UNIVERSIDAD CATOLICA ANDRES BELLO
Urb. Montalbán - La Vega - Apartado 29068
Teléfono: 407 -41-50 Fax: 442 -38-97
Caracas, 1021 - Venezuela

Facultad de Ingeniería

TRAB
ZZD2001
L8

Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

ASPECTOS TEÓRICOS

Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

Trabajo de Ascenso presentado ante la
Ilustre Universidad Católica Andrés Bello,
por la Lic. Liliana Lupo Nieto para optar por la
categoría de Profesor Agregado.

Febrero, 2001.

A ti papá, que estando tan
lejos te siento tan cerca...

A ustedes, mis amigos del Departamento,
por los momentos felices y las palabras de apoyo...

A ti mamá, por ese cariño incondicional...

A ti Gonzalo, por tu amor...

INTRODUCCIÓN

Una forma de localizar un punto en el plano de coordenadas es especificando sus coordenadas rectangulares (x,y); es decir, dando su abscisa **x** y su ordenada **y**, relativos a los ejes perpendiculares dados. Las coordenadas rectangulares son sólo una de las formas de descripción de puntos en el plano. En algunos problemas es más conveniente localizar un punto mediante sus coordenadas polares.

El Sistema de Coordenadas Polares fue estudiado por primera vez por Newton (finales del siglo XVIII) y consiste en localizar puntos del plano por referencia a su distancia a un punto fijo y la abertura angular con respecto a una semi-recta fija.

La motivación inmediata del presente escrito ha sido la redacción del Trabajo de Ascenso. La inspiración de dicho trabajo corresponde a una inquietud, producto de una necesidad que he notado en la bibliografía existente al alcance de profesores y estudiantes de la Facultad de Ingeniería, específicamente en los alumnos cursantes de la asignatura de Cálculo II del segundo semestre.

El tema de Coordenadas Polares, incluido en el programa oficial de Cálculo II, aparece en la mayoría de los libros de texto existentes actualmente en el mercado, sin embargo, el tratamiento del mismo es muy superficial y no se profundizan los aspectos teóricos fundamentales.

Me siento muy satisfecha al poder agregar una pequeña contribución para subsanar de alguna forma esta situación, en especial bajo el enfoque que he tratado de darle a este trabajo como guía de estudio para los objetivos teóricos del Sistema de Coordenadas Polares. Para tal fin, el texto presenta cuatro capítulos:

Introducción al Sistema de Coordenadas Polares

Graficación de curvas en el Sistema de Coordenadas Polares

Curvas características en el Sistema de Coordenadas Polares

Tangentes a una curva dada en el Sistema de Coordenadas Polares

El método de exposición incluye para cada capítulo una presentación teórico-conceptual seguida de ejemplos prácticos.

Es importante señalar que el trabajo no pretende agotar los temas tratados y es claro que no aborda todos los aspectos relacionados con el Sistema de Coordenadas Polares, pues como ya mencioné su finalidad es tratar los objetivos incluidos en el programa oficial de una asignatura en particular.

El Trabajo está hecho en un lenguaje sencillo, pensando precisamente en aquellos alumnos que se acercan por primera vez a este tema y algunos de los aspectos no tratados podrían merecer una segunda parte en el caso esperado de que se aprecien resultados positivos en la revisión de este escrito.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN AL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

1.1.- ASPECTOS GENERALES.....1

1.2.- DEFINICIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES.....2

1.3.- REPRESENTACIÓN DE UN PUNTO EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES.....3

1.4.- RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y COORDENADAS CARTESIANAS.....5

1.5.- DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.....8

1.6.- ECUACIÓN DE UNA CURVA EN COORDENADAS POLARES.....10

1.7.- VERIFICACIÓN DE QUE UN PUNTO EN POLARES SATISFACE UNA ECUACIÓN.....12

CAPÍTULO II

GRAFICACIÓN DE CURVAS EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

2.1.- SIMETRÍAS DE UNA CURVA EN POLARES.....15

2.2.- RECTAS EN COORDENADAS POLARES.....18

2.3.- CIRCUNFERENCIAS EN COORDENADAS POLARES.....22

2.4.- DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA.....24

2.5. TRAZADO DE GRÁFICAS DIBUJANDO PUNTOS.....25

2.5.1.- TRAZADO DE GRÁFICAS DE CURVAS ASINTÓTICAS 30

CAPÍTULO III

CURVAS CARACTERÍSTICAS EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

3.1.- ASPECTOS GENERALES.....39

3.2.- CURVAS CERRADAS.....40

3.2.1.- CURVAS LIMACONES.....40

3.2.2.- CURVAS LEMNISCATAS.....44

3.2.3.- CURVAS ROSAS.....47

3.2.4.- CURVAS DOBLE HOJA.....49

3.3.- CURVAS ESPIRALES.....51
3.3.1.- CURVAS ESPIRALES LINEALES
O DE ARQUÍMEDES.....51
3.3.2.- CURVAS ESPIRALES LOGARÍTMICAS.....53
3.3.3.- CURVAS ESPIRALES HIPERBÓLICAS.....54
3.4.- CURVAS ASINTÓTICAS.....56
3.4.1.- CURVAS CONCOIDES.....56
3.4.2.- CURVAS CISOIDES.....59
3.4.3.- CURVAS ESTROFOIDES.....60
3.5.- INTERSECCIÓN DE CURVAS EN EL SISTEMA
DE COORDENADAS POLARES.....62

CAPÍTULO IV
TANGENTES A UNA CURVA DADA EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES
4.1.- TANGENTES A UNA CURVA DADA EN EL SISTEMA
DE COORDENADAS POLARES.....67

BIBLIOGRAFÍA.....74

CAPÍTULO I
INTRODUCCIÓN AL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

1.1.- ASPECTOS GENERALES

La finalidad de las coordenadas es fijar la posición de un punto respecto a un marco de referencia dado. Al representar las curvas planas como colecciones de puntos (x,y) en el *Sistema de Coordenadas Rectangulares* (o cartesianas) se establece la distancia dirigida de los ejes coordenados al punto (x,y). Aquí el sistema de referencia es un par de líneas que se intersectan según ángulos rectos.

En las páginas siguientes se introduce el *Sistema de Coordenadas Polares*. Con esta nueva clase de sistema será más sencillo el trabajo en muchos problemas.

Su importancia básica estriba en el cálculo de varias variables (la evaluación de integrales dobles) y en la simplificación de ciertas ecuaciones que aparecen en la Física y la Astronomía (Leyes de Kepler sobre el movimiento planetario).

1.2.- DEFINICIÓN DEL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Un sistema de coordenadas polares viene definido por un punto fijo O, llamado *el polo* y una semi-recta con origen en O, llamada el *eje polar* y que coincide con la parte positiva del eje *x*. Con lo anterior, cualquier punto P del plano queda representado por un par ordenado de la forma $P(r,\theta)$ donde:

θ o Ángulo Polar, es un ángulo orientado, determinado por una semi-recta OB (de origen O y que pasa por P) y el eje polar. Se considera a θ como positivo si el giro es antihorario y negativo si el giro es horario.

r o Distancia Radial, es un número real, tal que $|r|$ es la distancia de P al polo $(|r| = d(P,O))$. r es positiva si se mide sobre el rayo OB y negativa si se mide en el sentido opuesto al rayo OB.

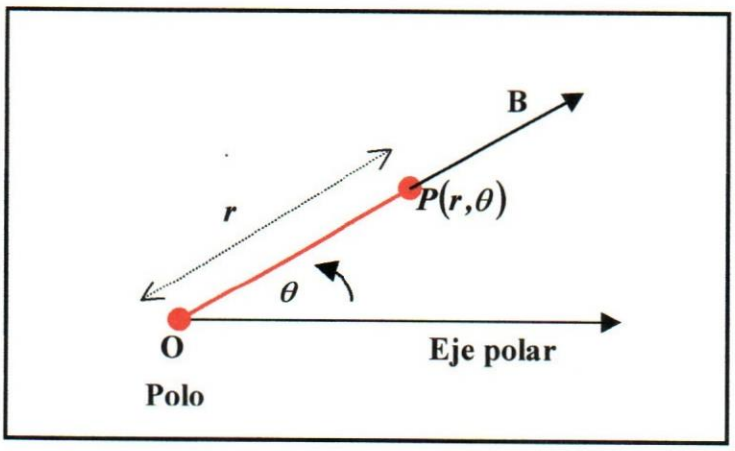

Figura 1

En el *Sistema de Coordenadas Polares,* es conveniente localizar los puntos con respecto a una red de circunferencias concéntricas cortadas por rectas radiales que parten del polo. Lo anterior se ejemplificará en el apartado siguiente.

1.3.- REPRESENTACIÓN DE UN PUNTO EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

A continuación se representan en un sistema de coordenadas polares los puntos $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$, $Q\left(3,\frac{-\pi}{6}\right)$, $R\left(3,\frac{11\pi}{6}\right)$.

El punto $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ pertenece a la intersección de una circunferencia de $r=2$ y un rayo que es el lado en que acaba el ángulo $\theta=\frac{\pi}{3}$. Figura 2-a.

El punto $Q\left(3,\frac{-\pi}{6}\right)$ está en el cuarto cuadrante, a 3 unidades del polo. Al medir ángulos negativos se hace en sentido horario. El punto es la intersección de una circunferencia de $r=3$ y un rayo que es el lado en que acaba el ángulo $\theta=\frac{-\pi}{6}$. Figura 2-b.

El punto $Q\left(3,\frac{-\pi}{6}\right)$ coincide con el punto $R\left(3,\frac{11\pi}{6}\right)$. Figura 2-c.

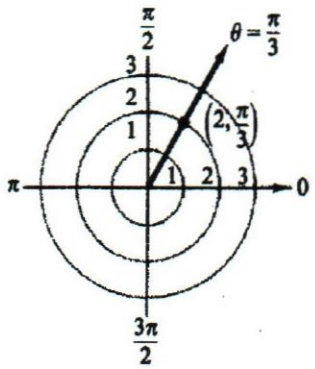

Figura 2a

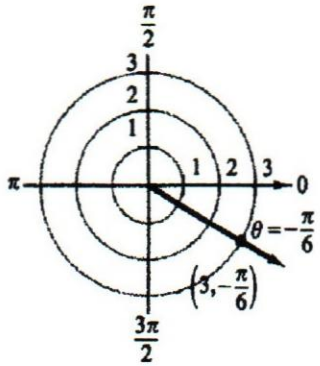

Figura 2b

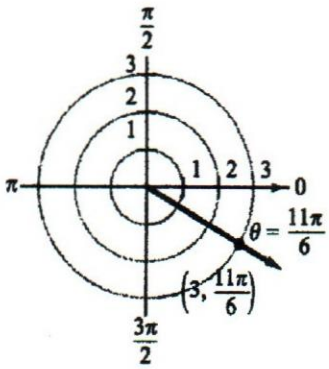

Figura 2c

Se observa que no hay correspondencia biunívoca entre pares de números y puntos (r,θ) en el sistema polar. Por ejemplo, los puntos $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ del ejemplo anterior. En general, (r,θ) y $(-r,\theta+\pi)$ representan el mismo punto. Además hay otros infinitos pares que representan al mimo punto (r,θ) estos son $(r,\theta+2n\pi)$y $(-r,\theta+(2n+1)\pi)$donde n es un número entero cualquiera.

Si los ángulos θ y $\theta+\pi$ están entre 0 y 2π los pares (r,θ) y $(-r,\theta+\pi)$, se llaman representaciones principales del punto.

En el caso de que P sea el polo, la semi-recta OB de la Figura 1, se reduce a un punto, puesto que $r=0$. Debido a que en este caso no hay ningún ángulo polar definido con claridad, se conviene en que puede usarse un ángulo polar arbitrario, así para cualquier θ, $(0,\theta)$ representa el polo.

1.4.- RELACIÓN ENTRE COORDENADAS POLARES Y COORDENADAS CARTESIANAS

Si en la Figura 1 se hace coincidir el eje *x* del sistema rectangular con el eje polar, se tiene la Figura 3.

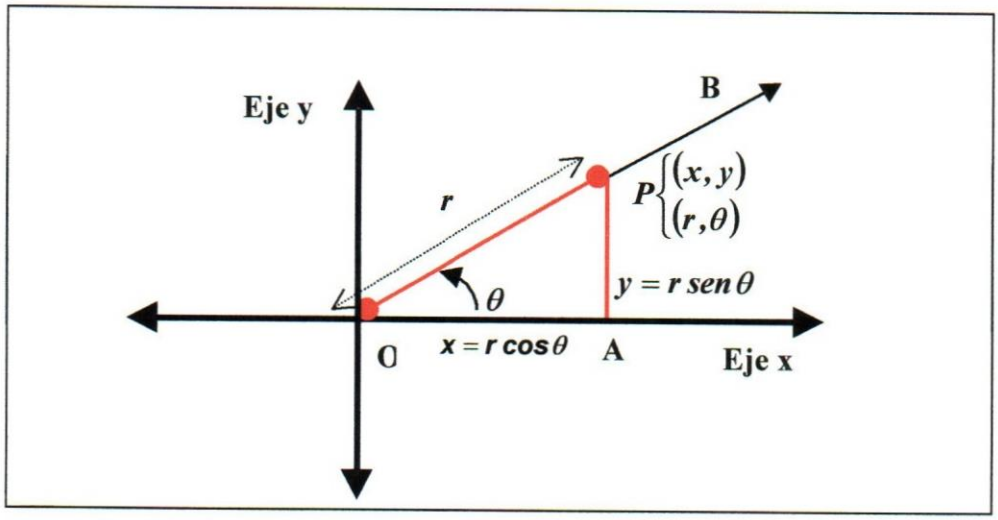

Figura 3

Una vez hecho esto, todo punto P tiene coordenadas polares (r,θ) y coordenadas rectangulares (x,y).

En la figura se puede trazar el triángulo rectángulo OPA de modo que

$OP = r$, es la hipotenusa del triángulo OPA

$OA = x$, es un cateto del triángulo OPA

$PA = y$, es un cateto del triángulo OPA

$\theta = \angle POA$

De lo anterior se tiene que $\begin{cases} x = r\cos\theta & (1.1) \\ y = r\,sen\theta & (1.2) \end{cases}$ y también utilizando el Teorema de Pitágoras $\begin{array}{ll} |r| = \sqrt{x^2 + y^2} & (2.1) \\ \theta = arctag\left(\dfrac{y}{x}\right) + k\pi \quad k \in Z & (2.2) \end{array}$. El valor de θ en el cuadrante correcto se determina por los signos de x y de y.

Demostración:

Si $r = 0$ las fórmulas (1.1) y (1.2) son ciertas, pues el punto (r, θ) es el origen y tanto x como y se anulan:

$0 = 0\cos\theta$, $\quad 0 = 0\,sen\theta$

Si $r > 0$ se utiliza la Figura 3 como referencia. De acuerdo con la figura:

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\quad sen\theta = \dfrac{y}{r}$

y por lo tanto $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\theta \end{cases}$

Si $r < 0$, como $(r, \theta) = (-r, \theta + \pi)$ y $-r > 0$, sabemos por el caso anterior que:

$x = -r\cos(\theta + \pi)$, $\quad y = -r\,sen(\theta + \pi)$

pero $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ y $sen(\theta + \pi) = -sen\theta$

al sustituir se tiene $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\theta \end{cases}$.

