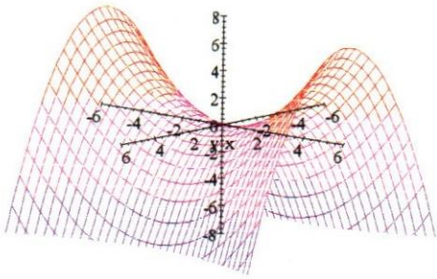
AAP0475

TRAB
II2000
B3

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE CIENCIAS BÁSICAS

UCAB Universidad Católica Andrés Bello
CENTRO CULTURAL PADRE CARLOS G. PLAZA S.J.
BIBLIOTECA CENTRAL - SALA P. PLAZA S.J.
PLANTA BAJA - REFERENCIA

UNA APLICACIÓN DE LA INFORMÁTICA AL CÁLCULO



Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
CARACAS

Trabajo de ascenso presentado ante la ilustre **UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO** por el Ingeniero Luis Barroso Alfaro, para optar por la categoría de Profesor Asistente

El método didáctico empleado combina, con el uso de las tecnologías contemporáneas, aspectos tales como motivación, orientación y cálculo, con la ilustración gráfica de los resultados, lo que permitirá una mejor comprensión y razonamiento del método analítico empleado en el cálculo de la respectiva solución, lo que sugiere en consecuencia que el cálculo sea más concreto y accesible a los

PRÓLOGO

El propósito de este trabajo es presentar a los estudiantes universitarios de ingeniería y ciencias, la aplicación de una moderna, lógica y eficiente herramienta de cálculo matemático, que les facilite una mejor comprensión de los problemas matemáticos. El método didáctico empleado combina, con el uso de las tecnologías contemporáneas, aspectos tales como motivación, orientación y cálculo, con la ilustración gráfica de los resultados, lo que permitirá una mejor comprensión y razonamiento del método analítico empleado en el cálculo de la respectiva solución, lo que sugiere en consecuencia que el cálculo sea más concreto y accesible a los estudiantes.

Es bien conocido que el análisis gráfico de los problemas matemáticos, ayuda en forma significativa a comprender las Matemáticas y a hacerlas más asequibles.

Con el " *software* " utilizado en la realización del presente trabajo, sólo se requiere hacer "*click*" sobre el icono correspondiente, para obtener rápida y eficientemente, presentaciones gráficas en dos o tres dimensiones de problemas matemáticos cuya solución convencional implicaría largos procesos de cálculo y análisis numéricos.

También es posible, a partir de expresiones matemáticas, crear objetos gráficos científicos e incluso artísticos en la pantalla del computador, así como su posterior edición e impresión.

El uso eficiente de métodos gráficos y analíticos para comprobar resultados, ayudará también al estudiante a desarrollar y aumentar la confianza en sus propias habilidades matemáticas, lo que sin duda alguna, le será de gran utilidad en aquellos momentos de su vida profesional en los que se enfrente a situaciones de trabajo en las que no disponga de dispositivos electrónicos de cálculo.

El seguimiento del contenido supone el conocimiento por parte del lector, de los principios fundamentales del Cálculo, Algebra y Trigonometría. No se incluye ningún capítulo tutorial, por cuanto todos los comandos y herramientas utilizadas se corresponden estrictamente con la notación matemática natural, es decir, con la forma de escritura de las Matemáticas reconocida internacionalmente.

ÍNDICE

CAPÍTULO I **Página**

1.1) OBJETO 1

1.2) CARACTERÍSTICAS BÁSICAS 1

1.3) IMPORTANCIA DE LAS GRÁFICAS 1

1.4) INTRODUCCIÓN AL *"SCIENTIFIC NOTEBOOK"* 2

1.4.1) Cambio de Texto a Matemáticas 3

1.4.2) Otras Herramientas 3

1.5) ESCRIBIENDO MATEMÁTICAS 4

1.5.1) Escribiendo un polinomio 4

1.5.2) Escribiendo una expresión racional 4

1.5.3) Escribiendo una raíz de índice "n" 5

1.6) GRAFICAR UNA EXPRESIÓN 5

1.6.1) Funciones de una variable

1.6.1.1) Gráfica de un polinomio 5

1.6.1.2) Cambios en el Dominio y en el Rango de una Gráfica 7

1.6.1.3) Añadir una o más gráficas a otra existente 9

1.6.1.4) Graficar varias curvas al mismo tiempo y en el mismo Sistema de Coordenadas. 6

1.61..5) Definir expresiones y funciones 10

1.6.1.6) Evaluar expresiones y/o funciones previamente definidas 10

1.6.1.7) Fijación del número de decimales 11

1.6.1.8) Función compuesta 11

1.6.1.9) Ver lista de expresiones y funciones previamente definidas 12

1.6.1.10) Borrar todas las expresiones y funciones previamente definidas.. 12

1.6.1.11) Borrar una de las expresiones y/o funciones definidas. 12

1.6.1.12) Construir una tabla de valores. 12

1.6.1.13) Graficar una expresión previamente definida. 13

1.6.1.14) Factorización, Simplificación y Evaluación de una Expresión racional. 15

Página

1.6.1.15) Resolución de ecuaciones 17

a) Ecuaciones de grado " n" 17

b) Ajuste del número de decimales 18

c) Sistema de ecuaciones 19

d) Solución de una ecuación especificando el intervalo. 20

e) Ecuación de la circunferencia que pasa por tres Puntos dados. 25

CAPÍTULO II

2.1) RELACIÓN 28

2.2) FUNCIÓN 28

2.2.1) Nomenclatura 28

2.2.2) Clasificación de funciones de acuerdo a su naturaleza 29

2.2.2.1) Función Inyectiva 29

2.2.2.2) Función Sobreyectiva 32

2.2.2.3) Función Biyectiva 33

2.2.3) Simetría de una función 35

2.2.4) Función real 37

2.2.5) Función real de variable real 37

2.2.6) Función a trozos 37

2.3) FUNCIONES ELEMENTALES 40

2.3.1) Funciones algebraicas 40

2.3.2) Función Máximo Entero 43

2.3.3) Función Mínimo Entero 43

2.3.4) Funciones Trascendentes 44

2.4) COMBINACIÓN DE FUNCIONES 48

2.5) CAMBIOS ESTRUCTURALES EN LAS FUNCIONES 50

2.6) GRÁFICA DE LAS FUNCIONES IMPLÍCITAS 57

4.1) CAMBIO DE COORDENADAS RECTANGULARES A POLARES 99

4.2) GRÁFICAS EN COORDENADAS POLARES 99

4.3) CÓNICAS EN COORDENADAS POLARES 103

4.4) EXCE[illegible] POLARES 104

Página

c) Lemniscatas
d) Otras rosas

4.7) OTRAS CURVAS EN POLARES 111

4.8) INTERSECCIÓN DE CURVAS EN POLARES 115

4.9) FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS 119

4.9.1) Gráfica de funciones definidas a trozos 120

4.10) ECUACIONES PARAMÉTRICAS 123

4.10.1) Gráficas 124

4.10.2) Ejemplos 124

a) Ejemplo 1:Función exponencial: $y = e^x$ 124
b) Ejemplo 2:Circunferencia de centro en el origen de Coordenadas. 125
c) Ejemplo 3: Hipérbola 126
d) Ejemplo 4: Cicloide 127
e) Ejemplo 5: Cicloide Prolata 128
f) Ejemplo 6: Cicloide Corta 128
g) Ejemplo 7: Hipocicloide y Astroide 129
h) Ejemplo 8 Hechicera de Agnesi 130
i) Ejemplo 9 : Folio de Descartes 130
j) Ejemplo 10: Curvas de Lissajous 132
k) Ejemplo 11 : Evoluta de la Elipse 133
l) Ejemplo 12: Involuta del Círculo 134
m) Ejemplo 13: Serpentina 134
n) Ejemplo 14: Espiral 135

CAPÍTULO V: GRÁFICAS EN R^3

5.1) GRÁFICAS EN COORDENADAS RECTÁNGULARES 137

5.2) SUPERFICIES CUÁDRICAS 144

a) Cónicas con centro 145
b) Cónicas sin centro 154
c) Cilindros Cuádricos 157

5.3) SUPERFICIES CUÁDRICAS 162

5.4) SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN 167

5.5) OTRAS SUPERFICIES EN R^3 168

5.6) ECUACIONES PARAMÉTRICAS EN COORDENADAS 169

RECTÁNGULARES.
5.6.1) Gráfica 169
5.6.2) Ejemplos 170
5.7) OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS EN R^3 174
5.7.1) Sistema de Coordenadas Cilíndricas 174
5.7.2) Superficies parametrizadas en Coordenadas Cilíndricas 180
5.7.3) Sistema de Coordenadas Esféricas 182
5.7.4) Superficies parametrizadas en Coordenadas Esféricas 189
5.8) EJERCÍCIOS PROPUESTOS 192

CAPÍTULO VI: FUNCIONES VECTORIALES Y CURVAS EN EL ESPACIO

6.1) FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE 194
6.1.1) Definición 194
6.1.2) Gráfica 194

CAPÍTULO VII: MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

7.1) DEFINICIONES 201
7.2) CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE UN EXTREMO LOCAL 203
7.3) TEOREMA DE LOS VALORES EXTREMOS 211

CAPÍTULO I

ARQUÍMEDES

Arquímedes de Siracusa, nacido el año 287 (a.C.) es considerado el más grande matemático de la era antigua, desde el sigloV a.C. hasta siglo II d.C. Fue famoso en su época por inventos mecánicos tales como el dispositivo de palanca y polea (*"dadme un punto de apoyo y moveré al mundo"*), un planetario donde duplicó el movimiento de los cuerpos celestes de manera tanprecisa que mostraba los eclipses de sol y de luna, las máquinas de guerra que tanto aterraron a los romanos en la batalla de Siracusa, en la cual encontró la muerte. No obstante, se decía que estos inventos eran simplemente para Arquímedes, una aplicación de la Geometría al juego, pues sus obras se dedicaban a la investigación de las Matemáticas. Pero eso no es todo, la Hidrostática le deben su famoso principio del empuje de los fluidos.

Arquímedes escribió sobre todos las custiones matemáticas conocidas en su época, y a todas ellas aportó nuevas ideas y conclusiones. Llegó a determinar muchas áreas de círculos, esferas y secciones cónicas así como también volúmenes de conos, esferas, elipsoides y paraboloides, áreas y volúmenes que en la actualidad se determinan usando Cálculo Integral.

Euclides, que vivió entre 306 (a.C) y 283 (a.C), había determinado que el área A de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio r , es decir, $A = \pi r^2$, donde π es la constante de proporcionalidad. Fue Arquímedes quien aproximó con precisión el valor numérico de esta constante de proporcionalidad π, demostrando que su valor está entre $3\frac{10}{71}$ y $3\frac{1}{7}$. En efecto:

$$3\tfrac{10}{71} < \pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\,1\ldots < 3\tfrac{1}{7}$$

Euclides también había demostrado que el volumen V de una esfera de radio r está dado por la expresión : $V = kr^3$ (k = constante). Fue Arquímedes quien demostró que :

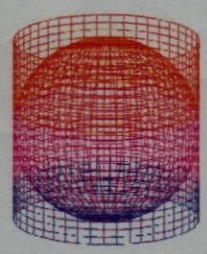
$$k = \tfrac{4\pi}{3}$$

También se deben a Arquímedes fórmulas tan familiares como: $V = \pi r^2 h$ y $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

para un cilindro y un cono, respectivamente, de radio r y altura h.

Arquímedes también demostró que, si la altura del cilindro es $h = 2r$, las áreas totales de la superficie Ac y Ae, del cilindro y de la esfera, respectivamente, y sus volúmenes Vc y Ve, tienen la misma razón 2 : 3. Es decir:

$$Ae = \tfrac{2}{3}Ac \quad \text{y} \quad Ve = \tfrac{2}{3}Vc$$



CAPÍTULO I

1.1) OBJETO

El presente trabajo tiene por objeto, poner al alcance del estudiante una poderosa herramienta de "software" , orientada específicamente hacia diversos tópicos del análisis matemático y representaciónes gráficas , requeridos también por ingenieros, científicos profesionales e inclusive artistas, en aquellas situaciones donde el cálculo matemático esté involucrado.
El "software" a ser aplicado, denominado "*SCIENTIFIC NOTEBOOBK*", integra los siguientes elementos fundamentales:

a) Números y unidades.
b) Álgebra.
c) Trigonometría y números complejos.
d) Funciones.
e) Gráficas de curvas y superficies.
f) Cálculo: Límites, derivadas, integrales definidas e indefinidas, series, optimización .
g) Matrices.
h) Ecuaciones diferenciales: en derivadas ordinarias y en derivadas parciales.
i) Cálculo vectorial.

Dada la variedad de temas abarcados por el "s*oftware*"arriba identificado, en el presente trabajos nos concretaremos a los mencionados bajos los literales d) , e) , la parte concerniente a limites del literal f), y haremos especial énfasis en el tema e) " gráficas de curvas y superficies", por considerar el autor que, el disponer de una herramienta que permita graficar en forma rápida y eficiente, el modelo matemático correspondiente a problemas científicos, ayuda tanto estudiantes de Matemática como a ingenieros, científicos y profesioneles en general, a comprender mejor la Matemática y a hacerla más asequibles.

1.2) CARACTERÍSTICAS BÁSICAS

Una característica básica del "*Scientific Notebook*" es que no hay distinción entre números reales, complejos , enteros y decimales pues, en este "*software*", todos estos números están conectados contínuamente, por lo que una variable puede contener números de cualquier tipo sin requerir una declaración especial durante el cálculo, como sucede cuando se trabaja en lenguajes de programación como el FORTRAN o C, en donde se requiere una subrutina distinta para cada variable sencilla o doble, real o compleja, entera o decimal.
Esta característica fundamental hace del "Scientific Notebook" una rápida y eficiente herramienta matemática .

1.3) IMPORTANCIA DE LAS GRÁFICAS

La mayor parte de las ecuaciones matemáticas, expresan dificiles relaciones entre una, dos, tres o más variables, por lo que tratar de entenderlas sin gráficas, puede resultar un problema de considerable complejidad. Es muy bien conocido que el análisis visual de los problemas , ayuda significativamente a su comprensión y asimilación. No obstante, durante las últimas tres décadas en las que FORTRAN dominó entre los lenguajes de programación, la solución gráfica de los problemas matemáticos con la ayuda de computadoras, solía requerir un esfuerzo adicional considerable. Por ello, muchos usuarios de FORTRAN se vieron en la necesidad de leer los resultados calculados en forma de listados de números.
En el presente, las gráficas se consideran importantes desde la educación primaria hasta la

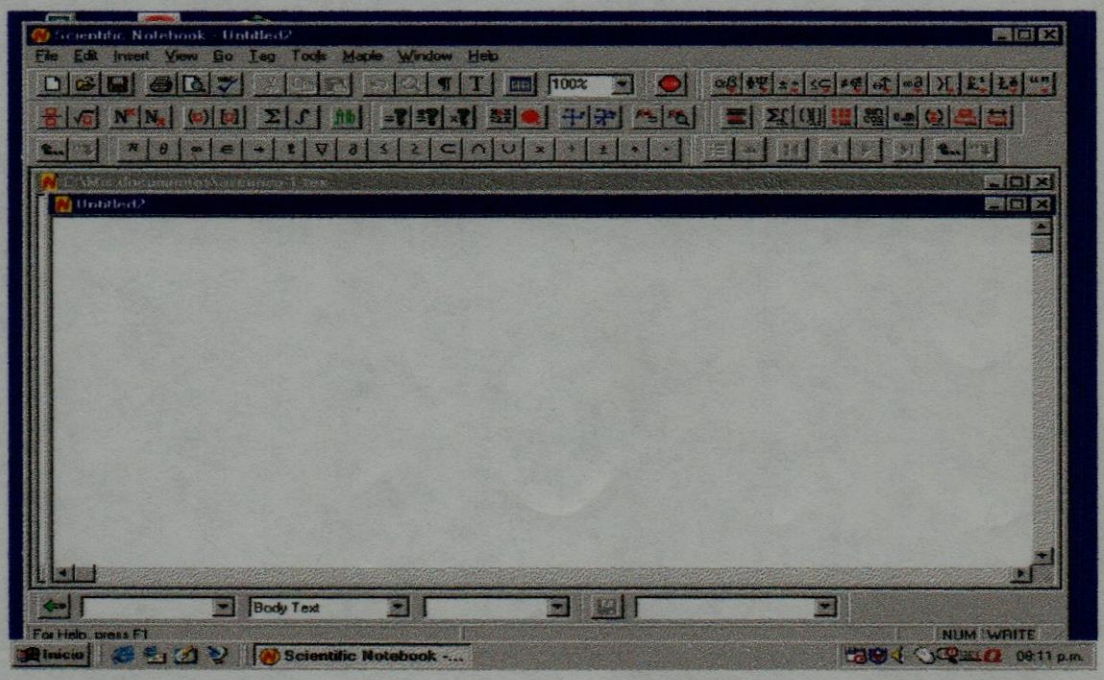
superior. En las presentaciones profesionales,casi todos los análisis matemáticos, científicos y de ingeniería, se presentan con gráficas.
Las gráficas son parte fundamental y natural del entorno del programa "*Scientific Notebook*", pues basta pocas instrucciones para crear en la pantalla, mediante expresiones matemáticas, soluciones gráficas a problemas científicos e incluso artísticos.
En general, consideramos que el programa "***SCIENTIFIC NOTEBOOK***"permite una rápida y eficiente creación de gráficas, lo que esperamos motive a los estudiantes para aprender métodos matemáticos y numéricos en forma agradable.
Este trabajo se escribió con la intención de hacer precisamente eso.

1.4) INTRODUCCIÓN AL "SCIENTIFIC NOTEBOOK"

El "software" identificado como "*SCINTIFIC NOTEBOOK*", permite escribir matemáticas usando las normas internacionales aceptadas para tal fin. Por esta razón , se prescinde en el presente trabajo de un tutorial, por cuanto se considera que el lector está familiarizado con los símbolos y nomenclatura de uso general en el cálculo matemático. No obstante, el uso y aplicación de cada comando, será explicado detalladamente en la medida que lo requiera su utilización en un problema específico.
El programa distingue entre texto propiamente dicho y Matemática y asume en consecuencia, de no indicarse lo contrario, que el usuario está escribiendo texto. Tenga presente el lector que en todo este trabajo, las abreviaturas de las funciones están dadas por las correspondientes abreviaturas derivadas del idioma inglés. En particular, la función trigonométrica seno de x (sen x) se representará por la expresión $\sin x$, derivada según se indicó, de la palabra "*sine*"de dicho idioma. Ésta y el resto de las funciones trigonométricas, así como otras de uso común en el cálculo matemático, pueden encontrarse en la Barra de Herramientas del programa, bajo la instrucción:

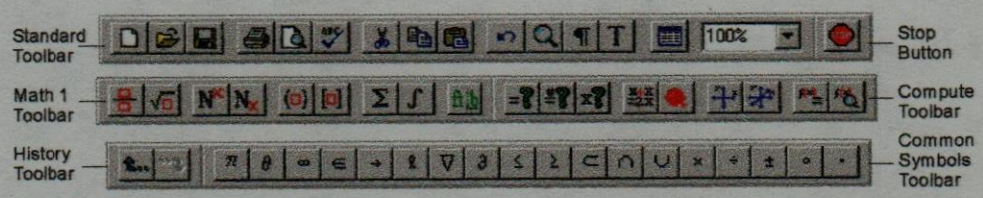
"Insert+Math Name".

Una pantalla típica del "*SCINTIFIC NOTEBOOK*" se presenta a continuación:



- **1.4.1) CAMBIO DE TEXTO A MATEMÁTICA**

En la Barra de Herramientas como la que se muestra:



haga *click* en el icono :

el mismo cambiará a:

en color rojo, indicando así que el progrma está en el modo Matemática.

En este modo, el programa:

a) Escribe los caracteres en el tipo " *itálica*" y en el formato correspondiente a las normas aceptadas universalmente para la escritura de las Matemáticas.

b) Reconoce todo lo que escriba como una expresión matemática.

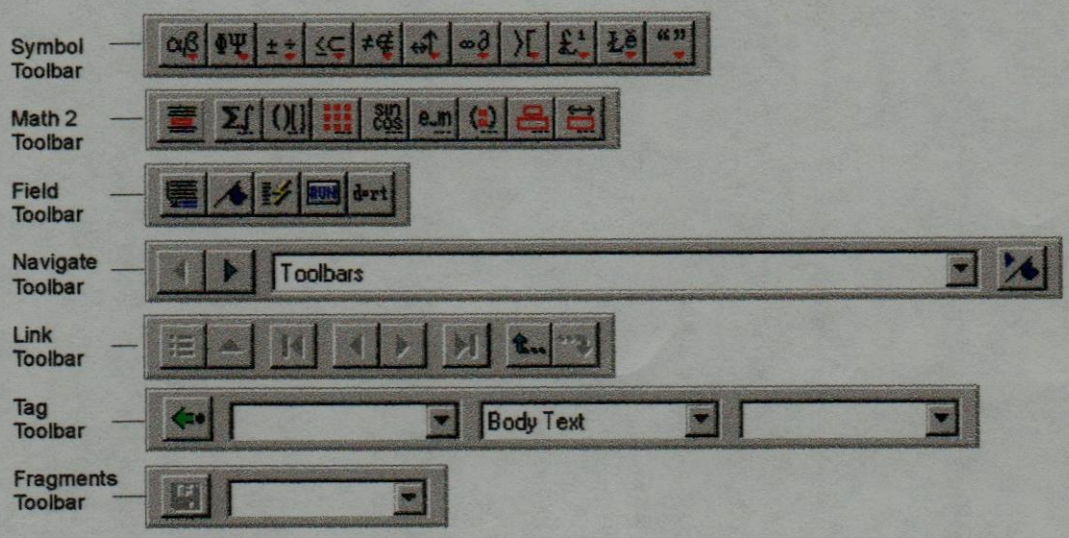
c) Automáticamente, inserta espacios antes y después de los operadores tales como: $+, -, \bullet, \div, \leq$, etc.

d) Usa la Barra Espaciadora para insertar el cursor en el próximo objeto, mas no para insertar espacios.

1.4.2) OTRAS HERRAMIENTAS

Otras funciones y símbolos están disponibles en el programa y los mismos pueden abrirse en pantalla, a conveniencia del usuario.

Para ello, se selecciona desde la Barra de Menú: "**View+Toolsbar**"



El uso de estas herramientas se expolicará más adelante, en la misma medida en que se requiera la utilización de cualquiera de ellas para una aplicación específica. No obstante, consideramos que su uso resultará muy "amigable", dado que los iconos, operadores, símbolos, etc., son los mismos usados en el lenguaje internacional del cálculo matemático.

1.5.) ESCRIBIENDO MATEMÁTICAS

1.5.1) ESCRIBIENDO UN POLINIMIO.

Por ejemplo: $3x^2 - 12x + 13$

a) En la Barra de Herramientas , haga *click* en el icono:

El mismo cambiará a:

El color rojo indica que el programa "***Scientific Notebook***" está en el **modo Matemática** y reconocerá en consecuencia lo que se escriba a continuación, como una expresión matemática.
(Opcionalmente, ésto también puede lograrse eligiendo "**Insert + Math**" en la Barra de Menú).

b) Escriba normalmente : $3x$
aparecerá en letras rojas, indicando que se está en el **modo Matemática**.

c) Haga click en el ícono: y escriba : 2
(Opcionalmente, puede elegir "***Insert*** + ***Superscript***" en la Barra de Herramientas).

d) Después de escribir el exponente 2, presione la Barra Espaciadora
(O use la flecha hacia la derecha →) para salir del Exponente y regresar a la línea que está escribiendo).

e) Escriba el resto del polinomio: $-12x + 13$

El resultado será: $3x^2 - 12x + 13$

NOTA 1:

Cuando se trabaja en el "**modo Matemática**" (icono activado), el programa *Scientific Notebook* maneja los espacios entre letras. Como ya se indicó, al presionar la Barra Espaciadora en este modo, puede cambiar la inserción del cursor en la estructura del polinimio, pero no insertará ningún espacio.

1.5.2) ESCRIBIENDO UNA EXPRESIÓN RACIONAL

Por ejemplo : $\frac{3x^2-12x+13}{2x^2-3}$

a) Haga *click* en en el icono:

(Opcionalmente, se puede elegir "**Insert** + **Fraction**"en la Barra de Menú)
Automáticamente, el programa se pone en el modo Matemática.

b) Escriba el polinomio: $3x^2 - 12x + 13$ en el cuadro superior (numerador).

c) Oprima la tecla TAB ⇆ para cambiar al denominador.
(Opcionalmente, se puede oprimir la tecla con flecha hacia abajo: ↓)

d) Escriba el polinomio : $2x^2 - 3$

e) Oprima la Barra Espaciadora (o la tecla →) para salir de la fracción.

El resultado será: $\frac{3x^2-12x+13}{2x^2-3}$

1.5.3) ESCRIBIENDO UNA RAIZ DE ÍNDICE "n"

Ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{3x^2-12x+13}{2x^2-3}}$

a) Seleccione con el "*mouse*" la expresión : $\frac{3x^2-12x+13}{2x^2-3}$ del ejemplo anterior.

b) Haga *click* en el ícono : ubicado en la Barra de Herramientas
(Opcionalmente, puede elegir "**Insert** + **Radical** " en la Barra de Menú

c) Oprima la tecla TAB ⇄ para posicionar el cursor en el índice del radical.

(Opcionalmente, puede oprimir la tecla con flecha hacia arriba ↑)

d) Escriba el índice de la raiz : 3 en este caso.

e) Teclee la Barra Espaciadora (o la tecla →) para salir de la posición relativa al índice de la raiz.

1.6) GRAFICAR UNA EXPRESIÓN

1. 6.1) FUNCIONES DE UNA VARIABLE: $y = f(x)$

1.6.1.1) Gráfica de un polinomio

a) En el modo Matemática (icono activado), se escribe el polinomio bajo estudio, por ejemplo:

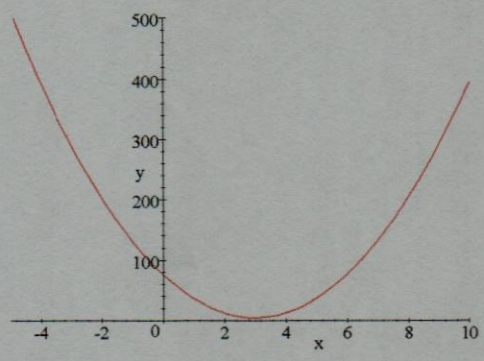
$$8x^2 - 48x + 77$$

b) Coloque el cursor dentro o a la derecha del polinomio. (Opcionalmente, se puede seleccionar toda la expresión con el *mouse*).

c) Haga *click* en el ícono: ubicado en la Barra

de Herramientas.
(Opcionalmente, puede elegir :
"***Maple +Plot 2D+Rectangular***")

El resultado será:



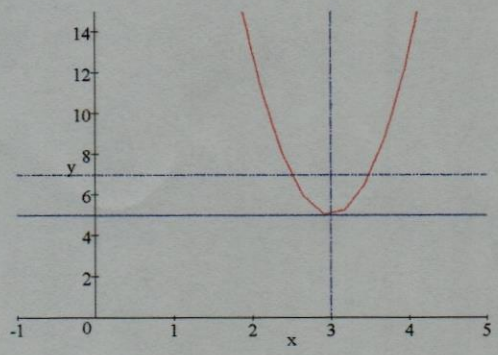
$8x^2 - 48x + 77$

En efecto, si completamos cuadrados en la expresión dada, se obtiene:

$y = 8(x^2 - 6x) + 77$, de donde: $y = 2\left[(x-3)^2 - 9\right] + 77$
es decir: $y = 8(x-2)^2 + 5$, lo que representa la ecuación de una parábola con: $4p = 8 \rightarrow p = 2$; por lo que:

- -Vértice : $V(3,5)$
- - Foco : $F(3,7)$
- - Eje focal : $x = 3$
- - Directriz : $y = 7 - p = 7 - 2 = 5$

La siguiente figura ilustra los resultados anteriores, en donde se han realizado los cambios de escala necesarios para apreciar los parámetros aquí calculados:



Parábola : $y = 8(x-3)^2 + 5$

NOTA 2:
Recuerde que:

1°) Para aplicar un comando a una expresión matemática, se coloca el cursor dentro o a la derecha de dicha expresión (o se selecciona dicha expresión con el *mouse*) , y se elige el comando que se desea aplicar desde la Barra de Herramientas, (o desde el menú de Maple).

2°) Para que una expresión matemática sea reconocida como tal por el "*Scientific Notebook*", dicha expresión debe ser escrita **toda ella** en el modo Matemática; en consecuencia, tiene que aparecer en color rojo o gris en la pantalla, y no puede existir separación correspondiente al modo de texto.

1.6.1.2) Cambios en el Dominio y en el Rango de una Gráfica

a) Active el gráfico haciendo *click* en el cuadro que lo contiene. Aparecerá un icono en el extremo inferior derecho de dicho cuadro.

b) Haga de nuevo *click* sobre dicho icono.
(Opcionalmente, se puede seleccionar"**Edit+Properties**" en la Barra de Menú).
Se activará una Caja de Diálogo denominada: "*Plot Properties*"

c) Haga los cambios requeridos en la gráfica y seleccione "**OK** " en la Caja de Diálogo.

Los cambios permitidos por la Caja de Diálogo "***Plot Properties***" activada, son:

* **VIEW** : Permite realizar cambios en el Dominio y en el Rango de la gráfica, de acuerdo con el interés del usuario. Para ello, se despliegan las siguiente posibilidades:

Dominio x :_____ to:_____

Rango: y :_____ to:_____
Default [ ]

* **AXES** : Permite ajustar:

a) Tipo de eje: (**Axes Type**): { Normal, Framed, None }

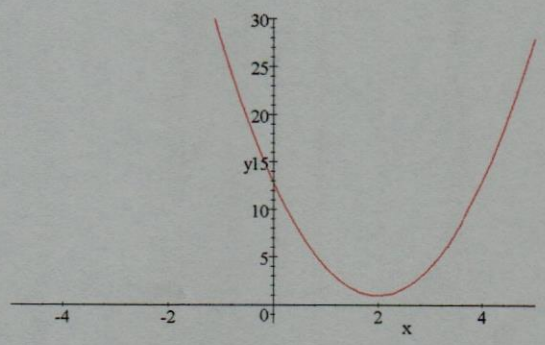
b) Escala: (**Axes Scaling**): { Normal, Log, Log-log }

* **PLOT COMPONENTS**: : Permite

a) Agregar otras funciones al mismo gráfico : " **Add- Item**"
b) Cambiar el tipo de línea : " **Line Style**"
c) Asignar color a la gráfica : " **Line color**"
d) Cambiar grosor del trazo : " **Thickness**"
e) Cambiar el Dominio : " **Domaine Intervals**"

* **LABELING** : Permite sub-titular el gráfico . Para ello, se escribe el sub-título deseado en el recuadro denominado: "**Caption text**".

- **Ejemplo**: Sub-titular la gráfica de : $y = 3x^2 - 12x + 13$, con el texto : "**Parábola Vertical cóncava hacia arriba**"



$y = 3x^2 - 12x + 13$

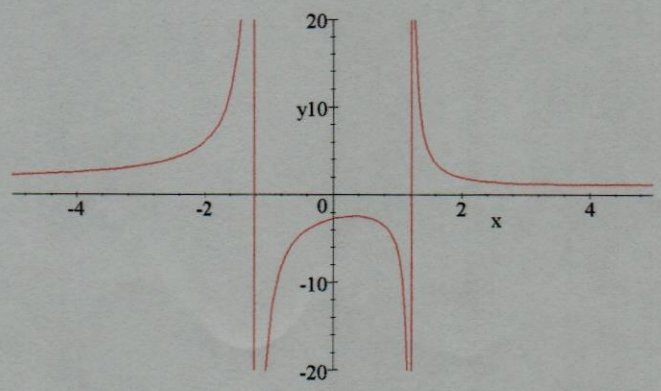
Parábola Vertical cóncava hacia arriba

* **FRAME**: Presenta las siguientes opciones:

Size: Permite ajustar el ancho (*Width*) y el largo (*Height*) del marco que contiene a la gráfica.

Unit : Permite graduar los ejes x e y en : cm. , pulgadas, etc.

- **Ejemplo**: Graficar la siguiente expresión racional : $\frac{3x^2-12x+13}{2x^2-3}$



$\frac{3x^2-12x+13}{2x^2-3}$

1.6.1.3) Añadir una o más gráficas a otra existente

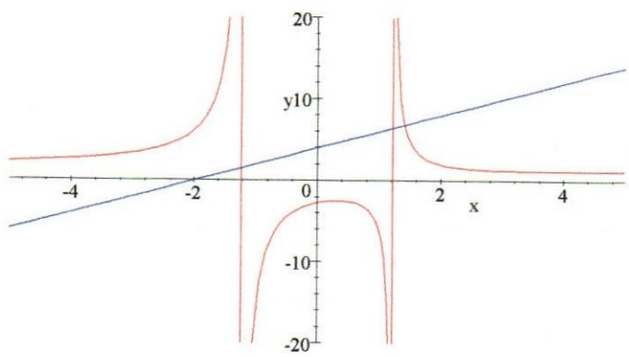
a) Con el gráfico existente activado, haga *click* en el icono de la esquina inferior derecha; aparecerá la Caja de Diálogo: "**Plot properties**" (O selecione "**Edit+Properties**"en la Barra e Menú).

b) Elija "**Add Item**" y escriba la nueva expresión a graficar, en el recuadro titulado:"**Expressions and Relations**".

c) Después de escribir su nueva expresión y fijar color,tipo de línea, etc., seleccione la opción "**OK**"(u oprima la tecla "**ENTER**").

Ejemplo: Añadir la gráfica de la recta : $y = 2x + 4$ a la curva mostrada anteriormente, en color azul.

Procediendo en la forma indicada, se obtiene:



$\frac{3x^2-12x+13}{2x^2-3}$

NOTA 3

En este caso, a cada gráfica se le puede asignar el color que se desee.

1.6.1.4) Graficar varias curvas al mismo tiempo y en el mismo sistema de coordenadas

a) Se inicia el modo Matemáticas y se escriben las distintas expresiones a graficar, separadas por una coma.
Ejemplo: $x^3, 4x^2 + 2x, 3x + 20$

b) Se coloca el cursor dentro de una cualquiera de las expresiones (o a la derecha de ellas).

c) Se hace *click* en el icono
(O se seleciona;"**Maple+Plot 2D+Rectangular**".

El resultado será:

$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,46$

1.6.1.8) Función compuesta: **f(g(x))**

a) Se definen las funciónes f(x) y g(x) según se explicó anteriormente.
Por ejemplo: $f(x) = ax + b$; $g(x) = \sin x$

b) Se escribe en el modo Matemáticas: $f(g(x))$

c) Se seleciona: "**Maple+Evaluate**"
El resultado será: $f(g(x)) = a\sin x + b$

o : $g(f(x)) = \sin(ax+b)$

Recuérdese que la función compuesta existe si y sólo si: $D_f \cap Rg \neq \emptyset$

- **Ejemplo**:

Dado: $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$ y

$g(x) = \sin(x+2)$

calcular : $f(g(x))$

Solución:

Aplicando los pasos antes señalados, se obtiene: $f(g(x)) = \left(1+\frac{1}{\sin(x+2)}\right)^{\sin(x+2)}$

1.6.1.9) Ver la lista de Expresiones y Funciones definidas

⋆ A tal efecto, se selecciona: "**Maple+Define+Show Definitions**" en la Barra de Menú.

Como resultado, se muestra una caja con un listado de todas las funciones definidas según el proceso anterior.

1.6.1.10) Borrar todas las Expresiones y Funciones previamente definidas

⋆ Se selecciona: "**Maple+Define+Clear Definitions**" en la Barra de Menú.

1.6.1.11) Borrar una de las Expresiones y/o Funciones definidas

a) Se selecciona la expresión o función que se desea borrar

b) Se seleciona: "**Maple+Define+Undefine**" en la Barra de Menú.

1.6.1.12) Construir una Tabla de Valores

a) Se selecciona la expresión o función que se desea evaluar

Por ejemplo: $f(x) = 3x^2 - 12x + 13$

b) Se seleciona: "**Maple+Define+New Definitions**."

c) Se escribe en el modo Matemáticas, la letra: f

d) Se elige: "**Insert +Matrix**" y se especifica el número de filas requerido, (por ejemplo 6) y una (1) columna.

e) Se escriben los valores de la variable x en cada celda de la matriz (Use las flechas ← ↓ → para mover el cursor entre celdas).

En este caso: 0.1 , 0.01 , 0.001, -0.1, -0.01 , -0.001

f) Se seleccina la matriz con el *mouse* y se elige: "**Insert+Brackets**"

(o se hace *click* en el icono)

g) Con el cursor en la expresión:

$$f\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \\ -0.1 \\ -0.01 \\ -0.001 \end{pmatrix}$$ se selecciona: "**Maple+Evaluate**"

Así se obtiene:

$$f\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \\ -0.1 \\ -0.01 \\ -0.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.83 \\ 12.8803 \\ 12.988003 \\ 14.23 \\ 13.1203 \\ 13.012003 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2:

Evaluar la función: $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

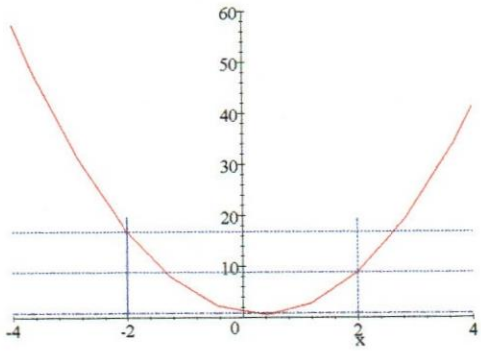
en : $x = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e ilustrar gráficamente.

