Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

TRAB
IC 2000
C8

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

FACULTAD DE INGENIERIA

GUÍA DE FÍSICA

TEÓRICA - PRÁCTICA

Para el CURSO PROPEDEÚTICO

Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

Elaborado por:

Prof. Marinel Cumare Landa

Caracas, Abril de 2000.

AGRADECIMIENTOS

A ***Dios*** por iluminar mi mente y fortalecerme para seguir en la lucha.

A mi ***Familia y a Orlando*** por su gran paciencia y apoyo, donde dediqué su tiempo para realizar mi trabajo.

Al ***Dr. Eduardo Ortiz***, Decano de la Facultad de Ciencias Económica y Sociales por la gran ayuda que me dió en la revisión de todo el material.

A la ***Eco. María Isabel Martínez***, Directora de la Escuela de Economía por su gran apoyo y hacerme ver lo importante de realizar este trabajo, y por su guía a nivel metodológico.

Al ***Prof. Pablo Mujica*** por su orientación y corrección a nivel de los contenidos del área de física.

A ***mis amigos*** por el ánimo y la alegría.

MIL GRACIAS...

INDICE

Página

INTRODUCCIÓN 1

PRIMER GLOBAL

I. *INTRODUCIÓN A LA FÍSICA* 3

II. *MEDICIÓN* 5

Tipos de Medidas 8

Sistema de Unidades 9

Cifras Significativas 12

III. *CONCEPTOS MATEMÁTICOS*

a. Notación Científica 16

b. Área 18

c. Volumen 18

d. Perímetro 18

e. Gráficas 19

Relación Lineal 21

III. *PROBLEMAS PROPUESTOS* 26

SEGUNDO GLOBAL

I. *VECTORES* 37

a. Determinación de Características 40

b. Operaciones

b.1. Suma 42

b.2. Resta 43

b.3. Multiplicación por un Escalar 45

c. Ejemplo de Aplicación 46

II. ***MOVIMIENTO*** 51

a. Términos Fundamentales 52

b. Tipos de Movimientos

b.1. Movimiento Rectilíneo Uniforme 60

b.2. Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado 64

Movimientos bajo la acción de la Gravedad: Casos Particulares del MRUV

b.2.1. Caída Libre 70

b.2.2. Lanzamiento Vertical 70

III. ***PROBLEMAS PROPUESTOS*** 71

TERCER GLOBAL

I. ***DINÁMICA*** 80

a. Leyes de Newton

a.1.) 1era. Ley o Ley de la Inercia 82

a.2.) 2da. Ley o Ley Fundamental de la Dinámica 83

a.3.) 3era. Ley o Ley de Acción y Reacción 86

b. Fuerzas Particulares

b.1. Peso 87

b.2. Normal 89

b.3. Fuerza de Roce 89

b.4. Tensión 93

c. Ejercicios Resueltos 93

II. *PROBLEMAS PROPUESTOS* 101

RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS DEL:

PRIMER GLOBAL 108

SEGUNDO GLOBAL 114

TERCER GLOBAL 119

BIBLIOGRAFÍA 122

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es servir como material de apoyo a los contenidos que se imparten en el Curso Propedéutico de Ingeniería en el área de Física. La idea del Curso es hacer pensar y razonar a los nuevos estudiantes que ingresarán en la carrera de Ingeniería, y nivelarlos en los conocimientos que traen del bachillerato.

En el área de Física, en el tiempo que tiene dictándose el Curso, ha sido complejo decidir cuáles son los puntos más importantes que convienen tratar en esta área para lograr los objetivos. Considero que se ha logrado encaminar el rumbo, y esta guía teórica - práctica intenta ilustrar los contenidos que permiten el logro de dichos objetivos.

En la parte teórica se tratan brevemente los temas que debe desarrollar el docente. Sólo se mencionan los conceptos básicos, y algunos ejercicios que dan la posibilidad de guiar al docente en el proceso de enseñanza - aprendizaje. Los ejercicios propuestos fueron extraídos de diferentes libros y aportes de algunos profesores que han impartido la materia en el Propedéutico.

Espero que este trabajo sirva de apoyo para los próximos debido a que se especifican los tópicos tocados en cada global.

PRIMER GLOBAL

- ***INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA***
- ***MEDICIÓN***
- ***HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS***

I. INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA

La Física es el estudio del Universo material, el cuál es bastante complejo definir, debido a que los conceptos básicos asociados como son: materia, espacio y tiempo, son difíciles, si no imposibles, de definir de manera conceptual.

La principal propiedad de estos conceptos es que son **observables**; interactúan en forma que dan como resultados cambios que podemos detectar. La física es el estudio de la materia, sus interacciones y sus cambios[1].

Hay conceptos que corresponden a *propiedades básicas* de la materia que describen su ubicación en el espacio y el tiempo, o que pertenecen al comportamiento de la misma en conjunto. Estos conceptos si tienen significados muy específicos que se basan en definiciones operacionales. Estas definiciones operacionales determinan una cantidad física diciendo cómo medirlas.

La física pretende entender los fenómenos naturales: qué es, cómo funciona, qué hace y quizá, por qué existe, de manera de reproducir reglas. Por lo general, implica registrar los fenómenos mediante observación y recolección de datos, que es información percibida en forma objetiva. La física cuantifica y asocia números con sus conceptos, planteando leyes (descripción de relaciones en la Naturaleza) y teorías (explicación de los fenómenos).

[1] HECHT, Eugene. *Física 1. Algebra y Trigonometría*. 2da. Edición. Editorial Thomson. México 1998. Pág. 1.

La física ha evolucionado planteando distintas disciplinas como son: la Clásica y la Moderna. El estudio que se hará a lo largo de este texto se refiere a la clásica, específicamente a la Mecánica Newtoniana. Es importante aclararla debido a que se obtienen distintas perspectivas al hacer estudios bajo una u otra de las disciplinas.

En este momento no hay una sola teoría importante que podamos dar por terminada y que sea completamente satisfactoria, a la vez. Esto se ve claramente cuando un mismo fenómeno, visto desde distintas teorías, queda explicado de maneras diferentes.

La física se ayuda de las matemáticas para poder analizar y describir los fenómenos naturales, de manera que sea más fácil verificarlos o refutarlos por medio del experimento.

En fin, la física es una ciencia natural muy amplia y que puede observarse cotidianamente en cada cosa que hacemos, por eso es importante conocerla y entenderla. Por eso, en Ingeniería es importante tener conocimiento de ella para poder analizar y explicar distintos fenómenos que serán herramientas para construir, formar y progresar en el área, y lograr ser más exactos y precisos en todo lo que se haga.

II. MEDICION

Una de las herramientas que nos ayudan a explicar estos fenómenos, como se mencionó, son las mediciones utilizadas para cuantificarlos. Pero ¿de qué forma?. Es muy simple; comparándolos con un **patrón** establecido, y encontrando cuántas veces se repite éste en lo que estamos midiendo.

Hay ciertos aspectos importantes que debemos tomar muy en cuenta cuando hablamos de mediciones:

El Patrón, es aquello con lo que comparamos lo que queremos medir. Podría ser cualquier cosa, pero debe estar claro y muy bien definido, ¿por qué?. A continuación se presentan ciertos EJEMPLOS donde se clarifica la importancia de lo que se afirma:

- Imagine que usted quiere poner una puerta en su casa y el constructor le pide las medidas de la misma para mandarla hacer. Usted realiza la medición con un bolígrafo, debido a que es lo que tiene a la mano, y observa cuántos bolígrafos tiene la puerta de ancho y largo. Luego le entrega la información al constructor: 6 bolígrafos de ancho y 11 de largo. Dicho constructor realiza la puerta con la información dada y cuando llega a montar la puerta resulta que ésta es más grande que el espacio donde debe colocarla, ¿qué pasó?. Muy simple; el bolígrafo de usted y el del constructor

eran diferentes; el del constructor era más grande. Aquí se observa que el bolígrafo *no era un patrón común*. A pesar de que el nombre era el mismo, no estaba definido de igual forma.

- Ahora, un profesor desea cambiar el pizarrón que tiene en su aula porque está muy dañado, y mide el largo y el ancho con un pedacito de tiza. El profesor sabiendo el ejemplo anterior, da a los carpinteros el mismo pedacito de tiza para que realicen el pizarrón nuevo con las medidas tomadas. Días después traen el pizarrón nuevo y resulta más pequeño del que estaba, ¿qué ocurrió?. Que al realizar las mediciones probablemente la tiza se desgastó. Observamos que aquí el problema fue que aunque era la misma tiza, *el patrón* (la tiza) *había cambiado* de dimensiones.

- Supongamos que una persona en el Pico Espejo de Mérida donde estaba nevando , mide la longitud de una mesa para hacerla nueva en Caracas con un alambre de bronce. Esta persona se lleva el alambre con las medidas tomadas y construye la mesa. Cuando lleva la mesa al Pico Espejo nota que es más grande de lo que quería , ¿qué ocurrió?. Que el patrón utilizado, a pesar de haber sido el mismo *cambio sus dimensiones* debido a la temperatura (dilatación y contracción).

Se podrían mencionar muchos ejemplos como éstos, pero se puede concluir que el patrón utilizado debe ser *universal, accesible e invariable*, de manera que realmente se obtenga la misma información sobre la misma medición[1].

Otro aspecto importante de la medición son las unidades, que están relacionadas directamente con el patrón. Al tomar una medida obtenemos un número, que representa la cantidad de veces que el patrón se repite; y este número va acompañado por la unidad, que específica el nombre del patrón utilizado para medir. No se debe olvidar la unidad porque si no la medida no tiene ninguna validez.

- Si realizamos una medición y obtenemos 50, y otra persona obtiene 45, ¿cuál de las dos está correcta?, ¿cuál es más pequeña? No lo podemos determinar, porque podría ser que ambas están correctas porque están expresadas con patrones (unidades) distintos. Numéricamente 45 es más pequeño que 50, pero a nivel de medición ambas magnitudes pueden ser iguales si el patrón utilizado en la primera medición es más grande. En cambio si se habla de 45 Km y 50 cm queda claro cual de las dos es más grande.

[1] RESNICK, Robert y HALLEDAY, David. *Física. Parte I.* 7ma. Edición. Compañía Editorial Continental, S.A. México. 1984. Pág. 14.

TIPOS DE MEDIDAS

Hasta ahora hemos trabajado con mediciones que se denomina *Mediciones Directas* [1], debido a que se hace la comparación utilizando directamente el patrón con el que queremos medir. Existen magnitudes que pueden ser medidas de esta forma, y encontramos su definición en los *Conceptos Fundamentales de la Física* o *Cantidades Físicas Fundamentales*[2], que se definen como conceptos simples, básicos, independientes entre sí, que siempre, al menos uno de ellos, están presenten en cualquier fenómeno físico. Éstos son: la Masa, Longitud, Tiempo, Corriente eléctrica, Temperatura, Cantidad de Sustancia e Intensidad Luminosa. Cualquier otra magnitud puede quedar definida a través de la combinación de estos[3]. En cambio, las *Medidas Indirectas*[1] son aquéllas obtenidas a través de una relación entre estas magnitudes fundamentales. Por EJEMPLO aquéllas determinadas por fórmulas. La rapidez, fuerza, aceleración, densidad, volumen, área etc. son magnitudes determinadas a través de la relación longitud, tiempo y/o masa, y por tanto son medidas indirectas.

En algunos casos es complicado realizar las medidas de alguna de las dos formas que mencionamos. Por ello existe otro tipo de Medición que es por *Aparatos Calibrados*[1]. Éstos son instrumentos de medición que tienen una escala pre-

[1] GIAMBERARDINO, Vicenzo. *Teoría de los Errores*. Editorial Reverte Venezolana, S.A. Venezuela. 1980. Pág. 16.
[2] RESNICK. *Op cit*. Pág. 14
[3] SERWAY, Raymond A. *Física. Tomo I*. 4ta. Edición. Editorial McGraw-Hill. México. 1982. Pág. 4.

viamente definida a través de un fenómeno como referencia, y el trabajo de medición se reduce simplemente a una lectura de la posición de los índices sobre las escalas graduadas. Por EJEMPLO los dinamómetros, balanzas (no analíticas), voltímetros, relojes, etc.

SISTEMAS DE UNIDADES

Los Sistemas de Unidades son un conjunto de distintas unidades, esenciales para poder definir cualquier otra dentro del mismo criterio. Para definirlos se toman como referencia los conceptos fundamentales, dándole un patrón a cada uno.

Los sistemas más comunes son[1]:

- Sistema M.K.S.: Donde las magnitudes fundamentales están definidas con las siguientes unidades: masa en **K**ilogramos (Kg.), longitud en **M**etros (m.) y tiempo en **S**egundos (seg).
- Sistema C.G.S.: Donde las magnitudes fundamentales están definidas con las siguientes unidades: masa en **G**ramos (grs.), longitud en **C**entímetros (cm.) y tiempo en **S**egundos.

NOTA: Observamos que estos dos sistemas sólo definen tres de los Conceptos Fundamentales, debido a que son usados, básicamente, en la Mecánica, y no es necesario definir los restantes. Debido a esto nos limitaremos a trabajar con estos sistemas.

[1] GIAMBERARDINO. *Op cit.* Pág. 17.

- Sistema Internacional (SI)[1]: Este define los siete conceptos fundamentales: longitud en Metros, masa en Kilogramos, tiempo en Segundos, corriente eléctrica en Amperios, temperatura en Kelvin, cantidad de sustancia en Mol, e intensidad luminosa en Candelas. Particularmente, podríamos decir que es el mismo sistema M.K.S. ampliado.
- Sistema Práctico: Define la fuerza en kilogramos peso (Kp), la longitud en Metros, el tiempo en Segundos y la Resistencia Eléctrica en Ohmios internacionales (Ω). Muy utilizado en Ingeniería.
- Sistema Inglés: Define la longitud en pie, la masa en libra y el tiempo en segundos.

Es importante aclarar que todas estas unidades definidas en los sistemas anteriores utilizan patrones universales y duraderos, muy bien definidos. Esto se observa en las unidades que usaremos[2]: *el metro* está relacionada con la distancia entre dos rayas marcadas sobre una regla de aleación de platino e iridio con la longitud de onda de la luz anaranjada emitida por los átomos de un isótopo puro del Criptón-86, y se define como 1.650.763,73 veces esta longitud de onda; *el segundo* con la 86400-ava parte del día solar medio; *el kilogramo* con la masa de un bloque de Platino, equivalente a la masa de 1 dm^3 de agua destilada a presión normal de una atmósfera y a la temperatura de 4°C.

[1] SERWAY. *Op cit.* Pág. 5
[2] GIAMBERARDINO. *Op cit.* Pág.18

¿Qué pasa si queremos comparar o manejar unidades que son distintas, asociadas con la misma cantidad física?. Debemos establecer su equivalencia. Para ello ya están definidas las equivalencias entre las unidades fundamentales, que bien podemos conseguirlas en los libros, y debemos buscar su factor de conversión o aplicar una regla de tres en los casos en que esto sea posible[1]. Es de vital importancia que trabajemos con unidades iguales, porque de lo contrario estaremos sacando conclusiones erradas. Al respecto se menciona un EJEMPLO:

- Suponga que se hizo una medición de la longitud de un tramo de carretera y se obtuvo como resultado una longitud de 3.000 metros, y luego se realizó la medición de un tramo que faltaba y se obtuvo una longitud de 5 kilómetros, ¿cuál es la medida de la longitud de la carretera?. NO podemos decir que es 3005, porque primero no sabríamos si este número representa metros o kilómetros, y además no podemos operar con ambas magnitudes debido a que son distintas. Lo correcto sería transformar los metros en kilómetros (3.000 m = 3 Km), o los kilómetros a metros (5 Km = 5000 m), para así poderlos sumar obteniendo como resultado 8 Km. O, lo que es lo mismo, 8.000 metros.

[1] SERWAY. *Op cit.* Pág. 13.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Otro aspecto importante de la medición es que nunca podremos determinar el valor exacto de la misma, siempre existe una incertidumbre sobre ella[1].

Cuando se realizan mediciones se debe tener mucho cuidado y verificar todos los detalles: como colocar bien el patrón, hacer bien la lectura, aplicar las fórmulas correctas, tener los aparatos bien calibrados,..., para así evitar los errores que estén a nuestro alcance, pero siempre habrá una incertidumbre que no podemos manejar, tal como observamos en este EJEMPLO:

- Podemos verlo cuando realizamos una medida con un metro. Éste tiene divisiones que nos representan los milímetros (1m = 1000 mm), pero cuando lo usamos se da el caso de que el objeto medido no queda exactamente en una de las divisiones, y lo aproximamos a la que está más cerca; cada quien puede aproximarlo a uno u otro extremo debido a que la separación entre las divisiones es muy pequeña y por tanto la medición es dudosa. Aunque el objeto coincida exactamente con una de las divisiones, la medición también es dudosa porque el grosor de la división puede variar la medida, y aunque éste sea muy pequeño no podemos dar con exactitud su valor real. Por ello, se han creado distintos

[1] GIANCOLI, Douglas C. *Física I. Principios con Aplicaciones*. 4ta. Edición. Editorial Prentice Hall. México. 1997. Pág. 7.

instrumentos para poder realizar la medición más precisa, pero siempre existe duda en la última cifra por lo dicho anteriormente.

Debido a todo esto se ha adoptado una forma convencional de proceder, y se ha definido el término de *Cifras Significativas* de una medida, como los números correctos y el primer número dudoso. Abarca el número de cifras contadas a partir de la primera diferente de cero a la izquierda hasta la primera cifra afectada por el error (incertidumbre, duda), inclusive[1].

EJEMPLOS:

- *12,67 cm* Tiene 4 cifras significativas, el número 7 es el dudoso, donde está la incertidumbre, el error.
- *3,4 m* Dos cifras significativas.
- *0,26 grs.* Dos cifras significativas (note que no se cuenta el primer cero).
- *0,3405 seg.* Cuatro cifras significativas (no se toma en cuenta el primer cero pero sí los que están después de que comienza el conteo).
- 3×10^{-1} *cm* Una cifra significativa.

Fíjese en estos dos números: 3 cm y 3,0 cm. Aparentemente son iguales, numéricamente hablando ambos son 3, pero a nivel de medición

[1] GIAMBERARDINO. *Op cit.* Pág. 26.

tienen significados distintos al colocarlos de una u otra forma, debido a la incertidumbre que tiene cada uno. En el primer caso la incertidumbre está en el 3 y en el segundo está en el cero, lo que hace, que este último tenga menor error.

A nivel experimental esto es esencial porque nos permite poder calcular el error cometido al realizar el experimento y ver si el mismo es realmente válido, porque mientras mayor sea el error menos significativo tendrá nuestro experimento.

Al trabajar con este concepto, se deben seguir ciertos criterios para operar con los números, que son los siguientes [1]:

a) Cuando sumamos o restamos tomando en cuenta las cifras significativas, el resultado debe poseer un orden igual al orden de cifra significativa del operando con mayor error absoluto, es decir, el número que tenga menos decimales.

EJEMPLOS:

- *4,72 + 2,1 = 6,8*
- *7,23 + 8,629 = 15,86*

[1] HECHT.*Op cit*. Pág. 13.

- $2{,}37 \times 10^3 + 2{,}98 = 2{,}37 \times 10^3$ (El error de $2{,}37 \times 10^3$ está en el 7, pero también está afectado por el 10^3, además el *2,98* es una cantidad despreciable en comparación con la primera).

b) Cuando multiplicamos o dividimos, el número de cifras significativas del resultado viene definido por aquella cantidad que posea el menor número de cifras significativas. (no se toman en cuenta las cifras significativas de una constante).

EJEMPLOS:

- $7{,}2 \times 11{,}7 = 84$
- $5{,}23 \times 1{,}3 \times 2{,}1 = 14{,}2779$ debe colocarse con dos cifras significativas ~ 14 , lo que muestra que debemos jugar con el número pero sin que deje de ser él.
- $A = 4{,}56$ $B = 1{,}2$ $W = A \times \frac{B}{2}$

$W = 2{,}736$ pero debe colocarse con dos cifras significativas, fíjese que el 2 de la división de la fórmula no se toma como medida de cifras significativas, $W \sim 2{,}7$.

III. *CONCEPTOS MATEMÁTICOS*

La física utiliza como lenguaje las matemáticas. Por eso es importante tener claros ciertos conceptos que nos ayudarán, como herramientas, para resolver y entender nuestros estudios físicos.

a. NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica sirve para expresar en forma más manejable aquellas cantidades que son demasiado grandes o demasiado pequeñas; esto se logra colocando el número en forma abreviada como un producto de un número comprendido entre 1 y 10, por una potencia de base diez[1].

