

TESIS
E2001
934



UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES
ESCUELA DE ECONOMÍA

**GOBIERNO, TRABAJADORES Y EMPRESARIOS
A TRAVÉS DE UN JUEGO DIFERENCIAL
PARA VENEZUELA**

TUTOR: RONALD BALZA
AUTORA: YESSIKA DA SILVA

CARACAS, OCTUBRE 2001

INDICE

	Pág
INTRODUCCIÓN	2
 CAPITULO I	
Evolución de la teoría del control óptimo y de la teoría de juegos dinámicos	
I.1 Orígenes y Evolución de la teoría de control óptimo	4
I.2 Evolución de la teoría de juegos dinámicos	7
 CAPITULO II	
Teoría de control óptimo	
II.1 Control óptimo	12
II.2 Planteamiento formal de un problema de control óptimo	13
II.3 Principio del Máximo.....	23
II.3.1 Relación entre el hamiltoniano y la variable auxiliar.....	23
II.3.2 Presentación del Principio del Máximo.....	24
II.3.3 Condiciones terminales alternativas	
(Condiciones de transversalidad).....	32

II.3.3.1 Punto terminal fijo.....	32
II.3.3.2 Línea terminal horizontal.....	33
II.3.3.3 Curva terminal.....	34
II.3.3.4 Línea vertical truncada.....	35
II.3.3.5 Línea terminal horizontal.....	37
II.4 Condiciones de transversalidad para tiempo infinito.....	38

CAPITULO III

Teoría de juegos

III.1 Teoría de juegos.....	43
III.2 Teoría de Juegos diferenciales.....	44
III.2.1 Estructuras de información.....	47

CAPITULO IV

Gobierno, Trabajadores y Empresarios a través de un juego diferencial (Planteamiento del problema)

IV.1 Planteamiento de cada uno de los agentes:

IV.1.1 Problema del gobierno.....	49
IV.1.2 Problema de los trabajadores.....	54
IV.1.3 Problema de los empresarios.....	56
IV.2 Estructura de información.....	58

IV.3 Resultados	63
-----------------------	----

CAPITULO V

Ampliación del problema

Pérdida de legitimidad total del gobierno	70
---	----

CONCLUSIONES	73
---------------------------	----

APÉNDICE	75
-----------------------	----

BIBLIOGRAFÍA	103
---------------------------	-----

Agradecimientos:

A mis padres,

*por su amor y apoyo el cual me ha
dado todas las fuerzas para conseguir
las metas que me trazado en la vida.*

A mi esposo

por su amor y comprensión en todo momento.

A Ronald,

*quien considerado amigo, antes que profesor,
gracias por ayudarme y por brindarme tu amistad.*

*A Silvia y Maritza, por ser un la ayuda que me bridaron
durante la carrera, ya que en buena parte, gracias
a ustedes estoy aquí.*

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo tiene como objetivo analizar la relación entre el Gobierno, Trabajadores y Empresarios para el caso de Venezuela, a través del uso de las herramientas de la teoría de juegos y de la teoría de control óptimo.

La relación de estos agentes está representada por medio de las acciones que cada uno de ellos realiza, debido a que las decisiones de cada uno afecta el comportamiento de los otros, porque los intereses de cada individuo o agente, puede estar en abierto conflicto con los intereses de los otros agentes. La forma en que cada uno de ellos afecta el comportamiento de los demás va a depender de cómo estén constituidas las instituciones, por lo que este tipo de planteamiento puede ser muy diferente entre países.

Por ello, una de las formas de confirmar la veracidad acerca de las ideas que se pueden tener de la relación existente entre determinados agentes, se basa en tratar de modelar a los distintos individuos que la conforman a manera de un juego. En nuestro caso, se supone que el Estado venezolano es de autonomía limitada, porque no puede ejecutar sus políticas económicas y sociales sin el previo consentimiento, apoyo y credibilidad de los otros agentes.

Para la sustentación teórica del problema planteado, se condensó una presentación de los fundamentos de la teoría de control y la teoría de juegos diferenciales, desde su evolución, hasta su estructura y justificación, así como el método más usado para resolver problemas de control óptimo, el principio del máximo.

La solución del problema va a requerir el uso de un programa computacional, llamado Mathematica 4 (Wolfram Research)

Los resultados del problema, muestran que las decisiones de cada uno de los agentes están directamente relacionadas con las decisiones de los otros. Esto los hará llegar a un consenso sobre cuál equilibrio de Nash van a seguir.

CAPÍTULO I

Evolución de la teoría de control óptimo y la teoría de juegos dinámicos.

I.I Orígenes y evolución de la Teoría de Control Óptimo¹

Aunque algunas aplicaciones del principio de retroalimentación (*feedback*) fueron utilizadas en el siglo XV en Grecia, fue sólo en el siglo XVIII en Europa que las técnicas de control de retroalimentación fueron usadas a nivel industrial. Algunas aplicaciones de este tipo de control fueron utilizadas en el campo de la mecánica a mediados del siglo XIX, donde se desarrollaron los primeros intentos por dar una formulación matemática a los problemas de control.

El desarrollo del tema fue sistemático. Comenzó en los Estados Unidos alrededor de 1930, gracias a trabajos de ingeniería electrónica y mecánica. Con el surgimiento de la Segunda Guerra Mundial se produce un fuerte impulso a la investigación de este campo, debido al gran número de aplicaciones de teoría de control que se podían adaptar a problemas militares. Fue de hecho entre los 40's y los 50's que la llamada teoría

¹ Siguiendo a :

PETIT, María Luisa. Control theory and dynamic games in economic policy analysis. (1990) y BASAR, Tamer y Geert Jan Olsder. Dynamic Noncooperative Game Theory. (1982)

clásica del control óptimo se desarrolló, una teoría formulada en el campo de frecuencia, y basada en el uso de transformadas de Laplace, como un método de análisis de la relación factor- producto de sistemas dinámicos. Un futuro impulso en el desarrollo de la teoría de control toma lugar en la segunda mitad de los 50's, con el fin de dar una contribución a la solución de problemas basados en la búsqueda de la utilización mínima la energía usada en el lanzamiento de misiles. La teoría de control óptimo comienza a tomar auge en este período, como el primer método basado en estado-espacio en la representación de sistemas dinámicos.

Fue en la segunda mitad de los 50's y durante los sesenta que la aproximación estado-espacio fue definitivamente consolidada. Kalman introduce el concepto de controlabilidad y observabilidad. Bellman y Pontryagin exponen la base para el desarrollo de la teoría, introduciendo nuevos métodos para la optimización dinámica. Todos estos nuevos avances forman la base de la moderna teoría de control, y sus aplicaciones se refieren no sólo al campo de la ingeniería, sino también a la economía, biología, medicina y ciencias sociales.

En el campo de la economía, los sistemas de control de retroalimentación (*feedback*) habían sido considerados alrededor de los 50's, por Simon y Tustin, y uno años más tarde por Phillips.

Estas contribuciones, aunque produjeron avances en el campo de la economía y la teoría de control, no creó interés en los economistas para desarrollar aproximaciones. Excepciones fueron Allen , Culberstron y Lange .

No se hubo avances adicionales, hasta que las técnicas de control fueron usadas en el estudio de teoría de crecimiento óptimo. Y no fue hasta los 70's que despertó el interés en el uso de aplicaciones métodos de control óptimo en estudios macroeconómicos, para trabajos teóricos y empíricos. En aquella década ambos campos, el macroeconómico y la teoría de control óptimo habían alcanzado el grado necesario de madurez, así como también, las técnicas computacionales necesarias para resolver el gran número de problemas computacionales, se habían desarrollado.

Los métodos de control para la evolución de políticas macroeconómicas son desarrollados después de los 70's para la nueva escuela clásica. Paradójicamente, los métodos de optimización dinámica – mediante el uso de diferentes contextos, hoy constituyen las herramientas básicas de los nuevos modelos macroeconómicos.

I.2 Evolución de la Teoría de Juegos Dinámicos

La teoría de juegos trabaja generalmente la negociación de procesos de decisión, en los cuales, implícita o explícitamente, el hecho de tomar decisiones es realizado por unos agentes. Si consideramos la posibilidad de que el control de un sistema depende de dos ó más tomadores decisiones, es útil plantear problemas utilizando la teoría de juegos dinámicos.

Entonces, así como el control óptimo negocia con optimización intertemporal de un funcional objetivo dado, que representa las preferencias de un operador económico, los juegos dinámicos negocian con optimización intertemporal de dos ó más funcionales, los cuales representan las preferencias de dos ó más operadores económicos.

Por lo tanto, está claro que la teoría de juegos dinámicos es más versátil que la teoría de control óptimo, ya que puede hacer posible describir un gran número de suposiciones acerca del comportamiento de los tomadores de decisiones, usualmente llamados jugadores. Entonces, por ejemplo, una solución no cooperativa es apropiada para describir los procesos de decisión cuando los intereses de los jugadores están en conflicto y ahí no existe la posibilidad de acuerdo, en cambio, en los juegos de modo cooperativo la comunicación y el acuerdo son considerados. Futuras suposiciones

concernientes al comportamiento y la estructura de información de los jugadores pueden ser realizadas, dando lugar a diferentes soluciones.

Según Basar y Olsder (1982), la teoría de juegos dinámicos puede ser vista como un resultado de las teorías de control óptimo.

La teoría de juegos nació con los trabajos de Von Neumann, aunque algunas investigaciones como las de Borel en los años 20's previamente ya se habían anticipado en sus fundamentos. Pero fue a partir del libro de Von Neumann y Morgenstern publicado en los 40's, que definitivamente la teoría de juegos se desarrolla en el contexto de la teoría económica.

En un juego se describen situaciones de conflicto, lo que había sido considerado previamente por economistas como Cournot y subsecuentemente por Amoroso, Edgeworth y Bowley antes de los años 20's, y en los 30's por Frisco y Von Stackelberg, en su investigación basada en la teoría del duopolio.

Esto es una muestra de cómo estudiosos de la economía hicieron un riguroso trabajo metodológico para realizar estudios de estrategias interdependientes. La interrelación entre decisiones individuales y la incertidumbre acerca de las decisiones de otros, son esencialmente factores de problemas económicos y la teoría de juegos muestra todos los requerimientos de negociación.

Las primeras aplicaciones de esta teoría fueron dirigidas a la macroeconomía, desde entonces la teoría de juegos hace posible asumir la competencia perfecta en importantes análisis microeconómicos.

Aplicaciones económicas de teoría de juegos en los 50's fueron desarrolladas, relativas a la teoría de oligopolio, pero en los 60's, a consecuencia de un importante trabajo de Shubik, la teoría de equilibrio general comienza a desarrollar el campo de esta aplicación. Otra fuente importante de interés en teoría de juegos, se presentó en los setenta de la literatura social, y así los juegos fueron aplicados para investigar problemas de análisis institucional. Aunque la economía es una de las primeras áreas de aplicación de teoría de juegos, esta teoría ha incrementando la atención también de otras disciplinas tales como aeronáutica, biología, política y sociología.

La teoría de juegos es generalmente caracterizada por un conjunto finitos de estrategias, y la descripción del juego puede ser hecha a través de diferentes formulaciones: la forma extensiva (árbol) y la forma normal (matriz). Esta teoría y la teoría de control óptimo, se desarrollaron de manera independiente y en paralelo, para los juegos que consideran conjuntos infinitos de estrategias y de los cuales se derivan decisiones óptimas de la función objetivo de maximización intertemporal en un sistema de modelos dinámicos descritos en ecuaciones en diferencia o en ecuaciones diferenciales.

La teoría de juegos dinámicos expone el acercamiento analítico y uso de herramientas matemáticas de teoría de control óptimo en el contexto de conflictos de comportamiento, los cuales caracterizan esta teoría. Las soluciones (cooperativas o no cooperativas), son conceptos que describen la teoría de juegos más adelante, definida en el contexto de juegos dinámicos. Además, el mismo tipo de problemas concernientes a la introducción e incertidumbre en teoría de control óptimo son reformulados en el sistema de teoría de juegos dinámicos, dando lugar a los juegos estocásticos.

Actualmente, estudios de teoría de juegos, teoría de control óptimo y teorías de juegos dinámicos se desarrollan una a la par de la otra. La teoría de juegos en análisis macroeconómico fue raramente utilizada en el pasado, sin embargo el hecho de que existieran problemas de decisiones de política descentralizadas y falta de coordinación entre los hacedores de políticas, es un caso típico de conflicto de decisiones, que hicieron de la teoría de juegos la medio matemático apropiado, para contribuir en la solución de estos conflictos.

La situación es muy diferente hoy: los juegos dinámicos, hacen posible el análisis de situaciones de conflicto, haciendo uso de modelos macroeconómicos dinámicos. Las primeras aplicaciones de teoría de juegos dinámicos a problemas de política económica corresponden a la segunda mitad de los 70's y son relativos a problemas de decisión de política descentralizada. Desde luego, el uso de juegos dinámicos en el análisis de política económica ha tenido un extenso y rápido desarrollo;

debido a que hace posible analizar no sólo problemas de coordinación de políticas dentro de un país, sino también problemas de coordinación de política internacional, (ver Pohyola, 1986). Los juegos dinámicos también han hecho posible examinar la relación entre instituciones políticas y el sector privado, y modelar el proceso de decisión de políticas.

CAPÍTULO II

Teoría del control óptimo

II.1 Control Óptimo

El método clásico para resolver problemas de optimización dinámica es el cálculo de variaciones, el cual requiere la aplicación de ecuaciones diferenciales dentro de los problemas. Más importante aún es la presencia de soluciones de esquina. El desarrollo moderno para dar con las soluciones no clásicas, como las soluciones de esquina, es la teoría del control óptimo. Como su nombre lo indica, la formulación del control óptimo de un problema de optimización dinámica se enfoca en uno ó más variables de control que sirven de instrumento para la optimización.

Al igual que el cálculo de variaciones, la meta aquí es encontrar la trayectoria óptima de una variable de estado y . La teoría de control óptimo ha sido el intento más importante para determinar la trayectoria óptima para una variable de control u . Por supuesto, si se ha encontrado una trayectoria óptima para la variable de control (u^*), seguramente también se puede encontrar la trayectoria óptima de la variable de estado correspondiente. De hecho, el óptimo de (u) y de (y) son encontrados generalmente en el mismo proceso.

II.2 Planteamiento formal de problemas de Control Óptimo²

El planteamiento formal de un problema de control óptimo consta de *tiempo* (t), *la(s) variable(s) de estado* (y), *la(s) variable(s) de control* (u), *las ecuaciones de movimiento, la determinación del tiempo terminal* (t_f) y *el funcional objetivo*.