Solución:

Aplicando la técnica arriba expuesta, se obtiene:

$$f\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ 17 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \\ 22 \\ 41 \end{pmatrix}$$

La siguiente gráfica confirma estos resultados:



$(x, 3x^2 - 2x + 1)$

1.6.1.13) Gráficar una expresión o función previamente definida

a) Se define la función que se desea graficar, según se señala en el punto 1.6.1.5) de este trabajo.
Por ejemplo: $y = x^3 - 2x + 1$ o $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$

b) Se inserta el cursor a cualquier lado del signo igual
(O a la derecha de la función).

c) (Se elige: "**Maple+Plot 2D+Rectangular**")

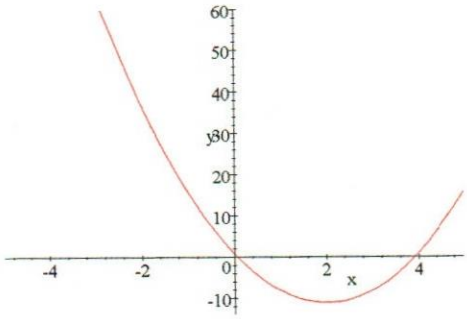
(O se hace *click* en el icono)

El resultado será la gráfica de la función

Ejemplo: Definir y graficar :

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ b) $y = x^3 - 2x + 1$

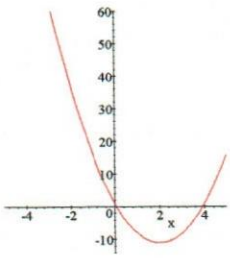
Solución a) Siguiendo los pasos arriba señalados, se obtiene:



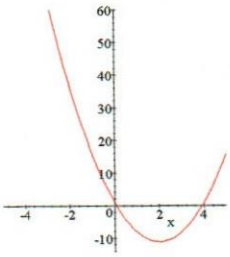
$f(x) = 3x^2 - 12x + 1$

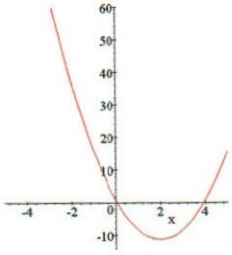
NOTA 5

Para obtener la gráfica de la función: $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$, previamente definida, se puede usar el símbolo: $f(x)$, la expresión: $3x^2 - 12x + 1$, o sólo el nombre de la función: f , como se muestra a continuación.



$f(x)$,$3x^2 - 12x + 1$, f

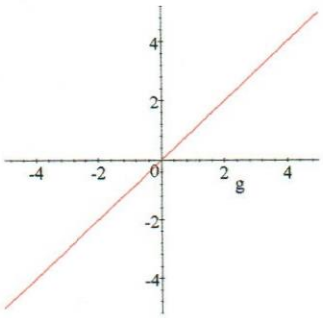


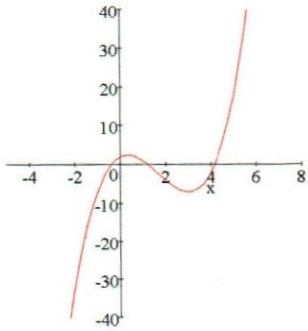


NOTA 6

Si no se ha definido previamente funciones tales como $g(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ o $g = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ y se desea graficar dichas expresiones, el *Scientific Notebook* graficará la expresión que esté al mismo lado del signo igual, respecto del cursor.

Por ejemplo, si se escribe y no se define :$g = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$, con el cursor del lado izquierdo (o derecho) de la ecuación, se obtendrá, respectivamente :





$g =$; $g = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$

Cursor en el lado izquierdo (Recta $y = x$)

Cursor en el lado derecho

1.6.1.14) Factorización, Simplificación y Evaluación de una expresión racional

a) Factorización:

Supongamos que se desa factorizar la expresiön: $4x^4 + 6x^2 + 19x + 6x^3 + 15$

A tal efecto, se ubica el cursor a la derecha de la expresión dada (o en ella), y se selecciona: "**Maple+Factor**".

El resultado será: $4x^4 + 6x^2 + 19x + 6x^3 + 15 = (2x+3)(x+1)(2x^2 - 2x + 5)$

Otros ejemplos:

a.1) $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

a.2) $x^5 - 32 = (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$

a.3) $x^5 + 32 = (x+2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$

a.4) $x^6 + 64 = (x^2+4)(x^4 - 4x^2 + 16)$

a.5) $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + xa + a^2)$

b) Simplificación:

Para simplificar expresiones tales como: $\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}$, se ubica el cursor a la derecha de la expresión (o en ella), y se selecciona : "**Maple+Simplify**".

(O haga *click* en el icono :)

El resultado será : $\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} = \frac{2x^3+3x+5}{x^2+x+1}$

En efecto, $\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} = \frac{(2x+3)(x+1)(2x^2-2x+5)}{(2x+3)(x^2+x+1)} = (x+1)\frac{2x^2-2x+5}{x^2+x+1} = \frac{2x^3+3x+5}{x^2+x+1}$

Otros ejemplos son:

b.1) $\frac{3x^2+3x}{8x^2+7} + \frac{5x^2+3}{2x^2+x+7} = \frac{46x^4+9x^3+83x^2+21x+21}{(8x^2+7)(2x^2+x+7)}$;

b.2) $\frac{3x^2+4}{5x^3-3x} + \frac{4x+1}{x^2-1} = \frac{23x^4 - 11x^2 - 4 + 5x^3 - 3x}{x(5x^2-3)(x^2-1)} =$

$= \frac{23x^4 - 11x^2 - 4 + 5x^3 - 3x}{x(5x^2-3)(x-1)(x+1)}$

c) Expansión:

Si se desa desarrollar expresiones tale como: $(3x^2+3x)(8x^2+7)$, se selecciona:

"**Maple+Expand**" (o se hace click en el icono:). Elmresultado será:

$$(3x^2+3x)(8x^2+7) = 24x^4+21x^2+24x^3+21x$$

Otros ejemplos son:

c.1) $(3x^2+3x)^3 = 27x^6+81x^5+81x^4+27x^3$

c.2) $(a^4+b^4) = a^4+b^4$

c.3) $(a^5-b^5) = -(b-a)(b^4+b^3a+b^2a^2+ba^3+a^4)$

c.4) $(a^5+b^5) = (a+b)(a^4-ba^3+b^2a^2-b^3a+b^4)$

d) Evaluación

Si se desea evaluar la expresión: $\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}$ en $x=-\frac{3}{2}$ se escribe la expresión:

$$\left[\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}\right]$$

se simplifica previamente según se indicó, a objeto de evitar una posible división por cero. A la expresión resultante se le aplica:

"**Maple+Evaluate**" o se hace click en el icono: .

El resultado será:

$$\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} = (x+1)\frac{2x^2-2x+5}{x^2+x+1}, \quad \text{luego:}$$

$$\left[\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}\right]_{x=-\frac{3}{2}} = \left[(x+1)\frac{2x^2-2x+5}{x^2+x+1}\right]_{x=-\frac{3}{2}} = -\frac{25}{7}$$

Otros ejemplos son:

d.1) $(3x^2+3x)+(8x^2+7) = 11x^2+3x+7$

d.2) $(3x^2+3x)-(8x^2+7) = -5x^2+3x-7$

d.3) $x^2+x+5-3x^3+5x^2+4x-13+2x^2 = 8x^2+5x-8-3x^3$

d.4) $(3x^2+3x)/(8x^2+7) = \dfrac{3x^2+3x}{8x^2+7}$

e) División

Si se desa realizar la división de polinimios: $\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}$ se selecciona: "**Maple+Polinomilas+Divide**". El resultado será:

$$\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} = 2x-2+\frac{21+6x^2+23x}{2x^3+5x^2+5x+3}$$

Otros ejemplos son:

e.1) $\frac{5x^3-2x^2+4x+2}{x-2} = 5x^2+8x+20+\frac{42}{x-2}$

e.2) $\frac{x^2-5x+6}{x-2} = x-3$

f) Descomposición en fracciones simples:

Se desdea descompomner en fracciones simples la expresión: $\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}$

Para ello, se selecciona : **Maple+Polinomials+Partial Fractions**". El resultado será:

$$\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} = 2x-2+\frac{7+3x}{x^2+x+1}$$

Otros ejemplos son:

f.1) $\frac{2x+1}{(3x+1)} = \frac{2}{3}+\frac{1}{9x+3}$

- f.2) $\frac{2x+1}{(3x+1)^2} = \frac{1}{3(3x+1)^2} + \frac{2}{3(3x+1)}$
- f.3) $\frac{2x+1}{(x^2-5x+6)} = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = -\frac{5}{x-2} + \frac{7}{x-3}$
- f.4) $\frac{2x+1}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{2x+1}{(x-2)^2(x-3)^2} = \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{12}{x-2} + \frac{7}{(x-3)^2} - \frac{12}{x-3}$
- f.5) $\frac{2x+1}{(x^2-5x+6)^2(3x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x-2)^2(x-3)^2(3x+1)^2} =$

$$= \frac{5}{49(x-2)^2} + \frac{54}{343(x-2)} + \frac{7}{100(x-3)^2} - \frac{81}{500(x-3)} + \frac{27}{4900(3x+1)^2} + \frac{2349}{171\,500(3x+1)}$$

NOTA 7: En los ejemplos f.3) a f.5) se aplicó primero :"**Maple+Factor**" y luego: "**Maple+Polinomials+Partial Fractions**".

- **1.6.1.15) Resolución de ecuaciones**

a) Ecuaciones de grado n :

Supongámos que se desea resolver ecuaciones de la forma :

$$a_n x^n + a_{n-1} b x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 x + a_1 = 0$$

a.1) Se selecciona la ecuación con el *mouse* (o se coloca el cursor dentro de dicha expresión).

a.2) Se elige : "**Maple+Solve+Exact**" o "**Maple+Solve+Numeric**" en la Barra de Menú.

- **Ejemplo 1**:

Resolver la ecuación: $5x - 4 = 8x$

Solución:

- Si se aplica : "**Maple+Solve+Exact**", se obtiene:

$5x - 4 = 8x$, Solution is : $\left\{x = -\frac{4}{3}\right\}$

- Si se aplica: "**Maple+Solve+Numeric**", se obtiene:

$5x - 4 = 8x$, *Solution is* : $\{x = -1.333\,333\,333\}$

Otros ejemplos:

- **Ejemplo 2**: $x^2 - 5x + 6 = 0$, *Solution is* : $\{x = 2\}, \{x = 3\}$
- **Ejemplo 3**: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, *Solution is* : $\{x = 1\}, \{x = 2\}, \{x = 3\}$
- **Ejemplo 4**: $x^3 - 3x^2 + 8x - 6 = 0$, *Solution is*

$\{x = 1\}, \left\{x = 1 + i\sqrt{5}\right\}, \left\{x = 1 - i\sqrt{5}\right\}$

- **Ejemplo 5**: $x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$, *Solution is* :

$$\left\{x = -\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(89 + 6\sqrt{159}\right)} - \frac{13}{3\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)}} - \frac{2}{3}\right\},$$

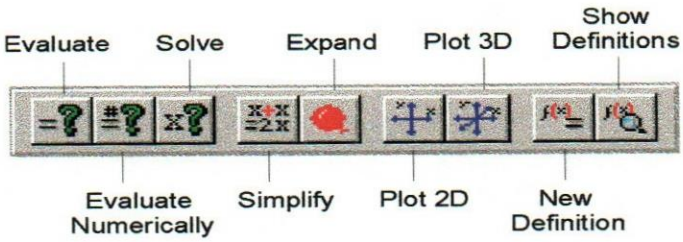
$$\left\{x = \frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(89 + 6\sqrt{159}\right)} + \frac{13}{6\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)}} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(89 + 6\sqrt{159}\right)} + \frac{13}{3\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)}}\right)\right\},$$

$$\left\{x = \frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(89 + 6\sqrt{159}\right)} + \frac{13}{6\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)}} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(89 + 6\sqrt{159}\right)} + \frac{13}{3\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)}}\right)\right\}$$

NOTA 8:

Si se desea evaluar cada una de las raices así obtenidas, se seleccionan cada una de éstas con el *mouse*,

y se elige:"**Maple+Evaluate Numerically**" ;(o se hace *click* en el icono:"**Evaluate Numerically**" de la Barra de Herramientas que se muestra a continuación:



Así se obtiene:

$$\left\{x = -\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)} - \frac{13}{3\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)}} - \tfrac{2}{3}\right\} : x = -3.284277537306952248\,4$$

$$\left\{x = \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)} + \frac{13}{6\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)}} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)} + \frac{13}{3\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)}}\right)\right\}$$

$$: \{x = .642138768653476124\,21 - .897542015304750003\,79i\}$$

$$\left\{x = \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)} + \frac{13}{6\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)}} - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}\left(-\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)} + \frac{13}{3\sqrt[3]{\left(89+6\sqrt{159}\right)}}\right)\right\}$$

$$: \{x = .642138768653476124\,21 + .897542015304750003\,79i\}$$

- **b) Ajuste del número de decimales**

El número de decimales puede ser ajustado, si se desea, según lo siguiente:

b.1) Se selecciona "**Maple+Settings**..." en la Barra de Menú ; como consecuencia, se abre la Caja de diálogo denominada : "**Maple Settings**".

b.2) Se ajustan los parámetros:

- "**Digits used in Computations**": Permite fijar la cantidad de dígitos (n_1) con la que el programa realiza los cálculos correspondientes.
- **Digits Used in Display** : Permite fijar la cantidad de dígitos (n_2) con la que se desea expresar el resultado. Evidentemente: $n_2 \leq n_1$

Además, n_2 = #(*Parte entera*) + #(*Parte decimal*),

en donde: # = numeral = cantidad de cifras significativas.

Fijados los valores de n_1 y n_2 , todos los cálculos subsiguientes serán realizados con estos parámetros. Para los ejemplos considerados, sa ha fijado : $n_1 = 30$ y $n_2 = 21$

NOTA 9

Si se quiere obtener exclusivamente las soluciones reales, se coloca el cursor a la derecha de la ecuación (o dentro de ella) y se selecciona:

" **Maple+Solve+Numeric**".

Así, para el Ejemplo 6 antes expuesto, se obtiene:

$x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = 0$, Solution is : $\{x = -3.284277537306952248\,42\}$

- **Ejemplo** :

$x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0$, Solution is : $\{x = -1.561552812808830274\,9\}$,

$$\{x = 1.0\}, \{x = 2.561\,552\,812\,808\,830\,274\,9\}$$

c) Sistema de Ecuaciones

Supongamos que se desea resolver sistemas de ecuaciones del tipo :

$$a_1x + a_2y = a_3$$
$$b_1x + b_2y = b_3$$

- **Ejemplo** :

$$2x - y = -1$$
$$x + 2y = 13$$

c.1) Se selecciona : "**Insert+Display**"

c.2) Se escribe la primera ecuación en la forma acostumbrada.

c.3) Con el cursor a la derecha de la ecuación, se oprime la tecla "**ENTER**", para crear una nueva línea, y se escribe la segunda ecuación.

c.4) Con el cursor dentro de una de las ecuaciones, se selecciona: " **Maple+Solve+Exact**"

(O se hace *click* en el icono: de la Barra de Herramientas)

Opcionalmente, se puede elegir: " **Maple+Solve+Numeric**"

Así :

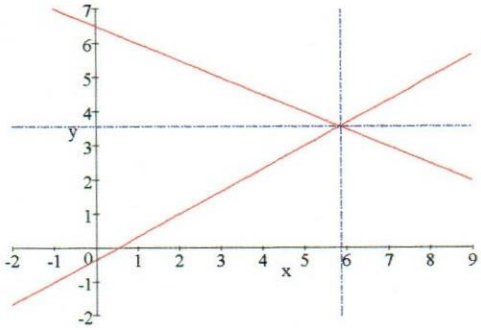
- Si se elige : " **Maple+Solve+Exact**" se obtiene:

$$2x - 3y = 1$$
$$x + 2y = 13$$
$$\text{, Solution is : } \left\{y = \tfrac{25}{7}, x = \tfrac{41}{7}\right\}$$

- Si se elige : " **Maple+Solve+Numeric**", el resultado será:

$$2x - 3y = 1$$
$$x + 2y = 13$$
$$\text{, } \textit{Solution is} : \{x = 5.8571, y = 3.5714\}$$

La siguiente gráfica muestra el punto de intersección $P(5.8571, 3.5714)$, de las rectas : $2x - 3y = 1$ y $x + 2y = 13$



NOTA 10:

También se puede escribir el sistema de ecuaciones en una matriz de una (1) columna y número de flas igual al número de ecuaciones. Para ello, se selecciona:"**Insert+ Matrix**", se escriben las ecuaciones y luego:

- Se elige cualquiera de las opciones antes señaladas :
- "**Maple+Solve+Exact**" o " **Maple+Solve+Numeric**"
  (o se hace *click* en sus respectivos iconos)

Si se seleccina: " **Maple+Solve+Exact**, se obtiene:

$$\begin{matrix} 4x + 5y = 10 \\ 3x - 2y = 8 \end{matrix} \text{, Solution is : } \left\{x = \tfrac{60}{23}, y = -\tfrac{2}{23}\right\}$$

Si se seleccina: " **Maple+Solve+Numeric**", se obtiene:

$$\begin{matrix} 4x + 5y = 10 \\ 3x - 2y = 8 \end{matrix} \text{, Solution is :}$$

$$\{y = -8.695\,652\,174 \times 10^{-2}, x = 2.608\,695\,652\}$$

- **d) Solución de una ecuación, especificando el intervalo**: $\mathbf{x} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$

  Supongamos que se desea resolver la ecuacion : $f(x) = c$, en el intervalo :$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

  d.1) Se selecciona "**Insert+Display**"

  d.2) Se escribe $f(x) = c$ dentro de la caja mostrada y se oprime **ENTER**

  d.3) Se escribe: $\mathbf{x} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ en la segunda caja

  d.4) Se elige "**Maple+Solve+Numeric**"

- **Ejemplo 1**:

  Hallar la solución de la ecuación: $\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$, para : $0 < x < \frac{\pi}{4}$

  Solución:

  Aplicandfo la técnica expuesta, se obtiene:

$$\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x \in (0, \frac{\pi}{4})$$

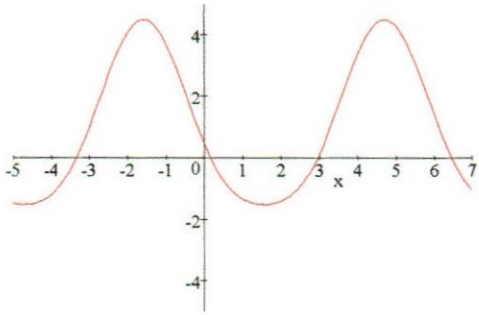
$$\text{, } \textit{Solution is} : \{x = .523\,598\,775\,598\,298\,873\,08\}$$

- **Ejemplo 2**:

  Resolver la ecuación: $\sin^2 x - 3\sin x + \frac{1}{2} = 0$ para : $0 \le x \le \pi$

  Solución:

  A objeto de determinar adecuadamente, los intervalos (a, b) a considerar, es de gran utilidad graficar previamente la ecuación dada ; asi se obtiene:



$\sin^2 x - 3\sin x + \frac{1}{2}$

Nótese que en el intervalo considerado $(0,\pi)$, la curva corta dos (2) veces al eje x. Aplicando la técnica antes expuesta, y seleccionando :"**Maple+Solve+Numeric**", se obtiene:

$$\sin^2 x - 3\sin x + \frac{1}{2} = 0$$
$$x \in (0,1)$$
, Solution is : $\{x = .178\,063\,824\}$

$$\sin^2 x - 3\sin x + \frac{1}{2} = 0$$
$$x \in (2,\pi)$$
, Solution is : $\{x = 2.963\,528\,83\}$

NOTA 11

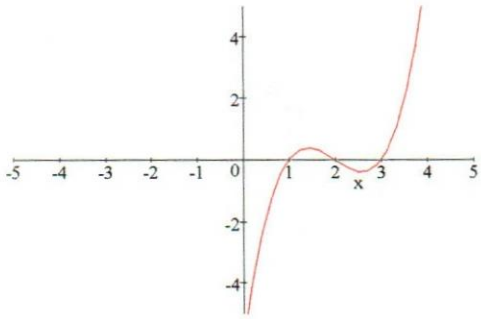
Nótese la importancia de la gráfica para la determinación del intervalo $(a,b) \in D_f$

- **Ejemplo 3**:
- Resolver la ecuación : $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, para $x \in [1.5, 2.9]$

  Solución:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$
$$x \in [1.5, 2.9]$$
, Solution is : $\{x = 2.0\}$

Comprobación gráfica:



$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Ejemplo 4:

Resolver la ecuación : $\sin(x + x\cos x) = 0$,en el intervalo: $x \in (6, 6.4)$

Solución:

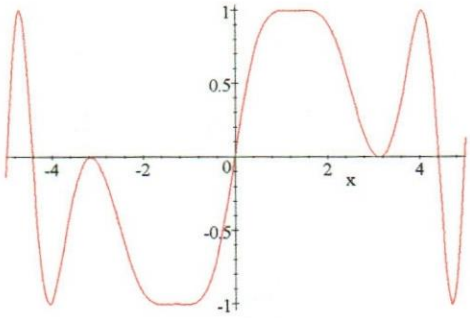
$$\sin(x + x\cos x) = 0$$

$$x \in (6, 6.4)$$

, Solution is : $\{x = 6.283\,185\,307\,179\,586\,476\,9\}$

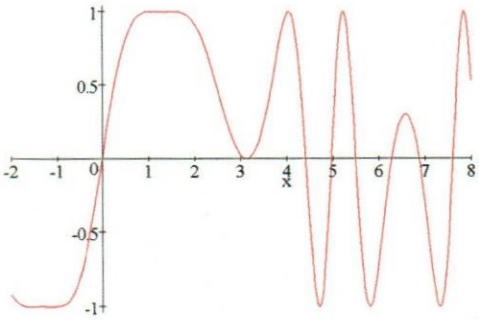
Comprobación gráfica:

La gráfica de la función : $y = \sin(x + x\cos x)$ es:



$y = \sin(x + x\cos x)$

Ampliando el dominio para : $-2 \leqslant x \leqslant 8$, se obtiene:



Obsérvese que en el intervalo $(6, 6.4)$ existe un $x_0 \in (6, 6.4) \,/\, f(x_0) = 0$.
Según se ha calculado, $x_0 = 6.283\,185\,307\,179\,586\,476\,9$
Nótese una vez más, la importancia de la gráfica para la determinación del intervalo $(a, b) \in D_f$

Ejemplo 5:

Obtener la solución de la ecuación: $\sin(x + x\cos x) = \frac{1}{2}$, en el intervalo: $x \in (2, 3)$

Solución: (Ver gráfica del ejemplo 4 precedente)

- Se elige:"**Insert+Display**" (o se hace click en el icono:)

  y se escribe: $\sin(x + x\cos x) = \frac{1}{2}$
- Se oprime la tecla "**ENTER**". Se escribe de nuevo el intervalo deseado: $x \in (2, 3)$
- Se selecciona : "**Solve+Numeric**".

Así se obtiene:

$$\sin(x + x\cos x) = \frac{1}{2}$$
$$x \in (2, 3)$$

, *Solution is* : $\{x = 2.479\,729\,312\,021\,146\,204\,309\,025\,188\,806\,74\}$

NOTA 12:

La solución antes descrita, a través del la técnica "**Solve+Numeric**", permite calcular sólo una de las raices en el intervalo considerado.
Para obtener todas las soluciones en el intervalo: $[a, b]$, es conveniente graficar la función en dicho intervalo y luego dividirlo en tantos sub-intervalos como raices se observen, tal como se ilustra a continuación:

Ejemplo 6

Obtener las soluciónes de la ecuación: $\sin(x + x\cos x) = 0$, en el intervalo: $x \in (2, 6)$

Solución: (Ver gráfica del ejemplo 4 precedente)

De la gráfica arriba mostrada, se elijen los siguientes intervalos para la variable x :

$$(2,4),\ (4,4.6),\ (4.6,\ 5),\ (5,6)$$

$$\sin(x + x\cos x) = 0$$
$$x \in (2, 4)$$

, *Solution is* : $\{x = 3.141\,592\}$

$$\sin(x + x\cos x) = 0$$
$$x \in (4, 4.6)$$

$$, \textit{Solution is} : \{x = 4.419113\}$$

$$\sin(x + x\cos x) = 0$$
$$x \in (4.6, 5)$$
$$, \textit{Solution is} : \{x = 4.977747\},$$

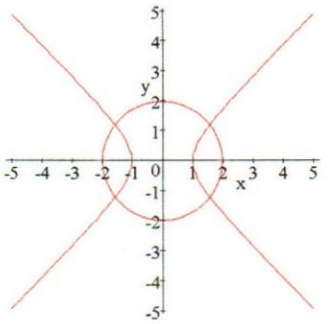
$$\sin(x + x\cos x) = 0$$
$$x \in (5, 6)$$
$$, \textit{Solution is} : \{x = 5.504852\}$$

- **Ejemplo 7**

Obtener la solución de las ecuaciónes: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

Solución:

La representación gráfica de las ecuaciones dadas se muestra a continuación:



- $x^2 + y^2 = 4, x^2 - y^2 = 1$

De la gráfica arriba mostrada, obtenida a través de la técnica:"**Maple+Plot 2D+Implicit**",

se eligen los siguientes intervalos:

$$P_1 \begin{cases} x \in (1,2) \\ y \in (1,2) \end{cases} ; P_2 \begin{cases} x \in (1,2) \\ y \in (-1,-2) \end{cases} ; P3 \begin{cases} x \in (-2,-1) \\ y \in (-2,-1) \end{cases} ; P4 \begin{cases} x \in (-2,-1) \\ y \in (1,2) \end{cases}$$

Aplicando el método antes descrito. se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 - y^2 = 1$$
$$x \in (1,2)$$
$$y \in (1,2)$$

, Solution is : $\{x = 1.5811, y = 1.2247\}$

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 - y^2 = 1$$
$$x \in (1,2)$$

, Solution is : $\{x = 1.5811, y = -1.2247\}$

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 - y^2 = 1$$
$$y \in (1,2)$$
$$x \in (-2,-1)$$

, Solution is : $\{x = -1.5811, y = 1.2247\}$

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 - y^2 = 1$$
$$x \in (-2,-1)$$

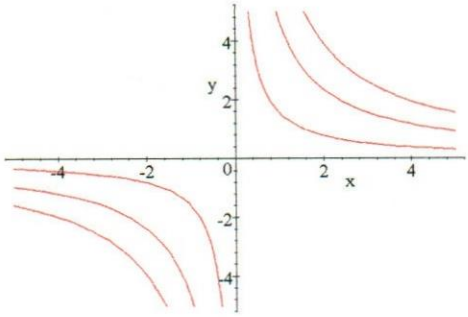
, Solution is : $\{y = -1.2247, x = -1.5811\}$

- **Ejemplo 8**:

Ilustrar gráficamente que las ecuaciones: $\begin{cases} xy = \frac{\pi}{2} \\ xy = \frac{3\pi}{2} \\ xy = \frac{5\pi}{2} \end{cases}$ no se intersectan.

Solución:

La siguiente gráfica confirma la hipótesis del problema planteado:



$xy = \frac{\pi}{2}, xy = \frac{3\pi}{2}, xy = \frac{5\pi}{2}$

-
- e) **Ecuación de la circunferencia que pasa por tres (3) puntos**

Todo círculo en el plano, satisface la ecuación: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, siendo: A, B, y C constantes. Además, se sabe que tres puntos del plano que no sean colineales, definen una circunferencia que pasa por dichos puntos.

Usando estas dos (2) propiedades, se puede calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados.

- **Ejemplo 1**:

Calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos.:
$(1,7)$, $(5,3)$ y $(0,\sqrt{15}+3)$.

Solución:

La ecuación será de la forma: $f(x,y) = x^2 + y^2 + Ax + By + C$

a) Sustituyendo los puntos dados en esta expresión, se obtiene:

$$f(1,8) = 0$$
$$f(6,3) = 0$$
$$f(5,7) = 0$$

b) Se selecciona :"**Maple+Define+Clear Definitions**"

c) Con el cursor en la ecuación: $f(x,y) = x^2 + y^2 + Ax + By + C$ se elige:"**Define+New Definition**".

d) Elija:"**Insert+Display**" y escriba: $f(1,8) = 0$ en la caja mostrada.

e) Oprima la tecla : "**ENTER**" y escriba: $f(6,3) = 0$ en la nueva caja .

f) Oprima la tecla : "**ENTER**" y escriba: $f(5,7) = 0$ en forma similar .

El resultado es el siguiente:

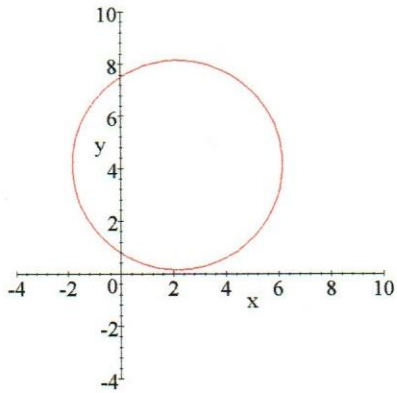
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + Ax + By + C$$

$$f(1,8) = 0$$
$$f(6,3) = 0$$
$$f(5,7) = 0$$

g) Con el cursor en el sistema de ecuaciones, elija: "**Maple+Solve+Exact**".
Así se obtiene:

$$, \textit{Solution is} : \left\{C = 6, A = -\tfrac{13}{3}, B = -\tfrac{25}{3}\right\}$$

La ecuación de la circunferencia buscada es por lo tanto : $x^2 + y^2 - \frac{13}{3}x - \frac{25}{3}y + 6 = 0$
y su gráfica será:



$x^2 + y^2 - \frac{13}{3}x - \frac{25}{3}y + 6 = 0$

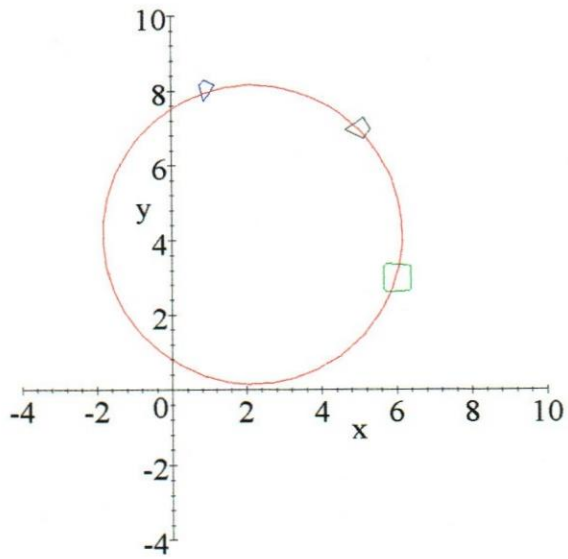
NOTA 13:
Si la curva luce como una elipse, seleccione "Insert+Properties" y fije adecuadamente el dominio y el rango.
Elija también en la opción "**Axes**":" **Equal Scaling**", a objeto de tener igual escala en los ejes "x" e "y"
NOTA 14:
Si se desea señalar los tres puntos dados sobre la gráfica obtenida, se escriben tres ecuaciones de tres circunferencias con centro en los puntos dados y radio igual al menor tamaño que permita leer la escala utilizada. En este caso:

a) Escriba las tres ecuaciones:

$$(x-1)^2+(y-8)^2 = \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 \quad \text{(color azul)}$$
$$(x-6)^2+(y-3)^2 = \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 \quad \text{(color verde)}$$
$$(x-5)^2+(y-7)^2 = \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 \quad \text{(color negro)}$$

b) Seleccione cada una de ellas e insértelas en el cuadro:"**Add Item**" del cuadro "**Plot Components**" y seleccione "**OK**".

Así se obtiene:



CAPÍTULO II

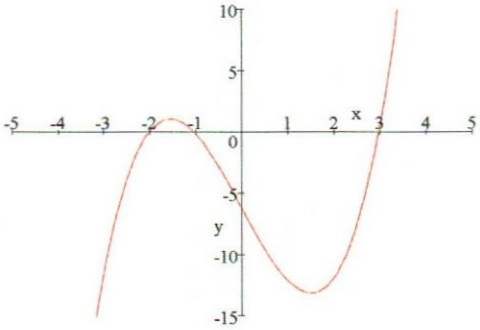
DESCARTES

.

René Descartes, erudito matemático francés del siglo XVII (1596 - 1650), es posiblemente más recordado hoy en día como filósofo que como matemático. No obstante, muchos de nosotros estamos familiarizados con el "plano cartesiano", en donde la posición de un punto queda determinada por sus coordenadas (x , y).

En 1637, Descartes publicó su famoso tratado filosófico "Discurso del Método", donde, en uno de los tres apéndices, establecía su nuevo enfoque analítico de la Geometría. Su principal idea, propuesta casi simultáneamente por su coterráneo Pierre de Fermat, fue la correspondencia entre una ecuación y su gráfica. La ecuación se podía utilizar para estudiar la curva, o viceversa. Hasta entonces, las dos ramas de las Matemáticas, Álgebra y Geometría, eran independientes entre sí. Los círculos pertenecían a la Geometría, las ecuaciones al Álgebra. La identificación de ambas, debida a Descartes, se conoce hoy como Geometría Analítica y la misma permite la interacción entre estas dos importantes ramas de las Matemáticas.

Así, la solución de la ecuación $f(x) = 0$, son los puntos de intersección con el eje x, por lo que la gráfica de la curva $y = f(x)$ mostrará los valores de las soluciones de la ecuación.



Gráfica: $y = x^3 - 7x - 6$

$$Ecuación : x^3 - 7x - 6 = 0$$

CAPÍTULO II

2.1.) RELACIÓN

Dados dos conjuntos A y B se dice que una relación de A en B ($R : A \rightarrow B$) es cualquier propiedad que asocia algu n elemento del conjunto A (conjunto de partida) con algún elemento del conjunto B (conjunto de llegada).

Ejemplo:

Dados los conjuntos $A = \{4,6\}$ y $B = \{25,5,115,2\}$ construir la relación:

$$R : A \rightarrow B \ / \ aRb \leftrightarrow a \geq b$$

Solución:

La representación en pares ordenados es:

$$R = \{(4,2),(6,5),(6,2)\}$$

2.2) FUNCIÓN

Una función f de un conjunto A en otro B, es cualquier relación que asigna **a todos y cada uno** de los elementos de A (preimágenes) **uno y sólo uno** de los elementos de B(imágenes).

En consecuencia, toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

En otras palabras, una relación entre dos conjuntos no vacíos A y B será un a **función**, si y sólo si verifica las dos condiciones siguientes:

a) Existencia:

Cada elemento del conjunt A deberá poseer imagen en el conjunto B, es decir:

$$\forall x \in A, \exists y \in B \ / \ y = f(x)$$

b) Unicidad;

Ningún elemeto de A tendrá más de una imagen., es decir:

$$\forall x_1 x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Se dice entonces que y es la **imagen** de x a través de f y se denota por $y = f(x)$.

Ejemplo:

Dados los conjuntos: $A=\{3,4,5\}$ y $B=\{7,5,9,10\}$

Son funciones definidas de A en B ($A \rightarrow B$) :

$$f = \{(3,7),(4,10),(5,7)\}$$
$$g = \{(5,9),(4,9),(3,9)\}$$
$$h = \{(3,8),(4,7),(5,9)\}$$

No son fuciones de A en B :

$$r = \{(3,10),(5,8)\}$$
$$s = \{(3,8),(4,9),(5,7),(3,10)\}$$
$$t = \{(3,7),(4,8),(5,11)\}$$

2.2.1) Nomenclatura

Las formas mas frecuente de representar una función son:

a) $f : A \rightarrow B$

b) $y = f(x)$

c) $x \rightarrow f(x)$

En todas estas representaciones,

A = conjunto de salida
B = conjunto de llagada
"y" representa los elementos del conjunto de llegada B (imágnes)
"x" representa los elementos del conjunto de salida A (preimágenes)
$f(x)$ representa las amágenes del comjunto A.

El **Dominio** de la función f es el conjunto A ; al conjunto B se le denomina: **Contradominio** y al conjunto de las imágenes $f(x) \in B$, se denomina **Rango**.

De acuerdo con la definición:

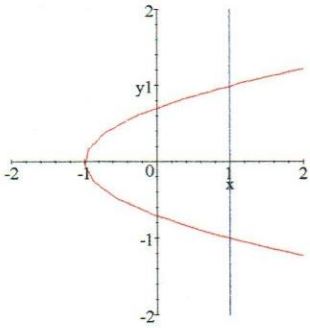
a) $x - 2y^2 + 1 = 0$ no es una función, pues para un mismo valor de x existen dos valores de y.

b) $y - \frac{2x^2+3x+2}{x^2+1} = 0$ es una función de x pues : $\forall x \in D_y$, el valor de y es único.

c) $y = |x|$ es una función de x pues : $\forall x \in D_y$, el valor de y es único.

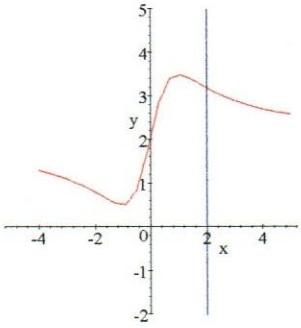
Estas tres conclusiones se ilustran en las siguientes gráficas:

$x - 2y^2 + 1 = 0$



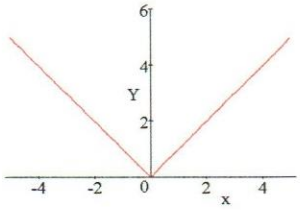
No es una función de x

$y - \frac{2x^2+3x+2}{x^2+1} = 0$



Una función de x

$y = |x|$



Una función de x

Nótese que una gráfica dada corresponde a una función, si y sólo si **cualquer recta vetical trazada sobre el conjunto de partida, corta a la gráfica y lo hace en un sólo punto**. De esta manera se garantiza que las propiedades de existencia y unicidad se cumplen simultáneamente.

2.2.2) Clasificación de funcines de acuerdo a su naturaleza

Atendiendo a su naturaleza, las funciones se clasifican en:

a) Inyectivas:
b) Sobreyectivas:
c) Biyectivas

2.2.2.1) Función Inyectiva (o uno a uno)

Una función es inyectiva cuando las imágenes de dos elementos diferentes del Dominio siempre corresponden a dos elementos diferentes del conjunto de llegada.