EJEMPLOS:

- $234000000 = 2{,}34 \,.\, 10^{8}$
- $0{,}00000875 = 8{,}75 . 10^{-6}$
- $0{,}764 = 7{,}64 \,.\, 10^{-1}$
- $5389 = 5{,}389 . 10^{3}$

Se observa que cuando tenemos números muy grandes, al colocarlos en Notación científica quedarán con una potencia de exponente positivo, y cuando son muy pequeños, con un exponente negativo.

[1] ALVARENGA, Beatriz y MAXIMO, Antonio. *Física General con Experimentos Sencillos*. 4ta. Edición. Editorial Harla. México. 1983. Pág. 6.

Lo que hemos definido anteriormente es lo formal, pero igualmente se puede colocar los números de forma abreviada, multiplicándolos por una potencia de diez, sin necesidad de que estén comprendidos entre 1 y 10. Esto nos ayuda sobre todo al realizar operaciones donde tenemos distintas potencia de diez.

Para realizar operaciones donde hay números colocados en notación científica, sigo las propiedades de la potenciación.

EJEMPLO de operaciones con Notación Científica:

$$\frac{(6\ x10^{2}) + (5\ x10^{3})}{(2\ x\ 10^{-7})} - \frac{(5\ x\ 10^{3}) - (6\ x10^{5})}{(3\ x\ 10^{-1}) + (5.10^{-3})}$$

a) Es recomendable desarrollar cada una de las fracciones por separado.

b) En los numeradores y un denominador hay sumas de potencias de distintos exponentes; para poderlos operar debo transformarlas de manera que el exponente quede igual:

$$\frac{(6x10^{2}) + (50x10^{2})}{2x10^{-7}} - \frac{(5x10^{3}) + (600x10^{3})}{(300x10^{-3}) + (5x10^{-3})}$$

c) De esta manera sí se pueden operar; por propiedades de la potenciación:

$$\frac{56x10^{2}}{2x10^{-7}} - \frac{605x10^{3}}{305x10^{-3}}$$

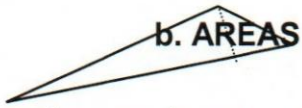
d) Ahora, realizo las divisiones de los coeficientes y opero las potencias de igual base como lo indica las propiedades de la potenciación:

$$28 \times 10^9 - 1{,}98 \times 10^6$$

e) Debo realizar nuevamente cambios de exponente en el minuendo y sustraendo para igualarlos, de modo que se puedan restar:

$$28000 \times 10^6 - 1{,}98 \times 10^6$$

f) Como uno de los términos es muy grande en comparación con el otro, podemos despreciar el más pequeño, colocándolo en forma de notación científica: 28×10^9

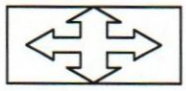


b. AREAS

Espacio Bidimensional ocupado por un cuerpo (largo y ancho), se encuentra en un plano.

c. VOLUMEN

Espacio Tridimensional ocupado por un cuerpo (largo, ancho y profundidad).



d. PERÍMETRO

Suma de todos los lados de una figura.

Las áreas, volúmenes y perímetros se utilizan en ejercicios para conversiones, son temas de geometría más que de Física.

e. GRAFICAS

El estudio de los fenómenos físicos generalmente se realiza a través de representaciones gráficas, porque éstas permiten tener una visión global, y con una simple observación se puede ver con mucha claridad qué esta ocurriendo.

Generalmente las representaciones que se utilizan son expresadas en un plano (sistema cartesiano), viendo la relación que existe entre las variables con las que se está trabajando.

El sistema cartesiano consta de dos ejes rectangulares (forman 90° entre sí), donde en cada uno se expresan las variables, siendo una dependiente de la otra. El eje horizontal, mejor conocido como eje X, se denomina eje de las Abscisas, y en él se colocan las variables independientes, porque a partir de ellas se puede encontrar el valor de la otra variable (dependiente), la cual se coloca en el eje vertical, mejor conocido como eje Y, y denominado eje de las Ordenadas. Esta representación se hace a través de puntos expresados como (X,Y), manteniendo dicho orden de presentación. Cuando esto ocurre se dice que Y está en función de X, [Y(X)], lo cual sirve para identificar cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.

Es importante colocar un nombre a la gráfica para identificar qué se está representando, así como dar nombre a cada uno de los ejes con su unidad respectiva. Las escalas de cada eje se deben mantenerse siempre a lo largo de cada uno de ellos, aunque no necesariamente la escala utilizada en uno de los ejes

debe ser igual a la usada en el otro. La escala será realizada en función de la necesidad que se tenga (según los datos).

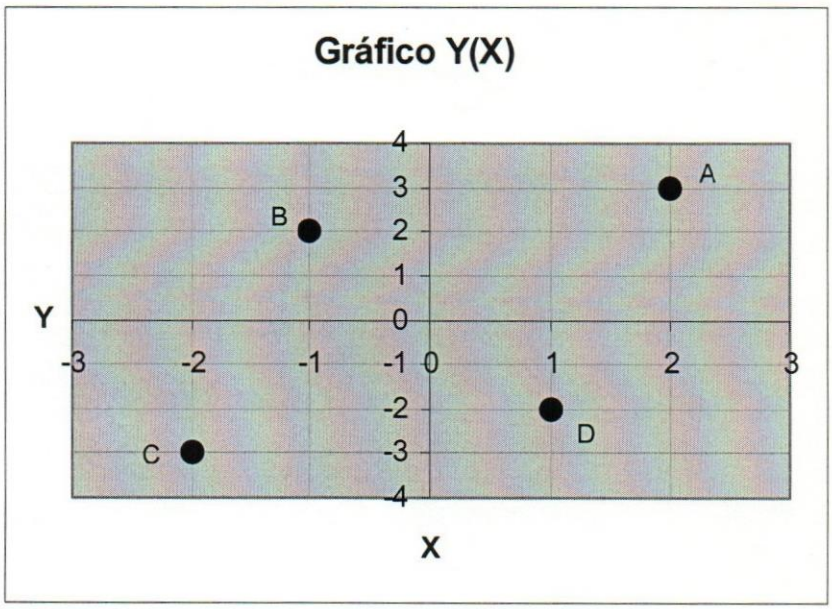
EJEMPLO de ubicación de puntos en el sistema cartesiano

A (2, 3)

B(-1.2)

C(-2,-3)

D(1,-2)



Las relaciones que se pueden establecer son variadas, y según sean éstas obtendremos distintas gráficas al unir los puntos (unidos de izquierda a derecha en el orden en que se van encontrando). El tipo de gráfica determina la relación que existe entre las variables. Nuestro estudio se concentrara en la relación lineal.

RELACIÓN LINEAL[1]

Quiere decir que hay proporcionalidad entre las variables. A medida que una crece la otra también, o a medida que una disminuye la otra también, manteniendo un ritmo de crecimiento o decrecimiento constante, que viene dado por la pendiente (m) de la recta. La pendiente simplemente es la relación de incremento o disminución de la variable dependiente, al modificarse la variable independiente: $m = \frac{Y2 - Y1}{X2 - X1}$. No importa el orden en el que se pongan el punto 1 y el punto 2, siempre y cuando se mantenga el mismo orden en el numerador y en el denominador.

Si la pendiente es positiva quiere decir que es la recta creciente, o que la variable dependiente y la independiente se mueven en el mismo sentido; y si la pendiente es negativa significa que la recta es decreciente, o que la variable dependiente e independiente varían en sentido contrario.

Hay otro componente en la relación lineal que es la ordenada por donde pasa la recta "b", que determina el punto de corte con el eje Y, y que se llama también ordenada en el origen.

Con estos dos elementos se expresa de forma general la relación lineal

$$Y = m.X + b$$

[1] ALVARENGA. *Op cit.* Pág. 29.

Es muy sencillo conseguir la relación lineal teniendo sólo dos puntos, ya que sabemos que la pendiente es constante. A partir de ahí, después de definida la función, puede encontrarse el valor de cualquier variable dependiente, conociendo un valor determinado de la variable independiente.

> ***NOTA:*** *Las rectas paralelas tiene igual pendiente ($m_1 = m_2$), esto se debe a que su crecimiento o decrecimiento es igual. Y cuando son perpendiculares es el valor inverso negativo ($m_1 = -1/m_2$).*

EJEMPLO: ♦ Dados los puntos A (-1,3) y B (2,2). Realice la gráfica y determine:

a) Su relación (ecuación),

b) Punto de corte con el eje Y

c) Punto de corte con el eje X,

d) Qué valor tiene Y cuando X es 6

e) Que valor tiene X cuando Y es –2.

♦ RESPUESTAS:

a) Para determinar la relación busco el valor de la pendiente

$$m = \frac{3-2}{-1-2} = \frac{2-3}{2-(-1)} \Rightarrow m = \frac{-1}{3}$$

Sabiendo que es lineal la relación, se cumple que $Y = m.X + b$, y como $m = \frac{-1}{3}$ y ambos puntos pertenecen a la recta, se puede sustituir cualquiera de los dos en X,Y para determinar b:

Tomando el punto A: $$3 = \frac{-1}{3} \times (-1) + b$$

Despejando y resolviendo obtengo que $$b = \frac{8}{3}$$

> ***NOTA**: Hay que tener claro que la pendiente acompaña a la X sólo cuando Y esta despejada de lo contraria ésta se disipa en toda la ecuación.*

La ecuación es: $$Y = \frac{-1}{3} X + \frac{8}{3}$$

La ecuación hallada pueda ser colocada de la siguiente forma, sacando el mínimo común múltiplo en toda la ecuación, eliminando el denominador e igualando a cero:

$$X + 3Y - 8 = 0$$

> ***NOTA**: Se debe tener mucho cuidado al despejar cumpliendo con todos los criterios del álgebra.*

b) Sabemos que b es la ordenada por donde pasa la recta cuando cruza el eje de ordenadas, por lo que el punto de corte con Y es $(0, \frac{8}{3})$

c) Para determinar el punto de corte con X, despejamos en la ecuación hallada, y sustituimos en Y cero.

$$X = 8 - 3.Y$$

$$X = 8 - 3x(0)$$

$$X = 8$$

Punto de corte: (8,0)

d) Para determinar ese valor sustituimos en la ecuación hallada el valor 6 en X: $Y = \frac{-1}{3} \times (6) + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$

Punto: (6, $\frac{2}{3}$)

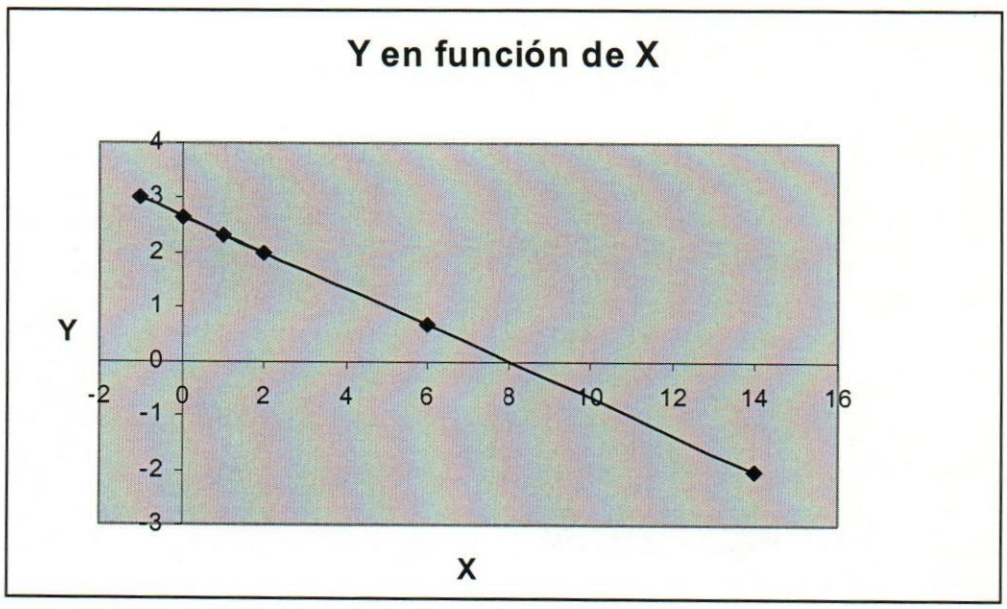
e) Para determinar el valor despejamos X en la ecuación hallada, y sustituimos en Y = -2.

$$X = 8 - 3.Y = 8 - 3.(-2) = 14$$

Punto: (14, -2)

Para realizar la gráfica se sustituye en la ecuación hallada cualquier valor de X para determinar más valores de Y, y finalmente se unen los puntos para definir la recta.

X	-1	2	0	1	6	14
Y	3	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$	-2


Y en función de X
Y
X
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16

PROBLEMAS PROPUESTOS

PRIMER GLOBAL

1.-) Carlitos mide una pared con un cuaderno, porque no tiene un centímetro, y obtiene como resultado 30. Luego viene Juancito y mide la misma pared con un bolígrafo y obtiene 45. ¿Cuál es la relación de esas medidas entre sí?. ¿Es la primera mayor, menor o igual que la segunda? Justifique su respuesta.

2.-) Se tienen unas medidas: 50 y 95. ¿Cuál de las dos es mayor?

3.-) Una persona se encuentra en una isla desierta y al parecer va a estar allí por mucho tiempo. Comienza a realizar medidas con un trozo de madera para construir su vivienda. Inicialmente mide un espacio de 10x6. Días después busca unas piedras en un lugar lejano, porque en su entorno no las había. Mide cada una de las piedras de manera que cubran el espacio medido (solo su contorno). Vuelve al lugar y coloca las piedras teniendo un inconveniente: las piedras no le alcanzaron para abarcar todo el contorno. Indique las posibles causas de que le haya ocurrido esto.

4.-) Dos científicos realizan un experimento midiendo el valor de la aceleración de la gravedad. Uno obtiene el valor de 9,8 y el otro de 32,2. ¿Cuál de los dos hizo el experimento correcto? Explique por qué.

5.-) ¿Cuál de estas dos medidas es más grande: 45 ó 90?.

6.-) Si alguien dijera que todas las dimensiones de todos los objetos se han reducido de la noche a la mañana a la mitad de su valor, ¿cómo se podría refutar dicha afirmación?

7.-) Realice las siguientes transformaciones:

a) 0,37 cm^2 a pie^2

b) 550 mi/s a plg/h

c) 3,5 libras a Newton

8.-) Escriba en forma de Notación Científica:

a) 188 cm.

b) 0,00008 min

c) 0,000276 Kg.

d) 197.10^2 Kg.

e) 2000.10^{-5} grs.

f) $0,00067.10^{-2}$ Km.

g) $0,00000028.10^3$ mm.

h) 126400 horas

i) $956,756.10^{-1}$ litros

9.-) Realice las siguientes operaciones utilizando la Notación Científica:

a) 0,0021 . 30000000

b) $(5.10^{-3})^3$

c) $(\sqrt{2,5.10^5}) + 3.10^2$

d) $\dfrac{3,2x10^3 + 2,1x10^2 - 1,10x10^5}{7,1x10^2.2 + 6x10^{-1}}$

e) $\dfrac{0,25x10^2 + 1,2}{3,3x10^3} - \dfrac{2x10 + 3,2x10^3}{5,5x10^5}$

f) $\dfrac{(3,8x10^3 + 2,9x10)}{3,9x10^2} \times \dfrac{(2,3x10^2 + \sqrt[3]{27x10^6})}{3,2x10 - 4x10^3}$

g) $\dfrac{7,54x10^8 - 3,7x10^7}{2x10^2} - \dfrac{(\sqrt{16x10^{-6}}) \times 4,8x10^{-3}}{4x10^{-7} \times 8,1x10}$

k) $4,23.10^7 + 1,3.10^6$

l) $6,5.10^3 - 3,2.10^3$

m) $\dfrac{7,28x10^5}{4.10^8} + 3,91x10^5$

n) $\dfrac{7,28x10^5}{4,24x10^8} - \dfrac{(5x10^{-3})^3}{5,1x10^2}$

o) $8,20x10^8$ lb. + $5,4x10^4$ kg.

h) $\dfrac{[\sqrt{(4x10^2\ mm^2)}^3]\ x\ 2x10^3\ dm^3}{8x10^8\ m^3} + \dfrac{2,5x10\ cm^2}{5x10\ cm^{-1}} - \dfrac{3,8x10^2\ m^3 + 2x10^2\ dm^3}{2x10^3}$

i) $\dfrac{3x10^2\ plg.x\ 5,02x10^{-3}cm}{2x10^{-7}\ m} - \dfrac{5x10^3\ Km.x\ 6x10^6\ mi}{3x10x10^{-6}\ m}$

j) $\dfrac{[\sqrt{(4x10^2\ mm^2)}^3]\ x\ 2x10^3\ dm^3}{1,2x10^8\ m^3} + \dfrac{2,5x10\ cm^2}{5x10\ cm^{-1}}$

10.-) Realice las siguientes operaciones tomando en cuenta las cifras significativas:

a) $4,23x10^7 + 1,3x10^6$

b) $\sqrt{2,5x10^5} + 3x10^2$

c) $\dfrac{7,54x10^8 - 3,7x10^7}{2x10^2} - \dfrac{4,8x10^{-3}\sqrt{16x10^{-6}}}{4,0x10^{-7}\ x\ 8,1x10}$

d) $\dfrac{7,28x10^5}{4,2x10^8} - \dfrac{(5x10^{-3})^3}{5,1x\ 10^2}$

e) 27,48 + 2,5

f) 342,1 + 1,1

g) $V = \dfrac{AxH}{2}$ A = 0,302 H = 1,020 V = ?

h) 350 + 2,1 - 3,229

i) 11,3 x 6,7 x 1,2

j) $3,27.10^2 + 8,72 - 1,2.10^3$

k) $\dfrac{2,10x3,22}{1,11} + 3,1x10 - 2,28$

l) $M = \frac{3 \times H}{N} + 2 \times P - H$ H = 3,1 P = 1,237 N = 2,69

11.-) Diga cuál es la relación de las siguientes medidas (= ,< ,>) con 3x10 m.

3x10 cm ; 3x10 m; 30x10 m; 0,3x10 cm; 30x10 mm

12.-) Coloque las siguientes expresiones en orden creciente

$4x10^{5}$; $2x10^{-2}$; $8x10^{-7}$

13.-) ¿Cuál de estos números es mayor y, cuál es menor? (no desarrolle la NC).

$3,8x10^{3}$; $5x10^{-3}$; 18,8x10

14.-) Cuando uno toma una medida, el valor no es exacto, ¿dónde se supone que debe estar la incertidumbre?.

15.-) Al medir una longitud de una carretera se obtuvieron 56 Km. ¿Cuál es el número dudoso de esta medida?

16.-) Al tratar de construir un modelo a escala del sistema solar, un estudiante representó al Sol por medio de una pelota cuyo radio era igual a 10 cm. Él sabe que el radio solar tiene un valor aproximado de 10^{9} m.

a) Si el radio de la Tierra es casi 10^{4} Km. ¿Cuál debe ser el radio de la esfera que representará en el modelo a escala?.

b) Si se considera que la distancia de la Tierra al Sol es 10^{11} m, ¿a qué distancia de la pelota del Sol debe colocar el estudiante la esfera que representa la Tierra?

17.-) Un campesino de un país lejano recorre 25 "dragmas" caminando 3 horas para ir de un pueblo a la cima de una montaña. Luego baja al otro lado hasta que se encuentra a 10 "estampas" de la cima, tardando 1 hora. Decide medir el lago y va caminando durante 1 hora por todo el borde hasta concluir que tiene 120 "códulos" de longitud. La montaña tiene una altura sobre el nivel del lago de 400 "espacios":

a) Determine la distancia total recorrida

b) Realice la gráfica de la distancia recorrida por el campesino

c) ¿Cuánto ha recorrido el campesino a las 3,6 horas de haber salido del pueblo?

Se sabe que: 5 "dragmas" son un "cuarteto",

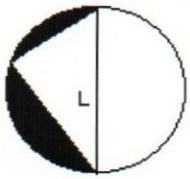
1 "cuarteto" es la cuarta parte de una "estampa",

3 "códulos" son un "espacio"

18.-) En una tienda de cuero el metro de éste cuesta 850 Bs., y Ud. desea comprar 36,4 m. El empleado que le atiende utiliza una cinta métrica de 1m al que por desgaste le faltan 4 mm en la punta. Una vez realizada la operación de medida por el empleado, usted le hace la observación del error cometido, y plantea que pagará el monto en función de la medida que debe ser y no de la realizada por él. ¿Cuánto menos debe cancelar por el error cometido en la medida?.

19.-) Hallar el área de lo sombreado en función de R y π

a)



L = 2R

b)

r1 = R
r2 = R/3
L = R

20.-) Si el área de una cuadrado es de 4 m^2, y se divide en tres (3) partes, de manera que la primera sea la cuarta parte de la segunda, y la tercera sea la mitad de la primera. ¿Cuál es el área de cada una de las partes?