Tiempo (t):

Es medido en unidades continuas (ó discretas) que son definidas por lo general en un intervalo específico de tiempo, con un *tiempo inicial* (t_0), que es generalmente dado, y un *tiempo terminal* (t_f), que puede ser dado o puede estar por determinar. El intervalo de tiempo relevante puede ser presentado como:

$$t_0 \leq t \leq t_f \quad (\text{II.1})$$

² INTRILIGATOR, Michael. Mathematical Optimización and Economic Theory.(1971)

Variables de estado (y):

Es un conjunto de n números reales que describen un sistema en cualquier momento del intervalo de tiempo. Las variables que lo componen $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, son llamadas *variables de estado*. Conforman un vector de estado, definido por:

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \quad (\text{II.2})$$

Este es un vector de columna de dimensión n , el cual se puede interpretar geoméricamente como un punto en el espacio Euclidiano E^n . Cada variable de estado se asume como una función continua en el tiempo, definiendo la trayectoria de estado de la siguiente manera:

$$\{y(t)\} = \{y\{t\} \in E^n \mid t_0 \leq t \leq t_f\} \quad (\text{II.3})$$

Es un vector continuo valorado en el tiempo, valor que en cualquier momento t es el vector de estado (II.2). Geométricamente, la trayectoria de la variable de estado es un camino de puntos en E^n , comenzando en el estado inicial:

$$y(t_0) = y_0 \quad (\text{II.4})$$

que se asume dado, y finalizando en el estado terminal

$$y(t_f) = y_f \quad (\text{II.5})$$

el cual generalmente está por determinar.

Variables de control (u):

Representan las decisiones o elecciones a ser realizadas por los agentes en cualquier momento del tiempo, se caracterizan por ser r números reales, que se pueden representar de la siguiente manera, $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$. Estas son las llamadas *variables de control* que en conjunto conforman el vector de control:

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)) \quad (\text{II.6})$$

El cual también es un vector columna, que puede ser interpretado geométricamente como un punto en E^r . Cada variable de control es una función del tiempo continua ó continua a trozos, donde la trayectoria de control se define como:

$$\{u(t)\} = \{u(t) \in E^r \mid t_0 \leq t \leq t_f\} \quad (\text{II.7})$$

esta es una parte del vector de control, cuyo valor es tal que en cualquier momento del intervalo de tiempo, es el vector de control dado por (II.6). Geométricamente, la trayectoria de control, es un camino de puntos en E^r que es continuo, (donde existe la posibilidad de un número finito de saltos discretos).

La elección de las variables de control está sujeta a ciertas restricciones acerca de sus posibles valores, que se resumen al establecer un subconjunto dado en el espacio Euclidiano E^r .

$$u(t) \in \Omega \subset E^r, \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (\text{II.8})$$

Donde Ω , se asume como compacto (cerrado y acotado), convexo e invariable en el tiempo. La trayectoria de control (II.7) es admisible, si en cualquier momento del intervalo de tiempo sus valores corresponden a Ω . El conjunto de control U , es un conjunto de todas las posibles trayectorias de control, donde tales trayectorias son parte de una función continua en el tiempo que es valorado en todo momento del intervalo correspondiente a Ω . La trayectoria de control debe corresponder a un conjunto de control dado por:

$$\{u(t)\} \in U \quad (\text{II.9})$$

Ecuaciones de movimiento:

Representa un conjunto de ecuaciones diferenciales, que caracterizan la trayectoria de estado, dando una tasa de cambio en el tiempo para cada variable de estado como una función de esa variable de estado, de la variable de control y del tiempo³:

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t) \quad (\text{II.10})$$

que escrita en su expresión completa es:

$$\frac{dy_j}{dt}(t) = \dot{y}(t) = f_j(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), t), \quad (\text{II.11})$$

$$j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$$

³ Si la ecuación diferencial no depende explícitamente del tiempo, entonces las ecuaciones de movimiento son autónomas. Un ejemplo importante son las ecuaciones de movimiento lineales autónomas:

$$\dot{y} = Ay + Bu$$

Donde A es dado por una matriz $n \times n$ y B es dado por una matriz $n \times r$.

donde cada una de las n funciones $f_1(\dots), f_2(\dots), \dots, f_n(\dots)$, se asumen dadas y continuamente diferenciables.

Las condiciones de frontera de las ecuaciones de movimiento son dadas por los valores iniciales de la variable de estado (II.4). Dado ese valor inicial y dada la trayectoria de control $\{u(t)\}$, existe una única trayectoria de estado $\{y(t)\}$ que satisface las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera, que se puede obtener por integración de una partir de la otra .

Si esta trayectoria de estado es obtenida usando una $\{u(t)\} \in U$, se le llama posible, y cualquier vector de estado alcanzado en una trayectoria posible, en un tiempo finito se conoce con el nombre de alcanzable.

Tiempo terminal(t_f) :

Definido por:

$$(y(t), t) \in T \quad \text{en} \quad t = t_f \quad (\text{II.12})$$

Donde T , es un subconjunto de E^{n+1} , llamado superficie terminal.

Se pueden presentar tres casos:

- *Problema del tiempo terminal:* t_f es dado explícitamente como un parámetro del problema.
- *Problema del estado terminal:* $y(t_f)$, es dado explícitamente como un vector de parámetros del problema.
- *Problema de horizonte infinito*

Funcional objetivo:

El funcional objetivo es un mapa de trayectorias de variables de control y de estado, donde el valor de tal funcional debe ser maximizado.

Por lo general, se presenta de la siguiente forma:

$$J = J\{u(t)\} = \int_{t_0}^{t_f} I(y(t), u(t), t) dt + F(y_f, t_f), \quad (\text{II.13})$$

Donde la integral del primer término, $I (....)$, es la función intermedia, la cual muestra la dependencia del funcional en las trayectorias de las variables de estado, variables de control, y el tiempo:

$$I(y, u, t) = I(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t); t)$$

donde:

$$t_0 \leq t \leq t_f \quad (\text{II.14})$$

El segundo término $F(...)$, llamado función final, muestra la dependencia del funcional al estado terminal y al tiempo terminal:

$$F(y_f, t_f) = F(y_1(t_f), y_2(t_f), \dots, y_n(t_f); t_f) \quad (\text{II.15})$$

Ambos, $I (...)$ y $F (...)$ se asumen dados y continuamente diferenciables⁴.

La funcional objetivo, es una funcional en $\{u(t)\}$ porque, dadas $f(...)$ y y_0 , $\{u(t)\}$ determina $\{y(t)\}$.

⁴ Un problema de control definido con la funcional objetivo descrita es llamada Problema de Bolza. Si $I(...)=0$, es llamado Problema de Mayer. Si $F(...)=0$, es llamado Problema de Lagrange.

En resumen un problema de control general es:

$$\max_{\{u(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_f} I(y, u, t) dt + F(y_f, t_f) \quad (\text{II.16})$$

sujeto a:

$$\dot{y} = f(y, u, t)$$

con:

$$t_0 \text{ y } y(t_0) = y_0 \text{ dados}$$

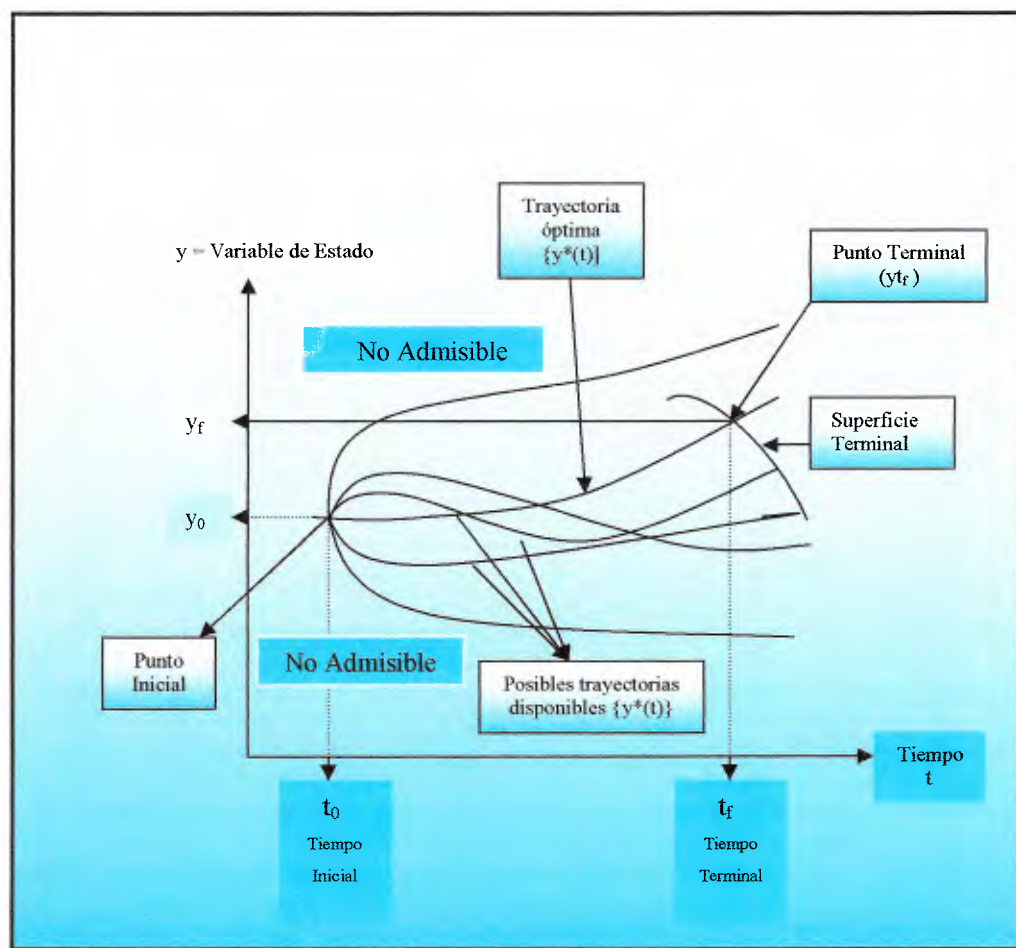
$$(y(t), t) \in T \text{ en } t = t_f$$

$$\{u(t)\} \in U,$$

Para la solución del problema, se parte del punto inicial (t_0, y_0) , y se busca una trayectoria, entre todas las admisibles, y entonces, la trayectoria $\{y(t)\}$ óptima (será aquella que maximice el funcional objetivo y toca la superficie terminal).

Representación Gráfica de un Problema de Control óptimo

Caso de una Variable de Estado



II.3 Principio del Máximo⁵

En la teoría del control óptimo el resultado más importante son las condiciones de primer orden, conocidas como el principio del máximo, el cual fue dado a conocer por el matemático ruso L. S. Pontryagin.

El principio del máximo envuelve los conceptos de función hamiltoniana y de variable auxiliar.

II.3.1 Relación entre la función Hamiltoniana y la variable auxiliar⁶:

Como se dijo anteriormente, los problemas de control presentan tres tipos de variables: t (tiempo), y (variable de estado), u (variable de control). En el proceso de solución surge otra variable conocida como variable auxiliar que generalmente es denotada por λ . A través del intervalo de tiempo establecido tanto y , u como λ toman diferentes valores. Es decir, que λ también depende de t , quedando como una variable en función del tiempo, que toma la forma $\lambda(t)$.

⁵ CHIANG, Alpha. Elements of dynamic optimization.(1992)

⁶ Es importante hacer notar que al estar siguiendo, en este apartado a Alpha Chiang, la notación utilizada es distinta a la utilizada en los apartados anteriores.

El medio a través del cual se introduce la variable auxiliar en los problemas de control óptimo es la función Hamiltoniana.

La función Hamiltoniana se presenta como:

$$H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda(t)f(t, y, u) \quad (\text{II.17})$$

H consiste en el integrando de la función F más la variable auxiliar multiplicada por la función f , siendo así una función de cuatro argumentos, y, u, t, λ .

II.3.2 Presentación del Principio del Máximo:

Asumiremos que la variable de control u no es una función lineal, así que u^* es una solución interior. Por otra parte, se asume que la función Hamiltoniana es diferenciable con respecto a u y por tanto $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, donde esta condición es la condición de Max_u . Se toma como fijo el punto inicial, pero el punto final puede ser variable. Esto

nos permitirá derivar ciertas condiciones de transversalidad durante el proceso. El problema que se va a plantear es:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } V &= \int_0^t F(t, y, u) dt \\ \text{sujeto a: } \dot{y} &= f(t, y, u) \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

$$y = y(0) = y_0 \quad (\text{Estado inicial dado})$$

Lo primero que se debe realizar es generar la ecuación de movimiento $\dot{y} = f(t, y, u)$, y colocarla dentro del funcional objetivo, con la finalidad de reescribir el funcional en términos del Hamiltoniano.

Durante el desarrollo se nota que la variable y cumple en cualquier momento del tiempo la ecuación de movimiento, entonces la relación $\left[f(t, y, u) - \dot{y} \right]$, debe tomar valor cero para todo t en el intervalo $[0, T]$.

Usando el concepto del multiplicador de Lagrange, se puede formar la expresión $\lambda(t)f(t, y, u - \dot{y})$, la cual para cada t , presenta valor cero. La integral de un cierto

número de valores de t en el intervalo $[0, T]$, debe producir un valor total de cero.

$$\int_0^T \lambda(t) \left[f(t, y, u) - \dot{y} \right] dt = 0 \quad (\text{II.19})$$

Por tal razón, se puede transformar el antiguo funcional objetivo a una integral en (II.19) con igual solución. Así, podemos trabajar con un nuevo funcional:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &\equiv V + \int_0^T \lambda(t) \left[f(t, y, u) - \dot{y} \right] dt \\ &= \int_0^T \left\{ F(t, y, u) + \lambda(t) \left[f(t, y, u) - \dot{y} \right] \right\} dt \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

ya que $\left[f(t, y, u) - \dot{y} \right]$ debe ser igual a cero en cualquier momento del tiempo, entonces, si se satisface la restricción, el valor de $\mathfrak{R}$ es idénticamente igual al valor de V .

Habiendo definido previamente la función Hamiltoniana, la sustitución de la función H en (II.20), puede simplificar el nuevo funcional a la forma:

$$\mathfrak{R} = \int_0^T \left[H(t, y, u, \lambda) - \lambda(t) \dot{y} \right] dt$$

$$= \int_0^T H(t, y, u, \lambda) dt - \int_0^T \lambda(t) \dot{y} dt \quad (\text{II.20'})$$

Si observamos, la diferencia entre el segundo término del Hamiltoniano $\lambda(t)f(t, y, u)$ por un lado, y por el otro el del multiplicador Lagrangiano $\lambda(t) \left[f(t, y, u) - \dot{y} \right]$, se puede notar que el último surge de la ecuación de movimiento.