Desde el punto de vista matemático (como una forma de evadir el símboilo $\neq$ en la definición), esta afirmación es equivalente a la siguiente:

$$f \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

lo que induca que ninguna de las imágenes está relacionada con más de una preimagen.

Desde el punto de vista gráfico, esto representa que ninguna recta horizintal, que corte la curva , lo deberá hacer en un solo punto. Lo que es lo mismo, si se analizan los pares ordenados de una función inyectiva, se observa que ninguna segunda componente aparece más e una vez.

Ejemplo 1:

Determinar si es inyectiva la función $f : R \to R \,/\, f(x) = 2x + 6$

Solución:

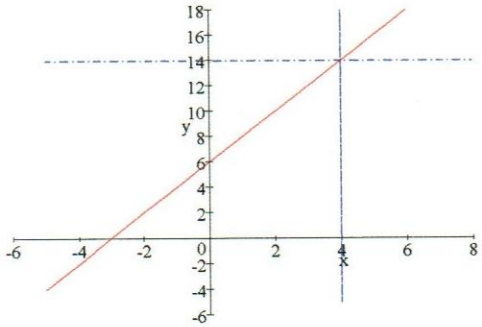
Aplicando la definición, partimos de dos imágenes iguales: $f(x_1) = f(x_2)$.

Así se obtiiene:

$$2x_1 + 6 = 2x_2 + 6 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

lo cual demuestra que la función **si es inyectiva**.

La siguiente gráfica ilustra este resultado:



$(x, 2x + 6)$

Ejemplo 2 : Determinar si la función $f : R \to R \,/\, f(x) = x^3$ es inyectiva

Solución 1:

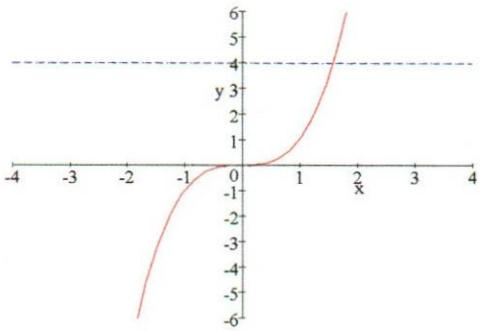
Aplicando la definición, partimos de dos imágenes iguales: $f(x_1) = f(x_2)$.

Así se obtiiene:

$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ pues dos números diferentes no pueden tener potencias cúbicas iguales. Por lo tanto, la función : $y = x^3$ **si es inyectiva**.

Solución 2:

Representando gráficamente la ecuación dada, se obtiene



Nótese que cualquier recta horizontal : $y = k\ (k \in R)$, corta a la curva en un único punto, en consecuencia, la función : $y = x^3$ **si es inyectiva**.

Ejemplo 3:

Determinar si es inyectiva la función definida de R en R : $y = 2x^3 - 10x$

Solución 1:

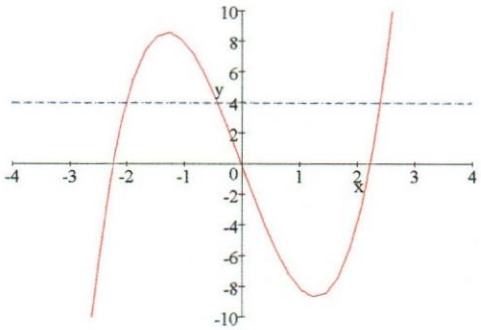
Esta función no es inyectiva pues se observa que $y = 4 \Rightarrow 2x^3 - 10x - 4 = 0$ y resolviendo esta ecuación por la técnica :"**Maple+Solve+Exact**", se obtiene:

$2x^3 - 10x - 4 = 0$, Solution is : $\{x = -2\}, \left\{x = \sqrt{2} + 1\right\}, \left\{x = 1 - \sqrt{2}\right\}$

es decir, $x = -2$, $x = \sqrt{2} + 1$ y $x = 1 - \sqrt{2}$ tienen la misma imagen, en consecuencia : $y = 2x^3 - 10x$ **no es inyectiva**.

Solución 2:

Representando gráficamente la ecuación dada, se obtiene



Nótese que la recta horizontal : $y = 4$ corta a la curva en más de un punto; en consecuencia, la función : $y = 2x^3 + 6x$ **no es inyectiva**.

En conclusión, toda función creciente y toda función decreciente es inyectiva.

Ejemplo 4:

Se propone al interesado, demostrar que las siguientes funciones $f : R \to R$ son inyectivas. Ilustre gráficamente los resultados.

a) $f(x) = 4x + 7$ b) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{1+3x}{5-2x}$

d) $f(x) = 5 - 4x^3$ d) $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$

e) $f(x) = x^2 + x, x \geq -\frac{1}{2}$

Ejemplo 5:

Se propone al interesado, demostrar si las siguientes funciones $f : R \to R$, son o no inyectivas. Ilustre gráficamente los resultados.

a) $f(x) = 7x - 3$ b) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = |x|$ d) $f(x) = x^4 + 5$ e) $f(x) = x^4 + 5,\ 0 \le x \le 2$

2.2.2.2) Función Sobreyectiva

Una función es sobreyectiva cuando elementos diferentes del conjunto de llegada (B) son imágenes de algún elemento del conjunto de partida (A). Esto equivale a establecer que son sobreyectivas las funciones cuyo rango sea igual al conjunto de llegada. Por tanto:

$$f \text{ es sobreyectiva} \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \,/\, f(x) = y$$

Desde el punto de vista gráfico, las funciones sobreyectivas se reconocen porque la curva que representa a la función es cortada por **cualquier recta** paralela al eje x que sea trazada por el conjunto de llegada.

Además, si una función sobreyectiva se expresa en forma de pares ordenados, se observa que todos los elementos del conjunto de llegada aparecen al menos una vez como segunda componente de algún par.

Se puede afirmar, por tanto, que todas las funciones cuya gráfica abarque la totalidad del eje Y corresponde a funciones sobreyectivas.

Ejemplo 1 :

Determinar si la función $f : R \to R \,/\, f(x) = x^3$ es sobreyectiva.

Solución 1:

En primer lugar, coloquemos la imagen en función de la preimagen:

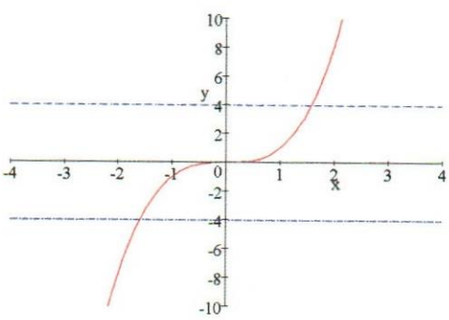
$$x = \sqrt[3]{y}$$

como la raiz es de índice impar, no existen restricciones para el valor de y, lo cual significa que el rango de esta función es igual al conjiunto de los números reales R.

Siendo éste el conjunto de llegada, se puede afirmar que la función **es sobreyectiva**.

Solución 2:

Representando gráficamente la ecuación dada, se obtiene



Nótese que cualquier recta horizontal : $y = k$, $(k \in R)$ corta a la curva . En consecuencia, la función : $y = 2x^3 + 6x$ **si es sobreyectiva**.

Ejemplo 2 :

Determinar si la función $f : R \to R \,/\, f(x) = x^2$ es sobreyectiva.

Solución 1:

Al colocar la imagen en función de la preimagen, se obtiene:

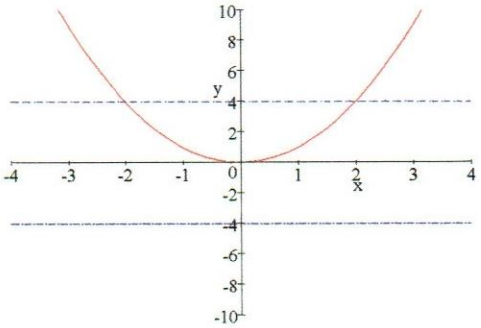
$$x = \sqrt{y}$$

como la raiz es de índice par, los únicos valores de y que pueden

Ejemplo 2 :
Determinar si la función $f : R \to R \,/\, f(x) = x^2$ es sobreyectiva.
Solución 1:
Al colocar la imagen en función de la preimagen, se obtiene:

$$x = \sqrt{y}$$

como la raiz es de índice par, los únicos valores de y que pueden aparecer como imagen, son los valores nulos o positivos , por lo que el conjunto de llegada $[0, \infty)$ no es igual al rango :R.
En consecuencia la función **no es sobreyectiva**.
Solución 2:
Representando gráficamente la ecuación dada, se obtiene



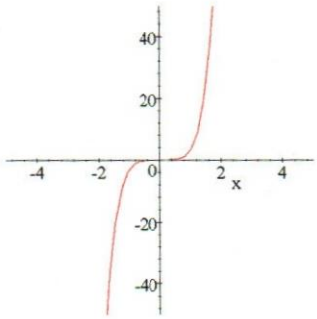
Nótese que cualquier recta horizontal : $y = k$, $(k \in R^-)$ no corta a la curva .
En consecuencia, la función : $y = x^2$ **no es sobreyectiva**.

2.2.2.3) Función Biyectiva

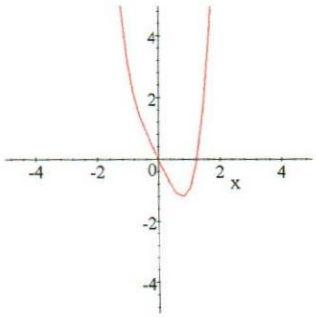
Una función es bieyectiva cuando cumple con ser inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.Se reconoce porque su gráfica es cortada por cualquier recta paralela al eje x y porque además, este corte se realiza en un sólo punto.
Por tanto:

$$f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva } \wedge f \text{ es sobreyectiva}$$

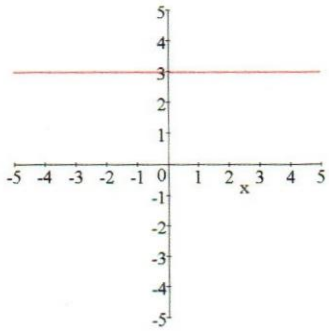
Ejemplo 1:
Dado el siguiente conjunto de funciones definidas de R en R :
$f(x) = 3x^5$; $p(x) = x^4 - 2x$; $q(x) = 3$; $r(x) = 2x + 3$; $s(x) = 4x^3 + 1$
$t(x) = x^2 + 2x + 1$, identificar las que sean biyectivas.
Solución:
Las gráficas respectivas se muestran a continuación:



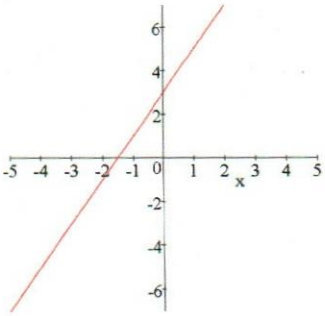
$f(x) = 3x^5$



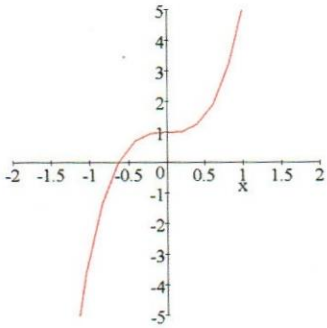
$p(x) = x^4 - 2x$



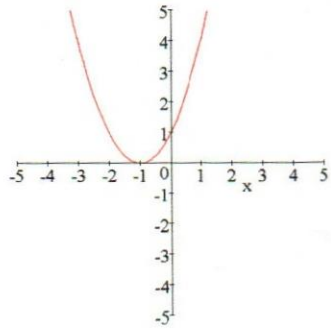
$q(x) = 3$



$r(x) = 2x + 3$



$s(x) = 4x^3 + 1$



$t(x) = x^2 + 2x + 1$

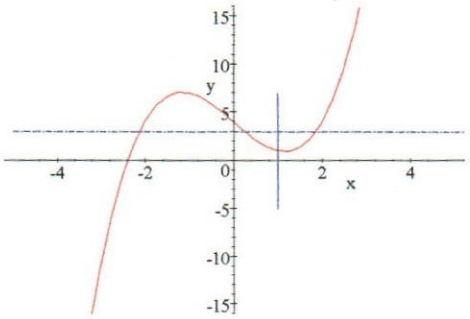
Después de realizar las respectivas gráficas y analizarlas, se puede cincluir que:

a) Son funciones biyectias
$f(x) = 3x^5$
$r(x) = 2x + 3$
$s(x) = 4x^3 + 1$

b) No son funciones biyectivas
$p(x) = x^4 - 2x$
$q(x) = 3$
$t(x) = x^2 + 2x + 1$

Ejemplo 2:
Clasificar la funcion definidasde R en R : $f(x) = (x^3 - 4x) + 4$

Solución:
La gráfica respectiva se muestran a continuación:



Como se puede observar, existen rectas horizontales (como la mostrada) que intersectan a la gráfica en más de un punto, lo que indica que esta función **no es inyectiva**.
De igual manera, se puede notar que sea cual sea la recta que se trace paralela al eje y, siempre tendrá al menos un punto de intersección con la gráfica, lo que indica qie **si es sobreyectiva**. De lo expuesto se concluye que la función **no es biyectiva**.

2.2.3) Simetría de una Función

2.2.3.1) Función Par

Un función se denomina par cuando la imagen de cualquier elemento del dominio es igual a la imagen de su elemento opuesto. Simbólicamente:

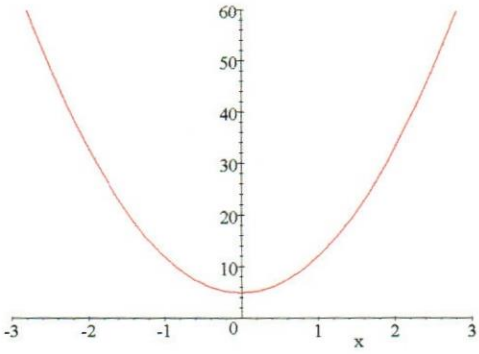
$$f(x) = f(-x)$$

La gráfica de una función par siempre es simétrica respecto al eje de las ordenadas, por lo que sólo es necesario graficar la región correspondiente al intervalo $(0, \infty)$, y por simetría se puede añadir la que le corresponde al intervalo $(-\infty, 0)$.

Ejemplo:
Determinar el tipo de simetría de la función $f : R \to R \ / \ f(x) = 7x^2 + 5$
Solución:
Es evidente que: $f(-x) = 7(-x)^2 + 5 = 7x^2 + 5$
Por lo tanto:

$f(x) = f(-x) \Rightarrow f(x)$ es **función par** y tiene **simetría respecto al eje y**.

Su gráfica se muestra a continuaciön:



$y = 7x^2 + 5$

2.2.3.2) Función Impar

Un función se denomina par cuando la imagen de cualquier elemento del dominio es igual al opuesto de la imagen de su elemento opuesto. Simbólicamente:

$$f(x) = -f(-x)$$

La gráfica de una función impar siempre es simétrica respecto al origen de cordenadas, es decir, que corresponde a un giro de 180|° respecto del mismo. La porción de la curva que se encuentra en el primer cuadrante, pasa al III cuadrante, y viceversa. De igual manera.la porción de la curva que está en el II cuadrante pasa a ubicarse en el IV y viceversa.

Ejemplo:

Determinar el tipo de simetría de la función $f : R \to R \ / \ f(x) = 2x^3 - 6x$

Solución:

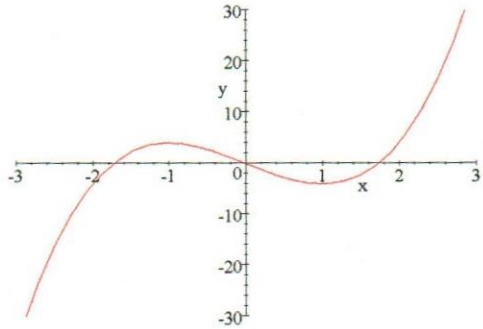
Es evidente que : $f(-x) = 2(-x)^3 - 6(-x) = -2x^3 + 6x$

Además : $-f(-x) = -(-2x^3 + 6x) = 2x^3 - 6x$

Por lo tanto:

$f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(x)$ es **función impar** y tiene **simetría respecto al origen**.

Su gráfica se muestra a continuaciön:

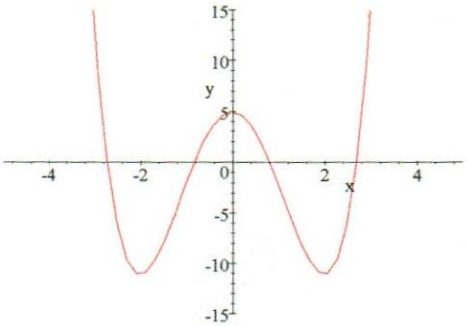


$y = 2x^3 - 6x$

2.2.4) Función real

Son aquellas cuyo Rango pertenece a los números reales; es decir, $f(x)$ es una función de variable real, si y sólo si $R_f \in R$

Ejemplo: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$



$$x^4 - 8x^2 + 5$$

Evidentemente, si $\frac{d}{dx}(x^4 - 8x^2 + 5) = 0$, Solution is : $\{x = 0\}, \{x = 2\}, \{x = -2\}$

Por lo tanto $R_f = (f(\pm 2), \infty)$; $f(\pm 2) = -11$ por ser $f(x)$ función par, luego:

$$R_f = (-11, \infty)$$

2.2.5) Función real de variable real

Son aquellas cuyo Dominio y Rango son conjuntos de números reales; es decir: $f(x)$ es una función real de variable real, si y sólo si $(D_f \subseteqq R) \wedge (R_f \subseteqq R)$.

2.2.6) Función a trozos

Son aquellas que están definidas por más de una fórmula.

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x < 0 \\ 3 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{x} & si \quad 2 < x \end{cases}$$

Representación gráfica:

Para representar gráficamente una función a trozos usando el "*SCIENTIFIC NOTEBOOK*", se procede de la siguiente manera:

a) En el modo Matemática, se escribe la forma: $f(x) =$

b) Se seleccina; "**Insert+Brackets**" y se eligen los símbolos { del lado derecho e izquierdo, respectivamente.

c) Se selecciona: "**Insert+Matrix**" en la Barra de Menú.

(O haga click en el icono)

d) Fije el número de filas igual al número de trozos de lafunción a definir.

e) El número de columnas será siempre igual a tres (3).

f) Elija "OK" u oprima la tecla "ENTER".

g) Escriba la función del primer trozo en la primera columna, "*if*" en la segunda columna, y el intervalo correspondiente en la tercera columna.

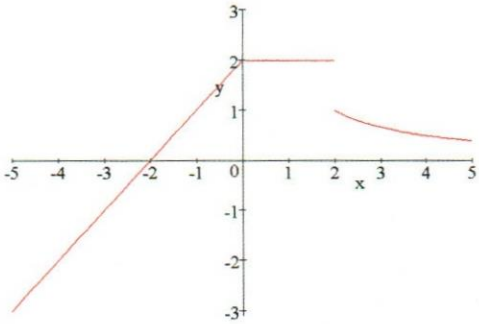
h) Escriba el resto de los trozos en forma similar.

Para obtener la gráfica, seleccione : "**Maple+Plot 2D+Rectangular**" (o haga *click* en el icono).

- **Ejemplo 1**:

Obtener la gráfica de : $f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad 0 < x \leq 2 \\ \frac{2}{x} & si \quad 2 < x \end{cases}$

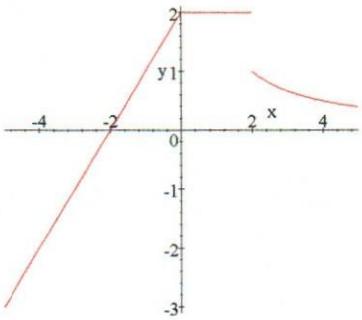
Solución:
Aplicando el método arriba expuesto, se obtiene:



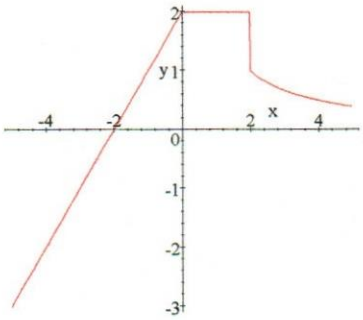
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad 0 < x \leq 2 \\ \frac{2}{x} & si \quad 2 < x \end{cases}$$

Obsérvese que la gráfica no discrimina que, para $x = 0$, $f(0)$ no está definido
Así mismo, tampoco evidencia que para $x = 2$, $f(2) = 2$
Si se define la función a través del método:"**Maple+Define+New Definition**", se puede evaluar la función en cualquier parte de su dominio, y en particular, en los extremos de los intervalos, obteniéndose resultados tales como:

Extremos de intervalo: $f(0)$ no está definido ; $f(2) = 2$
Otros valores: $f(-1) = 1$; $f(4) = \frac{1}{2}$
Por otra parte, una vez definida la función a trozos por la técnica: "**Maple+Define+New Definition**", se puede graficar dicha función con solo escribir : $f(x)$ o simplemente: f
La diferencia en uno u otro caso, está en las conexiones verticales en los puntos de discontinuidad de la función, tal como se ilustra a continuación:



$f(x)$



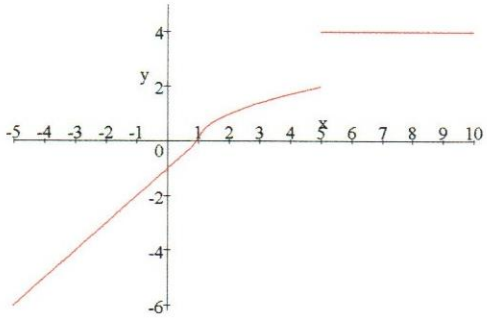
f

- **Ejemplo 2**:

Calcular el Dominio y Rango de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x-1\ , & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } 1 \leqslant x < 5 \\ 4\ . & \text{si } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Representando gráficamente esta función, de acuerdo con la técnica ya expuesta, se obtiene:



$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \textit{if } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \textit{if } 1 \leq x < 5 \\ 4 & \textit{if } x \geq 5 \end{cases}$$

Evidentemente, el Dominio de esta función será: $D = (-\infty, \infty)$

El Rango será : $R = (-\infty, 2) \cup \{4\}$.

NOTA 15

Obsérvese que la gráfica no discrimina que: $f(5) = 4$

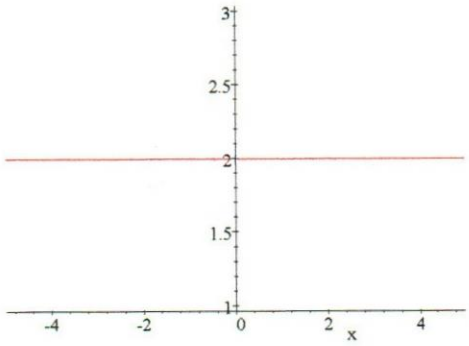
-

- **Ejemplo 3**:

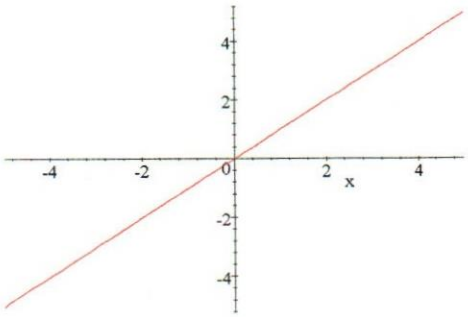
$$f(x) = \begin{cases} x-1\ , & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } 1 \leqslant x < 5 \\ 0\ , & \text{si } 5 < x < 8 \\ 4\ . & \text{si } x \geqslant 8 \end{cases}$$

Representando gráficamente esta función, se obtiene:

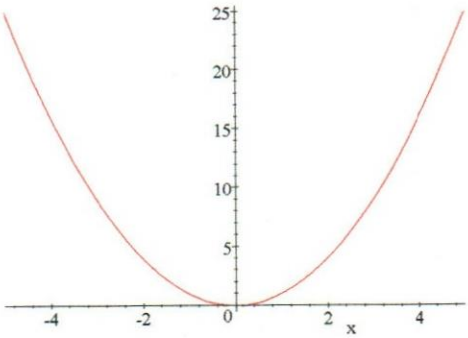
a) **Función constante**: $y = a$; $a = 2$ (en este caso)



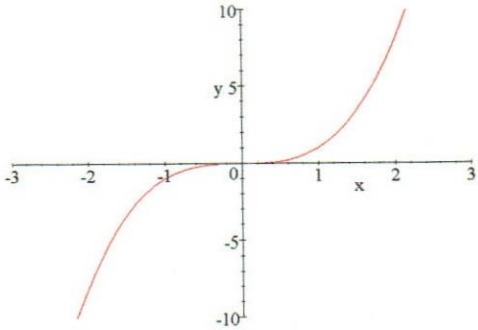
b) **Función identidad**: $y = x$



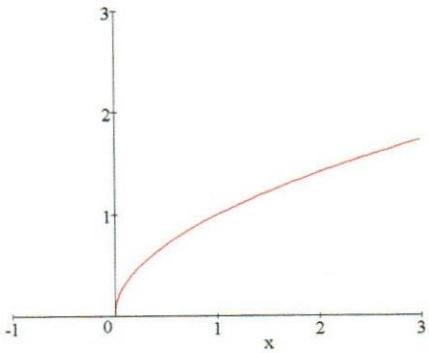
c) **Función cuadrática**: $y = x^2$



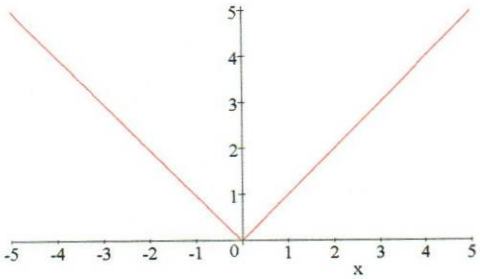
d) **Función cúbica**: $y = x^3$



e) **Función raiz cuadrada**: $y = \sqrt{x}$



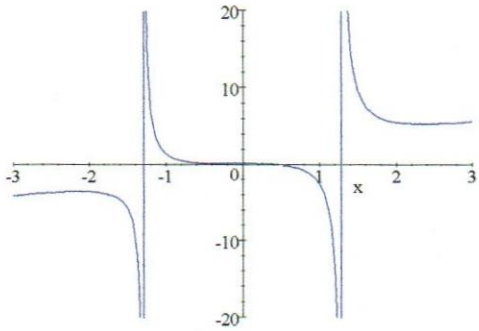
f) **Función valor absoluto**: $y = |x|$



g) **Función racional**: Es aquella que puede expresarse por el cociente de dos polinomios.

Son por lo tanto de la forma : $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $\mathbf{q(x)} \neq 0$

Ejemplo: $y = \frac{4x^3+2x^2-1}{3x^2-5}$



2.3.2) FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO

Se define así aquella función, denotada por $\lfloor x \rfloor$, con dominio todo el conjunto de los números reales y con regla de correspondencia:

$\lfloor x \rfloor$ es el máximo entero menor o igual que x

Muchos autores la denotan también por : $[x]$ o por $[[x]]$

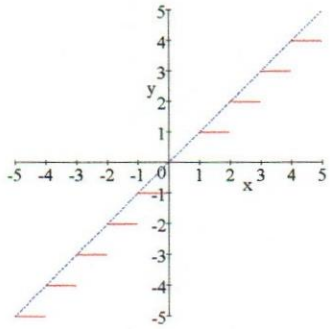
En el programa *SCIENTIFIC NOTEBOOK*, la notación utlizada es : $\lfloor x \rfloor$.

De acuerdo con la definición:

$\lfloor 2.7 \rfloor = 2$, $\lfloor 1.4 \rfloor = 1$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor 0.7 \rfloor = 0$, $\lfloor 0 \rfloor = 0$

$\lfloor -0.4 \rfloor = -1$, $\lfloor -1.3 \rfloor = -2$, $\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$

La gráfica de la Función Parte Entera aquí definida será:



$\lfloor x \rfloor$

NOTA 16:

Obsérverse que la gráfica trazada con el *Scientific Notebook* no discrimina que para :$x = n \in Z$ siendo Z el conjunto de los números enteros (positivos y negativos), se verifica que:

$$lím_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1 \quad \wedge \quad lím_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$$

2.3.3) FUNCIÓN MÍNIMO ENTERO

Se define así aquella función, denotada por $\lceil x \rceil$, con dominio todo el conjunto de los números reales y con regla de correspondencia:

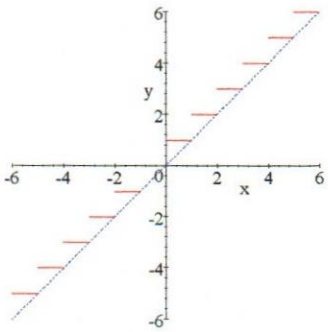
$\lceil x \rceil$ es el mínimo entero mayor o igual que x

De acuerdo con la definición:

$\lceil 2.7 \rceil = 3$, $\lceil 1.4 \rceil = 2$, $\lceil 3 \rceil = 3$, $\lceil 0.7 \rceil = 1$, $\lceil 0 \rceil = 0$

$\lceil -0.4 \rceil = 0$, $\lceil -1.3 \rceil = -1$, $\lceil -2 \rceil = -2$, $\lceil \sqrt{2} \rceil = 2$

La gráfica de la Función Mínimo Entero aquí definida será:



$\lceil x \rceil$

NOTA 17:

Obsérvese que la gráfica trazada con el *Scientific Notebook* no discrimina que para $:x = n \in Z$ siendo Z el conjunto de los números enteros (positivos y negativos), se verifica que:

$$lím_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n \qquad \wedge \qquad lím_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n + 1$$

- **2.3.4) Funciones Trascendentes**

Son aquellas que no son algebráicas.

Por ejemplo, las funciones exponenciales, las logarítmicas y las trigonométricas.

a) Función Exponencial: Son aquellas que contienen una constante elevada a una potencia variable.

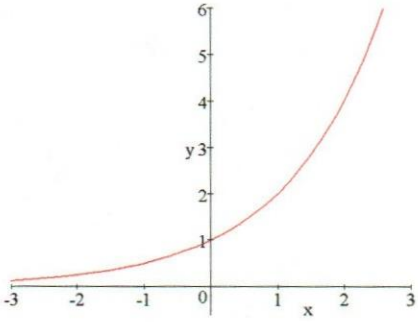
Su forma genérica es por tanto: $y = a^x$, con $a = constante$.

a.1) Gráfica:

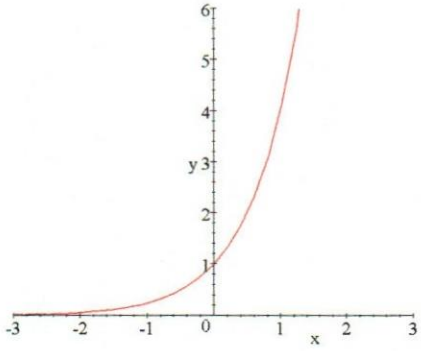
Ejemplos sencillos de función exponencial son:

$f(x) = 2^x$; $g(x) = 4^x$; $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

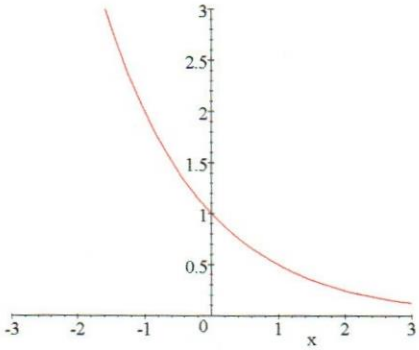
cuyas respectivas gráficas se muestran a continuación:



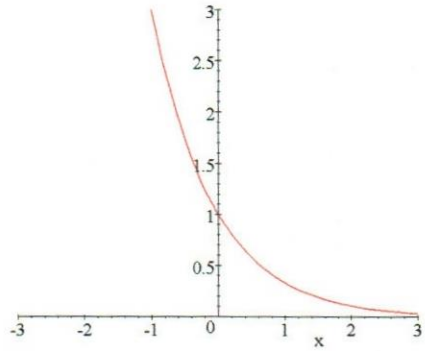
$f(x) = 2^x$



$g(x) = 4^x$

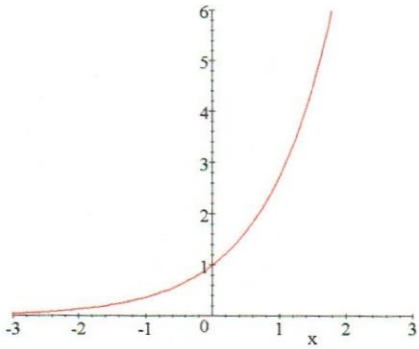


$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

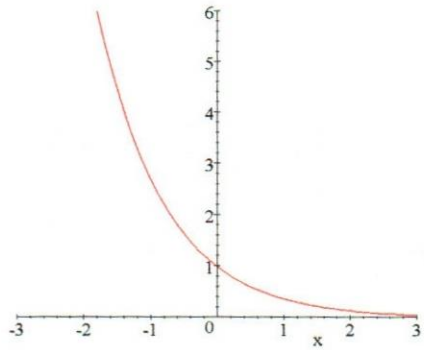


$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Si la constante de la definición es el número irracional $e = 2.718281828459045235\,4$, la gráfica de e^x y de e^{-x} , será:



$y = e^x$

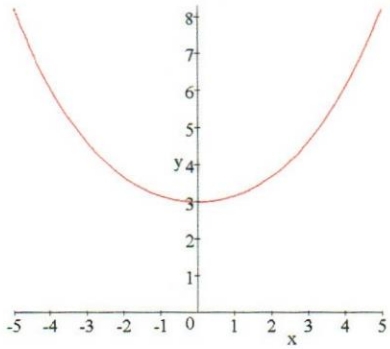


$y = e^{-x}$

Como caso particular, se presenta a continuación la gráfica de la Catenaria, la cual representa la forma adoptada por un cable que cuelga libre desde dos puntos, suspendido por sus extremos.
La ecuación de esta curva es:

$$y = a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)$$

Para el caso particular : $a = 2$, se obtiene: $y = 3\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)$, cuya gráfica es:



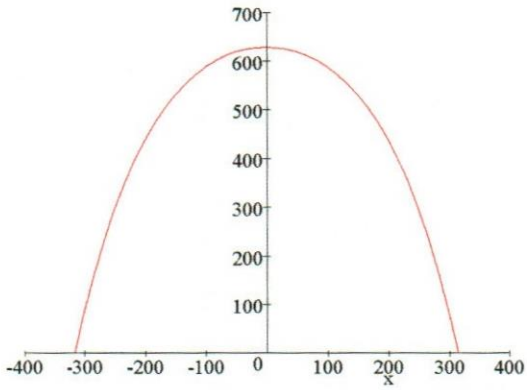
NOTA 18

El arco de San Luis (Missouri, USA), denominado "*Gateway*", es un ejemplo de arco construído en forma de catenaria.

Su ecuación es:

$$y = 757.71 - 127.71\left(\frac{e^{x/127.71}+e^{-x/127.71}}{2}\right)$$

Su gráfica es:



Los cables de tendidos telefónicos aéreos y las cuerdas de tendederos tienen esta forma. Un cable así, que cuelga libre, tiene todas sus fuerzas internas equilibradas. Esta es la razón por la cual una catenaria(invertida) constituye un arco perfecto, ya que todos los esfuerzos actúan precisamente en sus apoyos.

El *Gateway* de San Luis fue diseñado por Eero Saarinen y terminado en 1965. Con una altura equivalente 60 pisos (630 pies), está cubierto por 900 toneladas de acero inoxidable de 1/4 de pulgada y pesa 16.000,00 toneladas. Es el mayor monumento de su clase en EE.UU de América. Nótese que la altura del Gateway es igual a la distancia entre sus apoyos.

a.2) Propiedades de la función exponencial: $\mathbf{f(x) = a^x}$

Si $a > 1$ la función: $f(x) = \mathbf{a}^x$ tiene las siguiente propiedades:

* El dominio es $(-\infty, \infty)$
* $f(x) = a^x$ es contínua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
* La gráfica de $f(x) = a^x$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
* El eje x es asíntota horizontal (por la izquierda) de la

gráfica de $\mathbf{f(x)} = \mathbf{a}^x$.

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} a^x = \infty$$

La función $\mathbf{f(x)} = \mathbf{a}^{-x}$ con $a > 1$, tiene las mismas propiedades, excepto que su gráfica es decreciente y el eje x es asíntota horizontal por la derecha, es decir:

$$\lim_{x \to -\infty} a^{-x} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} a^{-x} = 0$$

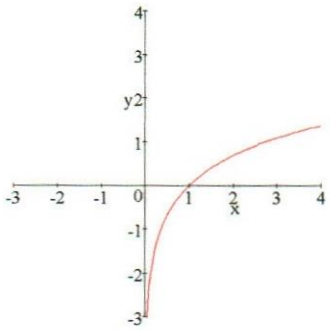
b) **Función Logaritmo Natural**

Al ser contínua y creciente entoda la recta real, la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene inversa.