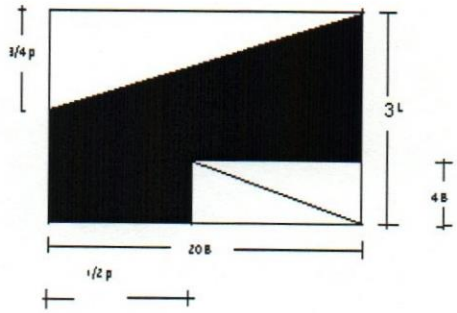
21.-) Un triángulo isósceles está dentro de un cuadrado, teniendo un lado en común. El área que queda fuera del triángulo y dentro del cuadrado es A. Hallar el valor del área del cuadrado en función de A.

22.-) Un barco carguero tiene una capacidad de almacenamiento de gasoil de 32.000 m^3 dividido en cuatro tanques cúbicos. Repentinamente encalla, produciéndose un orificio en uno de sus tanques. Por el orificio se derrama gasoil a razón de 5 m^3 por segundo. La naturaleza es capaz de biodegradar 1,5 m^3 por segundo de gasoil; este efecto se produce sólo después de los primeros 2.500 m^3 de gasoil. Si el sólido que crea el gasoil derramado en el mar es igual a media esfera, determinar el volumen de dicha media esfera después de 10,5 minutos medidos a partir del derrame.

23.-) Un agricultor tiene un terreno donde quiere sembrar rosas, pero ha hecho un estudio de tierra y sólo puede hacerlo en una sección (la sombreada). Determine el área que el agricultor puede sembrar.

1 Papel (p) = 2 Lápices (L)

1 Borra (B) = ¼ Lápices (L)



24.-) José es el encargado de cercar una granja para luego hallar su superficie. Él dispone para cercarla de minas, plumas, gancho y mangos. El primer día cercó con 25 plumas, el segundo día cercó con 50 minas (base mayor), el tercer día usó 45 ganchos (base menor) y el cuarto día usó 15 ramos. ¿Cuántos mangos usaría si hubiese cercado toda la granja con mangos, y cuál es su superficie, sabiendo que la granja tiene forma de trapecio y que su altura es de 4,25 chinches?

Se sabe que: 1 mina es ½ mango, 1 pluma son 4 minas, 1 gancho es 1/5 mina, 1 llave son 4 minas, 1 chinche son 6 llaves, 1 ramo es 1/3 chinche.

25.-) Se tiene un cono cuya base tiene un radio de 20 cm y una altura de 30 cm. Este está invertido y lleno de agua. Por la punta del cono hay un orificio que deja

escapar una gota de 2,5x10 mm^3 aproximadamente cada segundo. Una vez derramada totalmente el agua sobre el piso, se dispersa y ocupa una superficie de $1,5x10^5$ cm^2. Determinar:

a) El volumen ocupado del cono, transcurridas 28,5 h.

b) El número total de gotas de agua en el cono lleno.

c) El espesor del líquido dispersado en el suelo

d) El número de días necesarios para que el cono se vacíe.

26.-) Un niño nace con 3,4 Kg. y una estatura de 60 cm. Al mes pesa 4,2 Kg. y su estatura es de 70 cm. A los dos meses su peso es de 6 Kg. y su estatura es de 80 cm. A los tres meses sufre una peligrosa enfermedad y pierde 1,2 Kg. y mide 85 cm. A los 5 meses detiene su tasa de crecimiento en 85 cm. durante dos meses.

a) Elabore las gráficas: a.1.-) Crecimiento en función del tiempo

a.2.-) Peso en función del tiempo

a.3.-) Peso en función del crecimiento

b) Determine el peso a los 45 días de nacido. (suponga que todos los meses tienen 30 días)

27.-) Un científico loco realiza unas observaciones de un fenómeno X. El primer día ve 3 "M", el segundo ve 2 "O" y durante dos días más sigue aumentando en la misma proporción. Luego observa la misma cantidad de "M" (del último día observado) por dos días y después comienza a observar 2 "M" menos por día hasta que finalmente no observa más.

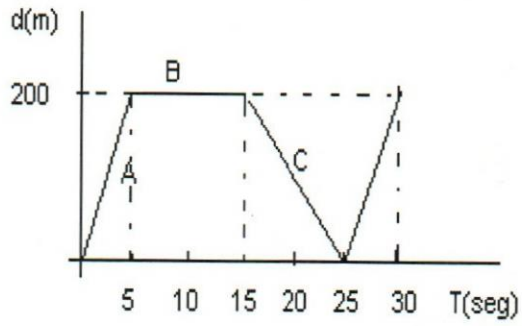
Sabiendo que 1 "O" = 3 "M".

a) Realice la gráfica

b) ¿Cuántas "M observa en el décimo día?

c) ¿En qué cantidad se mantienen las observaciones de "M" constantes?

28.-) Dada la gráfica:



a) Halle la ecuación de las rectas A y C.

b) Compárelas y señale 2 diferencias y una semejanza entre ambas.

c) ¿Cómo son las pendientes de A y D? Saque conclusiones.

29.-) Dados los puntos siguientes, represente gráficamente la función y estime el valor de Y cuando x = 3; además estime el valor de X cuando y = -2

X	1	2	0	-1	-2
Y	2	3	1	0	-1

30.-) Dados los puntos:

X	-2	-1	3	4
Y	27	23	7	3

a) Represente gráficamente la función.

b) Estime el valor de Y cuando x = 2

c) Estime el valor de X cuando y = 12

d) Punto de corte con el eje X

e) Punto de corte con el eje Y

31.-) Dada la recta $2.X - 5.Y + 10 = 0$, encuentre la ecuación de una recta paralela y otra perpendicular que pasen por el punto (-1,-2) , y represéntelas gráficamente en un solo sistema de coordenadas (determine sólo dos valores para realizar la gráfica).

32.-) Después de haber realizado cierto experimento entre la temperatura y la longitud de un objeto, se han obtenido los siguientes resultados:

T (°C)	3	4
L (cm)	6	10

Así mismo se ha comprobado que la relación entre ambas variables es lineal. Un científico necesita saber qué pasará cuando la temperatura sea 20°C, y además saber a qué temperatura tendrá el objeto una longitud de 19 cm.

SEGUNDO GLOBAL

- VECTORES
- MOVIMIENTO

I. *VECTORES*

Dentro de la Física se encuentran muchas magnitudes que no quedan totalmente definidas con un solo número, sino que necesitan otras características complementarias. De aquí surge la necesidad de definir por separado las magnitudes Escalares y Vectoriales[1].

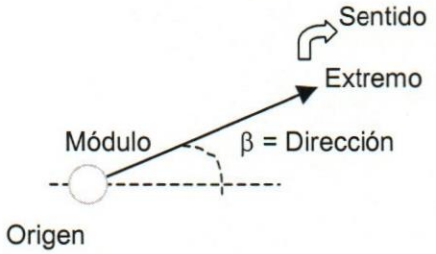
Las Magnitudes Escalares son aquéllas que quedan definidas con sólo un número y su unidad respectiva (dependiendo del patrón utilizado), como por ejemplo; la temperatura, las distancias, etc.

Las Magnitudes Vectoriales son aquéllas que además de su número y unidad, necesitan la dirección y sentido para definirse completamente. De aquí se derivan los conocidos vectores.

Un **Vector**, de manera muy simple, puede entenderse como un segmento orientado. Éste tiene un *origen*, que es el punto donde nace el vector; un *extremo,* que es el punto hasta donde llega; y una flecha que define el *sentido*, o la orientación del mismo. Para indicar el *sentido* nos podemos guiar a través de los puntos cardinales (norte, sur, este, oeste), o apuntar simplemente que el vector se dirige hacia la derecha, izquierda, arriba, o abajo. La *dirección* nos da la inclinación del vector; ésta puede ser expresada a través de un ángulo dado en referencia con la

[1] GIANCOLI. *Op cit.* Pág. 23

horizontal o la vertical. La longitud entre el origen y el extremo nos indica el *módulo* del vector.

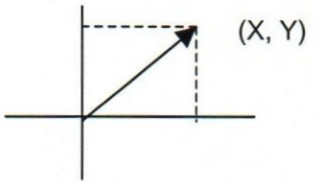


Los Vectores pueden encontrarse en una sola dimensión, donde quedan definidos, por ejemplo, en relación con una horizontal o una vertical; pueden encontrarse en dos dimensiones, y entonces necesitan dos indicadores (llamados componentes); y en tres dimensiones, donde se necesitan tres componentes que los definan. Es más sencillo ver esto a través de los sistemas de coordenadas.

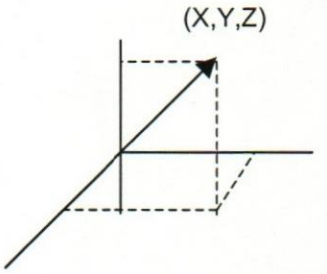
EJEMPLOS:

Vector horizontal,

Una sola dimensión.
Este vector también puede
ser definido en dos dimensiones.



Dos Dimensiones



Tres dimensiones

Estos ejemplo se refieren a los llamados Vectores *Anclados*, debido a que su origen coincide con el origen del sistema de coordenadas, y las componentes dadas se refieren a los extremos del vector; se hacen tomando como referencia a

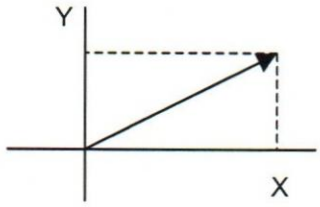
X e Y, siempre manteniendo ese orden, de manera similar a como lo hicimos en la ubicación de puntos. Pueden expresarse como el punto (X,Y) ó (X,Y,Z) dependiendo del caso, o pueden expresarse de otra forma, a través de los vectores unitarios[1] i,j,k, donde, i designa lo correspondiente al eje X, j lo correspondiente al eje Y, y k lo correspondiente al eje Z, quedando $a_x i \pm a_y j \pm a_z k$.

Existen otros vectores, denominados *Libres*, cuyo origen no coincide con el del sistema de coordenadas, y donde en consecuencia es necesario definir las componentes tanto para el origen como para el extremo. Esos vectores libres pueden transformarse en anclados, restando las componentes del extremo y las componentes del origen, definiendo así las componentes del extremo del vector anclado ($X_e - X_o$, $Y_e - Y_o$).

Nuestro estudio se centrará en los vectores de una y dos dimensiones.

a. DETERMINACIÓN DE CARACTERÍSTICAS:

Para DETERMINAR EL **MÓDULO** de los vectores de una dimensión basta una simple medición. Y para los vectores en dos dimensiones podemos ayudarnos con el teorema de Pitágoras.



$$||a|| = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Para notar el módulo utilizamos doble barra, para que no haya confusión con el término de valor absoluto.

[1] SERWAY. *Op cit.* Pág. 60.

Para DETERMINAR EL **SENTIDO** de un vector hay que ubicar hacia dónde se dirige éste.

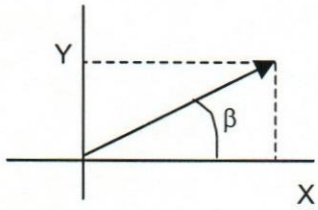
EJEMPLOS:

S: Hacia la derecha, o puede decirse hacia el Este.

S: Inclinado, o puede decirse hacia el Noreste.

S: Hacia abajo, o puede decirse hacia el Sur.

Para DETERMINAR LA **DIRECCIÓN** de los vectores podemos hacerlo con ayuda de la trigonometría, conociendo las componentes.



$\beta = \text{arc tg } (Y/X)$

b. OPERACIONES CON VECTORES:

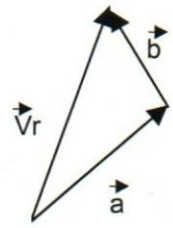
Sólo trabajaremos con las operaciones básicas que necesitemos en el resto de nuestros estudios posteriores, tanto gráfica como analíticamente. Éstas son las siguientes:

b.1. SUMA DE VECTORES[1]:

Forma GRÁFICA: Se puede realizar a través de la forma *Poligonal*, que consiste en ir formando un polígono con los vectores, colocando el extremo de uno con el origen del siguiente, quedando definido el vector resultante desde el origen que queda libre hasta el extremo libre. La ventaja de este método gráfico es que puede sumarse cualquier cantidad de vectores simultáneamente.

EJEMPLO:

Operación. Traslado los vectores de la forma indicada.

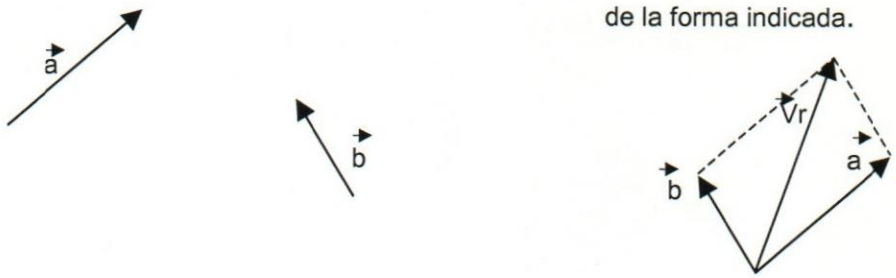


Otra forma de realizar esta operación es a través del *Paralelogramo*, que consiste en colocar juntos los dos vectores por su origen y trazar paralelas por los extremos, de manera que el vector resultante ($\vec{Vr}$) vaya desde el origen común hasta la intersección de las paralelas. Con este procedimiento sólo se pueden ir sumando los vectores de dos en dos.

[1] RESNICK. *Op cit*. Pág. 26

EJEMPLO:

Operación. Traslado los vectores de la forma indicada.



Podemos notar que se cumple la propiedad conmutativa, no importa el orden en que sean colocados los vectores obtendremos el mismo resultado.

Forma ANALÍTICA: Para realizar una suma de vectores de forma analítica se deben sumar las componentes correspondientes, es decir, las componentes de X con las de X, para obtener la componente de X resultante, y las de Y con las de Y para obtener la componente de Y resultante, esto se puede hacer debido a que las componentes tienen la *misma dirección*.

EJEMPLO:

- $\vec{a} = (2,-1)$ y $\vec{b} = (3, 5)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2+3, -1+5) =$$

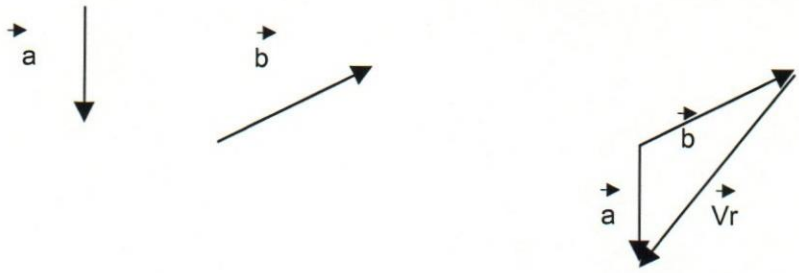
$$\vec{Vr} = (5, 4)$$

b.2 RESTA DE VECTORES:

Forma GRÁFICA: Una forma de realizar la resta de vectores gráficamente consiste en colocar juntos los orígenes de los dos vectores; el vector resultante irá desde el extremo del vector que se resta al extremo del otro vector.

EJEMPLO:

Operación: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{Vr}$



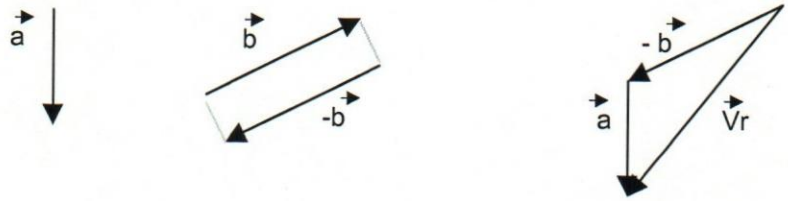
Se puede notar que si colocamos la operación despejando al vector (a) la operación queda transformada en una suma poligonal entre el Vr y el vector b:

$\vec{a} = \vec{Vr} + \vec{b}$.

Otra forma de restar los vectores gráficamente es a través de vectores opuestos, que no es más que representar gráficamente el mismo vector, en cuanto a módulo y dirección, pero en sentido contrario, y transformar la resta en una suma con el vector opuesto.

EJEMPLO:

Operación: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{Vr}$



Puede notarse que aquí NO se cumple la propiedad conmutativa, porque no será igual restar por ejemplo $\vec{a} - \vec{b}$, que restar $\vec{b} - \vec{a}$. En uno y otro caso nos quedarán vectores opuestos.

Forma ANALÍTICA: Para restar vectores de forma analítica deben de restarse las componentes correspondientes, es decir, las componentes de X con las de X, obteniendo la componente resultante de X, y las de Y con las de Y, para obtener la Y resultante, de manera similar a como se hizo en el caso de la suma.

EJEMPLO: ♦ $\vec{a} = (2,-1)$ y $\vec{b} = (3, 5)$

$$\vec{a} - \vec{b} = (2-3, -1-5) =$$

$$\vec{Vr} = (-1, -6)$$

NOTA: *Es importante tener cuidado a la hora de sumar o restar vectores analíticamente, porque sólo puedes operar a través de los componentes como fue señalado, no se pueden sumar ni restar simplemente los módulos de los vectores debido a que no se está tomando en cuenta la dirección ni el sentido de los mismos.*

EJEMPLO: ♦ $||a|| = 3$ y $||b|| = 4$ $\Rightarrow$ $\vec{a} + \vec{b} \neq 7$ ó $\vec{a} - \vec{b} \neq -3$

b.3 MULTILICACIÓN DE VECTORES POR UN ESCALAR:

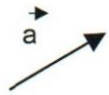
Como el mismo concepto de multiplicación indica, se trata de una simple suma abreviada de un mismo valor n veces. Teniendo claro esto, las operaciones serán similares a las de la suma.

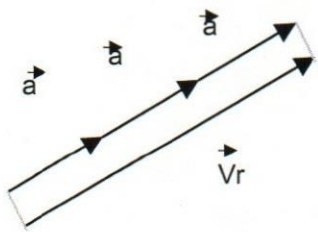
Forma GRÁFICA:

EJEMPLO:

Operación: $3x\vec{a} = \vec{Vr}$

Forma Poligonal





Forma ANALÍTICA: Debe multiplicarse el escalar por ambas componentes.

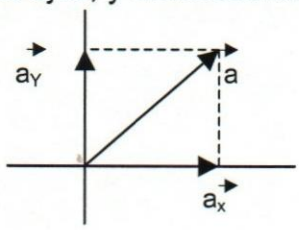
EJEMPLO: ♦ $\vec{a} = (2,-1)$

$3x\vec{a} = [3x2,3x(-1)] =$

$\vec{Vr} = (6, -3)$

DESCOMPOSICIÓN DE VECTORES:

Consiste en derivar de un vector dos que sean equivalentes[1]. Esto resulta muy útil, debido a que se pueden transformar todos los vectores en vectores que se encuentran sobre los ejes, y entonces es mucho más sencillo operar con ellos.



$\vec{a} = \vec{a}_X + \vec{a}_Y$

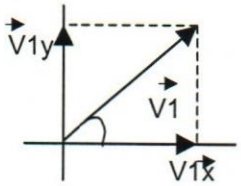
c. EJEMPLO de APLICACIÓN:

Dado un vector de 350m al Noreste, otro de 100m a 60° del Norte al Este y otro de 130m hacia el Sur: halle la suma de los tres vectores; determine las componentes de cada uno; determine el módulo, sentido y dirección del vector resultante.

[1] SERWAY. *Op cit.* Pág. 54

- RESOLUCIÓN:

Se recomienda ubicar primero cómo son los vectores.



Componentes del Vector anclado:

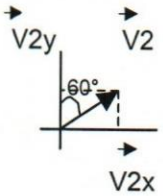
$\vec{V1} = (\vec{V1x}, \vec{V1y}) = (V1.\cos 45°, V1.\text{sen}45°)$

$\vec{V1} = (350x\frac{\sqrt{2}}{2}, 350x\frac{\sqrt{2}}{2} = (175\sqrt{2}, 175\sqrt{2})$

En los casos en los que no se indica ningún ángulo, se quiere decir que el vector está en la mitad, entre el Norte y el Este, es decir, que forma un ángulo de 45° con los ejes. Igual ocurre con los vectores que se dirigen al Noroeste, Sureste o Suroeste.

Todos los vectores que dirijan al Noroeste, Noreste, Sureste, Suroeste tienen una inclinación de 45°.

Para determinar sus componentes, se descomponen y se determinan a través de la trigonometría.