Ejemplo 1.

Hallar todas las coordenadas polares posibles del punto Q cuyas coordenadas cartesianas son $\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$.

Utilizando la ecuación (2.1): :

$$|r| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

al tomar $r = 4$

Utilizando las ecuaciones (1.1) y (1.2):

$$-2 = r\cos\theta \qquad\qquad 2\sqrt{3} = r\,sen\theta$$

de lo anterior se tiene:

$$\cos\theta = \frac{-1}{2} \qquad\qquad sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, el ángulo θ está en el segundo cuadrante. Utilizando la ecuación (2.1) se tiene:

$$\theta = arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = arctg\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

En general, $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$

Así se tiene, las coordenadas de Q en polares $\left(4, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right)$.

Si se toma $r = -4$, entonces $\theta = \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$.

Así las coordenadas de Q en polares $\left(-4, \frac{5\pi}{3} + 2n\pi\right)$.

Ejemplo 2.

Hallar las coordenadas cartesianas del punto R cuyas coordenadas polares son $\left(-3, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Utlizando las ecuaciones (1.1) y (1.2) se tiene:

$$x = -3\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -3sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Las coordenadas cartesianas de Q son $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

1.5.- DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS[1]

Sean $P_1(r_1, \theta_1)$ y $P_2(r_2, \theta_2)$ de la Figura 4, dos puntos dados cualesquiera. Se trata de hallar la distancia D entre P_1 y P_2, en donde $D = |P_1P_2|$.

[1] La fórmula que se deducirá también puede obtenerse por transformación a coordenadas polares de la fórmula de distancia entre dos puntos utilizada en coordenadas rectangulares. $|D| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

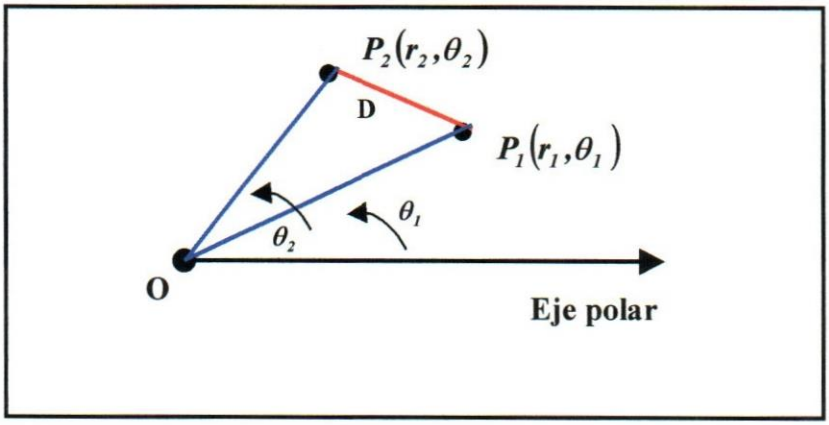

Figura 4

Se trazan los radios de P_1 y P_2, formando así el triángulo OP_1P_2 en donde $|\overline{OP_1}| = r_1$, $|\overline{OP_2}| = r_2$ y el ángulo P_1OP_2 es igual a $(\theta_2 - \theta_1)$. Entonces por la *ley de los cosenos* se tiene

$$|D| = \sqrt{r_1^{\,2} + r_2^{\,2} - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (3)$$

Nótese que $\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos(\theta_1 - \theta_2)$

Ejemplo 3.

Calcule la distancia entre los puntos $T\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ y $S\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$D = \sqrt{9 + 4 - 2\cdot 3\cdot(-2)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{9 + 4 + 12\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)} = \sqrt{9 + 4 + 12\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \sqrt{9 + 4 + 6\sqrt{3}} = \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$$

1.6.- ECUACIÓN DE UNA CURVA EN COORDENADAS POLARES

En coordenadas cartesianas las ecuaciones más sencillas para trazar una gráfica tienen la forma

$$x = x_0, \qquad y = y_0.$$

La primera de estas ecuaciones representa una recta vertical y la segunda una recta horizontal. Las equivalentes en coordenadas polares de estas ecuaciones tienen la forma:

$$r = r_0, \qquad \theta = \theta_0$$

La primera de estas ecuaciones representa una circunferencia[2]. Su centro está en el origen y tiene radio $|r_0|$. La segunda representa una recta[3]. Dicha recta pasa por el origen de coordenadas formando un ángulo θ_0 con el eje polar.

En general, cualquier curva en el *Sistema de Coordenadas Polares* tiene por ecuación la expresión $r = f(\theta)$ o también $f(r,\theta) = 0$, siendo θ la variable independiente y r la variable dependiente.

Ejemplo 4.

Encuentre en polares la ecuación de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$.

Utlizando las ecuaciones (1.1) y (1.2), se tiene:

[2] Se explicará en el punto 2.3.
[3] Se explicará en el punto 2.2.

$$r^2\cos^2\theta - r^2 sen^2\theta = a^2$$
$$r^2(\cos^2\theta - sen^2\theta) = a^2$$
$$r^2\cos(2\theta) = a^2$$

Por lo tanto, la ecuación polar es $r^2\cos(2\theta) = a^2$

Ejemplo 5.

Hallar en rectangulares la ecuación de la curva $r = \dfrac{2}{1-\cos\theta}$.

Utilizando las ecuaciones (2.1) y (1.1) se tiene:

$$r = \frac{2r}{r - r\cos\theta}$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-x} \qquad para \quad r \geq 0$$
$$\sqrt{x^2+y^2} - x = 2 \qquad si \quad \sqrt{x^2+y^2} - x \neq 0$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = 2 + x$$
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (2+x)^2 \qquad si \quad x \geq -2$$
$$x^2 + y^2 = 4 + 4x + x^2$$
$$y^2 = 4 + 4x$$

Por lo tanto, la ecuación en rectangulares corresponde a la parábola $y^2 = 4 + 4x$.

Ejemplo 6.

Hallar en rectangulares la ecuación de la curva $r^2 = 4sen(2\theta)$.

Utilizando las ecuaciones (2.1) y (1.1) se tiene:

$$r^2 = 8sen(\theta)cos(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 8\frac{y}{r}\frac{x}{r} = \frac{8xy}{r^2} = \frac{8xy}{x^2 + y^2}$$

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8xy$$

Por lo tanto, la ecuación en rectangulares corresponde a la curva $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8xy$.

1.7.- VERIFICACIÓN DE QUE UN PUNTO EN POLARES SATISFACE UNA ECUACIÓN.

Para verificar si un punto pertenece o no a una curva polar, basta introducir en la curva los valores de r y de θ, y verificar si la igualdad se satisface o no.

Dada la curva propuesta en el Ejemplo 5, $r = \frac{2}{1 - cos\theta}$ se verificará si los puntos $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$, $(-1, 2\pi)$ pertenecen a ella.

a) Se sustituyen las coordenadas del punto $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ en la ecuación de la curva:

$\dfrac{2}{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{2}{1-0}=2$; así, $\left(2,\dfrac{\pi}{2}\right)$ está en la curva porque satisface la ecuación.

b) Se sustituyen las coordenadas del punto $\left(-2,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ en la ecuación de la curva:

$\dfrac{2}{1-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}=\dfrac{2}{1-0}=2\neq -2$; esta igualdad no se verifica. Aunque la ecuación no se satisfaga no se puede decir que el punto $\left(-2,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ no está en la curva porque, $\left(-2,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ y $\left(2,\dfrac{\pi}{2}\right)$ son el mismo punto. Por lo tanto, si una representación principal de un punto dado en polares no satisface la ecuación, se debe comprobar si la otra la satisface. Un punto en coordenadas polares (distinto del polo) satisface una ecuación en $n\theta$ (donde n es entero) si al menos una de sus representaciones principales la satisface.

c) Se sustituyen las coordenadas del punto $(-1,2\pi)$ en la ecuación de la curva:

$\dfrac{2}{1-\cos(2\pi)}=\dfrac{2}{1-1}$; no está definido. Usando la otra representación principal del punto, a saber, $(1,\pi)$, se tiene:

$\frac{2}{1-\cos(\pi)}=\frac{2}{1+1}=1$; así, el punto $(1,\pi)$es equivalente al punto $(-1,2\pi)$ está en la curva porque una de sus representaciones principales satisface la ecuación.

CAPÍTULO II
GRAFICACIÓN DE CURVAS EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

2.1.- SIMETRÍAS DE UNA CURVA EN POLARES

La gráfica de una ecuación polar es simétrica al eje polar, al polo o a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, si las sustituciones indicadas originan ecuaciones equivalentes, es decir, ecuaciones que luego de las sustituciones que se señalan a continuación no se alteran.

Simetría con respecto al eje polar; sutituir (r,θ) por $(r,-\theta)$ o $(-r,\pi-\theta)$

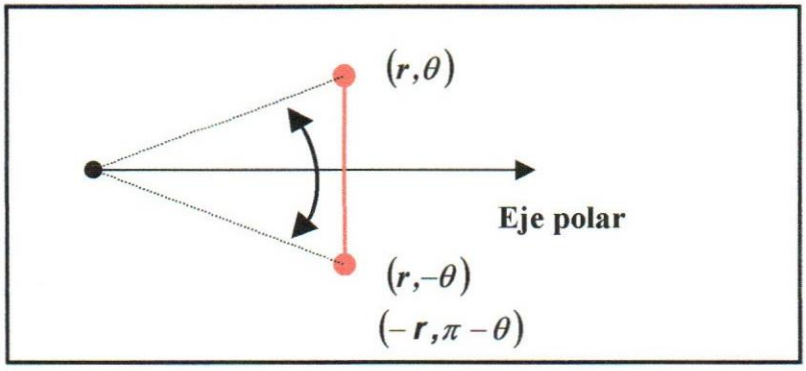

Figura 5

Simetría con respecto al polo; sustituir (r,θ) por $(r,\pi+\theta)$ o $(-r,\theta)$.

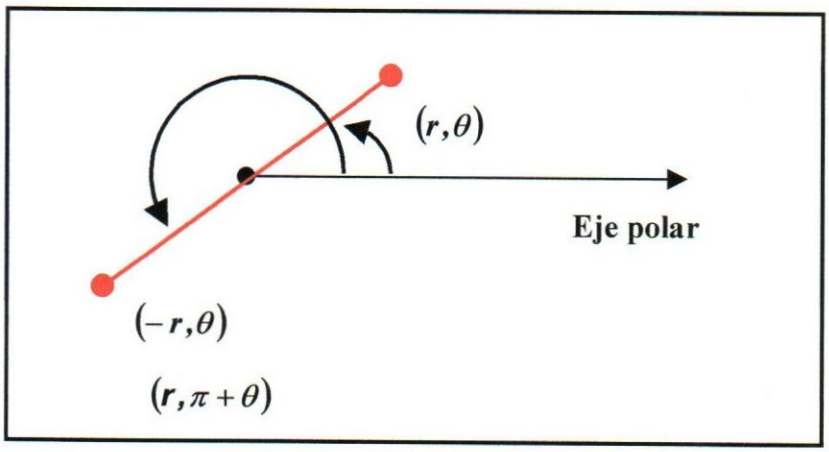

Figura 6

Simetría con respecto a la recta $\theta=\frac{\pi}{2}$; sustituir (r,θ) por $(r,\pi-\theta)$ o $(-r,-\theta)$.

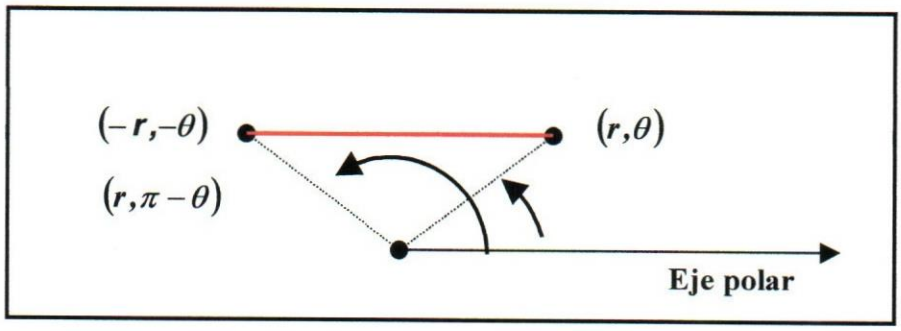

Figura 7

Es evidente que si una curva presenta dos de estas simetrías, tiene también la tercera simetría.

(r,θ)

Ejemplo 7.

Discutir las simetrías de la curva $r = sen(2\theta)$.

Para averiguar si la curva es simétrica con respecto al eje polar se sustituye (r,θ) por $(r,-\theta)$, así se tiene $r = sen(-2\theta) = -sen(2\theta)$, no se verifica que $r = sen(2\theta)$ por lo tanto, la ecuación se altera. Para averiguar si la curva es simétrica con respecto al eje polar también puede usarse la sustitución (r,θ) por $(-r,\pi-\theta)$, así se tiene: $-r = sen(2(\pi-\theta)) = sen(2\pi-2\theta) = sen(2\pi)cos(2\theta) - cos(2\pi)sen(2\theta) = -sen(2\theta)$, se verifica que $r = sen(2\theta)$, es decir, la ecuación no se altera. Entonces, puede concluirse que la curva es simétrica con respecto al eje polar.

Para averiguar si la curva es simétrica con respecto al polo se sustituye (r,θ) por $(r,\pi+\theta)$, así se tiene: $r = sen(2(\pi+\theta)) = sen(2\pi+2\theta) = sen(2\pi)cos(2\theta) + sen(2\theta)cos(2\pi) = sen(2\theta)$, se verifica que $r = sen(2\theta)$, es decir, la ecuación no se altera. Puede concluirse que la curva es simétrica con respecto al polo.

Para averiguar si la curva es simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ se sustituye (r,θ) por $(r,\pi-\theta)$, así se tiene: $r = sen(2(\pi-\theta)) = sen(2\pi-2\theta) = sen(2\pi)cos(2\theta) - sen(2\theta)cos(2\pi) = -sen(2\theta)$, no se verifica que $r = sen(2\theta)$, es decir, la ecuación se altera. Para averiguar si la curva es simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ también puede usarse la sustitución (r,θ) por $(-r,-\theta)$, así se tiene: $-r = sen(-2\theta) = -sen(2\theta)$, se verifica que $r = sen(2\theta)$, es decir, la ecuación

no se altera. Entonces, puede concluirse que la curva es simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2.2.- RECTAS EN COORDENADAS POLARES

Una recta perpendicular al eje x, que pasa por el punto de coordenadas rectangulares $(a,0)$, tiene por ecuación rectangular $x = a$. Para expresar esta ecuación en coordenadas polares se sustituye $x = r\cos\theta$ (ecuación 1.1), y se obtiene $r = \frac{a}{\cos\theta}$ que corresponde a la ecuación de una recta vertical en polares. Esto tiene sentido geométrico ya que para todo punto $P(r,\theta)$ de esta recta, el valor de $r\cos\theta$ será a, tal como muestra la figura 8. Si $a > 0$ la recta estará a la derecha del polo y si $a < 0$ la recta estará a la izquierda del polo.

