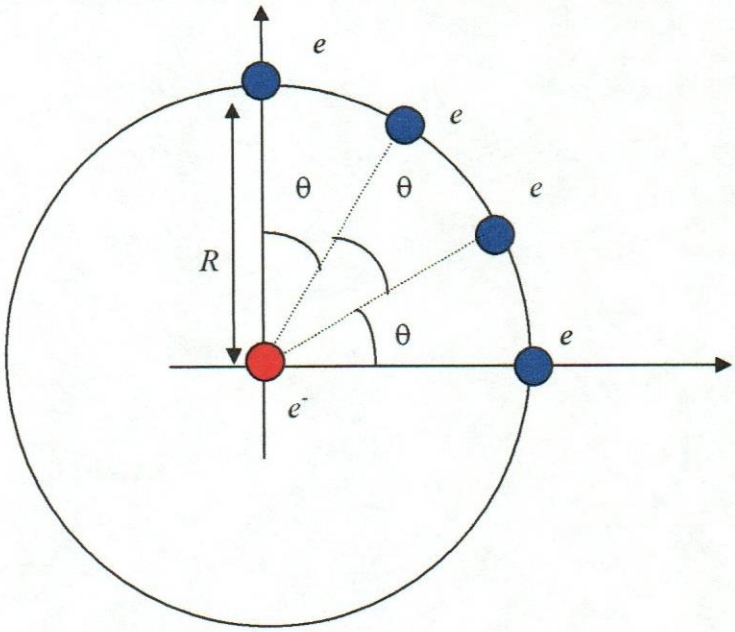
$\vec{F}_r = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = \left(-\frac{6}{5} e_1 + \frac{18}{5} e_2 \right) x10^{-3}\ N$, esta es la fuerza que ejerce la carga Q_1 y la carga Q_2, a la carga Q_3, calculando el módulo:

$$|| \boldsymbol{F_r} || = \sqrt{\left(-\frac{6}{5} x10^{-3} \right)^2 + \left(\frac{18}{5} x10^{-3} \right)^2} = 3{,}79 \text{ x } 10^{-3}\ N.$$

Sol c.) $|| \boldsymbol{F_r} || = 3{,}79 \text{ x } 10^{-3}\ N.$

Problema 2:

A lo largo de un cuarto de arco de circunferencia de radio "R" (ver figura), se encuentran cuatro partículas con cargas "e". En el centro de la circunferencia se encuentra un electrón con carga (e^-). Calcule la fuerza que ejercen estas cuatro partículas sobre el electrón.



Solución

Para resolver este problema lo primero que debemos hacer es etiquetar las cargas con números para que la nomenclatura a la hora de resolver el ejercicio se nos haga más fácil, las podemos enumerar como nos convenga o como nos plazca, se enumerarán en sentido de las agujas de reloj comenzado por la carga superior con el número 1 hasta la carga "e^-" con el número 5.

Por otro lado debemos darnos cuenta que los ángulos "θ" son iguales, esto quiere decir, que dividen exactamente en tres partes iguales el cuarto de circunferencia, esto es, dividen exactamente el ángulo de 90° en tres partes iguales, por lo tanto: θ = 30°.

Calculemos, aplicando el principio de superposición la fuerza resultante sobre la carga (e^-):

$F_{15} = \dfrac{Kexe}{R^2} = \dfrac{Ke^2}{R^2}$, este valor representa el módulo de la fuerza que ejerce la carga 1 a la carga 5, la dirección es 90° sentido: S (sur), pero en función de e_1 y e_2 seria:

$\vec{F}_{15} = \frac{Ke^2}{R^2} e_2$, el signo positivo que precede a la expresión representa que dicho vector fuerza, apunta en el sentido de e_2 (**cargas con signos opuestos se atraen**) vea la figura inferior.

Debemos notar, que el módulo calculado es el mismo para todas las cargas, ya que las separa la misma distancia "*R*", y la magnitud de las cargas son las mismas, esto es:

$$F_{15} = F_{25} = F_{35} = F_{45} \text{ (en módulo)}$$

Esto nos ahorra tener que hacer el cálculo de nuevo, lo único que debemos calcular son las componentes de dichas fuerzas, entonces:

$\vec{F}_{25} = \frac{Ke^2}{R^2}(Cos60^\circ\, e_1 + Sen60^\circ\, e_2)$, (ya que el ángulo que hay entre el eje "*x*" y la fuerza que ejerce la carga 2 sobre la carga 5 es θ + θ = 60°), el signo positivo, se debe a que las componentes apuntan en el mismo sentido que los vectores e_1 y e_2 (**cargas con signos opuestos se atraen**).

$$\Rightarrow \vec{F}_{25} = \frac{Ke^2}{R^2}(\frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2) = \frac{ke^2}{2R^2}(e_1 + \sqrt{3}\, e_2)$$

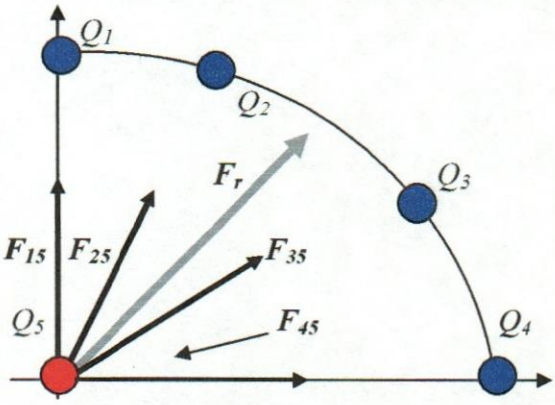
Calculemos $\boldsymbol{F_{35}}$:

$\vec{F}_{35} = \frac{ke^2}{R^2}(Cos30^\circ\, e_1 + Sen30^\circ\, e_2)$ (ya que el ángulo que hay entre el eje "*x*" y la fuerza que ejerce la carga 3 sobre la carga 5 es θ = 30°), el signo positivo, se debe a que las componentes apuntan en el mismo sentido que los vectores e_1 y e_2 (**cargas con signos opuestos se atraen**).

$$\Rightarrow \vec{F}_{35} = \frac{Ke^2}{R^2}(\frac{\sqrt{3}}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2) = \frac{Ke^2}{2R^2}(\sqrt{3}\, e_1 + e_2)$$

Calculemos $\boldsymbol{F_{45}}$:

$\vec{F}_{45} = \dfrac{Ke^2}{R^2}\, e_1$ (ya que esta fuerza tiene dirección 0° y mismo sentido que e_1) (**cargas con signos opuestos se atraen**).



La fuerza resultante $\boldsymbol{F_r}$ será la suma vectorial de $\boldsymbol{F_{15}}$, $\boldsymbol{F_{25}}$, $\boldsymbol{F_{35}}$, $\boldsymbol{F_{45}}$, entonces:

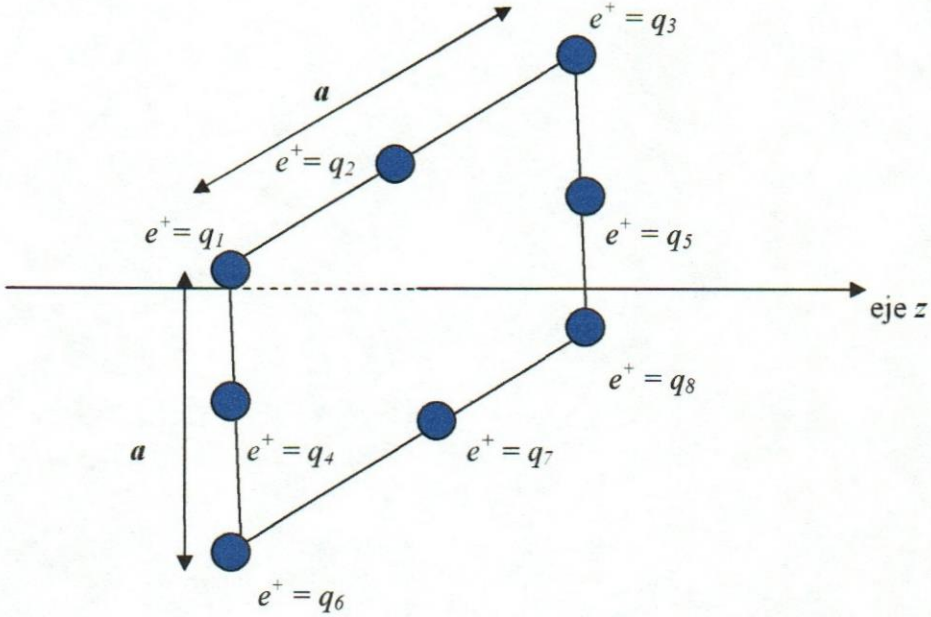
$$\boldsymbol{F_r} = \frac{Ke^2}{R^2} e_2 + \frac{Ke^2}{2R^2}(e_1 + \sqrt{3}\, e_2) + \frac{Ke^2}{2R^2}(\sqrt{3}\, e_1 + e_2) + \frac{Ke^2}{R^2}\, e_1 = \left(\frac{Ke^2}{R^2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)(e_1 + e_2)$$

Nótese que la dirección de $\boldsymbol{F_r}$ es de 45° al Noreste.

Sol: $\boldsymbol{F_r} = \left(\dfrac{Ke^2}{R^2}\right)\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)(e_1 + e_2)$

Problema 3:

Se colocan 8 cargas e^+, igualmente espaciadas, a lo largo del perímetro de un cuadrado de lado "a" (ver la figura). Por el centro del cuadrado se traza una línea perpendicular al plano donde se encuentran. Calcule el campo eléctrico que produce esta distribución de carga a una distancia "z" del cuadrado, y a lo largo de la línea que pasa por su centro.



Solución

El problema se puede resolver de muchas maneras, una de ellas es tratar el problema como si fueran 4 cargas puntuales situadas en la base de un cono de radio $a/2$ (vea la figura inferior 1) e igualmente espaciadas, más 4 cargas puntuales situadas en la base de otro cono, de radio $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ (vea la figura inferior 2). De tal manera que cualquier componente del campo eléctrico paralelo al plano se va a cancelar, ya que por la geometría de la configuración, siempre tiene una carga simétrica que se encarga de ello. Por lo tanto sólo debemos calcular las componentes del campo eléctrico paralelas al eje "z" y sumarlas algebraicamente. (**Importante: reflexione seriamente este razonamiento**)

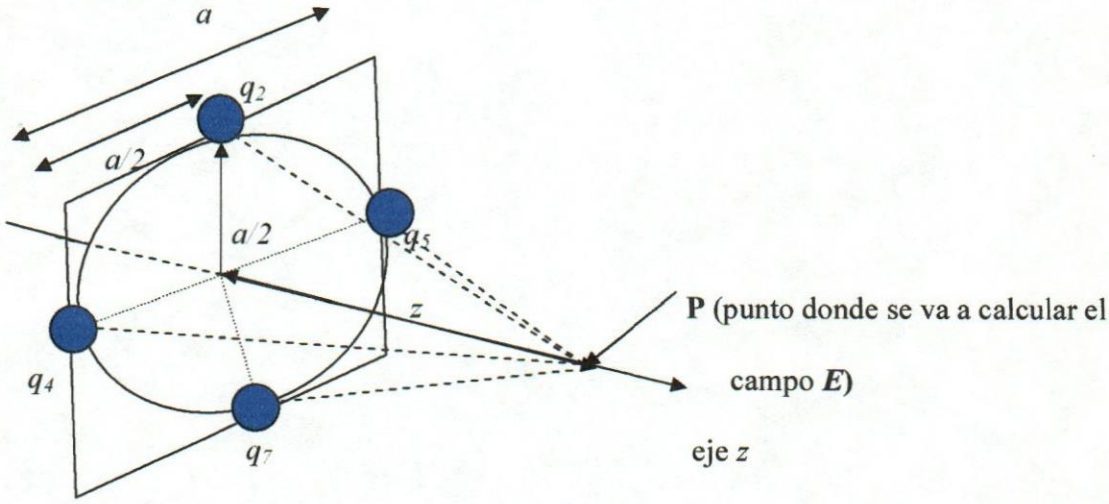


Fig 1

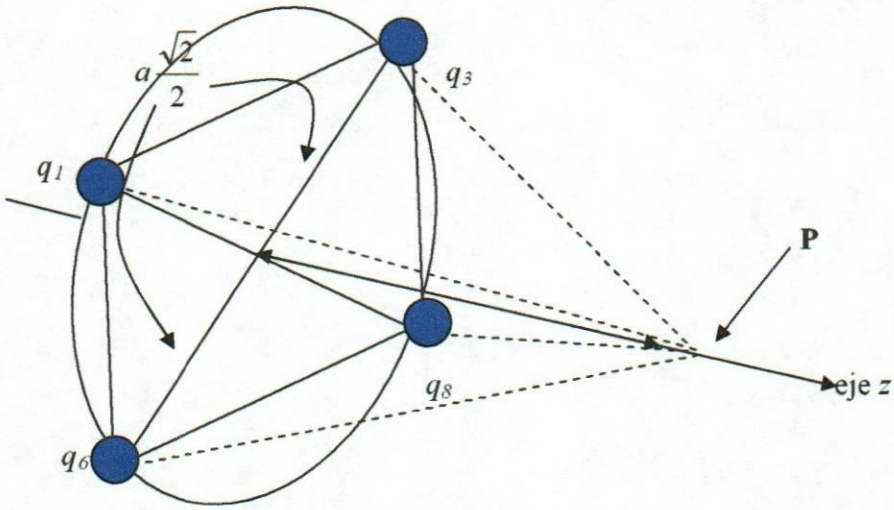
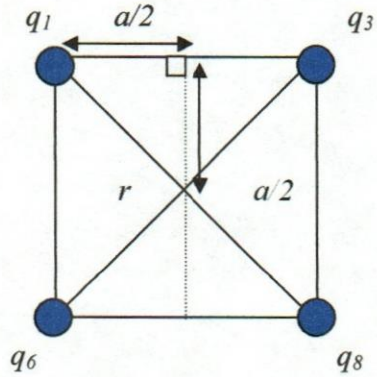


Fig 2



Para explicar el ¿por qué? el radio del segundo cono es $a\frac{\sqrt{2}}{2}$, fijémonos en la figura adjunta, en el triángulo rectángulo de catetos $a/2$, calculamos la hipotenusa por el teorema de Pitágoras:

$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, que es el radio del cono de la figura 2.

El campo eléctrico a lo largo del eje z "E_z" debido a la carga 2, 5, 7 y 4 vienen dado por:

$E_z = \frac{Ke}{z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} Cos\theta$, ya que la distancia que separa las cargas 2, 5, 7 y 4 es $\sqrt{z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ que se obtiene del teorema de Pitágoras con un lado igual a "z" y el otro igual al radio del cono (fig 1) $r = a/2$ y "θ" el ángulo entre el eje z y la línea que parte de cada una de las cargas hasta el punto **P**, donde se quiere calcular el campo ***E***.

Pero:

$Cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} \Rightarrow E_z = \frac{Kez}{\left(z^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$ pero como son 4 cargas el campo total es:

$E_z = \frac{4Kez}{\left(z^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$, este es el módulo del campo total producido por las cargas 2, 5, 7 y 4 en el punto **P**.

Para calcular el módulo del campo que produce las cargas 1, 3, 8 y 6 se procede análogamente, pero el ángulo entre la línea que une las cargas y el eje z es ahora "α", y el radio es el dado por la figura 2. Entonces:

$E_z = \frac{Ke}{z^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} Cos\alpha$, pero: $Cos\,\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} \Rightarrow E_z = \frac{Kez}{\left(z^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ pero en este caso, también contribuyen 4 cargas, por lo tanto el campo total producido por las cargas 1, 3, 8 y 6 es:

$$E_z = \frac{4Kez}{\left(z^2 + \frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

De tal manera que el campo total que producen las 8 cargas es:

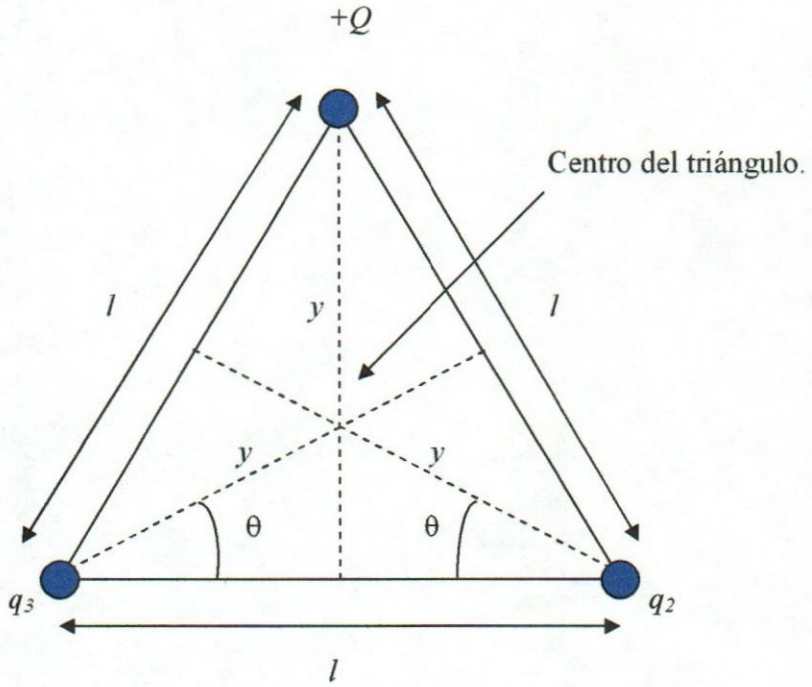
$$\vec{E}_z = \frac{4Kez}{\left(z^2+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} e_3 + \frac{4Kez}{\left(z^2+\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} e_3 = 4Kez\left[\frac{1}{\left(z^2+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(z^2+\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right] e_3$$

Donde el vector e_3, es un vector unitario a lo largo del eje "z".

Sol: $$\vec{E}_t = 4Kez\left[\frac{1}{\left(z^2+\frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(z^2+\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right] e_3$$

Problema 4:

Se colocan tres cargas en los vértices de un triángulo equilátero de lado *"l"* como se muestra en la figura. El valor de la carga que se coloca en el vértice superior es $+Q$, demuestre que q_3 debe ser igual a q_2 que a su vez deben ser iguales a $+Q$, para que el campo eléctrico en el centro del triángulo sea igual a cero.



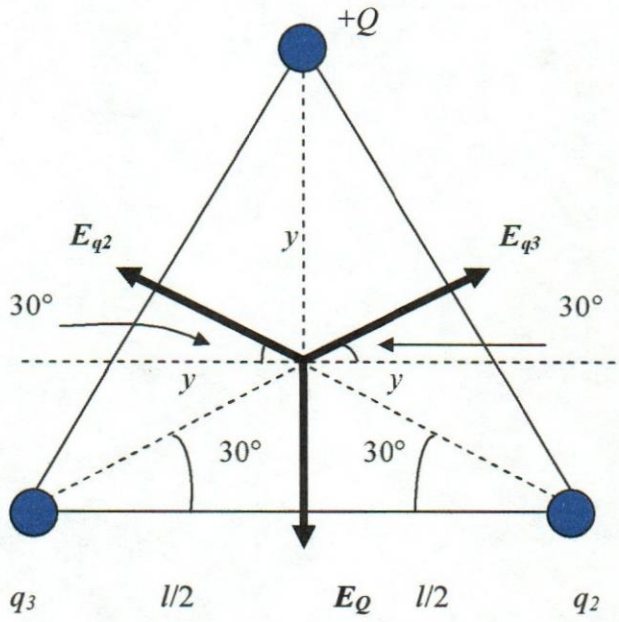
Solución

Para resolver el problema debemos hallar las distancias de cada una de las cargas al centro del triángulo, que es la misma para las tres cargas, ya que el triángulo es equilátero y las líneas punteadas coinciden con la bisectriz (divide al ángulo en dos partes iguales), mediana (corta a los lados en dos partes iguales), mediatriz (corta a los lados en dos partes iguales y además forma ángulo recto con dichos lados) y con la altura.

Con lo dicho anteriormente y tomando en cuenta que un triángulo equilátero tiene todos sus ángulos internos iguales y con un valor de 60°, tenemos que:

$Cos\theta = \frac{\frac{l}{2}}{y} \Rightarrow Cos30° = \frac{\frac{l}{2}}{y} = \frac{l}{2y}$ Despejando "y" que es la distancia de cada una de las cargas al centro del triángulo:

$y = \dfrac{l}{2Cos30°} = \dfrac{l}{\sqrt{3}} = \dfrac{l\sqrt{3}}{3}$, ahora calculemos el campo eléctrico producido por cada una de las cargas aplicando el principio de superposición.



Empecemos con el campo que genera $+Q$:

$E_q = \dfrac{KQ}{y^2} = \dfrac{KQ}{\left(\dfrac{l\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{KQ}{\dfrac{3l^2}{9}} = \dfrac{3KQ}{l^2}$, que representa el módulo del vector campo eléctrico que genera $+Q$. Luego el vector campo eléctrico es:

$\vec{E}_Q = -\dfrac{3KQ}{l^2} e_2$, el signo negativo indica que el campo eléctrico apunta en sentido opuesto al de e_2, (vea la figura superior).

El módulo del campo eléctrico que genera q_3 viene dado por:

$E_{q3} = \frac{Kq_3}{y^2} = \frac{3Kq_3}{l^2}$ Ahora con este valor procedamos a calcular las componentes de este campo eléctrico, tomando en cuenta que el ángulo que hace el campo eléctrico con la horizontal es de 30°, tenemos:

$E_{q3x} = \frac{3Kq_3}{l^2} Cos30° = \frac{3\sqrt{3}Kq_3}{2l^2}$ Esta es la componente "x" del campo o componente horizontal.