A esta función inversa se le llama **Función Logaritmo Natural**. Su dominio es el conjunto de los números reales positivos. La función logaritmo natural, denotada por $\ln x$, se define como sigue:

$$\ln x = b \qquad \text{si y sólo si} \qquad e^b = x$$

b.1) **Gráfica** : se muestra a continuación de : $y = \ln x$:



$y = \ln x$

b.2) **Propiedades de la función logaritmo natural**: $\mathbf{f(x)} = \mathbf{\ln x}$

* Como la función $f^{-1}(x) = \ln x$ es la inversa de $\mathbf{f(x)} = \mathbf{e}^x$, se deduce que su gráfica es la reflejada de la de la función exponencial natural, como muestra la siguiente figura:

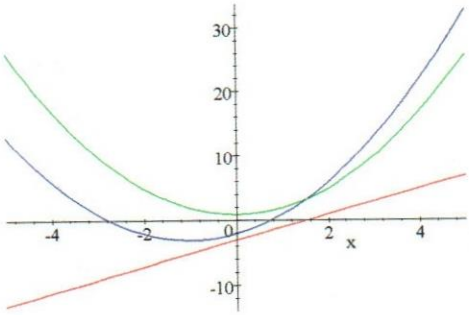
$$f^{-1}(x) = \ln x \ ; \ \mathbf{f(x)} = \mathbf{e}^x \ ; \qquad y = x$$

Ejemplo:

Si: $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 + 1$

Entonces:

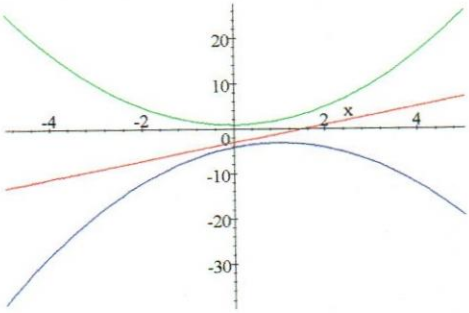
i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x-3) + (x^2+1) = x^2 + 2x - 2$



$f(x) + g(x) = (2x - 3) + (x^2 + 1) = x^2 + 2x - 2$

Color azul : f(x) + g(x)

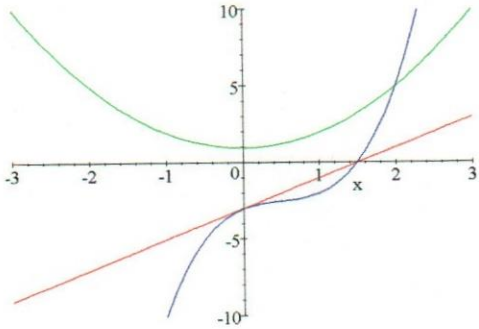
ii) $f(x) - g(x)$:



$f(x) - g(x) = (2x - 3) - (x^2 + 1) = -x^2 + 2x - 4$

Color azul : f(x) - g(x)

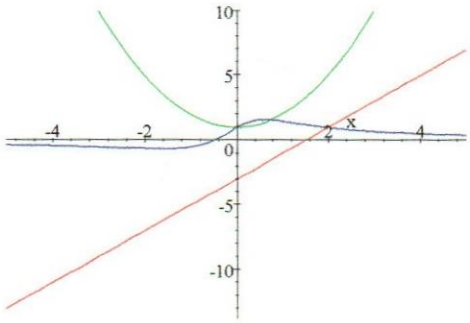
iii) $f(x) * g(x)$:



$f(x) * g(x) = (2x - 3) * (x^2 + 1) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

Color azul : f(x) * g(x)

iv) $\frac{f(x)}{g(x)}$:



$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(2x-3)}{x^2+1}$$

Color azul : f(x) / g(x)

b) Función Compuesta

Existe otra manera de combinar dos funciones, para formar lo que se denomina una **función compuesta**.
Esta función ya fue estudiada en el punto 1.6.1.8) del presente trabajo.

2.5) CAMBIOS ESTRUCTURALES EN LAS FUNCIONES

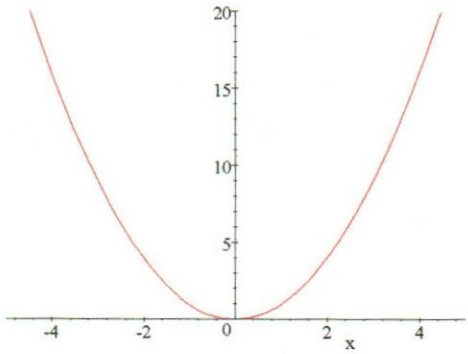
La notación de funciones se adapta muy bien para describir transformaciones de gráficas en el plano. De hecho, algunas familia de gráficas tienen la misma forma , simplemente que dicha gráfica ha sido trasladada, reflejada, comprimida o expandida, según se verá a continuación:

a) Traslación en el Dominio

Si $y = f(x)$ es la ecuación de la gráfica original y $c > 0$, entonces:

* $y = f(x + c)$ representa una traslación horizontal de c unidades hacia la izquierda.
* $y = f(x - c)$ representa una traslación horizontal de c unidades hacia la derecha.

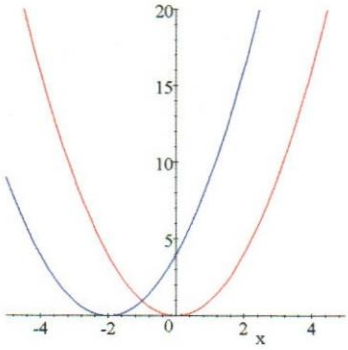
Para ilustrar lo aquí expuesto, consideremos la gráfica de : $y = x^2$ que se muestra en la figura:



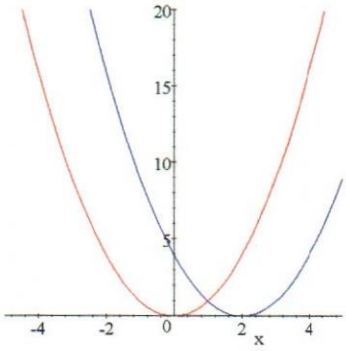
$y = x^2$

Ejemplo 1: $\begin{cases} y = x^2 \ : & \text{color rojo} \\ y = (x \pm 2)^2 : & \text{color azul} \end{cases}$

$y = x^2$; $y = (x+2)^2$ $\qquad$ $y = x^2$; $y = (x-2)^2$



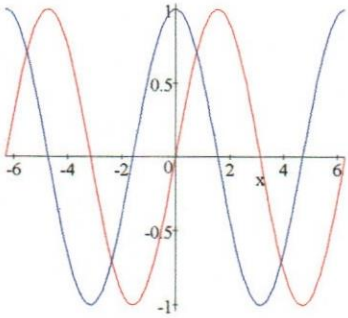
2 unidades hacia la izquierda



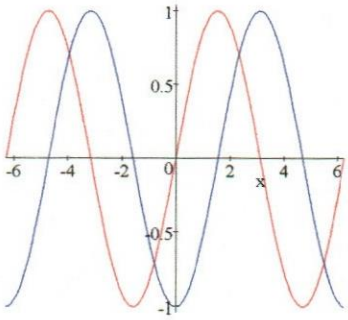
2 unidades hacia la derecha

Ejemplo 2: $\begin{cases} y = \sin x \ : & \text{color rojo} \\ y = \sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) : & \text{color azul} \end{cases}$

$y = \sin x$; $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $y = \sin x$; $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$



Traslación $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda



Traslación $\frac{\pi}{2}$ hacia la derecha

b) Traslación en el Rango

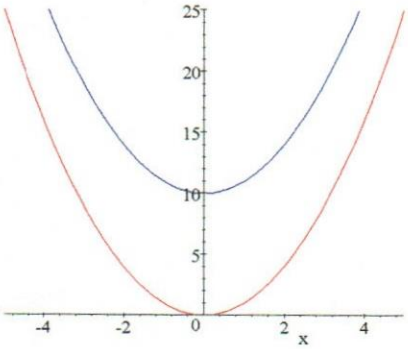
Si $y = f(x)$ es la ecuación de la gráfica original y $c > 0$, entonces:

* $y = f(x) + c$ representa una traslación verticall de c unidades hacia arriba.

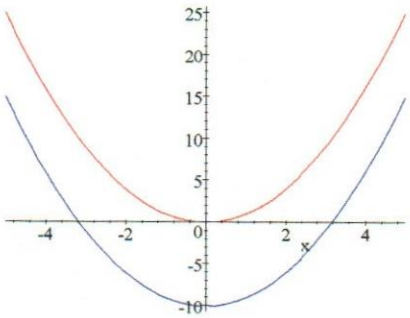
* $y = f(x) - c$ representa una traslación vertical de c unidades hacia abajo.

Ejemplo 1: $\begin{cases} y = x^2 : & \text{color rojo} \\ y = x^2 \pm 10 : & \text{color azul} \end{cases}$

$y = x^2$; $y = x^2 + 10$ $\qquad$ $y = x^2$; $y = x^2 - 10$



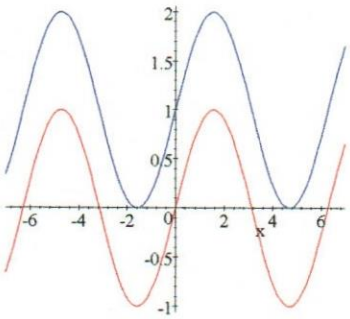
Traslación vertical hacia arriba



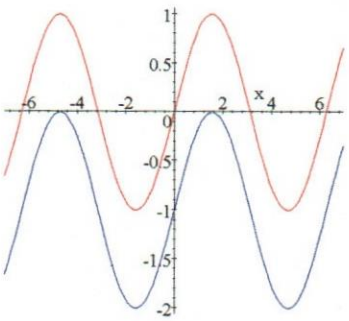
Traslación vertical hacia abajo

Ejemplo 2: $\begin{cases} y = \sin x : & \text{color rojo} \\ y = \sin x \pm 1 : & \text{color azul} \end{cases}$

$y = \sin x$; $y = \sin x + 1$ $\qquad$ $y = \sin x$; $y = \sin x - 1$



Traslación vertical hacaia arriba



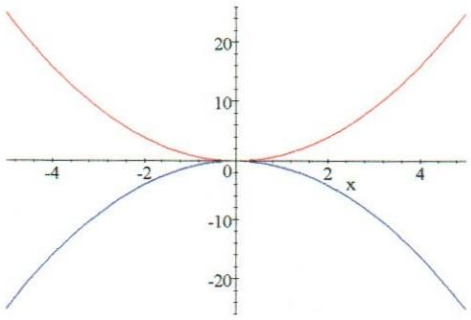
Traslación vertical hacia abajo

c) **Reflexión**:

Si $y = f(x)$ es la ecuación de la gráfica original , entonces $y = -f(x)$ presenta una reflexión sobre el eje x, tal como se ilustra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Consideremos la gráfica de las funciones: $y = x^2$ e $y = -x^2$

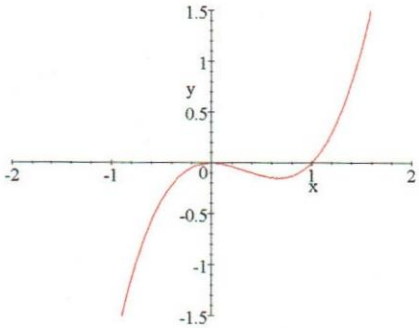
$y = x^2$; $y = -x^2$

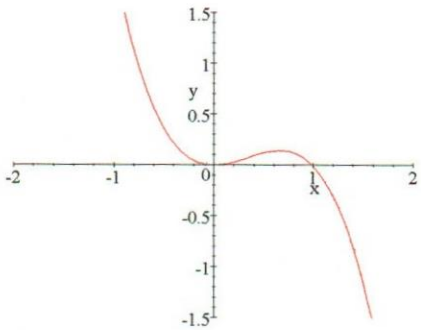


Reflexión sobre el eje x

Ejemple 2: Analicemos las gráficas de : $y = x^3 - x^2$ e $y = -(x^3 - x^2)$

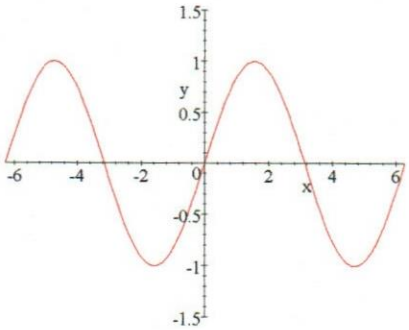
$y = x^3 - x^2$ $\qquad$ $y = -\left(x^3 - x^2\right)$

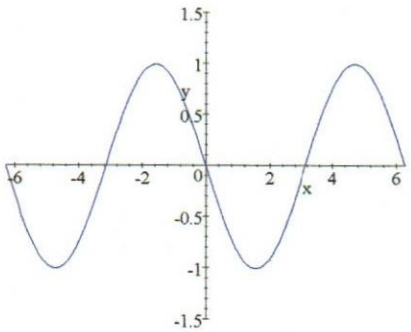




Ejemple 3: Analicemos las gráficas de : $y = \sin x$ e $y = -\sin x$

$y = \sin$ $\qquad$ $y = -\sin x$





d) Expansión y Contracción en el Dominio

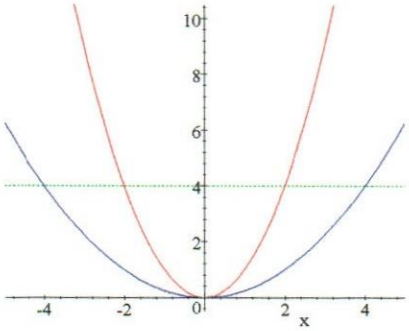
Sea $y = f(x)$ la ecuación de la gráfica original,

* Si: $0 < c < 1$, entonces, $y = f(cx)$ representa una Expansión en el dominio.
* Si $c > 1$, entonces $y = f(cx)$ representa una Contracción en el dominio.

Ejemplo 1:

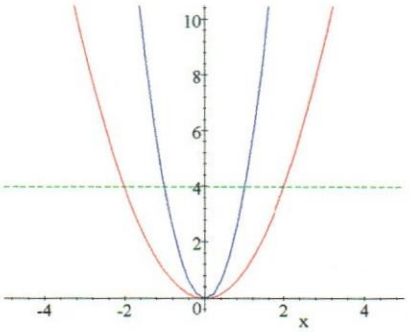
Si $y = x^2$ (color rojo) es la ecuación de la gráfica original, se compara a continuación dicha gráfica, con la correspondiente a : $y = (0.5x^2)$ e $y = (2x^2)$,en color azul.

$y = x^2$ *vs.* $y = (0.5x^2)$



Expansión en el Dominio

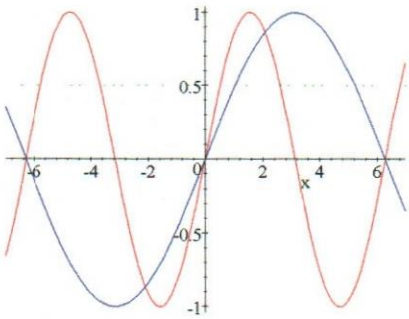
$y = x^2$ *vs.* $y = (2x^2)$



Contracción en el Dominio

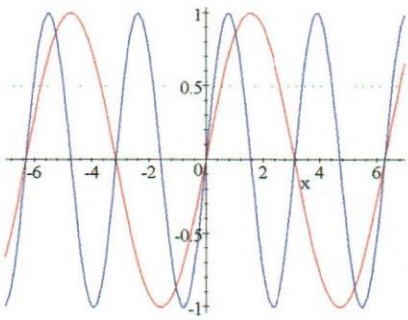
Ejemplo 2 : Función original: $y = \sin x$ (color rojo)

$y = \sin x$ vs. $y = \sin(0.5x)$



Expansión en el Dominio

$y = \sin x$ vs. $y = \sin(2x)$



Contracción en el Dominio

e) **Expansión y Contracción en el Rango**

Sea $y = f(x)$ la gráfica original, (color rojo)

* Si: $0 < c < 1$, entonces $y = cf(x)$ representa una Contracción en el rango.

* Si $c > 1$, entonces, $y = f(cx)$ representa una Expansión en el rango.

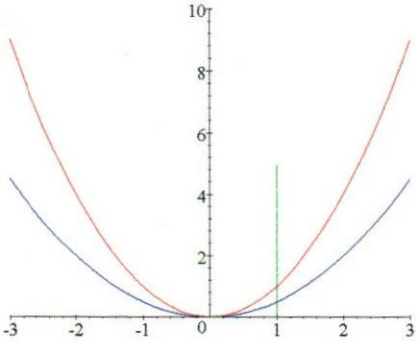
Ejemplo 1:

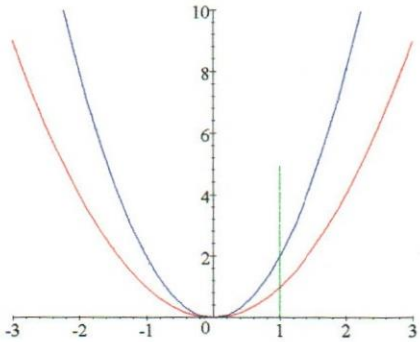
Sea: $y = x^2$ la ecuación de la gráfica original (color rojo)

Entonces:

$y = 0.5(x^2)$ vs. $y = x^2$

$y = 2(x^2)$ vs. $y = x^2$





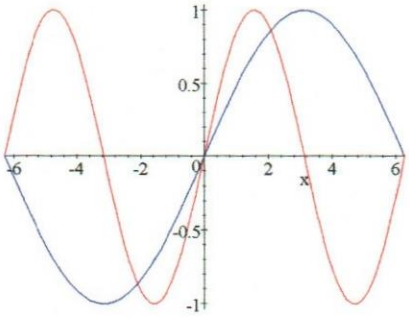
$0 < c < 1$: Contracción en el Rango

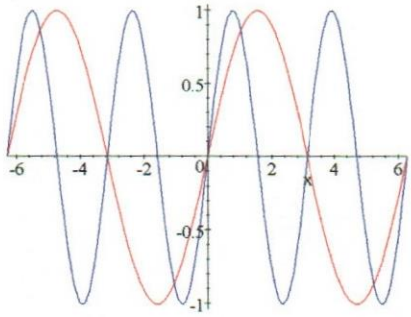
$c > 1$: Expansión en el Rango

Ejemplo 2 : Función original: $y = \sin x$ (color rojo)

$y = \sin x$ vs. $y = \sin(0.5x)$

$y = \sin x$ vs.; $y = \sin(2x)$





Contracción en el Rango

Expansión en el Rango

- **f) Factor de escala**

Consideremos la gráfica de $y = f(x)$ como gráfica de referencia :

* Si: $0 < c < 1$, entonces, $y = cf(x)$ representa una Contracción en el Rango

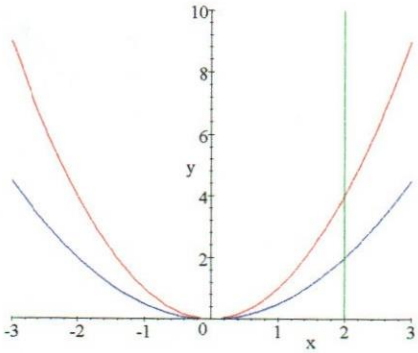
* Si $c > 1$, entonces $y = cf(x)$ representa una Expansión en el Rango.

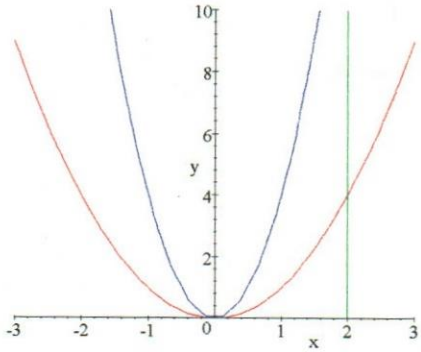
Ejemplo 1: Consideremos la gráfica original de: $y = x^2$ (en color rojo)

Entonces.

$y = x^2$ vs. $y = 0.5x^2$

$y = x^2$ vs. $y = 4x^2$



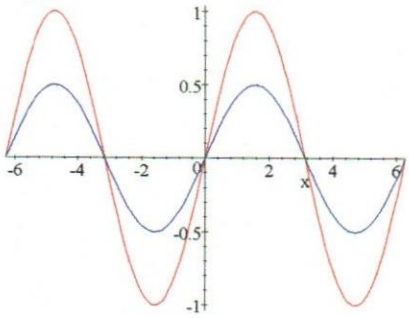


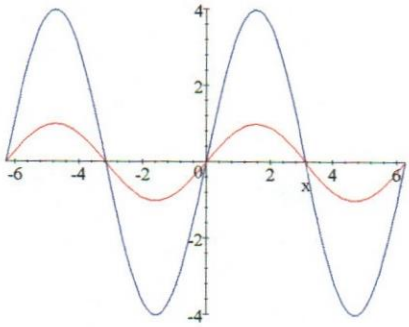
Contracción en el Rango Expansión en el Rango

Ejemplo 2: Consideremos la gráfica de: $y = \sin x$ (en color rojo) como gráfica de referencia.

Entonces:

$y = \sin x$ vs. $y = 0.5 \sin x$ $y = \sin x$ vs. $y = 4 \sin x$





$\sin x$

Contracción en el Rango Expansión en el Rango

g) Traslación, expansión (contracción) y factor de escala combinados

Ejemplo 1:

Consideremos la gráfica de la expresión: $f(x) = \sin x$, como gráfica de referencia .

Se desea analizar el efecto de las constantes: $\frac{\pi}{2}$, 3 y 5 , en la siguiente expresión:

$$g(x) = 3f\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) - 5$$

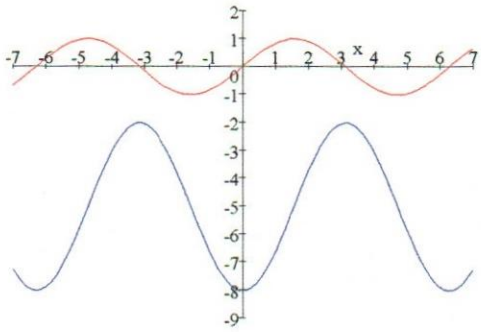
Solución :

Obviamente, $g(x)$ está dada por :

$$g(x) = 3\sin(x - \tfrac{\pi}{2}) - 5$$

Se presenta a continuación las gráficas de $f(x)$ en color rojo, y de $g(x)$ en color azul :

$$\sin x \quad \text{vs.} \quad 3\sin(x - \tfrac{\pi}{2}) - 5$$



En consecuencia:

$\frac{\pi}{2}$	Traslación horizontal hacia la derecha
3	Expansión en el rango de 3 unidades
-5	Traslación vertical de 5 unidades hacia abajo

Ejemplo 2:
Consideremos la expresión: $f(x) = x^3$ como función original .
Se desea analizar el efecto de las constantes: 1,2 , 3 y 4 , en la siguiente expresión:

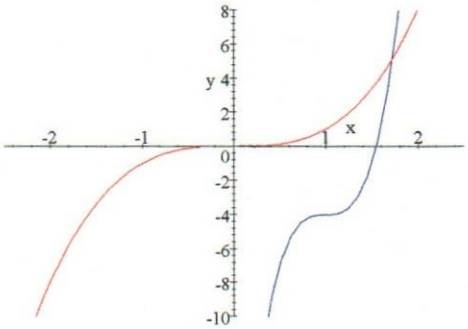
$$g(x) = 3f[2(x-1)] - 4$$

Solución
Obviamente, g(x) está dada por la siguiente expresión:

$$g(x) = 3[2(x-1)]^3 - 4 = 24x^3 - 72x^2 + 72x - 28$$

Se presenta a continuación, las gráficas de $f(x)$ en color rojo , y de $g(x)$ en azul :

$f(x)$ vs. $g(x)$



Por lo tanto :

1	Traslación horizontal hacia la derecha: 1 unidad
2	Contracción en 2 uniades en el dominio
3	Expansión de 3 unidades en el Rango
4	Traslación vertical de 4 unidades hacia abajo

- **2.6) GRÁFICA DE FUNCIONES IMPLÍCITAS**

Si la funión está definida en forma implícita, $f(x,y) = 0$, para obtener su gráfica se procede

como se indca a continuación:

a) En el **modo Matemática**, se escribe la función implícita $f(x,y) = 0$ que se desea graficar.

b) Se coloca el cursor a la derecha (o en ella) y se selecciona: "**Maple+Plot 2D+Implicit**"

en la Barra de Menú.

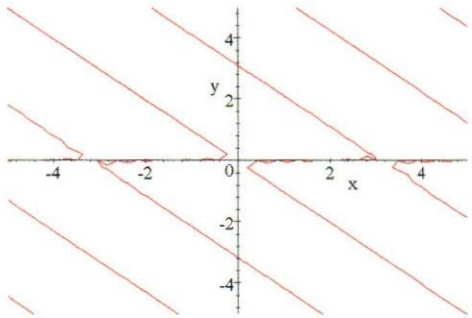
El resultado será la gráfica correspondiete de la función $f(x,y) = 0$

Ejemplo 1:

Obtener la gráfica de la función : $y\sin(x+y) = 0$

Solución gráfica:

Procediendo como se especificó anteriormente, se obtiene:



$y\sin(x+y) = 0$

Solución analítica:

De $y\sin(x+y) = 0$, se deduce que: $\begin{cases} y = 0 \ , \quad \vee \\ \sin(x+y) = 0 \Rightarrow x+y = k\pi, k \in Z \\ \text{de donde: } \ y = -x - k\pi \end{cases}$

Por lo tanto , las soluciónes son una familia de rectas de ecuación :

$$y = -x + k\pi \quad , \text{ donde } \quad k \in Z$$

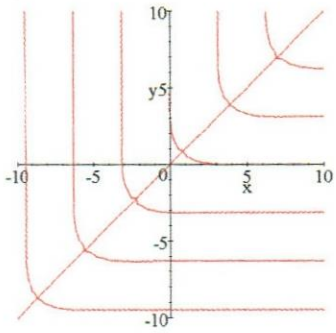
tal como se muestra en la solución gráfica precedente.

Ejemplo 2:

Obtener la gráfica de la función :

$$y = 1 + xe^y$$

Procediendo como se especificó anteriormente, se obtiene:



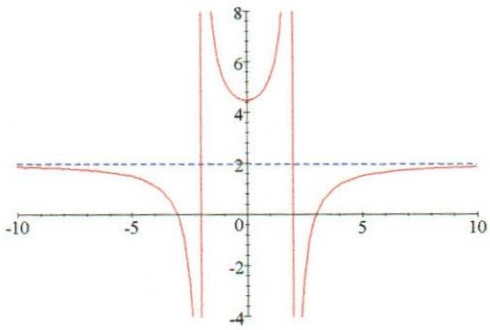
$e^x \sin y = e^y \sin x$

Ejemplos 6: Graficar las funciones:

6.a) $f(x) = \frac{2(x^2-9)}{x^2-4}$; 6.b) $g(x) = \frac{x^2-2xx+4}{x-2}$; 6.c) $h(x)=\frac{-x^3+x^2+4}{x^2}$

Solución: Aplicando la técnica antes expuesta, se obtiene:

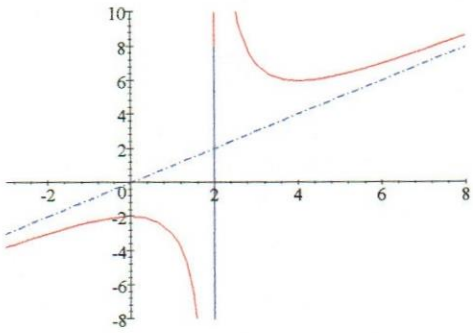
6.a)



$y - \frac{2(x^2-9)}{x^2-4} = 0$

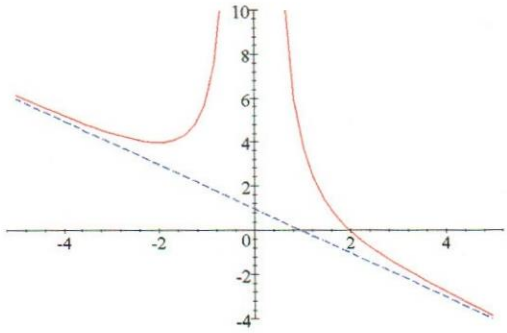
Asíntotas: $y = 2 \ \Lambda \ \ x = \pm 2$

6.b)



$y - \frac{x^2-2x+4}{x-2} = 0$

Asíntotas : $y = x \ \Lambda \ \ x = 2$



$y - \frac{-x^3+x^2+4}{x^2} = 0$

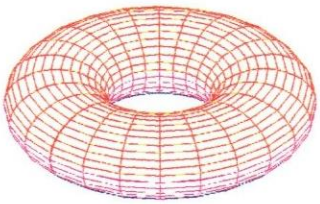
Asíntotas: $y = -x + 1 \quad \Lambda \quad x = 0$

CAPÍTULO III

NEWTON - LEIBNIZ

Isaac Newton (1642 - 1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), constituyen las dos figuras cumbres de las Matemáticas en el siglo XVII; astrónomo , físico y matemático el primero; matemático, filósofo y profundo pensador el segundo. Ambos a la vez, pero trabajando por separado y siguiendo métodos completamente distintos, son los creadores y descubridores del Cálculo Infinitesimal, cuya invención se puede parangonar con la de la electricidad, de la dinamita, del telégrafo, la radio o de la máquna de vapor: tal es su trascendencia. A pesar de una desafortunada disputa entre los partidarios de Newton y los de Leibnitz que duró más de un siglo, en la actualidad está claro que sus descubrimientos fueron independientes; los descubrimientos de Newton fueron anteriores, pero Leibniz fue el primero en publicarlos.

A Leibniz se debe la creación de un lenguaje universal que incorpora notación y terminología, lo que permitió poner al alcance de los estudiantes ordinarios, problemas que hasta entonces requerian del ingenio de Arquímedes o de Newton. El método de cálculo de Leibniz predominó durante el siglo XVIII; no obstante la idea moderna de Cálculo Diferencial se parece más al método propuesto por Newton.



CAPÍTULO III

LÍMITES Y SUS PROPIEDADES

3) LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

El concepto de límite es fundamental en el Cálculo, por lo que su conocimiento es indispensable para adentrarse en otros temas del mismo.

3.1) Definición Informal de Límite

Si $f(x)$ se hace arbitrariamente próximo a un único número L cuando x se aproxima hacia c por ambos lados, se dice que el Límite de $f(x)$, cuando x tiende a c, es L, y se escribe:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Por esta expresión, se entenderá dos cosas:

a) Que el límite existe

b) Que el límite es L

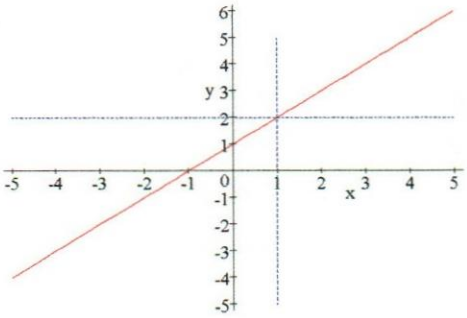
Además , es necesario tener presente el teorema de Unicidad del Límite, el cual establece que éste, si existe, es único.

Los siguientes ejemplos ilustran que una función puede tener límite en un punto aunque no esté definida en dicho punto:

Ejemplo 1:

Si $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ y se intenta evaluar dicha función en $x = 1$, nos encontramos con el problema de una división por cero, lo que no existe en Matemática. No obstante, si se grafica la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. El concepto de límite puede ser aplicado para estudiar el comportamiento de dicha función en torno al valor $x = 1$.

En efecto, la gráfica demuestra que : $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$



$\left(x, \frac{x^2-1}{x-1}\right)$

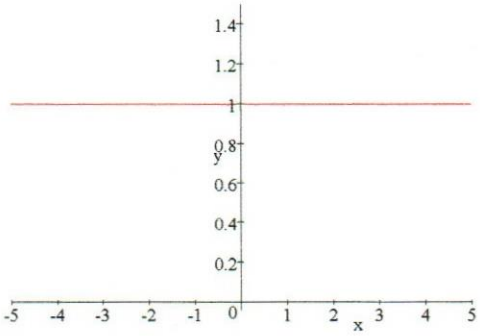
Nótese que la función no está definida en $x = 1$, a pesar de lo cual $f(x)$ se aproxima a un límite (2), cuando $x \to 1$. Esto sucede con frecuencia y es importante destacar que la existencia o no existencia de $f(x)$ en $x = a$, no afecta a la existencia del límite de $f(x)$ cuando $x \to a$.

En el siguiente ejemplo se insiste en este aspecto:

Ejemplo 2:

Hallar el limite, cuando x→ 2, de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 2 \\ 0, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Solución:
De la gráfica se desprende que $f(x) = 1$, $\forall x \neq 2$ y el valor de $f(2)$ no importa, de acuerdo con la definición, por lo tanto, se concluye que : $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$.

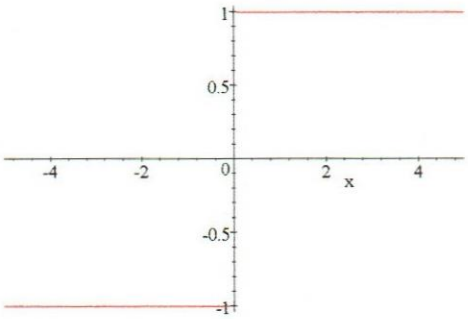


$$f(x) = \begin{cases} 1 & if \;\; x < 2 \\ 0 & if \;\; x = 2 \\ 1 & if \;\; x > 2 \end{cases}$$

Nótese que la gráfica no evidencia que : $f(2) = 0$ lo cual es un error del programa.

Ejemplo 3:
Probar que el límite, cuando x→ 0, de la función : $f(x) = \frac{|x|}{x}$, no existe.

Solución:
La gráfica ilustra que, para $x > 0$, $f(x) = -1$, y para $x > 0$, $f(x) = 1$,



$\frac{|x|}{x}$

es decir,

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{|x|}{x}\right) = -1 \;\; ; \;\; \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{|x|}{x}\right) = 1$$

por lo tanto, se concluye que : $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe

3.2) Definición formal de Límite (Definición $\varepsilon - \delta$)

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente en c), y sea L un número real. La afirmación:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |x - c| < \delta$$

La solución de esta última desigualdad es: $x \in [(x-\delta, x+\delta) - \{c\}]$

Por lo tanto: $0 < |x - c| < \delta$ implica que : $x \neq c$.
En otras palabras, el valor del límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ no depende del valor de $f(x)$ en c.
Por otra parte, la desigualdad : $|f(x) - L| < \varepsilon$ significa que $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Ejemplo 1: Probar, usando la definición formal, que : $\lim_{x\to 2}(3x-2) = 4$

Solución:

Es necesario demostra que, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que :
$|(3x-2)-4| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x-2| < \delta$

Como δ depende de ε, trataremos de establecer alguna relación entre los valores absolutos: $|(3x-2)-4|$ y $|x-2|$.

Simplificando el primero de ellos, resulta:

$$|(3x-2)-4| = |3xx-6| = 3|x-2|$$

En consecuencia, la desigualdad : $|(3x-2)-4| < \varepsilon$ requiere que:

$$3|x-2| < \varepsilon,$$

de donde:

$$|x-2| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

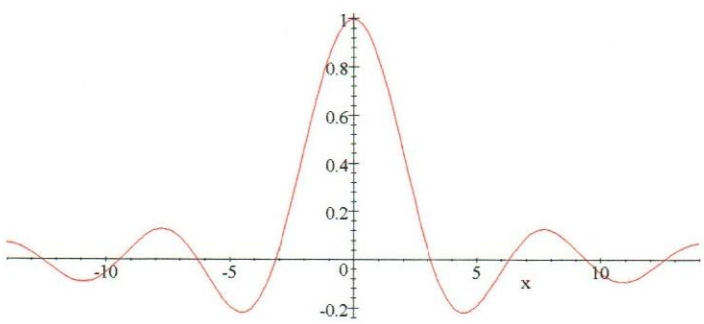
Por lo tanto, es suficiente conescoger : $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Ejemplo 2: **Límite trigonométrico fundamental**

Se desea comprobar que el : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Solución gráfica:

La gráfica de la función $\frac{\sin x}{x}$ se muestra a continuación :



* De la gráfica se obtiene que $f(0) = 1$, sin embargo, $f(0)$ no está definido,

pues: $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0} \sin x = 0 \\ \lim_{x\to 0} x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$

Para comprender este límite, es necesario hacer un estudio del comportamiento

de la gráfica de $\frac{\sin x}{x}$, en un entorno del punto $x = 0$.

Para ello, se presenta a continuación cuatro gráficas de $\frac{\sin x}{x}$, correspondientes

a : $\varepsilon =$

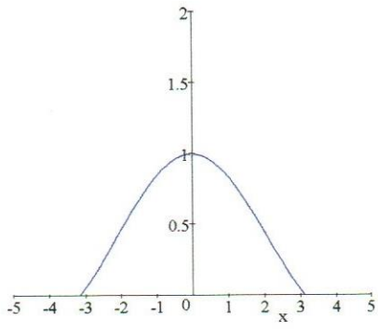
1	0.1	0.01	0.001

y

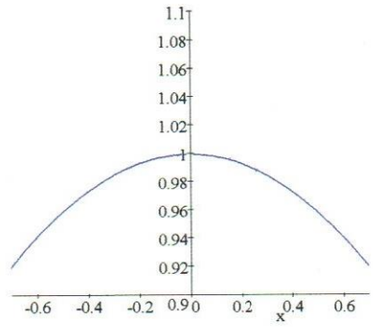
$\delta =$

5	0.7	0.2	0.06

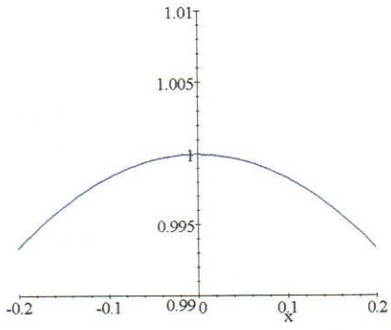
respectivamente.



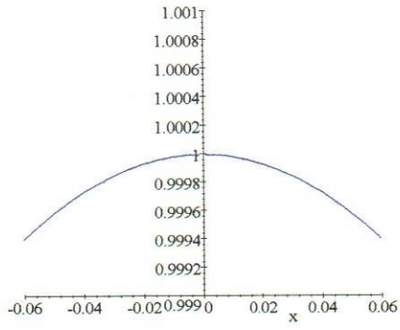
$\varepsilon = 1, \quad \delta = 5$



$\varepsilon = 0.1, \quad \delta = 0.7$



$\varepsilon = 0.01, \quad \delta = 0.2$



$\varepsilon = 0.001, \quad \delta = 0.06$

Los cuatro gráficos anteriores confirman la hipótesis de que la función $\frac{\sin x}{x}$ tiene por límite 1 cuando $x \to 0$.