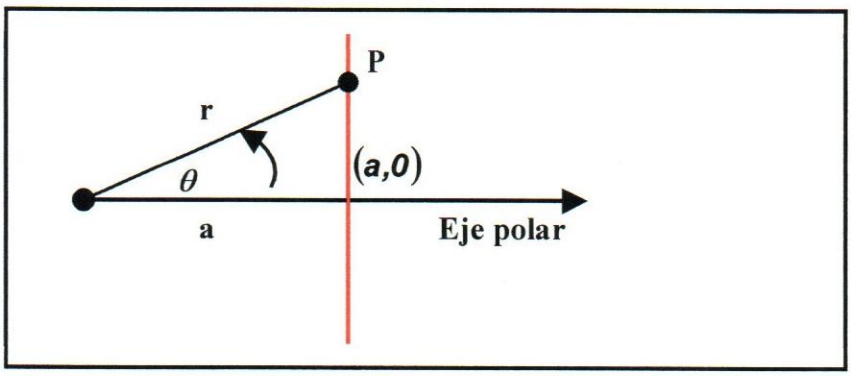

Figura 8

Una recta perpendicular al eje y, que pasa por el punto de coordenadas rectangulares $(0,b)$, tiene por ecuación rectangular $y=b$. Para expresar esta ecuación en coordenadas polares se sustituye $y=r\,sen\,\theta$ (ecuación 1.2), y se obtiene $r=\dfrac{b}{sen\,\theta}$ que corresponde a la ecuación de una recta horizontal en polares. Esto tiene sentido geométrico ya que para todo punto $P(r,\theta)$ de esta recta, el valor de $r\,sen\,\theta$ será b, tal como muestra la figura 9. Si $b>0$ la recta estará por encima del polo y si $b<0$ la recta estará por debajo del polo.

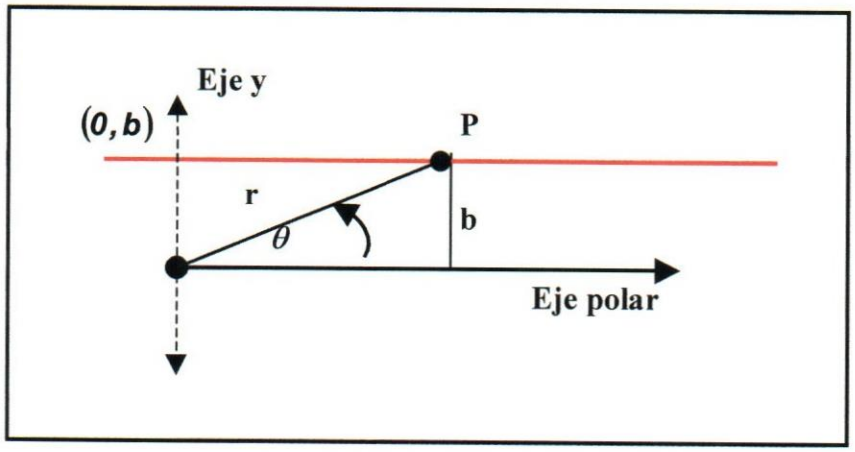

Figura 9

Si una recta polar de ecuación $r=\dfrac{a}{cos\,\theta}$ se rota en un ángulo β con respecto a la perpendicular al eje polar se tiene otra recta que forma con el eje polar un ángulo $\beta+\dfrac{\pi}{2}$ tal como muestra la figura 10. En la figura se observa que en el triángulo ***OPQ*** (rectángulo en ***Q***) ,

$\cos(\beta-\theta)=\cos(\theta-\beta)=\frac{p}{r}$. La ecuación de esa recta en polares es $r=\frac{p}{\cos(\theta-\beta)}$ que corresponde a la ecuación de cualquier recta oblicua en el sistema de coordenadas rectangulares. Nótese que p representa la distancia de la recta al polo.

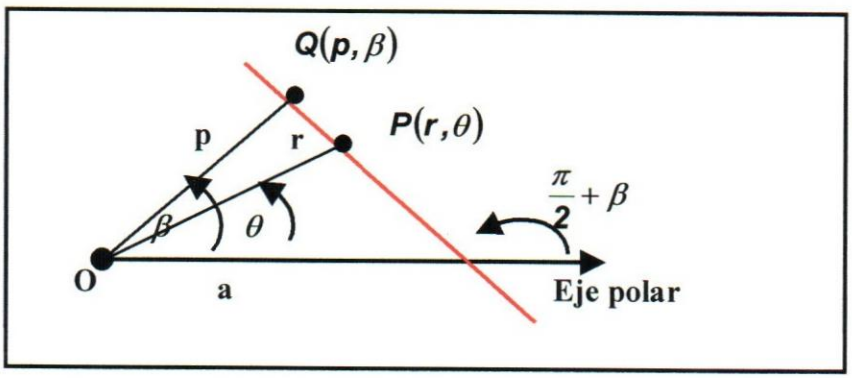

Figura 10

Si $\beta=\frac{\pi}{2}$, la ecuación anterior es $r=\frac{p}{\operatorname{sen}\theta}$ y representa una recta horizontal a una distancia p del polo. Si esta recta se rota un ángulo α, resulta una recta que pasa por el punto $\left(p,\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ que forma un ángulo α con el eje polar y cuya ecuación es $r=\frac{p}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}$.

Si $\beta=\pi$, la ecuación anterior $r=\frac{p}{\cos(\theta-\beta)}$ es $r=\frac{-p}{\cos\theta}$ y representa una recta vertical a una distancia $-p$ del polo.

Si $\beta = -\frac{\pi}{2}$, la ecuación $r = \frac{p}{sen(\theta - \alpha)}$ anterior es $r = \frac{-p}{sen\theta}$ y representa una recta horizontal a una distancia $-p$ del polo.

Una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas rectangulares tiene por ecuación rectangular $y = mx$, donde m es la pendiente de la recta. Para expresar esta ecuación en coordenadas polares se sustituye $x = r\cos\theta$ (1.1) y $y = r\,sen\theta$ (1.2), y se obtiene:

$$r\,sen\theta = mr\cos\theta$$
$$r\,sen\theta - mr\cos\theta = 0$$
$$r(sen\theta - m\cos\theta) = 0$$

de donde $r = 0$ es un punto.

Por otro lado, $m = tag\theta$, por lo que $\theta = arctag(m) + k\pi$, la expresión $arctag(m)$ es el ángulo que forma la recta con el eje x en sentido positivo o eje polar, así una recta que pasa por el polo tiene por ecuación $\theta = \theta_0$, siendo θ_0 ángulo que forma la recta con el eje polar. En particular la recta que contiene al eje polar es $\theta = 0$, la que contiene al eje ***x*** en sentido negativo es $\theta = \pi$, la que contiene al eje ***y*** en sentido positivo es $\theta = \frac{\pi}{2}$ y la que contiene al eje ***y*** en sentido negativo es $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Por lo anterior, al graficar curvas en el sistema polar resulta útil encontrar las intersecciones con las rectas $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$, ya que estas representan las intersecciones con los ejes importantes, es decir:

La recta $\theta = 0$ corresponde al eje **x** positivo.

La recta $\theta = \frac{\pi}{2}$ corresponde al eje **y** positivo.

La recta $\theta = \pi$ corresponde al eje **x** negativo.

La recta $\theta = \frac{3\pi}{2}$ corresponde al eje **y** negativo.

Esta es la razón de que en las gráficas siguientes no sólo se represente el eje polar ($\theta = 0$) sino que también el resto de los ejes o rectas importantes.

2.3.- CIRCUNFERENCIAS EN COORDENADAS POLARES

Sea una circunferencia de radio c y cuyo centro tiene coordenadas polares $C(r_0, \theta_0)$. Si $P(r, \theta)$ es un punto arbitrario de la circunferencia y se aplica la *ley del coseno* al triángulo OCP, se obtiene: $r^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 = c^2$ esta es la ecuación general de cualquier circunferencia en coordenadas polares.

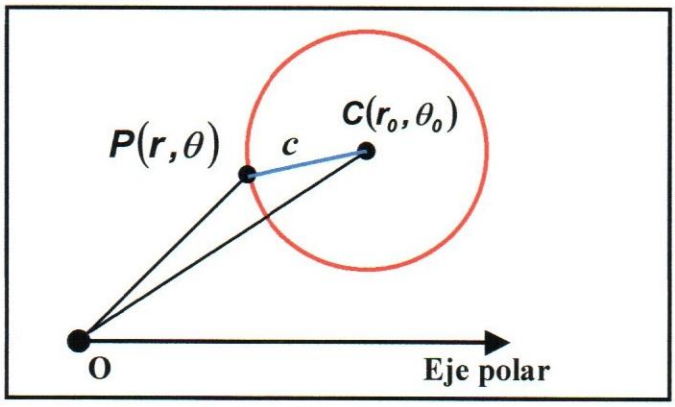

Figura 11

Es usada en muy pocas situaciones ya que la ecuación correspondiente en coordenadas rectangulares es más sencilla. A continuación se consideran algunos casos especiales que pueden resultar útiles.

Si la circunferencia tiene radio c y centro en el polo, la ecuación 4 se reduce a $r^2 = c^2$ y considerando que $c \geq 0$, se tiene $r = c$, que corresponde a la ecuación de una circunferencia en polares de centro en el polo y radio c. Esta ecuación tiene sentido geométrico ya que la circunferencia de radio c con centro en el polo consta de todos los puntos $P(r,\theta)$ para los que la distancia al polo es c, independientemente del valor de θ. Considerando $c < 0$, $r = c$ representa la misma circunferencia, aunque el uso de esa ecuación no es común.

Si la circunferencia tiene radio c, centro sobre el eje x y pasa por el origen, las coordenadas polares del centro son $(c,0)$ o (c,π), dependiendo si su centro está a la derecha o a la izquierda del polo.

Para la circunferencia a la derecha del polo se tiene $r_0 = c$ y $\theta_0 = 0$, de modo que la ecuación 4 se reduce a:

$r^2 - 2rc\cos\theta = 0$, o sea, $r = 2c\cos\theta$

Para la circunferencia a la izquierda del polo se tiene $r_0 = c$ y $\theta_0 = \pi$, de modo que la ecuación 4 se reduce a:

$r^2 - 2rc\cos(\theta - \pi) = 0$, o sea, $r = -2c\cos\theta$.

Si la circunferencia tiene radio c, centro sobre el eje y y pasa por el origen, las coordenadas polares del centro son $\left(c,\frac{\pi}{2}\right)$ o $\left(c,\frac{3\pi}{2}\right)$, dependiendo si su centro está arriba o debajo del polo.

Para la circunferencia arriba del polo la ecuación 4 se reduce a $r = 2c\,sen\theta$. Para la circunferencia abajo del polo la ecuación 4 se reduce a $r = -2c\,sen\theta$.

2.4.- DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

Se considera una recta de ecuación $r = \dfrac{p}{\cos(\theta - \beta)}$ y un punto $P(r_0, \theta_0)$. Sea s la distancia entre la recta y el punto P. Según el triángulo OPQ, de hipotenusa r_0 y cateto $OQ = s + p$ se tiene $\cos(\beta - \theta_0) = \cos(\theta_0 - \beta) = \dfrac{p \pm s}{r_0}$, de donde al despejar s se tiene, $s = |r_0 \cos(\theta_0 - \beta) - p|$.

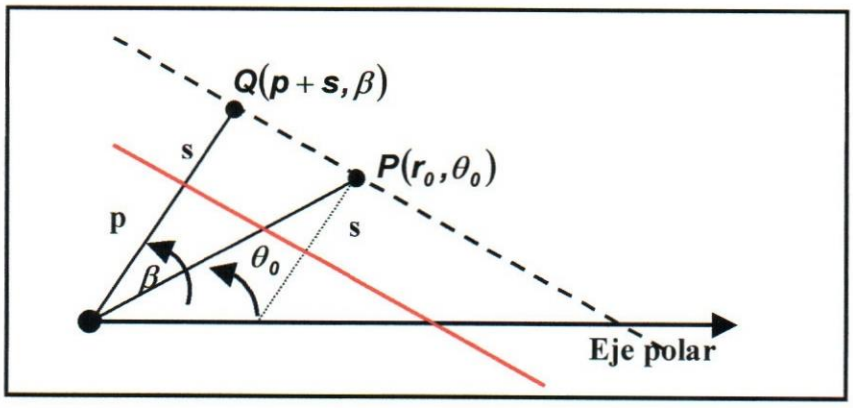

Figura 12

2.5.- TRAZADO DE GRÁFICAS DIBUJANDO PUNTOS

Supongamos que r y θ están relacionados por una ecuación tal como $r = sen\, 2\theta$. (Ejemplo 7). Se define el lugar geométrico de una ecuación en coordenadas polares como el conjunto de los puntos P que tienen al menos un par de coordenadas polares (r,θ) que satisfacen la ecuación dada.

Para graficar curvas en el ***Sistema de Coordenadas Polares*** en necesario aclarar algunos conceptos:

Dominio: es el subconjunto de **R** que contiene los valores de θ para los cuales $r = f(\theta)$ está definido.

Período: si existe, es el menor $\varpi > 0$ tal que $f(\theta) = f(\theta + \varpi)$. Si una curva polar tiene período el estudio de la función se reduce a un intervalo de la forma $(\theta, \theta + \varpi)$.

Función par: es aquella que cumple para cada θ de su dominio que $f(\theta) = f(-\theta)$. En este caso la curva es simétrica con respecto al eje polar.

Función impar: es aquella que cumple para cada θ de su dominio que $f(-\theta) = -f(\theta)$. En este caso la curva es simétrica con respecto al polo.

Intervalos de crecimiento para la distancia radial: son los intervalos de valores de θ donde r crece. Se obtienen resolviendo $f'(\theta) > 0$.

Intervalos de decrecimiento para la distancia radial: son los intervalos de valores de θ donde r decrece. Se obtienen resolviendo $f'(\theta) < 0$.

Valor máximo de la distancia radial: el valor máximo que puede alcanzar r. Se obtiene resolviendo $f'(\theta) = 0$, corresponde al valor donde r cambia de creciente a decreciente.

Valor mínimo de la distancia radial: el valor mínimo que puede alcanzar r. Se obtiene resolviendo $f'(\theta) = 0$, corresponde al valor donde r cambia de decreciente a creciente.

Ejemplo 8.

Trace la gráfica de la ecuación $r = sen(2\theta)$.

En esta ecuación se cumple que $sen(-2\theta) = -sen(2\theta)$, por lo que la función es impar, es decir, es simétrica con respecto al polo (En el Ejemplo 7 se estudiaron las simetrías de la curva y se estableció que es simétrica con respecto al polo, al eje polar y a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$) . Además, se cumple que $sen(\theta) = sen(\theta + 2\pi)$, por lo que el período es 2π, es decir, basta estudiar la gráfica en un intervalo $(\theta, \theta + 2\pi)$, por ejemplo de $(0, 2\pi)$.

Se tiene que $f'(\theta) = 2\cos(2\theta)$. Si se analizan los signos de $f'(\theta)$ en el intervalo $(0, 2\pi)$ se tiene que la distancia radial crece si $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ y decrece si $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Por lo anterior los máximos relativos son los puntos $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ y $\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ y los mínimos relativos son los puntos $\left(-1,\frac{3\pi}{4}\right)$ y $\left(-1,\frac{7\pi}{4}\right)$.

Se construye la siguiente tabla dándole a θ algunos valores reales, por ejemplo 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ [4] Sustituyéndolos en la ecuación dada.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	0	0	0	0

Estos valores representan el polo, es decir, el polo es un punto de la curva.