Cuando la ecuación (II.20'), es integrada por partes, tenemos que:

$$- \int_0^T \lambda(t) \dot{y} dt = -\lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0 + \int_0^T y(t) \dot{\lambda} dt$$

A partir de esta integración, el nuevo funcional objetivo puede ser reescrito como:

$$\mathfrak{R} = \underbrace{\int_0^T [H(t, y, u, \lambda) + y(t) \dot{\lambda}] dt}_{\Omega_1} - \underbrace{\lambda(T)y_T}_{\Omega_2} + \underbrace{\lambda(0)y_0}_{\Omega_3} \quad (\text{II.20''})$$

La expresión $\mathfrak{R}$, comprende tres componentes aditivos:

Ω_1 : Se desenvuelve dentro de todo el horizonte de planeación $[0, T]$.

Ω_2 : Es específicamente concerniente al tiempo terminal T .

Ω_3 : Concerniente sólo al momento inicial.

En segundo lugar, al observar, el valor de $\mathfrak{R}$ vemos que no sólo depende de las trayectorias escogidas para las variables y, t, u, λ , sino también de los valores de T y y_T .

La escogencia de las trayectorias para $\lambda(t)$ no produce efecto en el valor de $\mathfrak{R}$, porque la ecuación de movimiento $\dot{y} = f(t, y, u)$ se cumple en cualquier momento del tiempo, y por tanto, tenemos que:

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \text{ para todo } t \in [0, T] \quad (\text{II.21})$$

Esta se impone como una condición necesaria para la maximización de $\mathfrak{R}$, la cual es una de las tres condiciones del principio del máximo.

La ecuación de movimiento es dada actualmente como parte del problema.

En tercer lugar, se estudia la trayectoria de $u(t)$ y su efecto en la trayectoria de $y(t)$. Si conocemos una trayectoria óptima $u^*(t)$, y le sumamos una desviación, con la

curva $p(t)$, podemos generar diferentes trayectorias de control vecinas a la trayectoria óptima.

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon p(t) \quad (\text{II.22})$$

Es decir, que se encuentra una trayectoria para cada valor de ε , además, aún teniendo la ecuación de movimiento $\dot{y} = f(t, y, u)$, también se pueden encontrar, nuevas trayectorias, una para cada ε , correspondiente a desviaciones de la trayectoria $y^*(t)$. Las trayectorias vecinas de y pueden ser escritas como:

$$y(t) = y^*(t) + \varepsilon q(t) \quad (\text{II.23})$$

además, si T y y_T son variables, también tenemos:

$$T = T^* + \varepsilon \Delta T \quad \text{y} \quad y_T = y_T^* + \varepsilon \Delta y_T \quad (\text{II.24})$$

$$(\text{implicando } \frac{dT}{d\varepsilon} = \Delta T \quad \text{y} \quad \frac{dy_T}{d\varepsilon} = \Delta y_T)$$

Si observamos la expresión de u y y podemos expresar $\mathfrak{R}$, en términos de ε , así que podemos aplicar la condición de primer orden $\frac{d\mathfrak{R}}{d\varepsilon} = 0$

La nueva versión de $\mathfrak{R}$ es:

$$\mathfrak{R} = \int_0^{T(\varepsilon)} \left\{ H[t, y^* + \varepsilon q(t), u^* + \varepsilon p(t), \lambda] + \lambda[y^* + \varepsilon q(t)] \right\} dt - \lambda(T)y_T + \lambda(0)y_0 \quad (\text{II.25})$$

El siguiente paso consiste en aplicar la condición $\frac{d\mathfrak{R}}{d\varepsilon} = 0$. Utilizando la regla de

diferenciación de Leibniz se obtiene:

$$\int_0^{T(\varepsilon)} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial y} q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) \right] + \lambda \dot{q}(t) \right\} dt + \left[H + \lambda y \right]_{t=T} \frac{dT}{d\varepsilon} \quad (\text{II.26})$$

y la derivada del segundo término en (II.25) con respecto a ε , por la regla del producto es:

$$-\lambda(T) \frac{dy_T}{d\varepsilon} - y_T \frac{d\lambda(T)}{dT} \frac{dT}{d\varepsilon} = -\lambda(T)\Delta y_T - y_T \dot{\lambda}(T)\Delta T \quad [\text{por (II.24)}] \quad (\text{II.27})$$

por otro lado, $\lambda(0)y_0$, queda fuera de la diferenciación.

Entonces $\frac{d\mathfrak{R}}{d\varepsilon}$ es igual a la suma de (II.26) y (II.27). De este modo, uniendo estas

dos expresiones, y de acuerdo a lo anterior, un componente de (II.26) puede ser reescrito como:

$$\left[\dot{\lambda} y \right]_{t=T} \frac{dT}{d\varepsilon} = \dot{\lambda}(T) y_T \Delta T \quad [\text{por (II.24)}]$$

Luego, cuando la suma de (II.26) y (II.27) es igual a cero, surge la condición de primer orden, dada por:

$$\frac{d\mathcal{R}}{d\varepsilon} = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \lambda \right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) \right] dt + [H]_{t=T} \Delta T - \lambda(T) \Delta y_T = 0 \quad (\text{II.28})$$

Los tres componentes de esta derivada muestran lo siguiente:

La integral contiene las curvas de perturbación arbitrarias $p(t)$ y $q(t)$, mientras los otros dos envuelven dos arbitrarias ΔT y Δy_T , respectivamente. Luego, cada uno de los tres debe ser individualmente cero, para satisfacer la condición (II.28). Siendo estos componentes de la integral iguales a cero, se pueden deducir las otras dos condiciones de primer orden para cumplir el principio de la maximización:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

La primera es la ecuación de movimiento para la variable auxiliar, y la segunda representa una pequeña versión de la condición de “ $\text{Max}_u H$ ”, se basa en el sentido de que se asume que H es diferenciable con respecto a u y así es una solución interior. En un problema sencillo teniendo fijo T y libre y_T , el término ΔT en (II.28) es automáticamente igual a cero, pero la Δy_T no. Por tanto, para hacer que el término $-\lambda \Delta y_T$ sea eliminado, se debe imponer la restricción $\lambda(T) = 0$, que explica una de las condiciones de transversalidad a las cuales haremos referencia más adelante.

II.3.3 Condiciones terminales alternativas (Condiciones de transversalidad)

II.3.3.1 Punto Terminal fijo

La razón por la que el problema con un punto terminal fijo, (con el estado terminal y el tiempo terminal fijo), no es calificado como simple, en los problemas de teoría de control es que la especificación de un punto terminal fijo, ocasiona una complicación en el sentido de que hay una curva de perturbación arbitraria $p(t)$ para la variable de control u . La perturbación de la trayectoria $u^*(t)$ que se supone se genera

por medio de la ecuación de movimiento $y = f(t, y, u)$, tiene una correspondiente perturbación en la trayectoria $y^*(t)$ que ha finalizado en el presente estado terminal. La pregunta que surge es, como se puede, deducir legítimamente la condición $\partial H / \partial u = 0$, de (II.28).

Afortunadamente, la validez del principio del máximo no se ve afectada por este compromiso porque el $p(t)$ es arbitrario. Entonces, para satisfacer el estado con un punto terminal fijo, la condición de transversalidad que es reemplazada por la condición es:

$$y(T) = y_T \quad \text{con } (T \text{ y } y_T \text{ dados})$$

II.3.3.2 Línea Terminal Horizontal

Si el problema tiene un y dado sobre el cual no se puede pasar, decimos que el problema es de línea horizontal terminal, (con un tiempo terminal libre, pero, un punto final fijo), lo que significa que es un estado terminal fijo, entonces y_T es fijo ($\Delta y_T = 0$), pero T no, por lo tanto (ΔT es arbitraria). Estos, son el segundo y tercer componente de (II.28), y así para este caso la condición de transversalidad es:

$$[H]_{t=T} = 0 \quad (\text{II.29})$$

La función Hamiltoniana debe tener valor cero en el tiempo terminal óptimo, y además no hay restricción en el valor de λ en el momento T .

II.3.3.3 Curva terminal

En el caso de la curva terminal $y_T = \phi(T)$, domina la selección del punto terminal, entonces ni ΔT , ni Δy_T no son arbitrarias, porque están enlazadas una de la otra, por la relación $\Delta y_T = \phi'(T)\Delta T$. Usando esto para eliminar Δy_T , podemos combinar los últimos dos términos de (II.28) dentro de una sencilla expresión involucrando sólo la ΔT .

$$[H]_{t=T} \Delta T - \lambda(T)\phi'(T)\Delta T = [H - \lambda\phi']_{t=T} \Delta T$$

por lo que, para una arbitraria ΔT , la condición de transversalidad es:

$$[H - \lambda\phi']_{t=T} = 0 \quad (\text{II.30})$$

II.3.3.4 Línea terminal vertical truncada

Ahora consideraremos el problema en el cual el tiempo terminal T es fijo, pero el estado terminal es libre y puede variar, y está sujeto sólo a la restricción $y_t \geq y_{min}$, donde se denota un nivel mínimo de y , que debe ser permisible.

Sólo dos tipos de resultados son aceptables en esta solución óptima: $y_T^* > y_{min}$ ó $y_T^* = y_{min}$. En primer el resultado, la restricción terminal debe ser automáticamente satisfecha. Por tanto, la condición de transversalidad para el problema con una línea vertical regular es:

$$\lambda(T) = 0 \quad \text{para } y_T^* > y_{min} \quad (\text{II.31})$$

En el otro resultado, $y_T^* = y_{min}$, a partir de la restricción terminal que es obligatoria, las trayectorias vecinas admisibles de y consisten sólo en aquellas que tiene un estado terminal $y_T \geq y_{min}$. Si evaluamos (II.23) en $t = T$ y que permite que $y_T^* = y_{min}$, obtenemos:

$$y_T = y_{min} + \varepsilon q(t)$$

Asumiendo que $q(t) > 0$ en la curva de desviación, $q(t)$, el condición de que $y_T \geq y_{min}$, es que $\varepsilon \geq 0$. Pero, por las condiciones de Kuhn Tucker, la no negatividad de ε , lleva a la condición de primer orden de $d\mathcal{R}/d\varepsilon = 0$ a $d\mathcal{R}/d\varepsilon \leq 0$, en este caso. Se sigue que (II.28) podría ser una condición de transversalidad, pero, en forma de una desigualdad $-\lambda(T)\Delta y_T \leq 0$.

Al mismo tiempo, vemos de (II.24) que, dado que $\varepsilon \geq 0$, el requerimiento de $y_T \geq y_{min}$, es similar a $y_T \geq y_T^*$, lo que en el presente contexto implica, $\Delta y_T \geq 0$. Entonces, la condición de transversalidad en desigualdad se reduce a:

$$\lambda(T) \geq 0 \quad \text{para} \quad y_{T^*} = y_{min} \quad (\text{II.32})$$

Combinando (II.31) y (II.32) y eliminando el símbolo $*$, podemos plantear una explicación sencilla de la condición de transversalidad dada por:

$$\lambda(T) \geq 0 \quad y_T \geq y_{min} \quad (y_T - y_{min})\lambda(T) = 0^7 \quad (\text{II.33})$$

⁷ Es de notar que la última parte de esta relación, sigue las condiciones de Kuhn Tucker.

II.3.3.5 Línea Terminal Horizontal:

En este caso, el estado terminal es fijo, pero al tiempo terminal T se le permite variar, pero sujeto a la restricción de $T^* \leq T_{\max}$, donde $T_{\max}$ es el máximo valor aceptable de T en la línea horizontal. Entonces, obtendremos un $T^* < T_{\max}$ ó $T^* = T_{\max}$ en la solución óptima.

En el resultado, la restricción terminal no vuelve a ser obligatoria, por lo que, la condición de transversalidad para el problema con una línea horizontal regular es:

$$[H]_{t=T} = 0 \quad \text{para} \quad T^* < T_{\max} \quad (\text{II.34})$$

Por otra parte, si $T^* = T_{\max}$, por implicación todas las trayectorias vecinas admisibles de y deben tener tiempo terminal $T \leq T_{\max}$. Por analogía vemos que del resultado de (II.32) para la línea vertical truncada, es posible establecer la condición de transversalidad de la forma:

$$[H]_{t=T} \geq 0 \quad \text{para} \quad T^* = T_{\max} \quad (\text{II.35})$$

Combinando (II.34) y (II.35) y eliminando el símbolo *, obtenemos una relación de condiciones de transversalidad dada por:

$$[H]_{t=T} \geq 0 \quad T \leq T_{\max} \quad (T - T_{\max})[H]_{t=T} = 0 \quad (\text{II.36})$$

II.4 Condiciones de transversalidad para tiempo infinito.

Presenta el caso de un funcional objetivo de integral impropia para un problema autónomo, donde la condición límite es infinito, y se asume que la ecuación de la variable de estado toma la siguiente forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\infty} \quad (\text{dado}) \quad (\text{II.37})$$

En otras palabras, el horizonte especificado como infinito es acompañado por un estado terminal fijo. Para tal caso, mostramos que la condición del principio del máximo incluyendo la condición de transversalidad, es como la aplicada para el problema de línea terminal horizontal, que aplica para los problemas de horizonte finito, por tanto, también para este caso, la condición de transversalidad toma la forma:

$$[H]_{t=T} = 0$$

Cuando el problema es autónomo, el valor maximizado del Hamiltoniano es conocido como constante en el tiempo, así la condición $H=0$ puede ser evaluado no sólo en $t = T$, sino en cualquier momento del tiempo. Por lo tanto, la condición de transversalidad referente a un problema autónomo de horizonte infinito con la condición límite (II.37) puede ser expresada como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H = 0 \text{ (Condición de transversalidad para horizonte infinito)} \quad (\text{II.38})$$

Y más claramente por:

$$H = 0 \quad \text{para todo } t \in [0, \infty) \quad (\text{II.39})$$

El hecho de que la condición de transversalidad para el problema de línea terminal horizontal puede ser adaptada del horizonte finito al contexto de infinito, hace razonable esperar una adaptación similar para otros problemas. Si el estado terminal es libre como $t \rightarrow \infty$, por ejemplo, podemos esperar que la condición de transversalidad tome la forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0 \quad (\text{Condición de transversalidad para el estado terminal libre}) \quad (\text{II.40}).$$

Similarmente, si la variable de estado está sujeta a ser pre-establecida a un nivel mínimo y_{min} con $t \rightarrow \infty$, podemos esperar que la condición de transversalidad sea:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \geq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)[y(t) - y_{min}] = 0 \quad (\text{II.41})$$

La condición (II.40) y la (II.38) son condiciones de transversalidad que se garantizan por una adaptación a tiempo infinito del procedimiento utilizado para la presentación del principio del máximo, de donde se derivaron las condiciones de transversalidad de horizonte finito.