Calculemos la componente "y" o componente vertical:

$E_{q3y} = \frac{3Kq_3}{l^2} Sen30° = \frac{3Kq_3}{2l^2}$, entonces el campo eléctrico generado por la carga 3 es:

$$\vec{E}_{q3} = \frac{3\sqrt{3}Kq_3}{2l^2} e_1 + \frac{3Kq_3}{2l^2} e_2 = \frac{3Kq_3}{2l^2}\left(\sqrt{3}\, e_1 + e_2\right)$$

Ahora pasemos a calcular el campo eléctrico que produce la carga 2.

$E_{q2} = \frac{Kq_2}{y^2} = \frac{3Kq_2}{l^2}$, que representa el módulo del vector del campo eléctrico que produce q_2 en el centro del triángulo.

Para calcular las componentes de este campo eléctrico, debemos notar que lo único que cambia es el sentido la componente horizontal, mientras que la vertical se mantiene igual. Por lo tanto el campo eléctrico que origina q_2 es:

$$\vec{E}_{q_2} = \frac{3Kq_2}{2l^2}\left(-\sqrt{3}\, e_1 + e_2\right)$$

La exigencia que el campo eléctrico es nulo (o cero) en el centro del triángulo, se traduce matemáticamente en:

$$\boldsymbol{E_t = E_Q + E_{q2} + E_{q3} = 0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_t = -\frac{3KQ}{l^2}\, e_2 + \frac{3Kq_2}{2l^2}\left(-\sqrt{3}\, e_1 + e_2\right) + \frac{3Kq_3}{2l^2}\left(\sqrt{3}\, e_1 + e_2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{3Kq_2\sqrt{3}}{2l^2} + \dfrac{3Kq_3\sqrt{3}}{2l^2} = 0 \Rightarrow q_2 = q_3 = q \\ -\dfrac{3KQ}{l^2} + \dfrac{3Kq_2}{2l^2} + \dfrac{3Kq_3}{2l^2} = 0 \Rightarrow q = Q \end{cases}$$

Que es lo que queríamos demostrar!!!

Problema 5:

El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ se define como la fuerza eléctrica por unidad de carga o por unidad de carga de prueba q_0, de tal manera que el campo eléctrico que genera una carga $+Q$ es independiente del valor y del signo de la carga de prueba. Demuéstrelo.

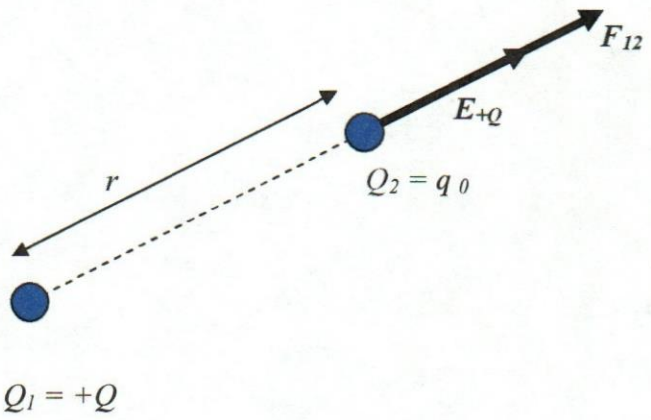
Solución

Supongamos dos cargas con valores Q_1 y Q_2, calculemos la fuerza que existe entre ellas cuando están separadas una distancia "r", entonces:

$F = \dfrac{KQ_1Q_2}{r^2}$ que es la fuerza entre Q_1 y Q_2, entonces analicemos los dos posibles casos:

Caso a.)

Si $Q_1 = +Q > 0$ y $Q_2 = q_0 > 0$, en este caso la fuerza eléctrica entre las dos es la de la figura inferior.

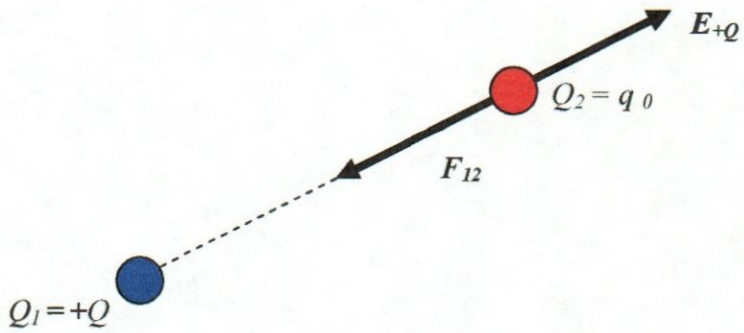


Nótese que en este caso la carga de prueba q_0 es positiva, la $\boldsymbol{F_{12}}$ es la fuerza que ejerce la carga 1 ($+Q$) a la carga 2 (q_0) (**cargas iguales se repelen**). Calculemos el campo eléctrico de la carga $+Q$:

$E_{+Q} = campo\ que\ genera + Q = \dfrac{F_{12}}{q_0} = \dfrac{KQ}{r^2}$, como $q_0 > 0$ por hipótesis, mantiene su dirección y sentido, esto es, el campo eléctrico es paralelo a la $\boldsymbol{F_{12}}$ y del mismo sentido, con un módulo dado por: $\dfrac{KQ}{r^2}$.

Caso b.)

$Q_1 = +Q > 0$ y $Q_2 = q_0 < 0$, en este caso la fuerza eléctrica entre las dos es la de la figura inferior.



Nótese que en este caso la carga de prueba q_0 es negativa, la $\boldsymbol{F_{12}}$ es la fuerza que ejerce la carga 1 ($+Q$) a la carga 2 (q_0) (**cargas opuestas se atraen**). Ahora calculemos la fuerza eléctrica entre la carga $+Q$ y q_0:

$F_{12} = -\dfrac{KQq_0}{r^2}$, el signo negativo indica que la fuerza es de atracción (es el signo de q_0), ahora procedamos a calcular el campo eléctrico que produce $+Q$:

$E = \dfrac{F_{12}}{q_0} = \dfrac{-KQq_0}{-q_0 r^2} = \dfrac{KQ}{r^2}$ Nótese que ahora el campo eléctrico tiene la misma dirección pero sentido opuesto a la fuerza eléctrica, pero es el mismo que fue calculado en el caso a.) con lo cual queda demostrado!!.

Conclusión:

El campo eléctrico que genera una carga es independiente de la carga de prueba.

CAPITULO I

LEY DE COULOMB - CAMPO ELÉCTRICO-LEY DE GAUSS

Preguntas

1.- Un dipolo eléctrico (dos cargas puntuales, iguales y opuestas, separadas por una distancia pequeña) está en el centro de un recipiente esférico. ¿Cuál es el flujo eléctrico que pasa por la esfera? ¿Cambiaría su respuesta si el dipolo no esta exactamente en el centro?

2. – En un experimento de laboratorio se frota un peine con el cabello, luego se acerca a unos pedacitos de papel y se ve que estos, son atraídos por el peine. Explique porque ocurre esto. ¡Inténtelo!

3. – Un profesor de Cálculo afirma que si el flujo es igual a cero **necesariamente** el campo eléctrico es nulo. ¿Esta de acuerdo con esta afirmación? ¿Por qué?

4. – Un globo se carga negativamente por frotamiento y después se adhiere a una pared. ¿Esto significa que la pared está cargada positivamente? ¿Por qué después de cierto tiempo cae el globo?

5. – Al definir el campo eléctrico, ¿por qué es necesario especificar que la magnitud de la carga de prueba es muy pequeña? (es decir, se toma el limite de $\mathbf{F}/q$ a medida que "q" tiende a cero).

6. - ¿Será posible que las líneas de campo eléctrico se crucen?

7. – La profesora de Física y el profesor de Filosofía van a realizar una competencia, la profesora escoge a un protón y el profesor escoge un electrón, y los ponen bajo un campo eléctrico constante. ¿Quién ganará la carrera? ¿Por qué?

8. – Explique porque las líneas de campo eléctrico no pueden formar lazos cerrados.

9. – ¿Cuál es la diferencia entre cargar un objeto por inducción y cargarlo por conducción?

10. – Una carga $4q$ está a una distancia r de una carga $-q$. Si de la carga $4q$ salen 12 líneas de campo eléctrico ¿cuántas llegarán a $-q$?

11. – En un experimento de laboratorio se frota un peine y se acerca a un chorro de agua que cae verticalmente, se observa que dicho chorro se desvía hacia el peine. ¿Por qué ocurre esto? ¡Inténtelo!

12. - ¿Por qué algunas ropas se pegan a su cuerpo después de que se han sacado de una secadora?

13. – Es sabido que las fuerzas gravitacionales tienen mayor alcance que las fuerzas eléctricas, pero estas son mucho más fuertes que las gravitacionales. Calcule la proporción entre estas dos fuerzas.

14. – Una carga negativa se pone en una región del espacio donde el campo eléctrico está dirigido verticalmente hacia arriba. ¿Cuál es la dirección de la fuerza eléctrica experimentada por esta carga? Si en vez de un electrón fuera un protón ¿cuál es la dirección de la fuerza eléctrica?

15. – ¿Qué similitudes y qué diferencias encuentra entre la Ley de gravitación de Newton y la Ley de fuerza de Coulomb?

CAPÍTULO I

LEY DE COULOMB - CAMPO ELÉCTRICO-LEY DE GAUSS

Problemas

1.- Si la distancia entre dos cargas se reduce a la mitad, ¿en cuánto aumenta o disminuye la fuerza?

Sol: La fuerza aumenta y se cuadruplica.

2. – Dos cargas puntuales a $2m$ de distancia ejercen una fuerza de repulsión mutua, cuya magnitud es de $2{,}7\text{x}10^{-2}$ N. Se sabe que una de ellas tiene el doble de carga que la otra. a.)¿Cuál es el valor de las cargas?. Si otro par de cargas ejercen fuerzas de **atracción** mutuas, cuya magnitud es $2{,}7\text{x}10^{-2}$ N, cuando están a 2 m de distancia, y la carga total del par es $+1\mu C$. (b) ¿Cuál es el valor de las dos cargas?

Sol: a.) $q_1 = 2{,}44\text{x}10^{-6}\,C$, $q_2 = 4{,}89\text{x}10^{-6}\,C$

b.) $q_1 = 4\mu C$, $q_2 = -3\mu C$

3.- Dos objetos, cada uno con carga "Q", se unen a los extremos de un resorte cuya constante de fuerza es "k", y su longitud en relajación es cero. Cuando el sistema está en equilibrio ¿cuál es la distancia entre las dos cargas?

Sol: $x = \sqrt[3]{\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 k}}$

4. – Demuestre que la fuerza entre dos objetos que comparten una carga total "Q" es máxima cuando la carga de cada uno es igual, esto es, cuando cada uno tiene la carga $Q/2$.

Ayuda: $q_1 + q_2 = Q$ **despeje** q_1 **, sustituya en** $F = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$ **y resuelva** $\dfrac{\partial F}{\partial q_2} = 0$

5. – Una carga puntual $Q = -15nC$, se encuentra en el punto $x = 1m$, $y = 2m$, $z = 0m$. Determine el vector campo eléctrico en el punto **P** de coordenadas $x = 2m$, $y = -1m$, $z = 1m$.

Sol: $\vec{E} = -3{,}70\ (i - 3j + k)N/C$

6. – Una carga $Q = 33\ nC$ se coloca en $x = 55mm$, $y = 27mm$, $z = 15mm$. Determinar el campo eléctrico en el punto de coordenadas $x = 15mm$, $y = 35mm$, $z = -6mm$.

Sol: $\vec{E} = 3{,}07x10^6(-40i + 8j - 21k)\ N/C$

7.- Una esfera de corcho, cuya masa es $m = 1gr$ y su carga es de 150 nC, cuelga de un hilo en una región que tiene un campo eléctrico horizontal uniforme de intensidad $E = 1x10^4\ N/C$. ¿Qué ángulo forma el hilo con la vertical?

Sol: $\theta = 8{,}53°$

8. - ¿Qué intensidad de campo eléctrico se necesitaría para sostener un electrón ($m = 9x10^{-31}\ Kg$) contra la fuerza de gravedad?

Sol: $E = 1{,}875x10^5\ N/C$

9. – En un día de calma, cuando la intensidad de campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra es de 100 N/C, una gota de niebla tiene una carga neta de 250 electrones y permanece inmóvil. a.)¿Cuál es la masa de la gota? b.) ¿Cuál es su radio?

Nota: Tome la densidad del agua como $\rho = 1000Kg/m^3$ y el volumen de la esfera como

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

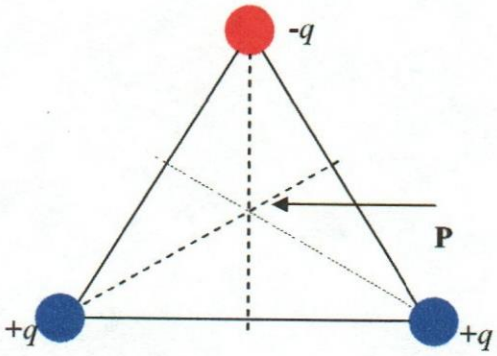
Sol: a.) $m = 4 \times 10^{-16}\ Kg$.

b.) $R = 4{,}57 \times 10^{-7} m$

10. – Seis cargas iguales "Q" se colocan en los vértices de un hexágono. ¿Cuál es la intensidad de la fuerza eléctrica sobre una carga "q" de prueba que se coloca en el centro de ellas?

Sol: $F = 0\ N$

11. – Se colocan tres cargas puntuales, dos $+q$ y una $-q$, en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados miden "L". a.)¿Cuál es el valor de la intensidad del campo eléctrico en el centro del triángulo? b.) Si $q = 5\mu C$ y $L = 15m$ ¿cuál es el campo eléctrico en el centro del triangulo?

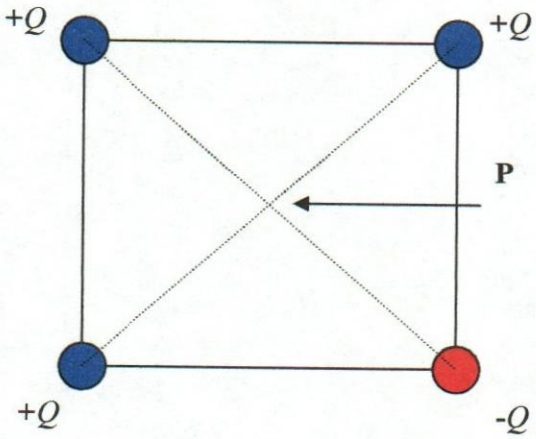


Sol: a.) $E = \dfrac{6kq}{L^2}$

b.) $\vec{E} = 1{,}2x10^3 N/C\ j$

Ayuda: El punto P es también punto de corte de las bisectrices

12. – Tres cargas $+Q$ y una carga $-Q$ están en las esquinas de un cuadrado de lado "a". a.) Calcule el campo eléctrico en el centro del cuadrado (punto **P**), producido por el conjunto de cargas b.) ¿Qué dirección tiene la fuerza sobre una pequeña carga negativa de prueba colocada en el centro? c.) ¿Cuál es la intensidad de dicho campo? d.) Si $Q = 5nC$ y $a = 50cm$ ¿cuánto vale la magnitud del campo eléctrico en el centro del cuadrado?



Sol:

a.) $\vec{E} = \dfrac{2KQ\sqrt{2}}{a^2}(i - j)$

b.) $\theta = 45°$ S: Noroeste.

c.) $E = \dfrac{4KQ}{a^2}$

d.) $E = 720\ N/C$

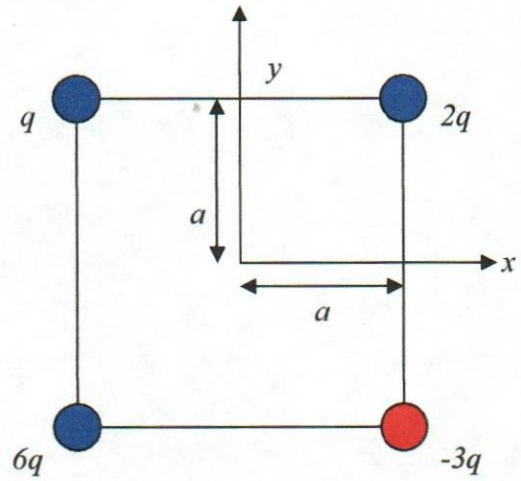
13. – Se colocan cuatro cargas puntuales iguales $+Q$ en las esquinas de un cuadrado de lado "a". Determine la intensidad del campo eléctrico en: a.) el centro del cuadrado b.) uno de los vértices y c.) en el punto medio de uno de los lados.

Sol: a.) $E = 0\ N/C$ b.) $E = \dfrac{1{,}72x10^{10}\,KQ}{a^2}$ c.) $E = \dfrac{0{,}36KQ}{a^2}$

14. – Se mantienen dos cargas puntuales fijas en el eje "x". Una es $Q_1 = -\ 2\mu C$, y está en $x = -\ 3m$; la otra es $Q_2 = 4\mu C$ y está en $x\ = 1m$. Determine un punto en donde se pueda colocar una tercera carga que no sienta fuerza eléctrica neta.

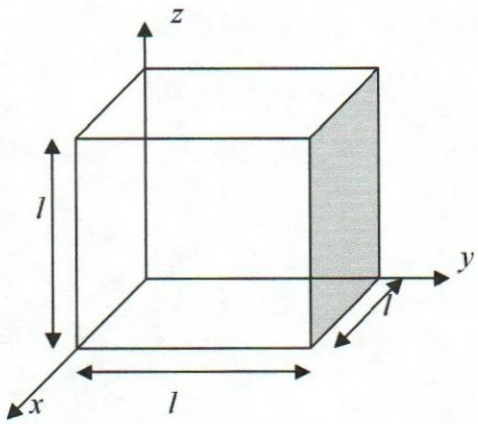
Sol: $x = -12{,}66\ m$

15. – Determine el campo eléctrico producido por el sistema de cargas de la figura, en función de la posición en el eje z.



Sol: $\vec{E} = \dfrac{Kq}{(z^2 + 2a^2)^{\frac{3}{2}}}(5zk + 9ai + j)$

16. – Un cubo de lado $l = 2m$ está centrado en el origen, y los ejes coordenados son perpendiculares a sus caras. Determine el flujo ϕ del campo eléctrico $\boldsymbol{E} = (15\,\mathbf{i} + 27\mathbf{j} + 39\mathbf{k})\ N/C$ que pasa por cada una de las caras.



Sol: Cara donde $\mathbf{n} = \mathbf{i}$; $\phi = 60\,\frac{Nm^2}{C}$, Cara donde $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$; $\phi = -60\,\frac{Nm^2}{C}$,

Cara donde $\mathbf{n} = \mathbf{j}$; $\phi = 108\,\frac{Nm^2}{C}$, Cara donde $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$; $\phi = -108\,\frac{Nm^2}{C}$

Cara donde $\mathbf{n} = \mathbf{k}$: $\phi = 156\,\frac{Nm^2}{C}$, Cara donde $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$; $\phi = -156\,\frac{Nm^2}{C}$

17. – El campo eléctrico en cierta región del espacio se representa con la función: $\boldsymbol{E} = (6\mathbf{i} + 7\mathbf{j})\ N/C$. Determine el flujo eléctrico a través de la superficie $x = 6y$, $0 < x < 6m$, $0 < z < 1m$.

Sol: $\phi = 36\,\frac{Nm^2}{C}$

18. – Determine el flujo del campo eléctrico $\boldsymbol{E} = 250\ \mathbf{j}\ N/C$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Ayuda: La superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, representa un octante de una esfera de radio igual a la unidad, aplique la Ley de Gauss y nótese que la carga encerrada es cero.

Sol: $\phi = 0$

19. – Suponga que un electrón de esta hoja se separa y se coloca a 1*mm* de esta página. (a) Calcule su aceleración (b) el tiempo que tardaría en llegar a su lugar (c) la velocidad con la cual llega y compárela con la velocidad de la luz.

Nota: Este es un ejercicio de aproximación, o de estimación.

Sol: (a) $a = 1{,}47\text{x}10^{46}\ m/s^2$ (b) $t = 3{,}68\text{x}10^{-25}\ s$
(c) $v = 5{,}41\text{x}10^{21} m/s$ ¡más rápido que la luz!

20. – Dos cargas puntuales iguales Q están en el eje x, una en $x = a$ y la otra en $x = -a$. ¿Dónde se encuentra la magnitud máxima del campo eléctrico, en el eje y?

Ayuda: Encuentre el campo resultante en el eje "y", como resultado obtendrá una expresión del campo eléctrico total, en función de la posición "y" esto es:

$$E(y) = \frac{2KQy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$ y luego haga $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ para encontrar el máximo.

Sol: $y = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$

21. – Demuestre que un desplazamiento a lo largo de una línea de campo eléctrico en el plano x - y satisface la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}$$

Ayuda: Defina el vector ***dl*** que es un vector tangente a la líneas de campo eléctrico, por lo tanto será paralelo en todo punto al campo eléctrico ***E***, entonces como: $\boldsymbol{dl} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ y el campo eléctrico es: $\boldsymbol{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j}$, haga el producto vectorial: ***E x dl***, el cual es igual a cero.

22. – Encuentre una expresión analítica para las componentes "x" y "y" del campo eléctrico generado por dos cargas positivas en el eje x, en $x = a$ y $x = -a$.