3.2.1) Definición formal de Límite Lateral

a) Límite lateral izquierdo:
$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:
$|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $-\delta < x - c < 0$

b) Límite lateral derecho:
$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:
$|f(x) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < x - c < \delta$

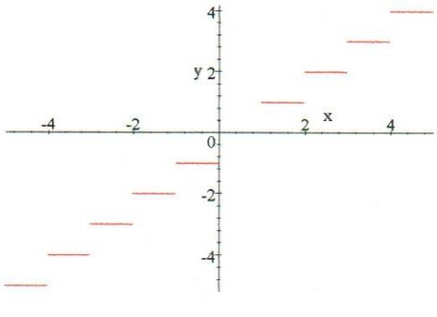
3.2.2) Existencia del Límite

Si $f(x)$ es una función y si c y L son reales, el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia c es L, si y sólo si:

Calcular. $\lim_{x \to 0} \lfloor x \rfloor$

Solución:

La gráfica de esta función es:



$\lfloor x \rfloor$

Luego:

$$\lim_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x\to 0^+}(0) = 0$$

En consecuencia, $\lim_{x\to 0^-} \lfloor x \rfloor \neq \lim_{x\to 0^+} \lfloor x \rfloor \Rightarrow \lim_{x\to 0} \lfloor x \rfloor$ no existe

3.2.3) Límite infinito

Son aquellos límites en los que $f(x)$ crece o decrece sin tope, cuando x tiende a c. Se representan por la expresión:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

La afirmación : $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$

significa que $f(x)$ crede sin tope cuando x tiende a c. Además, la afirmación:

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

significa que $f(x)$ decrece si tope cuando x tiende a c.

NOTA

El signo de la igualdad: $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ ¡ **No significa que el límite existe**¡. Por el contrario, nos explica cómo falla la existencia del límite, poniendo de manifiesto el comportamiento no acotado del $f(x)$ cuando x tiende a c.

Así pues, cuando se dice que " el límite de $f(x)$ es infinito cuando x tiende a c ", se quiere significar que "el límite no existe y f tiene una discintinuidad infinita en $x = c$".

3.2.3.1) Definición formal de límites infinitos

La afirmación:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

significa que para cada $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

Por otra parte, la afirmación:

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

significa que para cada $N < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > N$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$.

3.2.3.2) Propiedades de los límites infinitos

Si c y L son números reales y f , g son funciones tales que:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c}(x) = L$$

entonces las siguientes propiedades son válidas:

a) Suma o diferencia: $\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = \infty$

b) Producto : $\lim_{x\to c}[f(x) \bullet g(x)] = \infty$, si $L > 0$
$\lim_{x\to c}[f(x) \bullet g(x)] = -\infty$, si $L < 0$

c) Cociente : $\lim_{x\to c}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right] = 0$

Propiedades similares son válidas para límites laterales y para funciones para las cuales el límite de $f(x)$ cuando $x \to c$ es $-\infty$.

3.2.4) Límite al infinito

Sea f una función definida en un intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que, dado un $\epsilon > 0$, existe un número correspondiente N tal que: para todo $x > N$, se verifica que $|f(x) - L| < \epsilon$

es decir, $|f(x) - L|$ se puede hacer arbitrariamente pequeño, simplemente

eligiendo x suficientemente grande.
La afirmación:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

tiene una definición formal similar; sólo hay que reemplazar la condición $x > M$ por la condición: $x < -M$.
Todos los análogos de las propiedades de los límites son válidos, en particular las propiedades de la suma, producto y cociente. Además, no es difícil demostrar que si:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \pm\infty$$

entonces:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \ , \ \forall k \in R^+$$

Ejemplo 1:

Determinar : $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-x}{2x^3+7x^2-4}$ e ilustrar gráficamente

Solución:

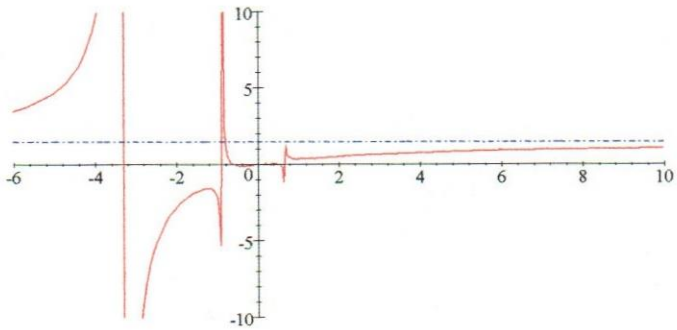
Dividiendo cada término en el numerador y en el denominador por x^3 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^3-x}{2x^3+7x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{7}{x}-\frac{4}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{7}{x}-\frac{4}{x^3}\right)} = \frac{3-0}{2+0-0} = \frac{3}{2}$$

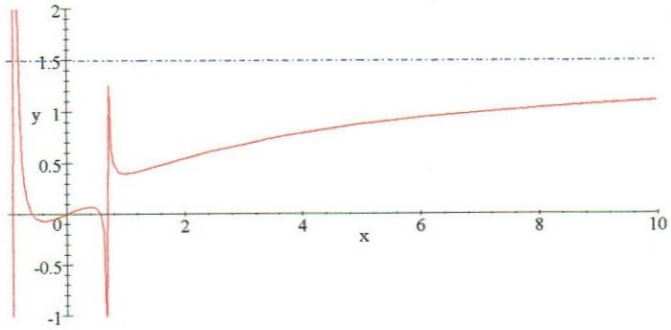
El mismo cálculo, pero con $x \to -\infty$, también da el resultado:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3-x}{2x^3+7x^2-4} = \frac{3}{2}$$

Las siguientes gráficas ilustran este resultado:



$2x^3 + 7x^2 - 4 = 0$, Solution is : $\{x = -3.3184\}, \{x = -.87245\}, \{x = .69082\}$



- **Ejemplo 2**:

  Determinar : $\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+9}-\sqrt{x}\right]$ e ilustrar gráficamente

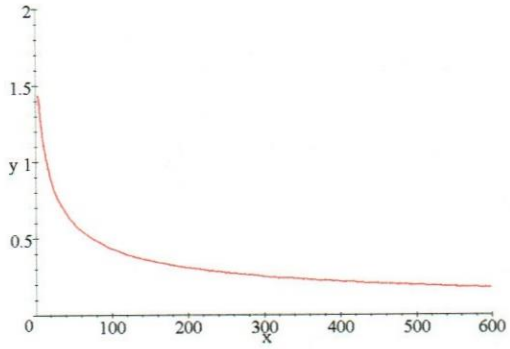
  Solución:

  Multiplicando y dividiendo el numerador y el denominador por la conjugada de la expresión dada, se obtiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+9}-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{x+9}-\sqrt{x}\right]\bullet\left[\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right]}{\left[\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right]}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+9}-\sqrt{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+9)-x}{\left[\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right]}=\frac{\lim_{x\to+\infty}(9)}{\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x+9}+\sqrt{x}\right]}=\frac{9}{\infty}=0$$

  La siguiente gráfica ilustra este resultado:



- **3.2.5) Asíntota vertical**

  La recta $x = c$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si se cumple al menos una de las siguientes igualdades:

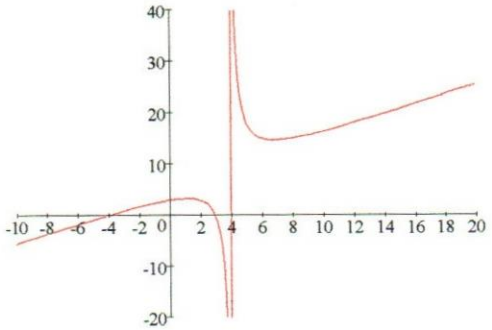
$$\lim_{x\to c}f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to c^+}f(x)=\infty \qquad \lim_{x\to c^-}f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to c}f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to c^+}f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to c^-}f(x)=-\infty$$

  Ejemplo :

  La función : $y=\frac{x^2+x-12}{(x-4)}$ tiene una asíntota vertical en $x = 4$ pues:

$$\lim_{x\to4^+}\left(\frac{x^2+x-12}{(x-4)}\right)=\infty\ ;\ \lim_{x\to4^-}\left(\frac{x^2+x-12}{(x-4)}\right)=-\infty$$



Obsérvese que si $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = c$, entonces f es discontínua en $x = c$.

- **3.2.6) Asíntota Oblícua**

La recta $y = ax + b$ es una asíntota oblícua de la curva $y = f(x)$ si se cumple que al menos una de las siguientes igualdades:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$$

En tal caso:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - ax]$$

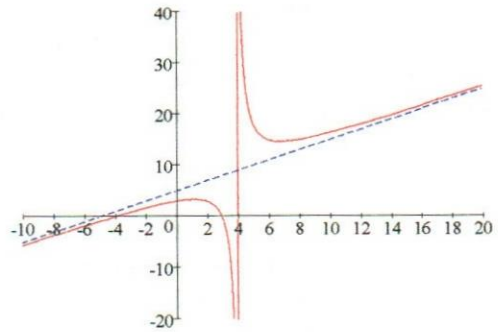
Obviamente, si $a = 0$ la asíntota será de la forma : $y = b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, es decir, será una asíntota horizontal.

Ejemplo 1:

La función : $y = \frac{x^2+x-12}{(x-4)}$ tiene una asíntota oblícua tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-12}{x(x-4)} = 1 \\ b = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+x-12}{(x-4)} - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{5x-12}{x-4}\right] = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow y = x + 5$$

La siguiente gráfica ilustra este resultado:



- **Ejemplo 2**:

Calcular las asíntotas de la curva : $y = (1 + \frac{1}{x})^x$

Solución:

Ejemplo 1:

Evaluar la siguiente expresión: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

Solución:

Aplicando los pasos antes señalados , se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$$

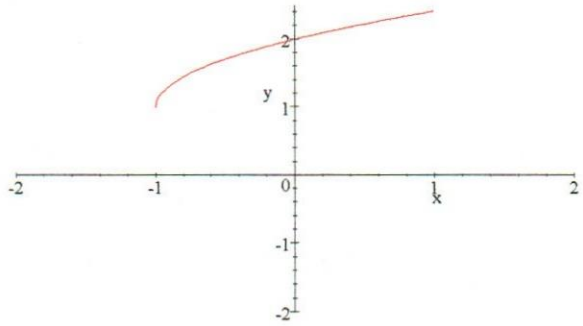
Comprobación:

La siguiente tabla muestra el comportamiento de la función : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ para varios valores de la variable x, cercanos a cero. Para obtener dicha tabla de valores se ha aplicado la técnica expuesta en el Capítulo I, punto 1.6.1.12)

$$f\begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.01 \\ -0.001 \\ -0.0001 \\ 0.0001 \\ 0.001 \\ 0.01 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.948\,683\,298\,050\,513\,799\,6 \\ 1.994\,987\,437\,106\,619\,954\,7 \\ 1.999\,499\,874\,937\,460\,910\,1 \\ 1.999\,949\,998\,749\,937\,496\,1 \\ 2.000\,049\,998\,750\,062\,496\,1 \\ 2.000\,499\,875\,062\,460\,964\,8 \\ 2.004\,987\,562\,112\,089\,027 \\ 2.048\,808\,848\,170\,151\,547 \end{pmatrix}$$

De dicha tabla de valores se observa que al aproximarse los valores de la variable x a 2, tanto por la izquerda como por la derecha, la función dada se aproxima a 2. En consecuencia, el límite de $f(x)$ cuando $x \to 0$, es 2.

Este resultado puede comfirmarse en la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ que se mustra a continuación:



$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

Nótese que la función no está definida en $x = 0$, a pesar de lo cual $f(x)$ se aproxima a un límite cuando $x \to 0$. Esto sucede con frecuencia y ratifica que la existencia o no de $f(x)$ en $x = c$, no afecta la existencia del límite de $f(x)$

cuando x tiende a c.
Obsérvese también que la gráfica no discrimina que , en $x = 0$, la función no está definida.

- **Técnica de racionalización**:

Otra vía para calcular el límite de una función irracional es la **técnica de racionalización** la cual pemite cancelar factores comunes en el numerador y en el denominador.
En efecto, en el ejemplo anterior, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\bullet\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2$$

- **Ejemplo 2**:

Evaluar la siguiente expresión: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$ e ilustrar gráficamente

Solución:

Aplicando el método antes señalado , se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = \frac{1}{4}$$

Comprobación:

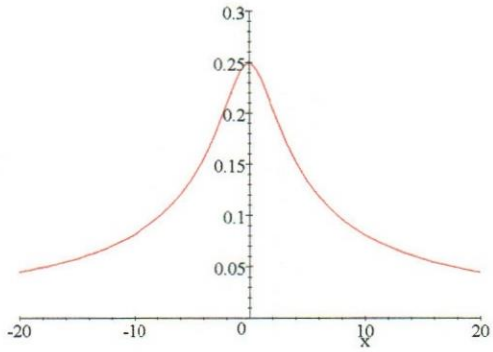
En efecto, racionalizando el numerador:

$$\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} = \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Comprobación gráfica:

La siguiente gráfica ilustra lo antes expuesto.



$\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$

- **Ejemplo 3**:

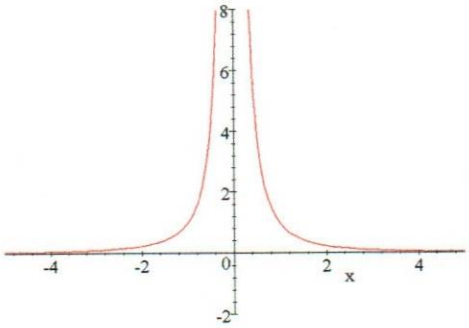
Calcular si existe : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Solución:
Aplicando la técnica ya conocida, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$$
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$$

Luego, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ no existe

La gráfica de la función $\frac{1}{x^2}$ puede verse en la siguiente figura, lo que confirma el resultado



$\frac{1}{x^2}$

Ejemplo 4:
Calcular si existe : $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+x-12}{x^2-7x+12}\right)$

Solución:
Aplicando la técnica ya conocida, se obtiene:

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x^2+x-12}{x^2-7x+12}\right) = -7$$

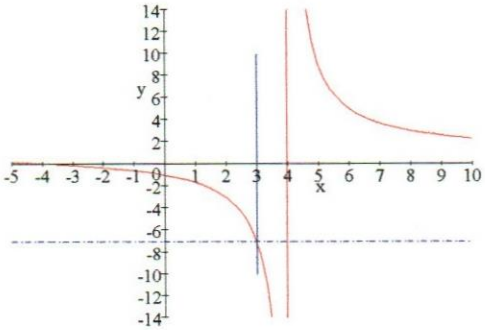
Técnica de cancelación:

A objeto de comprobar el resultado antes expuesto, se puede emplear la ténica de cancelación, la cual consiste en determinar un factor común al numerador y al denominador, que se anula para el valor de la variable, según se ilustra a continuación:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{(x-3)(x-4)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x-4)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x+4)}{(x-4)} = -7$$

lo que confirma el Teorema da la Unicidad del límite.

La siguiente gráfica ilustra lo aquí expuesto:



$$\left[t, \frac{t^2+t-12}{t^2-7t+12}\right]$$

Obsérvese que la gráfica se ha dibujado usando para ello ecuaciones paramétricas de la expresión dada, a objeto de permitirnos dibujar en el mismo sistema de cooordenadas, las gráficas de las rectas : $y = -7$ y $x = 3$.

NOTA 15

Para factorizar tanto el numerador como el denominador, se puede emplear la técnica prevista al efecto en el SCIENTIFIC NOTEBOOK, según se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.

Evaluar : $\lim_{x\to-\frac{3}{2}} \frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}$

Factorizando en numerador: Para ello se ubica el cursor a la derecha del mismo, y se selecciona: "**Maple+Factor**", obteniéndose:

$$4x^4 + 6x^2 + 19x + 6x^3 + 15 = (2x+3)(x+1)(2x^2-2x+5)$$

Análogamente se obtiene para el denominador:

$$2x^3 + 5x^2 + 5x + 3 = (2x+3)(x^2+x+1)$$

En consecuencia:

$$\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} = \frac{(2x+3)(x+1)(2x^2-2x+5)}{(2x+3)(x^2+x+1)} = (x+1)\frac{2x^2-2x+5}{x^2+x+1} \quad .....(1)$$

Para evaluar esta expresión en $x = -\frac{3}{2}$, se escribe:

$$\left[(x+1)\frac{2x^2-2x+5}{x^2+x+1}\right]_{x=-\frac{3}{2}}$$

y se selecciona: "**Maple+Evaluate**" o se hace *click* en el icono:

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}} \frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} = \left[(x+1)\frac{2x^2-2x+5}{x^2+x+1}\right]_{x=-\frac{3}{2}} = -\frac{25}{7}$$

La expresión (1) también puede obtenerse aplicando directamente : "**Maple +Factor**" a la expresión que se desee simplificar. Así se obtiene:

$$\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} = (x+1)\frac{2x^2-2x+5}{x^2+x+1}$$

Si se aplica :**Maple +Simplify**" a la expresión: $\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}$, se obtiene:

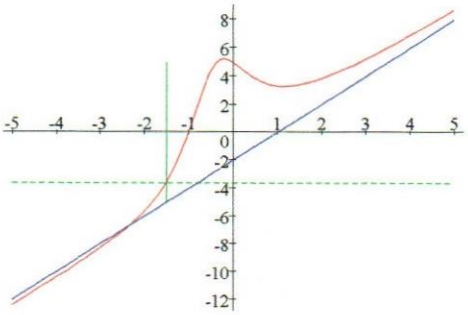
$$\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} = \frac{2x^3+3x+5}{x^2+x+1}$$

Por lo que:

$$\left[\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}\right]_{x=-\frac{3}{2}} = \left[\frac{2x^3+3x+5}{x^2+x+1}\right]_{x=-\frac{3}{2}} = -\frac{25}{7} = -3.5714$$

Ilustración gráfica:

La siguiente curva muestra la gráfica de la función bajo estudio, su asíntota oblicua y el valor del límite en $x = -\frac{3}{2}$



$$\left[x, \frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}\right]$$

Asíntota Oblicua: $y = mx + n$, dende: $\begin{cases} m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] \end{cases}$

Por lo tanto:

$$m = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3}}{x}\right] = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^4+6x^2+19x+6x^3+15}{2x^3+5x^2+5x+3} - 2x\right] = -2$$

Por lo que la asíntota es: $y = 2x - 2$, según se ilustra en la gráfica.

Corte con la asíntota:

Será la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$y - \frac{4x^4 + 6x^2 + 19x + 6x^3 + 15}{2x^3 + 5x^2 + 5x + 3} = 0$$

$$y - 2x + 2 = 0$$

La solución se muestra acontinuación, por la técnica: "**Maple+Evaluate**"

, *Solution is* : $\left\{y = -\frac{20}{3}, x = -\frac{7}{3}\right\}$

Ejemplo 6:

Calcular si existe : $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2+x-12}{(x-3)(x-4)}\right)$

Aplicando la técnica ya conocida, se obtiene:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2+x-12}{(x-3)(x-4)}\right) = \text{undefined (no existe)}$$

En efecto,según ya se demostró:

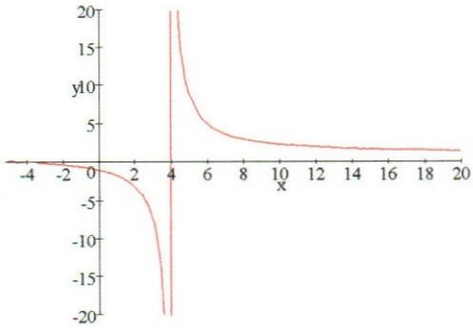
$$\frac{x^2+x-12}{(x-3)(x-4)} = \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x-4)} = \frac{(x+4)}{(x-4)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 4^-}\left(\frac{x^2+x-12}{(x-3)(x-4)}\right) = \lim_{x\to 4^-}\frac{x+4}{x-4} = -\infty \\ \lim_{x\to 4^+}\left(\frac{x^2+x-12}{(x-3)(x-4)}\right) = \lim_{x\to 4^+}\frac{x+4}{x-4} = \infty \end{array}\right\}$$

Por lo tanto :

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2+x-12}{(x-3)(x-4)}\right) = \text{undefined (No existe)}$$

- **Ilustración gráfica**:

La siguiente gráfica confirma lo aquí expuesto:



$\left(x, \frac{x^2+x-12}{(x-3)(x-4)}\right)$

- **3.4) Álgebra de límites**

Teorema 1: Si c es una constante y los límites: $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, existen, entonces:

a) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

b) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

c) $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$

d) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \bullet \lim_{x\to a} g(x)$

e) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

f) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$ donde n es un entero positivo

g) $\lim_{x\to a} c = c$

h) $\lim_{x\to a} x = a$

j) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ dode n es un entero positivo

k) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ dode n es un entero positivo .

(Si n es par, se asume que $a > 0$)

l) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ dode n es un entero positivo .

(Si n es par, se asume que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$)

m) Si f es un polinomio o una función racional y "a" pertenece al dominio de f $(a \in D_f)$, entonces ;

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

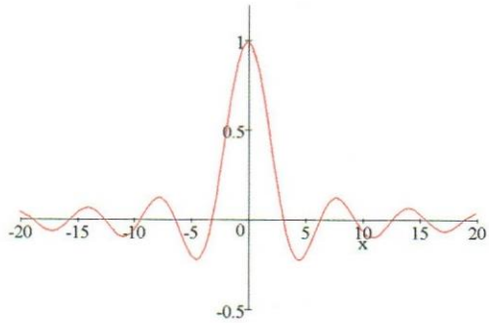
- **Teorema 2**: **Límite de una inecuación**

Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x perteneciente a un intervalo abierto que contiene a "a" (excepto posiblemente en a) y los límites de f y g existen ambos cuando x se aproxima a "a", entonces:

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

Teorema 3: **Teorema de Intercalación**

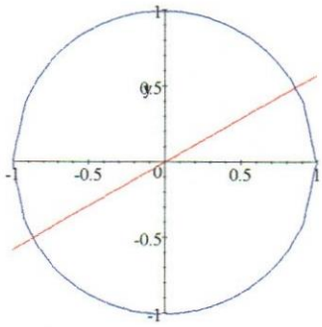
Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x perteneciente a un intervalo abierto que contiene a "a" (excepto posiblemente en "a") y además:



$\frac{\sin x}{x}$

- **Demostración a través del Teorema de Intercalación**

Consideremos el círculo trigonométrico: $x^2 + y^2 = 1$



► Evidentemente:

$$\sin x \leq x \leq \tan x \quad \text{, dividiendo por } \sin x, \quad \text{se obtiene:}$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \text{, de donde:}$$

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x \quad \Rightarrow \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Aplicando el Teorema de Intercalación a esta expresión, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \\ \lim_{x\to 0} 1 = 1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- **3.5) Límites Indeterminados y Regla de L'Hopital**

Al límite de la forma : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ cuando $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$, se le llama : Forma Indeterminda del tipo $\frac{0}{0}$. Este límite puede o no existir.

Otras formas indeterminadas son del tipo: $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \bullet \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , y 1^∞

3.5.1) Regla de L 'Hopital

Supongamos que f y g son funciones derivables tal que $\frac{d}{dx} g(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I que contiene a "a" (excepto posiblemente en "a").

$$\text{Si:} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \text{o} \\ \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \end{array} \right.$$

Entonces:

Varias formas indeterminadas provienen del siguiente límite:

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$$

a) Si: $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, se obtiene la forma: 0^0

b) Si: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, se obtiene la forma: ∞^0

c) Si: $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, se obtiene la forma: 1^∞

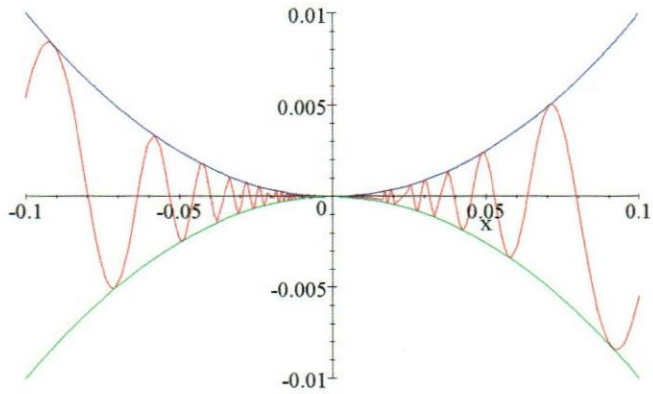
Sea : $g(x) = -x^2$ y $h(x) = x^2$, entonces: $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $\forall\, x \neq 0$

Como $g(x) = -x^2$ y $h(x) = x^2$ son funciones contínuas, se verifica que

$$\lim_{x\to o} g(x) = g(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to o} h(x) = h(0) = 0$$

por lo tanto, de acuerdo con el Teorema de Intercalación: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$

Los resultados obtenidos se ilustran en la siguiente figura:



$x^2 \sin\frac{1}{x}$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Color azul} & : f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \\ \text{Color rojo} & : h(x) = x^2 \\ \text{Color verde:} & g(x) = -x^2 \end{array}\right\}$$

- **Ejemplo 2**

Explique por qué : $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) \neq \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1}\right) - \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}\right)$

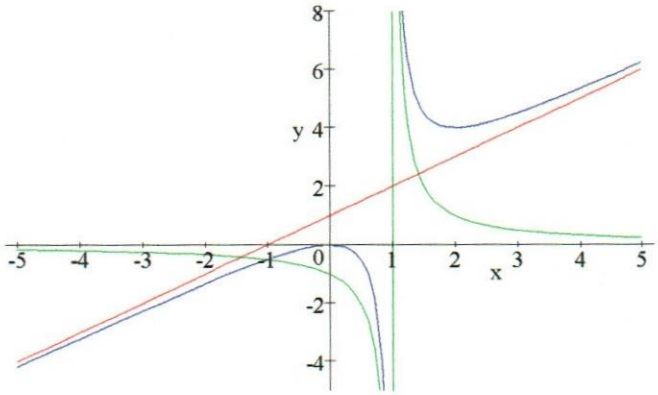
Describa cómo esta inecuación se corresponde con la expresión:

"Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen límite, entonces:

$$* \quad \lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Solución:

Aplicando la técnica ya conocida, se presenta a continuación la gráfica de las funciones: $y_1 = \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right)$ en color rojo , $y_2 = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ en color azul e $y_3 = \left(\frac{1}{x-1}\right)$ en color verde:



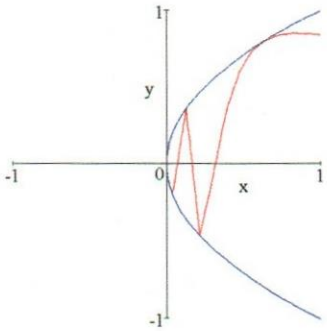
$\left(x, \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right)$

- Para graficar las funciones dadas, se ha elegido la modalidad:"**Maple+Plot 2D+Parametric**" a objeto de poder asignar color diferente a cada curva.
  La gráfica demuestra que las funciones $y_2 = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)$ e $y_3 = \left(\frac{1}{x-1}\right)$ no tienen límite cuando $x \to 1$; en consecuencia, no se cumple la hipótesis del teorema de Intercalación.
- Esto se puede demostrar analíticamente como sigue:
  $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$
  Pero:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = \text{undefined} \quad (\text{ No existe})$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \text{undefined} \quad (\text{ No existe})$$

- **Ejemplo 3**
  Estudiar el $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x}\sin x)$ e ilustrar gráficamente
  Solución:
  Aplicando la técnica ya conocida, se obtiene: $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\sin x = 0$
  Demostración:
  Aplicando el álgebra de límites, se obtiene:
  $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\sin x = \lim_{x\to 0}\sqrt{x} \bullet \lim_{x\to 0}\sin x;$
  $\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$; además: $-1 \le \sin x \le 1$ por lo tanto: $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\sin x = 0$



$y - \sqrt{x}\,\sin(\frac{1}{x}) = 0$

- **Ejemplo 4**

Estudiar el $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ e ilustrar gráficamente

Solución:

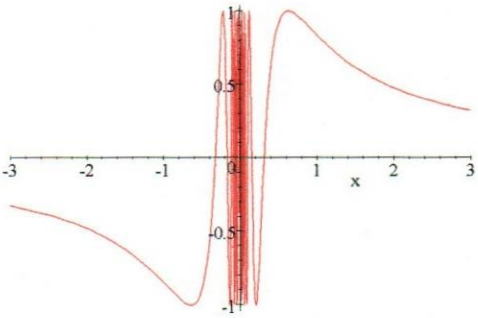
Aplicando la técnica ya conocida, se obtiene: $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = -1..1$

Demostración:

Como la función $\sin(\frac{1}{x})$ es una función acotada entre -1 y 1 se deduce, de acuerdo con el teorema de Unicidad del límite, que :

$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ no existe

La siguiente gráfica de la función $y = \sin\frac{1}{x}$ ilustra lo aquí expuesto.



$y = \sin\frac{1}{x}$

Obsérvese que en torno a $x = 0$ ocurren un número infinito de oscilaciones de amplitud 1

- **Ejemplo 5**

Estudiar el $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ e ilustrar gráficamente

Solución:

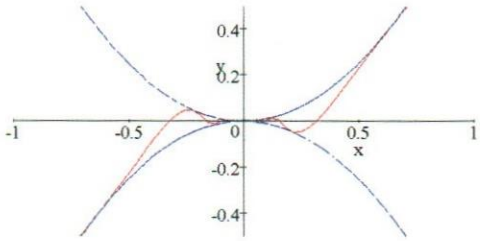
Aplicando la técnica ya conocida, se obtiene: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$

Demostración:

Aplicando el álgebra de límites, se obtiene:

$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2) \bullet \lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x})$;

$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$; además: $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$ por lo tanto: $\lim_{x\to 0}(x^2 \sin\frac{1}{x}) = 0$



$y - x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

- **Ejemplo 6**:

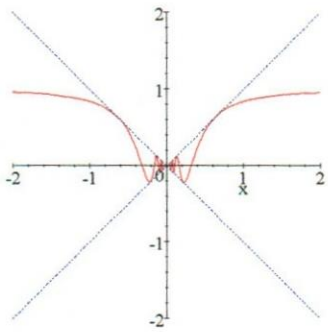
Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to 0} \; x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ e ilustrar gráficamente el resultado

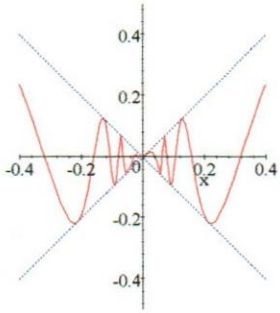
Solución:

Aplicando el método antes detallado, se obtiene: $\lim_{x\to 0} \; x \sin(\frac{1}{x}) = 0$

Comprobación gráfica:

- La gráfica de la función $y = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se muestra a continuación:





$y = x \sin \frac{1}{x}$

$D_f = [-2, 2]$ $\qquad$ $D_f = [-0.4, 0.4]$

De la gráfica se obtiene que: $f(0) = 0$

En efecto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0}(x) = 0 \\ \lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x}) = k \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(x) * \lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

- **Demostración a través del Teorema de Intercalación**

Como : $\sin \frac{1}{x} \in [-1, 1]$ se tiene que:

$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$

Aplicando el Teorema de Intercalación a esta expresión, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0}(-x) = 0 \\ \lim_{x\to 0}(x) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Por lo tanto :} \quad \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

- **Ejemplo 7**:

Calcular y evidenciar gráficamente, el valor del siguiente límite : $\lim_{x\to 1} \frac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2}$

Solución

Aplicando la técnica antes expuesta, se obtiene:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2} = \frac{1}{6}\sqrt{3}\,\pi = .9068$$

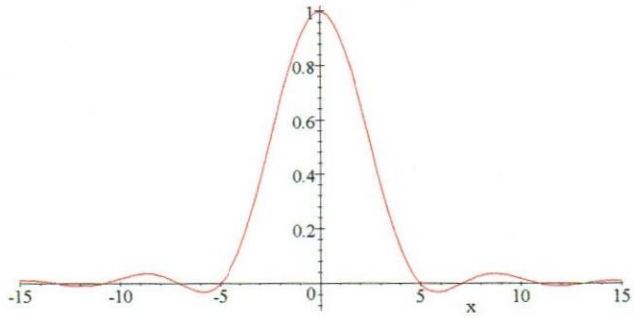
Demostración:

Como: $\lim_{x\to 1} \frac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2} \to \frac{0}{0}$, aplicando la Regla de L´Hopital, se obtiene:

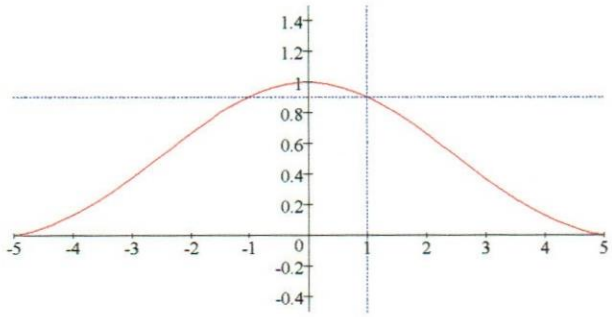
$$\lim_{x\to 1} \frac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-8\sin\frac{\pi x}{6}\bullet\cos\frac{\pi x}{6}\bullet\frac{\pi}{6}}{-2x} = \frac{4\pi}{6}\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{\pi x}{6}}{x}\bullet\cos\frac{\pi x}{6} =$$

$$= \frac{4\pi}{6}\bullet\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1}\bullet\cos\frac{\pi}{6}\,\frac{2\pi}{3}\bullet\sin 30^\circ\bullet\cos 30^\circ = \frac{2\pi}{3}\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = .9069$$

Las gráficas que se muestran a continuación, ilustran tanto la función: $y = \frac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2}$, como un detalle de la misma en torno al punto en donde se está calculando el límite $(x = 1)$



$y = \frac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2}$



$\left[x, \frac{1-4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1-x^2}\right]$

Nótese que la gráfica en torno al punto $x = 1$ ha sido obtenida parametrizando previamente la función dada, a objeto de poder trazar en el mismo sistema de coordenadas, la gráfica de la recta : $x = 1$ que, en ecuaciones parametricas, será : $[1, t]$.

Se comprueba así analítica y gráficamente que, efectivamente, si:

$$x \to 1, \text{ entonces: } \quad y \to \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = .9069$$

lo que confirma la eficiencia del método previsto en el **SCIENTIFIC NOTEBOOK** para el cálculo de límites.

- **Ejemplo 8**:

Calcular y evidenciar gráficamente, el valor del siguiente límite : $\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}$

Solución

Aplicando la técnica expuesta, se obtiene:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi} = -.63662$$

En efecto, haciendo el cambio de variable: $x-1=z \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=z+1 \\ z\to 0 \text{ si } x\to 1 \end{array}\right\}$,

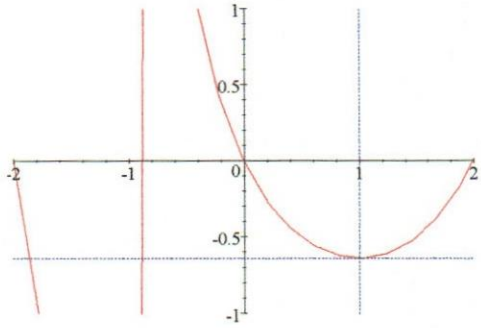
se obtiene:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{z\to 0}\left[z\tan\frac{\pi}{2}(z+1)\right] = \lim_{z\to 0} z\frac{\sin(\frac{\pi z}{2}+\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi z}{2}+\frac{\pi}{2})} =$$

$$= \lim_{z\to 0} z\left[\frac{\sin\frac{\pi z}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi z}{2}\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi z}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi z}{2}\sin\frac{\pi}{2}}\right] = \lim_{z\to 0} z\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{-\sin\frac{\pi z}{2}} = -\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\pi z}{2}}{\sin\frac{\pi z}{2}}\bullet\frac{2}{\pi} = -\frac{2}{\pi}$$

lo que confirma el resultado antes obtenido.