Por tanto, primero se combina vía multiplicador de Lagrange, el funcional objetivo original V con la ecuación de movimiento para y dentro del nuevo funcional.

$$V = \int_0^T H(t, y, u, \lambda) dt - \int_0^T \lambda(t) y dt \quad (\text{II.20}')$$

Luego, después de resolver la segunda integral por partes, se reescribe V como:

$$V = \int_0^T \left[H(t, u, y, \lambda) + y(t) \dot{\lambda} \right] dt - \lambda(T) y_T + \lambda(0) y_0 \quad (\text{II.20''})$$

Para generar trayectorias vecinas que se puedan comparar con la trayectoria de control y la trayectoria óptima de la variable de estado, adoptamos las curvas de desviación $p(t)$ para u y $q(t)$ para y :

$$u(t) = u^*(t) + \varepsilon p(t) \quad \text{y} \quad y(t) = y^*(t) + \varepsilon q(t) \quad (\text{II.22 y II.23})$$

Similarmente para la variable T y y_T , escribimos:

$$T = T^* + \varepsilon \Delta T \quad \text{y} \quad y_T = y_T^* + \varepsilon \Delta y_T \quad (\text{II.24})$$

el resultado es, el funcional V transformado dentro de una función de ε .

La condición de primer orden para la maximización se presenta de la siguiente manera:

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \dot{\lambda} \right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) \right] dt + [H]_{t=T} \Delta T - \lambda(T) \Delta y_T = 0 \quad (\text{II.28})$$

Al adaptarla al horizonte infinito, la ecuación se convierte en:

$$\frac{dV}{d\varepsilon} = \underbrace{\int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} + \lambda \right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t) \right] dt}_{\Omega_1} + \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} H \Delta T}_{\Omega_2} - \underbrace{\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \Delta y_T}_{\Omega_3} = 0 \quad (\text{II.42})$$

Con el fin de satisfacer esta condición, cada uno de los tres componentes, debe ser valorado individualmente. La valoración de los últimos dos nos dan las condiciones de transversalidad (II.38) y (II.40).

CAPÍTULO III

Teoría de Juegos

III.1 Teoría de Juegos

La teoría de juegos se utiliza para estudiar la posibilidad de la interacción de las decisiones de diferentes individuos, donde evaluar el funcional objetivo no solo depende de la decisión de un jugador sino también de las decisiones de los otros y de cómo influyen unos sobre otros. La teoría de juegos se utiliza en aquellos casos donde las situaciones de conflicto juegan un papel muy importante.

Es relativamente importante delinear los componentes de una situación de conflicto. Un individuo toma una decisión y cada una de esas posibles decisiones enfrenta un resultado diferente, que son valorados de manera distinta por cada individuo.

Los tomadores de decisiones son llamados jugadores y sus funciones objetivo representan sus funciones de pago. Estos jugadores no siempre tienen el control sobre los resultados, algunas veces estos pueden ser influenciados por la incertidumbre.

Cada movimiento en un juego, es un punto en el cual cada jugador debe escoger entre distintas alternativas, las cuales están directamente ligadas con la escogencia del otro jugador. El conjunto de acciones que tome cada jugador va a conformar su estrategia y estas son las que van a definir los distintos resultados.

El nacimiento de los juegos dinámicos abre paso a un tipo de juego conocido como juegos diferenciales, donde las ecuaciones diferenciales juegan un papel muy importante.

III.2 Juegos Diferenciales

Un juego diferencial es una situación de conflicto o cooperación en la que los jugadores escogen sus estrategias a través del tiempo.

En los juegos diferenciales existe más de un jugador, y los pagos de cada uno depende de las trayectorias de control empleadas por cada jugador.

Los juegos diferenciales son juegos en los que se puede presentar la cooperación ó el conflicto, entre las estrategias de los agentes que intervienen en el juego a través del tiempo.

Para establecer un juego diferencial, existen varios elementos que se deben considerar⁸:

- 1) El conjunto de jugadores N , donde $N=(1,2,3,...,N)$.
- 2) El intervalo de tiempo $[t_o, t_f]$ durante el cual el proceso de establecimiento de las decisiones esta definido. Esto denota la duración del juego, es decir, su horizonte de tiempo.
- 3) El conjunto infinito U_i establecido para cada $i \in N$, lo cual se conoce con el nombre de espacio de control del jugador i . Los elementos de cada espacio de control, son funciones de control definidas en el intervalo de tiempo, $u_i [t_o, t_f]$. Por otra parte, existe un conjunto S^i tal que cada t fijo que pertenece al intervalo $[t_o, t_f]$, $u_i(t) \in S^i \subseteq R(i \in N)$.
- 4) La formulación de un modelo como un conjunto de ecuaciones diferenciales que describe la evolución dinámica de un sistema, es, $x(t) = f[x(t), u_i(t), ..., u_n(t), t]$, donde $x(t)$ es el vector de estado y $u_i(t) \in S^i (i \in N)$.

⁸ Según: PETIT, María Luisa. Control theory and dynamic games in economic policy analysis. (1990)

5) Una función *punto a conjunto* (set valued) $\eta_i(\cdot)$ definida para cada $i \in N$ que caracteriza la estructura de información del jugador i , y dado que $\eta_i(t)$ define la información del jugador i en el tiempo $t \in [t_o, t_f]$. La estructura de información del juego estará definida entonces por la recolección de las estructura de información de todos los jugadores, lo cual es $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$.

6) Un conjunto Ω_i de estrategias permitidas γ_i del jugador i , definida para cada $i \in N$. Ω_i se conoce como el espacio de estrategias de las decisiones del jugador i . γ_i define el mapa del espacio de información dentro del espacio de acción de cada jugador $i \in N \gamma_i : \eta \rightarrow u_i$.

7) Un funcional objetivo F_i definido para cada tomador de decisiones $i \in N$ sobre el horizonte de tiempo $[t_o, t_f]$. El valor de F_i depende no solo de las acciones de cada jugador i en particular sino que también depende de las decisiones de todos los demás jugadores. En teoría de juegos, F_i es llamado función de pago del jugador i y puede ser escrita de la siguiente forma:

$$F_i(u_1, u_2, \dots, u_N) = \int_{t_o}^{t_f} I_i[x(t), u_1(t), \dots, u_N, t] dt, i \in N$$

III.2.1 Estructuras de información

Las soluciones de los juegos diferenciales, pueden clasificarse, de acuerdo a la estructura de información del mismo. Entre las estructuras de información más importantes tenemos:

1) **Estructura de información de tipo circuito (*loop*) abierto:** Es el tipo de estructura en la que uno de los jugadores en el tiempo t recuerda solo el estado inicial. Decimos que nos encontramos ante una estructura de información tipo *loop* abierto cuando: $\eta_i(t) = \{x_o\}, t \in [t_o, t_f]$.

2) **Estructura de información de tipo circuito (*loop*) cerrado:** Este caso es aquel en el que la estructura del modelo implica que el jugador recuerde toda la trayectoria desde el comienzo hasta t . Este tipo de información incorpora memoria. Estamos ante un *loop* cerrado si: $\eta_i(t) = \{x(s), t_o \leq s \leq t\}, t \in [t_o, t_f]$.

3) **Estructura de información de tipo circuito (*loop*) cerrado sin memoria:** considera el caso en el que el jugador sólo recuerda el estado inicial y

conoce el estado actual. Es una estructura *loop* cerrado sin memoria si se cumple

que : $\eta_i(t) = \{x_o, x(t)\}, t \in [t_o, t_f]$.

4) Estructura de información de tipo retroalimentación

(feedback): Considera el caso en el que no hay memoria, el jugador solo conoce el estado en el que se encuentra. Se debe cumplir que: $\eta_i = \{x(t)\}, t \in [t_o, t_f]$.

Los juegos diferenciales, por otra parte se pueden dividir en juegos cooperativos y no cooperativos. Los juegos cooperativos se basan en la idea de que los jugadores, antes de la realización del juego pueden coludir, con la finalidad de llegar a un acuerdo de estrategias que es de obligatorio cumplimiento. Por su parte, el tipo de juego no cooperativo, rechaza la idea del acuerdo previo de estrategias.

CAPÍTULO IV

Trabajadores, empresarios y gobierno a través de un juego diferencial

El problema que se presenta a continuación, se basa en trabajo realizado por el mexicano Gonzalo Castañeda, acerca de un estudio del sistema económico mexicano a través de un planteamiento de teoría de juego.

IV.1 Planteamiento de cada uno de los agentes

IV.1.1 Problema del gobierno:

En el modelo se quiere representar un gobierno interesado en el crecimiento de la economía, pero que a la vez se encarga de proporcionar bienestar social, a través de la siguiente función objetivo:

$$U^G = \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\eta g_{ts} + (1-\eta)K_t \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} e^{-\delta t} dt \quad (\text{IV.1})$$

donde:

U^G : Es la utilidad del gobierno a lo largo del horizonte temporal del juego.

σ : Representa la elasticidad sustitución intertemporal del consumo, que debe ser $0 < \sigma < 2$, y diferente de 1.

δ : Es la tasa subjetiva de preferencia intertemporal.

η : Indica la importancia que le otorga el gobierno al bienestar social junto a la búsqueda de la acumulación interna del capital, $0 < \eta \leq 1$.

g_{ts} : Gasto social del gobierno realizado en el período .

K_t : Es el capital en la economía, $K_{Venezuela} = K_E^t + K_G^t$, con $K_{t=0} = K_0$; de donde:

K_E^t : Es el capital del sector empresario privado existente en el período,y

K_G^t : Es el capital de PDVSA como empresa del Estado en el período.

El gobierno controla las variables: tasa impositiva y la recaudación fiscal de los ingresos de PDVSA.

Se supondrá que los impuestos (T_E^t) recolectados, provienen sólo de gravar los ingresos de las actividades de las empresas privadas, por otra parte, (T_{PDVSA}^t) representa

la recaudación fiscal de los ingresos generados por PDVSA, que formarán la otra porción de recaudación fiscal total. No se introducen en el modelo⁹ los impuestos pagados por las persona naturales, para no complicar más la solución y además por representar una pequeña proporción de los ingresos tributarios que obtiene el Estado.

"Como se sabe, en todo país capitalista del mundo, los empresarios y particulares deben pagar un tributo al Estado, proporcional a sus ingresos. En Venezuela, y al comparar la tasa de impuestos con las de otros países, este resultado es significativamente bajo.

Esta diferencia que existe entre los niveles de impuestos en Venezuela y el de otras naciones se debe a que en nuestro país es la renta petrolera la que forma la mayor parte de los ingresos del Estado, sin que las clases altas de nuestra sociedad tengan que contribuir con parte de sus ingresos a la resolución de los conflictos sociales propios de las desigualdades económicas".¹⁰

Además, se supondrá un presupuesto equilibrado, apartando la influencia de las políticas de emisión monetaria y la inflación.

⁹

"... La debilidad del marco legal, las deficiencias en la administración tributaria y las deficiencias del sistema judicial para hacer cumplir las leyes en general y las tributarias en particular, son las principales causas de que el impuesto sobre la renta se recaude efectivamente sobre un número reducido de contribuyentes", "... además de que sólo los venezolanos que se consideren verdaderamente ricos son gravados a tasas efectivas superiores al 5%...". GARCÍA, GUSTAVO. Ingresos fiscales y tributación no petrolera en Venezuela (1996).

¹⁰ LUIS PEDRO ESPAÑA. Venezuela y su petróleo. El destino de la Renta.(1988).

De acuerdo a esto, el gasto social será igual a la recaudación fiscal.

Presupuesto equilibrado

$$g_s^t = T_E^t + T_{PDVSA}^t \quad (IV.2)$$

El gobierno obtiene su legitimidad en la medida en que la utilidad instantánea de los empresarios no exceda la cota máxima necesaria para mantener el orden político. Por tal razón se incluye la restricción de legitimidad.

Restricción de legitimidad

$$\frac{U_E^t}{U_T^t} \leq L \quad (IV.3)$$

Donde U_E^t y U_T^t son las utilidades en cada momento del tiempo, de los empresarios y de los trabajadores.¹¹

¹¹ La pérdida de legitimidad aquí la vamos a entender como el proceso de deterioro del bienestar relativo de los trabajadores.

El gobierno como recaudador de impuestos tiene presente que a medida que aumentan los impuestos, frena la acumulación, pues está absorbiendo una mayor proporción del excedente de los empresarios¹², lo que se muestra en la siguiente ecuación de transición:

Acumulación interna del capital de los empresarios:(Restricción)

$$K_E^t = Y_E^t - W_E^t - G_t - T_E^t = I_t \quad (IV.4)$$

Donde:

$K_E^t = I_t$ Es el crecimiento del capital de los empresarios o la inversión.

Y_E^t : Es la producción real; donde $Y_E^t = aK_E^t$, a es el coeficiente insumo producto.

W_E^t : Los salarios pagados por el sector empresarial $W_E^t > 0$.

G_t : Ganancias no retenidas por las empresas privadas

La intervención de los impuestos pagados por PDVSA al fisco nacional, representan la otra parte de la tributación fiscal que los empresarios deberían pagar como

¹² "Una propiedad que tienen los impuestos es distribuir el riesgo entre el Estado y las empresas."... con el impuesto sobre la renta, el Estado comparte con el inversionista las ganancias y por lo tanto comparte los buenos y los malos resultados..."

MANZANO, Osmel. Consideraciones para una revisión de la tributación petrolera. 1998.

únicos contribuyentes representativos, para mantener el equilibrio presupuestario, lo que da origen a una nueva ecuación de transición.

Acumulación de capital de PDVSA como empresa del Estado: (Restricción)

$$\dot{K}_G^t = Y_G^t - W_G^t - T_{PDVSA}^t \quad (IV.5)$$

Donde:

Y_G^t : Es la producción del período por parte del Estado, $Y_G^t = qK_G^t$, q es el coeficiente insumo producto.

W_G^t : Nómina de salarios pagada por las empresas del Estado.

IV.1.2 Problema de los trabajadores:

El gasto social que realiza el gobierno se destina a servicios otorgados a la sociedad, por lo que se supone que la totalidad del gasto social está dirigido a los trabajadores.

La función de utilidad a maximizar por los trabajadores, asumiendo que no tienen capacidad de ahorro es:

$$U^T = \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\rho g_{ts} + (1-\rho)W_t \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} e^{-\delta t} dt \quad (\text{IV.6})$$

Donde:

$W_{Venezuela} = W_E^t + W_G^t$: Es la suma de los salarios recibidos tanto en el sector privado como en el sector público.

ρ : Es el parámetro que indica la ponderación que se le otorga al bienestar social en las decisiones del trabajador. $0 \leq \rho < 1$.

Si el Estado influye considerablemente sobre las decisiones de estrategia de los trabajadores, el valor de ρ estará cercano a 1, y se podrá decir que los trabajadores están más dependientes de las decisiones del Estado, por la coincidencia entre la función objetivo de los trabajadores y la del gobierno.