Sol:

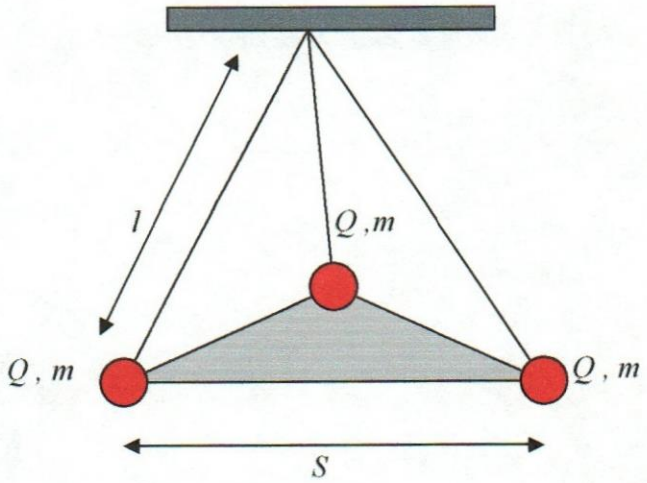
$$E_x = KQ\left\{\frac{x-a}{\left[(x-a)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{x+a}{\left[(x+a)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$E_y = KQy\left\{\frac{1}{\left[(x-a)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left[(x+a)^2 + y^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

23. – Tres objetos idénticos de masa "m" y cargados cada uno con la carga Q, se cuelgan de un punto común mediante hilos sin masa, como se ve en la figura. Demuestre que la dimensión "s" cumple con la ecuación:

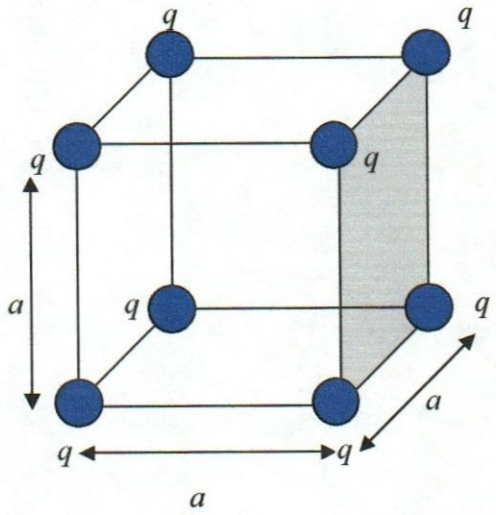
$$s^3 = \frac{3KQ^2}{mg}\sqrt{l^2 - \frac{s^2}{3}}$$

Resuelva esta ecuación para el caso en que $s << l$.



24. – Un cubo de arista "a" tiene una carga punto "q" en cada vértice. Demuestre que la magnitud de la fuerza resultante en cualquiera de esas cargas es:

$$F = \frac{0{,}213q^2}{\varepsilon_0 a^2}$$

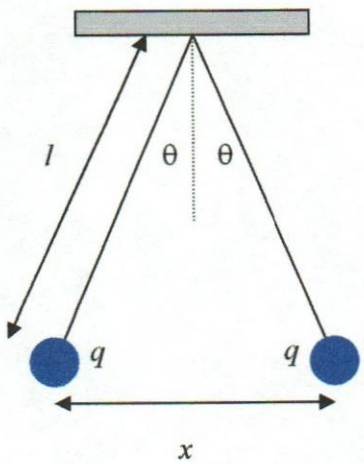


25. – Dos bolas similares de masa "m" se cuelgan de hilos de seda de longitud "l" llevan cargas similares "q" como se muestra en la figura. Supóngase que "θ" es tan pequeña que tg θ se puede reemplazar por senθ, por ser aproximadamente igual. Haciendo esta aproximación, (a) demuestre que:

$$x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{\frac{1}{3}}$$

b.) Si $l = 120cm$, $m = 10gr$ y $x = 5cm$, ¿cuánto vale q?

Sol: $q = 2{,}41\text{x}10^{-8}\,C$



26. – Suponga que cada bola del problema 25 pierde carga a razón de $1\text{x}10^{-9}$ C/s. ¿Con qué velocidad instantánea relativa (igual a dx/dt) se acercan las bolas entre sí?

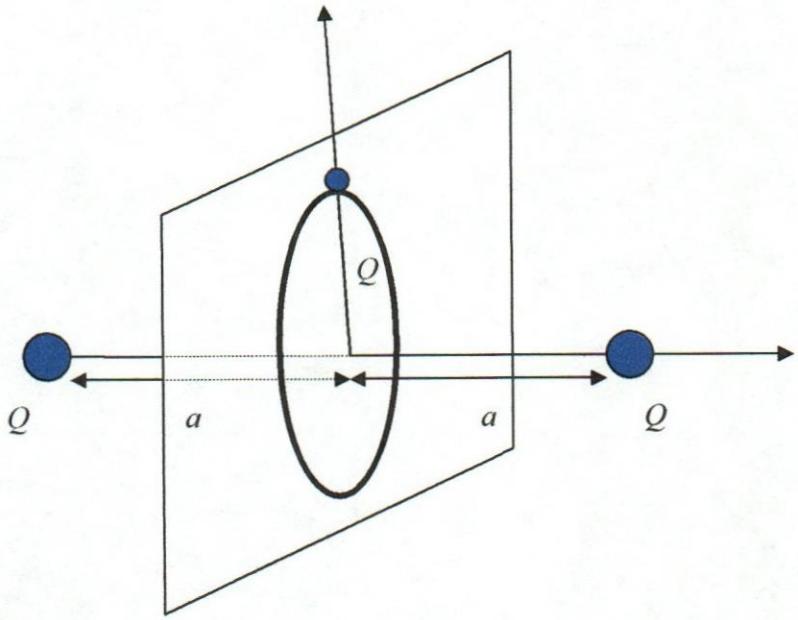
Sol: $dx/dt = 1{,}38\text{x}10^{-3}$ m/s

27. – En la desintegración radiactiva del U^{238} el centro de la partícula"α" emergente está en cierto instante, a $9\text{x}10^{-15}$ m del centro del núcleo residual, Th^{234}. En este instante (a) ¿cuál es la fuerza sobre la partícula "α" (b) ¿cuál es su aceleración?.

Ayuda: El proceso de desintegración se puede escribir como $U^{238} \longrightarrow Th^{234} + He^4$, donde el núcleo radiactivo "progenitor" U^{238}, contiene 92 protones, esto es Z = 92, (Z es el número atómico). Se desintegra espontáneamente emitiendo una partícula "α" (He^4; Z = 2), trasmutándose él mismo en el elemento Th^{234} (Torio) con Z = 90, la masa del protón es $m_p = 1{,}7\text{x}10^{-27}kg$ y su carga es $e^+ = 1{,}6\text{x}10^{-19}C$.

Sol: a.) $F = 512\,N$ b.) $a = 3{,}01\text{x}10^{29}$ m/s^2

28. – Dos cargas punto positivas iguales están separadas una distancia "*2a*". Una carga punto de prueba se sitúa en un plano normal a la línea que une esas cargas y equidistante de ellas. (a) Calcúlese el radio "*r*" del círculo de simetría en este plano para el cual la fuerza sobre la carga de prueba tiene un valor máximo (b) ¿cuál será la dirección de esta fuerza, considerando que la carga de prueba es positiva?



Ayuda: Vea el problema 20. Note que la componente "*x*" de la fuerza se anula.

Sol: a.) $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ b.) 90° al norte.

29. – Considere un número infinito de cargas idénticas (cada una con carga *q*) colocadas a lo largo del eje "*x*" a distancias *a*, *2a*, *3a*, *4a*,... del origen. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el origen, debido a ésta distribución?

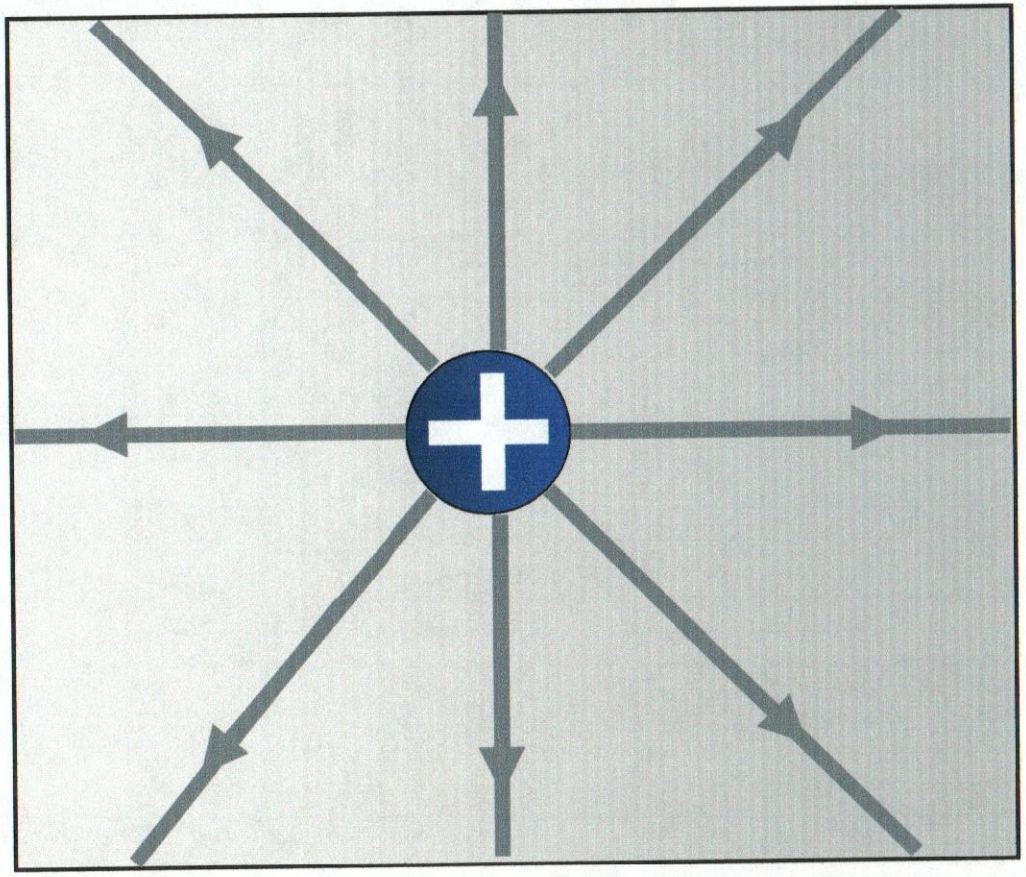
Ayuda: Utilice el hecho que: $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\dfrac{1}{4^2}+...+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{\pi^2}{6}$

Sol: $E = \dfrac{Kq\pi^2}{6a^2}$

30. – Una carga *q* se localiza en un punto de coordenadas $(x_0\ ,\ y_0)$ en el plano *x-y*. Demuestre que la componente "*x*" y la componente "*y*" del campo eléctrico en el punto *(x, y)* debida a esta carga son:

$$E_x = \frac{Kq(x-x_0)}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad E_y = \frac{Kq(y-y_0)}{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

APLICACIONES DEL CAMPO ELÉCTRICO - APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS



CAPÍTULO II

APLICACIONES DEL CAMPO ELÉCTRICO - APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Carl Friedrich Gauss fue niño prodigio y continuó siéndolo durante toda su vida hasta el extremo de que se lo conociera como "el príncipe de los matemáticos". Nació el 30 de Abril de 1777 en Brunswick,(se pronuncia Braunsveig) Ducado de Brunswick (hoy Alemania). A la edad de 7 años (en otros sitios dicen 10) asombró a su profesor (Büttner). Este profesor castigaba a sus alumnos haciéndolos sumar una serie de números. Una vez castigó a toda la clase a sumar desde el número 1 hasta el número 100. Gauss entregó la pizarra en un tiempo sorprendente con la respuesta correcta. El profesor le preguntó cómo lo había hecho. Gauss le dijo 1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101, siempre suman 101. Como son 50 sumas de 101, el total es 5050.

Hijo de un humilde albañil, Gauss dio señales de ser un genio antes de que cumpliera los tres años. A esa edad aprendió a leer y hacer cálculos aritméticos mentales con tanta habilidad que descubrió un error en los cálculos que hizo su padre para pagar unos sueldos. Ingresó a la escuela primaria antes de que cumpliera los siete años. Cuando tenía doce años, criticó los fundamentos de la geometría euclidiana; a los trece le interesaba las posibilidades de la geometría no euclidiana. A los quince, entendía la convergencia y probó el binomio de Newton. El genio y la precocidad de Gauss llamaron la atención del duque de Brunswick, quien dispuso, cuando el muchacho tenía catorce años, costear tanto su educación secundaria como universitaria. Gauss, a quien también le interesaban los clásicos y los idiomas, pensaba que haría de la filología la obra de su vida, pero las matemáticas resultaron ser una atracción irresistible.

Cuando estudiaba en Gotinga, descubrió que podría construirse un polígono regular de diecisiete lados usando sólo la regla y el compás. Enseñó la prueba a su profesor, quién se demostró un tanto escéptico y le dijo que lo que sugería era imposible; pero Gauss demostró que tenía la razón. El profesor, no pudiendo negar lo evidente, afirmó que también él procedió de la misma manera. Sin embargo, se reconoció el mérito de Gauss, y la fecha de su descubrimiento, 30 de Marzo de 1796, fue importante en la historia de las matemáticas. Posteriormente, Gauss encontró la fórmula para construir los demás polígonos regulares con la regla y el compás.

Estudió la teoría de los errores y dedujo la curva normal de la probabilidad, llamada también curva de Gauss, que todavía se usa en los cálculos estadísticos.. En 1809 llegó a Göttingen, a propuesta de Gauss, Wilhelm Weber, como profesor de Física. Gauss había hecho algunos trabajos sobre teoría de los potenciales que fueron muy importantes para el desarrollo de la Física.

En 1832 Gauss y Weber trabajaron sobre el magnetismo terrestre. El trabajo conjunto de ambos duró seis años y fue muy importante. En 1837 Weber fue obligado abandonar Göttingen por disputas políticas y como consecuencia de esto, la actividad de Gauss también disminuyó.

En 1833 inventó un telégrafo eléctrico que usó entre su casa y el observatorio, a una distancia de unos dos kilómetros. Inventó también un magnetómetro bifiliar para medir el magnetismo y, con Weber, proyectó y construyó un observatorio no magnético. Tanto Gauss como Riemann, que fue discípulo suyo, pensaban en una teoría electromagnética que sería muy semejante a la ley universal de la gravitación, de Newton. Empero, la teoría del electromagnetismo fue ideada más tarde, en 1873, por Maxwell, aunque Gauss ya poseía los cimientos matemáticos para la teoría. En 1840, las investigaciones de Gauss sobre la óptica tuvieron especial importancia debido a sus deducciones por lo que toca a los sistemas de lentes.

Gauss murió mientras dormía, en la mañana del 23 de febrero de 1855 a la edad de setenta y siete años. Se ha dicho que la lápida que señala su tumba fue escrita con un diagrama, que construyó el mismo Gauss, de un polígono de diecisiete lados. Durante su vida, se reconoció que era el matemático más grande de los siglos XVIII y XIX. Su obra en las matemáticas contribuyó a formar una base para encontrar la solución de problemas complicadísimos de las ciencias físicas y naturales.

CAPITULO II
APLICACIONES DEL CAMPO ELÉCTRICO – APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

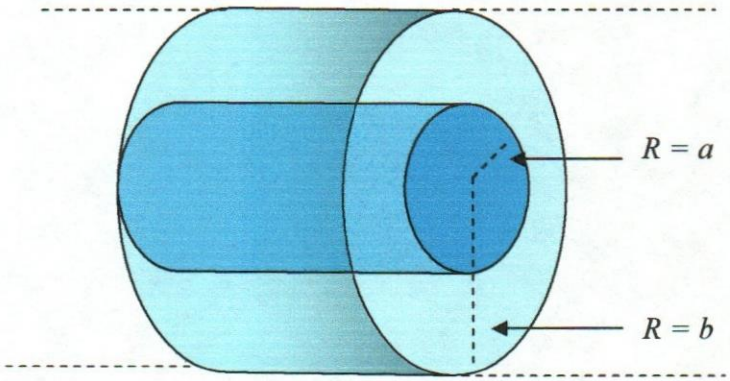
"El orden admirable del Sol, planetas y cometas tiene que ser obra de un Ser Todopoderoso e inteligente...nadie ha visto a Dios, es cierto, pero tampoco he visto a los constructores de una catedral o un monumento, y sin embargo sé que por su obra acabada lo ha tenido que construir alguien, no por azar se han unido las piedras o los ladrillos..."

Isaac Newton

Problemas resueltos

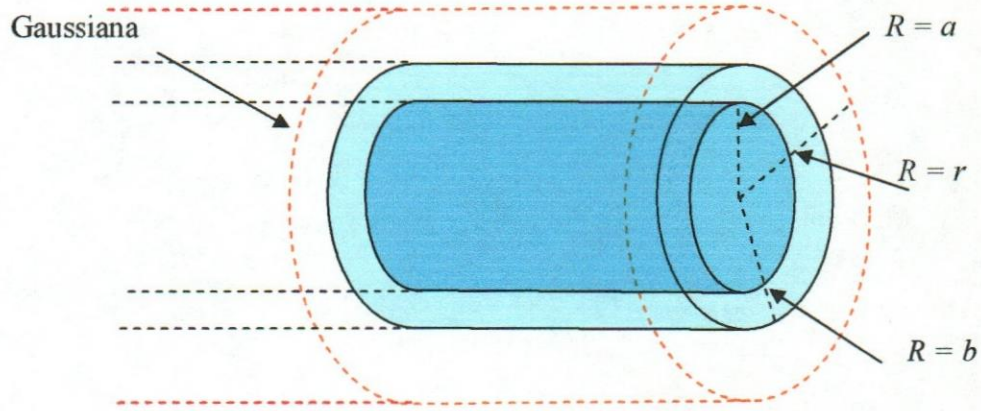
Problema 1:

En la figura se muestra una sección de dos largos cilindros concéntricos de radios *"a"* y *"b"*. Los cilindros llevan cargas iguales y opuestas "λ" por unidad de longitud, el cilindro con radio "*a*" tiene carga positiva. Usando la Ley de Gauss demuestre: a.) que $E = 0$ para $r > b$ (fuera del cilindro) y $r < a$ (dentro del cilindro de radio *"a"*) b.) que entre los cilindros ($a < r < b$) el campo eléctrico esta dado por la expresión: $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$.



Solución

Para utilizar la Ley de Gauss debemos elegir una "gaussiana", la cual es una superficie imaginaria y su forma esta influenciada por la simetría del campo eléctrico, para dominar la escogencia adecuada de la gaussiana se debe practicar bastante, así que mientras más ejercicios haga, le será más familiar la forma de dicha superficie, lo importante es que esta superficie pase por el punto en donde se quiere calcular el campo eléctrico. En nuestro caso la gaussiana será un cilindro de radio "*r*" y de longitud infinita:



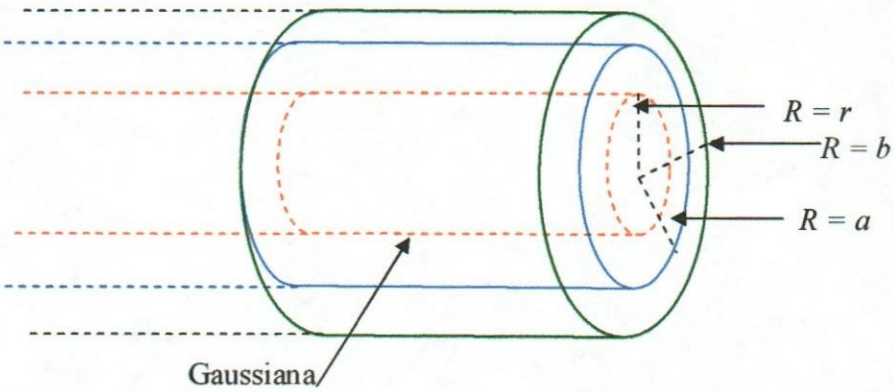
Nótese que en este caso $r > b$ (la gaussiana pasa por el punto $r > b$ que es donde se quiere calcular el campo eléctrico). Aplicando la Ley de Gauss:

$\oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0}$, donde Q_e significa la carga total encerrada por la gaussiana, note que el campo eléctrico por simetría debería tener el mismo módulo a una misma distancia "r" por lo tanto es una constante y puede salir fuera de la integral, quedando:

$E\oint_s ds = \frac{Q_e}{\varepsilon_0}$, o sea que debemos integrar todos los diferenciales de superficie del cilindro, esto no es más que el área lateral del cilindro la cual es: $2\pi rL$, donde "L" es la longitud del cilindro. La carga encerrada la podemos calcular, ya que tenemos "λ" que es la densidad lineal de carga:

$Q_e = \lambda L + (-\lambda L) = 0$, λL es la carga que encierra el cilindro de radio "a" y $-\lambda L$ es la carga que encierra el cilindro de radio "b" y como Q_e es la carga "total" encerrada implica una suma algebraica, por lo tanto la carga encerrada es cero. Entonces:

$E\oint_s ds = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} = E2\pi\, rL = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E = 0$, de esta manera hemos llegado a la conclusión que el campo eléctrico fuera del cilindro es nulo. Pasemos a calcular el campo eléctrico en el interior del cilindro de radio "a" y como siempre elegimos nuestra gaussiana de tal forma que pase por el punto donde se quiere calcular el campo.