Componentes del Vector anclado:

$\vec{V2} = (\vec{V2x}, \vec{V2y}) = (V2.\text{sen}60°, V2.\cos 60°)$

$\vec{V2} = (100x\frac{\sqrt{3}}{2}, 100x\frac{1}{2}) = (50\sqrt{3}, 50)$

Observe que los 60° van desde la vertical que representa el Norte girando hacia abajo y a la derecha para dirigirse hacia el Este. Este tipo de información hay que visualizarla en función de dónde parte y hacia dónde se dirige el vector.

$\vec{V3}$ ↓

Componentes del Vector anclado:

$\vec{V3} = (0, -130)$

Tiene en X la componente 0, debido a que se encuentra sólo en el eje "Y". Y es negativo debido a que el vector se dirige hacia el lado que convencionalmente utilizamos como negativo.

Hay que tomar en cuenta el sentido para determinar el signo del componente.

Determinados los componentes podemos realizar la suma fácilmente:

$$\vec{Vr} = \vec{V1} + \vec{V2} + \vec{V3} = (175\sqrt{2}, 175\sqrt{2}) + (50\sqrt{3}, 50) + (0, -130)$$

$$\vec{Vr} = (175\sqrt{2} + 50\sqrt{3} + 0, 175\sqrt{2} + 50 - 130)$$

$$\vec{Vr} = (175\sqrt{2} + 50\sqrt{3}, 175\sqrt{2} + 80)$$

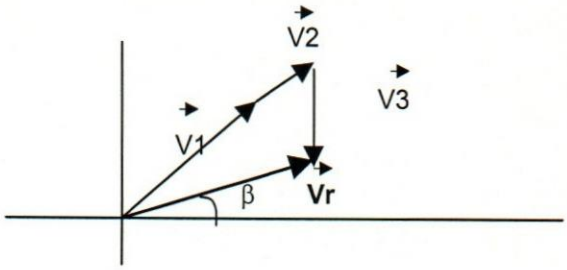
Éstas serían las componentes del vector resultante.

Para determinar su módulo, operamos con las componentes aplicando el teorema de Pitágoras:

$$||Vr|| = \sqrt{(175\sqrt{2} + 50\sqrt{3})\text{^}2 + (175\sqrt{2} + 80)\text{^}2}$$ [1]

[1] ^2 significa que el término se encuentra elevado a la potencia 2.

Para determinar la dirección y el sentido es recomendable representarlos gráficamente y realizar la operación.



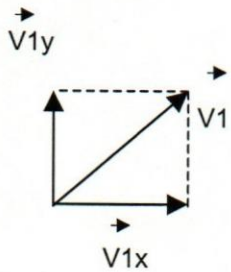
$$\beta = \text{arc Tg (Y/X)} = arctag\left(\frac{175\sqrt{2}+80}{175\sqrt{2}+50\sqrt{3}}\right)$$

Para calcular el sentido podemos ayudarnos con el ángulo, para que sea más específico: **S: β del Este al Norte.**

OTRA FORMA:

Este ejemplo puede resolverse de otra forma que parte de definir los vectores como libres y no como anclados, haciendo una secuencia de los mismos.

El V1 quedará igual, porque lo tomamos como primer vector y éste será anclado de todas formas.

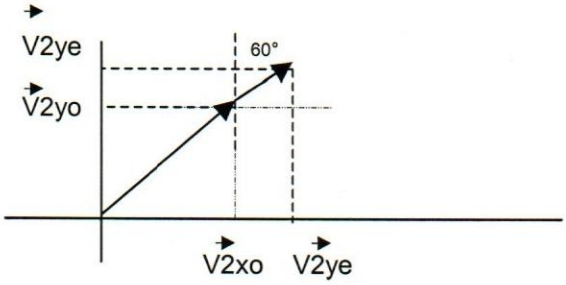


Componentes del Vector anclado:

$\vec{V1} = (\vec{V1x}, \vec{V1y}) = (V1.\cos 45°, V1.\text{sen}45°)$

$\vec{V1} = (350x\frac{\sqrt{2}}{2}, 350x\frac{\sqrt{2}}{2}) = (175\sqrt{2}, 175\sqrt{2})$

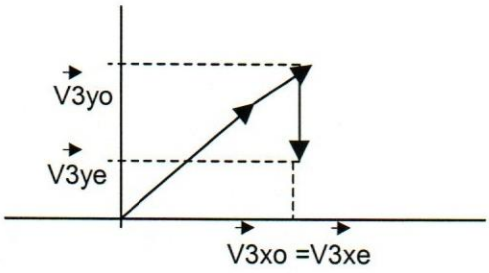
El V2 lo colocamos a continuación de V1, determinándolo como vector libre; por lo tanto tiene que definirse su origen, que será el extremo de V1; y su extremo, que será la suma de lo que ya tenía y él mismo.



$\vec{V}2o = \vec{V}1e = (175\sqrt{2}\,,\ 175\sqrt{2}\,)$

$\vec{V}2e = (175\sqrt{2} + 50\sqrt{3}\,,\ 175\sqrt{2} + 50)$

Finalmente se agrega el V3, de la misma manera que se hizo con V2.



$\vec{V}3o = \vec{V}2e = (175\sqrt{2} + 50\sqrt{3}\,,\ 175\sqrt{2} + 50)$

$\vec{V}3e = (175\sqrt{2} + 50\sqrt{3} + 0,\ 175\sqrt{2} + 50 - 130)$

$\vec{V}3e = (175\sqrt{2} + 50\sqrt{3}\,,\ 175\sqrt{2} - 80)$

Ya determinadas todas las componentes se observa que el V3e es la componente del vector resultante anclado; con ello podemos determinar el módulo, sentido y dirección de la forma antes indicada.

II. *MOVIMIENTO*

La Física tiene diversas ramas que se encargan de estudiar diferentes fenómenos específicos. A continuación trabajaremos con una de ellas, LA CINEMÁTICA, que estudia el movimiento, sin tomar en cuenta qué lo produce.

Nos centraremos solamente en el espacio *unidimensional*. Además trabajaremos los objetos como *partículas*, para no entrar en otros asuntos que intervienen cuando éstos son tomados, por ejemplo, como un cuerpo rígido; y haremos sólo el estudio *traslacional*, y no el rotacional.

Al realizar un estudio, es siempre importante definir un sistema de referencia, para que a partir de él podamos observar los cambios. También es importante definirlo debido a que, dependiendo del sistema de referencia que se utilice, podremos observar unas cosas u otras[1]. Además, en nuestro caso, consideraremos que dicho sistema se mantiene en reposo.

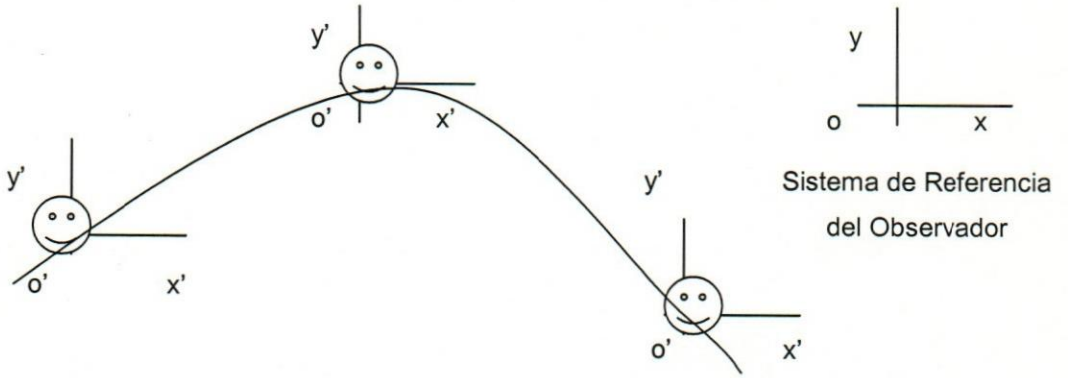
EJEMPLO:

- Si dos personas van en un automóvil que se está moviendo, entre ellas mismas pareciera que no lo hicieran, pero para un observador que está fuera del automóvil, las personas que se encuentran dentro de él sí se están moviendo. Aquí se clarifica que, dependiendo del punto de observación, se llega a conclusiones diferentes.

[1] HECHT. *Op cit.* Pág. 40

MOVIMIENTO: Podemos definirlo como un cambio de posición.

Este movimiento es traslacional[1] cuando los ejes de referencia, que se forman imaginariamente, se mantienen paralelos al eje del observador.



a. TÉRMINOS FUNDAMENTALES A UTILIZAR AL HABLAR DE MOVIMIENTO

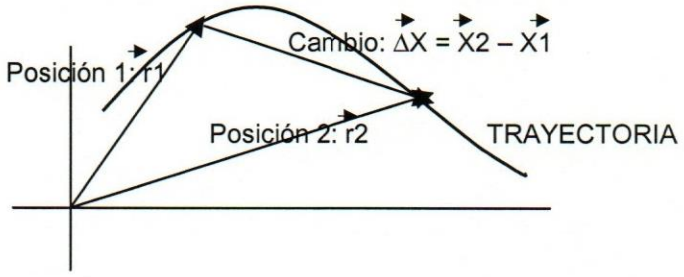
Podemos introducir el término de TRAYECTORIA, que se define como la línea imaginaria que dibuja el cuerpo en su movimiento. Esta trayectoria puede ser variada y según cómo sea ésta se definen diversos movimientos.

- Rectilíneos: Cuando la línea dibujada es una recta.
- Curvilíneos: Cuando se dibuja una curva; podemos mencionar por ejemplo el parabólico, elíptico, etc.
- Mixto: Cuando el cuerpo dibuja trayectorias variadas, con partes rectas y partes curvas.

[1] RESNICK. *Op cit.* Pág. 42

DISTANCIA: Es la longitud medida sobre la trayectoria. Es una magnitud escalar. Sus unidades son de longitud (m, km, cm, dm, pulgadas, etc.). Depende de la trayectoria, porque toma en cuenta cada espacio recorrido.

DESPLAZAMIENTO: Es el cambio de posición (ΔX), expresada como una magnitud vectorial, que va desde el punto de partida (origen) del objeto bajo estudio hasta el punto de llegada (extremo). Sólo puede determinarse por completo dando su módulo (medido en unidades de longitud), su dirección y su sentido. Es independiente de la trayectoria, debido a que no importa cuánto se haya recorrido sino desde dónde se salió y hasta dónde se llego[1] .

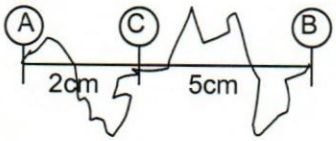


Los términos de Distancia y Desplazamiento tienden a confundirse, la distancia no es el módulo del desplazamiento, lo que ocurre es que en algunos casos puede coincidir el módulo del desplazamiento con la distancia recorrida. Además la distancia es una magnitud escalar y el desplazamiento es una magnitud vectorial.

[1] GIANCOLI. *Op cit*. Pág. 21

Es recomendable mencionar el término de RECORRIDO, que es la longitud sobre la trayectoria. Tal concepto coincide con el de distancia, por lo tanto cuando es utilizado este término (recorrido) la distancia se utiliza, en algunos casos, como el módulo del desplazamiento. Por lo tanto es importante aclarar cual concepto se está manejando.
En este texto se trabajara con la definición dada inicialmente de distancia.

EJEMPLOS:



- Supongamos que una partícula recorre 7 cm de A hasta B y luego regresa 5 cm hasta C en línea recta, diremos que A-B = 7cm, B-C = 5 cm, el recorrido A-B-C dibuja una trayectoria de longitud igual a 12 cm, lo que indica cual fue su distancia recorrida. Ahora, si queremos ver el desplazamiento de ese mismo movimiento, éste quedaría definido sólo por el vector que va desde A hasta C; es decir de módulo 2 cm, horizontal y hacia la derecha. No es lo mismo la distancia (medida sobre la trayectoria, vendría a ser su recorrido) y el desplazamiento.

- Si ahora hacemos el recorrido a través de la línea irregular dibujada (A-B), la distancia será la longitud sobre esa línea que es la trayectoria, y el desplazamiento será de módulo 7cm, hacia la derecha, horizontal. Aquí se demuestra la dependencia de la distancia con relación a la trayectoria; y la in-

dependencia para el desplazamiento, debido a que no importa cómo se haya hecho el recorrido desde A hasta B; sólo interesan el punto de llegada y el de partida.

- Si ahora en una situación similar, sólo se quiere saber la distancia de un cuerpo que va de A hasta B, está será de 7 cm, y su desplazamiento tendrá de módulo 7 cm, horizontal, hacia la derecha. Este es un ejemplo donde coinciden la distancia y el módulo del desplazamiento, lo cual sólo ocurre en casos especiales como éste, donde el cuerpo tiene trayectoria recta y no devuelve.

VELOCIDAD: Es una magnitud vectorial que se produce por el cambio de posición del cuerpo en el tiempo, es decir, equivale al desplazamiento en el tiempo[1].

Se introduce en este contexto también el término de velocidad media, que es el cociente del desplazamiento, entre el tiempo en que se tarda en hacer dicho desplazamiento:

$$\vec{V} = \frac{\vec{X}2 - \vec{X}1}{t2 - t1} = \frac{\Delta \vec{X}}{\Delta t}$$

Existe otro término relacionado con la velocidad, que es el de Velocidad instantánea[2], que equivale simplemente a la velocidad media, pero cuando el tiempo es infinitamente corto, es decir, tiende a cero. Se utiliza básicamente cuando la velocidad es variable y se desea conocer su valor en un momento determinado.

[1] RESNCIK. *Op cit.* Pág. 42.
[2] SERWAY. *Op cit.* Pág. 26.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{X}2 - \vec{X}1}{t2 - t1} = \frac{\Delta \vec{X}}{\Delta t}$$

Es importante aclarar que la velocidad, por ser un vector, tiene módulo, sentido y dirección. A su módulo se le denomina *Rapidez*; ésta es una magnitud escalar, y es sólo un elemento de la velocidad; por lo tanto debe hacerse la diferenciación entre ambas magnitudes.

La Rapidez tiene como unidades el cociente de unidades de longitud entre el tiempo, por ejemplo m/seg, Km/h, cm/seg, lo que indica cuántas unidades de longitud se recorren por unidad de tiempo.

EJEMPLO:

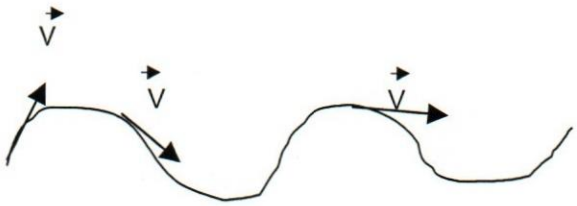
- Si decimos que un cuerpo tiene una rapidez de 10 m/seg, queremos decir que en cada segundo recorre 10 m. Para definir su velocidad haría falta decir su sentido y su dirección, por ejemplo, 10 m/seg horizontal hacia la derecha.

Para hablar de una Velocidad Constante deben permanecer iguales todos los elementos de la misma, al cambiar alguno de ellos ya no sería constante. Puede darse el caso que su rapidez sea contante, pero la velocidad no.

EJEMPLO:

- Supongamos que vamos por un camino que tiene muchas curvas. El velocímetro marca siempre 80 Km/h, ¿Es su velocidad constante?.

RESPUESTA: NO, porque para no salirse del camino debe girar el volante cambiando su dirección y sentido. A pesar de ello, su rapidez SÍ es constante, porque su módulo siempre es 80 Km/h.



Observamos su longitud constante, pero no su inclinación, ni sentido.

ACELERACION: Es una magnitud que se produce por la variación de la Velocidad, en cualquiera de sus elementos, bien sea el módulo, el sentido o la dirección. Es la rapidez de cambio de su velocidad con el tiempo[1] .

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}2 - \vec{V}1}{t2 - t1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Como la aceleración es un vector, tiene módulo (denominado también como celeridad), sentido y dirección. Es importante definir todos sus elementos.

Cuando decimos que hay una velocidad constante, no existe aceleración. La variación de la velocidad puede ser un incremento o disminución de la misma.

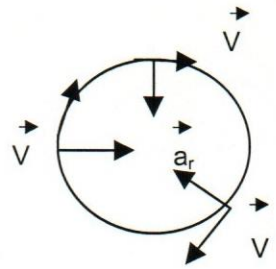
NOTA: *El término de* ***DESACELERACIÓN*** *es mal utilizado cuando la velocidad disminuye, pero simplemente es aceleración también, pero en sentido contrario del que tiene la velocidad. Por eso cuando decimos, por ejemplo que estamos frenando, igualmente se produce una aceleración pero retardada, o negativa dependiendo del sistema de referencia.*

[1] RESNICK. *Op cit*. Pág. 46.

Con respecto al sistema de referencia, la aceleración puede ser positiva o negativa, y será acelerada (si tiene el mismo signo de la velocidad) o retardada (si tiene el signo contrario de la velocidad).

EJEMPLOS:

- Si la velocidad es horizontal hacia la derecha $\longrightarrow$, y va aumentando en su módulo, quiere decir que hay una aceleración en el mismo sentido que la velocidad $\longrightarrow$; pueden ser negativas o positivas ambas, dependiendo del sistema de referencia que se esté usando.
- Ahora, si la velocidad es horizontal hacia la derecha $\longrightarrow$, y va disminuyendo su módulo, quiere decir que hay una aceleración en sentido contrario que la velocidad $\longleftarrow$; pueden ser una negativa y la otra positiva, dependiendo del sistema de referencia que se esté usando, pero no del mismo signo debido a que tiene sentidos contrarios.
- Cuando hablamos de un Movimiento Circular Uniforme, donde la rapidez de la velocidad no cambia, es decir, donde la rapidez es constante, también hay aceleración, pero como consecuencia del cambio del sentido y dirección de la velocidad. Aquí se observa que al cambiar cualquier elemento de la velocidad, se produce aceleración.



Aquí aparece la llamada aceleración radial, producto del cambio del sentido y dirección de la velocidad, permaneciendo la rapidez (módulo) constante.

También podemos mencionar el término de Aceleración Instantánea[1], que es similar a la Velocidad instantánea, ya que es la variación de la velocidad en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}2 - \vec{V}1}{t2 - t1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Las unidades de la aceleración (su módulo), son unidades de longitud entre unidades de tiempo al cuadrado; esto puede entenderse mejor, como unidades de velocidad entre unidades de tiempo, que reduciendo la expresión queda como lo indicamos primero. Lo que nos indica cuánto aumenta o disminuye su velocidad por cada unidad de tiempo.

EJEMPLO:

- Si el módulo de la aceleración es 2 m/seg^2, esto quiere decir que por cada segundo aumenta su velocidad 2 m/seg.

[1] SERWAY. *Op cit.* Pág. 31.

b. TIPOS DE MOVIMIENTOS A ESTUDIAR:

En función de lo mencionado al principio, sólo trabajaremos con el movimiento unidimensional, y estudiaremos dos tipos de movimientos que son: Movimiento rectilíneo Uniforme (MRU), y Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV).

b.1. MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME (MRU)

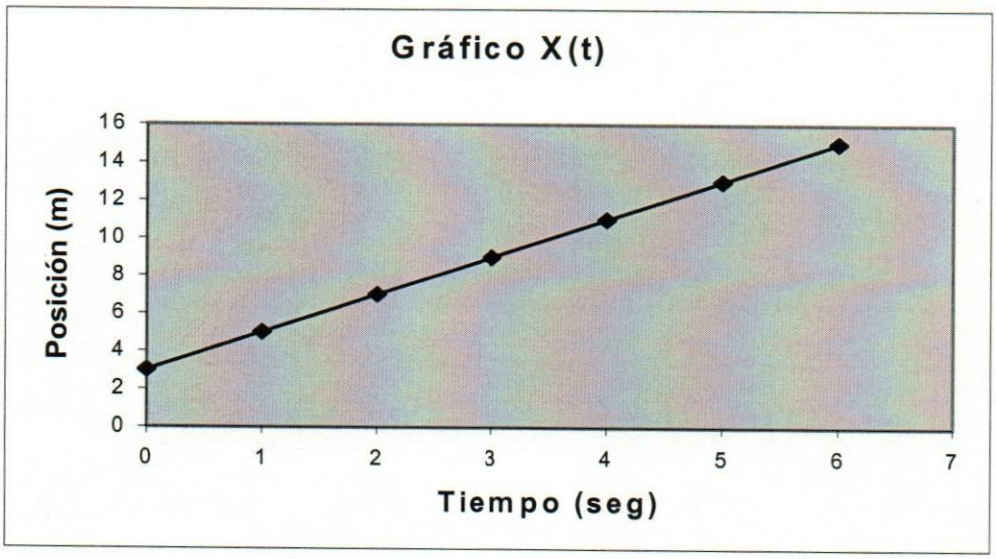
CARACTERÍSTICAS:

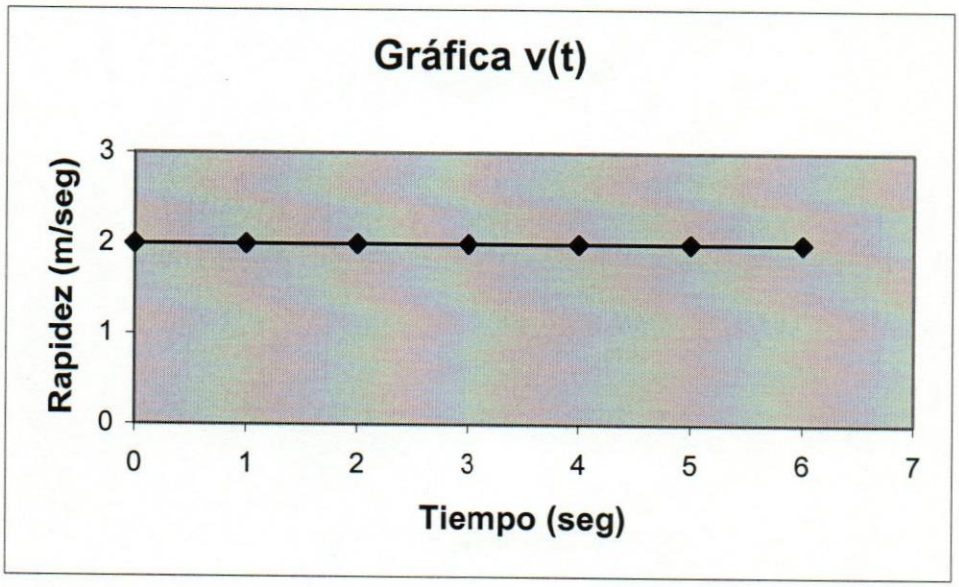
Es un movimiento que tiene *Trayectoria Recta* y *Velocidad constante*, es decir, tiene desplazamientos iguales en intervalos de tiempos iguales; por lo tanto no hay aceleración.