La ilustración gráfica correspodiente se muestra a continuación:



$$\left[x,(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}\right]$$

- **Ejemplo 9**:

Calcular si existen e ilustrar gráficamente, los siguiente límites:

9.1) $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{|2x-1|-1}$

9.2) $\lim_{x\to 1}[1-x+\lfloor x\rfloor-\lfloor 1-x\rfloor]$

9.3) $\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|+\lfloor 3-x\rfloor}{2x-6}$

9.4) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$

9.5) $\lim_{x\to 0}$

9.6) $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

9.7) $\lim_{x\to 4}\frac{\lfloor x+4\rfloor+\lfloor 3-x\rfloor}{|x-1|}$; Recuérdese que : $\lfloor x\rfloor$ =Función parte entera de x

9.8) $\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)}\frac{|2x+1|+\lfloor 2x+1\rfloor+2x+1}{2x+1}$

9.9) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}}{x^{-\frac{3}{2}}}$

9.10) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$

9.11) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

9.12) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$
9.13) $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^{x} = 1$
9.14) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Soluciones:

- **9.1)** Calcular, si existe : $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{|2x-1|-1}$

Solución:
Aplicando la técnica conocida, se obtiene:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{|2x-1|-1} = \text{undefined (No existe)}$$

Comprobación:
En efecto:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si\ \ x-1\geq 0 \Rightarrow\ x\in[1,\infty] \\ -(x-1) & si\ \ x-1<0 \Rightarrow\ x\in(-\infty,1) \end{cases}$$

$$|1-2x| = \begin{cases} 1-2x & si\ \ 1-2x\geq 0 \Rightarrow\ x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right] \\ -(2x-1) & si\ \ 2x-1<0 \Rightarrow\ x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

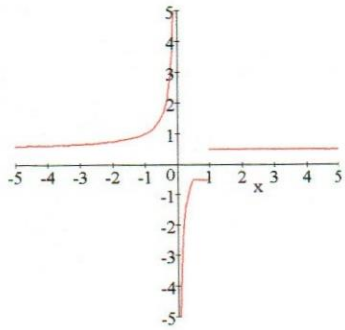
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{|2x-1|-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{(2x-1)-1} = -\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)}{2(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

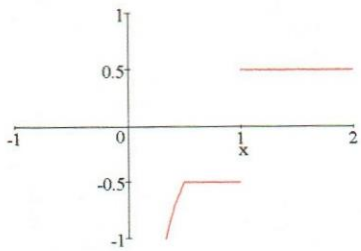
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{|2x-1|-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{2x-1-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2}$$

en consecuencia:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{|1-2x|-1} = \text{undefined}\quad(\text{no existe})$$

Ilustración gráfica:
Las siguientes gráficas ilustran este resultado:





$\frac{|x-1|}{|1-2x|-1}$

- **9.2)** Calcular, si existe : $\lim_{x\to 1}[1-x+\lfloor x\rfloor-\lfloor 1-x\rfloor]$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}[1-x+\lfloor x\rfloor-\lfloor 1-x\rfloor] = \text{undefined (no existe)}$$

Demostración:
Tomando como valor de prueba: $1^- = 0.9$ se tiene que: $\lfloor 0.9\rfloor = 0$
Tomando como valor de prueba: $1^+ = 1.1$ se tiene que: $\lfloor 1.1\rfloor = 1$
Luego, sustituyendo en la expresión dada, se obtiene:

$$\lim_{x\to 1^-}[1-x+\lfloor x\rfloor-\lfloor 1-x\rfloor] = \lim_{x\to 1^-}[1-x+\lfloor 0.9\rfloor-\lfloor 1-0.9\rfloor] =$$
$$= \lim_{x\to 1^-}[1-x+0-0] = 0$$

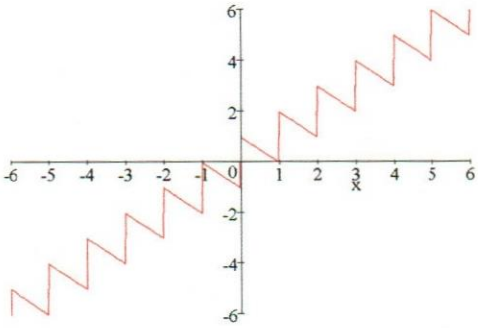
$$\lim_{x\to 1^+}[1-x+\lfloor x\rfloor-\lfloor 1-x\rfloor] = \lim_{x\to 1^+}[1-x+\lfloor 1.1\rfloor-\lfloor 1-1.1\rfloor] =$$
$$= \lim_{x\to 1^+}[1-x+1-(-1)] = 2$$

Por lo tanto:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow$

$\lim_{x\to 1}[1-x+\lfloor x\rfloor-\lfloor 1-x\rfloor] =$ undefined (no existe)

Ilustración gráfica:



$y = [1-x+\lfloor x\rfloor-\lfloor 1-x\rfloor]$

9.3) Calcular, si existe :

Solución:

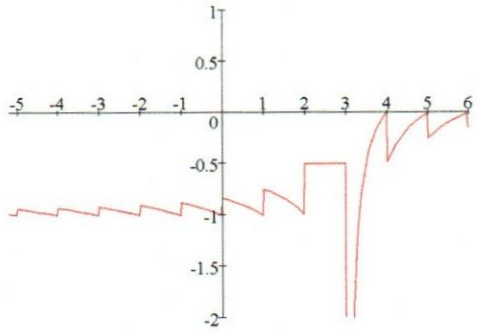
$$\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|+\lfloor 3-x\rfloor}{2x-6} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x-3|+\lfloor 3-x\rfloor}{2x-6} = -\infty$$

En consecuencia, $\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|+\lfloor 3-x\rfloor}{2x-6} =$ undefined (No existe)

Ilustración gráfica:

La siguiente gráfica confirma este resultado:



$\left(x, \frac{|x-3|+\lfloor 3-x\rfloor}{2x-6}\right)$

9.4) Calcular, si existe : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$

Solución : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{6}$

Comprobación:

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$ es de la forma : $\infty-\infty$, luego

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2(1-\cos x)}{x^2(1-\cos x)}\to\frac{0}{0}$ Aplicando la regla de L´ Hopital, reiteradamente, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2(1-\cos x)}{x^2(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2-2(1-\cos x)\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^2(1-\cos x)\right)}=$$

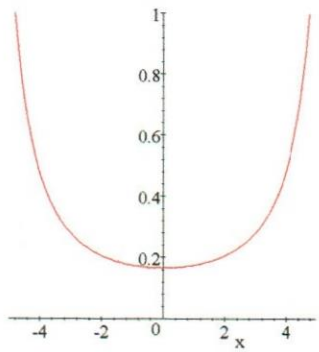
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{2x-2x\cos x+x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(2x-2\sin x)}{\frac{d}{dx}(2x-2x\cos x+x^2\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{2-2\cos x+4x\sin x+x^2\cos x}=$$

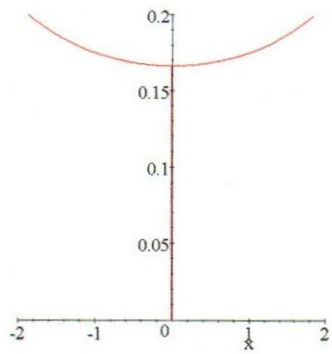
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(2-2\cos x)}{\frac{d}{dx}(2-2\cos x+4x\sin x+x^2\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{6\sin x+6x\cos x-x^2\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(2\sin x)}{\frac{d}{dx}(6\sin x+6x\cos x-x^2\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{12\cos x-8x\sin x-x^2\cos x}=\frac{1}{6}=.16667$$

Ilustración gráfica:

$\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$





9.5) Calcular, si existe : $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}$

Solución: $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}=$ undefined (No existe)

Comprobación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^2\bullet\frac{1}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-\sin^3 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^2\bullet\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x(1-\cos^3 x)}=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^2\bullet\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\bullet\frac{1}{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\bullet\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\bullet\frac{1}{(1+\cos x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2 x}\bullet\frac{1}{\sin x}\bullet\frac{\cos^3 x}{(1+\cos x+\cos^2 x)}\right\}=$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\left\{\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2 \bullet \left[\frac{x}{\sin x}\right]^2 \bullet \frac{1}{4} \bullet \left[\frac{1}{\sin x}\right] \bullet \frac{1}{(1+\cos x+\cos^2 x)}\right\} \Rightarrow$$

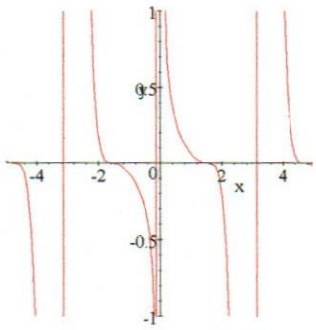
$$2\lim_{x\to 0^-}\left\{\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2 \bullet \left[\frac{x}{\sin x}\right]^2 \bullet \frac{1}{4} \bullet \left[\frac{1}{\sin x}\right] \bullet \frac{1}{(1+\cos x+\cos^2 x)}\right\} = -\infty$$

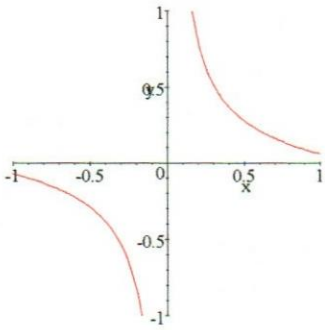
$$2\lim_{x\to 0^+}\left\{\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2 \bullet \left[\frac{x}{\sin x}\right]^2 \bullet \frac{1}{4} \bullet \left[\frac{1}{\sin x}\right] \bullet \frac{1}{(1+\cos x+\cos^2 x)}\right\} = \infty$$

en consecuencia:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x} = \text{undefined (No existe)}$$

Ilustración gráfica:





$\left[x, \frac{(1-\cos x)^2}{\tan^3 x-\sin^3 x}\right]$

- **9.6)** Calcular, si existe : $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$$

Comprobación:

Se trata de un límite de la forma: $0\bullet(\pm\infty)$

Haciendo el cambio de variable: $z = 1-x$, se obtiene: $\left\{\begin{array}{|l|}\hline x = 1-z \\ \hline z \to 0 \text{ ,cuando: } x \to 1 \\ \hline\end{array}\right.$

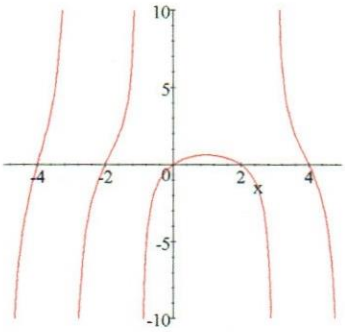
luego: $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \lim_{z\to 0} z\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2}\right) = \lim_{z\to 0}\left[z\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2}\right)}\right] =$

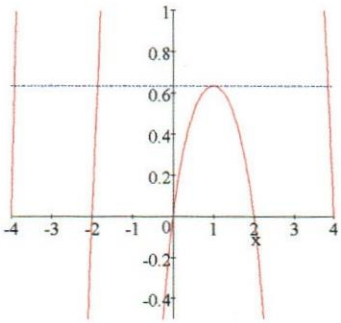
$$= \lim_{z\to 0}\left[z\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi z}{2}-\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi z}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi z}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi z}{2}}\right] = \lim_{z\to 0}\left[z\frac{\cos\frac{\pi z}{2}}{\sin\frac{\pi z}{2}}\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z\pi}{\sin\frac{\pi z}{2}} \bullet \frac{2}{\pi} \bullet \cos\frac{\pi z}{2}\right] = \frac{2}{\pi}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi} = .6366197723 7$$

Ilustración gráfica:





$(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

- **9.7)** Calcular, si existe : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$

Solución: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}} = -6$

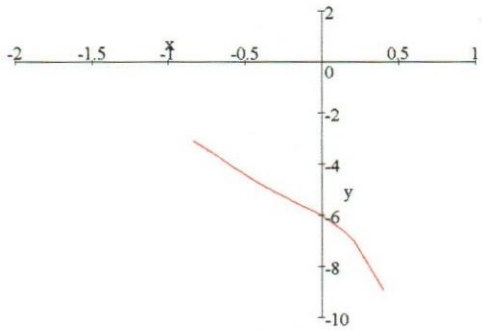
Comprobación:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}} \to \frac{0}{0}$, Aplicando la Regla de L´Hopital, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(1+3x^4)^{\frac{1}{5}}-\frac{d}{dx}(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{d}{dx}(1+x)^{\frac{1}{3}}-\frac{d}{dx}(1+x)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{5}(1+3x^4)^{-\frac{4}{5}}(12x^3)-\frac{1}{2}(1-2x)(-2)}{\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = -6$$

Ilustración gráfica:



$\left[x, \frac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}\right]$

$D_f = (-1, \frac{1}{2}]$

-
- **9.8)** Calcular, si existe: $\lim_{x\to 4}\frac{|x+4|+|3-x|}{|x-1|}$

Solución: $\lim_{x\to 4} \frac{\lfloor x+4 \rfloor + \lfloor 3-x \rfloor}{|x-1|} = 2$

Comprobación:

Dado que la función: $\lfloor x \rfloor$ es contínua en todo R, excepto para $x = n \in Z$, con Z =conjunto de los números enteros , se tomará como valor de prueba:

$$3.9 \text{ si } x \to 4^-$$
$$4.1 \text{ si } x \to 4^+$$

luego:

$$\text{Si } x \to 4^- \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lfloor x+4 \rfloor = \lfloor 3.9+4 \rfloor = 7 \\ \lfloor 3-x \rfloor = \lfloor 3-3.9 \rfloor = -1 \\ |x-1| = |4-1| = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{\lfloor x+4 \rfloor + \lfloor 3-x \rfloor}{|x-1|} = \lim_{x\to 4^-} \frac{7+(-1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Análogamente:

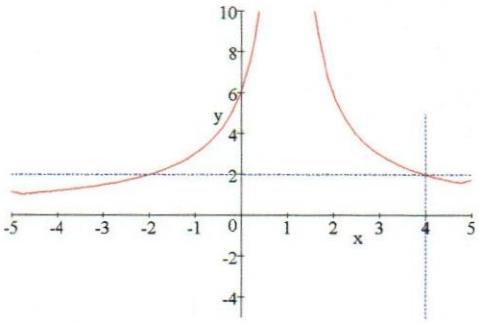
$$\text{Si } x \to 4^+ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lfloor x+4 \rfloor = \lfloor 4.1+4 \rfloor = 8 \\ \lfloor 3-x \rfloor = \lfloor 3-4.1 \rfloor = -2 \\ |x-1| = |4-1| = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{\lfloor x+4 \rfloor + \lfloor 3-x \rfloor}{|x-1|} = \lim_{x\to 4^-} \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\lfloor x+4 \rfloor + \lfloor 3-x \rfloor}{|x-1|} = 2$$

Ilustración gráfica:



$$\left[x, \frac{\lfloor x+4 \rfloor + \lfloor 3-x \rfloor}{|x-1|} \right]$$

- **9.9)** Calcular, si existe: $\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{|2x+1| + \lfloor 2x+1 \rfloor + 2x+1}{2x+1}$

Solución: $\lim_{x\to(-\frac{1}{2})} \frac{|2x+1|+\lfloor 2x+1 \rfloor+2x+1}{2x+1} = \text{undefined}$ (No existe)

Comprobación:
Aplicando la definición de Valor Absoluto, se tiene:

$$|2x+1| = \left\{ \begin{array}{ll} 2x+1 & , \; si \quad 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x+1)\,, & si \quad 2x+1 < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Por otra parte, dado que la función: $\lfloor x \rfloor$ es contínua en todo R, excepto para $x = \{n/n \in Z\}$, se tomará como valor de prueba:

$$\begin{array}{ll} -0.6 & \text{si } x \to -\left(\frac{1}{2}\right)^{-} \\ -0.4 & \text{si } x \to -\left(\frac{1}{2}\right)^{+} \end{array}$$

luego:

$$\text{Si } x \to -\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |2x+1| = -(2x+1) \\ \lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor -1.2+1 \rfloor = \lfloor -0.2 \rfloor = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

sustituyendo en la expresión dada:

$$\lim_{x\to-(\frac{1}{2})^{-}} \frac{|2x+1|+\lfloor 2x+1 \rfloor+2x+1}{2x+1} = \lim_{x\to-(\frac{1}{2})^{-}} \left[\frac{-(2x+1)+(-1)+2x+1}{2x+1} \right] =$$
$$= \lim_{x\to-(\frac{1}{2})^{-}} \left[\frac{(-1)}{2x+1} \right] = \infty$$

Análogamente:

$$\text{Si } x \to -\left(\tfrac{1}{2}\right)^{+} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |2x+1| = 2x+1 \\ \lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor -0.8+1 \rfloor = \lfloor 0.2 \rfloor = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

sustituyendo en la expresión dada:

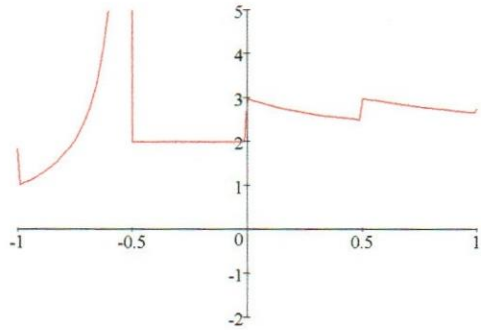
$$\lim_{x\to-(\frac{1}{2})^{+}} \left[\frac{|2x+1|+\lfloor 2x+1 \rfloor+2x+1}{2x+1} \right] = \lim_{x\to-(\frac{1}{2})^{+}} \left[\frac{(2x+1)+(0)+2x+1}{2x+1} \right] =$$

$$\lim_{x\to-(\frac{1}{2})^{+}} \left[\frac{2(2x+1)}{2x+1} \right] = 2$$

En cosecuencia: $\lim_{x\to-(\frac{1}{2})^{-}} f(x) \neq \lim_{x\to-(\frac{1}{2})^{+}} f(x) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})} \left[\frac{|2x+1|+\lfloor 2x+1 \rfloor+2x+1}{2x+1} \right] = \text{undefined} \quad \text{(No existe)}$$

Ilustración gráfica:



$\left[x, \frac{|2x+1|+\lfloor 2x+1 \rfloor+2x+1}{2x+1}\right]$

-

- **9.10)** Calcular, si existe : $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$

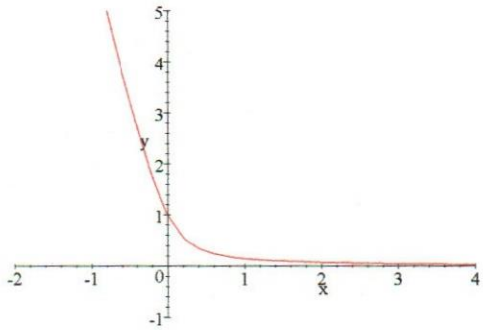
  Solución: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right) = 0$

  Comprobación:

  $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right) \to \infty-\infty \Rightarrow$

  $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+1-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x} = 0$

  Ilustración gráfica:



$\sqrt{9x^2+1}-3x$

-

- **9.11)** Calcular, si existe : $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ e ilustrar gráficamente.

  Solución: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459045235 4...$

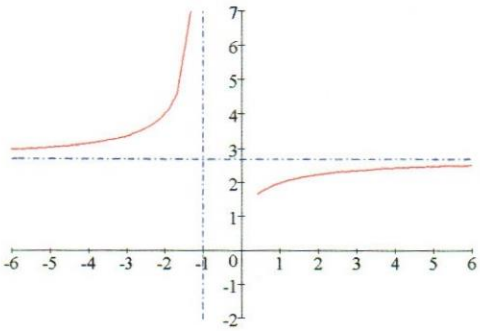
  Comprobación:

  $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x \to 1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e^{\lim_{x\to\infty} x\left[1+\frac{1}{x}-1\right]} = e^{\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]} \Rightarrow$

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e^{\lim_{x\to\infty} 1} = e = 2.7183...$

Ilustración gráfica:

Asíntota horizontal: $y = e = 2.7183...$



$[x, (1+\frac{1}{x})^x]$

$R_f = (1, e) \cup (e, \infty)$
$D_f = R - [-1, 0]$

Nótese que la curva :

i) Tiene una asíntota vertical en : $x = -1$, pues: $\lim_{x\to -1^-}(1+\frac{1}{x})^x = \infty$

ii) Tiene una asíntota horizontal en : $y = e$, pues: $\begin{cases} \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e \\ \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e \end{cases}$

iii) No está definida para : $x \in [-1, 0]$

9.12) Calcular , si existe : $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x$, e ilustrar gráficamnte.

Solución: $\begin{cases} \lim_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})^x = 1 \\ \lim_{x\to 0^-}(1+\frac{1}{x})^x \text{ no existe, pues la función no está} \\ \qquad \text{definida para } x \in [-1, 0] \end{cases}$

En consecuencia:

$\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x$ no existe

Comprobación:

$\lim_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})^x \to \infty^0 \Rightarrow$

Haciendo: $y = (1+\frac{1}{x})^x \Rightarrow$ se obtiene : $\ln y = x\ln(1+\frac{1}{x})^x$

Aplicando límite a ambos lados de esta ecuación, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0^+}[\ln y] = \lim_{x\to 0^+}[x\ln(1+\frac{1}{x})] = 0$$

en consecuencia:

$$\ln[\lim_{x\to 0^+} y] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$$

Pero:

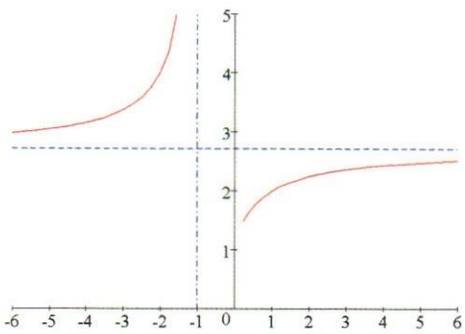
$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+\tfrac{1}{x})^x = 1$$

Por otra parte:

$\lim_{x\to 0^-}(1+\frac{1}{x})^x$ no existe, por las razones arriba expuestas, por lo que:

$\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x$ no existe

Ilustración gráfica:



$[x, (1+\frac{1}{x})^x]$

• **9.13)** Calcular, si existe : $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, e ilustrar gráficamente.

Solución: $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

Comprobación:

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \infty^0 \ ;$$

Haciendo: $y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$, se obtiene:

$$\ln y = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Aplicando límite a ambos lados de esta ecuación,

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln y] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right] \to \frac{\infty}{\infty}$$

luego, aplicando la Regla de L´Hopital, se obtiene:

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln y] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x} = 0$$

Luego:

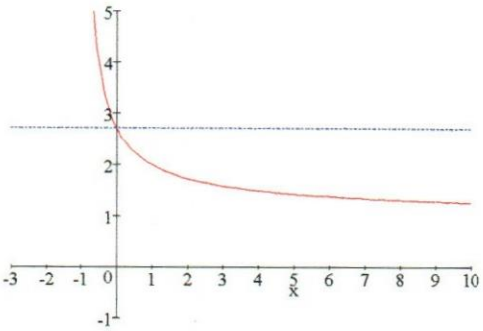
$$\ln(\lim_{x\to+\infty} y) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y = e^0 = 1$$

Pero:

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$$



$(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$D_f = (-1, \infty)$

CAPÍTULO IV

BERNOULLI

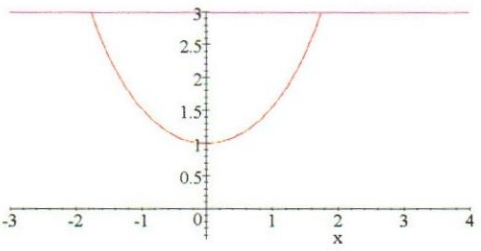
En el siglo XVIII, la notable familia suiza Bernoulli fue para las Matemáticas lo mismo que Bach fue para la música. Ocho distintos Bernoulli fueron lo bastante importantes para que dos siglos más tarde fueran considerados en el *Dictionary of Scientific Biography*. Los hermanos James y John jugaron un papel crucial en los primeros desarrollos de la versión de Leibniz del Cálculo Diferencial.

John estudió matemáticas con su hermano, el maestro geómetra James, en la universidad suiza de Basilea, pero pronto la comprensión de las matemáticas de ambos se equiparó. En 1691, John Bernoulli visitó París y conoció al joven marqués de L´Hôpital, quien estaba ansioso por aprender los secretos del nuevo cálculo infinitesimal. Como respuesta a un generoso apoyo mensual, John trabajó como tutor de L'Hôpital y como resultado de esta tutoría, L'Hôpital publica en 1696 el primer libro de texto sobre Cálculo Diferencial, libro que se recuerda fundamentalmente por incluir un resultado de Bernoulli conocido como "Regla de L'Hôpital", regla ampliamnete conocida por todo estudiante de cálculo elemental y que se refiere al límite cuando $x \to a$ de un cociente $f(x)/g(x)$ cuyo numerador y denominador tienden a cero cuando $x \to a$, lo que origina la " forma indeterminada 0/0" cuando x=a.

James y John resolvieron el "problema de la catenaria", que consiste en determinar la forma que adopta un cable colgante suspendido entre dos puntos fijos, suponiendo que el cable es perfectamente flexible y no elástico. Los hermanos Bernoulli demostraron que dicho cable adopta la forma de una catenaria de acuación :

$$y = \cosh(\tfrac{x}{a})$$

cuya gráfica se muestra a contrinuación:



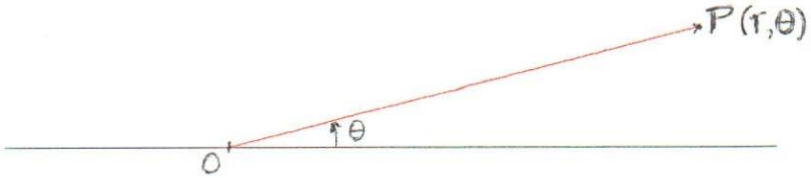
$\cosh(\tfrac{x}{a})$

John Bernoulli, formuló en 1701 el problema de la Braquistócrona : encontrar la curva a lo largo de la cual una partícula se deslizará en el mínimo tiempo posible (bajo la influencia de la gravedad), de un punto A a un punto inferior B no situado directamente debajo de A. Dicho problema fue lanzado como reto a los sabios del mundo, costumbre muy

CAPÍTULO IV

4) GRÁFICAS EN COORDENADAS POLARES

Para construir un Sistema de Coordnadas Polares en el plano, se fija un punto "O" llamado "Polo" (u origen), y se traza desde "O" un rayo inicial llamado "Eje Polar"



Origen (Polo) Eje Polar

Entonces, cada punto P puede ser representado por el par ordenado (r,θ), donde:

r = distancia dirigida desde el origen "O" hasta el punto P

θ = ángulo dirigido, en sentido antihorario, del eje polar al segmento $\overline{OP}$.

En general, un punto (r,θ) puede representarse como:

$$(r,\theta) = (r,\theta + 2n\pi) \quad , \qquad \text{o como}$$

$$(r,\theta) = [-r,\theta + (2n+1)\pi]$$

siendo n igual a un entero arbitrario.

Además, el polo está representado por $(0,\theta)$, donfe: $\theta =$ cualquir ángulo.

4.1) Cambio de coordenadas rectangulares a polares

Las coordenadas polares (r,θ) de un punto P están relacionadas con sus coordenadas rectángulares (x,y) , por:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$\tan\theta = \tfrac{y}{x}$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

4.2) Gráficas en coordenadas polares

Para graficar una curva en coordenadas polares usando el **SCIENTIFIC NOTEBOOK**, se sigue el siguiente procedimiento:

a) En el modo Matemáticas (icono M activado) se escribe la ecuación

$$r = f(\theta)$$

b) Con el cursor a la derecha de la expresión, se selecciona: "**Maple+Plot 2D+Polar**".

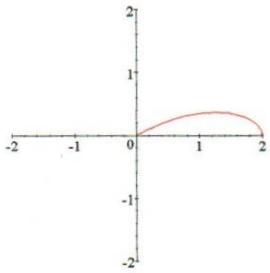
El resultado será la gráfica de la curva : $r = f(\theta)$

Ejemplo 1:

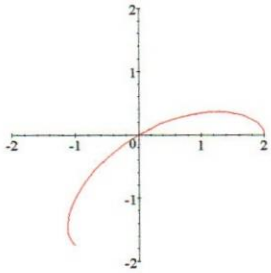
Representar la gráfica de la curva : $r = 2\cos 3\theta$

Solución:

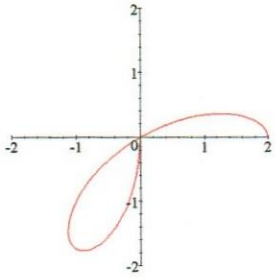
Se presenta a continuación la descripción de la gráfica de $r = 2\cos 3\theta$, para valores crecientes de la variable θ



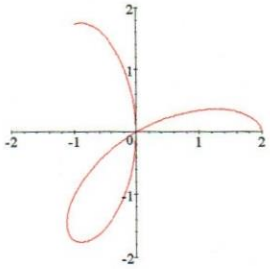
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$



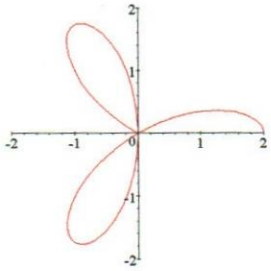
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$



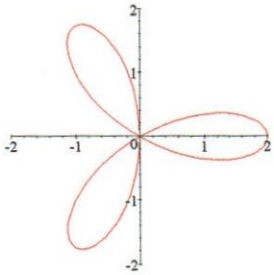
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



$0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$



$0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$



$0 \leq \theta \leq \pi$

NOTA : Si se hace variar θ de 0 a 2π , lo que ocurre es que la curva se recorre dos veces.

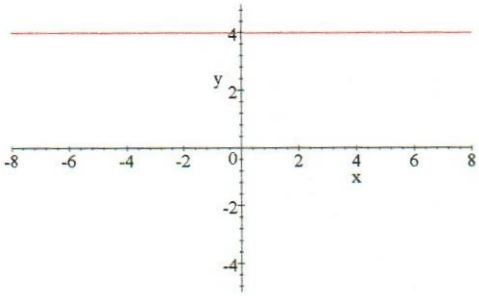
Ejemplo 2:

Recta horizontal: $y = k$; $k =$ constante

Pasando a coordenadas polares, se obtiene: $r\sin\theta = k$, de donde:

$$r = \frac{k}{\sin\theta} = k\csc\theta$$

Se ilustra a continuación el caso $k = 4 \Rightarrow \quad r = 4\csc\theta$



$r = 4\csc\theta$

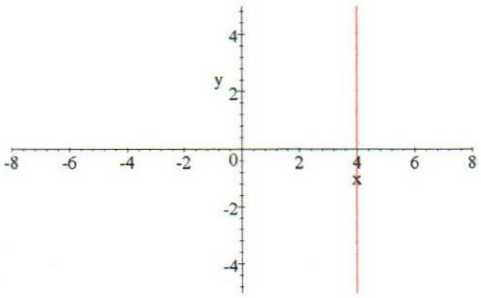
Ejemplo 3:

Recta vertical: $x = k$; $k =$ constante

Pasando a coordenadas polares, se obtiene: $r\cos\theta = k$, de donde:

$$r = \frac{k}{\cos\theta} = k\sec\theta$$

Se ilustra a continuación el caso $k = 4 \Rightarrow \quad r = 4\sec\theta$



$r = 4\sec\theta$

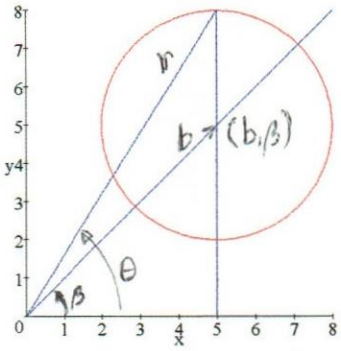
Ejemplo 4:

Circunferencia de radio R **y centro** (b, β)

Aplicando el teorema del coseno , se obtiene:

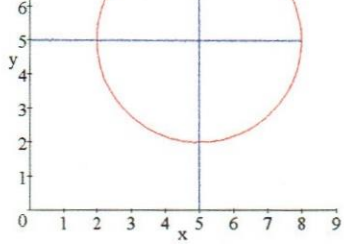
$$R^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos(\theta - \beta) \quad \text{de donde:}$$

$$r = b\cos(\theta - \beta) \pm \sqrt{(b^2\cos^2(\theta - \beta) + R^2 - b^2)}$$



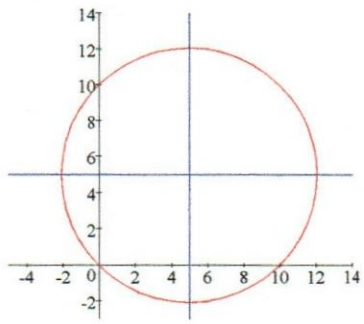
Centro(b, β) ; Radio $= R$

Si $\left\{ \begin{array}{l} \text{Centro}\left(5\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \\ \text{Radio} = 3 \end{array} \right\}$, la gráfica correspondiente será:



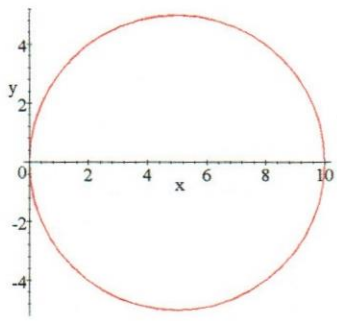
Centro$(5,5)$; Radio $= 3$

- Si la circunferencia pasa por el origen : $R = b \Rightarrow r[r - 2b\cos(\theta - \beta)] = 0$
  de donde: $r = 2R\cos(\theta - \beta)$
  Para el ejemplo anterior, $r = 5\sqrt{2} \Rightarrow r = 10\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$
  La gráfica correspondiente será:



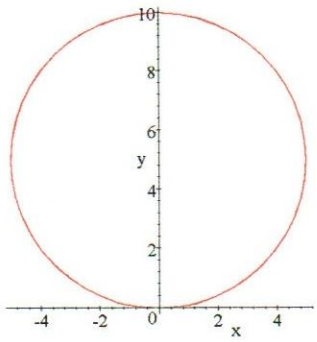
$r = 10\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

- Si $\beta = 0$, la ecuación se reduce a : $r = 2R\cos\theta$
  En el ejemple bajo estudio :$R = 5$ por lo que la gráfica correspondiente será:



$r = 10\cos\theta$

- Si $\beta = \frac{\pi}{2}$, la ecuación se reduce a : $r = 2R\sin\theta$
  En el ejemple bajo estudio :$R = 5$ por lo que la gráfica correspondiente será:



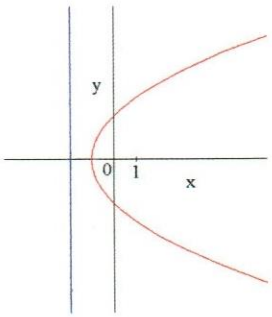
$r = 10\sin\theta$

4.3) Cónicas en coordenadas polares

a) Parábola

Dada una parábola, consideremos como eje x el eje de la parábola y como polo el foco de la misma. Supongamos además que la parábola está abierta hacia la derecha y que la directriz es la recta L de ecuación: $x = -p$, donde $p > 0$ es la distancia del foco a la directriz. De acuerdo con la definición, se debe cumplir que:

Distancia de P a F = Distancia de P a L, por lo que:



Foco$(0,0)$; Directriz:$x = -p$

Por lo que:

$|r| = |p + r\cos\theta|$ de donde: $\pm r = p + r\cos\theta \Rightarrow$

$$r = \frac{p}{1-\cos\theta} \quad \vee \quad r = -\frac{p}{1-\cos\theta}$$

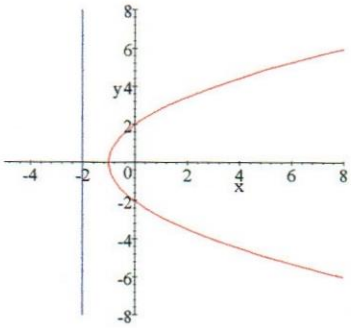
Se puede probar que estas dos ecuaciones representan la misma curva.

De manera análoga se puede obtener las ecuaciones de las parábolas abiertas hacia la izquerda, hacia arriba o hacia abajo.

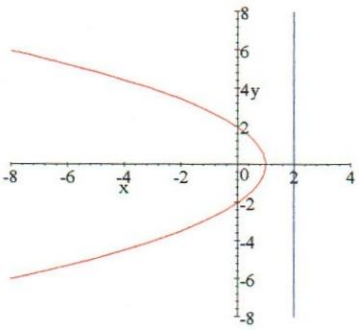
En resumen se tiene:

Abierta hacia	Parábola	Foco	Directriz	Vértice (Polares)
Arriba	$r = \frac{p}{1-\sin\theta}$	$(0,0)$	$y = -p$	$\left(\frac{p}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
Abajo	$r = \frac{p}{1+\sin\theta}$	$(0,0)$	$y = p$	$\left(\frac{p}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
Derecha	$r = \frac{p}{1-\cos\theta}$	$(0,0)$	$x = -p$	$\left(\frac{p}{2}, \pi\right)$
Izquierda	$r = \frac{p}{1+\cos\theta}$	$(0,0)$	$x = -p$	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

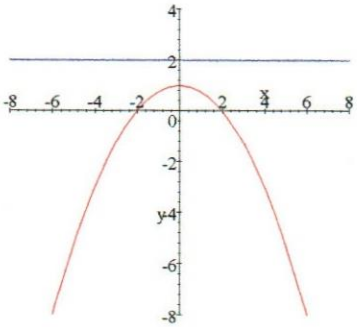
Las gráficas correspondientes, para $p = 2$, se muestran a continuación:



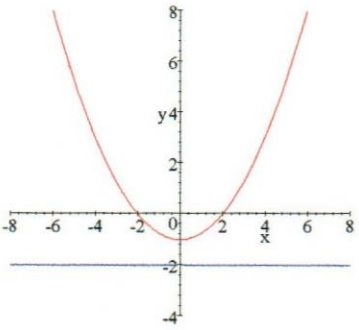
$r = \frac{2}{1-\cos\theta}$



$r = \frac{2}{1+\cos\theta}$



$r = \frac{2}{1+\sin\theta}$



$r = \frac{2}{1-\sin\theta}$

4.4) Excentricidad y coordenadas polares

hemos definido la parábola como el conjunto de puntos P del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija L llamada directriz. En consecuencia, la parábola verifica que:

$$\frac{\textbf{Distancia de P a F}}{\text{Distancia de P a L}} = \mathbf{1}$$

Esta forma de definir la parábola no es otra cosa que un caso particular de la siguiente caracterización de las cónicas:

Si F es un punto y L una recta del plano,el conjunto de los puntos P del plano que verifican

$$\frac{\textbf{Distancia de P a F}}{\textbf{Distancia de P a L}} = \varepsilon$$

con $\varepsilon = constante$, **es una cónica**.

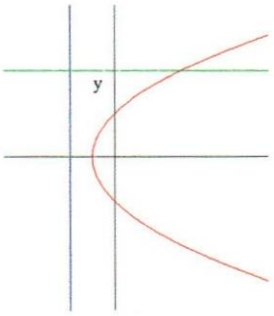
Además, la cónica es una:

$$\begin{array}{lll} \textit{Elipse} & si & \varepsilon < 1 \\ \textit{Parábola} & si & \varepsilon = 1 \\ \textit{Hipérbola} & si & \varepsilon > 1 \end{array}$$

Al número ε así definido se le llama Excentricida de la cónica.