Se puede notar que si θ se incrementa de 0 a $\frac{\pi}{4}$, entonces 2θ se incrementa de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y $r = sen(2\theta)$ se incrementa de 0 a 1. Si θ se incrementa de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$, entonces 2θ se incrementa de $\frac{\pi}{2}$ a π y $r = sen(2\theta)$ decrece de 1 a 0. Así la curva completa un lazo, tal como se muestra en Figura 13.

[4] Estos valores corresponden con la intersección con los ejes notables del sistema polar.

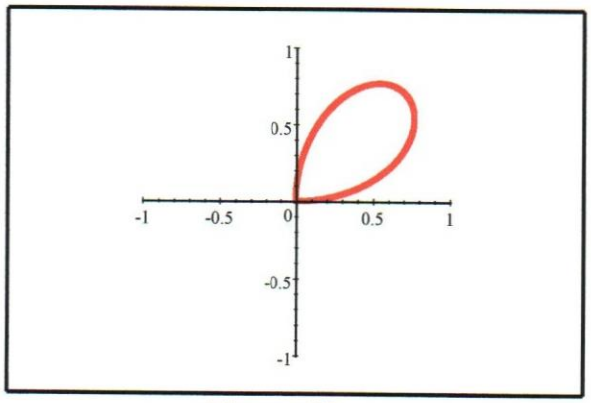

Figura 13

Si θ se incrementa de $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{4}$, entonces 2θ se incrementa de π a $\frac{3\pi}{2}$ y $r = sen(2\theta)$ se reduce de 0 a –1. Debido a que $r < 0$, la parte que resulta de la gráfica está en el cuarto cuadrante aún cuando los valores de θ estén en el segundo cuadrante tal como lo muestra la Figura 14.

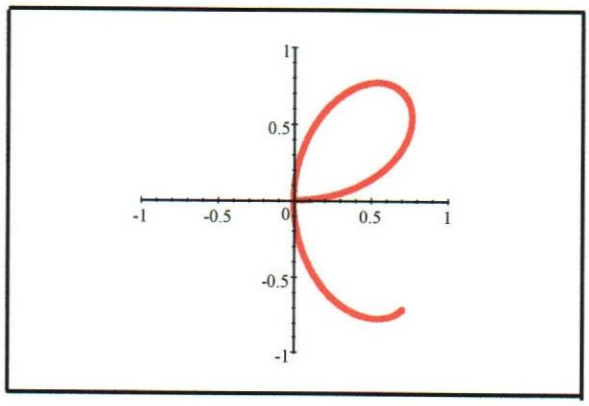

Figura 14

Si θ se incrementa de $\frac{3\pi}{4}$ a π, entonces 2θ se incrementa de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π y $r = sen(2\theta)$ se incrementa de -1 a 0, y la curva completa un lazo en el cuarto cuadrante. (Figura 15).

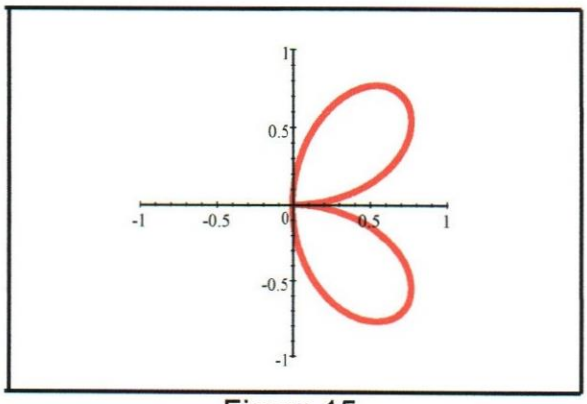

Figura 15

Si θ se incrementa de π a $\frac{3\pi}{2}$, la curva completa un lazo en el tercer cuadrante. (Figura 16). Si θ se incrementa de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π, la curva completa un lazo en el segundo cuadrante. (Figura 17).

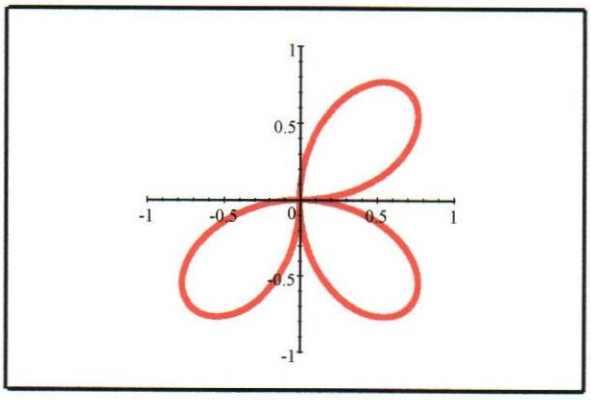

Figura 16

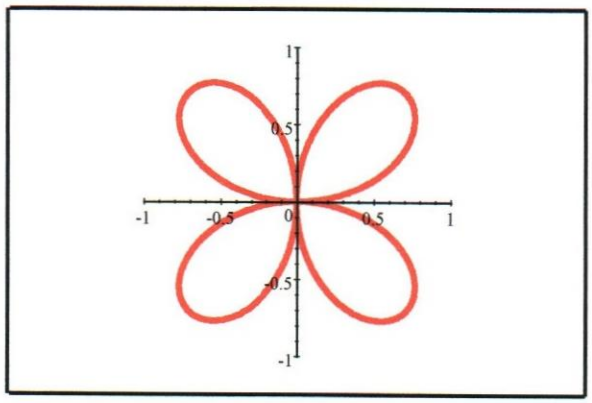

Figura 17

No se genera ningún nuevo punto si θ toma valores mayores que 2π porque la expresión $sen(2\theta)$ es periódica de período 2π, por lo que los valores de r comenzarán a repetirse. Tampoco se genera ningún nuevo punto si θ toma valores negativos porque $sen(-2\theta) = -sen(2\theta)$, de manera que sólo se generarán puntos simétricos de la curva con respecto al polo.

2.5.1- TRAZADO DE GRÁFICAS DE CURVAS ASINTÓTICAS

Sea $r = f(\theta)$. Si $lim_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = \infty$ o $lim_{\theta \to \theta_0} f(\theta) = -\infty$ se dice que la curva tiene una rama infinita. En tal caso, la dirección fijada por el ángulo θ_0 se llama dirección asintótica. Cabe la posibilidad de que la curva se acerque a una recta de dirección θ_0. Una recta $r = \dfrac{p}{sen(\theta - \theta_0)}$ es una asíntota de la curva polar $r = f(\theta)$ si se cumplen las siguientes condiciones:

a) la dirección de la recta es la dirección asintótica de la curva, es decir, $\lim_{\theta\to\theta_0} f(\theta)=\infty$ o $\lim_{\theta\to\theta_0} f(\theta)=-\infty$.

b) La distancia entre la recta y la función tiende a cero cuando la dirección de la curva tiende a su dirección asintótica, es decir $\lim_{\theta\to\theta_0}\left[\frac{p}{sen(\theta-\theta_0)}-f(\theta)\right]=0$, de lo anterior se tiene que $p=\lim_{\theta\to\theta_0}[f(\theta)sen(\theta-\theta_0)]$.

Demostración:

CÁLCULO DE ASÍNTOTAS EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Sea una curva de ecuación $r=f(\theta)$ y su asíntota de ecuación $r=\frac{p}{sen(\theta-\theta_0)}$, tal como muestra la figura 18.

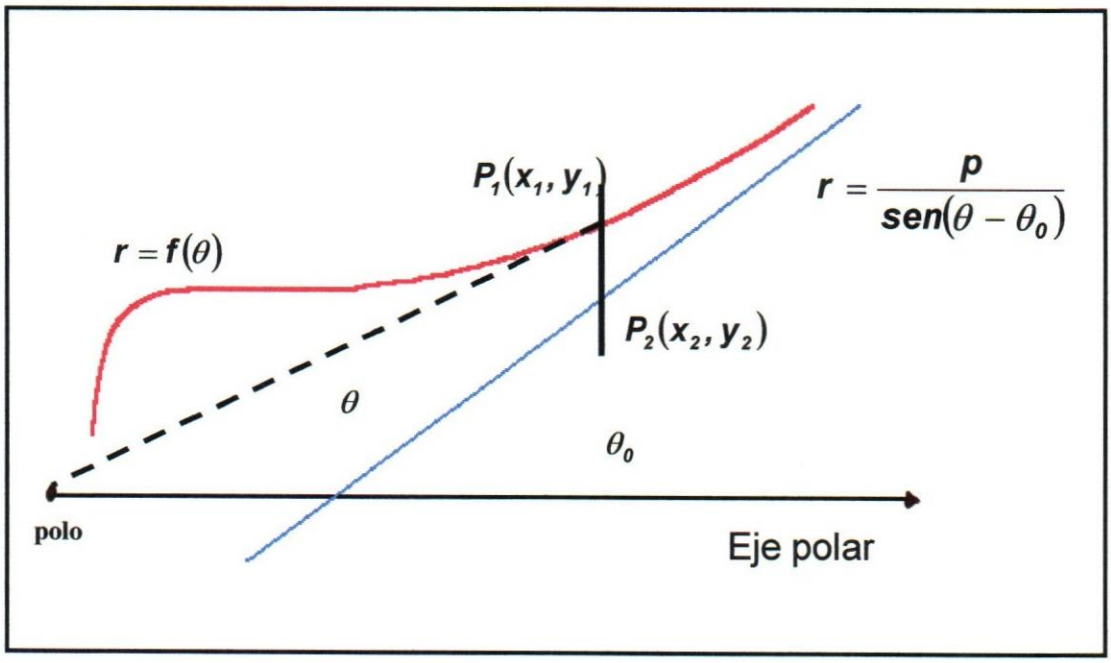

Figura 18

Nótese que en la figura 18 para cualquier $P_1(x_1, y_1)$ sobre la curva y cualquier $P_2(x_2, y_2)$ de la recta, se tiene que $lim_{x\to\infty}(y_2 - y_1) = 0$.

Se sabe por la ecuación (1.2) que $y = r\, sen(\theta)$ por lo tanto se tiene para la recta que $y = \dfrac{p}{sen(\theta - \theta_0)} sen(\theta)$ y para la curva $y = f(\theta) sen(\theta)$. De la figura 19 se puede observar que si $x \to \infty$ entonces $\theta \to \theta_0$.

$$lim_{\theta\to\theta_0}\left[f(\theta)\, sen(\theta) - \frac{p}{sen(\theta - \theta_0)} sen(\theta)\right] = 0,$$ por lo tanto:

$$lim_{\theta\to\theta_0}\left[sen(\theta).\left(f(\theta) - \frac{p}{sen(\theta - \theta_0)}\right)\right] = 0,$$ entonces:

$\lim_{\theta\to\theta_0} sen(\theta).\lim_{\theta\to\theta_0}\left(f(\theta)-\dfrac{p}{sen(\theta-\theta_0)}\right)=0$, despejando el valor de p del segundo límite se tiene:

$p=\lim_{\theta\to\theta_0}[f(\theta)sen(\theta-\theta_0)]$

Ejemplo 9.

La curva $r=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ (ejemplo 5) tiene dirección asintótica $\theta=0$, sin embargo no tiene asíntota porque $\lim_{\theta\to 0}\left[\dfrac{1}{1-\cos\theta}\cdot sen(\theta-\pi)\right]$ no es un número real.

La curva $r=\dfrac{6}{1+2\cos\theta}$ tiene dirección asintótica $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ y $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$.

Como $\lim_{\theta\to 2\pi/3}\left[\dfrac{6}{1+2\cos\theta}\cdot sen\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]=-2\sqrt{3}$ entonces la curva tiene una asíntota de ecuación $r=\dfrac{-2\sqrt{3}}{sen\left(\theta-\dfrac{2\pi}{3}\right)}$.

Como $\lim_{\theta\to 4\pi/3}\left[\dfrac{6}{1+2\cos\theta}\cdot sen\left(\theta-\dfrac{4\pi}{3}\right)\right]=2\sqrt{3}$ entonces la curva tiene una asíntota de ecuación $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{sen\left(\theta-\dfrac{4\pi}{3}\right)}$.

Ejemplo 10.

Trace la gráfica de la ecuación $r = \frac{-3}{\theta}$.

Se observa que en la curva $r = \frac{-3}{\theta}$, θ puede asumir cualquier valor real distinto de cero, es decir, el dominio de la función es **R***, sin embargo, para la explicación se asumirá $\theta > 0$[5]. .La función tiene una discontinuidad en $\theta = 0$ y r no se hace cero para ningún valor real, lo que establece que la curva no pasa por el polo. Si $\theta > 0$ no presenta ningún tipo de simetría y tampoco es periódica.

Se tiene que $f'(\theta) = \frac{3}{\theta^2}$. Si se analizan los signos de $f'(\theta)$ para $\theta > 0$ se tiene que la distancia radial crece. Por lo anterior la curva no presenta máximos relativos ni mínimos relativos .

Se construye la siguiente tabla dándole a θ algunos valores reales, por ejemplo $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$, 2π .[6] Sustituyéndolos en la ecuación dada.

θ	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	$\frac{-6}{\pi}$	$\frac{-3}{\pi}$	$\frac{-2}{\pi}$	$\frac{-3}{2\pi}$

Se puede notar que a medida que θ asume valores más grandes r se hace más cercano a cero. Además, $\lim_{\theta \to 0^+} \left(\frac{-3}{\theta} \right) = -\infty$ lo que indica que la

[5] Se mostrará también si $\theta < 0$.

[6] Estos valores corresponden con la intersección de los ejes notables del sistema polar.

curva tiene una rama infinita y la dirección de la asíntota es la dirección asintótica de la curva. Como $\lim_{\theta \to 0^+}\left[\frac{-3}{\theta}\operatorname{sen}(\theta)\right] = -3$ la curva tiene una asíntota horizontal de ecuación $r = \frac{-3}{\operatorname{sen}(\theta)}$.

Al asumir $\theta > 0$, observa que $r < 0$ para cualquier θ. Es decir, r será medido en la semirrecta opuesta a θ.

Se puede notar que si θ se incrementa de $\frac{\pi}{2}$ a π, $r = \frac{-3}{\theta}$ se incrementa de $\frac{-6}{\pi}$ a $\frac{-3}{\pi}$ (Figura 19).

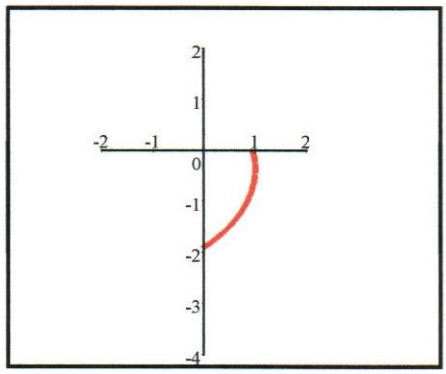

Figura 19

Si θ se incrementa de π a $\frac{3\pi}{2}$, $r = \frac{-3}{\theta}$ se incrementa de $\frac{-3}{\pi}$ a $\frac{-2}{\pi}$ (Figura 20).