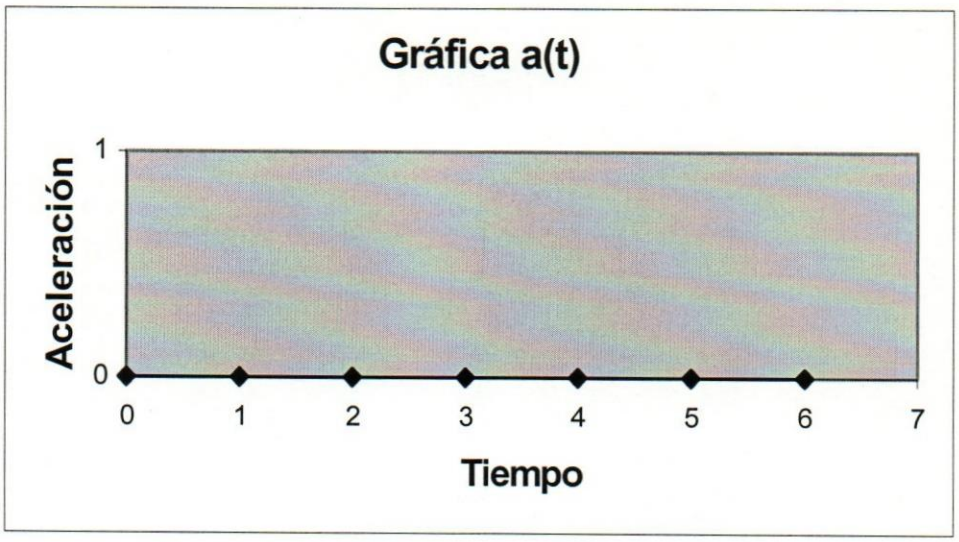
En este movimiento, como no hay variación de la velocidad en ninguno de sus elementos, y el cuerpo no cambia de dirección, hay coincidencia del módulo del desplazamiento con las distancias; quizás aquí es donde surge la confusión de dichos términos.

Podemos hacer el estudio a través de gráficas, y mencionar las más importantes, que son la posición con respecto al tiempo x(t), la rapidez en función del tiempo v(t), y la aceleración en función del tiempo (ésta no es muy útil, por ser cero). Veamos a continuación, a través de un ejemplo, cómo serán las gráficas para este tipo de movimiento.

X(m)	3	5	7	9	11	13	15
t(seg)	0	1	2	3	4	5	6
V(m/seg)	2	2	2	2	2	2	2
A (m/seg^2)	0	0	0	0	0	0	0







Podemos observar que la gráfica X(t) es una línea recta; puede ser creciente o decreciente; también puede partir desde el origen, si inicialmente parte del punto de referencia.

Con respecto a la gráfica v(t), ésta es siempre una recta paralela al eje de las X (abscisas), por ser constante.

Y la gráfica a(t) será una recta que coincide con el eje de las X (abscisas), porque su valor es cero.

***NOTA**: Es importante aclarar que sólo se representan gráficamente los módulos, debido a que en la gráfica en ningún momento se indican la dirección ni el sentido de las magnitudes vectoriales. Es errado decir gráfica velocidad – tiempo, o aceleración tiempo, debido a que no se están representando gráficamente todas las características. El gráfico no da la información completa.*

A través de las gráficas se puede obtener mucha información, además de la que se visualiza estrictamente en la misma[1]. Así podemos observar que, al sacar la pendiente en la **gráfica x(t)**, obtenemos la variación de la posición entre el tiempo, lo que definiría la *rapidez* del cuerpo. Igualmente en la **gráfica v(t)**, si buscamos la pendiente, ésta es la relación entre la variación de la rapidez en el tiempo, lo que nos indica el *módulo de la aceleración*. Además en esta gráfica, determinando el área bajo la curva, se puede saber la *distancia recorrida* por el cuerpo en un tiempo determinado. Esto es válido para cualquier gráfica, independientemente del movimiento que tenga.

FÓRMULA: Para este movimiento sólo hay una relación matemática que es:

$$\vec{V} = \frac{\vec{d}}{t}$$

Donde d es el desplazamiento (que en este caso, por sus características particulares, coincide su módulo con la distancia recorrida), t es el tiempo, y V es la velocidad (se puede usar la rapidez debido a que la velocidad permanece constante y, el sentido y dirección vendrán dados por el resto de los datos del problema).

[1] GIANCOLI. *Op cit*. Pág. 37.

b.2. MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE VARIADO (MRUV)

CARACTERÍSTICAS:

Es un movimiento que tiene *Trayectoria Recta* y *Velocidad que varía en proporciones constantes,* es decir, tiene desplazamientos diferentes en intervalos de tiempos iguales, aunque el incremento o disminución guarda una proporción; por lo tanto hay *aceleración constante*[1].

Igualmente, a través de un ejemplo, representaremos gráficamente este movimiento, para observar las características mencionadas: Teniendo una rapidez inicial de 5 m/seg y los siguientes datos

X(m)	6	14	24	36	50	66
t(seg)	1	2	3	4	5	6
V(m/seg)	7	9	11	13	15	17
a (m/seg^2)	2	2	2	2	2	2

[1] SERWAY. *Op cit.* Pág. 32.

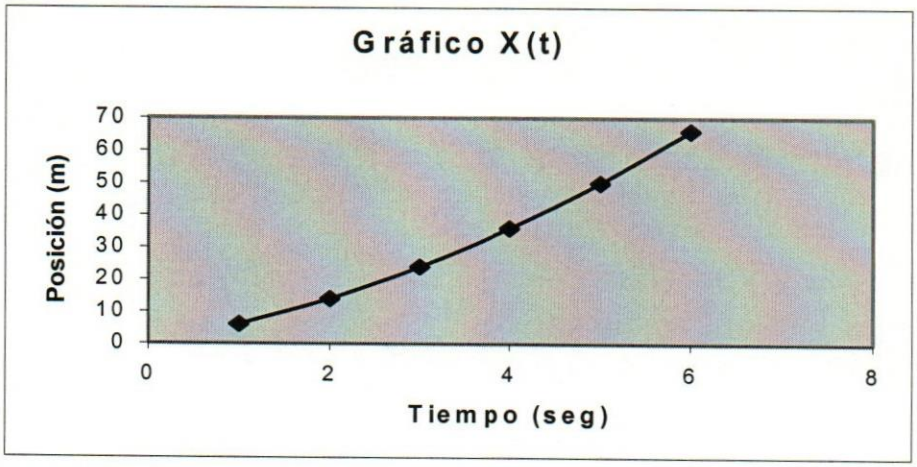
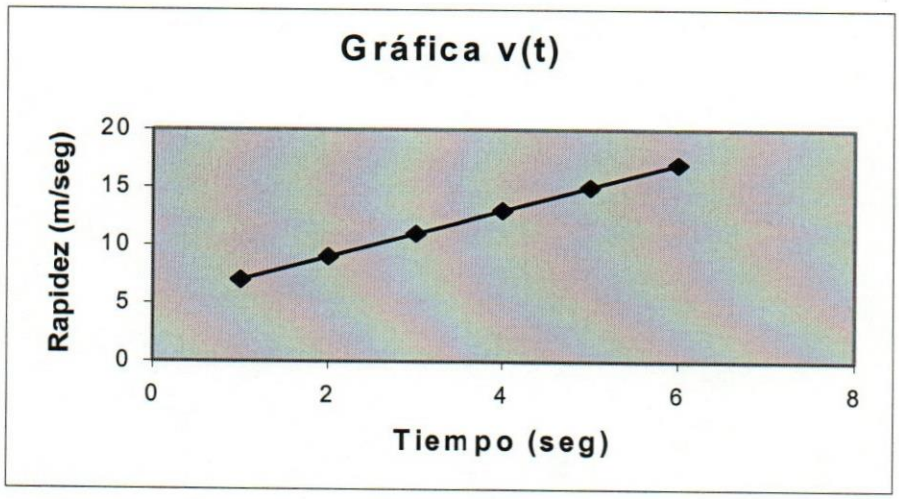
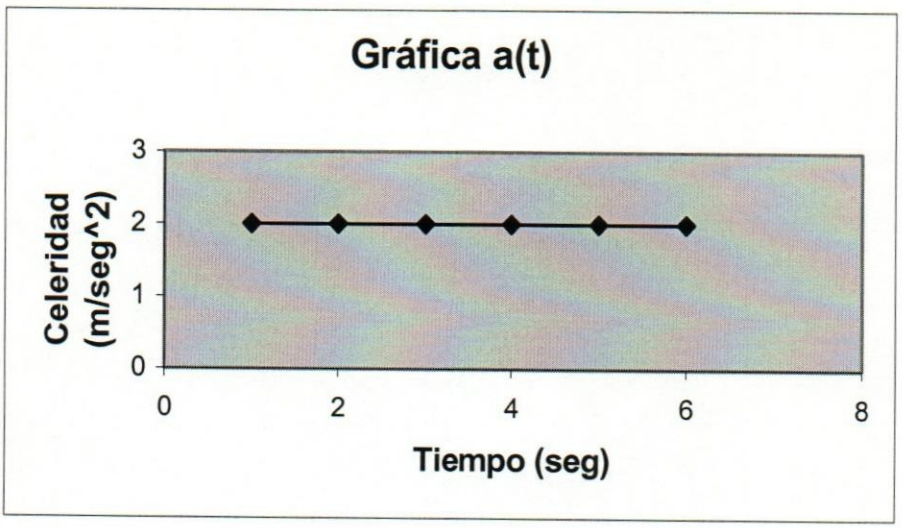


Gráfico X(t)
Posición (m)
70
60
50
40
30
20
10
0
0
2
4
6
8
Tiempo (seg)


Gráfica v(t)
Rapidez (m/seg)
20
15
10
5
0
0
2
4
6
8
Tiempo (seg)



Podemos observar que la gráfica X(t) es una curva; puede ser creciente o decreciente; también puede partir desde el origen, si inicialmente parte del punto de referencia. Esto se debe a la variación de la distancia en cada intervalo.

Con respecto a la gráfica v(t), ésta es siempre una recta, que puede ser creciente (aumentando) o decreciente (disminuyendo).

Y la gráfica a(t) será una recta paralela con el eje de las X (abscisas), por ser constante.

El MRUV puede ser ACELERADO o RETARDADO, dependiendo de si su velocidad aumenta o disminuye, respectivamente. En el movimiento acelerado, la aceleración tiene el mismo sentido que la velocidad; y en el retardado, va en sentido contrario.

Aquí la distancia y el módulo del desplazamiento también coinciden por sus características particulares.

Podemos introducir los términos: *Distancia máxima* (altura máxima), que simplemente es la distancia que recorre el cuerpo hasta adquirir una velocidad final igual a cero; y *Tiempo máximo*, que es el tiempo que se tarda en recorrer la distancia máxima, o lo que es lo mismo, el tiempo que se tarda en adquirir una velocidad final igual a cero. Estos dos términos son más usados en el caso particular del MRUV con lanzamiento vertical.

FÓRMULAS:

$$d = d_o + V_o.t \pm \frac{a.t^2}{2}$$

$$V_f = V_o \pm a.t$$

$$V_f^2 = V_o^2 \pm 2.a.d$$

Éstas son las fórmulas básicas. Con ellas se puede resolver cualquier problema, usándolas convenientemente y despejando o sustituyendo lo necesario.

Como se observa, son vectores que se están operando, pero por las características particulares podemos utilizar sólo sus módulos, el sentido lo tomamos en cuenta con los signos de los módulos, y la dirección viene dado por los datos del problema.

DEMOSTRACIONES:

Hay varias formas de demostrar estas fórmulas[1]. Aquí se mostrará sólo la forma analítica, aunque la demostración puede hacerse también de forma gráfica.

Antes, es necesario definir el término de *Velocidad Promedio*, que simplemente es equivalente a la velocidad constante que tendría que utilizarse para recorrer la misma distancia en el mismo tiempo, transformando el movimiento en MRU.

$$Vm = \frac{Vf + Vo}{2}$$

Con esta transformación podemos usar la relación del MRU donde $V = \frac{d}{t}$,

por lo tanto $Vm = \frac{d}{t}$

$$\frac{Vf + Vo}{2} = \frac{d}{t} \qquad (1)$$

Por definición: $a = \frac{Vf - Vo}{\Delta t}$ (2); si utilizamos to = 0, entonces Δt = tf - to = t,

Despejando el tiempo de la ecuación (2), tenemos que: $t = \frac{Vf - Vo}{a}$

y sustituyendo en (1) la d despejada, obtenemos:

$$\frac{(Vf - Vo) \times (V + Vo)}{2 \times a} = d$$

[1] GIANCOLI. *Op cit.* Pág. 27

Efectuando: $$\frac{Vf\text{^}2 - Vo\text{^}2}{2 \times a} = d$$ [1]

Despejando; $Vf^2 = Vo^2 + 2.a.d$

De forma análoga, si despejamos Vf en vez de t en la ecuación (2), obtenemos: $Vf = Vo + a.t$

De esta manera obtenemos una de las ecuaciones, que nos ayudará a encontrar la restante, al sustituirla en (1):

$$\frac{(Vo + a \times t) + Vo}{2} = \frac{d}{t}$$

resolviendo, y despejando d:

$$d = \frac{(Vo + a \times t + Vo) \times t}{2}$$

$$d = \frac{2 \times Vo \times t}{2} + \frac{axt\text{^}2}{2}$$ [1]

$$\mathbf{d = Vo.t + \frac{a.t^2}{2}}$$

El signo (+ ó -) será dependiendo del sistema de referencia que se esté utilizando y según sea el movimiento, acelerado o retardado.

La demostración fue realizada suponiendo que el movimiento comienza desde el sistema de referencia y su d_o es cero, en caso de no ocurrir esta situación hay que tomarla en cuenta.

[1] ^2 significa que el término se encuentra elevado a la potencia 2.

MOVIMIENTOS BAJO LA ACCIÓN DE LA GRAVEDAD

Casos Particulares del MRUV

Para ambos se utilizarán las fórmulas que se usan en el MRUV, pero haciendo los cambios necesarios según sus características particulares.

b.2.1. CAIDA LIBRE

Es un MRUV acelerado, y se da cuando el cuerpo se deja caer (dirección vertical) y éste se mueve por la aceleración de la gravedad. Además de tener las mismas características del MRUV, Vo = 0 y su aceleración es la aceleración de la gravedad[1].

b.2.2. LANZAMIENTO VERTICAL

También es un MRUV, en dirección Vertical pero sí tiene una velocidad inicial ($\neq 0$), y su aceleración también es la aceleración de la gravedad[2]. Puede ser:

a) Hacia abajo, donde será acelerado también por ir en el mismo sentido que la gravedad, y

b) Hacia arriba, donde el movimiento es retardado hasta llegar a su velocidad cero, y se convierte en una caída libre.

[1] GIANCOLI. *Op cit.* Pág. 31.
[2] GIANCOLI. *Op cit.* Pág. 35

PROBLEMAS PROPUESTOS

SEGUNDO GLOBAL

1.-) Realizar la siguiente operación:

$(\vec{a} + 3.\vec{b} - 2.\vec{c})$, sabiendo que $\vec{a} = (2,3)$, $\vec{b} = (-1,2)$, $\vec{c} = (1,-2)$,

2.-) Dados los siguientes vectores: $\vec{a} = 4i - 2j$ y $\vec{b} = (-1,1/2)$

Hallar: $3.\vec{a} - 2.\vec{b}$ de manera gráfica y de forma analítica (dar el módulo, sentido y dirección).

3.-) Dado II a II = 3 cm y II b II = 7 cm. ¿Qué resultado se obtiene si se restan estos dos vectores?, y ¿Qué resultado obtenemos al sumarlos? (Dar todas las respuestas posibles).

4.-) Dos persona suman tres vectores; a uno le da como resultado -2 cm horizontal y al otro 2 cm horizontal. ¿Cuál es el resultado correcto?

5.-) ¿Cuáles son las componentes de un vector de módulo 5 cm y 30° del Sur al Oeste?

6.-) Dado un vector de 350 m al Noreste y otro de 100 m 60º del Norte al Oeste, hallar la suma de los dos vectores. Además determinar las componentes de cada vector; y el módulo, dirección y sentido del vector resultante. Represente gráficamente los vectores.

7.-) Un cuerpo se mueve hacia el Sur 30 Km; después se mueve 40 Km del Este al Norte 60º; y finalmente se mueve 75 Km del Oeste al Norte 30º. Determinar el vector resultante (con módulo, sentido y dirección) y las componentes de cada vector.

8.-) Si tengo dos vectores paralelos, pero uno de ellos es de -50 y el otro es de 5. ¿Son iguales o no? ¿Por qué?

9.-) El vector a es igual a 30 Km./h. ¿Está completa la información del vector?. En caso de ser negativa la respuesta indique qué falta.

10.-) Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F):

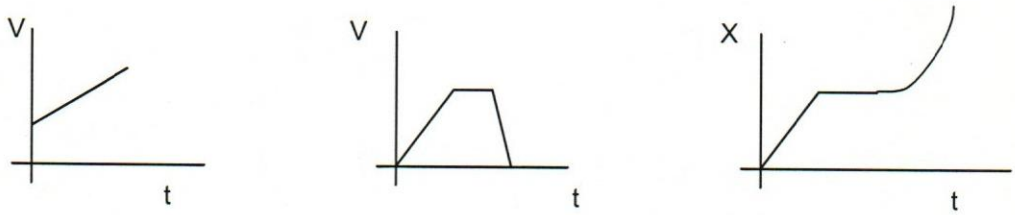
a) Si un carro está frenando, entonces tiene aceleración.

b) Al decir que tiene rapidez constante, podemos asegurar que su velocidad es también constante.

c) Un cuerpo que va y regresa al mismo lugar, recorre una distancia cero.

d) La pendiente de una gráfica v(t) es la aceleración.

11.-) En las siguientes gráfica indique qué tipo de movimiento ocurre en cada uno de los trayectos, sabiendo que en todos los casos el cuerpo tiene trayectoria recta y hacia el Este.



12.-) Responda y Justifique todas las preguntas.

a) ¿Qué es lo que un observador en la Tierra quiere decir con "arriba" y "abajo"?

b) Si un velocímetro de un carro marca 75 Km/h todo el tiempo, ¿se puede asegurar que éste tiene un movimiento rectilíneo uniforme?.

c) Juan, que está en su casa, se dirige a la casa de Pedro para entregarle unos cuadernos que le prestó, y después va a la casa de su novia María. Sabiendo que entre la casa de Pedro y Juan hay tres cuadras (sin cruzar), y entre la casa de Juan y María hay 1 cuadra (en el mismo sentido que la casa de Pedro), diga cuál es la distancia y el desplazamiento realizado por Juan.

d) Cuando se realiza una gráfica velocidad - tiempo, ¿nos representa la variación de la misma?

13.-) Se realiza el siguiente planteamiento: Un automóvil viaja con una velocidad de 80 Km/h manteniéndola igual. ¿Está correcto el planteamiento? ¿Por qué?