4.5) Ecuación polar de las cónicas

Se presenta a continuación, la ecuación polar de la cónica de excentricidad ε, con foco en el origen (polo) y directriz la recta: $x = -p$



Foco$(0,0)$; Directriz: $x = -p$

Si $P(r,\theta)$ es un punto de la cónica en polares, se tiene:

$$\varepsilon = \frac{\textbf{Distancia de P a F}}{\text{Distancia de P a L}} = \frac{r}{p + r\cos\theta} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Resolviendo esta ecuación en r se obtiene la ecuación polar:

$$r = \frac{p \bullet \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

Como $0 < \varepsilon < 1$, entonces : $\varepsilon\cos\theta \neq 1$

De forma análoga, si la directriz es $x = p$, $y = p$ o $y = -p$ la ecuación respectiva es:

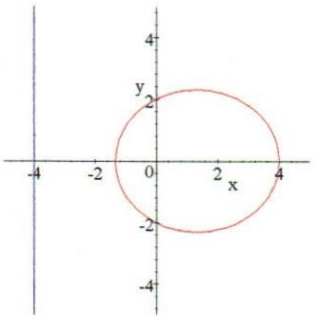
$$\mathbf{r} = \frac{p \bullet \varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\theta} \;,\; \mathbf{r} = \frac{p \bullet \varepsilon}{1 + \varepsilon\sin\theta} \;,\; r = \frac{p \bullet \varepsilon}{1 - \varepsilon\sin\theta}$$

Las siguiente figuras ilustran estos criterios de cónicas

a) Elipses: $\varepsilon < 1$

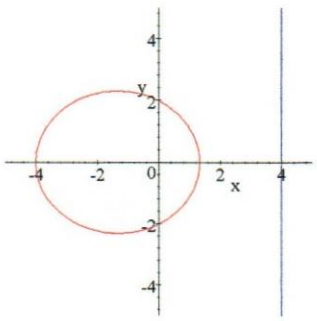
$$\text{Supongámos: } \left\{ \begin{array}{l} p = 4 \\ \varepsilon = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow r = \frac{4 \bullet \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta} = \frac{4}{2 - \cos\theta}$$

a.1) Directriz: $x = -4$ **a.2) Directriz**: $x = 4$



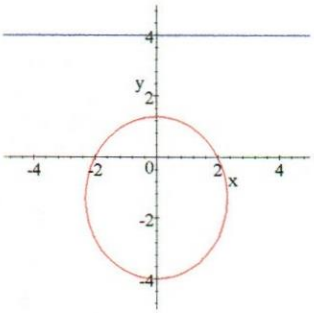
$r = \frac{4}{2-\cos\theta}$

a.3) **Directriz**: $y = 4$

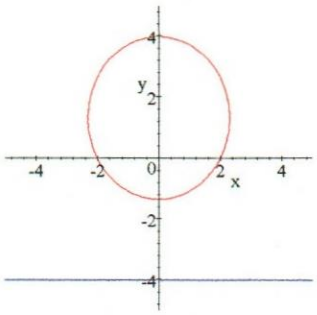


$r = \frac{4}{2+\cos\theta}$

a.4) **Directriz**: $y = -4$



$r = \frac{4}{2+\sin\theta}$



$r = \frac{4}{2-\sin\theta}$

b) **Hipérbola**: $\varepsilon > 1$

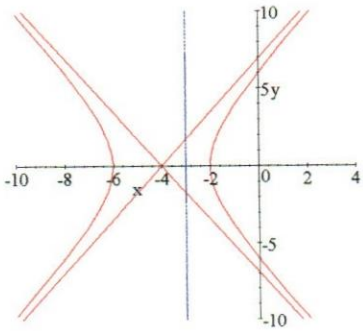
Supongámos: $\left\{ \begin{array}{l} p = 3 \\ \varepsilon = 2 \end{array} \right\}$ Así se obtiene: $r = \frac{3 \bullet 2}{1-2\cos\theta} = \frac{6}{1-2\cos\theta}$ o también:

$r = \frac{6}{1+2\cos\theta}$; $r = \frac{6}{1-2\sin\theta}$; $r = \frac{6}{1+2\sin\theta}$

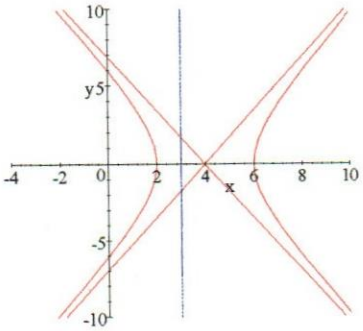
Las siguientes gráficas ilustran estos resultados

b.1) **Directriz**: $\mathbf{x = -3}$

b.2) **Directriz**: $\mathbf{x = 3}$

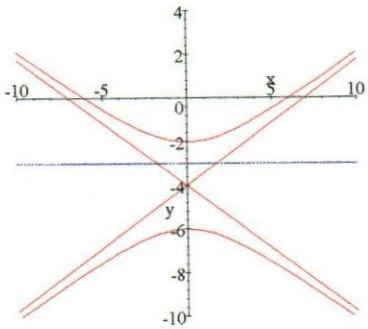


$r = \frac{6}{1-2\cos\theta}$



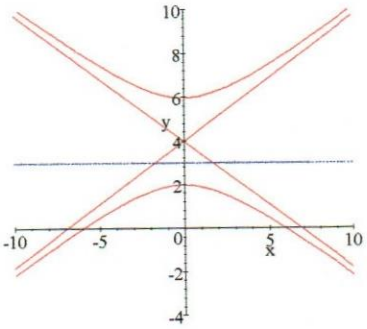
$r = \frac{6}{1+2\cos\theta}$

b.3) Directriz: y = –3



$r = \frac{6}{1-2\sin\theta}$

b.4) Directriz: y = 3



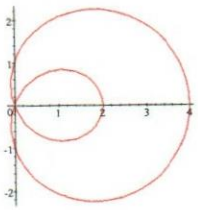
$r = \frac{6}{1+2\sin\theta}$

4.6) Resumen de curvas en coordenadas polares

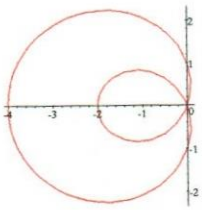
Se presenta a continuacióm un resumen de importantes gráficas cuyas ecuaciones son más sencillas en forma polar que en forma rectangular

a) Caracoles: $r = a \pm b\cos\theta$ o $r = a \pm b\sin\theta$

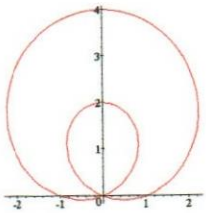
Caso 1: $\frac{a}{b} < 1$ → caracol con bucle interior:



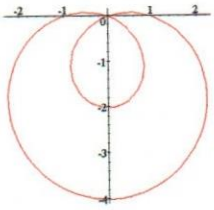
$r = 1 + 3\cos\theta$



$r = 1 - 3\cos\theta$

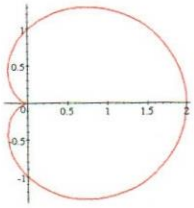


$r = 1 + 3\sin\theta$

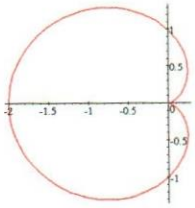


$r = 1 - 3\sin\theta$

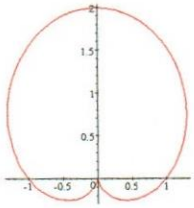
Caso 2: $\frac{a}{b} = 1$ → Cardioide:



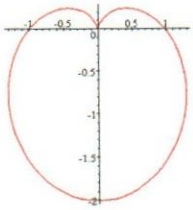
$r = 1 + 1\cos\theta$



$r = 1 - 1\cos\theta$

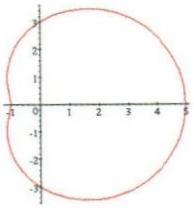


$r = 1 + 1\sin\theta$

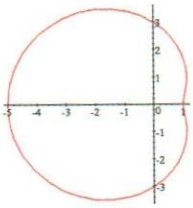


$r = 1 - 1\sin\theta$

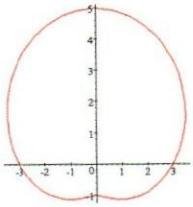
Caso 3: $1 < \frac{a}{b} < 2$ $\rightarrow$ Caracol con hoyuelo:



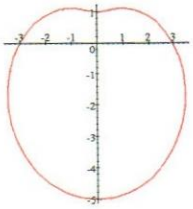
$r = 3 + 2\cos\theta$



$r = 3 - 2\cos\theta$

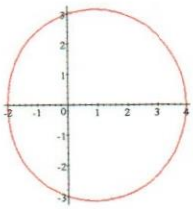


$r = 3 + 2\sin\theta$

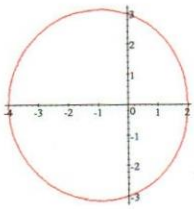


$r = 3 - 2\sin\theta$

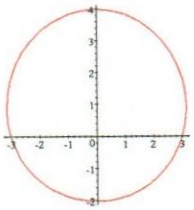
Caso 4): $\frac{a}{b} \geq 2$ $\rightarrow$ Caracol convexo:



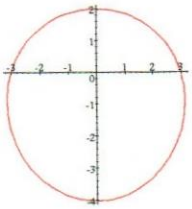
$r = 3 + 1\cos\theta$



$r = 3 - 1\cos\theta$



$r = 3 + 1\sin\theta$



$r = 3 - 1\sin\theta$

b) **Rosas**: $r = a\cos n\theta$ o $r = a\sin n\theta$

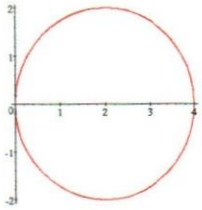
donde:

a = longitud de cada pétalo

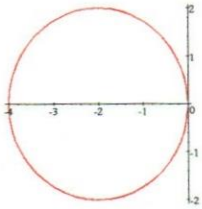
n = N° de pétalos, si $n = impar$

$2n$ = N° de pétalos, si $n = par$

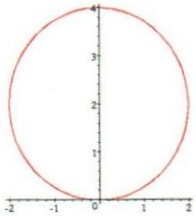
Caso 1: $r = 4\cos\theta$ o $r = 4\sin\theta \rightarrow$ un pétalo circular:



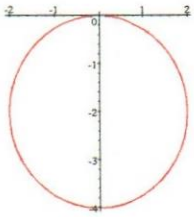
$r = 4\cos\theta$



$r = -4\cos\theta$

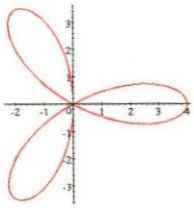


$r = 4\sin\theta$

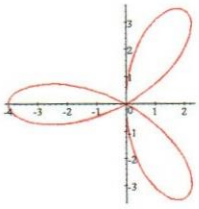


$r = -4\sin\theta$

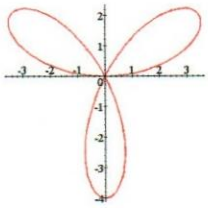
Caso 2: $r = 4\cos 3\theta$ o $r = 4\sin\theta \rightarrow$ rosa con 3 pétalos :



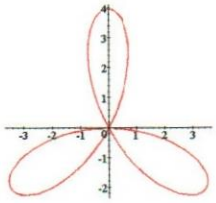
$r = 4\cos 3\theta$



$r = -4\cos 3\theta$

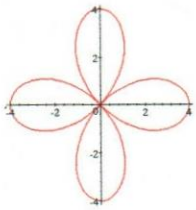


$r = 4\sin 3\theta$

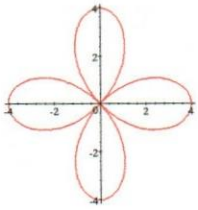


$r = -4\sin 3\theta$

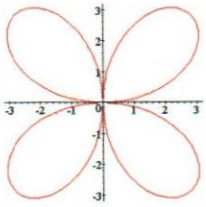
Caso 3: $r = 4\cos 2\theta$ *o* $r = 4\sin 2\theta \rightarrow$ rosa con 4 pétalos :



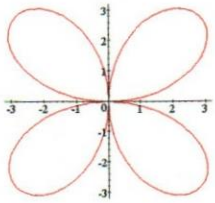
$r = 4\cos 2\theta$



$r = -4\cos 2\theta$



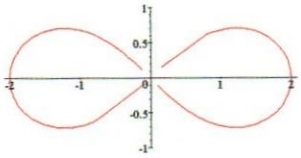
$r = 4\sin 2\theta$



$r = -4\sin 2\theta$

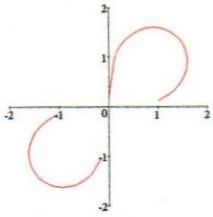
c) **Lemniscatas**: $r^2 = a^2\cos 2\theta$ o $r^2 = a^2\cos 2\theta$

Caso 1 : $r^2 = 4\cos 2\theta$; **Caso 2**: $r^2 = 4\sin 2\theta$



$\sqrt{4\cos 2\theta}$

$r^2 = 4\cos 2\theta$



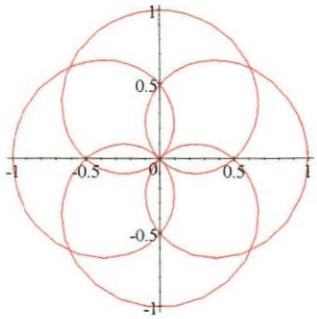
$\sqrt{4\sin 2\theta}$

$r^2 = 4\sin 2\theta$

d.) Las rosas descritas en el caso b), son de la forma $r = \cos a\theta$ o $r = \sin a\theta$, donde a es un entero igual o mayor que 2.

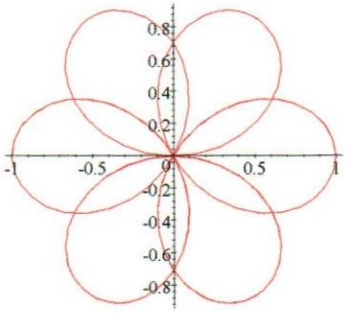
Se presenta a continuación la gráfica para valores no enteros de a

Ejemplo 1: $r = \cos \frac{2}{3}\theta$, para $0 \leq \theta \leq 6\pi$



$r = \cos \frac{2}{3}\theta$

Ejemplo 2: $r = \cos \frac{3}{2}\theta$, para $0 \leq \theta \leq 6\pi$



$r = \cos \frac{3}{2}\theta$

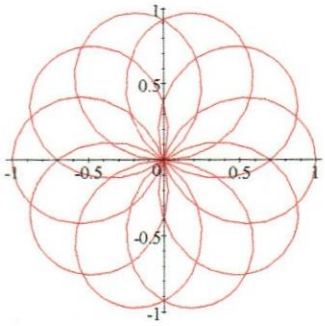
Ejemplo 3:

Graficar: a) $r = \sin \frac{5\theta}{4}$; b) $r = \sin \frac{7\theta}{4}$; c) $r = \sin \frac{9\theta}{4}$

para $0 \leq \theta \leq 8\pi$

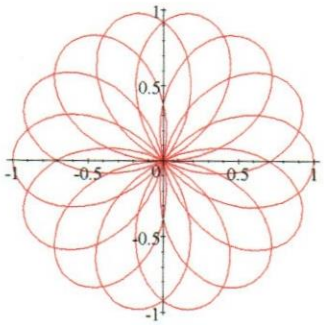
Solución:

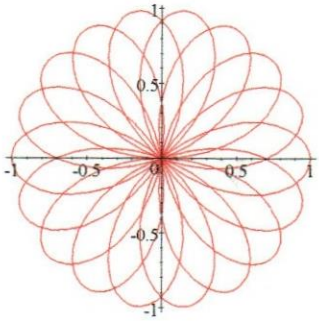
3.a) $r = \sin \frac{5\theta}{4}$



3.b) $r = \sin \frac{7\theta}{4}$

3.c) $r = \sin \frac{9\theta}{4}$

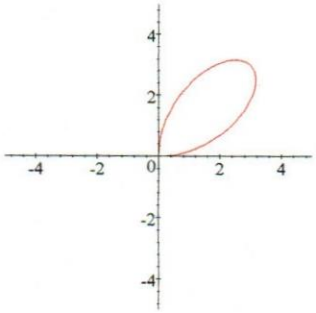




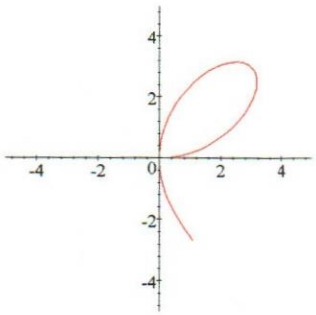
4.7) Otras curvas en polares

a) El "folium de Descartes" : $r = \frac{6\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}$

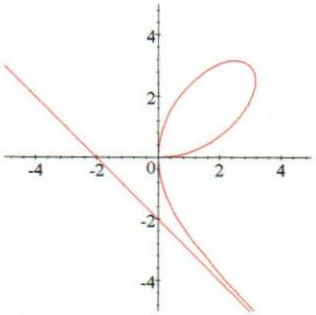
Se muestra a continuación la generación de "folium de Descartes", en función del ángulo θ , para : $0 \leq \theta \leq \pi$



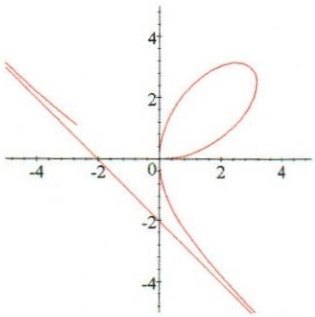
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



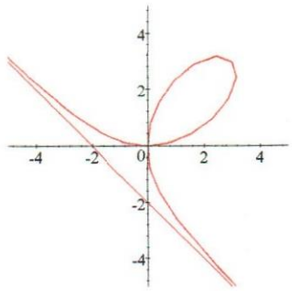
$0 \leq \theta \leq \frac{5\pi}{8}$



$0 \leq \theta \leq \frac{6\pi}{8}$

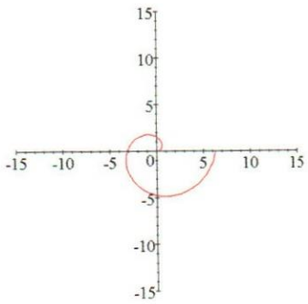


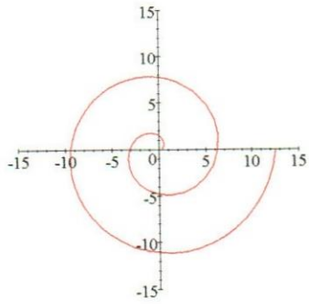
$0 \leq \theta \leq \frac{7\pi}{8}$



$0 \leq \theta \leq \pi$

b) $r = \theta$





$o \leq \theta \leq 2\pi$ $\qquad$ $o \leq \theta \leq 4\pi$

Nótese que :

si $\theta = 0 \Rightarrow r = 0$

el radio vector gira alrededor del origen y crece cuando θ crece, tendiendo a ∞ cuando $\theta \to \infty$.

c) Estudio de la curva: $r\theta = k$, con k =constante mayor que cero

Solución:

Como $r = \frac{k}{\theta}$ e $y = r\sin\theta \Rightarrow y = \frac{k}{\theta}\sin\theta$, por lo que:

$\lim_{\theta\to 0}(y) = \lim_{\theta\to 0}\left(k \bullet \frac{\sin\theta}{\theta}\right) = k$; en cosecuencia:

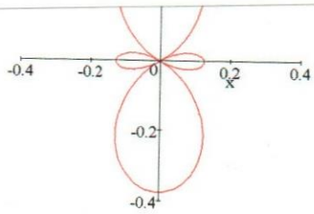
la recta $y = k$ es una asíntota a la curva.

El radio r gira alrededor del origen y decrece cuando θ crece.

Un punto P describe una espiral que se arrolla alrededor del origen, tendiendo r a cero cuando θ tiende a ∞.

Evidentemente, si se sustituye (r,θ) por $(-r,-\theta)$ la ecuación dada no se altera, por lo que existe simetría respecto del origen.

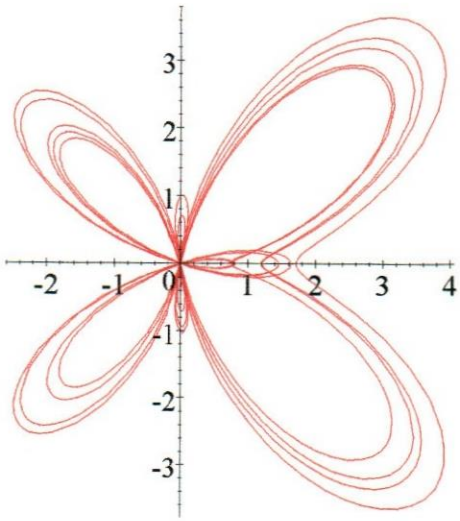
La gráfica será la espiral hiperbólica que se muestra a continuación, para $k = 6$



$r = \frac{4\sin^2\theta - 1}{8}$

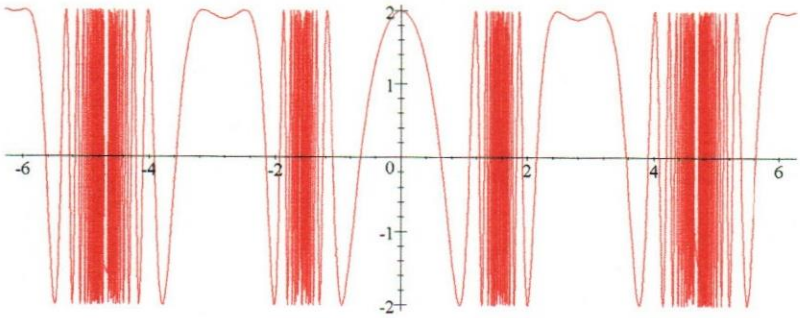
e) La curva Mariposa: $r = e^{\cos\theta} - 2\cos 4\theta + \sin^5\frac{\theta}{12}$

Se presenta a continuación la generación de la curva denominada "mariposa", en función de los distintos valores de θ.



$0 \leq \theta \leq 9\pi$

f) La Astrofoide: $r = 2\cos\theta(\sec\theta)$



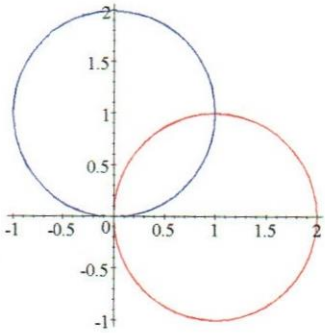
$2\cos 2\theta(\sec\theta)$

Osérvese que en torno a $\theta = \frac{2k+1}{2}\pi$, con $k \in Z$, ocurre un número infinito de oscilaciones de amplitud 2 unidades.

4.8) Intersección de curvas en polares

Al contrario de lo que curre en coordenadas cartesianas, en coordenadas polares no hay correspondencia biunívoca entre los pares de números (r, θ) que satisfacen las ecuaciones de dos o más curvas que se intersectan.
Por esta razón, la intersección de curvas en polares debe incluir la representación gráfica de las mismas

Ejemplo 1: Intersección de : $r = 2\cos\theta$ y $r = 2\sin\theta$
Solución : $2\cos\theta = 2\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$



De la gráfica de ambas curvas se deduce que:

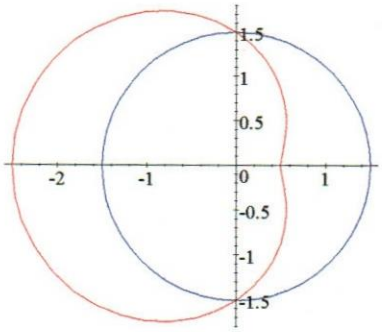
a) La solución : $\theta = \frac{5\pi}{4}$ no pertenece a las curvas bajo estudio.

b) El punto $(0,0)$ no se obtiene por solución simultánea de las ecuaciones dadas.

En consecuencia, los puntos de intersección son:

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow P_1\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \\ r = 0 \Rightarrow \qquad\qquad\qquad\qquad P_2\,(0,\theta) \end{cases}$$

Ejemplo 2: Intersección de : $r = \frac{3}{2} - \cos\theta$ y $r = \frac{3}{2}$



$r = \frac{3}{2} - \cos\theta$

Los puntos solución del sistema son: $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$

$$\mathrm{P}_1\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad \mathrm{P}_2\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right)$$

Ejemplo 3: Encontrar los puntos de intersección de los pares de curvas dadas por las ecuaciones:

$$a)\ \begin{cases} r = 1 + \cos\theta \\ r = 1 - \cos\theta \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} r = 1 + \sin\theta \\ r = 1 - \sin\theta \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} r = 2\sin\theta \\ r = 2\sin 2\theta \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} r = \cos\theta \\ r = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ r^2 = 4\sin\theta \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} r^2 = \sqrt{2}\sin\theta \\ r^2 = \sqrt{2}\cos\theta \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} r = 1 \\ r^2 = 2\sin 2\theta \end{cases} \qquad h)\ \begin{cases} r^2 = \sqrt{2}\cos\theta \\ r^2 = \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$$

Solución:

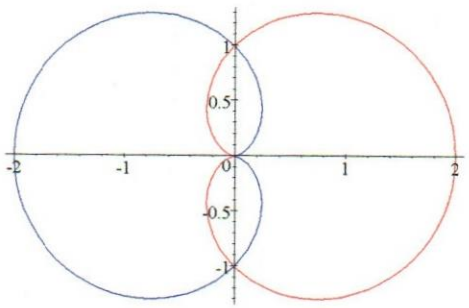
Caso a) Por solución simultánea de las ecuaciones: $r = 1 + \cos\theta$ y $r = 1 - \cos\theta$, se obtiene:

$$1 + \cos\theta = 1 - \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm\tfrac{\pi}{2}$$

por lo que los puntos : $A\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ y $B\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$ son puntos de intersección.

La solución gráfica será:

$$r = 1 + \cos\theta \rightarrow \text{color rojo} \ ; \quad r = 1 - \cos\theta \rightarrow \text{color azul}$$



Nótese que el punto de intersección $C(0,0)$ obtenido gráficamente, no se obtiene de la solución simultánea de las ecuaciones.

Caso c) Por solución simultánea de las ecuaciones: $r = 2\sin\theta$ y $r = 2\sin 2\theta$, se obtiene:

$$2\sin\theta = 2\sin 2\theta \Rightarrow \sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow$$

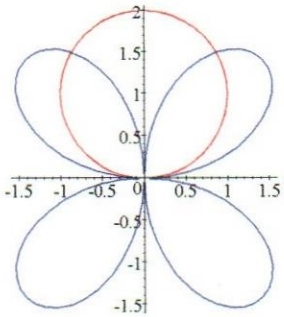
$$\sin\theta(1 - 2\cos\theta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \cos\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \ ; \quad \cos\theta = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \begin{cases} +\frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Los puntos de intersección son: $: \begin{cases} A(0,0)\ , B(0,\pi) \\ C\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ y } D\left(-\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$

La solución gráfica será:

$$r = 2\sin\theta \rightarrow \text{color rojo} \ ; \quad r = 2\sin 2\theta \rightarrow \text{color azul}$$



Caso d) Por solución simultánea de las ecuaciones: $r = \cos\theta$ y $r = 1 - \cos\theta$, se obtiene:

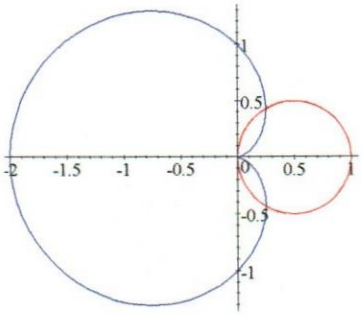
$$\cos\theta = 1 - \cos\theta \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \tfrac{1}{2},$$

de donde:

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

por lo que los puntos : $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ y $B\left(\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$ son puntos de intersección.
La solución gráfica será:

$$r = \cos\theta \longrightarrow \text{color rojo} \ ; \qquad r = 1 - \cos\theta \longrightarrow \text{color azul}$$



Nótese que el punto de intersección $C(0,0)$ obtenido gráficamente, no se obtiene de la solución simultánea de las ecuaciones.

Caso e) Por solución simultánea de las ecuaciones: $r = \sqrt{2}$ y $r^2 = 4\sin\theta$, se obtiene:

$$2 = 4|\sin\theta| \Rightarrow |\sin\theta| = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \sin\theta = \pm\tfrac{1}{2} \ ;$$

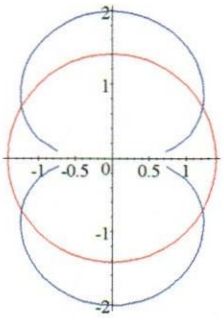
$$\sin\theta = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \quad \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\sin\theta = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \begin{cases} \frac{7\pi}{6} \\ \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

Los puntos de intersección son: $:\begin{cases} A\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}\right), B\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}\right) \\ C\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{6}\right) \text{ y } D\left(\sqrt{2}, \frac{11\pi}{6}\right) \end{cases}$

La solución gráfica será:

$$r = \sqrt{2} \rightarrow \text{color rojo} \quad ; \quad r^2 = 4\sin\theta \rightarrow \text{color azul}$$



Caso g) Por solución simultánea de las ecuaciones: $r = 1$ y $r^2 = 2\sin 2\theta$, se obtiene:

$$1 = 2|\sin 2\theta| \Rightarrow |\sin 2\theta| = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\theta = \pm\tfrac{1}{2} \ ;$$

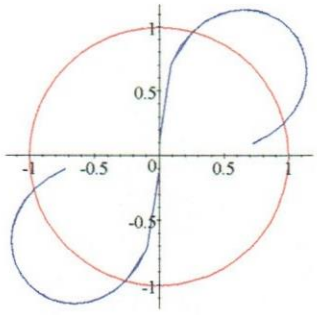
$$\sin 2\,\theta = \tfrac{1}{2} \Rightarrow 2\,\theta = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi}{6} \\ \frac{5\pi}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi}{12} \\ \frac{5\pi}{12} \end{array} \right.$$

$$\sin\theta = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = \left\{ \begin{array}{c} \frac{7\pi}{6} \\ \frac{11\pi}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \left\{ \begin{array}{c} \frac{7\pi}{12} \\ \frac{11\pi}{12} \end{array} \right.$$

Los puntos de intersección son : $\begin{cases} A\left(1, \frac{\pi}{12}\right), \quad B\left(1, \frac{5\pi}{12}\right) \\ C\left(1, \frac{7\pi}{12}\right) \text{ y } D\left(1, \frac{11\pi}{12}\right) \end{cases}$

La solución gráfica de las curvas dadas, ilustra los resultados aquí obtenidos

$$r = 1 \rightarrow \text{color rojo} \quad ; \quad r^2 = 2\sin 2\theta \rightarrow \text{color azul}$$



4.9) FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Son funciones que están definidas por más de una ecuación.

Ejemplo:

a) $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & if \;\; x < 0 \\ x^2 - 1 & if \;\; x \geq 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} |x+1| & if \;\; x \leq 0 \\ 3x & if \;\; x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2+\sqrt{4+x^2} & if \;\; |x| \leq 2 \\ 2 & if \;\; |x| > 2 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} -1 & if \;\; x \leq 2 \\ x-2 & if \;\; -2 < x < 2 \\ 2-x & if \;\; x \geq 2 \end{cases}$

4.9.1) Gráfica de funciones definidas a trozos

Para graficar una función definida a trozos, se procede como se indica a continuación:

a) En el modo Matemática, se escribie:

$$f(x) =$$

b) Se elije: "**Insert+Brackets**" en la Barra de Menú

c) Se selecciona: { , es decir :

"Llave izquierda { "

y "Operador nulo" a la derecha: líneas verticales a trazos |

y se hace *click* en "*OK*"(o se oprime la tecla "*ENTER*").

d) Se elije "**Insert+Matrix**" y se especifica:

- N° de filas : tantas como trozos de función.
- N° de columnas = 3

e) En el modo Matemática, se escribe:

- Cada ecuación en la columna de la izquierda.
- *if* en la columna central.
- El intervalo, en la columna de la derecha.

f) Con el cursor en la expresión, se selecciona: "**Maple+Define+New Definition**" en la Barra de Menú.

g) Se selecciona con el *mouse* la expresión: $f(x)$ y se elije:

"**Maple+Plot 2D+Rectangular**" ,(o se hace *click* en el icono).

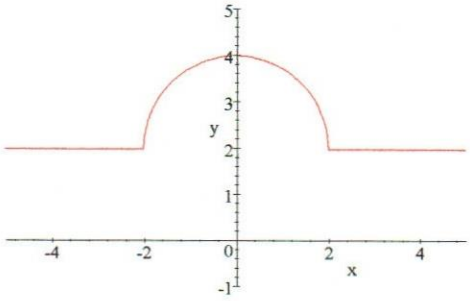
h) Se cambia el dominio, rango, color, etc.,según se desee estudiar el comportamiento de la función.

Ejemplo 1:

Graficar la siguiente ecuación: $h(x) = \begin{cases} 2+\sqrt{4-x^2} & if \;\; |x| \leq 2 \\ 2 & if \;\; |x| > 2 \end{cases}$

y determinar su dominio y su rango

Solución: Siguiendo los pasos entes expuestos, se obtiene:



$$h(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{4 - x^2} & if \ |x| \leq 2 \\ 2 & if \ |x| > 2 \end{cases}$$

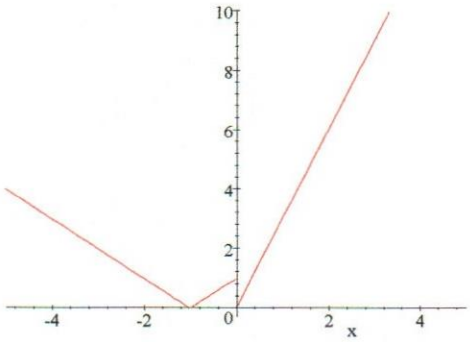
Dominio:R ; Rango: $[2, 4]$

Ejemplo 2:

Graficar la ecuación: $$h(x) = \begin{cases} |x+1| & if \ x \leq 0 \\ 3x & if \ x > 0 \end{cases}$$

y determinar su dominio y su rango.

Solución: Siguiendo los pasos entes expuestos, se obtiene:



$$h(x) = \begin{cases} |x+1| & if \ x \leq 0 \\ 3x & if \ x > 0 \end{cases}$$

Dominio: R ; Rango: $[0, \infty)$

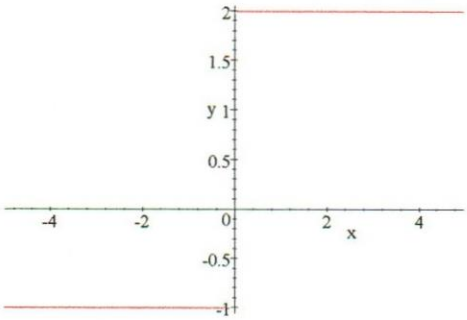
NOTA : Obsérvese que el progrma no discrimina que el punto (0.0) no pertenece a la curva dada, pues $x = 0 \Rightarrow y = 1$, por definición de $h(x)$.

Ejemplo 3:

Graficar la ecuación: $$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & if \ x \leq 0 \\ 2 & if \ x = 0 \end{cases}$$

y determinar su dominio y su rango.

Solución: Siguiendo los pasos entes expuestos, se obtiene:



$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & if \;\; x < 0 \\ 2 & if \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

Dominio : R ; Rango = $\{-1, 2\}$

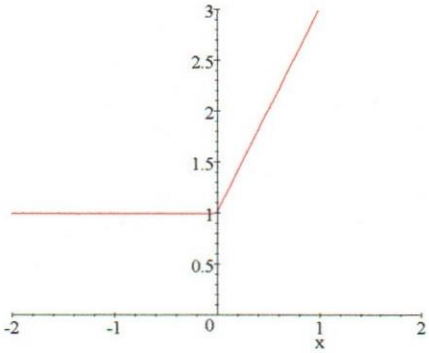
NOTA : Obsérvese que el progrma no discrimina que el punto $(0. -1)$ no pertenece a la curva dada, pues $x = 0 \Rightarrow y = 2$

Ejemplo 4:

Graficar la ecuación: $$h(x) = \begin{cases} 1 + x + |x| & if \;\; x \geq 0 \\ 1 & if \;\; x < 0 \end{cases}$$

y determinar su dominio y su rango.

Solución: Siguiendo los pasos entes expuestos, se obtiene:



$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + |x| & if \;\; x \geq 0 \\ 1 & if \;\; x < 0 \end{cases}$$

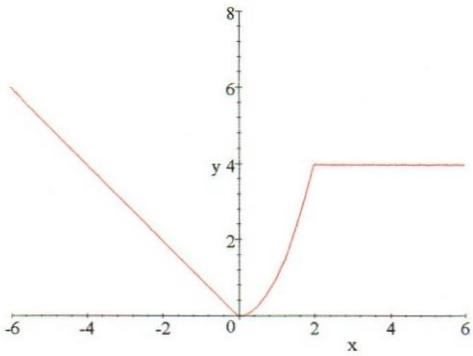
Dominio: R ; Rango: $[1, \infty)$

Ejemplo 5: Graficar la ecuación: $$f(x) = \begin{cases} -x & if \;\; x < 0 \\ x^2 & if \;\; 0 \leq x \leq 2 \\ 4 & if \;\; x > 2 \end{cases}$$

y determinar su Dominio y Rango.

Solución: Aplicando la técnica antes expuesta, se obtiene:

$$f(x) = \begin{cases} -x & if \;\; x < 0 \\ x^2 & if \;\; 0 \le x \le 2 \\ 4 & if \;\; x > 2 \end{cases}$$



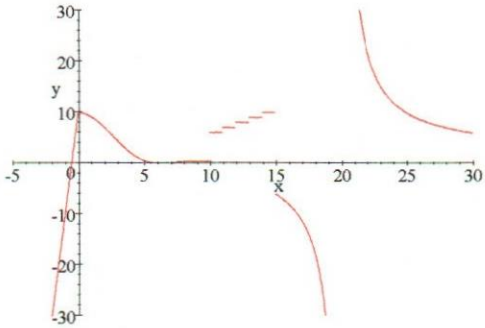
Dominio: R ; Rango: $(0, \infty)$

Ejemplo 6: Graficar la ecuación:

$$h(x) = \begin{cases} 20\left(x + \frac{1}{2}\right) & if \;\; x < 0 \\ \frac{20(1-\cos x)}{x^2} & if \;\; 0 < x \le 10 \\ \lfloor x - 4 \rfloor & if \;\; 10 < x \le 15 \\ \frac{2x}{x-20} & if \;\; x \in (15, 20) \cup (20, \infty) \end{cases}$$

y determinar su dominio y su rango.

Solución: En forma análoga a los casos anteriores, se obtiene:



$$h(= \begin{cases} 20\left(x + \frac{1}{2}\right) & if \;\; x < 0 \\ \frac{20(1-\cos x)}{x^2} & if \;\; 0 \le x \le 10 \\ \lfloor x - 4 \rfloor & if \;\; 10 < x \le 15 \\ \frac{2x}{x-20} & if \;\; x \in (15, 20) \cup (20, \infty) \end{cases}$$

Dominio: $R - \{20\}$; Rango: R

Nótese que la curva tiene una asíntota vertical en : $x = 20$ y una horizontal en : $y = 0$

4.10) ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Hasta ahora, una curva en un plano estaba definida por una ecuación en dos variables:

$$y = f(x) \text{ o } F(x,y) = 0$$

Estudiaremos a continuación el caso en que se usan tres (3) variables para representar una curva en un plano.