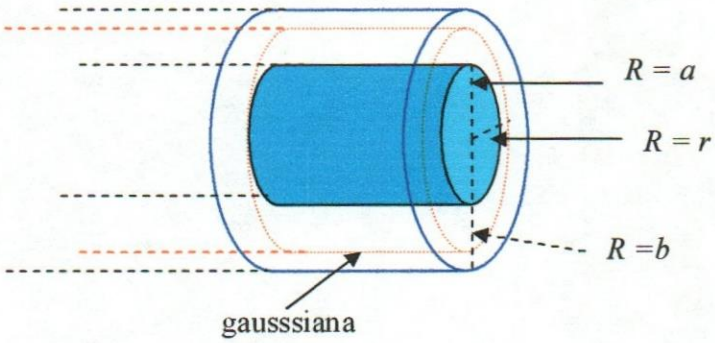


Nótese que la gaussiana está por dentro del cilindro de radio "a". Entonces utilizando la Ley de Gauss:

$\oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0}$, pero fíjese, que la carga encerrada por esta gaussiana es cero, ya que el cilindro de radio "a" la carga que contiene, esta en su superficie, por lo tanto no hay carga adentro. Entonces:

$\oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E = 0$, como conclusión final hemos llegado a que el campo eléctrico tanto fuera del cilindro ($r > b$), como dentro del cilindro de radio "a" ($r < a$) es nulo, por lo tanto la parte a.) de este ejercicio queda demostrada!!.

Ahora pasemos a calcular el campo eléctrico entre los dos cilindros, y para ello escogemos una gaussiana que este entre los dos cilindros tal como se muestra en la figura:



Vamos aplicar la Ley de Gauss:

$\oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0}$ ahora la carga encerrada $Q_e = \lambda L$ siendo λ la densidad de carga por unidad de longitud que tiene el cilindro de radio "a" y "L" su longitud, nótese también que el

campo eléctrico debe tener el mismo módulo a la misma distancia "r" por simetría, entonces quedaría:

$\oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{Q_e}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\oint_s ds$, pero esta integral es igual a: $2\pi rL$, donde "L" es la longitud de la gaussiana que la hacemos coincidir con la longitud del cilindro de radio "a", entonces: $E2\pi rL = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$, con lo cual queda demostrado la parte b.).

Problema 2:

Se sabe que el campo eléctrico a lo largo del eje de un disco cargado uniformemente de radio "R" viene dado por la expresión: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}})$ (y lo va a tener que demostrar en el problema 20).

a.) Demuestre que si $R \to \propto$ el campo eléctrico que se obtiene es el campo de un plano infinito.

b.) Demuestre que cuando "z" es muy grande comparado con el radio del disco $z >> R$ ésta ecuación es aproximadamente el campo eléctrico de una carga puntual (Ley de Coulomb).

Solución

a.) Empecemos escribiendo la expresión del campo eléctrico generado en el eje de un disco cargado uniformemente:

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}})$, ahora saquemos factor común R^2 en el denominador de esta expresión, quedándonos:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2\left(\frac{z^2}{R^2} + 1\right)}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{R\sqrt{\frac{z^2}{R^2} + 1}}\right)$$

, de esta expresión hagamos $R \to \propto$, en este caso:

$$\infty\sqrt{\frac{z^2}{\infty^2} + 1} = \infty\sqrt{1} = \infty \Rightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{R\sqrt{\frac{z^2}{R^2} + 1}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\infty}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

con lo cual tenemos finalmente que: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, el cual coincide con el campo eléctrico de un plano infinito!!!.

b.) En este caso sabemos que $z >> R$, partimos de la expresión del campo eléctrico:

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}})$. Y sacamos z^2 factor común del subradical, quedando:

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2\left(\frac{2}{z^2}+1\right)}}\right)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{z\sqrt{\frac{R^2}{z^2}+1}}\right)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}\right)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

ahora concentrémosnos en la expresión: $\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, ésta debemos desarrollarla en una expansión o serie de Mclaurin, ya que de esta manera veremos la convergencia de una manera mas "*suave*" pudiendo tomar sólo los primeros términos de la serie, ahora pasemos a calcular la serie de Mclaurin de dicha expresión.

El matemático Mclaurin propuso que toda función *f(x)* se podía desarrollar en una serie de potencias esto es

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, de esta serie desconocemos los coeficientes a_n pero Mclaurin, también halló la ecuación para determinar los coeficientes de dicha serie, esta es:

$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, donde $f^{(n)}(0)$ representa la n-ésima derivada de $f(x)$ evaluada en $x = 0$ y $n!$ representa el factorial de "n". Con esto, nos queda que toda función $f(x)$ puede ser representada por:

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Ahora nuestra función es: $f(x) = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ siendo $x=\frac{R^2}{z^2}$ y nótese que $x\to 0$ cuando $z\to\infty$ lo cual es una exigencia para poder utilizar la expansión de Mclaurin. Calculemos los coeficientes:

$a_0 = f(0) = (1+0)^{-\frac{1}{2}} = 1$, para calcular a_1 debemos hallar primero la primera derivada de *f(x)*, entonces:

$f'(x)=-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x=-x\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(0)=0$, para calcular a_2 debemos hallar la segunda derivada de *f(x)*, entonces:

$f''(x)=-\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{5}{2}}x\Rightarrow f''(0)=-1$, hasta aquí se va a desarrollar la serie, no hace falta seguir calculando los demás infinitos términos porque son de orden mucho mayor y contribuyen muy poco a la serie, entonces la serie de Mclaurin de $f(x)$ en "*buena aproximación*" es:

$f(x) = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{R^2}{2z^2}$, ahora sustituyendo este valor en la expresión de E:

$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \left(1 - \frac{R^2}{2z^2}\right)\right) = \frac{\sigma R^2}{4\varepsilon_0 z^2}$, ahora nótese que si multiplicamos y dividimos por π obtenemos:

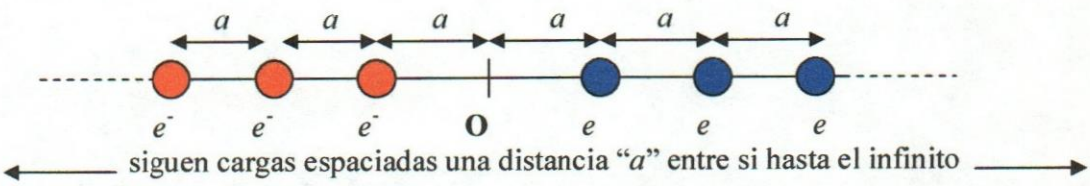
$E = \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$, sabemos que σ es la carga por unidad de superficie del disco y que πR^2 representa el área del disco, esto quiere decir que $\sigma\pi R^2$ es la carga "Q" contenida en el disco, entonces la expresión del campo eléctrico queda:

$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$, donde "$z$" es la distancia que los separa, o sea hemos llegado a la expresión del campo eléctrico que origina una carga puntual!! (Ley de Coulomb). En conclusión si estamos muy cerca del disco veremos que el disco es como si fuera un plano infinito y por lo tanto el campo es el de un plano infinito, pero si estamos muy lejos del disco, ya no veremos un disco, mas bien veremos un punto con carga "Q" y por lo tanto registraremos el campo eléctrico como el una carga puntual. Impresionante!!!

Problema 3:

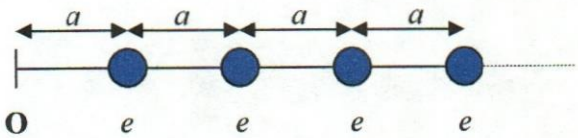
Supóngase que se tiene una distribución infinita de cargas como se muestra en la figura, y que las líneas donde se colocan las cargas son infinitas, si la distancia entre las cargas es "*a*" y las cargas tienen un valor "*e*". Demuestre que el módulo del campo eléctrico en "**O**" es:

$$E = \frac{Ke\pi^2}{3a^2}$$



Solución

Para calcular el campo resultante de las dos hileras infinitas de cargas, debemos aplicar el principio de superposición, esto es, primero calculamos el campo eléctrico originado por una hilera, como si la otra no estuviera, luego calculamos el campo eléctrico producido por la otra hilera como si la primera no estuviera, el campo resultante es la **suma vectorial** de ambos resultados. Entonces calculemos el campo eléctrico que produce la hilera de protones (carga +) en el punto **O**:



El campo eléctrico será:

$E = \frac{Ke}{a^2} + \frac{Ke}{(2a)^2} + \frac{Ke}{(3a)^2} + \frac{Ke}{(4a)^2} + ... + \frac{Ke}{(na)^2}$, fíjese que el campo resultante por esta hilera es la suma del campo producido por la primera carga, la cual está a una distancia "*a*", más el campo originado por la segunda carga, la cual está a una distancia "*2a*"y así sucesivamente hasta la última carga que estará a una distancia "*na*" donde "*n*" tiende a infinito. Resolviendo:

$E = \frac{Ke}{a^2} + \frac{Ke}{2^2a^2} + \frac{Ke}{3^2a^2} + \frac{Ke}{4^2a^2} + ... + \frac{Ke}{n^2a^2}$ De esta expresión saquemos $\frac{Ke}{a^2}$ factor común, quedándonos:

$E = \frac{Ke}{a^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right)$ Nótese que la expresión encerrada entre paréntesis es la suma de los inversos del cuadrado de "*n*" esta suma empieza de $n = 1$ hasta $n = \propto$, escribiendo la expresión del campo eléctrico en términos de la sumatoria nos quedaría:

$E = \frac{Ke}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, pero por la teoría de series numéricas sabemos que esta sumatoria es:

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, entonces el campo eléctrico producido en punto **O** por la hilera de cargas positivas es:

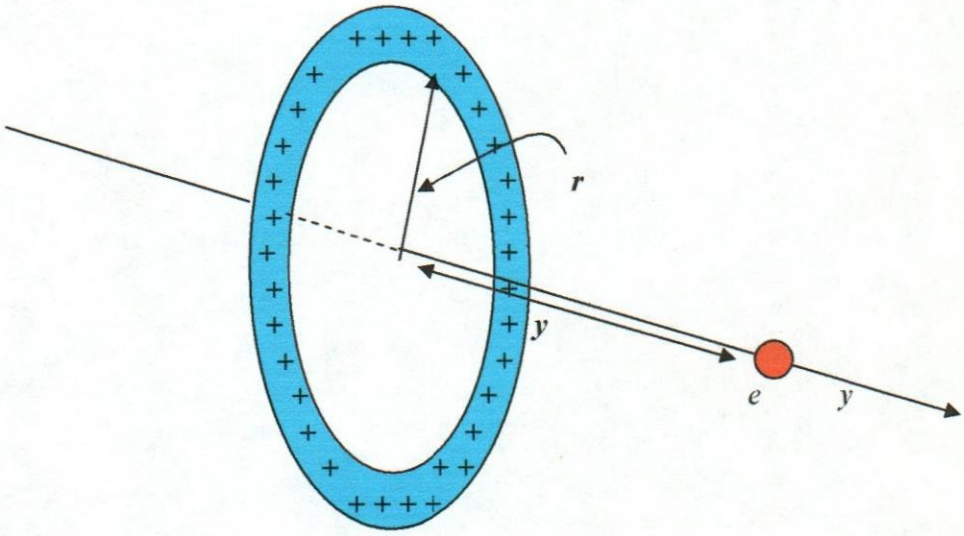
$E = \frac{Ke}{a^2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{Ke\pi^2}{6a^2}$, el módulo del campo eléctrico creado por la hilera de cargas negativas es el mismo que el calculado anteriormente, por lo tanto el campo total en el punto "O" es el doble que el ya calculado, entonces:

$E = 2\frac{Ke\pi^2}{6a^2} = \frac{Ke\pi^2}{3a^2}$ que es lo que se quería demostrar!!.

Problema 4:

A lo largo del eje de un anillo de radio "r" cuya densidad lineal de carga es "λ", se suelta un electrón con carga "e^-". Se sabe que el campo eléctrico que genera un anillo con densidad lineal de carga λ, en su eje, y a una distancia "y" es: $E = \dfrac{\lambda r y}{2\varepsilon_0 \left(r^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ (lo va a demostrar en el problema 6).

a.) Encuentre la ecuación de movimiento para "*pequeños desplazamientos*" y demuestre que es un M.A.S.
b.) Halle la expresión del período de oscilación.



Solución

Para encontrar la ecuación de movimiento debemos aplicar la 2da Ley de Newton que establece que la Sumatoria de las fuerzas externas sobre un cuerpo de masa "m" es igual al producto de la masa "m" por la aceleración "a", escrito en forma matemática es:

$$\sum F_{ext} = ma$$

(siendo "m" una constante).

Ahora sobre el sistema "electrón – anillo" están actuando dos fuerzas, una es la fuerza gravitatoria y la otra es la fuerza eléctrica, la fuerza gravitatoria se va a despreciar ya que es muy pequeña comparada con las fuerzas eléctricas, esto se justifica de la siguiente manera:

Supongamos que un electrón y un protón se encuentran separados una distancia "*d*", sabemos que la masa del protón es aproximadamente $1{,}64x10^{-27}$ *Kg* y la del electrón es de $9{,}11x10^{-31}$*Kg*, y también se sabe que la carga fundamental tanto del protón como del electrón es de $1{,}6x10^{-19}$ *C*, ahora calculemos la fuerza gravitatoria entre estas dos partícula:

$F_g = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$ (Ley de gravitación universal), donde *G* es una constante llamada "*constante de gravitación universal*" y que tienen un valor de $6{,}67x10^{-11}\ \frac{m^2 N}{Kg^2}$, entonces:

Fuerza gravitatoria electrón – protón = $F_g = G\frac{m_1 m_2}{d^2} = 6{,}67x10^{-11}\frac{(1{,}64x10^{-27})(9{,}11x10^{-31})}{d^2}$

$\Rightarrow F_g = \frac{9{,}97x10^{-68}}{r^2}$, una vez calculada esta fuerza pasemos ahora a calcular la fuerza eléctrica como bien se sabe, la rige la Ley de Coulomb, esta es:

$F_e = K\frac{q_1 q_2}{d^2}$ (Ley de Coulomb), donde *K* es la llamada "constante eléctrica" que tiene un valor aproximado de $9x10^9\ \frac{m^2 N}{C^2}$, entonces:

Fuerza eléctrica electrón – protón = $F_e = 9x10^9\frac{(1{,}6x10^{-19})\,(1{,}6x10^{-19})}{d^2} = \frac{2{,}30x10^{-28}}{d^2}$, ahora si calculamos el cociente entre estas dos fuerzas obtenemos:

$\frac{F_g}{F_e} = \frac{\frac{9{,}97x10^{-68}}{d^2}}{\frac{2{,}30x10^{-28}}{d^2}} = \frac{9{,}97x10^{-68}}{2{,}30x10^{-28}} = 4{,}33x10^{-40} \Rightarrow \frac{F_g}{F_e} = 4{,}33x10^{-40}$, esto quiere decir que las fuerzas eléctricas son por lo menos $4x10^{40}$ veces más fuertes que las fuerzas gravitatorias, guao!!!

Ahora tomando solo en cuenta la fuerza eléctrica, podremos estudiar el movimiento del electrón por el efecto del anillo, aplicando la segunda Ley de Newton:

$\sum F_{ext} = F_e = -eE = m_e a$, donde m_e es la masa del electrón, ahora sustituyendo el valor del campo eléctrico:

$-e\frac{\lambda r y}{2\varepsilon_0\left(r^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = m_e\frac{d^2 y}{dt^2}$,ya que la aceleración es la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo.

Note que esta ecuación ***no representa*** la ecuación de un oscilador armónico simple, pero si hacemos una expansión de McLaurin, tendríamos todavía una esperanza, intentemos!!.

$\dfrac{\lambda r y}{2\varepsilon_0\left(r^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=f(y)$, acomodémosla un poco: $f(y)=\dfrac{\lambda r y}{2\varepsilon_0\left(r^2\left(1+\dfrac{y^2}{r^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow$

$f(y)=\dfrac{\lambda r y}{2\varepsilon_0 r^3\left(1+\dfrac{y^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\lambda y r}{2\varepsilon_0 r^3}\left(1+\dfrac{y^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$, nótese que como estamos en el caso de "*pequeños desplazamientos*" el radio "*r*" del aro es mucho más grande que la distancia "*y*" de separación, esto es: $r>>y\Rightarrow\dfrac{y^2}{r^2}\to 0$ como lo exige la expansión de McLaurin, ahora si llamamos a $\dfrac{y^2}{r^2}=w\Rightarrow\left(1+\dfrac{y^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}=(1+w)^{-\frac{3}{2}}$, vamos a calcular la expansión de McLaurin de: $(1+w)^{-\frac{3}{2}}$, pasemos a calcular los coeficientes:

$$f(0)=a_0=1 \qquad f'(w)=-\frac{3}{2}\left(1+w^2\right)^{-\frac{5}{2}}2w=-3w\left(1+w^2\right)^{-\frac{5}{2}}\Rightarrow f'(0)=0$$

$$f''(w)=-3(1+w^2)^{-\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}\left(1+w^2\right)^{-\frac{7}{2}}3w\Rightarrow f''(0)=-3$$

$\Rightarrow\left(1+w^2\right)^{-\frac{3}{2}}=1-\dfrac{3}{2}w^2$ devolviendo el cambio de variable y sustituyendo en *f(y):*

$f(y)=\dfrac{\lambda\, y r}{2\varepsilon_0 r^3}\left(1+\dfrac{y^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{\lambda r y}{2\varepsilon_0 r^3}\left(1-\dfrac{3}{2}\dfrac{y^4}{r^4}\right)$ que para "*pequeños desplazamientos*" $\dfrac{y^4}{r^4}\to 0\Rightarrow f(y)=\dfrac{\lambda r y}{2\varepsilon_0 r^3}=\dfrac{\lambda y}{2\varepsilon_0 r^2}$ sustituyendo este resultado en la segunda Ley de Newton nos queda:

$m_e\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{e\lambda y}{2\varepsilon_0 r^2}$, dividiendo ambos miembros de la igualdad por m_e, y pasando todo para un mismo miembro:

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{e\lambda}{2m_e\varepsilon_0 r^2}y=0$ que representa la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple!!! (M.A.S).

b.) Para hallar el período de oscilación, solo debemos recordar que la ecuación de un oscilador armónico simple en una dimensión (en general) viene dada por la expresión:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

donde "ω" representa la frecuencia angular del movimiento, ahora "ω" viene relacionado con el período "τ" del movimiento mediante la ecuación:

$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, ahora de la ecuación de movimiento del electrón, se puede ver claramente que ω^2 es: $\omega^2 = \frac{e\lambda}{2m_e\varepsilon_0 r^2}$ y de la ecuación $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ despejamos "τ" y sustituimos "ω" quedándonos:

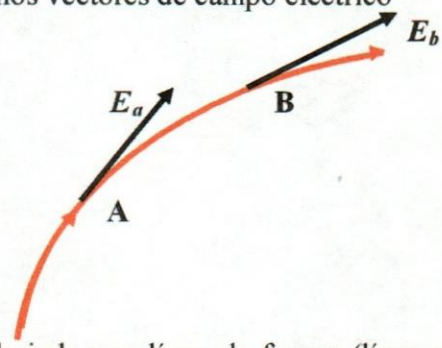
$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{2m_e\varepsilon_0 r^2}{e\lambda}}$$

Problema 5:

Demostrar la Ley de Gauss.

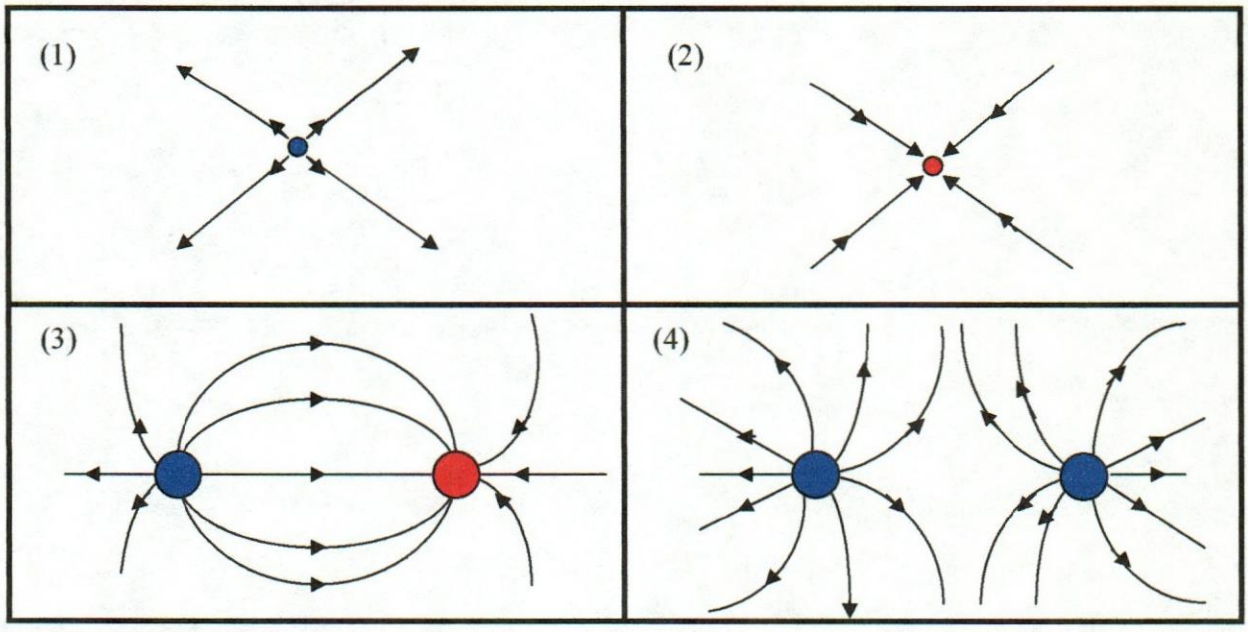
Solución

Para pasar a demostrar la Ley de Gauss, tenemos que introducir el concepto de "*línea de fuerza*". Una línea de fuerza es una línea imaginaría, donde *el campo eléctrico es tangente en cada punto de esta línea*, este concepto lo introdujo por primera vez Michael Faraday (1791 – 1867) como una manera de visualizar los campos eléctricos y magnéticos, como generalmente el campo eléctrico puede variar de un punto a otro, las líneas de fuerza son generalmente *curvas* (pueden ser líneas rectas, pero acuérdese que una línea recta se puede visualizar como una curva de radio infinito!). En la figura esta dibujada una línea de fuerza (línea roja) en general y algunos vectores de campo eléctrico



En la figura superior está dibujada una línea de fuerza (línea roja) en general y algunos vectores de campo eléctrico (flechas negras), fíjese que los vectores campo eléctrico son **tangentes** a la línea de fuerza.