14.-) Un cuerpo se mueve 350 Km al Noreste, después se mueve 100 Km con 60º del Norte al Oeste y finalmente 130 Km hacia el Norte.

a) ¿Cuál fue el desplazamiento total?

b) ¿Cuál fue la velocidad que tuvo para recorrer su primer trayecto, si tardó 3h?

c) ¿Cuál fue la velocidad con la que llego al final del recorrido, sabiendo que en el último trayecto tiene una aceleración de 5 $Km./h^2$ y una velocidad inicial de 40 Km./h?

15.-) Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura, con una velocidad inicial Vo. Tarda en llegar al suelo un tiempo T. Determine la distancia total recorrida por el cuerpo en función de las letras dadas y g.

16.-) Un cuerpo se mueve con una velocidad Vo durante un tiempo t1. Luego el cuerpo comienza a detenerse y tarda un tiempo t2 en hacerlo.

Demuestre que la distancia total recorrida es $\frac{Vox(2xt1 + t2)}{2}$.

17.-) Un avión realiza los siguientes desplazamientos: 200 Km al Norte, 500 Km 30° al Noreste, 400 Km al Sur. Determine:

a) La distancia total recorrida

b) El desplazamiento total del avión

c) El desplazamiento del avión en un tiempo de 2,5 h., sabiendo que tarda en cada trayecto 1 h.

d) La velocidad del avión para ejecutar el desplazamiento total.

e) La velocidad del avión para desplazarse hacia el Norte (1,5 h), hacia el Noreste (3,5 h) y hacia el Sur (2,5 h)

f) Construya una gráfica de los desplazamientos

g) Construya una gráfica de las velocidades, con los datos de la pregunta f).

18.-) Dos móviles realizan los siguientes desplazamientos:

Móvil A: 200 cm al Sur, 50 m al Este y 0,04 Km al Noreste

Móvil B: 100 m al Oeste, 200 cm al Norte y 0,05 Km al Sureste.

Determine cuál de ellos experimentó mayor velocidad promedio si ejecutaron todo el recorrido en igual tiempo.

19.-) Dos cuerpos parten del mismo punto en sentidos opuestos con velocidades $\vec{V}a$ de 20 m/seg hacia el Este y $\vec{V}b$ de 30 m/seg hacia el oeste. Determine:

a) La distancia que los separa a los 5 seg.

b) El desplazamiento del móvil A con respecto al móvil B en 10 seg.

c) Construya la gráfica rapidez-tiempo y posición-tiempo.

20.-) Un móvil parte con rapidez de 20 m/seg, y en 4 seg su rapidez es de 100 m/seg; 6 seg después (siguiendo con su misma tasa de crecimiento en la rapidez) su rapidez se hace constante por 3 seg., y comienza a detenerse lográndolo 5 seg después. Determine:

a) La distancia total recorrida

b) La rapidez a los 7 seg.

c) La distancia recorrida por el móvil a los 16 seg.

d) La rapidez a los 15 seg.

21.-) Una partícula A que se movía con velocidad constante de 8 m/seg adquiere una aceleración de 6 m/seg^2 y se mueve en línea recta hacia otra partícula que se mueve con velocidad constante de 8 m/seg, en el mismo sentido que A. Si en el momento en que la partícula A comienza a acelerarse la distancia que separa a las partículas era 15 m, determine:

a) Dónde y cuándo se encuentran

b) Distancia que separa a las partículas a los 3 seg de estudio

c) Realice la gráfica x(t).

22.-) Un camión A se encuentra en la posición 30 m Norte y 40 m Oeste, y otro camión B se encuentra en la posición 40m Sur y 30 m Este. Si el camión A se desplaza 100 m al Este para aplanar el terreno, y el otro (B) se desplaza 100 m al Oeste, determine:

a) La distancia inicial que separa los dos camiones

b) La diferencia entre los desplazamientos.

c) La velocidad de cada camión si lograron hacer la trayectoria en 30 minutos

23.-) Un bote a motor navega un río con velocidad de 30 Km/h respecto al agua. Si la velocidad del agua con respecto a Tierra es de 10 Km/h y el bote navega :

a) en el mismo sentido que la corriente

b) en sentido contrario a la corriente

¿Cuál es la velocidad del bote con respecto a la Tierra, en cada caso?

24.-) Dos cuerpos, uno de los cuales es más pesado que el otro, descienden en caída libre en las proximidades de la superficie de la Tierra. ¿Cuál de los dos llega primero? Justifique su respuesta.

25.-) Cuando un cuerpo desciende en caída libre, ¿qué sucede a la velocidad cada segundo?.

26.-) Y si el cuerpo fuera lanzado verticalmente hacia arriba, ¿qué sucede al valor de la velocidad cada segundo?.

27.-) Un globo asciende con una rapidez de 12 m/s. En una altura de 712,8 m del suelo deja caer un paquete. Utilice g = 10 m/seg^2. Determine:

a) Cuánto tiempo tardo el paquete en llegar el suelo

b) Realice una gráfica v(t)

c) La altura del paquete a los 3,2 seg.

d) El desplazamiento del paquete a los 5,2 seg.

28.-) Dos cuerpos se encuentran sobre una vertical separados por 40 m. El que se encuentra más arriba se deja caer, y el que esta abajo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad de 50 m/s.

a) ¿Qué tiempo tardan en encontrarse?

b) ¿Dónde se encuentran con respecto al suelo?

29.-) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio de 80 m con una velocidad de 20 m/seg. Determine la distancia, desplazamiento y altura con respecto al piso a los 5 seg.

30.-) Desde cierta altura se deja caer libremente un objeto y tarda en llegar al suelo 0,5 seg. Determine:

a) Desde que altura cayó

b) Qué distancia recorre durante un cuarto de segundo.

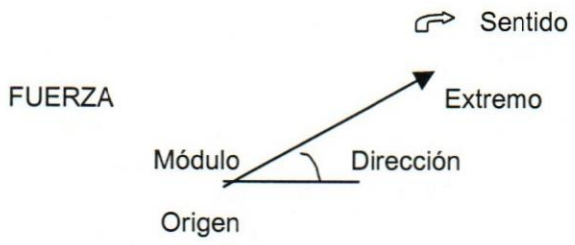
TERCER GLOBAL

- **FUERZA**

I. *DINÁMICA*

Anteriormente se ha estudiado el movimiento sin tomar en cuenta sus causas. Ahora sí, es decir, vamos a entrar en la DINÁMICA, que es la parte de la Física que se encarga de estudiar el movimiento tomando en cuenta sus causas.

En este estudio nos dedicaremos a estudiar la Fuerza, que en palabras sencillas podemos definir como la acción que puede producir un cambio de movimiento o producir una deformación[1]. Además es importante decir que es una magnitud vectorial debido a que tiene la necesidad de darse su módulo, sentido y dirección para que quede totalmente definida, porque según como sean sus características producirá un efecto u otro.



DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE O CUERPO AISLADO:

Es un simple sistema de coordenadas donde se ubica el cuerpo en el origen del mismo y se representan gráficamente todas las fuerzas que actúan sobre él. Esto es de gran ayuda para poder manejar más fácilmente a los vectores (fuerzas) como ya lo hemos estudiado.

[1] FIGUEROA, Douglas. *Dinámica. Principios, Preguntas y Problemas Resueltos*. Vol. 2. Gráfica León C.A. USB, Caracas-Venezuela. 1999. Pág. 2.

EJEMPLO: ♦

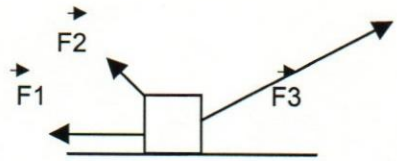
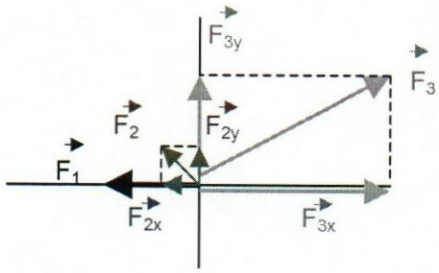


DIAGRAMA:



Colocamos todas las fuerzas manteniendo su sentido, dirección y módulo, y colocando su origen en el origen de coordenadas, y luego podemos descomponer las que sean necesarias para trabajarlas sólo en los ejes, con lo que su suma vectorial se puede hacer más sencillamente:

$$\Sigma \vec{F}_x = F_{3x} - F_{2x} - F_1$$

$$\Sigma \vec{F}_y = F_{3y} + F_{2y}$$

Se observa que tiene distintos signos. Esto se debe a que tiene sentidos contrarios, y a que el sistema de referencia seleccionado es el convencional

Se pueden realizar diagramas de fuerza en cualquier punto, aunque no haya cuerpo que concentre fuerzas.

a. Nos concentraremos en estudiar las **LEYES DE NEWTON**:

a.1.) 1era. LEY DE NEWTON O LEY DE LA INERCIA:

"Todo cuerpo permanece en estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, a menos que se apliquen fuerzas que lo obliguen a cambiar"

Todos los cuerpos tienen una cualidad que los hace tender a permanecer en su estado; esto es lo que llamamos *Inercia*. Si sobre el cuerpo no actúa ninguna fuerza, él tenderá a seguir como estaba. Esto lo podemos observar en diversos ejemplos de la vida cotidiana:

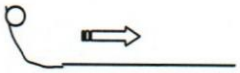
EJEMPLOS [1]:

- Cuando estamos sentados en un carro en reposo, y éste arranca repentinamente hacia delante sentimos, nos vamos hacia atrás. Esto se debe a que el cuerpo trata de mantenerse en reposo.
- Igualmente, si el carro se encuentra en movimiento y frena, nos vamos hacia delante por la misma razón.
- Si vamos en un carro que tiene movimiento y se aproxima a una curva, si no se le aplica ninguna fuerza éste seguirá en línea recta.

[1] HEWITT, Paul G. *Física Conceptual*. 2da. Edición. Editorial Addison-Wesley Longman. México. 1998. Pág. 34.

- Si tenemos una rampa, como indica la figura, y dejamos caer una pelota, ésta subirá hasta el otro lado, al mismo nivel, si no hay ninguna otra fuerza que actúe sobre ella. Esto también se debe a la inercia.

- Si otra pelota cae por una rampa hasta una superficie horizontal, ésta seguirá su movimiento indefinidamente hasta que se le aplique una fuerza, debido a la inercia.



a.2.) 2da. LEY DE NEWTON O LEY DE FUNDAMENTAL DE LA DINÁMICA:

"La aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa"

$$\vec{a} \; \alpha \; \frac{\Sigma \vec{F}}{m}$$

Para transformar esta proporcionalidad y escribirla en forma de ecuación, insertamos una constante de proporcionalidad. La selección de la constante es arbitraria en este caso, porque estamos relacionando cantidades con distintas

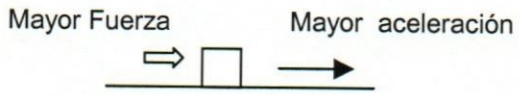
unidades. Por lo tanto podemos escoger una unidad de fuerza o de masa tal que la constante sea 1, $\vec{a} = \frac{\Sigma \vec{F}}{m}$, y despejando F llegamos al enunciado más usado.

$$\Sigma \vec{F} = m.\vec{a}$$

donde $\Sigma \vec{F}$ es la suma vectorial de todas las fuerzas que están actuando, m es la masa del cuerpo en estudio y a es la aceleración que adquiere.

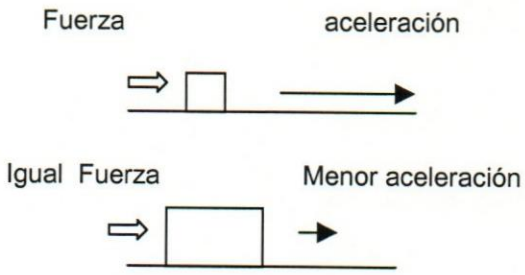
Podemos entenderlo más claramente a través de este EJEMPLO [1]:

- Si tenemos un taco de madera y aplicamos una fuerza, ésta adquiere una aceleración; si aplicamos el doble de la fuerza, el cuerpo se acelerará el doble; y si seguimos aumentando la fuerza, también lo hará la aceleración, comprobándose así que la fuerza es directamente proporcional a la aceleración: a mayor fuerza mayor aceleración y viceversa.



Y si tenemos dos tacos de madera de diferente masa, y les aplicamos la misma fuerza a ambos, observamos que el que tiene menor masa adquiere mayor aceleración (se comprueba la relación inversa de la masa y la aceleración).

[1] Ver más EJEMPLOS en: HEWITT. *Op cit.* Pág. 44.



Las Unidades de fuerza vienen dadas por: unidades de masa por unidades de aceleración.

En el sistema Internacional y MKS la fuerza se mide en *Newton* (New) que es Kg.m/seg^2. En el sistema CGS se mide en *dinas* que es grs.cm/seg^2. Y de igual forma se puede definir la fuerza en los distintos sistemas; libra, kilopondio, pondio, etc.

En este punto es conveniente aclarar el concepto de Masa Inercial y Masa Gravitatoria. *Masa Inercial* es aquella medida en función de la aceleración que adquiere al aplicar sobre ella una fuerza, (ésta es constante dentro de la Mecánica Clásica), y *Masa Gravitatoria* es la medida en función de la fuerza que ejerce sobre ella el campo gravitatorio.

Aunque conceptualmente son diferentes, el valor numérico de la masa inercial coincide siempre con el de masa gravitatoria.

a.3.) 3ra. LEY DE NEWTON O LEY DE ACCIÓN Y REACCIÓN:

"Cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, el segundo ejercerá sobre el primero una fuerza igual en módulo, dirección y sentido contrario"

Podemos observarlo a través de EJEMPLOS [1]:

- Si un patinador se empuja (acción) contra las rejas, éste se mueve en sentido contrario de su fuerza aplicada, debido a la fuerza (reacción) que le dio la reja.
- Cuando disparamos con un rifle, la bala sale hacia delante y el rifle se mueve hacia atrás por la reacción producida por la bala.
- Cuando pateamos un balón y sentimos una presión en los dedos, esto es debido a la reacción.
- Cuando lanzamos una pelota contra la pared, ésta se devuelve por la acción que ejerce la pared sobre ella.
- Cuando golpeamos la pared y nos duele, esto es debido a la reacción de la misma.

Es interesante preguntarnos si al tener dos fuerzas que son iguales en módulo y dirección pero de sentido contrario éstas no se anulan. La respuesta es que NO, debido a que las fuerzas están actuando en cuerpos diferentes.

[1] HEWITT. *Op cit.* Pág. 63.

Además se puede ver que aunque las fuerzas sean iguales no producen el mismo efecto, debido a las distintas masas que están actuando. Por EJEMPLO, en el caso del patinador que se empuja contra la reja, y él se mueve pero la reja no, debido a que ésta tiene mayor masa, conservando la misma proporción entre la masa y la aceleración para obtener la misma fuerza. Igualmente ocurre en el EJEMPLO del rifle y la bala; la bala adquiere mayor aceleración debido a que su masa es más pequeña.

b. FUERZAS PARTICULARES

b.1. PESO (P):

Es la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos, acelerándolos por la misma fuerza de la gravedad. Por ello el Peso siempre será un vector vertical hacia abajo.

$$\vec{P} = m.\vec{g}$$

Esto ocurre por la segunda ley de Newton, siendo su aceleración la gravedad.

Es importante diferenciar el PESO y la MASA, que tienden a confundirse y son términos diferentes.

La masa es la cantidad de materia (magnitud escalar) que tiene el cuerpo, y el peso es la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos (magnitud vectorial). La masa permanece constante si no pierde parte de su masa, y el Peso puede variar

dependiendo dónde se encuentre[1]. Si por EJEMPLO colocamos un cuerpo en la Luna, su masa sigue siendo la misma, pero su Peso es menor debido a que la aceleración de gravedad en la Luna es menor.

Igualmente, no se debe confundir el peso con el volumen que tenga el cuerpo, porque a pesar de que un cuerpo pueda tener un volumen mayor, no necesariamente tendrá mayor masa y por ende mayor Peso. Por EJEMPLO, si tenemos una almohada y una batería, puede que tenga mayor volumen la almohada, pero su masa es menor que la de la batería, por lo que esta última tiene mayor Peso.

El PESO y el VOLUMEN también son términos distintos.

En esta parte podemos explicar el fenómeno de la *Caída Libre*, debido a que la única fuerza que actúa sobre el cuerpo cuando éste cae es el Peso (en el vacío). Entonces ¿cómo explicar que dos cuerpos de masas distintas caen a la vez?. Esto se debe a que su aceleración es la misma (g), y esto se debe a que la proporción entre la fuerza (peso) y la masa es igual; el cuerpo de mayor masa tiene mayor Peso y viceversa[2].

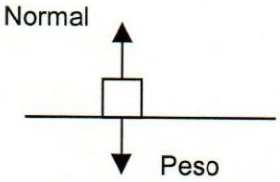
$$\frac{\vec{F}}{M} = \frac{\vec{f}}{m} = \vec{g}$$

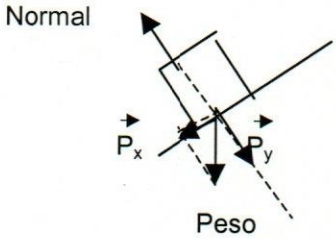
[1] FIGUEROA. *Op cit.* Pág. 4
[2] HEWITT. *Op cit.* Pág.53.

En el caso en que no se encuentren en el vacío, los cuerpos no caerán igual, debido a que las fuerzas que actúan sobre ellos son otras, y pueden causar distintos efectos tal como ya lo hemos mencionado.

b.2. NORMAL (N):

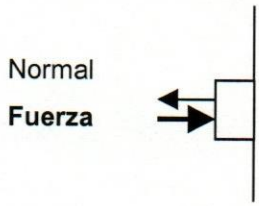
Es la fuerza de reacción de la superficie por el peso[1]. Es una fuerza perpendicular a ésta y proporcional al peso (no es necesariamente igual).





En caso de no existir superficies en contacto, no existe ***Normal***

Es conveniente mencionar que hay una *excepción* en el caso de que exista superficie y por lo tanto también existe Normal, pero no causada por el peso sino por la fuerza que lo sostiene.



b.3. FUERZA DE ROCE O DE FRICCIÓN (fr):

Es una fuerza producto de la interacción entre superficies de apoyo de los cuerpos. Aunque pareciera que los cuerpos fueran lisos, microscópicamente tienen irregularidades que chocan entre sí y producen la fuerza de roce[2]. Es una

[1] FIGUEROA. *Op cit*. Pág. 39.
[2] FIGUEROA. *Op cit*. Pág. 39.

fuerza que se opone al movimiento. Es paralela a la superficie, y por lo tanto perpendicular a la normal.

Depende del tipo de superficies que estén interactuando, es decir, que no es lo mismo cuando interactúa un cuerpo de madera con uno de plástico, que cuando interactúa un cuerpo de madera con la cerámica. Cada tipo de interacción tiene lo que *denominamos coeficiente de roce*, que toma en cuenta este aspecto.

La Fricción es:

- Proporcional a la Normal.
- No depende del área de contacto debido a que, no importa como esté colocado el cuerpo, su Normal es la misma.

Con estas características que acabamos de mencionar podemos definir matemáticamente la Fuerza de Roce:

$$\vec{fr} = \vec{N}.\ \mu$$

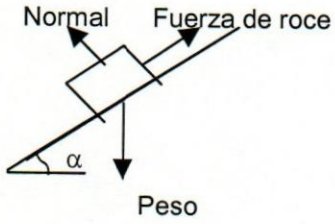
Siendo $\vec{fr}$ la fuerza de roce, $\vec{N}$ la Normal y μ el coeficiente de roce de los cuerpos que actúan.

Existe una clasificación de la Fuerza de roce: Cuando el cuerpo está en reposo ésta se denomina *Fuerza de roce estática*; es variable porque cambia según la fuerza que se aplique hasta vencerla y producir movimiento. Por otra parte,

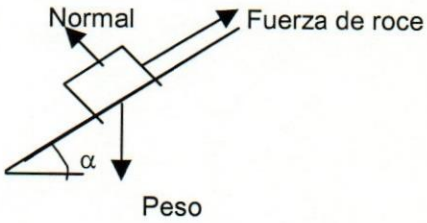
la *Fuerza de roce cinética* aparece cuando el cuerpo se mueve (es relativamente constante).

Como la Normal no cambia si se trata del mismo cuerpo, lo que varía es el coeficiente, definiéndose así un *coeficiente de roce estático* y uno *cinético*[1]. El coeficiente de roce estático es mayor que el cinético, debido a que hay mayor interacción entre las moléculas cuando el cuerpo está en reposo que cuando está en movimiento. Realizaremos la demostración de esta diferencia a través de un plano inclinado.