Los trabajadores pueden ejercer presión para controlar la participación de los salarios en el producto nacional, y además deben cumplir con las restricciones (IV.4) y (IV.5).

IV.1.3 Problema de los empresarios:

Los empresarios por su parte maximizan el consumo intertemporal:

$$U^E = \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{\sigma - 1} C_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} e^{-\delta t} dt \quad (\text{IV.7})$$

C_t : Es el consumo intertemporal en el período t $C_t > 0$.

Estando ya definida la participación de los salarios en el producto nacional y los impuestos, los empresarios deciden el capital interno de la economía, debido a que estos deciden los montos de capital retenidos para la empresa y el destino de los dividendos dirigidos al consumo de inversión en el exterior del país, por ello no sólo toman en cuenta la restricción (V.4) de acumulación interna de capital¹³ sino que deben prestar atención a su inversión en el exterior, a través de otra ecuación de transición.

¹³ La inversión empresarial desempeña un papel muy importante en el desempeño de la economía, siendo el factor determinante del nivel de empleo y de la capacidad de crecimiento en el futuro. Por otra parte, es una variable volátil, que amplifica las fluctuaciones cíclicas de la actividad económica. Además, es muy frecuente que en el diseño de política económica se lleve a cabo de modo que en las fases de recesión o bajo nivel de actividad económica se incentive la inversión. Estas son razones para tomar en cuenta la acumulación de capital de los empresarios en este modelo.

Acumulación empresarial externa:(Restricción)

$$F_t = rF_t + G_t - C_t \quad (\text{IV.8})$$

$\dot{F}_t$ = Fuga de capitales (ahorros en el exterior de los empresarios), que al comienzo se consideran por simplicidad, $F_0 = 0$.

r = Rendimiento de la inversión en el extranjero.

Si en el modelo se elimina la posibilidad de saltos en la acumulación capital, de tal manera que K_E^t y F_t sean funciones continuas en el tiempo, se incluye la siguiente condición.

Condición de factibilidad:

$$\theta \leq \dot{K}_E^t / K_E^t \leq \theta' \quad (\text{IV.9})$$

Donde θ y θ' , serán los límites de la tasa de inversión, cuando la tasa llega al límite superior se dice que los empresarios tendrán expectativas optimistas de inversión

en el país, y se hablará de expectativas pesimistas en el caso de que la tasa llegue al límite inferior.

IV.2 Estructura de la información:

La estructura de la información es de tipo circuito (*loop*) cerrado; es decir, que las variables de control son una función de las variables de estado y además los agentes recuerdan todo lo sucedido desde el momento inicial hasta el momento t , por lo que las reglas de decisión (variables de control), estarán definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 W_G^t &= \beta^G K_G^t \\
 W_E^t &= \beta^E K_E^t \\
 G_t &= \alpha K_E^t \\
 T_E^t &= \tau K_E^t \\
 T_{PDVSA}^t &= \phi K_G^t
 \end{aligned}
 \tag{IV.10}$$

donde $\beta^G, \beta^E, \alpha, \tau$, y ϕ son los parámetros que se van a determinar optimamente.

Asumiendo cierto nivel de movilidad laboral, los salarios reales en las empresas y en el gobierno, se moverán en la misma dirección. Llevando el supuesto al extremo, se dirá que las tasas salariales en el sector privado y el gobierno son iguales.

$$\beta^G = \beta^E = \beta.$$

En el desarrollo del juego, la restricción de legitimidad del gobierno se va a cumplir sin dificultades.

Las mejores respuestas de cada agente (gobierno, empresarios, trabajadores), se obtendrá a partir de la solución de Hamiltonianos para cada una de las funciones de utilidad correspondientes y sus respectivas restricciones (La resolución matemática se presenta detalladamente en el Apéndice), de donde se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\alpha = a - q \tag{IV.11}$$

$$r = a - \tau - \beta \tag{IV.12}$$

(IV.13)

$$\left([(\eta\tau + (1-\eta))(a - \beta - \alpha - \tau)] - \left\{ \sigma \left[\frac{1-\eta}{\eta} + a - \beta - \alpha - \delta \right] \eta\tau + (1-\eta) \right\} \right) =$$

$$\left([(\rho\tau + (1-\rho)\beta)(a - \beta - \alpha - \tau)] - \left\{ \sigma \left[\frac{(a - \alpha)(1-\rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1-\rho)} \right] \rho\tau + (1-\rho)\beta \right\} \right)$$

(IV.14)

$$\left(-[(\eta\phi + (1-\eta))(q - \beta - \phi)] + \left\{ \sigma \left[\frac{1-\eta}{\eta} + a - \beta - \alpha - \delta \right] \eta\phi + (1-\eta) \right\} \right) =$$

$$\left(-[(\rho\phi + ((1-\rho)\beta)) + (q - \beta - \phi)] + \left\{ \sigma \left[\frac{(a - \alpha)(1-\rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1-\rho)} \right] \rho\phi + (1-\rho)\beta \right\} \right)$$

Para que se cumplan las condiciones de transversalidad del juego, se debe cumplir que $\alpha > r$, lo que quiere decir, que el invertir en el país debería ser más rentable que invertir en el exterior, además se asume que la productividad de las empresas α debe ser mayor que la capacidad de producir recursos del Estado, por medio de la productividad (coeficiente insumo-producto (q)). Ahora todo lo antes dicho, trae como única consecuencia que la tasa de dividendos óptima de los empresarios sea positiva.

El juego planteado, tiene como principales diferencias con lo planteado por Castañeda, la introducción dentro de las variables de estudio, al ingreso fiscal que el Estado obtiene de las actividades de PDVSA, siendo esta su principal fuente de gasto.

Para la solución del juego, se debe seguir un orden preestablecido, que consiste:

1. Plantear los Hamiltonianos correspondientes a cada agente.
2. Derivar las condiciones de primer orden para cada uno de ellos.
3. De las condiciones de primer orden correspondientes a las variables de control, se debe obtener que los multiplicadores correspondientes en cada problema sean iguales.
4. Se procede a resolver los problemas, según las siguientes condiciones:
 - a) El problema de los trabajadores se resuelve conjuntamente con el problema del gobierno, de donde se sigue un sistema en las variables de estado K_E^t y K_G^t , que se puede re-escribir en términos de K_E^t .
 - b) Por su parte el problema de los empresarios se resuelve independientemente del problema de los trabajadores y el del gobierno.
5. Seguidamente se utilizan ambos resultados, para buscar una solución conjunta de la que se obtienen los coeficientes correspondientes a las variables de control (β , α , τ , y φ). El sistema resultante es no lineal y genera infinitas soluciones, de las cuales los agentes escogerán aquella que defina el equilibrio de Nash a seguir, porque cada uno toma sus decisiones de acuerdo a las decisiones de los otros.

6. Se obtienen las condiciones de transversalidad para cada problema, con el fin de establecer las restricciones sobre los otros coeficientes, que forman parte del sistema para hallar los parámetros (β, α, τ , y φ).

El modelo planteado por Castañeda fue realizado de tal manera que para poder obtener estas condiciones de transversalidad, se debe cumplir el paso 3, por consiguiente se puedan hallar las cuatro condiciones para obtener los parámetros en función sólo de los coeficientes, y por tanto el problema queda en función de una sola variable de estado (K_E^t), ya que el sistema colapsa en una sola ecuación diferencial que es la base para obtener las ecuaciones de las otras variables de estado. Esto implica en cierto modo la reducción de las complicaciones para la solución del problema, debido a la homogeneidad de las ecuaciones diferenciales de los multiplicadores. Debido a esto, se pueden hallar más fácilmente las condiciones de transversalidad.

En este trabajo, seguimos de cerca el desarrollado por Castañeda, debido a que un cambio relevante en el planteamiento, genera graves problemas para la solución.

IV.2 Resultados:

- De la ecuación de coeficientes (IV.11), podemos observar que la tasa de dividendos óptima de los empresarios depende sólo de la productividad, tanto del gobierno como de los mismos empresarios. Esto se obtiene porque para cualquier momento del tiempo, la utilidad marginal del crecimiento del capital del Estado y de los empresarios son iguales. El hecho de que el Estado sigue obteniendo fuertes ingresos de la tributación petrolera, y sus políticas no obedecen a las exigencias de los trabajadores, le da a los empresarios la visión de que las condiciones de tributación y precio no varíaran de tal manera que los afecte fuertemente, lo que los hace estar seguros de la estabilidad de su inversión en el país.

- Para que los empresarios puedan sostener sus niveles de dividendos, por la condición (IV.11), se ven obligados a tener una mayor productividad que las empresas del Estado, lo que los puede llevar a invertir un mayor monto de las ganancias en factores de producción. Además si el Estado sigue obteniendo altos niveles de ingresos fiscales del sector petrolero, serán menores las posibilidades de que surjan políticas impositivas que aumenten la tasa de impuesto a la que se deben

regir de acuerdo a sus ingresos, ya que el estado funciona como un otorgador de subsidios indirecto al ser Venezuela uno de los país donde se paga menos impuestos sobre la renta anual (Ecuación (IV.11)).

- Para que los empresarios consideren que mantener su capital en el país les resulta rentable, la tasa de interés externa (r), debe ser menor que la tasa de acumulación interna dada por $(\alpha-\beta)$. En base a esto la decisión óptima del gobierno debe ser mantener la tasa impositiva a niveles que hagan que (τK_E^t) monto cobrado de impuestos sea menor que su relación de rendimiento interno de capital dada por $(\alpha-\beta)$. Esto se puede observar en la ecuación (IV.12).

Una vez que se obtienen los parámetros que se encuentran en las reglas de decisión, se procede a definir las trayectorias de las variables de estado en el juego que son, el capital privado interno(K_E^t), capital del Estado(K_G^t) y capital privado externo(F_t). Esto nos proporcionará la posibilidad de obtener la acumulación de capital interno en la economía. Además se obtendrá la evolución de la legitimidad del gobierno.

Definiremos ahora las trayectorias de las variables de estado, que son capital interno de los empresarios, capital del gobierno y capital de los empresarios en el extranjero. Esto se puede hallar a través de la ecuación (IV.4), (IV.11) y (V.12).

Y obtenemos:

Acumulación de capital de los empresarios en el país:

Por la restricción (IV.4):

$$\dot{K}_E^t = Y_t - W_E^t - G_t - T_E^t = I_t$$

que es igual a:

$$\dot{K}_E^t = aK_E^t - \beta K_E^t - \alpha K_E^t - \tau K_E^t$$

$$\dot{K}_E^t = (a - \beta - \alpha - \tau)K_E^t$$

sustituyendo de acuerdo a la condiciones (IV.11) y (V.12)

$$\dot{K}_E^t = (r - a + q)K_E^t \quad (\text{IV.15})$$

Obtenemos la solución de la ecuación diferencial para la acumulación de capital de los empresarios en el país.

$$K_E^t = K_0^t e^{(r-a+q)t} \quad (\text{IV.16})$$

De esta ecuación de acumulación de capital interna de los empresarios, se puede observar que la dotación de capital de estos en el país va a depender, de la diferencia entre la tasa de interés externa y la tasa de dividendos que están generando, que nos muestra la diferencia entre la capacidad de producir recursos por parte del Estado, y la capacidad de producir recursos de las empresas.

Ahora lo que se busca es la acumulación de capital en el extranjero, pero para esto se debe buscar primero la trayectoria del consumo de los empresarios. Se utilizarán las ecuaciones (V.4) y (V.8) y la condición de consumo óptimo que se obtuvo en el apéndice, y además se establecerá la relación, de que el consumo está formado por una parte del capital de los empresarios en el exterior y una parte del capital que tienen en el país, esta relación está dada por $C_t = \varsigma(K_E^t + F_t)$.

De aquí, la tasa de consumo de los empresarios es¹⁴:

$$\varsigma = r(1 - \sigma) + \sigma\delta \quad (\text{IV.17})$$

así la acumulación de capital de los empresarios fuera de las fronteras del país, se obtiene a partir del uso de las condiciones (IV.11), (IV.17) y (IV.8);

¹⁴ Castañeda obtiene el valor de ς , a través del método de los coeficientes indeterminados.

La acumulación externa de capital de los empresarios es:

$$\dot{F}_t = \sigma(r - \delta)F_t + [a - q - r(1 - \sigma) - \sigma\delta]K_E^t \quad (\text{IV.18})$$

donde su solución toma la forma:

$$F_t = \{e^{\sigma(r-\delta)t} - e^{(r-a+q)t}\} K_E^0 \quad (\text{IV.19})$$

La ecuación de la acumulación de capital de los empresarios en el extranjero, nos muestra que en el país habrá fuga de capitales cuando $\sigma(r - \delta) > r - a + q$, porque esta relación es igual a $\sigma(r - \delta) > r - \alpha$, lo que implica que toda aquella parte de los dividendos que no se consumen en el país, para generar mayores beneficios se debe invertir en el extranjero, esto sucederá cuando la tasa de consumo de los empresarios sea menor que la tasa de dividendos.

En Venezuela, no hay políticas de endeudamiento del Estado, que sean dirigidas específicamente para fomentar la acumulación de capital empresarial en el país, por lo que no hay incentivos en el sector empresarial para aumentar sus niveles de producción, debido a que sus márgenes de ganancias no son amparados por una política estatal pro-empresarial, aunado a la pérdida de credibilidad que han tenido nuestros gobiernos, lo

que trae como consecuencia que la fuga de capitales en el país sea cada vez mayor, y obviamente el consumo empresarial interno sea reducido.

El crecimiento de la dotación de capital de la estructura económica de Venezuela para este juego, debe estar representada por la siguiente ecuación:

$$K_{Venezuela}^t = K_E^t + K_G^t = \{1 + M\}K_E^t \quad (IV.20)$$

Esta dotación de capital del país, está compuesta por el capital de los empresarios y el capital del gobierno, donde este se encuentra en función del capital de los empresarios¹⁵. Por otra parte, como ya desarrollamos la ecuación de movimiento de K_E^t , la podemos sustituir en la ecuación de acumulación de capital de la economía.

$$K_{Venezuela}^t = K_E^t + K_G^t = K_E^t = (1 + M)K_0^t e^{(r-a+q)t} \quad (IV.21)$$

Esta ecuación nos demuestra que la acumulación de capital del país, va a depender no sólo de los parámetros de decisión del Estado, sino también de las decisiones de los empresarios, así como también su actitud frente a las decisiones de política que aplique el Estado, las cuales también serán parámetros que van a definir su posición como inversionistas.