En la figura inferior se representan algunas de las líneas de fuerza para ciertas configuraciones de cargas.



En el cuadro (1) se representan las líneas de fuerza de una carga positiva (+), en el cuadro (2) se representan las de una carga negativa (-), en el número (3) se representan las líneas de fuerza de una carga (+) y una (-) y por último en cuadro (4) se representan las de dos cargas positivas.

Nos tenemos que fijar en los siguientes aspectos importantes que cumplen las líneas de fuerza y que debemos tomar en cuenta a la hora de graficarlas:

a.) Las líneas de fuerzas **no se cruzan o se cortan** ya que si lo hiciesen el campo eléctrico tendría dos direcciones, ya que por el punto de intersección podría trazarse dos tangentes por ese punto, y por lo tanto si se coloca una carga de prueba en dicho punto, aceleraría a la vez en esas dos direcciones lo que físicamente es absurdo!!.
b.) Las líneas de campo eléctrico comienzan en una carga positiva y terminan en una carga negativa
c.) Las líneas de campo (o de fuerza) tienen simetría esférica cerca de una carga puntual.
d.) Si el sistema tienen una carga neta (esto quiere decir si el sistema tiene cargas positivas y negativas, la carga neta es la suma algebraica de dichas cargas), las líneas de campo tienen simetría esférica a gran distancia.

Nótese que hasta el momento se han dado las reglas para dibujar las líneas de campo eléctrico, lo que nos da información sobre la dirección del campo en dicho punto, pero en un principio se dijo que estas líneas nos podrían dar información del campo, y como este es un vector, nos faltaría hallar su módulo o intensidad, para ello debemos limitar el número de líneas de fuerza de un modo adecuado, esto se consigue espaciando las líneas de campo de tal modo que el **número de líneas que atraviesen una unidad de superficie perpendicular a la dirección del campo, sea igual, en cada punto, al producto de ε_0 por la intensidad del campo eléctrico en dicho punto.** Que de otra manera se podría interpretar en las siguientes palabras: el número de líneas de fuerzas que pasan por una superficie perpendicular a la dirección del campo, en ese punto, dividido entre el área de dicha superficie, es siempre igual a la intensidad del campo eléctrico multiplicado por ε_0.

De tal manera que en regiones donde las líneas de fuerza estén muy espaciadas la intensidad de campo eléctrico es pequeña y por el contrario, regiones donde el campo eléctrico es grande, las líneas de fuerza estarán muy próximas o muy "apretadas", en forma matemática lo anterior se escribe:

$$\frac{N}{A} = \varepsilon_0 E$$

donde N es el número de líneas de campo, A es el área de la sección transversal, ε_0 es la permitividad del vacío y tiene un valor de: $8{,}85\text{x}10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}$, o en función de la constante eléctrica "K", ε_0 tiene una expresión: $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K}$, y por supuesto E es la intensidad de campo eléctrico.

Ahora imaginemos que tenemos una carga puntual *aislada*, sabemos que el campo eléctrico que genera esta carga a una distancia "*r*" de ella viene dado por la expresión:

$E = \frac{Kq}{r^2}$, ahora encerremos esta carga en una esfera de radio "*r*", y procedamos a calcular el número de líneas de fuerzas que atraviesan esta superficie, debemos calcular el área de la esfera, esta viene dada: $4\pi r^2$, ahora:

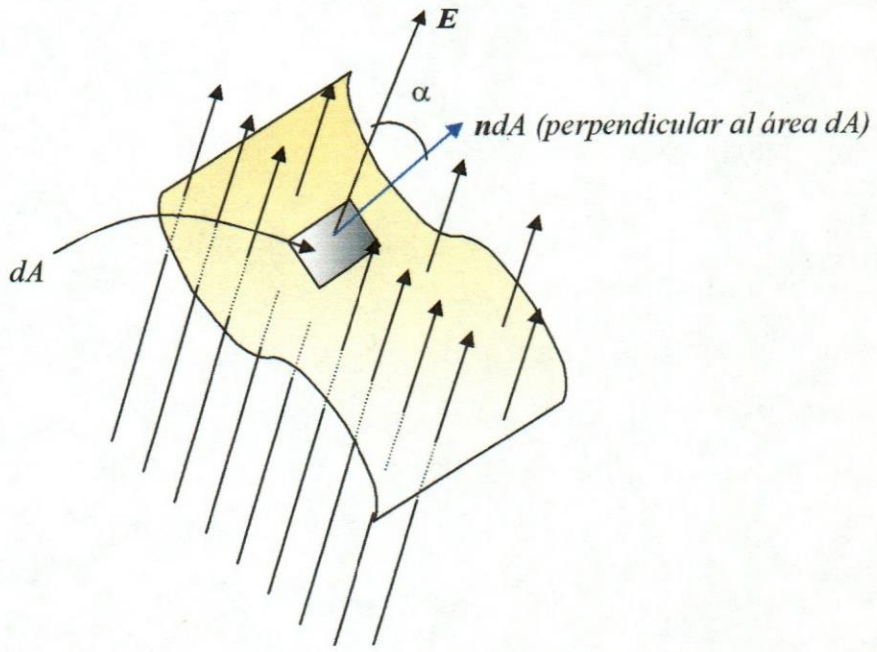
$\frac{N}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 \frac{Kq}{r^2} \Rightarrow N = \varepsilon_0 4\pi r^2 \frac{Kq}{r^2} = \varepsilon_0 4\pi Kq$, cambiando *K* en función de ε_0:

$N = \varepsilon_0 4\pi \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = q$, Esto significa que según la definición de *N*, el número de líneas de fuerza que atraviesa la superficie es igual a la magnitud de la carga que está en su interior!!!, ahora nótese que el número de líneas es independiente del radio de la esfera (ya que se canceló), de lo cual se deduce que el mismo número de líneas de campo atravesará **cualquier** esfera concéntrica con la anterior. Está conclusión es cierta para cualquier superficie cerrada que encierre a la carga, siempre "*el número de líneas de fuerza es igual a la magnitud de la carga que la encierra*".

Ahora supongamos que el campo eléctrico varía de un punto a otro de una superficie, y que esta no es perpendicular en todo punto al campo eléctrico, entonces para calcular el número de líneas de fuerza se procede de la siguiente manera:

a.- Se escoge un diferencial de área cuya magnitud es *dA* y como esta es tan pequeña el campo eléctrico no varía "*tanto*" de tal manera que lo podemos considerar constante sobre esta área diferencial.

b. – Supongamos que el campo eléctrico forma un ángulo "α" con la dirección normal de la superficie *dA*, como se ve en la figura.



c.- Se hace la proyección del campo eléctrico a lo largo de esta dirección, y se calcula el número de líneas que pasa por esta área diferencial, de tal manera que este número de líneas es: $N = \varepsilon_0 E\, Cos\alpha\, dA$, ahora el número de líneas total que atraviesa la superficie es:

$N = \int_S \varepsilon_0 E\, Cos\alpha\, dA$, donde esta integral esta extendida a toda la superficie, ahora sabemos que para superficies cerradas el número de líneas que atraviesa esta área es igual a la carga total encerrada por esta superficie, de tal manera que podemos escribir para el caso de superficies cerradas:

$q = \oint_S \varepsilon_0\, E\, Cos\alpha\, dA$, nótese que $\oint$ denota que la integral está extendida a lo largo de una superficie cerrada, ahora definiendo el vector unitario ***n*** perpendicular a la superficie *dA* podremos formar otro nuevo vector ***n****dA* el cual es paralelo a ***n*** y tiene módulo igual a *dA*. Ahora recordemos que el producto escalar entre dos vectores es:
$\vec{A} \circ \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| Cos\alpha$, donde α denota el ángulo entre estos dos vectores. Con todas estas definiciones podemos escribir, en forma vectorial:

$q = \oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \circ \hat{n} dA \Rightarrow \oint_S \vec{E} \circ \hat{n} dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$, ahora la integral de la izquierda recibe el nombre de "*flujo eléctrico*" y es denotado por Φ_E, de tal manera que finalmente hemos llegado a la conclusión que:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$, el cual es la Ley de Gauss!

$$\text{Con: } \Phi_E = \oint_S \vec{E} \circ \hat{n} dA$$

Recordemos que la Ley de Gauss dice. "El flujo de campo eléctrico en una superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por esta superficie dividido por ε_0".

CAPITULO II
APLICACIONES DEL CAMPO ELÉCTRICO – APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

Preguntas

1. – La mitad de una esfera tiene una carga $+Q$ uniformemente distribuida en su superficie. La otra mitad tiene una carga $-Q$. ¿Se puede aplicar la Ley de Gauss para determinar el campo eléctrico producido por la esfera?

2. – Un cubo tiene una carga Q distribuida uniformemente en su volumen.¿Se puede usar la Ley de Gauss para determinar el campo eléctrico que produce?

3. – Cuando el tiempo es bueno, el campo eléctrico cerca de la superficie de la Tierra es, mas o menos, $100N/C$, y apunta hacia adentro. Estime la carga neta de la superficie terrestre. Si la carga esta distribuida uniformemente ¿cuánta hay en cada metro cuadrado de su superficie? Se supone que la Tierra es una esfera perfecta.

4. – Un globo de hule esférico lleva una carga que esta distribuida uniformemente en su superficie.¿Cómo varía E para puntos a) dentro del globo b) en la superficie del globo, y c) fuera del globo, conforme el balón se va inflando?.

5. – Un átomo ordinariamente se encuentra "eléctricamente neutro". Entonces ¿cómo es posible que una partícula "α" puede llegar a ser desviada por el átomo?

Nota: Se entiende en pocas palabras a una partícula "α" como un núcleo de Helio cargado positivamente.

6. - ¿Sería útil utilizar la Ley de Gauss para determinar el campo eléctrico que originan tres cargas iguales colocadas en los vértices de un triángulo equilátero?.

7. – Una superficie gaussiana encierra un dipolo eléctrico. ¿Qué puede decir acerca del flujo eléctrico para esa gaussiana?.

8. – Un payasito en un parque de diversiones para distraer a los niños, hace globos de distintas formas, esto es, esféricos, en forma de perrito, de salchicha y muchas otras figuras. Al frotar el globo con sus manos estos se cargan uniformemente y la carga sólo reside en la superficie. ¿Cuál es el valor de E dentro de estas figuras?

9. – Conforme usted penetre a una esfera uniforme de carga, E debe disminuir porque hay menos cargas dentro de una esfera trazada por el punto de observación. Por otra parte, E debe aumentar porque usted se encuentra más cerca del centro de esa carga. ¿Qué efecto predomina y por qué?

10. - ¿Seria válida la Ley de Gauss si el exponente de la Ley de Coulomb no fuera exactamente dos?

11. - ¿Qué propiedad de una partícula describe su respuesta a un campo eléctrico aplicado?

12. – Por analogía con el flujo eléctrico. ¿Cómo definiría usted flujo de un campo gravitacional? ¿Cuál es el flujo del campo gravitacional terrestre a través de los límites de un salón, suponiendo que no hay materia dentro de él?.

13. – En la Ley de Gauss, ¿la intensidad del campo eléctrico es solo atribuible a la carga q?.

14. – Se considera un fluido incompresible como aquel que esta libre de "*sumideros*" o "*fuentes*". Si el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en la Ley de Gauss se sustituye por un campo de velocidades del fluido $\boldsymbol{V}$, escriba la Ley de Gauss para fluidos incompresibles.

15. – Si usted estuviera en una tormenta eléctrica y tuviera la opción de meterse en su carro o debajo de un gran árbol ¿cuál de estas dos opciones escogería usted para protegerse de los rayos?

Nota: El árbol esta separado del auto.

CAPITULO II
APLICACIONES DEL CAMPO ELÉCTRICO – APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS

Problemas

1. – Hay dos superficies esféricas concéntricas cuyos radios son "R_1" y "R_2" donde $R_1 < R_2$, cada una tiene una carga total "Q". a.) ¿Cuál es el campo eléctrico entre los dos cascarones? b.) ¿Cuál es el campo eléctrico dentro del cascarón de radio R_1? c.) Calcule el campo eléctrico fuera del cascarón de radio R_2.

Sol: a.) $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} e_r$, siendo "$r$" la distancia desde el centro de la esfera de radio R_1 hasta el punto donde se quiere calcular el campo. En este caso $R_1 < r < R_2$.

b.) $\vec{E} = \vec{0}$

c.) $\vec{E} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} e_r$, siendo e_r un vector unitario a lo largo del radio de la esfera y apuntando desde el centro de la esfera al punto donde se quiere calcular el campo.

2. – Dos cascarones esféricos de plástico, concéntricos, tienen cargas distribuidas uniformemente: "Q" en la cáscara interior y "$-Q$" en la exterior. Determine la magnitud del campo eléctrico en a.) dentro de la cáscara menor b.) entre las dos cáscaras y c.) fuera de la cáscara mayor.

Sol: a.) $E = 0$ b.) $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $R_1 < r < R_2$, $R_1 < R_2$. c.) $E = 0$

3. – Un filamento largo de vidrio tiene una densidad de carga $\lambda = +1{,}34 \mu C/m$. Si se cortan de él dos fragmentos de $1.00 mm$ de longitud a.) ¿Cuánta carga tiene cada fragmento? b.) ¿Cuál es el módulo de la fuerza que ejercerían los segmentos entre sí, si se mantuvieran a un metro de distancia?

Sol: a.) $q = 1{,}34\ nC$ b.) $F = 1{,}61 \times 10^{-6}\ N$

Ayuda: modele la parte b.) de este problema como si fueran cargas puntuales de la magnitud encontrada en la parte a.) , ya que la longitud de las varillas son mucho menores que la longitud que las separa.

4. – Demostrar utilizando integración directa de la definición de campo eléctrico y por la Ley de Gauss, que el campo eléctrico originado por un alambre infinito con densidad de carga constante λ es:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} e_r ,$$

Donde: "e_r "es un vector unitario en dirección radial al alambre y"r" es la distancia del filamento al punto donde se quiere calcular el campo.

5. – Un filamento muy largo de vidrio tiene una densidad de carga λ = -2,7 nC/m. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a 0,67mm del filamento?.

Sol: $\vec{E}$ = - 72471,26 e_r N/C.

6. – Demostrar que el campo eléctrico que genera un anillo con carga total *"Q"*, y de radio *"R"*, sobre su eje, a una distancia *"z"* es:

$$\vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} e_k$$

Donde e_k es un vector unitario en la dirección del eje *"z"*.

7. – Demuestre que el campo eléctrico de una barra de longitud "L" y carga total *"Q"* a lo largo de su plano mediatriz y a una distancia *"y"* de la barra es:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 y\sqrt{y^2 + \frac{L^2}{4}}} e_j$$

Donde e_j es un vector unitario a lo largo del eje *"y"*.

8. – Un filamento circular de radio R = 0,65m tiene una carga total de 6.3μC. a.)¿Cuál será la magnitud del campo eléctrico que produce sobre su eje, a una distancia R de su centro? b.) Compare con el campo producido por un filamento recto con la misma carga y de longitud $2\pi R$, sobre su mediatriz a la distancia $\sqrt{2}\,R$.

Sol: a.) E = 47250 N/C b.) E = 27524,27 N/C

9.- Dos filamentos infinitos uniformemente cargados son paralelos entre sí y están a una distancia *"D"*. Si cada uno tiene la densidad de carga "λ", calcule la fuerza por unidad de longitud que ejercen entre sí.

Sol: $\dfrac{F}{L} = \dfrac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 D}$

10. – Una carga puntual *"Q"* está en el eje de un filamento uniformemente cargado con densidad "λ", que forma un circulo de radio *"a"*. Si la carga puntual está a una distancia *"z"* del centro del filamento, demuestre que la fuerza que ejerce sobre él es:

$F = \dfrac{2\pi\, ka\lambda Qz}{\left(z^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, a lo largo del eje del filamento. Siendo k la constante eléctrica.

11. – Una varilla de longitud *"L"*, uniformemente cargada con densidad de carga "λ", está en el eje *"x"*, y su punto medio está en el origen. Determinar el campo eléctrico a una distancia "x_0" sobre el eje "x" tal que $x_0 > L/2$.

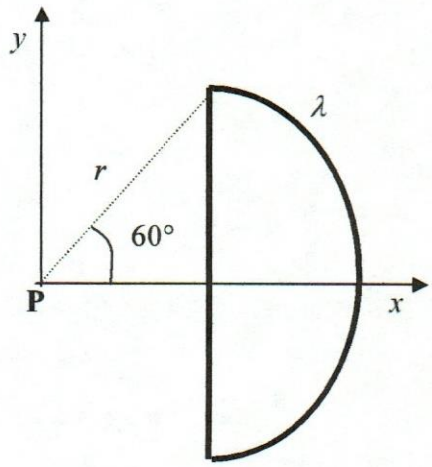
Sol: $\vec{E} = \dfrac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0\left(x_0^{\,2} - \dfrac{L^2}{4}\right)} e_i$, donde e_i es un vector unitario a lo largo del eje *"x"*

12. – Un filamento semi - infinito tiene una densidad uniforme de carga "λ", y está en el eje de las *"x"* positivas. Determine el campo eléctrico en los puntos del eje *"y"*.

Sol: $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left(e_j - e_i\right)$

13. – Un filamento uniformemente cargado tiene la forma de un arco circular y su cuerda, como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en el centro del circulo (punto **P**).

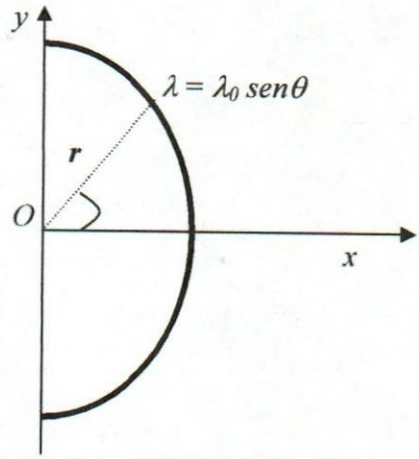
Sol: $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\sqrt{3}(1+3r)}{3r} e_i - e_j\right]$



14. – Dos filamentos semicirculares comparten un diámetro. Uno está en el plano $X-Y$ y el otro en el plano $X-Z$. La parte curva de cada uno tiene una densidad lineal uniforme de carga "λ". Determine el campo eléctrico en el centro común de las dos semi-circunferencias.

Sol: $\vec{E} = \dfrac{-2k\lambda}{r}\left(e_k + e_j\right)$, siendo "$r$" el radio del semi-anillo y k la constante eléctrica.

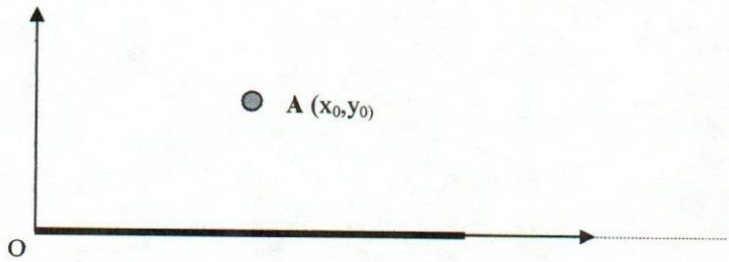
15. – Un tramo semicircular de alambre tiene una densidad de carga $\lambda = \lambda_0\, sen\theta$ donde θ es cero en el punto medio del alambre, como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en el centro de la semi – circunferencia (punto O).



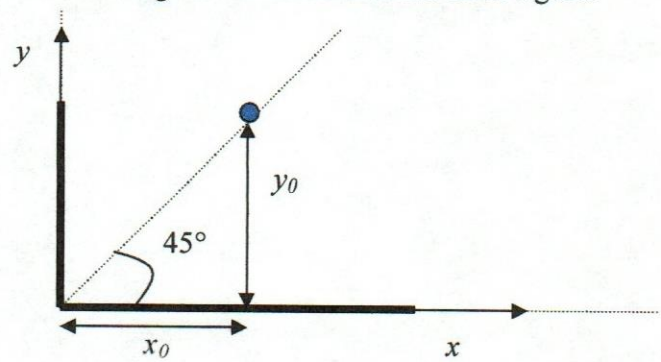
Sol: $\vec{E} = \dfrac{-k\lambda_0\pi}{2r}e_j$, siendo "$k$" la constante eléctrica.