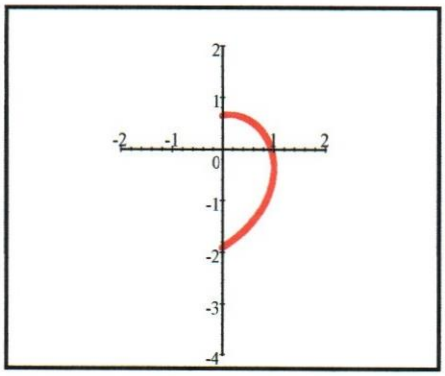

Figura 20

En general si θ aumenta $\boldsymbol{r}$ se acerca a cero (Figura 21).

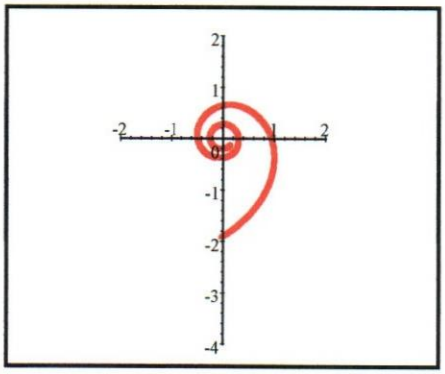

Figura 21

Se puede notar que si θ se incrementa de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$, $r = \frac{-3}{\theta}$ se incrementa de $\frac{-12}{\pi}$ a $\frac{-6}{\pi}$ (Figura 22).

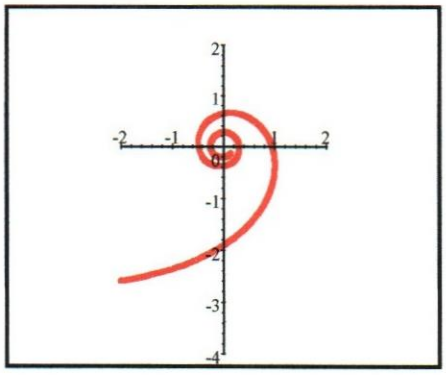

Figura 22

Si θ se incrementa de $\frac{\pi}{32}$ a $\frac{\pi}{4}$, $r = \frac{-3}{\theta}$ se incrementa de $\frac{-96}{\pi}$ a $\frac{-12}{\pi}$. En general a medida que θ toma valores más cercanos al cero (positivos) el radio asume valores más pequeños, generándose así la asíntota. (Figura 23).

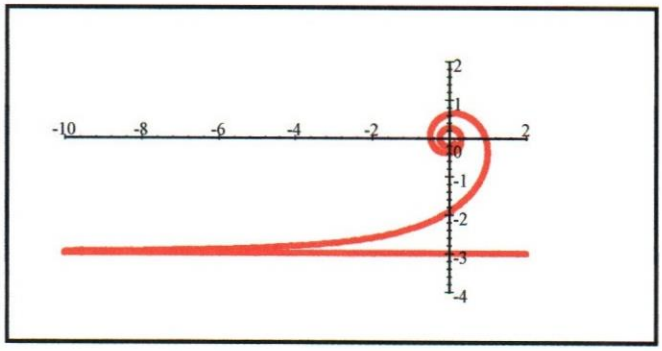

Figura 23

La curva $r = \frac{-3}{\theta}$ es una curva impar pues satisface $f(-\theta) = -f(\theta)$ lo que indica que la curva es simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$, así que para valores de $\theta < 0$ se obtendrá la gráfica que se muestra en la Figura 24.

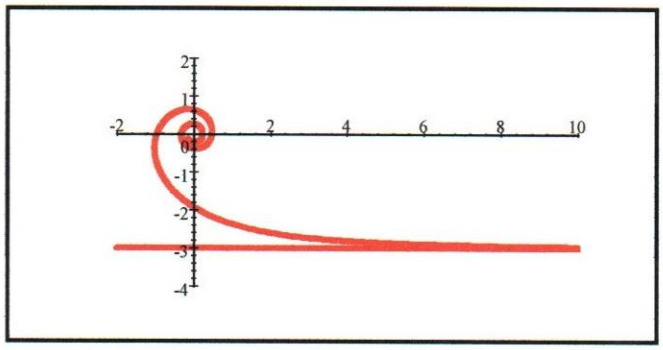

Figura 24

Si se grafica la curva con valores de $\theta > 0$ y $\theta < 0$ se tiene la Figura 25.

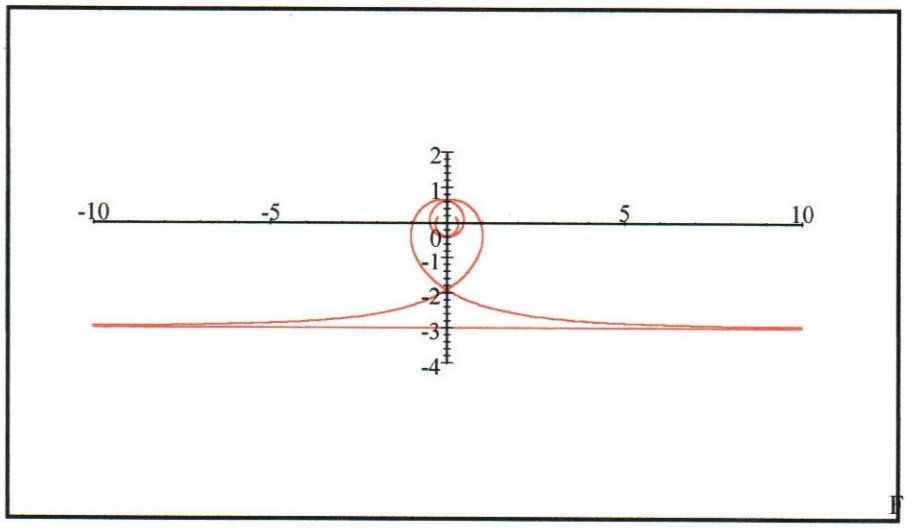

Figura 25

CAPÍTULO III
CURVAS CARACTERÍSTICAS DEL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

3.1.- ASPECTOS GENERALES

Para la presentación en este trabajo de las curvas características en el *Sistema de Coordenadas Polares* se mostrará la clasificación de las mismas en los siguientes grupos:

Cerradas

Espirales

Asintóticas

3.2- CURVAS CERRADAS

Son curvas polares periódicas, es decir el intervalo de formación de la curva se reduce a $(\theta, \theta + \varpi)$ siendo ϖ el período[7] y que no presentan asíntota.

3.2.1- CURVAS LIMACONES

Las ecuaciones de la forma $\begin{cases} r = a + b\,sen(\theta) \\ r = a + b\cos(\theta) \end{cases}$ para $a \in R^*$ y $b \in R^*$ producen curvas polares llamadas *Limacos* o *Limacones* (del vocablo latino "limax" que denota una criatura con forma de caracol).

La orientación del *Limaco* en relación con el eje polar depende de si se tiene $sen(\theta)$ o $\cos(\theta)$ en la ecuación y de si el signo es más o es menos. Cualquier limacón se completa con valores de θ que van de 0 a 2π. Para valore negativos, se forma la misma curva.

Si en la ecuación se tiene $sen(\theta)$ la curva tiene una orientación vertical, pero si se tiene $\cos(\theta)$ la curva tiene una orientación horizontal.

[7] Ver sección 2.5.

Si $\frac{|a|}{|b|} < 1$, se tiene una limacón con rizo o lazo interno. Si $\frac{|a|}{|b|} = 1$ se tiene una cardioide (limacón con forma de corazón). Si $1 < \frac{|a|}{|b|} < 2$ se tiene una limacón con hoyuelo y si $\frac{|a|}{|b|} \geq 2$ se tiene una limacón convexa.

Ejemplo 11.

Obtener la gráfica de la curva $r = 1 + 2\cos(\theta)$. Como $\frac{|a|}{|b|} < 1$ se trata de una limacón con rizo orientada horizontalmente.

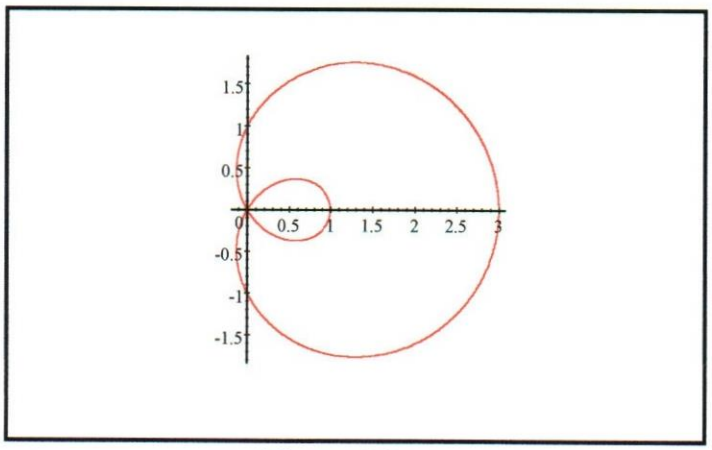

Figura 26

Ejemplo 12.

Obtener la gráfica de la curva $r = 2 - \cos(\theta)$. Como $\frac{|a|}{|b|} = 2$ se tiene una limacón convexa orientada horizontalmente.

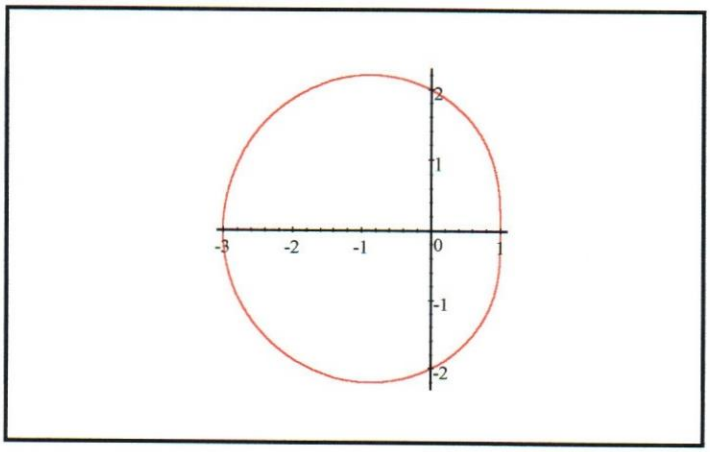

Figura 27

Ejemplo 13.

Obtener la gráfica de la curva $r = 3 - 2\cos(\theta)$. Como $1 < \frac{|a|}{|b|} < 2$ se tiene una limacón con hoyuelo orientada horizontalmente.

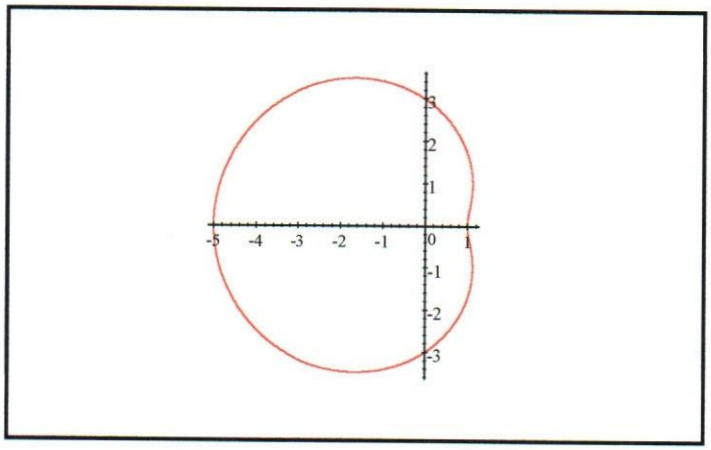

Figura 28

Ejemplo 14.

Obtener la gráfica de la curva $r = 2 + \frac{5\,sen(\theta)}{2}$. Como $\frac{|a|}{|b|} < 1$ se trata de una limacón con rizo orientada verticalmente.

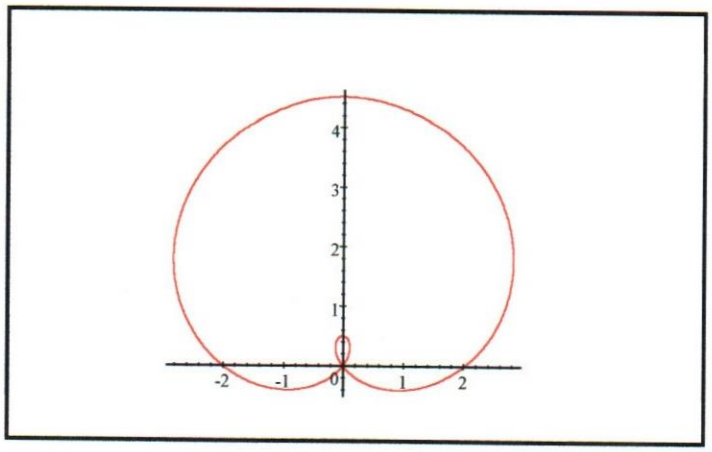

Figura 29

Ejemplo 15.

Obtener la gráfica de la curva $r = 3 - 3\,sen(\theta)$. Como $\frac{|a|}{|b|} = 1$ se trata de una cardioide con rizo orientada verticalmente.

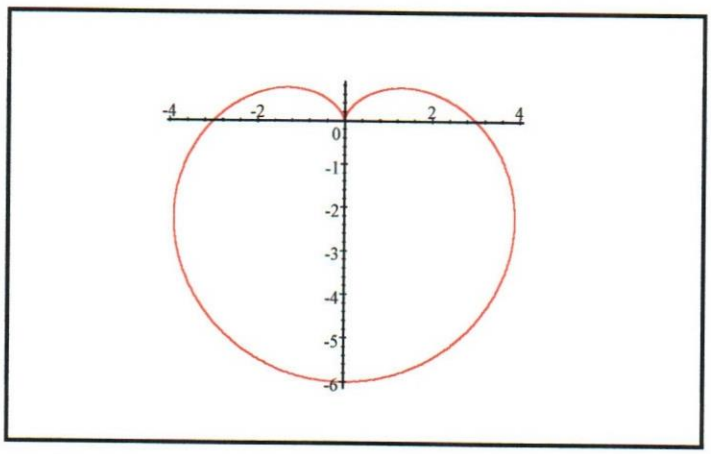

Figura 30

3.2.2- CURVAS LEMNISCATAS

Las ecuaciones de la forma $\begin{cases} r^2 = a^2 \cos(2\theta) \\ r^2 = a^2 sen(2\theta) \\ r^2 = -a^2 \cos(2\theta) \\ r^2 = -a^2 sen(2\theta) \end{cases}$ para $a \in R^*$ producen curvas polares en forma de hélice, llamadas *Lemniscatas*. Las *Lemniscatas* tienen su centro en el polo (cuando $sen(2\theta) = 0$ o cuando $\cos(2\theta) = 0$), la orientación en relación con el eje polar depende de si se tiene $sen(2\theta)$ o $\cos(2\theta)$ en la ecuación y de si el signo es más o es menos.

Ejemplo 16.

Obtener la gráfica de la curva $r^2 = 4\cos(2\theta)$. En esta ecuación se observa que $\cos(2\theta) \geq 0$, es decir $\frac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ y que para cada valor de θ se tiene un $r < 0$ y un $r > 0$.