En reposo (estático)



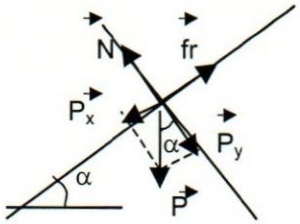
En movimiento (cinético)

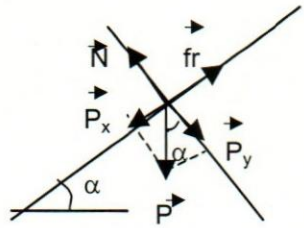


Realizamos los Diagramas de Cuerpo Libre para cada caso:

Como la superficie está inclinada, se puede rotar el sistema de coordenadas para que sea más sencillo el estudio, haciendo que más fuerzas coincidan con los ejes.

[1] FIGUEROA. *Op cit*. Pág. 39.





$\Sigma \vec{F}_x = P_x - fr = 0$

$\Sigma \vec{F}_y = P_y - N = 0$

$\Sigma \vec{F}_x = P_x - fr = m.a$

$\Sigma \vec{F}_y = P_y - N = 0$

Se colocan las fuerzas y se define a uno de los ejes X y al otro Y, planteando el sistema de referencia para poder definir los signos de los vectores.

Se observa que, en el caso estático, éstos se igualaron a cero debido a que no hay movimiento; por lo tanto la sumatoria debe ser equilibrada. En cambio en el caso cinético, igualamos el eje X a "m.a" por la segunda ley de Newton, y porque es en ese eje donde se mueve; el otro eje (Y) también fue igualado a cero, porque no hay movimiento sobre él.

Ahora se despeja la fuerza de roce y sustituimos su definición en cada uno de los casos.

Estático

$fr = P_x = N.\mu_e$

$N = P_y = P.\cos\alpha$

$P.\operatorname{sen}\alpha = P\cos\alpha.\mu_e$

$$\mu_e = \frac{P \times \operatorname{sen}\alpha}{P \times \cos\alpha}$$

Cinético

$fr = P_x - m.a = N.\mu_c$

$N = P_y = P.\cos\alpha$

$P.\operatorname{sen}\alpha - m.a = P\cos\alpha.\mu_c$

$$\mu_c = \frac{P \times \operatorname{sen}\alpha - m \times a}{P \times \cos\alpha}$$

$\mu_e = Tg\alpha$ $\qquad$ $\mu_c = Tg\alpha - \dfrac{a}{g \times \cos\alpha}$

Claramente se observa que el μ_c es menor porque es igual al μ_e menos otro valor ($\dfrac{a}{g \times \cos\alpha}$).

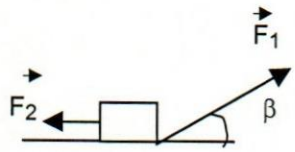
La fuerza de Roce es una fuerza muy importante en nuestra vida, aunque no nos percatamos de ello. Si por ejemplo no existiera la fuerza de roce, sería muy difícil caminar, ya que nos deslizaríamos como ocurre en el hielo (donde el roce es muy pequeño); tampoco podríamos agarrar el lápiz, porque se resbalaría; los cauchos no girarían. En fin, se podrían mencionar muchos ejemplos más.

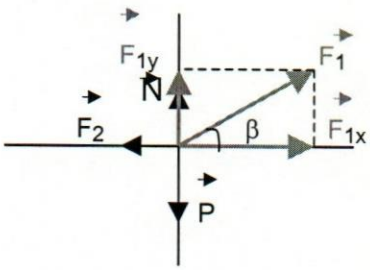
b.4. TENSIÓN:

Es la fuerza que se ejerce a través de cuerdas[1].

c. EJERCICIOS RESUELTOS:

1. Determine la aceleración del cuerpo, sabiendo que su masa es 2 Kg y despreciando el roce. $\vec{F}_1$ = 5 New y $\vec{F}_2$ = 2 New. β = 30°





[1] FIGUEROA. *Op cit.* Pág. 40.

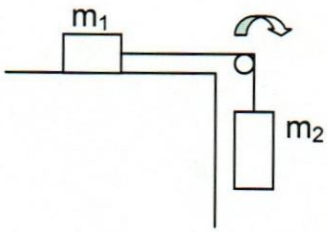
$$\Sigma \vec{F}_x = F_{1x} - F_2 = m.a$$
$$\Sigma \vec{F}_y = F_{1y} + N - P = 0$$

$F_{1x} = F_1.\ \cos\beta = 5.\ \cos 30° = 5.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ New

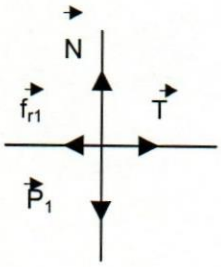
$F_{1y} = F_1.\ \text{sen}\beta = 5.\ \text{sen}30° = \dfrac{5}{2}$ New

$$\boldsymbol{a} = \frac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2}{2} = \frac{5 \times \sqrt{3} - 4}{4}\ m/seg^2$$

2. Si se tiene el siguiente sistema de masas, determine su aceleración y tensión, sabiendo que $m_1 = 3$ Kg., $m_2 = 5$ Kg., $\mu = 0{,}1$



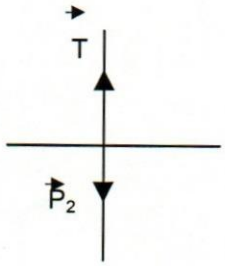
m1



$\Sigma \vec{F}_x = T - f_{r1} = m_1.a$

$\Sigma \vec{F}_y = N_1 - P_1 = 0$

m2



$\Sigma \vec{F}_x = 0$

$\Sigma \vec{F}_y = P_2 - T = m_2.a$

$fr = N_1.\mu = P_1.\ \mu = 30 \times 0,1$

$fr = 3$ New.

$T - 3 = 3.a$ **$50 - T = 5.a$**

Se observa que debe realizarse un diagrama para cada cuerpo. La tensión siempre será la misma en ambos, si es la misma cuerda.

En este caso, se nos dio el sentido del movimiento, pero uno puede no conocerlo y deberá suponerlo. Las mismas ecuaciones darán el sentido correcto.

La colocación de los signos de las fuerzas depende del sistema de referencia usado; lo importante es que vectores de sentido contrario tengan signos contrarios.

RECOMENDACIÓN: Colocar el signo positivo a las fuerzas que vayan a favor del movimiento.

Agrupo las ecuaciones de movimiento y resuelvo el sistema de ecuaciones por cualquiera de los métodos conocidos. En este caso lo resolveré por reducción, para determinar a, y luego sustituyo ese valor en cualquiera de las ecuaciones para determinar T.

$$T - 3 = 3.a$$

$$\underline{50 - T = 5.a}$$

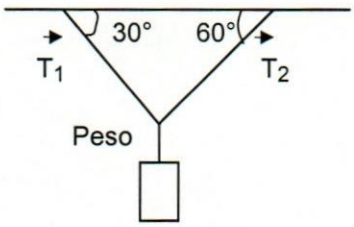
$$50 - 3 = 8.a$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{47}{8}\ m/seg^2$$

$$T - 3 = 3. \times \frac{47}{8}$$

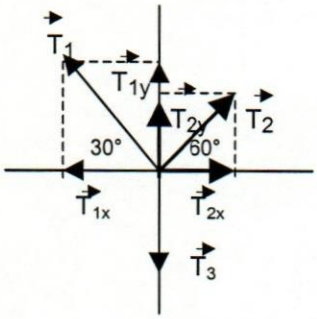
$$\boldsymbol{T} = \frac{165}{8}\ New$$

3. Dado el siguiente sistema, cuál debe ser el peso que puede soportar si $\vec{T}_{1máx}$= 4 New, $\vec{T}_{2máx}$ = 2 New.

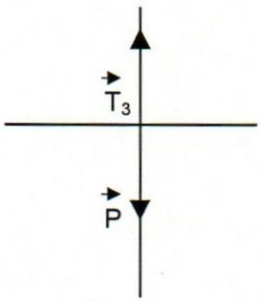


En este sistema se pueden hacer dos diagramas que serían de utilidad para nosotros: en el punto donde se encuentran $\vec{T}$, $\vec{T}_2$ y $\vec{T}$; y donde está el peso que buscamos.

A



B



$\Sigma\vec{F}_x = T_{2x} - T_{1x} = 0$

$\Sigma\vec{F}_y = T_{1y} + T_{2y} - T_3 = 0$

$\Sigma\vec{F}_x = 0$

$\Sigma\vec{F}_y = P - T_3 = 0$

$T_{1x} = T_1.\ \cos 30° = 4x\frac{\sqrt{3}}{2} = 2x\sqrt{3}$ New

$T_{1y} = T_1.\ \text{sen}30° = \frac{4}{2} = 2$ New

$T_{2x} = T_2.\cos 60° = \frac{2}{2} = 1$ New

$T_{2y} = T_2.\text{sen}60° = 2x\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ New

Primero que nada, se igualan todas las ecuaciones a cero porque no se mueve el sistema.

Si observamos $T_{1x} = T_{2x}$, es decir $2\times\sqrt{3} = 1$, lo cual es absurdo. Por lo tanto debemos determinar cómo se comportan en el sistema. Probamos sustituyendo el valor máximo de T_1 y buscamos T_2.

$$T_2 = \frac{T1\times\cos 30°}{\cos 60°} = \frac{2\times\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 4x\sqrt{3}\ New,$$

lo que sobrepasa el valor que puede soportar T_2. Por lo tanto concluimos que en el sistema planteado T_1 no puede ser máximo, y buscamos su valor de forma análoga a como lo hicimos antes con T_2.

$$T_1 = \frac{T2\times\cos 60°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ New,$$

lo cual T_1 sí lo puede soportar. De ahora en adelante usaremos T_1 con el valor encontrado, y T_2 como máximo.

Sustituimos los valores en $\Sigma\vec{F}_y = \vec{T}_{1y} + \vec{T}_{2y} - \vec{T}_3 = 0$ para determinar T_3

$$\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = T3$$

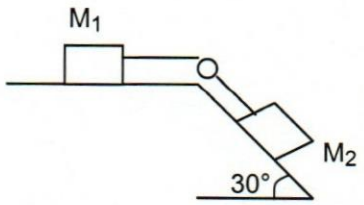
$$T_3 = \frac{4 \times \sqrt{3}}{3} New$$

Finalmente sustituimos en la ecuación del diagrama B para determinar el peso.

$$P - T_3 = 0$$

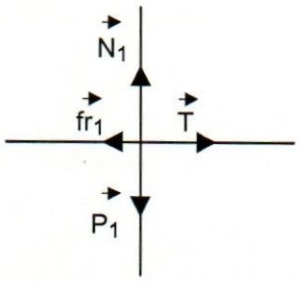
$$\boldsymbol{P} = \frac{4 \times \sqrt{3}}{3} New$$

4. Determinar cuánta distancia recorre M_1 en un tiempo de 3 seg, sabiendo que parte del reposo y que M_1 = 1 Kg, M_2 = 3 Kg. μ = 0,2.

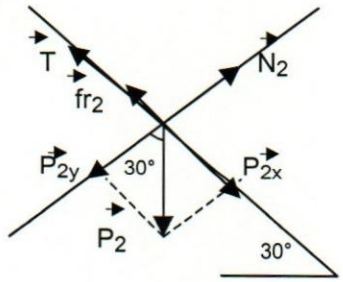


Para este ejercicio debo buscar primero la aceleración a través de los conocimientos de dinámica que se han adquirido.

M_1



M_2



$\Sigma \vec{F}_x = T - fr_1 = m_1.a$

$\Sigma \vec{F}_y = N_1 - P_1 = 0$

$\Sigma \vec{F}_x = P_{2x} - T - fr_2 = m_2.a$

$\Sigma \vec{F}_y = N_2 - P_{2y} = 0$

$P_{2x} = P_2.\text{sen}30° = 30x\frac{1}{2} = 15$ New

$P_{2y} = P_2.\cos30 = 30x\frac{\sqrt{3}}{2} = 15x\sqrt{3}$ New

$fr_1 = N_1.\mu = P_1.\ \mu = 10x0{,}2 =$

$fr_1 = 2$ New

T – 2 = 1xa

$fr_2 = N_2.\ \mu = P_{2y}.\ \mu = 15x\sqrt{3}\ x\ 0{,}2 =$

$fr_1 = 3x\sqrt{3}$ New

$15 - T - 3x\sqrt{3} = 3xa$

$$T - 2 = 1.a$$

$$\underline{15 - T - 3x\sqrt{3} = 3xa}$$

$$15 - 2 - 3x\sqrt{3} = 4xa$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{13 - 3\times\sqrt{3}}{4}\ m/seg^2$$

Teniendo la aceleración y su Vo, podemos aplicar los conocimientos vistos en la parte de cinemática y determinar la distancia pedida.

$$D = Vo.t + \frac{a.t^2}{2}$$

$$d = \frac{(13 - 3 \times \sqrt{3}) \times (3)\text{^}2}{8}$$ [1]

$$\mathbf{d} = \frac{117 - 81 \times \sqrt{3}}{8} m$$

[1] ^2 significa que el término se encuentra elevado a la potencia 2.

PROBLEMAS PROPUESTOS

TERCER GLOBAL

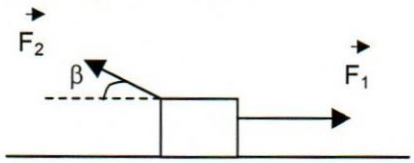
1.-) Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta.

a) Cuando el cuerpo se mueve con MRU, ¿actúan fuerzas?, ¿qué ocurre?

b) Cuando hay fuerzas no equilibradas, ¿qué ocurre?.

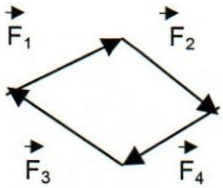
c) Algunas personas pueden sacar el mantel de una mesa servida tirando del mismo rápidamente y sin quitar lo que está puesto, de manera que los objetos queden en su lugar, ¿Cómo explica usted esta magia?.

2.-) Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, como lo indica la figura. Si $F_1 > F_2$, ¿qué fuerza es la que produce el movimiento?



3.-) Una persona que se encuentra en un carro en movimiento MRU, frena repentinamente, ¿qué ocurre y por qué? Justifique la respuesta.

4.-) Dados los siguientes vectores que representan fuerzas, diga si la fuerza resultante produce movimiento o no.



5.-) Un automóvil que lleva una velocidad choca con otro que está detenido, explique qué ocurre a través del estudio dinámico.

6.-) En la naturaleza existen muchos fenómenos que ni siquiera nos percatamos que están ocurriendo, por ejemplo el caminar y escribir. A partir de estos ejemplos explique por qué es posible que ocurran, y justifíquelo. (En el ámbito de fuerzas).

7.-) Mencione una diferencia y una semejanza entre la Fuerza de Roce y la Normal.

8.-) Cuando un cuerpo lleva una velocidad de 30 m/seg sobre una superficie horizontal, ¿se detendrá?. Justifique la respuesta.

9.-) Si a dos cuerpos de diferente masa les aplicamos la misma fuerza, ¿cuál tendrá mayor aceleración?.

10.-) Un cuerpo de 3 Kg. se encuentra en una superficie horizontal, y se le aplican, simultáneamente dos (2) fuerzas paralelas a la superficie y opuestas entre sí de módulos 3,6 New y 4,8 New.

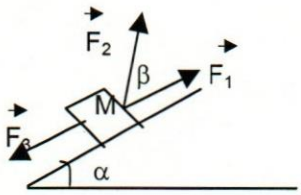
a) ¿Cuál es la aceleración del cuerpo?

b) Desplazamiento del cuerpo a los 3 seg.

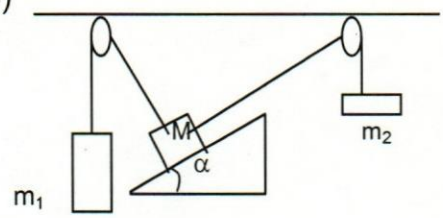
c) Velocidad del cuerpo cuando haya recorrido 80 m.

11.-) Realice los diagramas de cuerpo libre y las respectivas ecuaciones, y además diga a qué se iguala cada una. De los dibujos suponga que el cuerpo M, en ambos casos, se mueve hacia arriba.

a)



b)



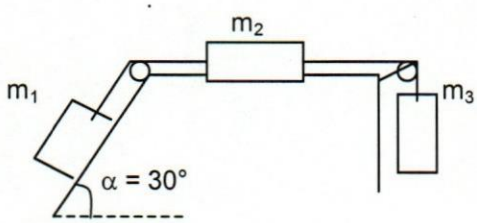
12.-) Una mujer se encuentra sobre una báscula en un elevador. Diga en qué caso es mayor el peso marcado por la báscula. Explique.

a) Cuando el elevador asciende con velocidad constante

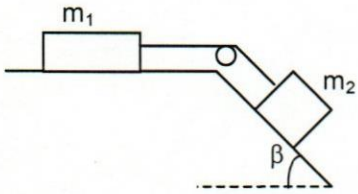
b) Cuando el elevador asciende con una aceleración

c) Cuando el elevador desciende con aceleración.

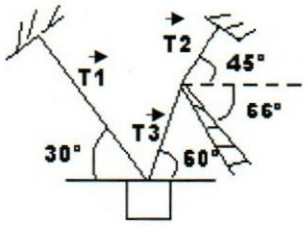
13.-) Hallar el valor de las tensiones del siguiente sistema, y m_3 para que el sistema no se mueva (μ = 0,1). m_1 = 1 Kg y m_2 = 2 Kg.



14.-) En el siguiente sistema determine la aceleración y tensión de la cuerda (μ = 0,1). β = 30°, m_1 = 2 Kg y m_2 = 5 Kg.



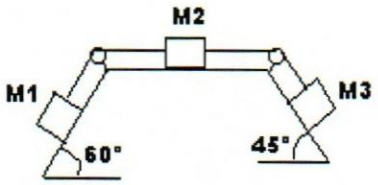
15.-) ¿Cuál es el peso máximo que puede soportar el sistema si $T_{1\,max}$ = 20 toneladas, T_{2max} = 45 toneladas y T_{3max} = 30 toneladas? Además, halle el valor de la fuerza que ejerce la barra. Sen66 = 0,9135 y Cos66 = 0,4067.



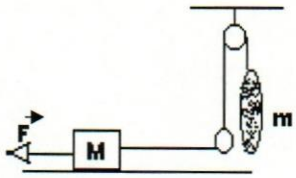
16.-) Un cuerpo se mueve sobre una superficie inclinada de 30° recorriendo una distancia de 30 m en 3 seg. Haciendo el estudio desde que el cuerpo tiene una velocidad de 5 m/seg, halle el valor del coeficiente de roce, sabiendo que el cuerpo va descendiendo.

17.-) En el siguiente sistema determine la aceleración y tensiones del sistema.

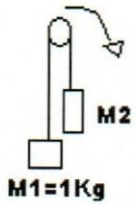
M_1 = 1 kg. M_2 = 2 Kg. M_3 = 3 Kg. μ = 0,2.



18.-) Al aplicar una fuerza horizontal de 35 New el conjunto se desplaza con aceleración 2 m/seg^2. Si el coeficiente de roce en la superficie horizontal es de 0,2 calcular el valor de m y la tensión, sabiendo que la masa es M = 4 Kg.



19.-) ¿Qué masa debe tener la Masa 2 para que el sistema se mueva con una aceleración de 2 m/seg^2?



RESPUESTAS DE LOS

PROBLEMAS PROPUESTOS

PRIMER GLOBAL

1.-) No se puede determinar. Se tienen que determinar las equivalencias entre las unidades utilizadas.

2.-) Depende de las unidades

3.-) Error del patrón

4.-) No se sabe, porque no hay unidades

5.-) Igual que la 2)

6.-) Diciendo que siguen siendo iguales, pero el patrón usado es el doble del usado anteriormente.