16. – Se coloca un alambre semi – infinito a lo largo del eje "x", con su origen en el punto **O** (0,0) como se muestra en la figura. Se desea calcular las componentes del campo eléctrico que genera este alambre semi-infinito en el punto **A** (x_0,y_0). Demuestre que las componentes E_x y E_y vienen dadas por las expresiones:

$$E_x = \frac{-\lambda k}{y_o}\text{sen}\left[\text{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right] \qquad E_y = \frac{\lambda k}{y_0}\left\{1 - Cos\left[\text{arctg}\left(\frac{-y_0}{x_0}\right)\right]\right\}$$

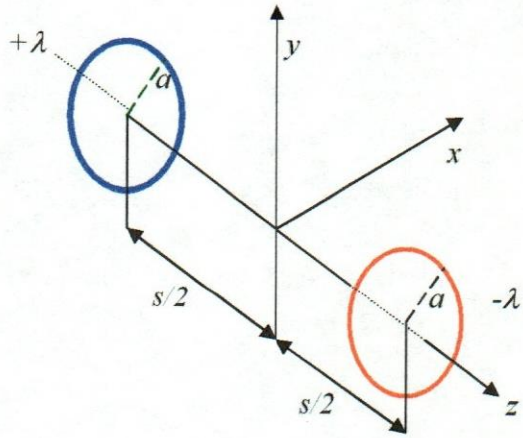


17. – Dos filamentos semi – infinitos están en los ejes "x" y "y" positivos, respectivamente. Cada uno tiene la misma densidad de carga "λ". Determine el campo eléctrico en un punto sobre la diagonal como se muestra en la figura.



Sol: $\vec{E} = \dfrac{\lambda k}{d}\left(e_j - e_i\right)$, siendo $d = x_0 = y_0$

18. – Dos filamentos forman aros circulares uniformemente cargados, con densidades de carga "$+\lambda$" y "$-\lambda$". Los aros son paralelos, tienen un eje común y están separados por una distancia "s" como se muestra en la figura. Determine el campo eléctrico en función de z, en puntos del eje que estén entre los filamentos. Demuestre que $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial z} = 0$ cuando $z = 0$.



Sol: $$\vec{E} = \frac{\lambda a}{\varepsilon_0}\left[\frac{z+\frac{s}{2}}{\left(a^2+\left(z-\frac{s}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{z-\frac{s}{2}}{\left(a^2+\left(z+\frac{s}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]e_k$$

19. – Una placa de vidrio cargada uniformemente tiene una densidad de carga superficial $\sigma = 4.3\ nC/m^2$. Si de esa placa se corta un disco circular de radio $R = 3.2cm$, ¿qué carga tendrá el disco?

Sol: $Q = 0{,}013\ nC$.

20. – Demuestre que el campo eléctrico que genera un disco con densidad superficial σ constante, de radio *"R"* a lo largo del eje del disco, viene dado por la expresión:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \text{ a lo largo del eje del disco.}$$

21. - ¿Cuál es el campo eléctrico a 0,35 *cm*. arriba de la superficie de la placa de vidrio mencionada en el problema 19?.

Sol: $\vec{E} = 216{,}52\ N/C$, a lo largo del eje del disco y apuntado hacia fuera del disco.

Ayuda: Obtenga los datos del problema 19 y básese en el problema 20 para resolverlo.

22. – Una esfera de vidrio de 0.025 *cm* de radio es bombardeada con iones y adquiere una carga total de $7.6pC$, distribuida uniformemente en su volumen. a.)¿Cuál es la densidad de carga de la esfera? b.) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a $0{,}05mm$ sobre su superficie?.

Sol: a.) $\rho = 0{,}12\ C/m^3$ b.) $E = 2{,}7\text{x}10^7\ N/C$

23. – Demostrar por Ley de Gauss y por integración directa de la definición de campo eléctrico que un plano infinito genera un campo eléctrico dado por:

$\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, en dirección perpendicular al plano y apuntando hacia afuera del mismo.

24. – Dos planos paralelos e infinitos están separados por una distancia *"d"*.Determine la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto a.) Si ambos planos tienen una densidad superficial de carga σ. b.) si la densidad de carga en un plano es σ y en el otro es $-\sigma$.

Sol: a.) Entre las placas: $E = 0$, fuera de la placas $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

b.) Entre las placas: $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, fuera de las placas $E = 0$.

Ayuda: Aplique el principio de superposición y tome en cuenta el ejercicio 23.

25. – Dos planos infinitos cargados uniformemente con densidades de carga σ iguales se intersecan en ángulo recto, Determine el campo eléctrico en cualquier punto.

Sol: Para el I cuadrante: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(e_i + e_j)$ Para el II cuadrante: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-e_i + e_j)$

Para el III cuadrante: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-e_i - e_j)$ Para el IV cuadrante: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(e_i - e_j)$

26. – Un cascarón esférico grueso tiene radio interior "R_1", y radio exterior "R_2", y una densidad uniforme de carga "ρ". a.) ¿Cuál es la carga total en la cáscara?. Aplique la Ley de Gauss para determinar el campo eléctrico en cualquier punto. Trace la magnitud del campo como función de la distancia "r" al centro de las esferas.

Sol: $0 < r < R_1, E = 0$

$$R_1 < r < R_2,\ \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^3 - R_1^3}{r^2}\right) radial.$$

$$r > R_2\ ,\ \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\left(R_2^3 - R_1^3\right) radial.$$

27. – Determine el campo eléctrico debido a un plano infinito considerando que es un conjunto de filamentos infinitos y uniformemente cargados; aplique el principio de superposición.

Nota: Este ejercicio es una manera distinta de resolver el ejercicio 23, por lo tanto deben coincidir las respuestas.

28. – a.) Determine el campo eléctrico en el eje "z" debido a un disco de radio "a" que está en el plano X-Y con centro en el origen , y cuya densidad de carga es: $\sigma = \sigma_0\left(\frac{r}{a}\right)^2$.
b.)Luego calcule el valor de esta componente cuando $z = 0$.

Sol: a.) $E_z = \frac{2\pi\, k\sigma_0 z}{a^2}\left(\frac{2z^2 + a^2}{\sqrt{z^2 + a^2}} - 2z\right)$, k es la constante eléctrica. b.) $E_z = 0$

29. – Una placa infinita paralela al plano X-Y ocupa la región $-w < z < w$. La densidad de carga en ella varia en función de "z" según la fórmula: $\rho = \frac{\rho_0 |z|}{w}$, para $|z| < w$. Determine el campo eléctrico producido por la placa para $|z| > w$ y para $|z| < w$.

Sol: $E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 w} z^2$ para $|z| < w$ y $E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} w$ para $|z| > w$.

30. – Demuestre que el campo eléctrico *dentro* de una esfera maciza con densidad de carga "ρ" y radio "R" viene dada por la expresión:

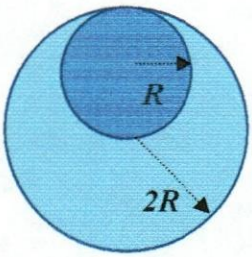
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r},$$

donde $\boldsymbol{r}$ es el vector que va desde el origen de la esfera hasta el punto donde se quiere calcular el campo.

31. - Una esfera de radio "a" tiene una densidad de carga variable $\rho(r) = \rho_0\left(\frac{r}{a}\right)^2$. Determine la magnitud del campo eléctrico en cualquier lugar dentro y fuera de la esfera.

Sol: Dentro de la esfera: $E = \frac{\rho_0 r^3}{5\varepsilon_0 a^2}$ Fuera de la esfera: $E = \frac{\rho_0 a^3}{5\varepsilon_0 r^2}$

32. – Una esfera de radio "$2R$" tiene una densidad de carga uniforme "ρ", excepto dentro de un hueco esférico de radio "R", en el ρ es igual a cero ($\rho = 0$), tal como se muestra en la figura. Demuestre que E es uniforme dentro de hueco, y calcule su magnitud.



Sol: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{R}$

Ayuda: Utilice el resultado obtenido en el ejercicio 30, luego imagine que la cavidad se puede originar superponiendo una esfera maciza de densidad ρ (constante) y radio "$2R$" más una esfera de densidad ($-\rho$) (constante) de radio "R", luego el campo total es la suma vectorial de estos dos campos.

33. – Un objeto cilíndrico infinitamente largo, de radio "R", tiene una distribución de carga que depende de la distancia al eje, de acuerdo con la fórmula: $\rho = Ar + Br^2$ ($r \leq R$). Use la ley de Gauss para determinar la relación que deben tener los coeficientes A y B, para que dicha distribución origine un campo eléctrico nulo en su exterior.

Sol: $\frac{A}{B} = -\frac{3}{4}R$

34. – Un objeto de carga "q" desconocida y masa $m = 1.0gr$ se mueve en circulo alrededor de un objeto mucho mas masivo, con carga $Q = 1\mu C$. La distancia entre los dos es $r = 2cm$, y el objeto menor se mueve con una rapidez $V = 5m/s$. ¿Cuánto vale q?

Sol: $q = 5.5\text{x}10^{-8}\ C$

35. – Una superficie plana infinita tiene una densidad de carga uniforme $\sigma = 20nC/m^2$. Un electrón sale de un pequeño agujero en ella, con una velocidad de $2.7\text{x}10^7 m/s$, formado un ángulo de 60° con la normal. a.)¿Qué tiempo transcurre para que el electrón regrese a la superficie? b.) ¿A qué distancia del agujero llega a la superficie?.

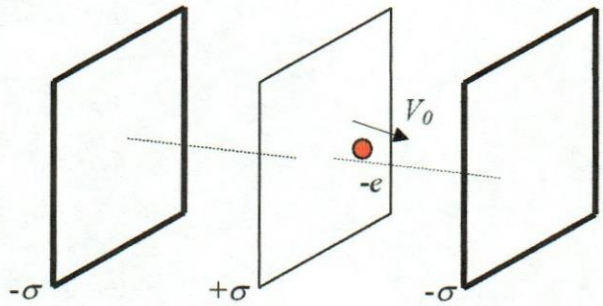
Sol: a.) $t = 1{,}38\text{x}10^{-7}s$ b.) $x = 3{,}24\ m$

36. – Una partícula de $1.5gr$ de masa se mueve en trayectoria circular alrededor de un filamento cuya densidad de carga uniforme es $1.0\mu C/m$. La carga de la partícula es: $-15nC$. Calcule su rapidez.

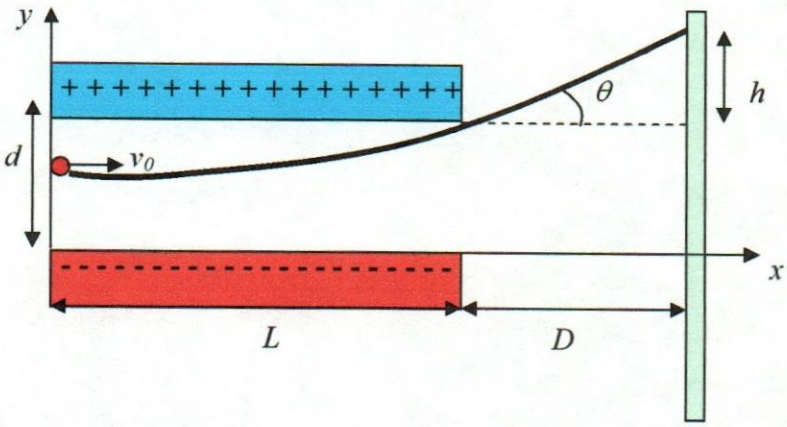
Sol: $v = 0{,}42\ m/s$

37. – Tres planos paralelos, infinitos y cargados uniformemente se colocan como se ve en la figura. El plano intermedio tiene un pequeño agujero. Cuando $t = 0$, sale un electrón del agujero moviéndose perpendicularmente a los planos con una velocidad V_0. Suponiendo que V_0 es suficientemente pequeña para que el electrón no choque con la placa negativa, demuestre que el movimiento del electrón es periódico y calcule el periodo.

Sol: $\tau = \dfrac{8\varepsilon_0 m v_0}{e\sigma}$



38. – Un par de placas paralelas y horizontales se cargan con signos opuestos como indica la figura. Un electrón es disparado horizontalmente con una velocidad V_0 y a una distancia que es la mitad de la separación de las placas "d", si la placa tiene una longitud "L". Determine: a.) La magnitud del campo eléctrico necesario para que el electrón no pegue de la placa b.) Calcular el ángulo "θ" con el cuál sale el electrón c.) Si existiese una placa fluorescente a una distancia "D" del par de placas, calcule la altura "h" a la cual choca el electrón.



Sol: a.) $E = \dfrac{mv^2 d}{eL^2}$ b.) $tg\theta = \dfrac{d}{L}$ c.) $h = \dfrac{dD}{L}$

Donde "m" y "e" son la masa y la carga del electrón.

39. – Un dipolo eléctrico de $9.0nC.m$ se coloca en una región donde el campo eléctrico es de 1,5 N/C. Ese dipolo se puede representar como una varilla de 5 mm de longitud con $1{,}0gr$ de masa. Calcule el periodo de oscilaciones pequeñas respecto a la posición de equilibrio.

Sol: $T = 1{,}86\ s$

40. – La Ley de Gauss para la gravitación es: $\dfrac{1}{4\pi G}\phi_E = \dfrac{1}{4\pi G}\oint g \bullet dS = m$, siendo "$m$" la masa encerrada y "$G$" la constante de la gravitación universal. Deduzca de esta expresión la Ley de Gravitación de Newton.

41. – Un electrón de 100 ev se dispara directamente hacia una gran placa metálica que tiene una densidad de carga superficial "σ" de $-2 \times 10^{-6}\ C/m^2$. ¿Desde qué distancia debe dispararse el electrón para que llegue casi a pegar a la placa?

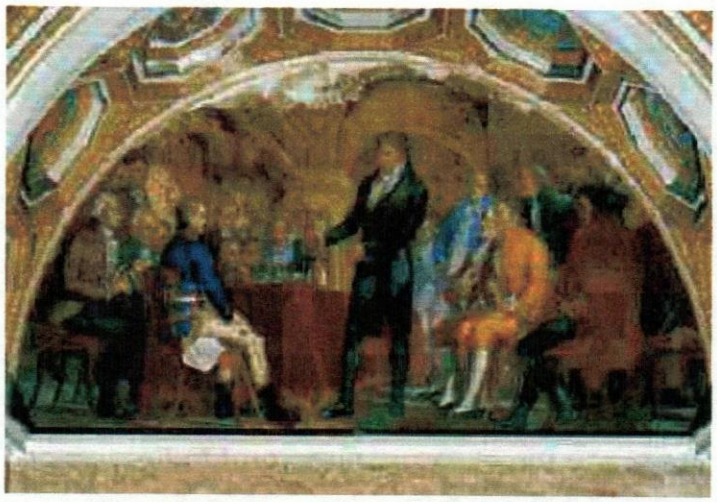
Sol: $\Delta x = 8{,}85 \times 10^{-6} m$

42. – Hay una carga distribuida uniformemente en un cilindro infinitamente largo de radio "R". Demuestre que el módulo del campo eléctrico a la distancia "r" del cilindro $(r < R)$ está dada por:

$$E = \frac{\rho\, r}{2\varepsilon_0}$$

Siendo "ρ" la densidad de carga volumétrica.

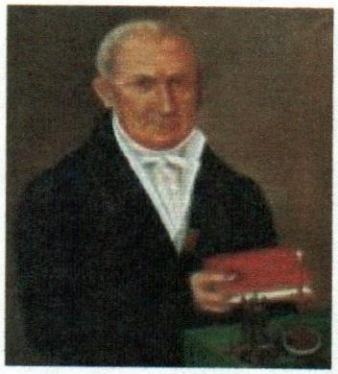
CAPÍTULO III



En esta pintura se aprecia el momento en donde Napoleón Bonaparte le otorga a Alessandro Volta el título de Conde.

Primera pila eléctrica

POTENCIAL ELÉCTRICO



Alessandro Volta (1745 – 1827)

Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta, físico italiano, nacido en Como (Italia) el 18 de febrero de 1745, hijo de una madre procedente de la nobleza y de un padre de la alta burguesía, recibió una educación básica y media de características humanista, pero al llegar a la enseñanza superior optó por una formación científica. A la edad de 18 años realizaba experimentos eléctricos y mantenía correspondencia con investigadores eléctricos europeos. Su primer trabajo científico llevó por título "*Sobre la fuerza atractiva del fuego eléctrico*" datado en 1769. En el año 1774, es nombrado profesor de física de la Escuela Real de Como. Justamente, un año después Volta realiza su primer invento de un aparato relacionado con la electricidad. Con dos discos metálicos, separados por un conductor húmedo, pero unidos con un circuito exterior logra, por primera vez, producir corriente eléctrica continua, se inventa el electróforo perpetuo, un dispositivo que una vez que se encuentra cargado puede transferir electricidad a otros objetos. Su creación le valió para ser nombrado miembro de la Real Sociedad de Londres y de la Academia de París.

Entre 1776 y 1777 se dedica a la química, estudiando la electricidad atmosférica ideó experimentos como la ignición de gases mediante una chispa eléctrica en un recipiente cerrado y también aísla el gas metano. En 1778 ocupa la cátedra de Física experimental de la Universidad de Pavía donde trabajó hasta su retirada en 1819. Volta era amigo de Luigi Galvani y, cuando éste descubrió en 1780 que el contacto con dos metales diferente con el músculo de una rana producía electricidad, también empezó a hacer sus propios experimentos de electricidad-animal, pero llegó a otra conclusión en el año 1794: que no era necesario la participación de los músculos de los animales para producir corriente. Este hallazgo, le produjo una multiplicidad de conflictos, no sólo con su amigo Galvani, sino con la mayoría de los físicos de la época que eran adherentes a la idea de que la electricidad sólo se producía a través del contacto de dos metales diferentes con la musculatura de los animales. Sin embargo, cuando Volta logró construir la primera pila eléctrica, demostró que él se encontraba en lo cierto y había ganado la batalla frente a sus colegas.

Alessandro Volta comunica su descubrimiento de la pila a la Royal London Society, el 20 de marzo de 1800. La correspondiente carta fue leída en audiencia del 26 de junio del mismo año, y después de reproducciones del invento efectuadas por los miembros de la sociedad se le otorgó a Volta el correspondiente crédito. En el año 1801, en el mes de septiembre, viaja a París aceptando una invitación del propio Napoleón Bonaparte para que exponga las características de su invento en el Instituto Nacional de Ciencias de Francia. El propio Bonaparte participó con entusiasmo en las correspondientes sesiones y exposiciones y recomendó para Volta los máximos honores para él. El 1 de mayo de 1806, Volta es elegido como Caballero de la Corona de Hierro del reino de Lombardia. En 1809 es designado senador de la corte y, en 1810, se le otorga el título nobiliario de conde. Voltio, la unidad de potencia eléctrica, se denomina así en honor a este portentoso – en el buen sentido- de las ciencias. Sus trabajos fueron publicados en cinco volúmenes en el año 1816, en Florencia. Sus últimos años de vida los pasó en su hacienda en Camnago cerca de Como, donde fallece el 5 de marzo de 1827.

La pila facilitó que varios científicos ingleses lograran aislar nuevos cuerpos como el potasio y el sodio. Fue la base de los nuevos conocimientos electrodinámicos desarrollados por Oersted, Ohm y Ampére en los años veinte del siglo XIX y, en última instancia, de los cambios que el mundo observaría con la invención del motor eléctrico.

CAPITULO III
POTENCIAL ELÉCTRICO

"He investigado mucho, ahora ya veo a Dios en todo..."

***Alessandro Volta**, inventor de la pila.*

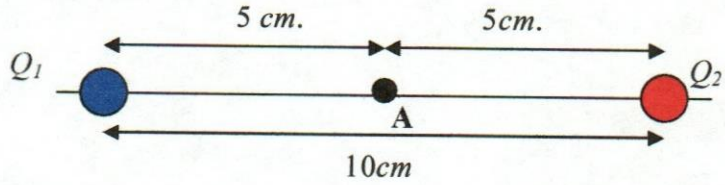
Problemas resueltos

Problema 1:

Se tienen dos cargas ubicadas a lo largo de una recta, $Q_1 = 40 \times 10^{-9}\ C$ y $Q_2 = -30 \times 10^{-9}\ C$, las cuales están separadas por una distancia de 10 *cm*. a.) Calcule el potencial que producen estas dos cargas en el punto medio que las separa. b.) calcule el potencial que produce esta configuración en un punto que está a 6 *cm*. de Q_1 y a 8 *cm*. de Q_2. c.) calcule el trabajo para llevar una carga de $25 \times 10^{-9}\ C$ del punto del apartado b.) al punto del apartado a.).