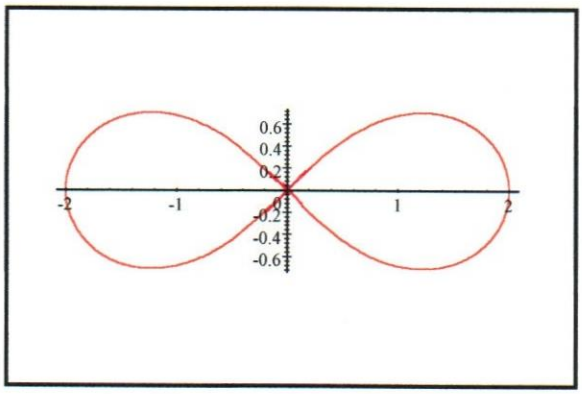

Figura 31

Ejemplo 17.

Obtener la gráfica de la curva $r^2 = -4\cos(2\theta)$. En esta ecuación se observa que $\cos(2\theta) \leq 0$, es decir $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$ y que para cada valor de θ se tiene un $r < 0$ y un $r > 0$.

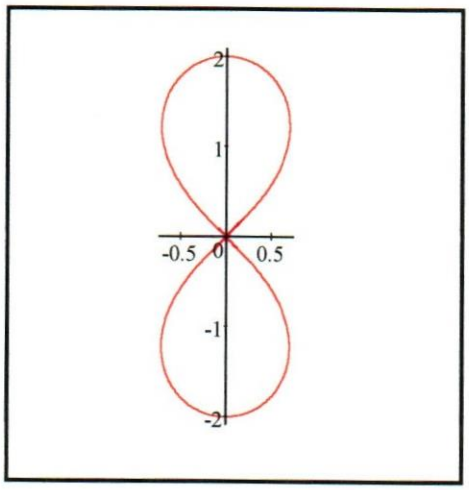

Figura 32

Ejemplo 18.

Obtener la gráfica de la curva $r^2 = 4\,sen(2\theta)$. En esta ecuación se observa que $sen(2\theta) \geq 0$, es decir $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y que para cada valor de θ se tiene un $r < 0$ y un $r > 0$.

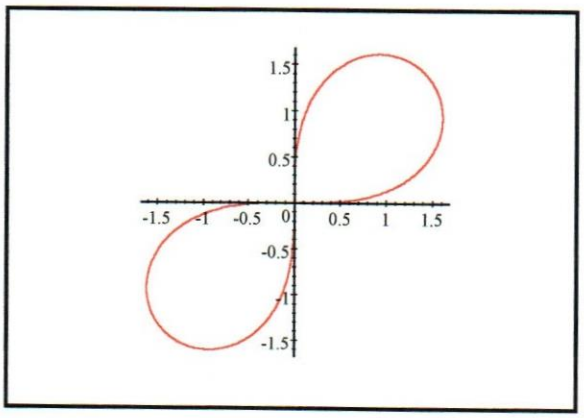

Figura 33

Ejemplo 19.

Obtener la gráfica de la curva $r^2 = -4\,sen(2\theta)$. En esta ecuación se observa que $sen(2\theta) \leq 0$, es decir $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ y que para cada valor de θ se tiene un $r < 0$ y un $r > 0$.

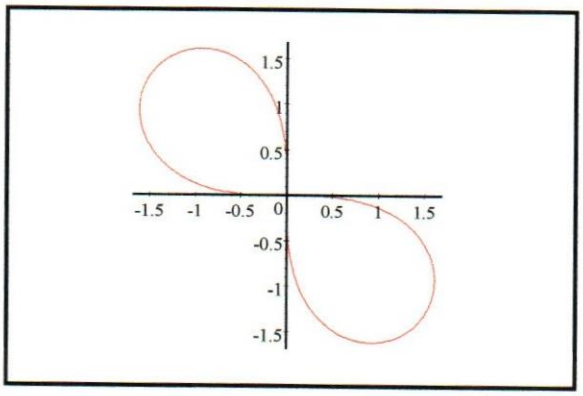

Figura 34

3.2.3 CURVAS ROSAS[8]

Las ecuaciones de la forma $\begin{cases} r = a\,sen(n\theta) \\ r = a\cos(n\theta) \end{cases}$ para $n \in N^*$ y $a \in R^*$ producen curvas polares en forma de flor, llamadas Rosas o Rosetas. Las Rosas tienen 2n pétalos si n es par y tienen n pétalos si n es impar. Si n es par la curva se completa cuando θ va de 0 a 2π. Si n es impar la curva se completa cuando θ va de 0 a π y se repite cuando θ va de π a 2π. Todas las Rosas pasan por el polo cuando $sen(n\theta) = 0$ o $\cos(n\theta) = 0$, la orientación y simetría depende de si en la ecuación se tiene $sen(n\theta)$ o $\cos(n\theta)$.

Ejemplo 20.

Obtener la gráfica de la curva $r = 3\cos(2\theta)$. Como $n = 2$ la rosa tiene 4 pétalos y se forma completa cuando θ va de 0 a 2π.

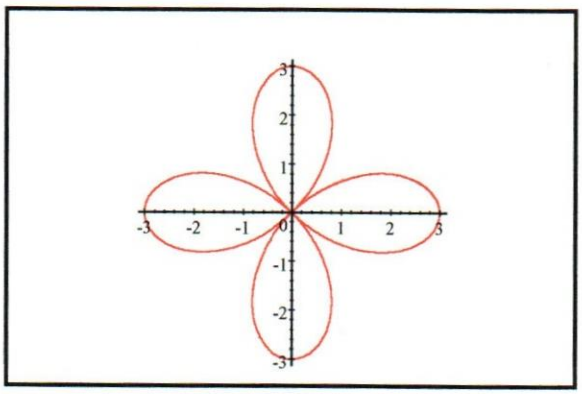

Figura 35

[8] Ver ejemplo 8.

Ejemplo 21.

Obtener la gráfica de la curva $\boldsymbol{r = -\frac{3}{5}\cos(2\theta)}$. Como $n = 2$ la rosa tiene 4 pétalos y se forma completa cuando θ va de 0 a $\boldsymbol{2\pi}$.

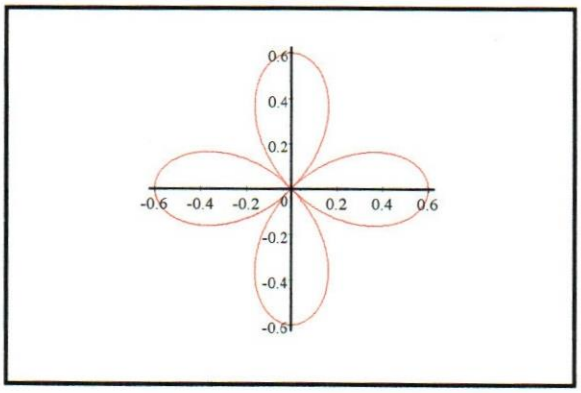

Figura 36

Ejemplo 22.

Obtener la gráfica de la curva $\boldsymbol{r = 4sen(3\theta)}$. Como $n = 3$ la rosa tiene 3 pétalos y se forma completa cuando θ va de 0 a π.

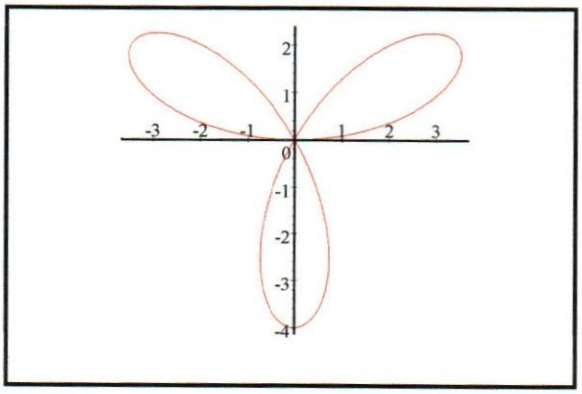

Figura 37

Ejemplo 23.

Obtener la gráfica de la curva $\boldsymbol{r = -2sen(4\theta)}$. Como $n = 4$ la rosa tiene 8 pétalos y se forma completa cuando θ va de 0 a $\boldsymbol{2\pi}$.

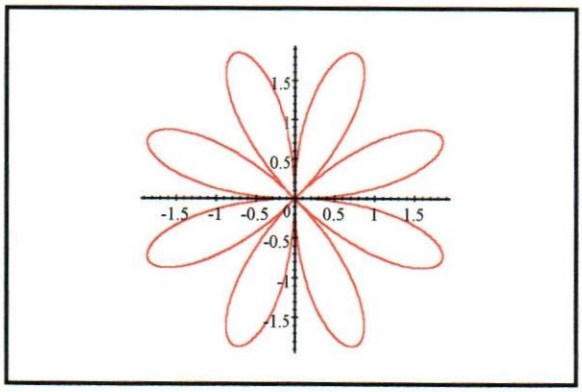

Figura 38

3.2.4 CURVAS DOBLE HOJA

Las ecuaciones de la forma $\boldsymbol{r = asen(\theta)cos^2(\theta)}$ para $a \in R^*$ producen curvas polares llamadas Doble Hojas, simétricas con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$. Las dos hojas de la curva se forman para valores de θ que van de 0 a π. Si θ sume valores negativos se forma la misma curva. Todas las Doble Hojas pasan por el polo cuando $\theta = \boldsymbol{0}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$.

Ejemplo 24.

Obtener la gráfica de la curva $r = 3sen(\theta)cos^2(\theta)$.

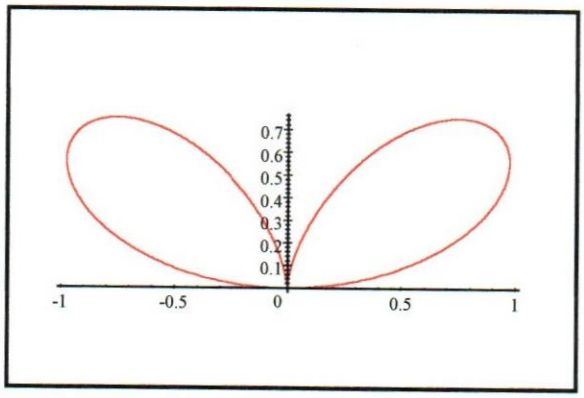

Figura 39

Ejemplo 25.

Obtener la gráfica de la curva $r = -7sen(\theta)cos^2(\theta)$.

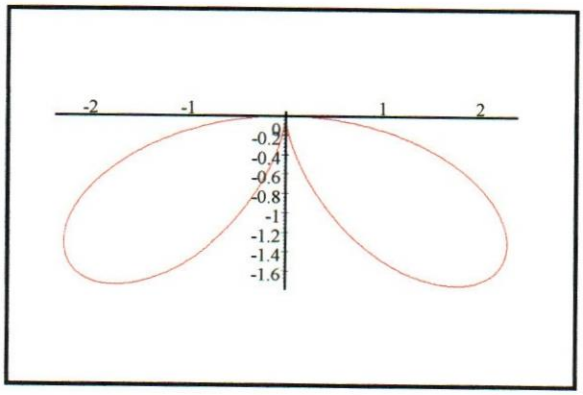

Figura 40

3.3 CURVAS ESPIRALES

Son curvas polares no periódicas que se enrollan alrededor del polo un número infinito de veces, de tal manera que r aumenta o disminuye a medida que θ crece o decrece.

3.3.1 CURVAS ESPIRALES LINEALES O DE ARQUÍMEDES

Las ecuaciones de la forma $\boldsymbol{r = a\theta}$ para $\boldsymbol{a \in R^*}$ producen curvas polares llamadas Espirales Lineales o de Arquímedes, que pasan por el polo cuando $\theta = \boldsymbol{0}$.

Ejemplo 26.

Obtener la gráfica de la curva $\boldsymbol{r = 2\theta}$. Si $\theta \geq \boldsymbol{0}$ la curva abre en sentido antihorario y si $\theta \leq \boldsymbol{0}$ la curva abre en sentido horario.

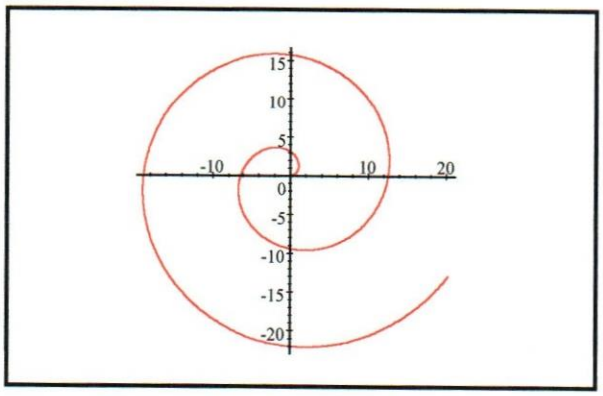

Figura 41 .Para $\theta \geq \boldsymbol{0}$

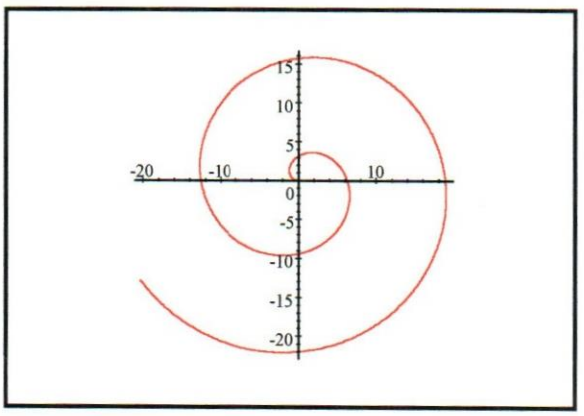

Figura 42 .Para $\theta \leq 0$

Ejemplo 27.

Obtener la gráfica de la curva $r = -5\theta$. Si $\theta \geq 0$ la curva abre en sentido antihorario y si $\theta \leq 0$ la curva abre en sentido horario.

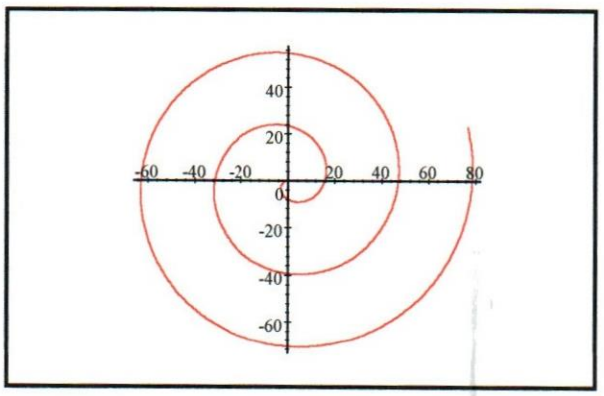

Figura 43. Para $\theta \geq 0$.

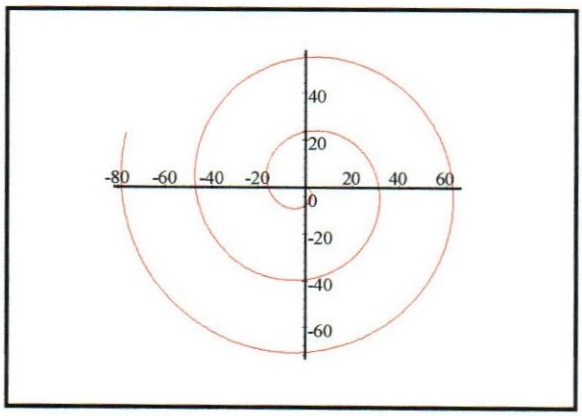

Figura 44 .Para $\theta \leq 0$

3.3.2 CURVAS ESPIRALES LOGARÍTMICAS

Las ecuaciones de la forma $r = e^{a\theta}$ para $a \in R^*$ producen curvas polares llamadas Espirales Logarítmicas, que no pasan por el polo, pues $e^{a\theta} \neq 0$, $\forall \theta \in R$.