7.-)	a) $3{,}98.10^{-4}$ pies^2	b) 1,25.19 plg/h	c) 0,484 New.
8.-)	a) $1{,}88.10^{2}$ cm	d) $1{,}97.10^{4}$ Kg.	g) $2{,}8.10^{-4}$ mm
	b) 8.10^{-5} m	e) 2.10^{-2} grs.	h) $1{,}294.10^{5}$ h
	c) $2{,}76.10^{-4}$ kg	f) $6{,}7.10^{-6}$ Km	i) 9,56.10 lt.
9.-)	a) $6{,}3.10^{4}$	b) 5.10^{-9}	c) 8.10^{2}
	d) 75	e) $2{,}1.10^{-3}$	f) 1,29
	g) $35{,}8.10^{5}$	h) $3{,}91.10^{5}$	i) $-1{,}6.10^{18}$
	j) 5.10^{2} mm^3	k) $43{,}6.10^{6}$	l) $3{,}3.10^{3}$
	m) $-1{,}9.10^{-2}$ m^3	n) $1{,}7.10^{-3}$	o) $3{,}71.10^{11}$

10.-) a) 44.10^6 b) 8.10^2 c) 4.10^6

d) $1,7.10^{-3}$ e) 30 f) 3.10^2

g) 0,154 h) $3,5.10^2$ i) 91

j) $-8,6.10^2$ j) 35 k) 35

l) 2,9

11.-) 3.10 cm < 3.10 m = 30.10 m >

0,3.10 cm < 30.10 mm <

12.-) $8.10^{-7} < 2.10^{-2} < 4.10^5$

13.-) Mayor: $3,8.10^3$

Menor: 5.10^{-3}

14.-) En la última cifra significativa

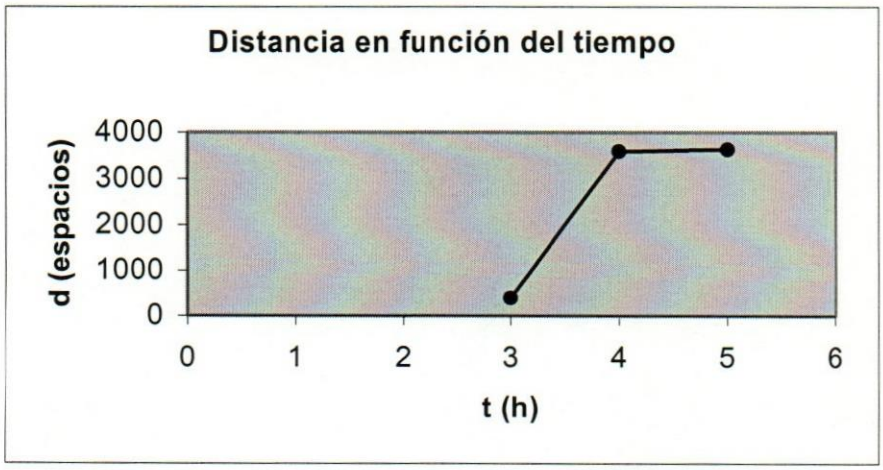
15.-) 6

16.-) a) 10^{-1} cm

b) 10^3 cm

17.-) a) 3640 espacios = 227,5 dragmas = 45,5 cuartetos = 91/8 estampas = 10920 códulos

b)



c) 2320 espacios

18.-) 127,5 Bs. Menos.

19.-) a) $\frac{r\text{^}2.(\pi - 2)}{2}$

b) $\frac{r\text{^}2.(16\pi - 9)}{18}$

20.-) A1 = $\frac{8}{11}$ m^2

A2 = $\frac{32}{11}$ m^2

A3 = $\frac{4}{11}$ m^2

Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

21.-) $l^2 = 2.A$

22.-) 2955 m^3

23.-) $\frac{29}{4}\ l^2$

24.-) P = 139,5 mangos

A = 725,25 $mangos^2$

25.-) a) $1.10^4\ cm^3$

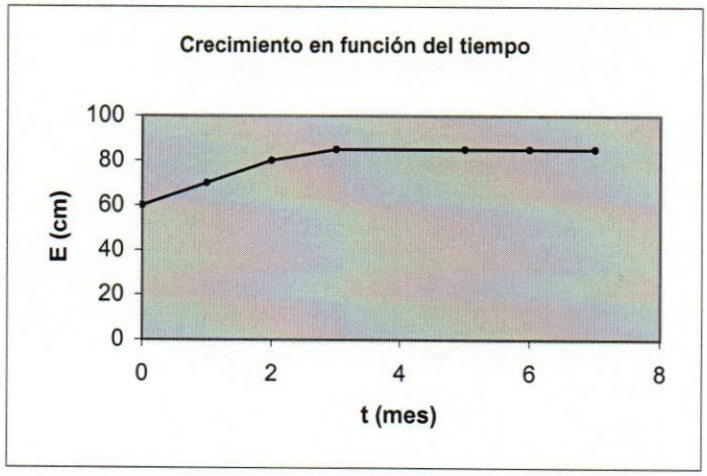
b) 502400 gotas

c) $8,4.10^{-2}$ cm

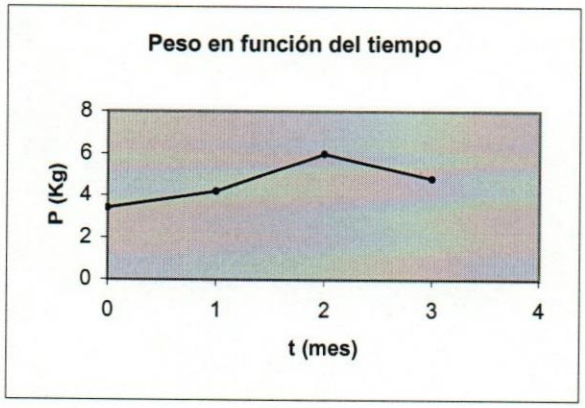
d) 5,8 días

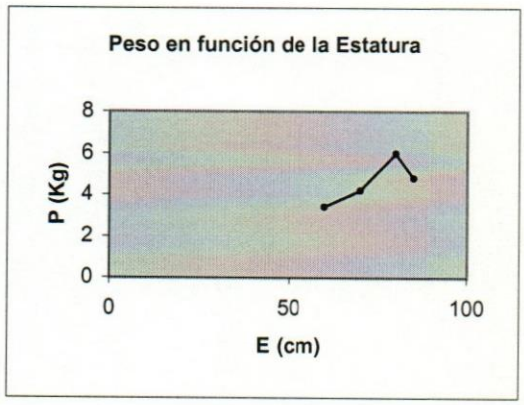
26.-) a)

t(mes)	E(cm)
0	60
1	70
2	80
3	85
5	85
6	85
7	85



t(mes)	P(Kg)
0	3,4
1	4,2
2	6
3	4,8

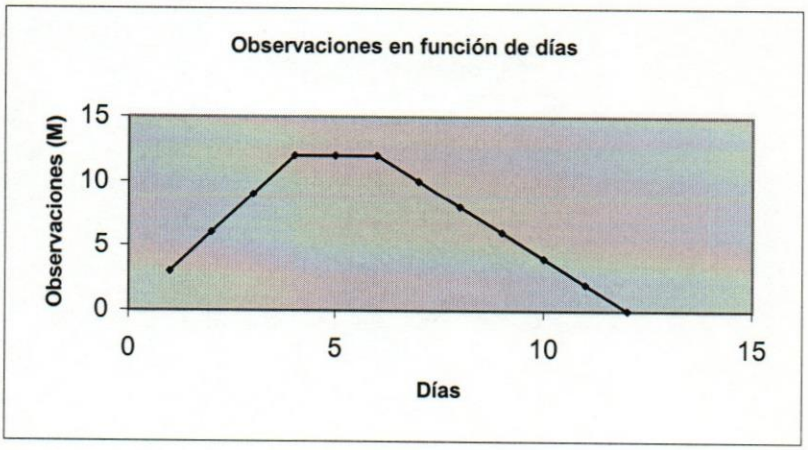




b) **5,1 Kg**

27.-) a)

Día	Observ
1	3
2	6
3	9
4	12
5	12
6	12
7	10
8	8
9	6
10	4
11	2
12	0



b) 4 M
c) 12 M

28.-) a) Ya = 40X
Yb = -20X + 500

c) Son iguales, rectas paralelas

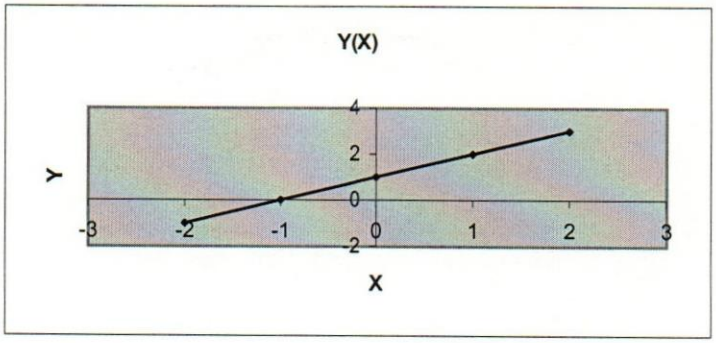
b)

A	C
Creciente	Decreciente
Corta con el orien	Corta en (0,500)
Relación Lineal	Relación Lineal

29.-)

X	Y
1	2
2	3
0	1
-1	0
-2	-1

m = 1
b = 1
Y = X + 1

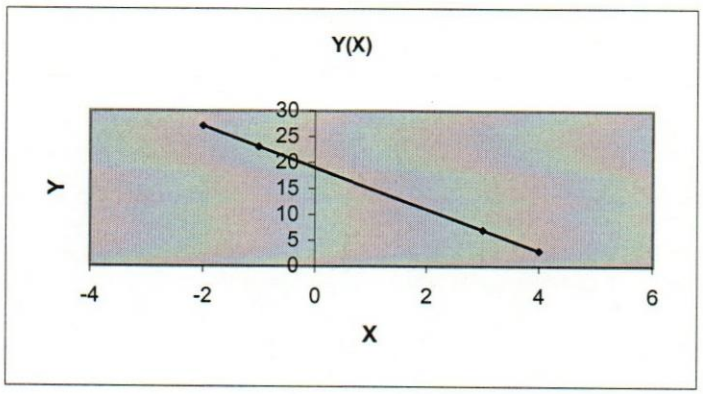


a)
X = 3 **Y = 4**
b)
Y = -2 **X = -3**

30.-)

X	Y
-2	27
-1	23
3	7
4	3

m = -4
b = 19
Y =-4X + 19



b)
X = 2 **Y = 11**
c)
Y = 12 **X = 1,75**
d) **(-4,75;0)**
e) **(-0,19)**

31.-)

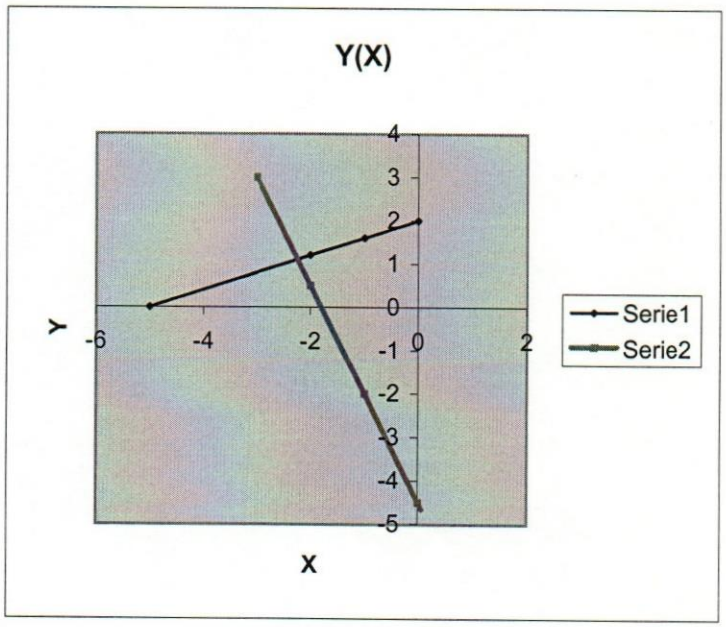
X	Y
0	2
-5	0
-2	1,2
-1	1,6

Y = (2x + 10)/5

Serie 2

X	Y
-2	0,5
-1	-2
0	-4,5
-3	3

Y = (-5X - 9)/2
Recta Paralela



32.-)

T(°C)	L(cm)
3	6
4	10

m = 4
b = -6
L = 4.T - 6

a) **L = 74 cm**
b) **T = 6,25 °C**

SEGUNDO GLOBAL

1.-) (-3,13)

2.-) (-2, 13)

3.-) a) i) Igual sentido (hacia la derecha) = -4 (Izquierda)

ii) a hacia la derecha y b al contrario = 10 (derecha)

b) i) Igual sentido (hacia la derecha) = 10 (derecha)

ii) a hacia la derecha y b al contrario = -4 (Izquierda)

4.-) Ambos resultados pueden ser correctos; depende del sistema de referencia que se utilice.

5.-) $(-\frac{5}{2},-\frac{5\sqrt{3}}{2})$

6.-) V1 = $(175\sqrt{2}, 175\sqrt{2})$

V2 = $(-50\sqrt{3}, 50)$

Vr = $(175\sqrt{2} - 50\sqrt{3}, 175\sqrt{2} + 50) = (x, y)$

$||Vr|| = \sqrt{x^2 + y^2}$, α = arc tag $(\frac{y}{x})$ EN

7.-) V1 = (0, -30)

V2 = (20; 34,64)

V3 = (-64,95; 37,5)

Vr = (-44,95; 42,12)

||Vr|| = 61,6 Km, α = 43,13 ON

8.-) No se sabe, debido a que no se especifican las unidades, y además se puede saber que son de sentido contrario si se trabaja para ambos casos con el mismo sistema de referencia.

9.-) No, debido a que falta su dirección y sentido.

10.-) a) V b) F c) F d) F

11.-) a) MRUV acelerado

b) MRUV acelerado, MRU, MRUV retardado

c) MRU, detenido, MRUV

12.-) a) Depende del sistema de referencia.

b) No, solo se puede asegurar que su rapidez es constante.

c) Distancia: 5 cuadras; Desplazamiento: 1 cuadra hacia la casa de Pedro.

13.-) No, realmente lo que se indica es la rapidez.

14.-) a) (160,9; 427,5)

b) 116,66 Km/h al norte.

c) V = $\sqrt{2900}$ Km/h hacia el norte.

15.-) $\dfrac{Vo + (g \times T - Vo)^2}{2}$

17.-) a) d = 110 m

b) Dt = (250, -200 + 250$\sqrt{3}$)

c) Dt = (250, 250$\sqrt{3}$)

d) V = ||Dt||/5

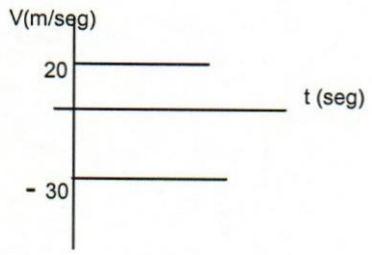
e) V = (875, -700 + 850$\sqrt{3}$)

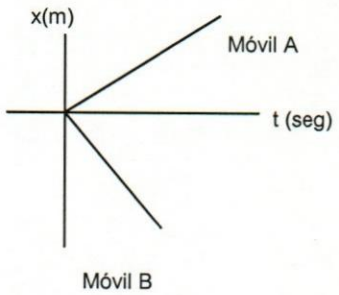
18.-) Móvil A

19.-) a) 250 m

b) 500 m hacia el este.

c)





20.-) a) dt = 2410 m

b) V = 160 m/seg.

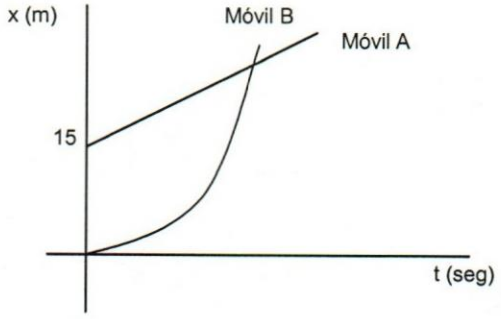
c) D = 2322 m.

d) V = 132 m/seg.

21.-) a) t = $\sqrt{5}$ y $8\sqrt{5}$ m desde el cuerpo B.

b) d = 12 m

c)



22.-) a) 100 m

b) 0

c) Va = 0,05 m/seg este y Vb = 0,05 oeste.

23.-) a) 40 Km/h, sentido común

b) –20 Km/h, sentido contrario a la corriente.

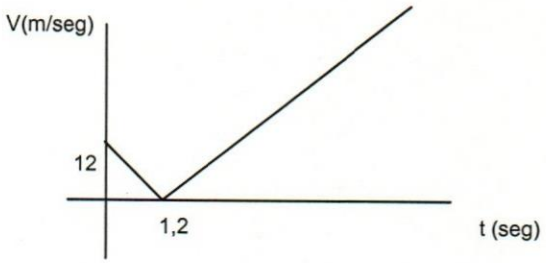
24.-) Los dos llegan iguales, si no hay ninguna otra fuerza que la atracción de la Tierra.

25.-) Aumenta el valor de la gravedad (9,81 m/seg) cada segundo.

26.-) Disminuye el valor de la gravedad (9,81 m/seg) cada segundo.

27.-) a) 13,2 seg

b)



c) 700 m.

d) 72,8 m hacia abajo.

28.-) a) 0,8 seg.

b) d1 = 3,2 m ; d2 = 36,8 m.

29.-) Distancia = 145 m; altura = 55 m y desplazamiento = 25 m hacia abajo.

30.-) a) 1,25 m.

b) 0,3125 m.

TERCER GLOBAL

1.-) a) Si, pero se equilibran $\Sigma F = 0$

b) Hay movimiento, $\Sigma F = m.a$

c) Debido a la Inercia, tienden a mantenerse en reposo.

2.-) $F_1 - F_{2x} = F_1 - F_2.\cos\beta$

3.-) Sigue hacia adelante, debido a la inercia (1era. Ley de Newton).

4.-) No, $\Sigma F = 0$, se anulan entre sí.

5.-) El detenido se mueve en sentido del automóvil que lleva movimiento, y éste se comienza a mover en sentido contrario. Esto se debe a la Ley de Acción y Reacción (3era. Ley de Newton).

6.-) Esto se debe a la existencia de la Fuerza de Roce.

7.-) Semejanza: Deben existir superficies en contacto

Diferencia: La Normal es perpendicular a la superficie, y la Fuerza de Roce es paralela a la superficie.

8.-) Sólo si hay fuerza de roce o cualquier otra fuerza que lo detenga (Ley de Inercia).

9.-) El de menor masa, ya que la aceleración es proporcional a1/m (2da. Ley de Newton).

10.-) a) $a = 0{,}4\ m/seg^2$ (sentido colocado a la fuerza mayor).

b) 1,8 m (sentido colocado a la fuerza mayor, horizontal).

c) 8 m/seg (sentido colocado a la fuerza mayor, horizontal).

11.-) a) $F_1 + F_{2x} - F_3 - fr - P_x = M.a$

$N + F_{2y} - P_y = 0$

$F_{2x} = F_2.\cos\beta \qquad P_x = P.\text{sen}\beta$

$F_{2y} = F_2.\text{sen}\beta \qquad P_y = P.\cos\beta$

b) m_1 : $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = T_1 - P_1 = m_1.a$

M: $\Sigma F_x = T_2 - P_x - fr = M.a \qquad P_x = P.\cos\beta$

$\Sigma F_y = T_1 + N - P_y = 0 \qquad P_y = P.\text{sen}\beta$

m_2: $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = P_2 - T_2 = m_2.a$

12.-) a) $P_b = P$

b) $P_b = m.a + P$

c) $P_b = P - m.a$

13.-) $T_1 = 5{,}86$ New.

$T_2 = 7{,}86$ New.

$M_3 = 0{,}786$ Kg.

14.-) $T = 7{,}32$ New.

$a = 2{,}66\ m/seg^2$.

15.-) P_{max} = 40 Toneladas (Si T_2 es máxima, la cuerda 1 se rompe)

R_{max} = 9,6 New.

16.-) μ = 0,19

17.-) T_1 = 10,21 New.

T_2 = 15,32 New.

a = 0,55 m/seg^2.

18.-) m = 1,58 Kg.

19.-) M = 1,5 Kg.

BIBLIOGRAFÍA

◊ ALVARENGA, Beatriz y MAXIMO, Antonio. *Física General con Experimentos Sencillos*. 4ta. Edición. Editorial Harla. México. 1983.

◊ *Enciclopedia Interactiva Santillana*.

◊ FIGUEROA, Douglas. *Dinámica. Principios, preguntas y Problemas Resueltos.* Vol. 2. Gráfica León C.A. USB, Caracas-Venezuela. 1999.

◊ GIAMBERARDINO, Vicenzo. *Teoría de los Errores*. Editorial Reverte Venezolana, S.A. Venezuela. 1980.

◊ GIANCOLI, Douglas C. *Física I. Principios con Aplicaciones*. 4ta. Edición. Editorial Prentice Hall. México. 1997.

◊ HECHT, Eugene. *Física 1. Algebra y Trigonometría*. 2da. Edición. Editorial Thomson. México 1998.

◊ HEWITT, Paul G. *Física Conceptual*. 2da. Edición. Editorial Addison-Wesley Longman. México.1998

◊ RESNICK, Robert y HALLEDAY, David. *Física. Parte I*. 7ma. Edición. Compañía Editorial Continental, S.A. México. 1984.

◊ SERWAY, Raymond A. *Física. Tomo I.* 4ta. Edición. Editorial McGraw-Hill. México. 1982.