Solución

a.) Lo primero que debemos realizar en un gráfico para tener "idea" de lo que vamos a calcular y visualizarlo mejor. Entonces:



El punto **A** representa el punto medio entre las cargas Q_1 y Q_2, para contestar a la primera parte del problema debemos aplicar la ecuación del potencial eléctrico para cargas puntuales, ahora debe hacerse notar que el potencial eléctrico de cualquier configuración de cargas puntuales, es la suma algebraica de los potenciales que produce cada una por separado como si las demás no existieran, esto es, se puede aplicar el principio de superposición, entonces:

Potencial de Q_1 en el punto **A:**

$V_1 = \dfrac{KQ_1}{r}$, donde K es la constante dieléctrica y "r" es la distancia donde se quiere calcular el potencial, entonces sustituyendo:

$$V_1 = 9x10^9 \frac{40x10^{-9}}{5x10^{-2}} = 7200\,\text{V}.$$

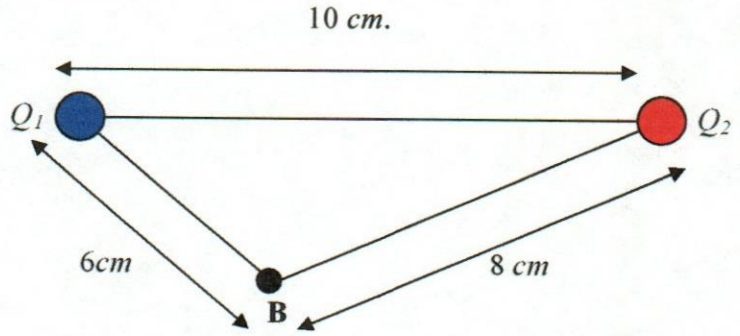
Ahora pasemos a calcular el potencial que produce la carga 2 en el punto **A:**

$$V_2 = 9x10^9 \frac{-30x10^{-9}}{5x10^{-2}} = -5400\,\text{V}.$$

El potencial de la configuración es la suma algebraica de estos potenciales esto es:

$V_A = V_1 + V_2 =$ 7200 V + (- 5400 V) = 1800V con lo cual la parte a.) queda de esta forma contestada.

b.) Pasemos a resolver la parte b.) de este problema, para ello debemos graficar la nueva situación, esto nos ayudará siempre a visualizar mejor lo que estamos calculando, entonces:



Ahora calculemos el potencial de la carga 1:

$$V_1 = 9x10^9 \frac{40x10^{-9}}{6x10^{-2}} = 6000\,\text{V}$$

y el potencial de la carga 2.

$$V_2 = 9x10^9 \frac{-30x10^{-9}}{8x10^{-2}} = -3375\ \text{v}$$

El potencial total será la suma algebraica de estos potenciales, entonces:

$V_B = V_1 + V_2 = 6000$ V + (-3375 V) = 2625 V, este es el potencial creado por la configuración de cargas en el punto **B**.

c.) Para calcular el trabajo del punto **B** al punto **A,** debemos tomar en cuenta la definición de **diferencia de potencial**, la cual nos dice: "*La diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos a y b, es el trabajo por unidad carga que debemos realizar para llevar una carga del punto a al punto b*", en palabras matemáticas sería:

$$\Delta V = \frac{W}{q}$$

Ahora de esta definición despejemos W:

$$W = q\,\Delta V$$

Ahora ΔV representa la diferencia de potencial entre los puntos **A** y **B**, como se va a llevar la carga de **B** hacia **A** entonces ΔV es $V_A - V_B$, entonces la expresión del trabajo quedaría:

$W = q\,(V_A - V_B)$, sustituyendo los valores de q, V_A y V_B obtenemos:

$W = 25\text{x}10^{-9}C$ (1800 V – 2625 V) = - 2,06μJ.

Problema 2:

Se tiene una carga puntual de $3x10^{-8}$ C. a.) Calcule la distancia a la cual el potencial creado por ella es de 12 V b.) ¿Cuál es la forma geométrica de las superficies equipotenciales? c.) Calcule el trabajo que se debe realizar para llevar una carga de prueba a través de una diferencia de potencial de un voltio.

Solución

a.)De la ecuación de potencial eléctrico, debemos despejar "r", entonces:

$V_1 = \frac{KQ_1}{r} \Rightarrow r = \frac{KQ_1}{V_1} = \frac{9x10^9.3x10^{-8}}{12} = 22{,}5m$, esto quiere decir que a 22,5 metros de la carga, el potencial será de 12 voltios.

b.) Como tenemos una carga puntual, la expresión del potencial eléctrico esta dada por:

$V = \frac{KQ_1}{r}$, pero ésta expresión está escrita en coordenadas esféricas donde "r" representa la distancia de la carga al punto donde se quiere calcular el potencial, entonces en coordenadas cartesianas, la expresión de "r" es:

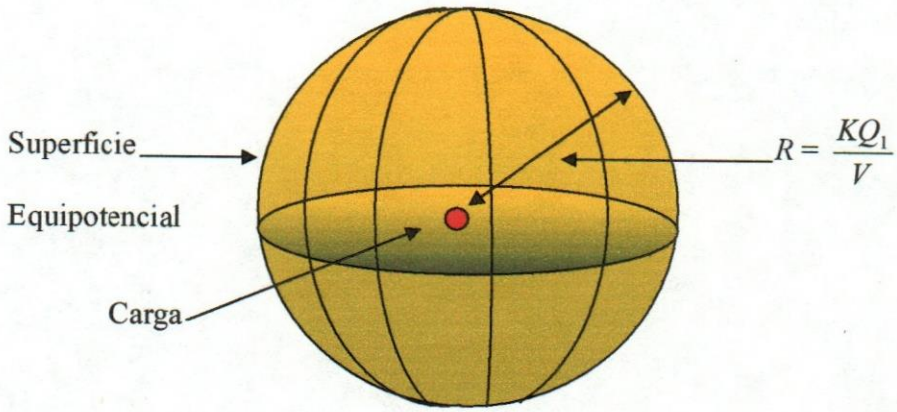
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, lo cual sustituyendo en la expresión del potencial queda:

$V = \frac{KQ_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, ahora si despejamos el denominador:

$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{KQ_1}{V}$, ahora elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad para obtener:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{KQ_1}{V}\right)^2$$

Ahora si el valor de Q_1 y el voltaje se mantienen constantes, representa la ecuación de una esfera!!, el radio de dicha esfera es: $\frac{KQ_1}{V}$ lo quiere decir, que si muevo una carga por esta superficie, no importa cuanto la mueva, jamás se realizará trabajo!.



c.) Para contestar esta pregunta, usaremos la definición de potencial eléctrico, entonces:

$$\Delta V = \frac{W}{q}$$

De esta ecuación despejamos W:

$W = q\ \Delta V$, ahora una carga de prueba tiene una carga igual a: $1{,}6\text{x}10^{-19}\ C$, y sustituyendo ΔV por 1 V, obtenemos:

$W = 1{,}6\text{x}10^{-19}\ C$ x 1V = $1{,}6\text{x}10^{-19}\ J$, ahora, a esta cantidad se le denomina: **"electrón – volts"** y se denota por: 1 *ev*, ahora podemos definir el electrón-volts:

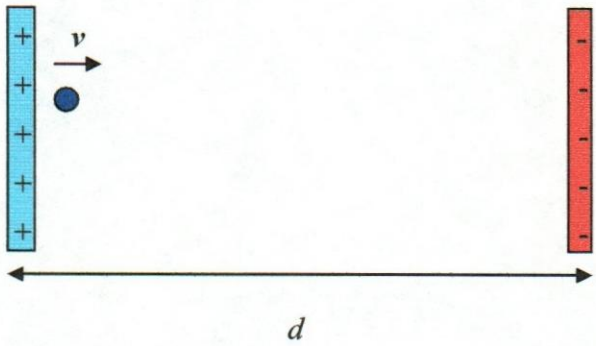
***Electrón – volts**: Se denomina electrón – volts al trabajo que se debe realizar para trasladar una carga de prueba, a través de una diferencia de potencial de un voltio.*

Conclusión:

$$1\ ev = 1{,}6 \text{ x } 10^{-19}\ J$$

Problema 3:

Dos placas rectangulares cargadas con signos opuestos, se encuentran separadas una distancia "*d*", entre ellas se establece una diferencia de potencial ΔV tal como se muestra en la figura inferior, un protón se desprende de la placa positiva y se dirige en línea recta hacia la placa negativa. a.) Demuestre que la velocidad del protón al llegar a la placa negativa es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de potencial ΔV b.) ¿Cuál voltaje deberíamos aplicar para que la velocidad del protón al llegar a la placa negativa sea el 10% de la velocidad de la luz? c.) Si mantenemos el voltaje calculado en la parte b.) y supongamos que ahora sale un deuterón, ¿cuál es la velocidad del deuterón al llegar a la placa negativa? exprésela como un porcentaje de la velocidad de la luz.



Solución

a.) Una vez que el protón sale de la placa positiva, entra en una región donde existe un campo eléctrico, por lo tanto sentirá una fuerza eléctrica que lo acelera hacia la placa negativa, esta fuerza viene dada por:

$$F = q\,E$$

Ahora según la segunda Ley de Newton, esta fuerza debe ser: $F = ma$, ahora igualemos estas ecuaciones y obtendremos:

$$q\,E = m\,a$$

y despejemos "*a*":

$$a = \frac{qE}{m}$$

Ahora el campo eléctrico que produce este par de placas paralelas viene dado por la expresión:

$$E = \frac{\Delta V}{d}$$

Sustituyendo esta expresión del campo eléctrico en la ecuación de la aceleración, nos queda:

$$a = \frac{q\Delta V}{md}$$

Nótese que la aceleración es **constante** (d no varía y ΔV es constante), eso quiere decir que podemos utilizar todas las ecuaciones de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en particular usaremos la ecuación:

$$V_f^2 = V_o^{\ 2} + 2ad$$

Como el protón parte del reposo, su velocidad inicial V_0 es igual a cero, entonces tomando esto en cuenta y sustituyendo por la expresión de aceleración ya encontrada, tenemos que:

$V_f^{\ 2} = \dfrac{2q\Delta V}{m} \Rightarrow V_f = \sqrt{\dfrac{2q\Delta V}{m}}$, en la cual se demuestra que la velocidad de llegada es proporcional a la raíz cuadrada de la diferencia de potencial.

b.) De la expresión obtenida en la parte a.), despejamos ΔV, quedándonos:

$\Delta V = \dfrac{m_p V_f^{\ 2}}{2q}$, donde "$m_p$" representa la masa del protón. Ahora sabemos que la velocidad de la luz es: c = 300.000 *Km/s*, y el 10% de "c" es 30.000 *Km/s*, que equivale a 30.000.000 *m/s*, sustituyendo este valor por V_f, obtenemos:

$$\Delta V = \frac{(1{,}67x10^{-27})(30.000.000)^2}{2x1{,}6x10^{-19}} = 4.696.875 \text{ V, un poco alto ¿no?}$$

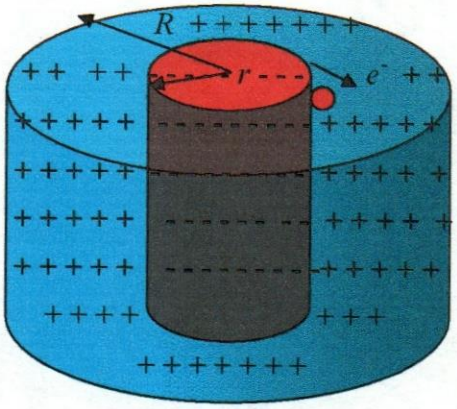
c.) Un ***deuterón*** es una partícula nuclear que consta de un protón y un neutrón, y como la masa del neutrón y del protón son muy parecidas, el deuterón es una partícula que tiene una masa que es el doble que la del protón, entonces sustituyendo en la expresión de la velocidad encontrada en la parte a.):

$V_f = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2\,(1{,}6x10^{-19})(4.696.875)}{2\,(1{,}67x10^{-27})}} = 21.213.203{,}43 m/s = 0{,}7\%$ de la velocidad de la luz, esto se escribe: *0,007c.*

Problema 4:

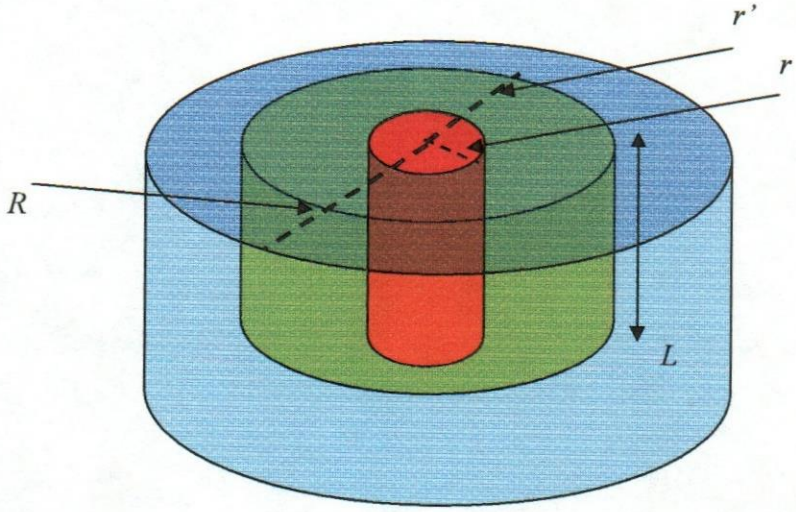
Se establece una diferencia de potencial de 300 V entre dos cilindros infinitos concéntricos y huecos de radio $r = 0{,}05\ cm$ y radio $R = 0{,}45\ cm.$, tal como se muestra en la figura. El cilindro de radio "R" cumple la función de ánodo y el de radio "r" de cátodo. Calcule:

a.) La densidad de carga superficial "σ" del cátodo.
b.) Si un electrón se desprende del ánodo ¿cuál será su velocidad cuando ha recorrido $2mm$?. Exprésela en función de "c".
c.) En base al ejercicio b.) ¿cuál será la velocidad del electrón cuando ha llegado al ánodo?. Exprésela en función de "c".



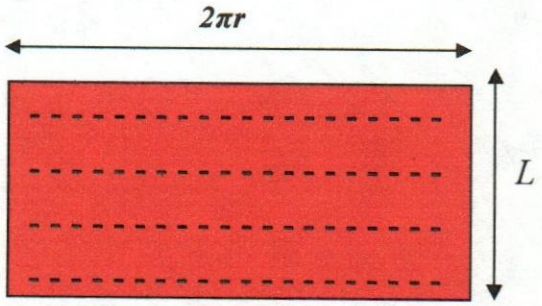
Solución

a.) Lo primero que debemos calcular es el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ que existe en la región comprendida entre los dos cilindros. Para calcular dicho campo utilizaremos la Ley de Gauss, entonces vamos a escoger una gaussiana cilíndrica que tenga radio $\boldsymbol{r'}$ y altura $\boldsymbol{L}$, tal como se muestra en la figura inferior:



Utilizando la Ley de Gauss:

$\oint \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$, pero debemos calcular la $Q_{encerrada}$ que representa la carga encerrada por la gaussiana. Ahora si imaginamos que cortamos el cilindro que cumple la función de cátodo a lo largo de su eje, la figura que se forma es un rectángulo, cuya base es $2\pi r$, tal como se muestra en la figura inferior, y la altura de este cilindro la podemos tomar como la altura de la gaussiana, es decir L.



De tal manera que el área lateral del cilindro, es la de este rectángulo, es decir $2\pi rL$, ahora la densidad superficial σ viene dada por:

$$\sigma = \frac{c\arg a}{área} = \frac{Q_{encerrada}}{2\pi\ rL} \Rightarrow Q_{encerrada} = 2\sigma\pi\ rL$$

Ahora ya sabemos cual es la carga encerrada en función de σ, de tal manera que aplicando la Ley de Gauss:

$\oint \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \frac{2\sigma\pi\ rL}{\varepsilon_0}$. Por otro lado tenemos que:

$\oint \vec{E} \circ d\vec{s} = 2E\pi r'L$, ya que el área de la gaussiana se calcula de la misma manera mostrada anteriormente, entonces:

$$2E\pi r'L = \frac{2\sigma\pi\ rL}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma\ r}{\varepsilon_0\ r'}$$

Donde r' representa el punto donde se quiere calcular el campo eléctrico, es debido acotar que este campo es radial y apunta hacia el centro, el signo negativo estará incluido en σ ya que ésta es negativa. (Acuérdese que la $Q_{encerrada}$ es negativa y por lo tanto σ es negativa).

Bien, ahora utilizaremos la definición de la diferencia de potencial, pero aplicado a la región comprendida entre los cilindros:

$\Delta V = -\int_r^R \vec{E} \circ d\vec{r}$, y sustituyamos ***E*** por el valor ya obtenido del campo:

$$\Delta V = -\int_r^R \frac{\sigma\, r}{\varepsilon_0\, r'} dr' = \frac{\sigma\, r}{\varepsilon_0} \int_r^R \frac{dr'}{r'} \Rightarrow \Delta V = \frac{\sigma\, r}{\varepsilon_0} \left[\ln r'\right]_r^R = \frac{\sigma\, r}{\varepsilon_0} \left[\ln R - \ln r\right] \Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{\sigma\, r}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right)}$$

Esta expresión que está en recuadro, es la expresión de la diferencia de potencial entre los cilindros. Desde "*r* "hasta "*R*" hay una diferencia de potencial de 300 V, tomando esto en cuenta y despejando σ, obtenemos:

$$\sigma = \frac{\Delta V \varepsilon_0}{r \ln\left(\frac{R}{r}\right)} = \frac{(300)(8{,}85x10^{-12})}{0{,}05x10^{-2} \ln\left(\frac{0{,}45x10^{-2}}{0{,}05x10^{-2}}\right)} = 2{,}41x10^{-6}\, \frac{C}{m^2}.$$

b.) Utilicemos el hecho de la conservación de la energía. La energía potencial del electrón al desprenderse del cátodo debe permanecer constante, ya que éste es un sistema conservativo, ahora bien, la escogencia del "cero" de energía potencial se tomará justamente en la capa catódica, entonces tendremos:

Energía mecánica inicial (E_{mo}) = Energía mecánica final (E_{mf})

Ahora como el electrón parte del reposo, su energía cinética en ese instante es cero, y por la escogencia del "cero" de energía potencial, nos da como resultado que la energía mecánica inicial es cero (E_{m0} = 0), en el instante que el electrón está a 2*mm* del cátodo ya ha adquirido una cierta velocidad "*v*" y por lo tanto su energía cinética es: ½ $m_e\, v^2$ y su energía potencial será $e\Delta V$, tomando en cuenta que el electrón tiene una carga negativa, nos queda la siguiente ecuación:

$$0 = \tfrac{1}{2}\, m_e\, v^2 - e\Delta V$$

Ahora solo debemos calcular la diferencia de potencial que existe entre esos dos milímetros, para ello utilizaremos la expresión que estaba en recuadro de la diferencia de potencial, entonces:

$$\Delta V = \frac{(2{,}41x10^{-6})(0{,}05x10^{-2})}{8{,}85x10^{-12}} \ln\left(\frac{2x10^{-3}}{0{,}05x10^{-2}}\right) = 188{,}75\ \text{V}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación de la conservación de la energía, y sustituyendo los valores de "m_e" y "e", obtenemos:

$$0 = ½ .(9{,}1\ x10^{-31}) .(v^2) - (1{,}6x10^{-19})(188{,}75)$$

Despejando "v" obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{2\ (1{,}6x10^{-19})(188{,}75)}{9{,}1x10^{-31}}} = 8.147.001{,}06\frac{m}{s} = 2{,}7\%\ \text{de "}c\text{".}$$

d.) En esta parte lo único que debemos cambiar es el valor de la diferencia de potencial, que para este caso es 300 V, entonces:

$$v = \sqrt{\frac{2\ (1{,}6x10^{-19})(300)}{9{,}1x10^{-31}}} = 10.271.051{,}82\frac{m}{s} = 3{,}42\%\ \text{de "}c\text{".}$$

Problema 5:

En una cierta región del plano, el potencial eléctrico viene dado por la expresión:

$$V = \frac{ax}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Halle las componentes cartesianas del campo eléctrico ***E***.

Solución

Para satisfacer la definición de ΔV:

$$\Delta V = -\int_a^b \vec{E} \circ d\vec{r}$$

Es necesario que para cada desplazamiento infinitesimal se cumpla que:

$$dV = -\vec{E} \circ d\vec{r}$$

Esto quiere decir, que cada incremento infinitesimal de desplazamiento (***dr***) viene acompañado de un incremento de potencial (dV). Ahora como $\vec{E} \circ d\vec{r} = E_s\, ds$ donde E_s representa la componente del campo eléctrico a lo largo del vector ***dr*** y ds representa la magnitud de este vector, podemos escribir que:

$$\boxed{E_s = -\frac{dV}{ds}}$$

Por lo tanto si conocemos V podemos obtener la componente del campo ***E*** en cualquier dirección mediante el cálculo de la ecuación obtenida. Así las componentes x, y, z del campo eléctrico están relacionadas con el potencial, mediante:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

Donde $\frac{\partial V}{\partial x}$ es la *derivada parcial de V respecto a "x"*, esto es, se deriva V respecto a "x" considerando las demás variables como si fueran constantes. De igual forma para "y" y para "z".

Si un vector (como en el caso del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$), es tal que su componente en cualquier dirección es igual a la derivada de una función (que en este caso es el potencial eléctrico V) en esa dirección, entonces se dice que el vector es **gradiente** de la función, esto quiere decir que el campo eléctrico es el gradiente del potencial eléctrico, ahora si nos fijamos en la ecuación que esta en recuadro y tomando en cuenta que $\boldsymbol{E}$ es conservativo podemos afirmar que:

*"El campo eléctrico **E** es igual al negativo del gradiente del potencial eléctrico"*

Ahora si estamos preparados para resolver este ejercicio, porque basándonos en este hecho y dándonos cuenta que nuestra función V depende solo de dos variables "x" e "y", entonces solo debemos calcular dos componentes, estas serán calculadas por:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

Entonces:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{a\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}a\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^3} + \frac{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}2xb}{x^2+y^2}$$

y simplificando obtenemos:

$$E_x = -\frac{a(x^2+y^2)-3ax^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{bx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

De la misma forma procederemos a calcular la componente "y" del campo eléctrico y se obtendrá que:

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3axy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{by}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

CAPITULO III
POTENCIAL ELÉCTRICO

Preguntas

1. - ¿Los electrones tienden a ir a regiones de elevado potencial o de bajo potencial?