Ejemplo 28.

Obtener la gráfica de la curva $r = e^{\theta}$. Para $\theta \geq 0$ el valor de r crece y para $\theta \leq 0$ el valor de r decrece.

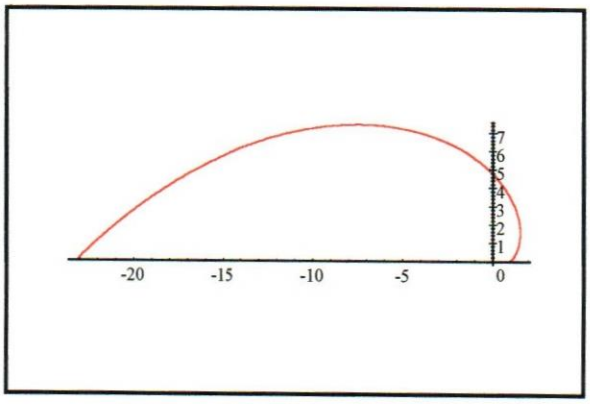

Figura 45. Para $\theta \geq 0$.

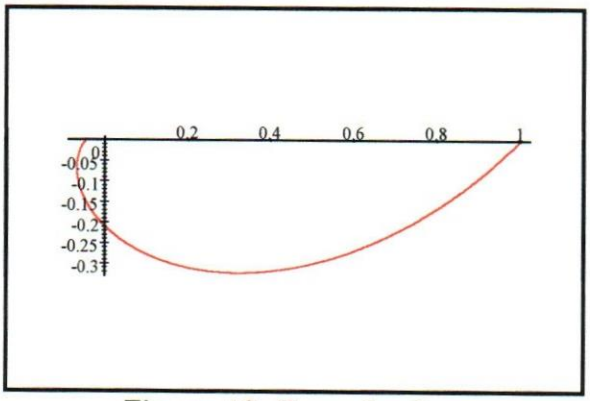

Figura 46. Para $\theta \leq 0$.

3.3.3 CURVAS ESPIRALES HIPERBÓLICAS[9]

Las ecuaciones de la forma $r = \dfrac{a}{\theta}$ para $a \in R^*$ producen curvas polares llamadas Espirales Hiperbólicas, que no pasan por el polo, pues

[9] Ver ejemplo 10.

$\frac{a}{\theta} \neq 0$, $\forall \theta \in R$. La curva presenta dos ramas simétricas con respecto a $\theta = \frac{\pi}{2}$ una para $\theta > 0$ y otra para $\theta < 0$ y una dirección asintótica en $\theta = 0$, que origina la asíntota $y = a$.

Ejemplo 29.

Obtener la gráfica de la curva $r = \frac{2}{\theta}$.

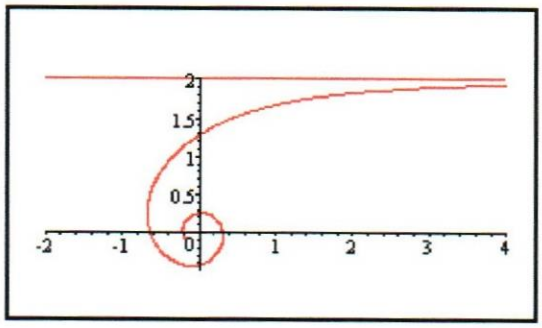

Figura 47. Para $\theta > 0$.

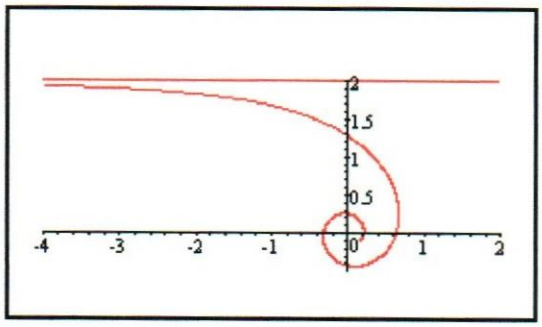

Figura 48. Para $\theta < 0$.

3.4 CURVAS ASINTÓTICAS[10]

Son curvas polares periódicas que tienen una asíntota.

3.4.1 CURVAS CONCOIDES

Las ecuaciones de la forma $r = a\sec(\theta) + b$ para $a \neq b$, $a \in R^*$ y $b \in R^*$ producen curvas polares llamadas Concoides, que pueden o no pasar por el polo (lo hacen si $a\sec(\theta) + b = 0$). Cualquier Concoide es simétrica con respecto al eje polar y se completa con valores de θ que van de 0 a 2π, pero en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$ la curva presenta direcciones asintóticas, que originan la misma asíntota $x = a$. Si θ toma valores negativos se forma la misma curva.

La orientación de la concoide en relación con el eje polar depende de la relación numérica entre a y b.

Ejemplo 30.

Obtener la gráfica de la curva $r = \sec(\theta) + 2$. La curva tiene una asíntota en $x = 1$ y como $b > a > 0$ tiene un rizo.

[10] Ver sección 2.5.1.

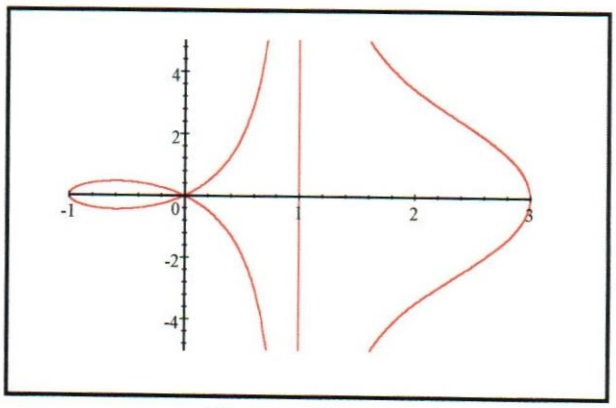

Figura 49

Ejemplo 31.

Obtener la gráfica de la curva $r = 2\sec(\theta) + 1$. La curva tiene una asíntota en $x = 2$ y como $a > b > 0$ no tiene rizo.

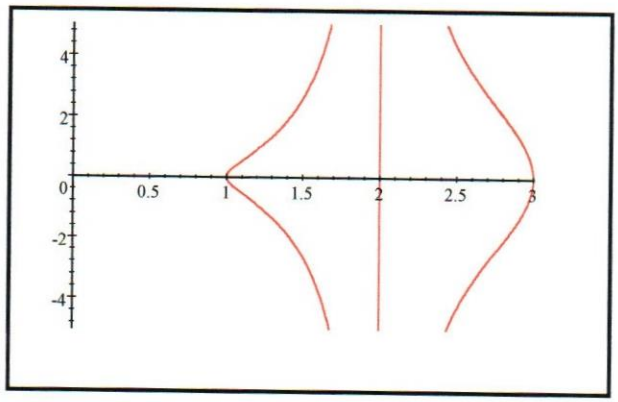

Figura 50

Ejemplo 32.

Obtener la gráfica de la curva $r = -2\sec(\theta) + 1$. La curva tiene una asíntota en $x = -2$ y como $-a > b > 0$ no tiene rizo.

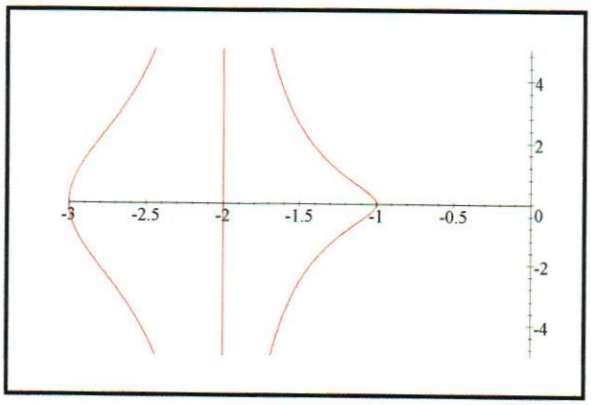

Figura 51

Ejemplo 33.

Obtener la gráfica de la curva $r = -\sec(\theta) + 2$. La curva tiene una asíntota en $x = -1$ y como $b > -a > 0$ tiene rizo.

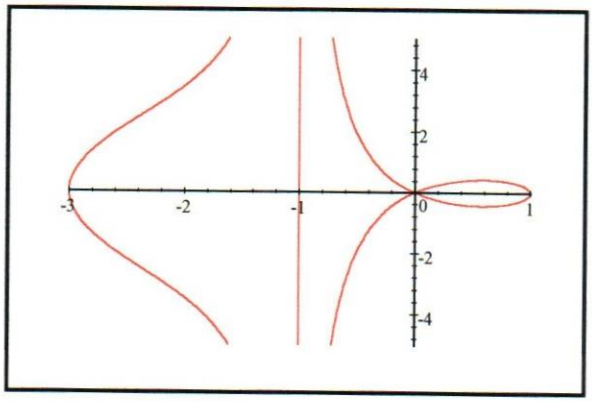

Figura 52

3.4.2 CURVAS CISOIDES

Las ecuaciones de la forma $r = a\,sen(\theta)tag(\theta)$ para $a \in R^*$, producen curvas polares llamadas Cisoides. Que pasan por el polo si $\theta = 0$, son simétricas respecto al eje polar y se forman completas para valores de θ que van desde $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. En $\theta = \frac{\pi}{2}$ y en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ las curvas presentan direcciones asintóticas, que originan la misma asíntota $x = a$. Si θ toma valores del intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ se forma la misma curva. La orientación de las concoides en relación con el eje polar depende del signo de a.

Ejemplo 34.

Obtener la gráfica de la curva $r = \frac{1}{5}sen(\theta)tag(\theta)$. La curva tiene una asíntota en $y = \frac{1}{5}$.

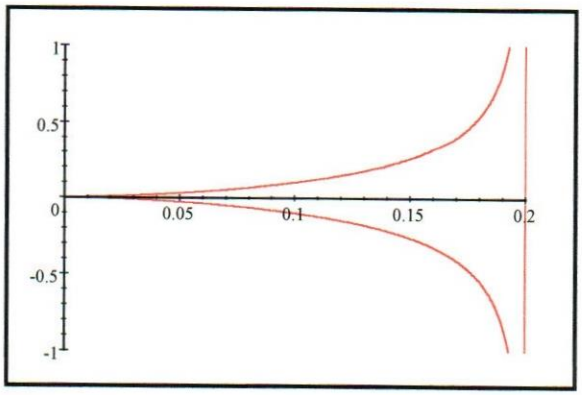

Figura 53

Ejemplo 35.

Obtener la gráfica de la curva $r = -\frac{1}{5} sen(\theta) tag(\theta)$. La curva tiene una asíntota en $y = -\frac{1}{5}$.

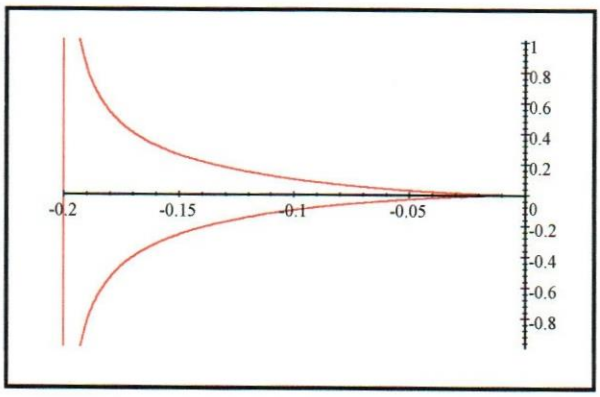

Figura 54

3.4.3 CURVAS ESTROFOIDES

Las ecuaciones de la forma $r = a\cos(2\theta)\sec(\theta)$ para $a \in R^*$ producen curvas polares llamadas Estrofoides que pasan por el polo si $\theta = \frac{\pi}{4}$. Son simétricas con respecto al eje polar y se completa para valores de θ que van desde 0 a π. En $\theta = \frac{\pi}{2}$ las curvas presentan direcciones asintóticas, que originan una misma asíntota $x = -a$. Si θ toma valores negativos se forma la misma curva. La orientación de las estrofoides en relación con el eje polar depende del signo de a.

Ejemplo 36.

Obtener la gráfica de la curva $r = 3\cos(2\theta)\sec(\theta)$. La curva tiene una asíntota en $x = -3$.

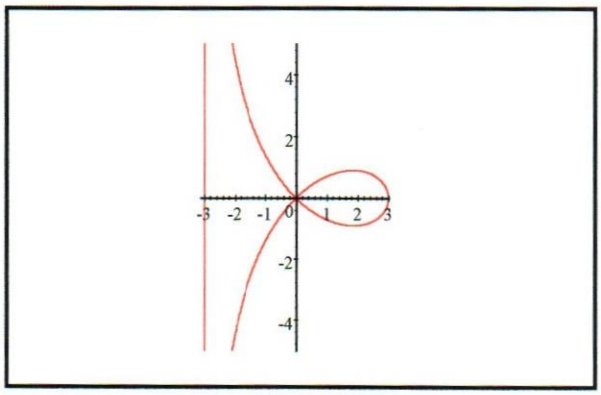

Figura 55

Ejemplo 37.

Obtener la gráfica de la curva $r = -3\cos(2\theta)\sec(\theta)$. La curva tiene una asíntota en $x = 3$.

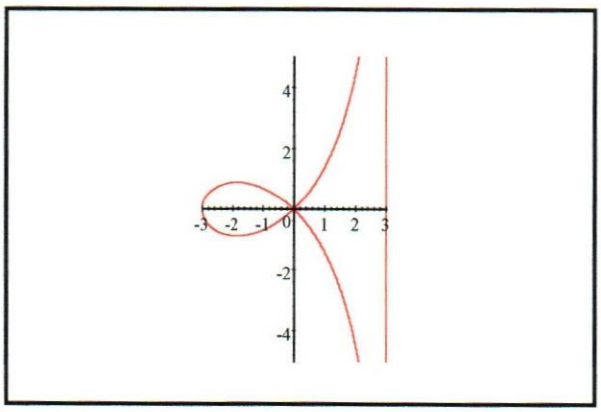

Figura 54

3.5 INTERSECCIÓN DE CURVAS EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Para determinar los puntos de intersección de dos curvas cuyas ecuaciones están en el Sistema de Coordenadas Cartesianas, las dos ecuaciones se resuelven simultáneamente. Las soluciones comunes dan todos los puntos de intersección. Para determinar los puntos de intersección de dos curvas cuyas ecuaciones están en el Sistema de Coordenadas Polares, las dos ecuaciones también se resuelven simultáneamente, sin embargo, se muestran algunos ejemplos para ilustrar algunas diferencias entre los dos sistemas.

Ejemplo 38.

Determinar los puntos de intersección de las curvas $\boldsymbol{r = 2 + 2\cos(\theta)}$ y $\boldsymbol{r = 2 - 2\cos(\theta)}$.

Las curvas corresponden a dos cardioides.

Se observa que θ puede asumir cualquier valor real, que las curvas son simétricas respecto al eje polar y que el período en cada una corresponde al valor $\boldsymbol{2\pi}$. En la figura 57 se muestra la gráfica de cada una de ellas y se observa que tienen tres puntos de intersección.