¹⁵ El valor de M se encuentra desarrollado en el apéndice, el cual se obtuvo del cociente de ambos lados de la ecuación (25.A)

Por otra parte, las decisiones de los empresarios también se ven afectadas por la visión de legitimidad que presenta el gobierno en este momento del tiempo, esta situación también está definida por la restricción de legitimidad que se presentó para el problema del gobierno. Esta la podemos obtener a través de las trayectorias de las variables de Estado definidas en el juego¹⁶, y será de la forma:

$$L_t = L' e^{(\sigma(r-\delta)-r+a-q)t} \quad (\text{IV.22})$$

Si en el país se presentan altos niveles de fuga de capitales, esto es una clara señal de la pérdida de legitimidad del gobierno, lo cual produce un proceso de deslegitimización continua de la credibilidad de las políticas planteadas por el Estado.

¹⁶ Ver obtención de la restricción de legitimidad en el apéndice.

CAPITULO V

Ampliación del problema

Pérdida de legitimidad total del gobierno:

A medida que la credibilidad de las políticas del Estado dejan de ser creíbles, y este es incapaz de cubrir las necesidades básicas de la población, las instituciones del Estado van perdiendo legitimidad, entonces, el Estado tiene que buscar la manera de establecer políticas que lo ayuden a cubrir mejor las necesidades sociales.

Aquellos Estados que trabajan con el endeudamiento externo para la solución de sus políticas, pueden tratar de compensar su pérdida de legitimidad a través de este medio, pero los casos como el planteado en este juego para Venezuela, cuando se presenta la pérdida de legitimidad del Estado por completo hay que operar con estrategias totalmente distintas, las cuales representan una solución de esquina.

Hay que tomar en cuenta la restricción (IV.3) de legitimidad del gobierno, la cual de ser reexpresada para la solución de esquina, quedando de la siguiente manera:

$$L[\rho(\phi K_G^t + \tau K_E^t) + (1 - \rho)(\beta K_G^t + \beta K_E^t)] - \varsigma(K_E^t + F_t) \quad (V.23)$$

Además sabemos, que los problemas de los empresarios y los trabajadores no cambian, se pueden usar las ecuaciones (IV.12), (IV.17), (IV.20) y se llega a:

$$\alpha = r(1 - \sigma) + \sigma\delta = \varsigma \quad (V.24)$$

Esto nos indica que la estrategia óptima de los empresarios, para la solución de esquina, consiste en consumir todo lo que se obtiene como dividendos, esto indica que no se invierte nada en el exterior, y que los dividendos que están fuera de las fronteras del país pueden seguir creciendo, siempre y cuando no se gasten todos los intereses que se están acumulando. En el caso de la solución de esquina no hay fuga de capitales, y los capitales que los empresarios tengan en el exterior sólo crecerán por los intereses que están generando.

Ahora podemos obtener la nueva acumulación externa de capital:

$$F_t = F_{t_0} e^{\sigma(r-\delta)(t-t_0)} \quad (IV.25)$$

Cuando las políticas de un gobierno, se dirigen a tratar de reducir su pérdida de legitimidad, y esas políticas son creíbles la fuga de capitales se detiene, ya que surge la

confianza, que lleva a los empresarios a mantener sus fondos dentro de las fronteras del país.

Por otra parte, también podemos obtener la acumulación de capital de los empresarios en el país, la cual está dada por:

$$K_E^t = K_0^t e^{\sigma(r-\delta)(t-t_0)} \quad (\text{IV.26})$$

donde K_0^t , es la dotación de capital de los empresarios en el país cuando se alcanza la restricción de legitimidad.

Cuando un gobierno alcanza los objetivos de sus políticas para recuperar su legitimidad, las decisiones tomadas por los trabajadores y los empresarios, deben propulsar el crecimiento económico.

CONCLUSIONES

El problema planteado, se basó en representar las diferentes decisiones del sector empresarial, laboral y gubernamental, donde se demuestra que el Estado va a definir sus políticas, no de forma independiente, sino que se encuentra subordinado a las decisiones óptimas de los otros agentes del juego (empresarios y, trabajadores).

Al Estado no proveer políticas que le garanticen a los empresarios, la obtención de dividendos de la inversión de sus capitales, provocará la reducción de sus incentivos para la inversión y aumento de su producción en el país. Esto, traerá como consecuencia el deterioro del bienestar de las clases trabajadoras, ya que sufrirán la disminución de sus niveles de ingreso. Por su parte el Estado, se verá afectado por la reducción del ingreso fiscal proveniente de la gravación de la utilidad bruta de las empresas, ya que estas generarán menos ganancias gravables. En consecuencia, el país se encontrará en un proceso de fuga de capitales recurrente, que producirá el deterioro de la economía.

El Estado venezolano, en los últimos años se ha caracterizado por un alto nivel de gasto fiscal, el cual no se ha traducido en un eficiente cubrimiento de las necesidades básicas de la población, lo que se puede observar al visitar hospitales y colegios que se encuentran bajo la dirección de entes del Estado. Esto trae como consecuencia, la disminución del rendimiento óptimo de las clases trabajadoras, eliminando los

incentivos para trabajar, además que por otra parte no se pueden esperar inversionistas motivados a colocar sus capitales en un país donde las garantías tanto sociales como económicas no son garantizadas.

Apéndice

Problema del gobierno:

$$H_G = e^{-\delta t} \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\eta (T_E^t + T_{PDVSA}^t) + (1-\eta)(K_G^t + K_E^t) \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \lambda_E^t [(a-\alpha-\beta)K_E^t - T_E^t] + \lambda_G^t [(q-\beta)K_G^t - T_{PDVSA}^t] \quad (1.A)$$

Condiciones de primer orden para las variables de control:

$$\frac{\partial H_G}{\partial T_{PDVSA}^t} = e^{-\delta t} \eta \left[(1-\eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta (T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} - \lambda_G^t = 0 \quad (2.A)$$

$$\frac{\partial H_G}{\partial T_E^t} = e^{-\delta t} \eta \left[(1-\eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta (T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} - \lambda_E^t = 0 \quad (3.A)$$

Condiciones de primer orden para las variables de estado:

$$-\lambda_E^t = \frac{\partial H_G}{\partial K_E^t} = e^{-\delta t} (1-\eta) \left[(1-\eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta (T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + \lambda_E^t (a-\alpha-\beta) \quad (4.A)$$

$$-\lambda_G^t = \frac{\partial H_G}{\partial K_G^t} = e^{-\delta t} (1 - \eta) \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + \lambda_G^t (q - \beta) \quad (5.A)$$

Se toma la ecuación (3.A), se busca su derivada con respecto a t , luego se sustituye en (4.A) y en esta se sustituye (3.A) para eliminar (λ_E^t) , tenemos:

Derivada de (3.A):

$$\lambda_E^t = -\delta e^{-\delta t} \eta \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} - \frac{e^{-\delta t} \eta \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left[(1 - \eta) \left(\dot{K}_E^t + \dot{K}_G^t \right) + \eta \left(\dot{T}_E^t + \dot{T}_{PDVSA}^t \right) \right]}{\sigma}$$

Luego, se sustituye en (4.A):

$$\begin{aligned} & -\delta e^{-\delta t} \eta \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + \frac{e^{-\delta t} \eta \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{-1-\sigma}{\sigma}} \left[(1 - \eta)(\dot{K}_E^t + \dot{K}_G^t) + \eta(\dot{T}_E^t + \dot{T}_{PDVSA}^t) \right]}{\sigma} \\ & = -e^{-\delta t} (1 - \eta) \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{-1}{\sigma}} + e^{-\delta t} \eta \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1}{\theta}} (a - \beta - \alpha) \end{aligned}$$

despejando, obtenemos como resultado la siguiente ecuación diferencial:

$$[\eta(T_E^t + \dot{T}_{PDVSA}^t) + (1 - \eta)(K_E^t + \dot{K}_G^t)] = \left[\left(\frac{1 - \eta}{\eta} \right) + a - \beta - \alpha - \delta \right] \sigma (\eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) + (1 - \eta)(K_G^t + K_E^t)) \quad (6.A)$$

recordando que:

$$\frac{\partial H_G}{\partial T_{PDVSA}^t} = e^{-\delta t} \eta \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{-1/\sigma} - \lambda_G^t = 0 \quad (2.A)$$

$$\frac{\partial H_G}{\partial T_E^t} = e^{-\delta t} \eta \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{-1/\sigma} - \lambda_E^t = 0 \quad (3.A)$$

al observar las ecuaciones (3.A) y (2.A), nos damos cuenta que $\lambda_E^t = \lambda_G^t$, por tanto, se deduce también que $\dot{\lambda}_E^t = \dot{\lambda}_G^t$, en

cualquier momento del tiempo, así, al igualar (4.A) y (5.A), y sustituir λ_E^t por λ_G^t nos queda:

$$e^{-\delta t} (1 - \eta) \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{-1/\sigma} + \lambda_E^t (a - \alpha - \beta) = e^{-\delta t} (1 - \eta) \left[(1 - \eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{-1/\sigma} + \lambda_G^t (q - \beta)$$

y se obtiene:

$$\lambda_E^t (a - \alpha - \beta) = \lambda_G^t (q - \beta)$$

El hecho de que $\lambda_E^t = \lambda_G^t$, lo que nos indica es que la utilidad marginal de la inversión para el gobierno es igual a la utilidad marginal de la inversión para los empresarios en el país, ahora surge una condición que se debe cumplir, dada por las ecuaciones (4.A) y (5.A):

entonces tenemos:

$$\alpha = a - q \quad (7.A)$$

Esta condición nos muestra que la estrategia de los empresarios, se obtiene del problema del gobierno, lo cual es razonable, porque en un Equilibrio de Nash la estrategia óptima de cada jugador depende del comportamiento y las decisiones de los otros jugadores, por lo que sólo este tipo de decisión de los empresarios, es la que le conviene al gobierno para conseguir el óptimo.

Problema de los trabajadores

$$H_T = e^{-\delta} \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\rho (\phi K_G^t + \tau K_E^t) + (1-\rho)(W_G^t + W_E^t) \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \gamma_E^t [(a-\alpha-\tau)K_E^t - W_E^t] + \gamma_G^t [(q-\phi)K_G^t - W_G^t] \quad (8.A)$$

Condiciones de primer orden para las variables de control:

$$\frac{\partial H_T}{\partial W_E^t} = e^{-\delta} (1-\rho) \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1-\rho)(W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} - \gamma_E^t = 0 \quad (9.A)$$

$$\frac{\partial H_T}{\partial W_G^t} = e^{-\delta} (1-\rho) \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1-\rho)(W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} - \gamma_G^t = 0 \quad (10.A)$$

Condiciones de primer orden para las variables de estado:

$$-\gamma_E^t = \frac{\partial H_T}{\partial K_E^t} = e^{-\delta} \rho \tau \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1-\rho)(W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + \gamma_E^t (a-\alpha-\tau) \quad (11.A)$$

$$-\gamma_G^t = \frac{\partial H_T}{\partial K_G^t} = e^{-\delta} \rho \phi \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1-\rho)(W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + (q-\phi)\gamma_G^t \quad (12.A)$$

dada la condición de primer orden (9.A) y (10.A), tenemos que $\gamma_E^t = \gamma_G^t$.

Se toma la derivada con respecto a t , de la ecuación (9.A), luego esta se sustituye en la ecuación (11.A), para eliminar (γ_E^t) .

Derivada de (9.A):

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_E^t = & -\delta e^{-\delta t} (1-\rho) \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1-\rho) (W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} \\ & + \frac{e^{-\delta t} (1-\rho) \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1-\rho) (W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left[\rho \left(\tau \dot{K}_E + \phi \dot{K}_G \right) + (1-\rho) \left(\dot{W}_E + \dot{W}_G \right) \right]}{\sigma} \end{aligned}$$

luego se sustituye en (11.A):

$$\begin{aligned} & -\delta e^{-\delta t} (1-\rho) \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1-\rho) (W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} \\ & + \frac{e^{-\delta t} (1-\rho) \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1-\rho) (W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \left[\rho \left(\tau \dot{K}_E + \phi \dot{K}_G \right) + (1-\rho) \left(\dot{W}_E + \dot{W}_G \right) \right]}{\sigma} = \\ & = -e^{-\delta t} \rho \tau \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1-\rho) (W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + (a - \alpha - \tau) e^{-\delta t} (1-\rho) \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1-\rho) (W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} \end{aligned}$$

se llega a la ecuación diferencial de la forma:

$$\left[\rho \left(\tau K_E^t + \phi K_G^t \right) + (1 - \rho)(W_E^t + W_G^t) \right] = \left[\frac{(a - \alpha)(1 - \rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1 - \rho)} \right] \sigma \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1 - \rho)(W_E^t + W_G^t) \right] \quad (13.A)$$

Problema de los empresarios:

$$H_E = e^{-\delta t} \frac{\sigma}{\sigma - 1} [C_t]^{\frac{\sigma - 1}{\sigma}} + \psi_D^t I_t + \psi_{EX}^t [rF_E^t + (a - \beta - \tau)K_E^t - I_t - C_t] + \varepsilon_t' [\theta' K_E^t - I_t] + \varepsilon_t [I_t - \theta K_E^t] \quad (14.A)$$

Se requiere que $\varepsilon' = \varepsilon = 0$, para la solución interior

Condiciones de primer orden para las variables de control:

$$\frac{\partial H_E}{\partial C_t} = e^{-\delta t} C_t^{\frac{-1}{\sigma}} - \psi_{EX}^t = 0 \quad (15.A)$$

$$\frac{\partial H_E}{\partial I_t} = \psi_D^t - \psi_{EX}^t = 0 \quad (16.A)$$

Condiciones de primer orden para las variables de estado:

$$-\psi_D^t = \frac{\partial H_E}{\partial K_E^t} = (a - \beta - \tau)\psi_{EX}^t \quad (17.A)$$

$$-\psi_{EX}^t = \frac{\partial H_E}{\partial F_E^t} = r\psi_{EX}^t \quad (18.A)$$

si definimos $\psi_{EX}^{1,t} = \psi_{EX}^t e^{\delta t}$ y $\psi_D^{1,t} = \psi_D^t e^{st}$, y usando también (18.A) y (17.A) se obtiene para cada una lo siguiente:

Nota:

$$\begin{aligned} \psi_D^{1,t} &= \psi_D^t e^{\delta t} \\ \psi_D^{1,t} &= \delta \psi_D^t e^{\delta t} + e^{\delta t} \psi_D^t \\ -\psi_D^t &= \frac{\delta \psi_D^t e^{\delta t}}{e^{\delta t}} - \frac{\psi_D^{1,t}}{e^{\delta t}} \\ -\psi_D^t &= \delta \psi_D^t - \psi_D^{1,t} e^{-\delta t} \\ e^{\delta t} \left(\delta \psi_D^t - \psi_D^{1,t} e^{-\delta t} \right) &= \left(\psi_{EX}^t (a - \beta - \tau) \right) e^{\delta t} \\ \delta \psi_D^t e^{\delta t} - \psi_D^{1,t} &= e^{\delta t} \psi_{EX}^t (a - \beta - \tau) \\ \delta \psi_D^{1,t} - \psi_D^{1,t} &= \psi_{EX}^{1,t} (a - \beta - \tau) \\ -\psi_D^{1,t} &= \psi_{EX}^{1,t} (a - \beta - \tau) - \psi_D^{1,t} \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{EX}^{1,t} &= \delta \psi_{EX}^t e^{\delta t} + \psi_{EX}^t e^{\delta t} \\ -\psi_{EX}^t &= \frac{\delta \psi_{EX}^t e^{\delta t}}{e^{\delta t}} - \frac{\psi_{EX}^{1,t}}{e^{\delta t}} \\ -\psi_{EX}^t &= \delta \psi_{EX}^t - \psi_{EX}^{1,t} e^{-\delta t} \\ e^{\delta t} \left(\delta \psi_{EX}^t - \psi_{EX}^{1,t} e^{-\delta t} \right) &= \left(\psi_{EX}^t (r) \right) e^{\delta t} \\ -\psi_{EX}^{1,t} &= e^{\delta t} \psi_{EX}^t (r) - \delta \psi_{EX}^t e^{\delta t} \\ -\psi_{EX}^{1,t} &= \psi_{EX}^{1,t} (r - \delta) \\ \psi_{EX}^{1,t} &= \psi_{EX}^{1,t} (\delta - r) \end{aligned}$$

$$-\psi_D^{1,t} = \psi_{Ex}^{1,t}(a - \beta - \tau) - \psi_D^{1,t} \delta \quad (19.A)$$

$$\psi_{Ex}^{1,t} = \psi_{Ex}^{1,t}(\delta - r) \quad (20.A)$$

ahora se busca la derivada de (15.A) respecto al tiempo.