2. - ¿Pueden intersecarse dos superficies equipotenciales diferentes?

3. – Si $\boldsymbol{E}$ es igual a cero en un punto dado, ¿V debe ser igual a cero en ese punto?

4. – Si V es igual a una constante en toda una región del espacio, ¿qué puede decir acerca de $\boldsymbol{E}$ en esa región?

5. – Una esfera metálica descargada se cuelga de un hilo de seda y se coloca en un campo eléctrico uniforme exterior $\boldsymbol{E}$. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en puntos dentro de la esfera? ¿Cambiaría la repuesta si la esfera esta cargada?

6. - ¿Cuál es la relación entre las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales?

7. - ¿Cómo varía el potencial eléctrico dentro de un objeto conductor hueco? ¿Hay alguna diferencia si el objeto conductor es sólido?

8. - Si usted conoce el valor de $\boldsymbol{E}$ en un punto dado, ¿puede usted calcular V en ese punto?. Si no puede hacerlo, ¿qué otra información necesita?

9. – La unidad del campo eléctrico en el M.K.S es el N/C ¿está equivale a V/m?. Justifique su respuesta.

10. - ¿Es posible calcular el campo eléctrico sabiendo que el problema es unidimensional y contando con la gráfica Voltaje- posición?

11. – Suponga que se tiene una carga puntual aislada. ¿Cuál es la ecuación de las superficies equipotenciales?

12. - ¿Es cierto que para el caso unidimensional de una carga puntual, el potencial eléctrico es inversamente proporcional a la posición? ¿Cuál sería su gráfica?

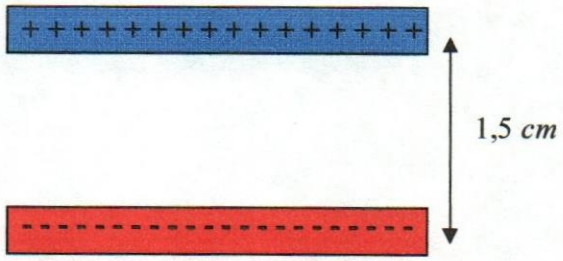
13. – En una gráfica del campo eléctrico contra la posición ¿qué representa el área bajo la curva?.

CAPITULO III
POTENCIAL ELÉCTRICO

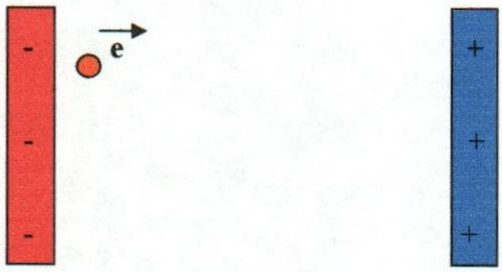
Problemas

1. – Un campo eléctrico de intensidad $6{,}34\text{x}10^{4}\frac{V}{m}$ se establece entre dos placas paralelas separadas una distancia de 1,5 *cm*, tal como se muestra en la figura. Calcule la diferencia de potencial.

Sol: $\Delta V = 951$ V



2. – En el sistema de la figura inferior calcule la velocidad que adquiere un electrón al llegar a la placa positiva, a.) si la energía potencial es de 1 *ev* b.) si la energía potencial son 100 *ev* c.) Si en vez de un electrón se suelta un deuterón y se sabe que la energía potencial acumulada es de 100*ev* ¿cuál será la velocidad del deuterón al llegar a la placa negativa?

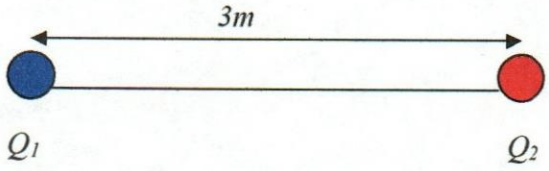


Sol: a.) $v = 592.674\ \frac{m}{s}$

b.) $v = 5.926.738\ \frac{m}{s}$

c.) $v = 97.882\ \frac{m}{s}$

3.- Dos cargas $Q_1 = 2x10^{-9}\ C$ y $Q_2 = -1x10^{-9}\ C$, se encuentran a lo largo de una línea recta y separadas por una distancia $d = 3m$, tal como se muestra en la figura inferior. a.) Encuentre la expresión del potencial eléctrico en función de "x" la cual está medida a partir de Q_1 b.) Calcule el potencial a un metro de Q_1 c.) Calcule el potencial a dos metros de Q_1 d.) Calcule la diferencia de potencial entre los puntos del apartado b.) y c.).



Sol: a.) $V(x) = K\left[\frac{Q_1}{x} - \frac{Q_2}{3-x}\right]$

b.) $V = 13{,}5$ V

c.) $V = 0$ V d.) $\Delta V = 13{,}5$ V

4. – En el átomo de hidrógeno: a.) calcule la energía potencial almacenada sabiendo que el electrón está separado del protón por una distancia $r = 5{,}28x10^{-9}\ cm$, exprésela en electrón – voltios (a esta distancia "r" se le denomina ***radio de Bohr***) b.) Calcule la diferencia de potencial que existe entre estas dos partículas.

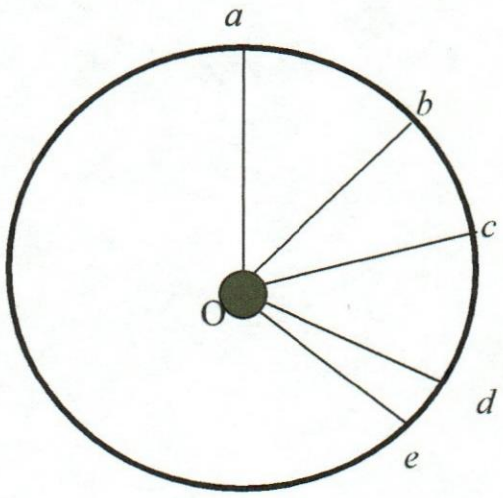
Sol: a.) $U = 27{,}2\ ev$

b.) $\Delta V = 27{,}2$ V

5. – En la figura inferior, el centro de la circunferencia se encuentra a un potencial de 100 V y los puntos *a, b, c, d* y *e* se encuentran respectivamente a potenciales de 0 V, 90 V, 80 V, 70 V y 60 V, calcule la magnitud del campo eléctrico a lo largo de los radios *oa*, *ob*, *oc*, *od* y *oe*.

Ayuda: Use el hecho que $E = -\frac{\Delta V}{\Delta S}$

Sol: $E_{oa} = 0$ V/*m* $E_{ob} = 1000$ V/*m* $E_{oc} = 2000$ V/*m* $E_{od} = 3000$ V/*m* $E_{oe} = 4000$ V/*m*

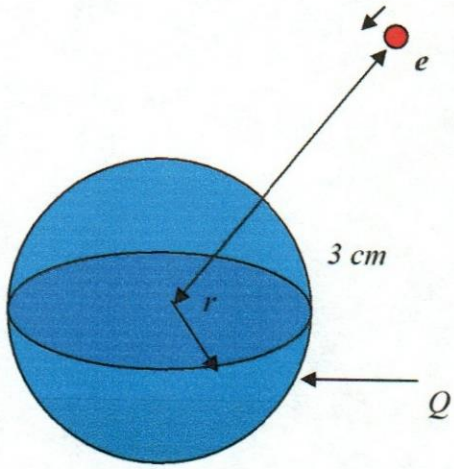


6. – Una partícula de masa $m = 6{,}6\text{x}10^{-27}$ Kg y de carga $Q = 2e^{+}$ se dirige directamente hacia un núcleo de oro de carga $q = 79\ e^{+}$ con una velocidad $v = 2\text{x}10^{7}$ m/s. ¿A qué distancia del núcleo de oro ésta queda en reposo, suponiendo que el núcleo de oro siempre permanece en reposo?

Sol: $r = 5\text{x}10^{-7}$ m

7. – Una esfera de radio $r = 2cm$ tiene un carga total de $Q = 1$ nC. A tres centímetros del centro de dicha esfera se suelta un electrón de carga $q = e$, tal como se muestra en la figura. Calcule la velocidad del electrón al llegar a la superficie de la esfera.

Sol: $v = 7{,}2\ \text{x}10^{6}$ m/s

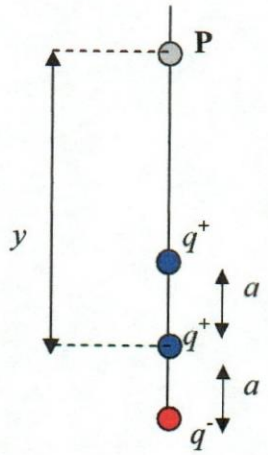


8. – Una carga "q" se distribuye uniformemente en un volumen esférico no conductor de radio "R". a.) Demuestre que el potencial a una distancia "r" del centro, siendo $r < R$ está dado por la siguiente expresión:

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

9. – En la configuración de cargas mostrada en la figura inferior, demuestre que *V(y)* para los puntos colocados en el eje vertical está dado por la siguiente expresión, suponiendo que $y >> a$:

$$V(y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{y} + \frac{2qa}{y^2}\right)$$

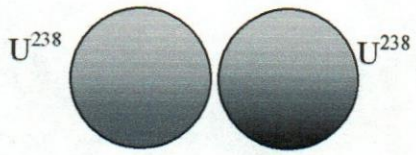


10. – En la figura inferior se muestra una representación ideal de un núcleo de U^{238} (Z = 92) a punto de fisionarse. Calcúlese:

a.) La fuerza de repulsión que obra en cada fragmento.
b.) La energía potencial eléctrica de los dos fragmentos en M*ev*.

Suponga que los fragmentos son de igual tamaño y carga, esféricos, y que se están tocando a penas. El radio del núcleo de U^{238} inicialmente esférico es de $8x10^{-15}$ *m*. Suponga que el material de que están hechos los núcleos tiene densidad constante.

Sol: a.) $F = 7617{,}6\ N$
b.) $U = 762{,}5$ M*ev*



11. – Demuestre que el potencial eléctrico en un punto en el eje de un anillo de carga "q" y de radio "a", está dado por la expresión:

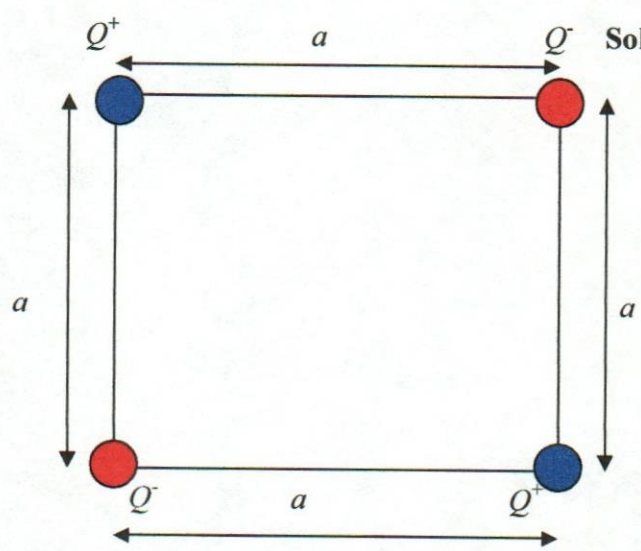
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

12. –Demuestre que el potencial eléctrico en un punto en el eje de un disco cargado de radio "a" y densidad de carga σ (constante), viene dado por la expresión:

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + x^2} - x\right)$$

con $x > 0$.

13. – Deduzca una expresión para el trabajo requerido para colocar las cuatro cargas en la forma indicada en la figura inferior.



Sol: $U = -2{,}57\dfrac{Kq^2}{a}$

14. – De acuerdo con la mecánica newtoniana, a.) ¿Bajo qué diferencia de potencial debe caer un electrón para adquirir una velocidad "v" igual a la velocidad "c" de la luz? b.) La mecánica newtoniana falla cuando $v \rightarrow c$. Por consiguiente, usando la expresión relativista correcta de la energía cinética:

$$K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right]$$

en vez de la expresión newtoniana $K = ½\ mv^2$, determine la velocidad que adquiere el electrón al caer bajo la diferencia de potencial calculada en a.). Exprese esta velocidad como una fracción pertinente de la velocidad de la luz.

Sol: a.) $V = 25.621.875$ V

b.) $v = 0{,}74\ c$

15. – En determinada región del espacio existe un campo eléctrico $\boldsymbol{E}(x) = E_0 \frac{x}{a} e_1$. Si $E_0 = 5\text{x}10^3$ V/m, y $a = 1cm$, calcula la diferencia de potencial entre los planos $x = 1{,}5\ cm$ y $x = 2{,}8\ cm$.

Sol: $\Delta V = -13{,}97$ V

16. – Demuestre que para un plano infinito con densidad superficial "σ" el potencial viene dado por:

$$V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(z - z_0)$$

donde "z_0" es un punto de origen conocido y "z" es el punto donde se quiere conocer el potencial.

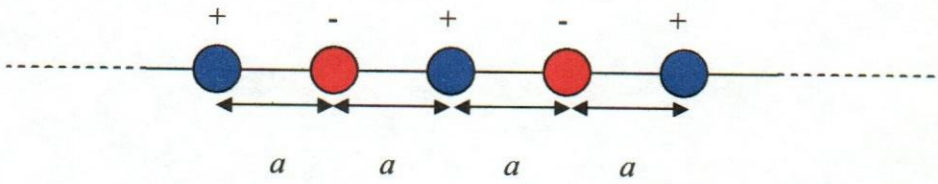
17. – Demuestre que para una línea infinita que porta una densidad lineal de carga "λ^+" el potencial viene expresado por:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

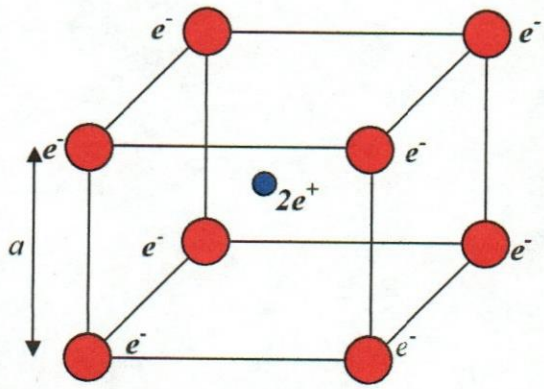
donde "r_0" es un punto conocido y "r" es el punto donde se quiere calcular el potencial.

18. – Se tiene un número infinito de cargas positivas y negativas $\pm\ q$, colocadas alternadamente a lo largo de una recta. Todas las cargas están separadas por la misma distancia "a", vea la figura inferior. Demuestre que la energía potencial que aporta la n-ésima carga es: $-\frac{Kq^2}{a} Ln2$.

Ayuda: $Ln\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$



19. –Calcule la energía potencial de una distribución de 8 cargas negativas (e^-) en los vértices de un cubo de arista "a", con una carga positiva ($2e^+$) en el centro del cubo, tal como muestra la figura.



Sol: $U = 4{,}32\frac{e^2}{a}$

20. – Una pequeña esfera de radio "r" se coloca en el centro de otra esfera mayor de radio "R". Las esferas contienen las cargas "q" y "Q" respectivamente, uniformemente distribuidas en sus superficies. Calcúlese su diferencia de potencial.

Nota: *Use el sistema C.G.S*

Sol: $\Delta V = q\dfrac{R-r}{Rr}$

21. – Una varilla delgada se extiende a lo largo del eje "z" desde $z = -a$ a $z = a$. La varilla contiene una carga uniformemente distribuida a lo largo de la misma, de λ ues por centímetros de longitud. Calcúlese el potencial de los puntos del eje, para $x > 0$.

Sol: $V(x) = \lambda \ln\left[\dfrac{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}+a}{\left(x^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}-a}\right]$

22. – El espacio entre los planos $y = 0$ y $y = b$ se llena con una densidad cúbica de carga uniforme, sin que haya carga en los demás puntos. a.) Hállese el módulo del campo eléctrico en todo punto de este sistema b.) halle el potencial eléctrico en todo punto de este sistema.

Nota: *Use el sistema C.G.S*

Sol: exterior a los planos: $E = 2\pi\rho b$; $V = -2\pi\rho by + C$

Interior a los planos: $E = 4\pi\rho y$; $V = -2\pi\rho y^2 + C$

donde "C" es una constante y "ρ" representa la densidad volumétrica de carga.

23. – Halle la expresión de la energía potencial necesaria para reunir cuatro electrones en los vértices de un tetraedro de arista "a", rodeando a un protón en el centro.

Sol: $U = 0{,}69\dfrac{e^2}{a}$

24. – Un cilindro de revolución infinitamente largo de radio "a" se llena con una distribución positiva de densidad "ρ". a.) Encuentre el campo eléctrico para puntos externos e internos al cilindro b.) hállese el potencial, dentro y fuera del cilindro. *Use C.G.S*

Sol: exterior al cilindro: $\mathbf{E}(r) = \dfrac{2\pi\rho\, a^2}{r}\mathbf{r}$; $V(r) = -2\pi\rho a^2 \ln(r) + C$

Interior al cilindro: $\mathbf{E}(r) = 2\pi\rho r\,\mathbf{r}$; $V(r) = -\pi\rho r^2 + C$

DATOS NUMÉRICOS

Masa del electrón $(m_e) = 9{,}11x10^{-31}\ kg$

Masa del protón $(m_p) = 1{,}67x10^{-28}\ kg$

Masa del deuterón $(m_d) = 3{,}34x10^{-28}\ kg$

Constante Eléctrica (K) $= 9x10^{9}\ \dfrac{Nm^2}{C^2}$

Permitividad del vacío $(\varepsilon_0) = 8{,}85x10^{-12}\ \dfrac{C^2}{Nm^2}$

Carga elemental (e)$= 1{,}60x10^{-19}C$

Velocidad de la luz (c) $= 2.99x10^{8}\ m/s$

Constante de Gravitación (G) $= 6{,}67x10^{-11}\ \dfrac{m^3}{kg.s^2}$

ALGUNAS INTEGRALES INDEFENIDAS

(C es una constante)

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = Ln(x+a) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x) + C$$

$$\int sen(kx)dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + C$$

$$\int sen^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{sen(2x)}{4} + C$$

$$\int tag^2(x)dx = \tan g(x) - x + C$$

$$\int \cos(kx) = \frac{sen(kx)}{k} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arsen(x) + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int tag(kx)dx = -\frac{Ln\left[\left|\cos(kx)\right|\right]}{k} + C$$

$$\int \sec^2(x)dx = tag(x) + C$$

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{sen(2x)}{4} + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + arsen(x)\right] + C$$

$$\int \sec(x)dx = Ln\left[\left|\sec(x) + tag(x)\right|\right] + C$$

BIBLIOGRAFÍA

ALONSO, M., FINN, E.: *Física*, Addison Wesley, 1992.

HALLIDAY, D., RESNICK, R.: *Física para estudiante de Ciencias e Ingeniería, Vol II*, John Wiley & Sons, 1965.

LEA, S., BURKE, J.: *Física la naturaleza de las cosas, Vol II*, Internacional Thomson Editores, 1999.

PURCELL, E.: *Electricidad y Magnetismo, Berkeley physics course, Vol II*, Ed. Reverté, 1973.

REITZ, J., MILFORD, F., CHRISTY, R.: *Fundamentos de la teoría electromagnética,* Fondo educativo Interamericano, S. A de C. V, 1984.

SCOTT, W.: *La física de la electricidad y el Magnetismo*, Compañía Editorial Continental, S. A, 1962.

SEARS, F.: *Electricidad y Magnetismo*, Addison Wesley, 1967

SERWAY, R.: *Física, Vol II*, Mc Graw Hill, 2002.

PÁGINAS DE INTERNET

http://www.buscabiografias.com/cgi-bin/verbio.cgi?id=1880 [10/03/03]

http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/5622/volta.html [18/01/04]

http://www.artehistoria.com/frames.htm?http://www.artehistoria.com/historia/personajes/6321.htm [11/04/03]

http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/Arte/Volta/Volta.htm [22/01/04]

http://www.tecnociencia.es/ventana/salas/magnetismo/biografias/volta.htm [22/01/04]

http://es.wikipedia.org/wiki/Alessandro_Volta [18/02/04]

http://www.ciencia-ficcion.com/glosario/v/voltales.htm [18/02/04]

http://bacterio.uc3m.es/docencia/profesores/antonio/biog/volta.htm [22/02/04]

http://www.terra.es/personal/jftjft/Historia/Biografias/Gauss.htm [14/07/03]

http://www.astrocosmo.cl/biografi/b-c_gauss.htm [14/07/03]

http://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss [17/07/03]

http://www.phy6.org/earthmag/Mgauss.htm [18/07/04]

http://bacterio.uc3m.es/docencia/profesores/antonio/biog/gauss.htm [25/07/03]

http://www.geocities.com/Eureka/Gold/8274/gauss.htm [12/08/03]

http://www.argenmaticas.com.ar/biografias/gauss.htm [12/08/03]

http://www.astrocosmo.cl/biografi/b-c_coulomb.htm [02/02/03]

http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Hangar/5622/coulomb.html [03/02/03]

http://bacterio.uc3m.es/docencia/profesores/antonio/biog/coulomb.htm [10/03/03]

http://www.tecnociencia.es/ventana/salas/magnetismo/biografias/coulomb.htm [15/03/03]

http://www.paginadigital.com.ar/articulos/2004/2004seg/tecnologia4/sica26cccc-5pl.asp [15/03/03]

"No es el final,
ni siquiera el principio del fin,
quizá sea el final del principio".

Winston Churchill