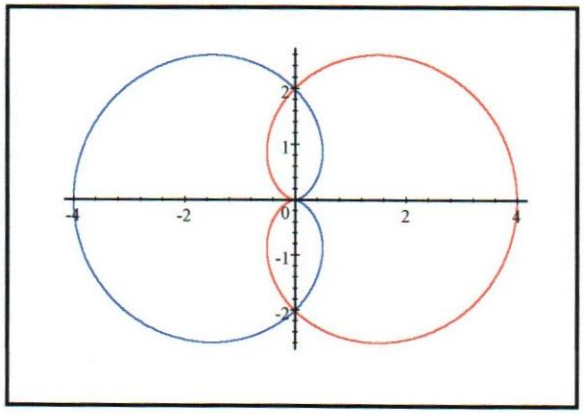

Figura 57

A continuación se buscarán analíticamente los puntos de intersección, resolviendo la ecuación $2 + 2\cos(\theta) = 2 - 2\cos(\theta)$, de forma que:

$$4\cos(\theta) = 0$$
$$\cos(\theta) = 0$$
$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$$

Los puntos de intersección obtenidos analíticamente son $A\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ y $B\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ambas curvas pasan por el origen (polo), sin embargo ese punto no se obtiene analíticamente como intersección porque es generado para ambas curvas por distintos valores de θ. En consecuencia, para encontrar los puntos de intersección de dos curvas polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$, se debe tener en cuenta que los puntos tienen más de una representación en

coordenadas polares. En particular, esto indica que los puntos de intersección no necesitan corresponder a las soluciones $f(\theta) = g(\theta)$.

Como $(0,\theta)$ representa el polo para cualquier θ, se establece si el polo es un punto de intersección estableciendo si $r = 0$ en cada ecuación y resolviendo para θ. Así, $2 + 2\cos(\theta) = 0$ si $\theta = \pi$ y $2 - 2\cos(\theta) = 0$ si $\theta = 0$, por lo que el polo es uno de los puntos de intersección.

Ejemplo 39

Determinar los puntos de intersección de las curvas $r = sen(2\theta)$ y $r = 1$.

La curva $r = sen(2\theta)$ corresponde a la rosa de cuatro pétalos del ejemplo 7. La curva $r = 1$ corresponde a una circunferencia de radio 1 y centro en el polo[11]. En la figura 58 se muestra la gráfica de cada una de ellas y se observa que tienen cuatro puntos de intersección.

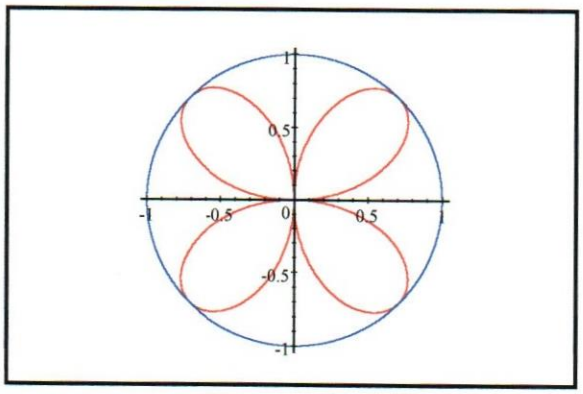

Figura 58

[11] Ver sección 2.3.

A continuación se buscarán analíticamente los puntos de intersección de las dos curvas, resolviendo la ecuación $sen(2\theta) = 1$, de forma que $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

Los puntos de intersección obtenidos analíticamente son $A\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ y $B\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$.

A continuación se mostrará un método general para obtener analíticamente todas las intersecciones de dos curvas polares.

Si la ecuación de una curva polar está dada por $r = f(\theta)$, entonces la misma curva puede escribirse como $(-1)^n r = f(\theta + n\pi)$ si $n \in Z$ [12] (4)

Por lo tanto, la ecuación $r = sen(2\theta)$ tiene también la ecuación (tomando $n = 1$):

$$(-1)r = sen(2\theta + 2\pi)$$
$$-r = sen(2\theta)cos(2\pi) + cos(2\theta)sen(2\pi)$$
$$r = -sen(2\theta)$$

Si se toma $n = 2$, la ecuación $r = sen(2\theta)$, tiene también la ecuación:

$$(-1)^2 r = sen(2\theta + 4\pi)$$
$$r = sen(2\theta)cos(4\pi) + cos(2\theta)sen(4\pi)$$
$$r = sen(2\theta)$$

que es igual a la ecuación original.

Tomando como n cualquier otro entero, se obtiene $r = -sen(2\theta)$ o $r = sen(2\theta)$.

La ecuación $r = 1$ tiene también la ecuación (tomando $n = 1$):

[12] Ver sección 1.3.

$(-1)r = 1$

$r = -1$

Si se toma $n = 2$, la ecuación $r = 1$, tiene también la ecuación:

$(-1)^2 r = 1$

$r = 1$

Al tener las ecuaciones de $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$, se obtienen todos los puntos de intersección de las curvas si se hace lo siguiente:

a) Se utiliza la ecuación (4) para obtener todas las ecuaciones equivalentes a las dos curvas.

$r = f_1(\theta), r = f_2(\theta), r = f_3(\theta)\ldots \qquad (4.1)$

$r = g_1(\theta), r = g_2(\theta), r = g_3(\theta)\ldots \qquad (4.2)$

b) Se resuelve cada ecuación de (4.1) con cada ecuación de (4.2).

En el ejemplo se debe resolver $sen(2\theta) = 1$, que ya se resolvió dando como solución los puntos $A\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ y $B\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$.

También debe resolverse $-sen(2\theta) = 1$ que da como solución los puntos $C\left(-1, \frac{3\pi}{4}\right)$ y $D\left(-1, \frac{7\pi}{4}\right)$.

c) Se verificar si el polo es un punto de intersección estableciendo $r = 0$ en cada ecuación.

En el caso de la curva $r = 1$ la curva no pasa por el polo, así que el mismo no es un punto de intersección.

CAPÍTULO IV
TANGENTES A UNA CURVA DADA EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

4.1.- TANGENTES A UNA CURVA DADA EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Para encontrar una recta tangente a una curva polar de ecuación $r = f(\theta)$ en el punto de coordenadas polares (r,θ), se considera θ como un parámetro y se pueden escribir las ecuaciones paramétricas de $r = f(\theta)$ como:

$$x = f(\theta)\cos(\theta) \qquad (3.1)$$
$$y = f(\theta)\operatorname{sen}(\theta) \qquad (3.2)$$

Luego, puede encontrarse la pendiente de cualquier recta tangente usando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \qquad (4)$$

De la regla de la derivación de un producto se tiene:

$$\frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + f(\theta)\cos(\theta) \qquad (5.1)$$
$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\operatorname{sen}(\theta) \qquad (5.2)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.1) y (5.2) en la ecuación (4), se

obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\theta)sen(\theta) + f(\theta)cos(\theta)}{f'(\theta)cos(\theta) - f(\theta)sen(\theta)} \qquad (6)$$

Obsérvese que para obtener la pendiente de la recta tangente debe sustituirse el valor de θ del punto (r,θ) en la ecuación (6). Si se desea construir la ecuación de la recta tangente en ese punto, éste debe expresarse en coordenadas cartesianas (x_0, y_0) a través de las ecuaciones (1.1) y (1.2)[13] y utilizar le ecuación:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (7)$$

que corresponde a la ecuación de una recta en *el* ***Sistema de Coordenadas Rectangulares***. Si se desea, se puede expresar la ecuación anterior en el ***Sistema de Coordenadas Polares*** a través de las ecuaciones (1.1) y (1.2).

Para localizar las tangentes horizontales se buscan los puntos donde $\frac{dy}{d\theta} = 0$ (siempre que $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$). Igualmente, para localizar las tangentes verticales se buscan los puntos donde $\frac{dx}{d\theta} = 0$ (siempre que $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$).

Si se buscan las tangentes a una curva que pasan por el polo, entonces $r = f(\theta) = 0$ y la ecuación (6) se simplifica y se obtiene la ecuación (8).

$$m = \frac{dy}{dx} = tag(\theta) \quad \text{si} \quad f'(\theta) \neq 0, \text{ es decir } \theta = arctag(m) + k\pi \text{ [14]}, \quad (8)$$

$k \in Z$.

Ejemplo.42.

---

[13] Ver sección 1.4.

[14] Corresponde a la ecuación de una recta polar que pasa por el polo. Ver sección 2.2.

Sea la rosa de tres pétalos de ecuación $r = sen(3\theta)$.

a) Obtener la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto donde $\theta = \frac{\pi}{4}$.

b) Obtener la ecuación de todas las rectas tangentes horizontales.

c) Demostrar que en los tres puntos donde $|r|$ es máximo, la recta tangente es perpendicular al segmento que une el punto con el polo.

La curva corresponde a una rosa de tres pétalos[15], simétrica con respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$. A continuación se muestra una gráfica de la curva.

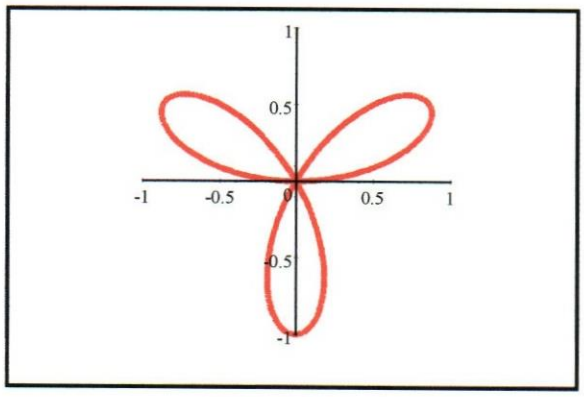

Figura 61

a) En la figura 61 se muestra el gráfico de la curva. A partir de la ecuación (6) se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos(3\theta)sen(\theta) + sen(3\theta)\cos(\theta)}{3\cos(3\theta)\cos(\theta) - sen(3\theta)sen(\theta)}$$

[15] Ver sección 3.2.3.

BIBLIOTECA
Universidad Católica Andrés Bello

Sustituyendo $\theta = \frac{\pi}{4}$ en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{-3}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{-3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Lo que indica que la pendiente de la tangente en el punto donde $\theta = \frac{\pi}{4}$ es $m = \frac{1}{2}$. En $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ así que se trata del punto polar $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Al expresar este punto en el sistema de rectangular utilizando las ecuaciones (3.1) y (3.2) se tiene $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Para construir la ecuación de la recta en el sistema rectangular se sustituye en la ecuación (7) y se tiene $y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

b) Para localizar las tangentes horizontales se buscan los puntos donde $\frac{dy}{d\theta} = 0$ (siempre que $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$). Así se tiene que:

$3\cos(3\theta)sen(\theta) + sen(3\theta)\cos(\theta) = 0$, siempre que $3\cos(3\theta)\cos(\theta) - sen(3\theta)sen(\theta) \neq 0$

Se muestra a continuación el proceso de resolución de la ecuación $3\cos(3\theta)sen(\theta) + sen(3\theta)\cos(\theta) = 0$, utilizando las identidades trigonométricas

$$3\left[4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\right]sen(\theta)+\left[3\,sen(\theta)-4\,sen^3(\theta)\right]\cos(\theta)=0$$
$$12\cos^3(\theta)sen(\theta)-9\cos(\theta)sen(\theta)+3\cos(\theta)sen(\theta)-4\,sen^3(\theta)\cos(\theta)=0$$
$$12\cos^3(\theta)sen(\theta)-6\cos(\theta)sen(\theta)-4\,sen^3(\theta)\cos(\theta)=0$$
$$2\cos(\theta)sen(\theta)\left[6\cos^2(\theta)-3-2\,sen^2(\theta)\right]=0$$
$$2\cos(\theta)sen(\theta)\left[6\left[1-sen^2(\theta)\right]-3-2\,sen^2(\theta)\right]=0$$
$$2\cos(\theta)sen(\theta)\left[6-6\,sen^2(\theta)-3-2\,sen^2(\theta)\right]=0$$
$$2\cos(\theta)sen(\theta)\left[3-8\,sen^2(\theta)\right]=0$$

De la expresión anterior se deduce que:

$\cos(\theta)=0$, por lo que $\theta=\frac{\pi}{2}$.

$sen(\theta)=0$, por lo que $\theta=0$ y $\theta=\pi$.

$3-8\,sen^2(\theta)=0$, por lo que $\theta=arcsen\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ y $\theta=arcsen\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$.

Al buscar las tangentes horizontales usamos la ecuación $y=f(\theta)sen(\theta)$, de modo que:

Para $\theta=0$ y $\theta=\pi$ la tangente horizontal corresponde al eje x.

Para $\theta=\frac{\pi}{2}$ la tangente horizontal corresponde a la recta $y=-1$.

Para $\theta=arcsen\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ la tangente horizontal corresponde a la recta

$$y=sen\left(3\,arcsen\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\right)sen\left(arcsen\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\right)=\left(\frac{3\sqrt{6}}{4}-\frac{4\sqrt{6^3}}{64}\right)\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{9}{16}$$

Para $\theta=arcsen\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$, la tangente horizontal corresponde a

nuevamente a la recta $y = \frac{9}{16}$.

c) Las puntas de los pétalos de la rosa representan los puntos donde $|r|$ es máximo. Para $r = sen(3\theta)$ esto ocurre cuando $sen(3\theta) = 1$ o $sen(3\theta) = -1$, es decir para $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{5\pi}{6}$. A partir de la ecuación (6), se tiene

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{3\cos(3\theta)sen(\theta) + sen(3\theta)\cos(\theta)}{3\cos(3\theta)\cos(\theta) - sen(3\theta)sen(\theta)},$$

Si $\theta = \frac{\pi}{6}$, $m = -\sqrt{3}$. El punto rectangular que corresponde $\theta = \frac{\pi}{6}$ está dado por $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La pendiente del segmento de recta que une este punto con el origen es $m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Se observa que el segmento de recta que une el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con el origen (polo) es perpendicular a la recta tangente en ese punto, pues $mm_1 = -\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{3}} = -1$.

Si $\theta = \frac{5\pi}{6}$, $m = \sqrt{3}$. El punto rectangular que corresponde $\theta = \frac{5\pi}{6}$ está dado por $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La pendiente del segmento de recta que une este punto con el origen es $m_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. Se observa que el segmento de recta que

une el punto $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ con el origen (polo) es perpendicular a la recta tangente en ese punto, pues $mm_2 = \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1$.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $m = 0$. El punto rectangular que corresponde $\theta = \frac{\pi}{2}$ está dado por $(0,-1)$. Se observa que el segmento de recta que une el punto $(0,-1)$ con el origen (polo) es perpendicular a la recta tangente en ese punto.

BIBLIOGRAFÍA

BRADLEY, SMITH. *Cálculo de una variable*. Volumen 1. Prentice Hall Hispanoamericana s.a. 1998.

LARSON, HOSTELER, EDWARDS. *Cálculo y Geometría Analítica*. Mc. Graw-Hill. Quinta edición. 1995.

LEITHOLD, Louis. *El Cálculo con Geometría Analítica*. Harla. Sexta edición. 1992.

SHENK, Al. *Cálculo y Geometría Analítica*. Editorial Trillas. 1997.

SMITH, MINTON. *Cálculo*. Tomo I. Mc. Graw-Hill. 2000.

STEWART. *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. Volumen 2. Internacional Thomson Editores. Tercera Edición. 1998.