Derivada de (15.A)

$$\dot{\psi}_{Ex}^t = -\delta e^{-\delta t} [C_t]_\sigma^{-1} + \frac{e^{-\delta t}}{\sigma} [C_t]_\sigma^{-1-\sigma} [\dot{C}_t]$$

se usa este resultado con (15.A) y (20.A), y se obtiene:

$$\dot{C}_t = \sigma C_t (r - \delta) \quad (21.A)$$

ahora de (16.A) y (19.A), obtenemos la próxima condición:

$$\text{Como: } \psi_{Ex}^t = \psi_D^t \text{ implica que } \psi_{Ex}^{1,t} = \psi_D^{1,t} \Rightarrow \psi_{Ex}^{1,t} = \psi_D^{1,t}$$

$$-\psi_D^{1,t} = \psi_{Ex}^{1,t}(a - \beta - \tau) - \psi_D^{1,t} \delta$$

$$-\psi_{Ex}^{1,t} = \psi_{Ex}^{1,t}(a - \beta - \tau) - \psi_{Ex}^{1,t} \delta$$

por tanto:

$$\psi_{Ex}^{1,t} = \psi_{Ex}^{1,t}(\beta - \alpha + \tau + \delta) \quad (22.A)$$

si comparamos (16.A) y (20.A), y sustituimos una dentro de la otra, nos queda:

$$\begin{aligned} \psi_{Ex}^{1,t}(\delta - r) &= \psi_{Ex}^{1,t}(\beta - \alpha + \tau + \delta) \\ r &= \alpha - \tau - \beta \end{aligned} \quad (23.A)$$

Ahora se deben hallar los valores óptimos de $\beta, \alpha, \tau, \varphi, :$

Las ecuaciones (7.A) y (23.A) definen los parámetros de las reglas de decisión en función de los parámetros exógenos; para hallar las dos ecuaciones que nos faltan usaremos a las ecuaciones (6.A), (13.A), las reglas de decisión dadas por (V.10), y las restricciones (V.4) y (V.5), así las condiciones de optimización para el gobierno y los trabajadores son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
& \left([((\eta\tau) + (1-\eta))(a - \beta + \alpha - \tau)] - \left\{ \sigma \left[\frac{1-\eta}{\eta} + a - \beta - \alpha - \delta \right] (\eta\tau + (1-\eta)) \right\} \right) K_E^t = \\
& \left(- [((\eta\varphi) + (1-\eta))(q - \beta - \varphi)] + (\eta\varphi) + (1-\eta)(q - \beta - \varphi) \left\{ \sigma \left[\frac{1-\eta}{\eta} + a - \beta - \alpha - \delta \right] (\eta\varphi + (1-\eta)) \right\} \right) K_G^t
\end{aligned} \tag{24.A}$$

$$\begin{aligned}
& \left([((\rho\tau) + (1-\rho)\beta)(a - \beta + \alpha - \tau)] - \left\{ \sigma \left[\frac{(a - \alpha)(1-\rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1-\rho)} \right] (\rho\tau + (1-\rho)\beta) \right\} \right) K_E^t = \\
& \left(- [((\rho\varphi) + (1-\rho)\beta)(q - \beta - \varphi)] + \left\{ \sigma \left[\frac{(a - \alpha)(1-\rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1-\rho)} \right] (\rho\varphi + (1-\rho)\beta) \right\} \right) K_G^t
\end{aligned} \tag{25.A}$$

Al igualar los coeficientes de cada K, es decir, K_G^t y K_E^t , en estas ecuaciones, se obtiene, para obtener los siguientes resultados:

$$\left([(\eta\tau + (1-\eta))(a - \beta - \alpha - \tau)] - \left\{ \sigma \left[\frac{1-\eta}{\eta} + a - \beta - \alpha - \delta \right] \eta\tau + (1-\eta) \right\} \right) =$$

$$\left([(\rho\tau + (1-\rho)\beta)(a - \beta - \alpha - \tau)] - \left\{ \sigma \left[\frac{(a-\alpha)(1-\rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1-\rho)} \right] \rho\tau + (1-\rho)\beta \right\} \right) \quad (26.A)$$

$$\left(-[(\eta\phi + (1-\eta))(q - \beta - \phi)] + \left\{ \sigma \left[\frac{1-\eta}{\eta} + a - \beta - \alpha - \delta \right] \eta\phi + (1-\eta) \right\} \right) =$$

$$\left(-[(\rho\phi + (1-\rho)\beta))(q - \beta - \phi)] + \left\{ \sigma \left[\frac{(a-\alpha)(1-\rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1-\rho)} \right] \rho\phi + (1-\rho)\beta \right\} \right) \quad (27.A)$$

Ahora se trabajará con las condiciones de transversalidad:

Como se sabe el horizonte de planeación del juego tiende a infinito (∞), se utilizarán las condiciones de transversalidad de horizonte infinito, dada por la ecuación (II.41).

1) Trabajadores :

Para trabajar la condición de transversalidad del gobierno, se utiliza la ecuación (V.16) y (II.A).

Por la restricción (V.4):

$$K_E^t = Y_t - W_E^t - G_t - T_E^t = I_t$$

que es igual a:

$$K_E^t = aK_E^t - \beta K_E^t - \alpha K_E^t - \tau K_E^t$$

$$K_E^t = (a - \beta - \alpha - \tau) K_E^t$$

sustituyendo de acuerdo a la condiciones (V.11) y (V.12):

$$K_E^t = (r - a + q) K_E^{t-1} \quad (V.15)$$

obtenemos la solución de la ecuación diferencial para la acumulación de capital de los empresarios en el país:

$$K_E^t = K_0^t e^{(r-a+q)t} \quad (V.16)$$

al tener la ecuación de acumulación de capital de los empresarios en el país, podemos establecer la condición de transversalidad:

por las condiciones (9.A) y (10.A), se sabe que $\gamma_E^t = \gamma_G^t \Rightarrow \gamma_E = \gamma_G$, y esta es la razón por la cual se utiliza (12.A) :

$$-\gamma_G^t = \frac{\partial H_T}{\partial K_G^t} = e^{-\delta} \rho \phi \left[\rho (\tau K_E^t + \phi K_G^t) + (1 - \rho) (W_E^t + W_G^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + (q - \phi) \gamma_G^t \quad (12.A)$$

lo que se debe realizar ahora es replantear la ecuación (12.A), con todas las variables en función de K_E^t , que ya presenta la solución de su ecuación diferencial, entonces tenemos:

$$-\gamma_E^t = \frac{\partial H_T}{\partial K_G^t} = e^{-\delta} \rho \phi \left[\rho (\tau K_E^t + \phi M K_E^t) + (1 - \rho) (\beta K_E^t + \beta M K_E^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + (q - \phi) \gamma_E^t$$

$$-\gamma_E^t = \frac{\partial H_T}{\partial K_G^t} = e^{-\delta} \rho \phi \left[(\rho \tau K_E^t + \rho \phi M K_E^t) + (1 - \rho) (\beta K_E^t + \beta M K_E^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + (q - \phi) \gamma_E^t$$

y se obtiene:

$$\gamma_E^t = \gamma_E^0 e^{(q-\phi)t} + \frac{e^{-\delta} (\rho \phi) K_E^0 e^{(r-a+q)t} \left[(\beta(1-\rho+M+\rho M)) + \rho(\phi M + \tau) \right]^{\frac{1}{\sigma}}}{q - \phi}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_E^t \gamma_E^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\gamma_E^0 e^{(q-\phi)t} + \frac{e^{-\delta} (\rho \phi) K_E^0 \left[(\beta \rho e^{(r-a+q)t} (M-1) + (\beta e^{(r-a+q)t} (1+M) + \rho M \phi + e^{(r-a+q)t} \rho \tau) \right]^{\frac{1}{\sigma}}}{q - \phi} \right) (K_E^0 e^{(r-a+q)t}) = 0$$

considerando toda la base constante, porque ningún término depende del tiempo, para que el limite se acerque a cero, a medida de que t tiende a infinito, se debe cumplir que:

$\lim_{t \rightarrow \infty} K_E^t \gamma_E^t = 0 \Rightarrow (r - a - q) - \delta < 0$ y además $q < \varphi$, donde se sabe que φ , es uno de los parámetros a encontrar ,pero

cumple la condición de que siempre es positivo, así que , también se debe cumplir que $r - a - \delta < q < \varphi$, porque $q - \varphi$, siempre va a ser negativo, porque es mayor que q en cualquier momento del tiempo.

Ahora para la variable de estado K_G^t , la condición de transversalidad toma la forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_G^t \gamma_G^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\gamma_G^0 e^{(q-\varphi)t} + \frac{e^{-\delta t} (\rho \varphi) K_E^0 \left[(\beta \rho e^{(r-a+q)t} (M-1) + (\beta e^{(r-a+q)t} (1+M) + \rho M \varphi + e^{(r-a+q)t} \rho \tau)^{\frac{1}{\sigma}} \right]}{q - \varphi} \right) M (K_E^0 e^{(r-a+q)t}) = 0$$

de nuevo, considerando toda la base constante, porque ningún término depende del tiempo, para que el limite se acerque a cero, a medida de que t tiende a infinito, se debe cumplir que:

$\lim_{t \rightarrow \infty} K_E^t \gamma_E^t = 0 \Rightarrow (r - a - q) - \delta < 0$ y además $q < \varphi$, donde se sabe que φ , es uno de los parámetros a encontrar ,pero

cumple la condición de que siempre es positivo, así que , también se debe cumplir que $r - a - \delta < q < \varphi$, porque $q - \varphi$, siempre va a ser negativo, porque es mayor que q en cualquier momento del tiempo.

2) Gobierno:

Para la condición de transversalidad del gobierno se utiliza la ecuación (V.16), desarrollada anteriormente, de la acumulación de capital de las empresas en el país, y la ecuación (3.A).

$$\frac{\partial H_G}{\partial T_E^t} = e^{-\delta t} \eta \left[(1-\eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{-1} - \lambda_E^t = 0 \quad (3.A)$$

además se necesitará el término M que se obtiene de (24.A) y (25.A), , esto de buscar M se realiza para simplificar las ecuaciones, El caso es dividir los dos lados de la ecuación (25.A) y tenemos:

$$M = \frac{\left([\rho\tau + (1-\rho)\beta](a - \beta + \alpha - \tau) - \left\{ \sigma \left[\frac{(a-\alpha)(1-\rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1-\rho)} \right] (\rho\tau + (1-\rho)\beta) \right\} \right)}{\left([(\rho\phi) + (1-\rho)\beta](q - \beta - \phi) + \left\{ \sigma \left[\frac{(a-\alpha)(1-\rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1-\rho)} \right] (\rho\phi + (1-\rho)\beta) \right\} \right)}$$

Donde: $M * K_E^t = K_G^t$

así la condición de transversalidad toma la forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_E^t \lambda_E^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta [\eta (T_E^t + T_{PDVSA}^t) (1 - \eta) (M + 1)]^{\frac{-1}{\sigma}} [K_E^0]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} e^{\left[\frac{\sigma-1}{\sigma} (r-a-q) - \delta \right] t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_E^t \lambda_E^t = 0 \Rightarrow \frac{\sigma-1}{\sigma} (r-a+q) - \delta < 0 \quad (29.A)$$

ahora para el caso de la variable de estado K_G^t , su condición de transversalidad es:

Como se sabe que $\lambda_E^t = \lambda_G^t$, por (2.A) y (3.A) se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_G^t \lambda_G^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta [\eta (T_E^t + T_{PDVSA}^t) (1 - \eta) (M + 1)]^{\frac{-1}{\sigma}} M [K_E^0]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} e^{\left[\frac{\sigma-1}{\sigma} (r-a-q) - \delta \right] t} = 0$$

por tanto, se cumple que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_G^t \lambda_G^t = 0 \Rightarrow \frac{\sigma-1}{\sigma} (r-a+q) - \delta < 0 \quad (30.A)$$

3) Empresarios:

Para obtener la condición de transversalidad para los empresarios se utiliza la ecuación de acumulación de capital de los empresarios en el país, la condición de primer orden (16.A), (20.A) y (V.16):

$$\frac{\partial H_E}{\partial C_t} = \psi_D^t - \psi_{EX}^t = 0 \quad (16.A) \quad \psi_{EX}^{1,t} = \psi_{EX}^{1,t}(\delta - r) \quad (20.A) \quad K_E^t = K_0^t e^{(r-a+q)t} \quad (V.16)$$

antes de aplicar la condición de transversalidad debe obtener el resultado de la ecuación diferencial (20.A), ya

$$\text{que } \psi_D^t = \psi_{EX}^t \Rightarrow \psi_D^{1,t} = \psi_{EX}^{1,t}$$

$$\psi_{EX}^{1,t} = \psi_{EX}^{1,0} e^{(\delta-r)t} \Rightarrow \psi_D^{1,t} = \psi_D^{1,0} e^{(\delta-r)t} \Rightarrow \psi_D^t = \psi_D^{1,0} e^{(\delta-r)t} e^{-\delta t} \Rightarrow \psi_D^t = \psi_D^{1,0} e^{-rt}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_E^t \psi_D^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_D^{1,0} K_E^0 e^{(-r+r+q-a)t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_E^t \psi_D^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_D^{1,0} K_E^0 e^{(q-a)t} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K_E^t \psi_D^t = 0 \Rightarrow q - a < 0 \quad (31.A)$$

ahora la condición de transversalidad de los empresarios, para la acumulación de capital externa, usaremos las condiciones (V.17), (V.19) y (20.A).

$$\zeta = r(1 - \sigma) + \sigma\delta \quad (V.17) \quad F_t = \{e^{\sigma(r-\delta)t} - e^{(r-a+q)t}\} K_E^0 \quad (V.19) \quad \psi_{Ex}^{1,t} = \psi_{Ex}^{1,t}(\delta - r) \quad (20.A)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_t \psi_{Ex}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{Ex}^{1,0} K_E^0 [e^{(\delta-r)t} (e^{\sigma(r-\delta)t} - e^{(r-a+q)t})] = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_t \psi_{Ex}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_{Ex}^{1,0} K_E^0 [e^{(r(\sigma-1)-\sigma\delta)t} (-e^{(-a+q)t})]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_t \psi_{Ex}^t = 0 \Rightarrow q - a < 0 \quad (31.A)$$

Restricción de Legitimidad del gobierno:

Se utilizan las ecuaciones (V.16), (V.19) y (V.21), se sustituyen en las funciones de utilidad de los empresarios y los trabajadores y nos queda:

$$K_E^t = K_0^t e^{(r-a+q)t} \quad (V.16)$$

$$F_t = \{e^{\sigma(r-\delta)t} - e^{(r-a+q)t}\} K_E^0 \quad (V.19)$$

$$K_{Venezuela}^t = K_E^t + K_G^t = (1+M)K_0^t e^{(r-a+q)t} \quad (V.21)$$

$$L_t = \frac{U_C^t}{U_T^t} = \frac{e^{-\delta t} \left[\frac{\sigma}{\sigma-1} \right] \left[(r(1-\sigma) + \sigma\delta) (K_E^0 e^{(r-a+q)t}) + (e^{\sigma(r-\delta)t} - e^{(r-a+q)t}) K_E^0 \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}{e^{-\delta t} \left[\frac{\sigma}{\sigma-1} \right] \left[(\rho[\phi MK_E^0 e^{(r-a+q)t} + \tau K_E^0 e^{(r-a+q)t}] + (1-\rho)\beta(MK_E^0 e^{(r-a+q)t} + K_E^0 e^{(r-a+q)t})) \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}}$$

$$L_t = \frac{e^{(\sigma(r-\delta) - r + a - q)t} (r(1-\sigma) + \sigma\delta)}{[(\rho\phi M + \tau) + (1-\rho)(1+M)]}$$

$$L' = \frac{(r(1-\sigma) + \sigma\delta)}{[(\rho\phi M + \tau) + (1-\rho)(1+M)]}$$

$$L_t = L'e^{(\sigma(r-\delta)-r+a-q)t} \quad (A.22)$$

Apéndice de la ampliación

Se toma la restricción de legitimidad: $\frac{U_E^t}{U_T^t} \leq L$

Vamos a sustituir la utilidad de los empresarios y de los trabajadores:

$$L[\rho(\phi K_G^t + \tau K_E^t) + (1 - \rho)(\beta K_G^t + \beta K_E^t)] - \zeta(K_E^t + F_t) \quad (1.A')$$

Ahora como los problemas de los trabajadores y de los empresarios no se modifican, podemos utilizar las ecuaciones:

$$r = a - \tau - \beta \quad (V.12) \quad \zeta = r(1 - \sigma) + \sigma\delta \quad (V.17) \quad K_{Venezuela}^t = K_E^t + K_G^t = \{1 + M\}K_E^t \quad (V.20)$$

Al no estar alterado el problema del trabajador, la ecuación (25.A), no se ha alterado:

$$\begin{aligned} & \left[[((\rho\tau) + (1 - \rho)\beta)(a - \beta + \alpha - \tau)] - \left\{ \sigma \left[\frac{(a - \alpha)(1 - \rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1 - \rho)} \right] (\rho\tau + (1 - \rho)\beta) \right\} \right] K_E^t = \\ & \left[[-((\rho\phi) + (1 - \rho)\beta(q - \beta - \phi))] + \left\{ \sigma \left[\frac{(a - \alpha)(1 - \rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1 - \rho)} \right] (\rho\phi + (1 - \rho)\beta) \right\} \right] K_G^t \end{aligned} \quad (25.A)$$

$$L[\rho(\phi MK_E^t + \tau K_E^t) + (1 - \rho)\beta((1 + M)K_E^t)] - \varsigma(K_E^t + F_t) = 0$$

$$L[\rho(\phi MK_E^t + \tau K_E^t) + (1 - \rho)\beta((1 + M)K_E^t)] - \varsigma K_E^t - \varsigma F_t = 0$$

$$L[(\rho\phi M + \tau)K_E^t + (1 - \rho)\beta((1 + M)K_E^t)] - \varsigma K_E^t = \varsigma F_t$$

$$L[(\rho\phi M + \tau) + (1 - \rho)\beta(1 + M)]K_E^t - \varsigma K_E^t = \varsigma F_t$$

$$\frac{L[(\rho\phi M + \tau) + (1 - \rho)\beta(1 + M) - \varsigma]}{\varsigma} K_E^t = F_t$$

$$\frac{L[(\rho\phi M + \tau) + (1 - \rho)\beta(1 + M) - \varsigma]}{\varsigma} = S$$

$$F_t = SK_E^t$$

$$\frac{L[(\rho\phi M + \tau) + (1 - \rho)\beta(1 + M) - \varsigma]}{\varsigma} = S \quad (2.A')$$

La razón por la que el valor M , se está utilizando en esta solución, aunque es de la solución original, es porque el problema de los trabajadores como se dijo anteriormente, no se ha modificado.

ahora utilizamos la restricción $\dot{F}_t = rF_t + G_t - C_t$ (V.8), la definición de consumo $C_t = \varsigma(K_E^t + F_t)$ y de (2.A'), se obtiene una nueva ecuación diferencial:

$$S \dot{K}_E^t = rSK_E^t + \alpha K_E^t - \varsigma K_E^t - \varsigma F_t$$

$$S \dot{K}_E^t = (rL + \alpha - \varsigma - \varsigma L) K_E^t$$

$$\dot{K}_E^t = \frac{(rL + \alpha - \varsigma - \varsigma L)}{S} K_E^t \quad (3.A')$$

además como el problema de los empresarios, tampoco se modificó, la ecuación (23.A), también se puede usar para esta solución, si se combina esta con la ecuación $\dot{K}_E^t = (\alpha - \beta - \alpha - \tau) K_E^t$ (V.4), se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{K}_E^t = (r - \alpha) K_E^t \quad (4.A')$$

Para hacer compatibles las ecuaciones (3.A') y (4.A') se debe cumplir que:

$$\alpha = \varsigma \quad (5.A')$$

sabiendo que $\varsigma = r(1 - \sigma) + \sigma\delta$, condición dada por la ecuación (V.17), la nueva expresión de acumulación externa de capital, se obtiene a través de una sustitución de (V.24) en la ecuación diferencial (V.8):

$$\dot{F}_t = \sigma(r - \delta)F_t \quad (6.A')$$

donde la solución es:

$$F_t = F_{t_0} e^{\sigma(r-\delta)(t-t_0)} \quad (7.A')$$

Donde F_{t_0} , es el acervo de capital que tienen los empresarios en el extranjero, en el momento en que se alcanza la restricción de legitimidad.

Además para hallar la acumulación de capital de los empresarios en el país, usamos la restricción (V.4) y las condiciones de optimización (V.12) y (V.24)

$$K_E^t = K_0^t e^{\sigma(r-\delta)(t-t_0)} \quad (8.A')$$

ahora se puede establecer el nuevo Hamiltoniano del gobierno:

$$H_G^{SE} = H_G + p_t L[\rho(\phi K_G^t + \tau K_E^t) + (1 - \rho)(\beta K_G^t + \beta K_E^t)] - \varsigma(K_E^t + F_t)$$

$$H_G^{S,E} = e^{-\tilde{\alpha}} \frac{\sigma}{\sigma-1} \left[\eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) + (1-\eta)(K_G^t + K_E^t) \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \lambda_E^t [(a-\alpha-\beta)K_E^t - T_E^t] + \lambda_G^t [(q-\beta)K_G^t - T_{PDVSA}^t] + p_t [H[\rho(T_E^t + T_{PDVSA}^t) + (1-\rho)\beta(K_G^t + K_E^t)] - \varsigma(1+L)K_E^t]$$

$$H_G^{S,E} = H_G + p_t [L[\rho(T_E^t + T_{PDVSA}^t) + (1-\rho)\beta(K_G^t + K_E^t)] - \varsigma(1+L)K_E^t] \quad (9.A')$$

En este caso, además de la condición de esquina dada por (V.23), también varían las condiciones de primer orden (2.A), (4.A), y la (5.A) en el problema del gobierno, que se transforman en:

$$\frac{\partial H_G^{SE}}{\partial T_E^t} = e^{-\tilde{\alpha}} \eta \left[(1-\eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} - \lambda_E^t + L(\rho)p_t = 0 \quad (10.A')$$

$$-\lambda_E^t = \frac{\partial H_G^{SE}}{\partial K_E^t} = e^{-\tilde{\alpha}} (1-\eta) \left[(1-\eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + \lambda_E^t (a-\alpha-\beta) + p_t [L(1-\rho)\beta - \varsigma(1+S)] \quad (11.A')$$

$$-\lambda_G^t = \frac{\partial H_G^{SE}}{\partial K_G^t} = e^{-\tilde{\alpha}} (1-\eta) \left[(1-\eta)(K_E^t + K_G^t) + \eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) \right]^{\frac{1}{\sigma}} + \lambda_G^t (q-\beta) + p_t L(1-\rho)\beta \quad (12.A')$$

Aquí se cumple también la condición de que $\lambda_E^t = \lambda_G^t$ dada por (3.A) y (4.A), podemos llegar a una nueva expresión, dada por el mismo procedimiento que se uso para obtener (6.A):

$$[\eta(\dot{T}_E^t + \dot{T}_{PDVSA}^t) + (1 - \eta)(\dot{K}_E^t + \dot{K}_G^t)] = \left[\left(\frac{1 - \eta}{\eta} \right) E + \alpha - \beta - \alpha - \delta + J \right] \sigma(\eta(T_E^t + T_{PDVSA}^t) + (1 - \eta)(K_G^t + K_E^t)) \quad (13.A')$$

Donde tenemos que:

$$E = 1 - \frac{\alpha - \alpha - q}{\varsigma(1 + S)} L\rho$$

$$J = \frac{L(1 - \rho)\beta - \varsigma(1 + S)(\alpha - \alpha - q)}{\varsigma(1 + S)}$$

En este caso los valores óptimos de $\alpha, \beta, \tau, \varphi$, se obtienen de las ecuaciones (23.A), combinación de las reglas de decisión con (13.A'), (25.A), las ecuaciones de transición (4.A'), (5.A').

Las condiciones para obtener los parámetros son:

$$\alpha = \varsigma \quad (5.A')$$

$$r = a - \tau - \beta \quad (23.A)$$

$$\left(\left[\rho\tau + (1-\rho)\beta \right] (a - \beta + \alpha - \tau) - \left\{ \sigma \left[\frac{(a-\alpha)(1-\rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1-\rho)} \right] (\rho\tau + (1-\rho)\beta) \right\} \right) =$$

$$\left(- \left[(\eta\tau) + (1-\eta) \right] (r - \alpha) \right) + \left\{ \sigma \left[\frac{1-\eta}{\eta} E + a - \beta - \alpha - \delta + \tau \right] (\eta\tau + (1-\eta)) \right\} \quad (14.A')$$

$$\left(\left[((\eta\varphi) + (1-\rho))(q - \beta - \varphi) \right] - \left\{ \sigma \left[\frac{1-\eta}{\eta} E + a - \beta - \alpha - \delta + \tau \right] (\eta\varphi + (1-\eta)) \right\} \right) =$$

$$\left(- \left[((\rho\varphi) + (1-\rho)\beta)(q - \beta - \varphi) \right] + \left\{ \sigma \left[\frac{(a-\alpha)(1-\rho) + 2\tau\rho - \tau + \delta}{(1-\rho)} \right] (\rho\varphi + (1-\rho)\beta) \right\} \right) \quad (15.A')$$

estas cuatro ecuaciones, representan un sistema de ecuaciones no lineales, que nos dan como resultado infinitas soluciones, (como en el caso de la solución interior), donde cada una es un equilibrio de Nash.

BIBLIOGRAFÍA

- **BAPTISTA, Asdrúbal y Bernard MOMER.** El petróleo en el pensamiento económico Venezolano. Ediciones IESA.1992. Caracas - Venezuela.
- **BASAR, Tamer y Geert Jan Olsder.** Dynamic Noncooperative Game Theory. Society for Industrial and Applied Mathematics. 1982. Philadelphia- United Status.
- **CASTAÑEDA, Gonzalo.** " El sistema económico mexicano "Un planteamiento de Teoría de Juegos. Trimestre Económico # 235.
- **CHIANG, Alpha.** Elements of dynamic optimization. Mc Graw Hill. 1992. United States
- **ESPAÑA, Luis Pedro.** Venezuela y su Petróleo. El destino de la Renta. Centro Gumilla. 1988. Caracas- Venezuela.
- **GARCIA, Gustavo.** Ingresos fiscales y tributación no petrolera en Venezuela. Temas de Coyuntura # 33. 1996.
- **HUANG, Cliff y Philip Crooke.** Mathematics and Mathematica for Economists. Blackwell Publishers.1997.Boston. United Sates.
- **INTRILIGATOR, Michael.** Mathematical optimization and economic theory. Prentice Hall.INC. 1971. United States
- **KREPS, David.** Teoría de Juegos y modelación económica. Fondo de cultura económica. 1990. México.

- **MANZANO, Osmel.** Consideraciones para una visión de la distribución petrolera venezolana. Temas de Coyuntura #38. Diciembre 1998.
- **PETIT, Maria Luisa.** Control Theory and dynamic games in economic policy analysis. Cambridge University Press .1990. Australia.
- **RODRIGUEZ, Francisco.** El colapso económico venezolano: Causas e implicaciones. Temas de coyuntura # 38. Diciembre de 1998.
- **Shone, Ronald.** Economic Dynamics. Cambridge University Press. 1997. Nueva York. United States.
- **TIROLE, Jean y FUDENBERG, Drew.** Game Theory. The MIT Press. 1996 United States.
- **TURNOVSKY, Stephen.** Methods of macroeconomic dynamics. The MIT Press. 1995. United States.