En efecto, si f y g son funciones contínuas de t en un intervalo I , las ecuaciones:

$$x = f(t) \quad \text{e} \quad y = g(t)$$

se denominan "Ecuaciones Paramétricas", siendo t el "parámetro".

4.10.1) Gráfica

El conjunto de puntos (x,y) obtenidos cuando t varía en el intervalo I, se llama "Gráfica de las ecuaciones paramétricas".
Para obtener la gráfica de una curva dada en ecuaciones paramétricas, se procede como se indica a continuación:

a) En el modo Matemática, se escriben las ecuaciones paramétricas entre paréntesis (o corchetes), según se muestra :

$$(f(t),g(t)) \text{ o también : } [\ f(t),g(t)\ ]$$

b) Con el cursor a la derecha de la expresión así obtenida (o dentro de ella), se elije: "**Maple+Plot 2D+Parametric**" en las Barra de Herramientas,

El resultado será la gráfica de la curva dada.

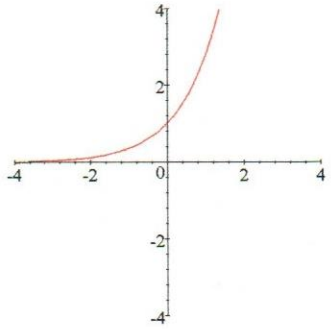
NOTA :
Si se desea, se activa el gráfico haciendo *click* sobre él, se elije: "**Edit+Properties**" y se ajusta: color, estilo de líneas, tipo de ejes, escala ,etc. y se agrega otras funciones,tal como se explicó en el punto **3.1.2)** del presente trabajo.

4.10.2) Ejemplos

Ejemplo 1:
Demostrar que la gráfica de la curva $y = e^x$ es simétrica de su inversa $x = \ln y$, respecto de la recta $y = x$.
Solución:

a) Con el cursor en la expresión (t, e^t) se elije: "**Maple+Plot 2D+ Parametric**".
El resultado será:

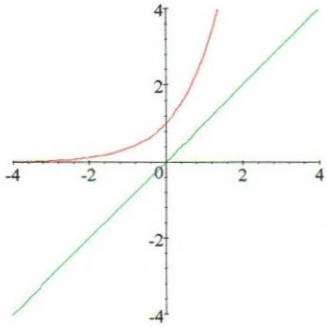
$$-5 \leq t \leq 5$$



(t, e^t)

b) Se activa el gráfico y se elije: "**Edit+Properties+Plot Components**"

y se hace *click* en "**Add Item**".
Se escribe (t,t) en la Caja "**Expressions and Relations**" para añadir la recta $y = x$ al gráfico, y se selecciona un color: (verde en este caso)
El resultado será:

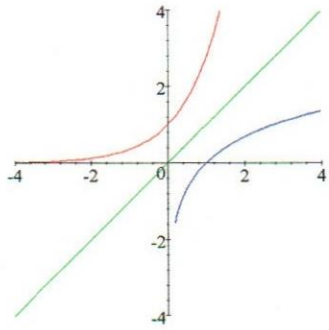


(t, e^t)

$$-5 \leq t \leq 5$$

c) En forma análoga al literal b), se añade el "*item*" correspondiente a la función inversa : $(t, \ln t)$; se selecciona el color (azul en este caso), y se hace *clik* en *OK* (o se oprime la tecla " **ENTER**")

El resultado será:



(t, e^t)

$$-5 \leq t \leq 5$$

Ejemplo 2:

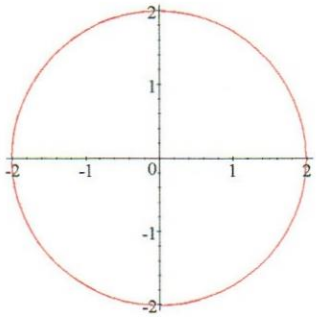
Describir la curva definida por la ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos t$$
$$y = 2\sin t$$

Solución:

Elevando al cuadrado y sumando término a término, se obtiene: $x^2 + y^2 = 4$
lo que representa una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2, tal como se ilustra

a continuación



$[2\cos t, 2\sin t]$

Ejemplo 3:

Describir la curva definida por las ecuaciones paramétricas

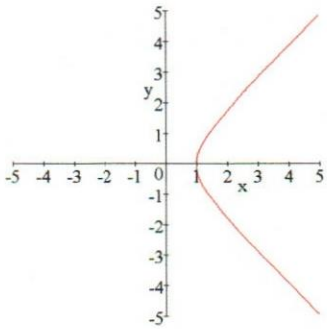
$$x = \cosh t$$
$$y = \sinh t$$

Solución:

Elevando al cuadrado y restando término a término, se obtiene:

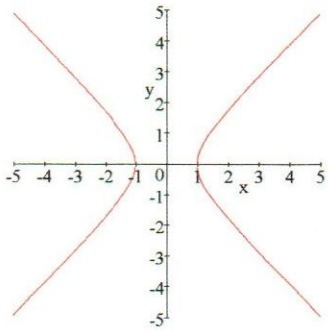
$$x^2 - y^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad ; \quad x \geq 1 \quad \wedge \quad cosht > 1, \forall t \in R$$

lo que representa una hipérbola equilátera unitaria, tal como se ilustra a continuación



$[\cosh t, \sinh t]$

Para obtener la rama izquerda de la hipérbola, es necesario añadir el Item:
$[-\cosh t, \sinh t]$ de acuerdo con la técnica ya conocida. Así se obtiene:



Ejemplo 4

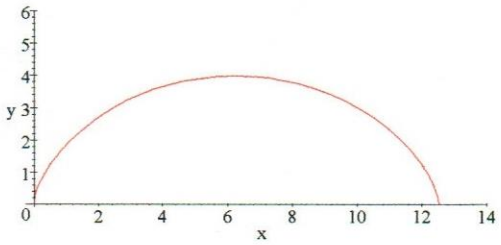
CICLOIDE: Se llama así a la curva descrita por un punto de una circunferencia, a medida que ésta rueda sin deslizar sobre una recta.
Si la circunferencia tiene radio "a", se puede demostrar que las ecuaciones de dicha curva son:

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

La ecuación y gráfica de la Cicloide, para $a = 2$, será: $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$

Procediendo como se indicó anteriormente, se obtiene:

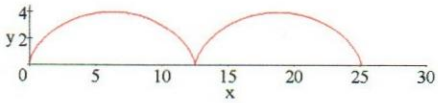
a) Para: $0 \leq t \leq 2\pi$



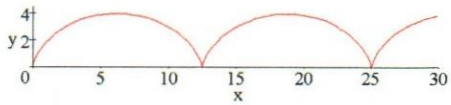
$[2(t - \sin t), 2(1 - \cos t)]$

$$\leftarrow L = 2\pi a = 4\pi = 12.56 \rightarrow$$

b) Para: $0 \leq t \leq 4\pi$



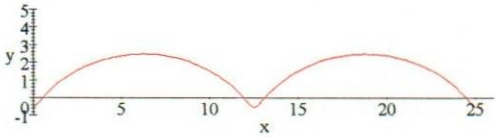
c) Para: $0 \leq t \leq 5\pi$



Ejemplo 5:

Graficar la **Cicloide Prolata**: $\begin{cases} x = 2t - \frac{3}{2}\sin t \\ y = 1 - \frac{3}{2}\cos t \end{cases}$ $\quad para : 0 \leq t \leq 4\pi$

Solución:
Procediendo en forma análoga, se obtiene:

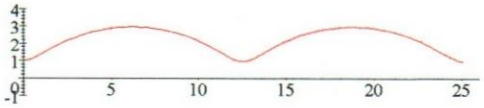


$\left[2t - \frac{3}{2}\sin t, 1 - \frac{3}{2}\cos t\right]$

Ejemplo 6:

Graficar la **Cicloide Corta**: $\begin{cases} x = 2t - \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$ $\quad para : 0 \leq t \leq 4\pi$

Solución:
Procediendo en forma análoga, se obtiene:

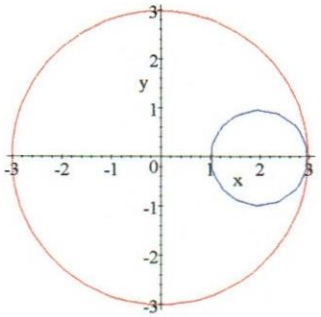


$[2t - \sin t, 2 - \cos t]$

Esta curva es descrita por un punto que está a una distancia "b" del centro de un disco circular de radio "a" $(a > b)$, cuando éste rueda sin deslizar.

Ejemplo 7:

HIPOCICLOIDE: Se llama así a la curva descrita por un punto de una circunferencia de radio "b" a medida que ésta rueda sin deslizar en el interior de otra círcunferencia de radio "a", (a >b) y centro en el origen coordenadas.



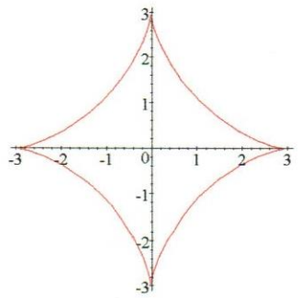
Las ecuaciones paramétricas de la Hipocicloide son:

$$x = (a-b)\cos t + b\cos(\tfrac{a-b}{b}t)$$
$$y = (a-b)\sin t - b\sin(\tfrac{a-b}{b}t)$$

ASTROIDE : Si $b = \frac{a}{4}$, la Hipocicloide se llama: Hipocicloide de 4 hojas, o Astroide, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

La grafica de la **Astroide** : $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ $para : 0 \le t \le 2\pi$, será:

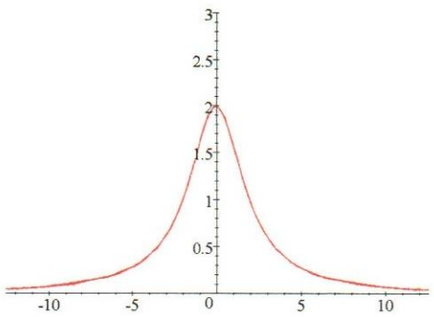


$[3\cos^3 t, 3\sin^3 t]$

Ejemplo 8:

Graficar la **Hechicera de Agnesi** : $\begin{cases} x = 2\cot t \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$ $\quad para : -4\pi \leq t \leq 4\pi$

Solución:
Procediendo en forma análoga, se obtiene:



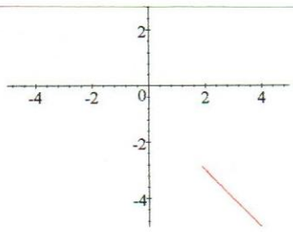
$[2\cot t, 2\sin^2 t]$

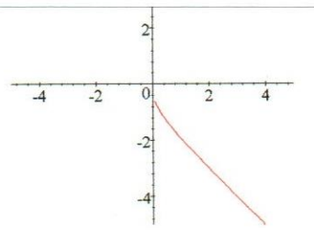
Ejemplo 9:

Graficar el **Folio de Descartes** : $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ $\quad para : -\infty < t < \infty$

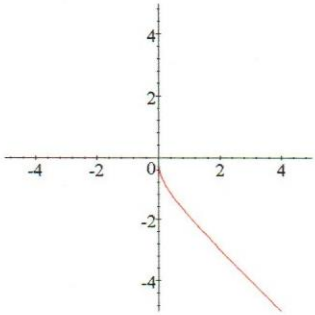
Solución:
Procediendo como se indicó anteriormente, se obtiene:

a) **Intervalo**: $[0, \infty)$

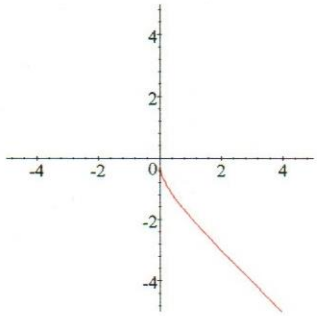




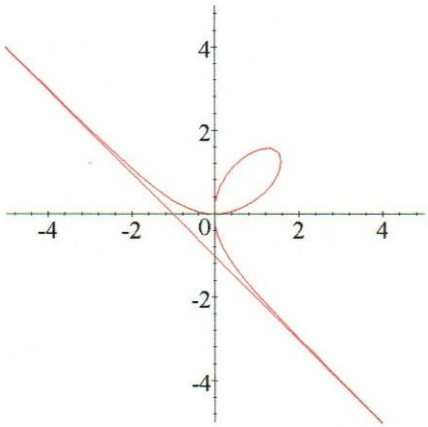
c.3) Sub-intervalo: $\left[\,-10,-1\,\right]$



c.4) Sub-intervalo: $\left[\,-\infty,-1\,\right]$



h) Sub-intervalo: $\left[\,-10,-10\,\right]$



$$-\infty < t < \infty$$

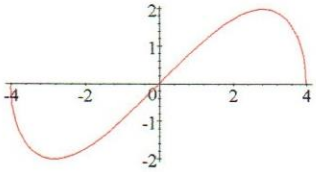
Ejemplo 10:

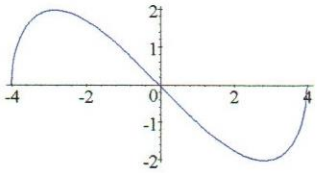
Graficar las **Curvas de Lissajous** : $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\sin 2t \end{cases}$ $\quad para : 0 \le t \le 2\pi$

Solución:

Procediendo en forma análoga, se obtiene:

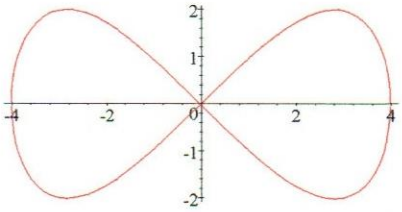
a) Intervalo: $0 \le t \le \pi$ b) Intervalo: $\pi \le t \le 2\pi$





$\left[\, 4\cos t,\ 2\sin 2t \,\right]$

c) Intervalo: $0 \le t \le 2\pi$

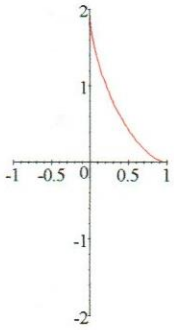


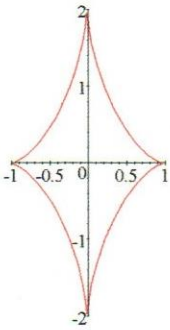
Ejemplo 11:

Graficar la **Evoluta de la Elipse** : $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $\quad para : 0 \le t \le 2\pi$

Solución:

Procediendo en forma análoga, se obtiene:





$\left[\, \cos^3 t,\ 2\sin^3 t \,\right]$

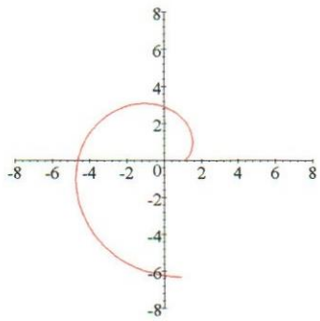
$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $0 \le t \le 2\pi$

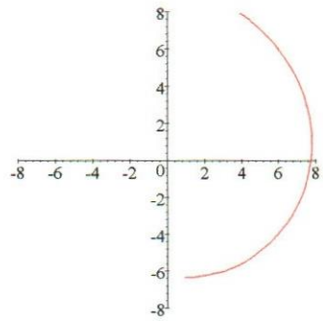
Ejemplo 12:

Graficar la **Involuta del Círculo** : $\begin{cases} x = & \cos t + t\sin t \\ y = & \sin t - t\cos t \end{cases}$ $\quad para : 0 \leq t \leq 3\pi$

Solución:

Procediendo en forma análoga, se obtiene:

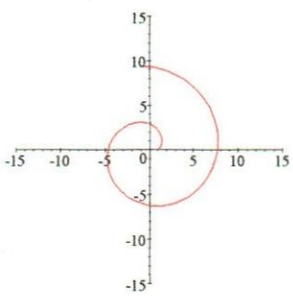


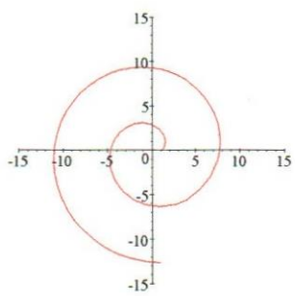


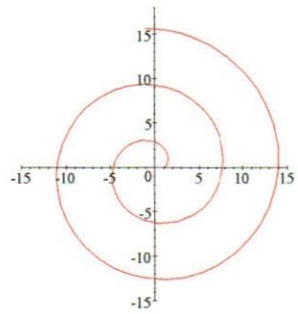
$[\ \cos t + t\sin t,\ \sin t - t\cos t\ ]$

Intervalo: $0 \leq t \geq 2\pi$ Intervalo: $2\pi \leq t \geq 3\pi$

c) Intervalo : $0 \leq t \leq 5\pi$







Intervalo: $0 \leq t \geq 3\pi$ Intervalo: $0 \leq t \geq 4\pi$ Intervalo: $0 \leq t \geq 5\pi$

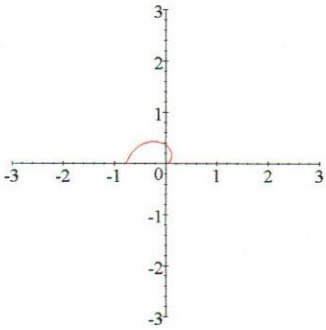
Ejemplo 13:

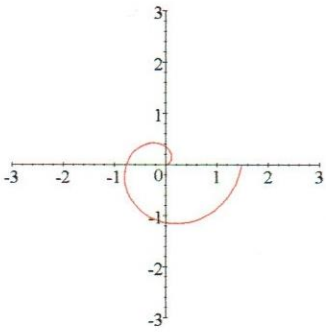
Graficar la **Serpentina** : $\begin{cases} x = & \cot t \\ y = & 4\sin t\cos t \end{cases}$ $\quad para : 0 \leq t \leq \pi$

Solución:

Procediendo en forma análoga, se obtiene:

a) Intervalo: $0 \leq t \geq \frac{\pi}{2}$

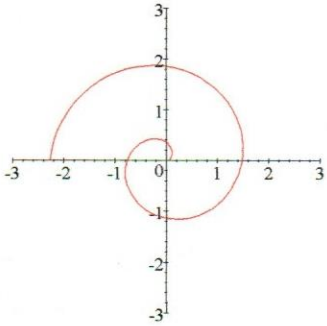


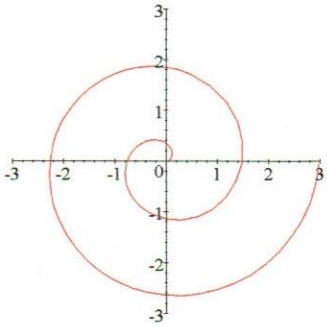


$\left[\ \frac{3t}{4\pi}\cos t,\ \frac{3t}{4\pi}\sin t\ \right]$

Intervalo: $0 \leq t \leq \pi$ Intervalo: $0 \leq t \leq 2\pi$

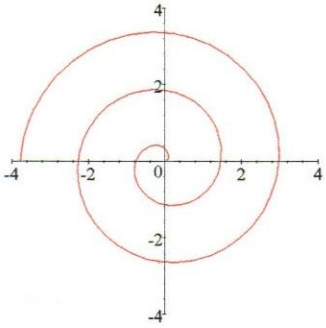
b) Intervalo: $0 \leq t \geq 4\pi$





Intervalo: $0 \leq t \leq 3\pi$ Intervalo: $0 \leq t \leq 4\pi$

c) Intervalo: $0 \leq t \geq 5\pi$



$0 \leq t \leq 5\pi$

CAPÍTULO V

EULER

Leonhard Euler está considerado como el matemático más prolífico de la historia. Nació en 1707 en Basilea, (Suiza) cuna de la famila de matemáticos Bernoulli. El joven Euler aprendió matemáticas de John Bernoulli y durante su vida publicó más de 500 libros y artículos, continuando su obra incluso después de perder la vista en 1766. A su muerte en 1783, dejó más de 300 manuscritos adicionales cuya publicación se realizó durante 50 años contínuos.

Ningún matemático del pasado ha infuído de manera tan directa a los estudiantes de matemáticas de la actualidad, pues a Euler se le debe en gran medida la forma de notación y terminología utilizada actualmente para la enseñanza del álgebra, trigonometría y cálculo. Algunas de las notaciones familiares cuyo uso fue popularizado por Euler son:

e : base de los logaritmos naturales

a, b, c : lados de un triángulo

i : raiz cuadrada de -1

$\sum$: símbolo de suma

$f(x)$: notación funcional

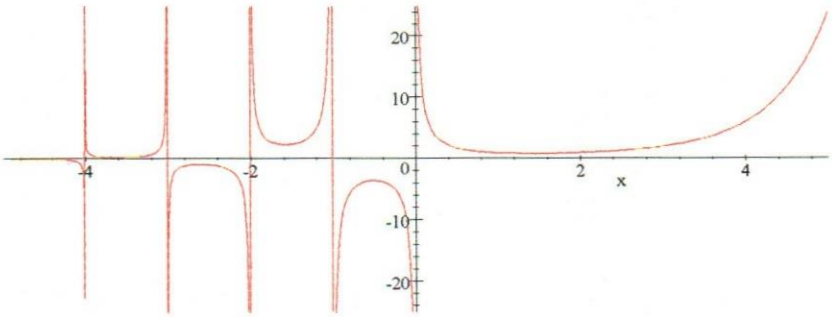
π : área del círculo unitario

$sen, cos, tang, cot, sec$ y $cosec$: abreviaturas trigonométricas

$\Gamma(x)$: función Gamma $\left[\text{función contínua para } x \in (0,\infty)\right]$

Sus tratados de cáculo de 1788 y 1768 constituyen la fuente original para gran parte del contenido y métodos de los cursos y textos modernos de cálculo.

Si en la conocida "fórmula de Euler" : $e^{ix} = \cos x + i$ sen x que relaciona las funciones exponencial y trigonométrica, se sustituye $x = \pi$, se obtiene la relación: $e^{i\pi} + 1 = 0$, expresión que relaciona cinco (5) de las constantes más conocidas de las Matemátricas.



$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

CAPÍTULO V

GRÁFICAS EN R^3

5.) GRÁFICAS EN R^3

El programa *SCIENTIFIC NOTEBOOK* permite obtener la gráfica en el espacio tridimensional (R^3), cuando la ecuación de la misma está expresada en cualquiera de los sistemas coordenados conocidos, a saber:

- Rectangulares
- Paramétricas
- Cilíndricas
- Esféricas
- Tubulares

5.1) GRÁFICAS EN COORDENADAS RECTANGULARES

Superficies

Se llama " superficie" al conjunto de puntos P, y sólamente a aquellos puntos, cuyas coordenadas satisfacen una sóla ecuación de la forma

$F(x,y,z) = 0$ o, en forma explícita: $z = f(x,y)$

La gráfica de una función de dos variables es el conjunto de puntos $P(x,,y,z)$ de R^3 que satisfacen la ecuación $z = f(x,y)$.

Su ecuación general es de la forma:

$$z = f(x,y)$$

Para obtener su gráfica usando el "SCIENTIFIC NOTEBOOK":

1°) Se escribe en el modo Matemáticas , la ecuación:

$$z = f(x,y)$$

2°) Con el cursor a la derecha de la expresión, se selecciona: "**Maple+PLOT 3D+Rectangular**".

El resultado será la gráfica de la superficie: $z = f(x,y)$

Las superficies más comunes de R^3 son las siguientes:

a) Planos:

Su ecuación general es: $Ax + By + Cz = D$

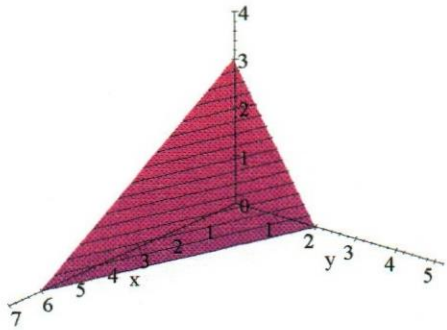
Ejemplo 1

Graficar el plano : $x + 3y + 2z = 6$

Se observa que:

$$x = y = 0 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow P_1(0,0,3)$$
$$x = z = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P_2(0,2,0)$$
$$y = z = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow P_3(6,0,0)$$

Aplicando el procedimiento antes expuesto, se obtiene:



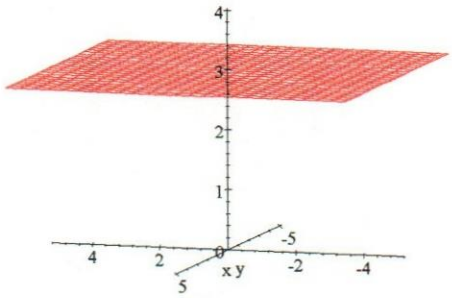
$z = \frac{6-x-3y}{2}$

Ejemplo 2

Graficar el plano : $z = 3$

La ecuación $z = 3$ representa el conjunto $\{(x,y,z)/z = 3\}$ lo que representa el conjunto de todos los puntos de R^3 cuya coordenada z es 3.

Obviamente, este conjunto es un plano horizontal, paralelo al plano xy, a 3 unidades arriba de él, como ilustra la figura:



$z = 3$

Ejemplo 3

¿Qué superficie representa la ecuación $y = 5$?

Solución:

La ecuación $y = 5$ representa al conjunto de puntos $\{(x,y,z)/y = 5\}$, que es el conjunto de todos los puntos en R^3 cuya coordenada y es 5.

Este conjunto es el plano vertical, paralelo al plano xz , 5 unidades a la derecha de él.

Para graficar este plano es nercesario expresar su ecuación en coordenadas paramétricas, ya que $y = 5$ es independiente de la variable z. Dicha parametrización será :

$x = t$

$y = 5$

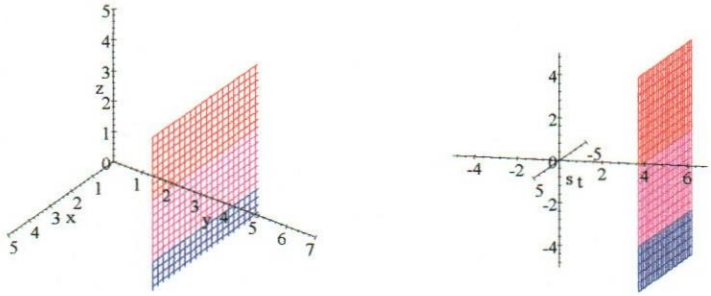
$z = s$

Para graficar este plano en coordenadas rectangulares:

1°) Se construye el vector: $[t, 5, s]$

2°) Se selecciona: "**Maple+Plot 3d+Rectangular**"

La gráfica correspodiente se muestra el siguiente figura:



$[t, 5, s]$

Trazas: $y = 5 \quad \wedge \quad z = 0$

Ejemplo 4

Describir y trazar la gráfica de la superficie en R^3 representada por la ecuación $y = x$.

Solución:

La ecuación $y = x$ representa al conjunto de puntos en R^3 cuyas coordenadas x e y son iguales. es decir $\{(x,y,z) \,/\, y = x\}$.

Este conjunto es un plano vertical que intersecta al plano xy en la recta $y = x$; $z = 0$.

Para graficar este plano es nercesario expresar su ecuación en coordenadas paramétricas, ya que $y = x$ es independiente de la variable z. Dicha parametrización será :

$x = t$

$y = t$

$z = s$

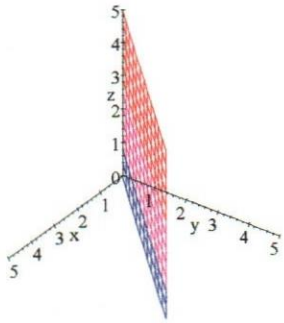
Para graficar este plano en coordenadas rectangulares:

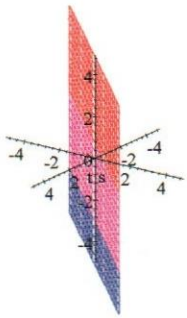
1°) Se construye el vector: $[t, t, s]$

2°) Se selecciona: "**Maple+Plot 3d+Rectangular**"

La gráfica ilustra una porción de este plano :

i) En el primer octante: **ii)** Octantes 1,3,5 y 7





$[t, t, s]$

Traza: $y = x \quad \wedge \quad z = 0$

b) Esfera:

Es el lugar geométrico de los puntos del espacio que distan una cantidad fija (llamada radio) de un punto fijo llamado centro. En particular, si $P(x, y, z)$ es un punto de una esfera de radio R y centro $C(a, b, c)$, entonces su ecuación general es:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Ejemplo 1

Graficar la esfera : $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 4 = 0$

Solución:

Completando cuadrados: $(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$

de donde: $z = \pm\sqrt{9 - (x+2)^2 - (y-3)^2} \quad \Rightarrow$

Esfera de centro $(-2, 3, 0)$ y radio $= 3$

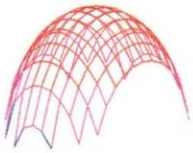
Para obtener su gráfica :

1°) Se escribe en el modo Matemáticas , la ecuación:

$$z = \sqrt{9 - (x+2)^2 - (y-3)^2}$$

2°) Con el cursor a la derecha de la expresión, se selecciona ;"**Maple+PLOT 3D+Rectangular**"

El resultado será:



$$\sqrt{9-(x+2)^2-(y-3)^2}$$

Para mejorar la presentación de la grágica:

3°) Se hace *click* sobre la gráfica.

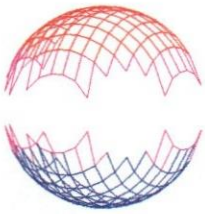
4°) Se hace *click* sobre el icono del extremo inferior derecho,

(O se selecciona:"**Insert+Properties**) y se elige: "**Plot Components**".

5°) Se hace *click* en :"**Add item**" y se escribe :

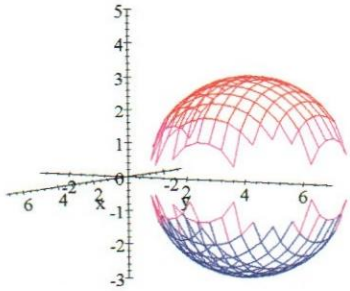
$$-\sqrt{9-(x+2)^2+(y-3)^2}$$

Al seleccionar *OK*, se obtiene:

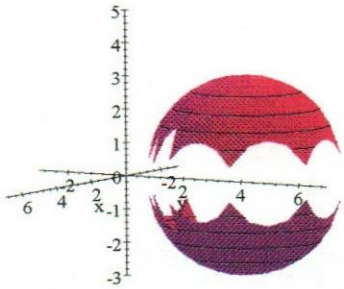


$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Giro}: & 31° & \text{Inclinación:} & 84° \\ x & \in & [-3,7] & \\ y & \in & [-3,7] & \\ z & \in & [-3,5] & \end{array}\right\}$$

6°) Si se selecciona: "**Axes+Axes type+Normal**" se obtiene:



7°) Si se selecciona:"**Plot Components+Plot Style + Patch & Control**", se obtiene:



$\sqrt{9-(x+2)^2-(y-3)^2}$

c) Cilindro

Sea C una curva en un plano y L una recta no paralela a ese plano.
El conjunto de todas las rectas paralelas a L que cortan a C se llama:

Cilindro de curva directriz C.

Cada una de las rectas paralelas L se llama **Generatriz** del cilindro.

NOTA :

Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que la directiz C está sobre uno de los planos coordenados. Más aún, restringiremos nuestra atención a los cilindros rectos, es decir, cilindros cuyas rectas generatrices son perpendiculares al plano de coordenadas que contiene a C. De este modo, la ecuación de un cilindro cuyas generatrices son paralelas a uno de los ejes coordenados contiene solamente las variables correspondientes a los otros dos ejes.
En otras palabras, la ecuación del cilindro coincide con la de su curva directriz C.

Ejemplo 1

Graficar el cilindro : $x^2 + y^2 = 4$

Solución:

La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ representa en el espacio E^3 , un Cilindro Circular Recto porque su traza con el plano xy es una circunferencia. Para graficar esta superficie, es nercesario expresar su ecuación en coordenadas paramétricas, ya que la expresión: $x^2 + y^2 = 4$ es independiente de la variable z. Dicha parametrización será :

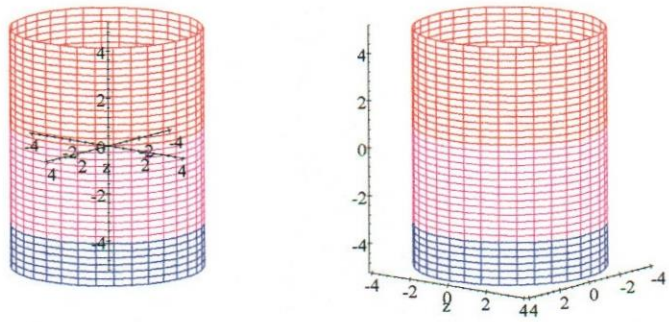
$$x = t$$
$$y = \sqrt{4 - t^2}$$

Para graficar este plano en coordenadas rectangulares:

1°) Se construye el vector: $\left[t, \sqrt{4 - t^2}, s\right]$

2°) Se selecciona: "**Maple+Plot 3d+Rectangular**"

La gráfica correspondiente, en dos perspectivas, será:



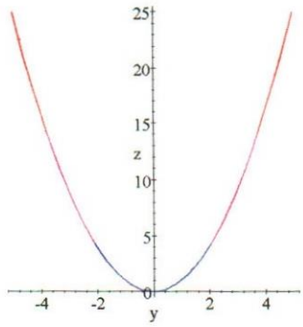
Ejemplo 2

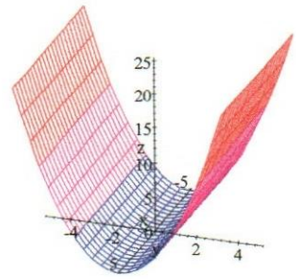
Graficar el cilindro : $z = y^2$

Solución:

Se selecciona : "**Maple+Plot 3D+Rectangular**"

La gráfica correspondiente será:





$z = y^2$

Giro: 0° , Inclinación: 90° Giro: 19° , Inclinación: 63°

5.2) Superficies Cuádricas

La ecuación de una superficie cuádrica en el espacio, es una ecuación de segundo grado en tres variables x, y, z de ecuación general:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

donde: $A, B, C, \ldots, J$ son constantes, y al menos una de ellas es diferente de cero.

Hay seis clases de cuádricas: elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboliede de dos hojas, cono elíptico, paraboliode elíptico y paraboloide hiperbólico.

Forma Canónica:

Por traslación y rotación de. la ecuación anterior se puede llevar a una de las formas canónicas siguientes:

a) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ (Cuádricas con centro)

b) $Ax^2 + By^2 = Iz$ (Cuádricas sin centro)

Si ninguno de estos coeficientes es nulo, se puede escribir:

i) $\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$

ii) $\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

lo que representa las formas canónicas de las superficies cuádricas.

Cuádricas con Centro

Como ya se indicó, son todas aquellas superficies cuádricas cuya cuación general puede expresarse por la ecuación: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$

Como se verá a continuación, son cuádricas con centro los:

- Elipsoides
- Hiperboloides de una y dos hojas
- Conos

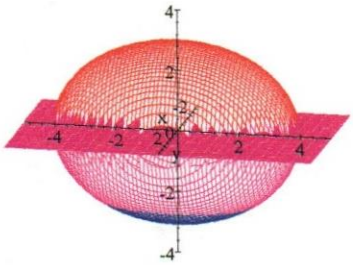
Cuádricas sin Centro

Como ya se indicó, son todas aquellas superficies cuádricas cuya cuación general puede expresarse por la ecuación: $Ax^2 + By^2 = Iz$

en la expresión dada $\Rightarrow$ simetría respecto de los ejes x,y,z .

- Si se sustituye respectivamente x,y,z $por\left\{\boxed{-x}\,\boxed{-y}\,\boxed{-z}\right\}$ $\Rightarrow$ No hay cambios en la expresión dada $\Rightarrow$ simetría respecto del origen.

Secciones:



$3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}}$

(Elipsoide : $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ intersectado con el plano: $z=0$)

Consecuencias:

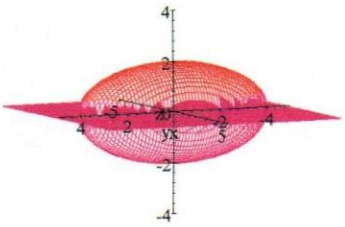
i) Si dos de los tres semiejes a,b,c son iguales, el elipsoide se llama Elipsoide de Revolución, pues el mismo podría ser generado haciendo girar una elipse, respecto del eje correspondiente al semieje distinto. Por ejemplo, si $a=c$, entonces el elipsoide se puede obtener haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$, en torno al eje y.

ii) Si $a=b=c$, el elipsoide es una esfera, por lo que la superficie esférica es una caso particular del un elipsoide.

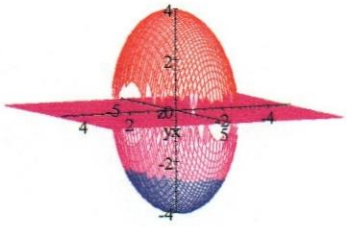
iii) Si $a>b$ y $b=c$, se tendrá un Elipsoide alargado, una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la elipse:
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $z=0$ en torno a su eje mayor.

iv) Si $a<b$ y $b=c$, se tendrá un Elipsoide achatado, una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la elipse:
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $z=0$ en torno a su eje menor.

Las siguientes figuras ilustran lo expuesto en iii) y iv).



$a=4$; $b=c=2$



$a=2$; $b=c=4$

a.2) Esfera

Se define como el lugar geomérico de los puntos del espacio, que eqwuidistan de un punto fijo.

La distancia constante se llama" Radio" y el punto fijo "Centro.

La ecuación de la supereficie esférica cuyo centro es el punto $C(x_o, y_o, z_o)$ y cuyo radio es la constante r , será:

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2 \qquad .....(1)$$

Obviamente, si el centro es ol origen de coordenadas $C(0,0,0)$, entonces:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \qquad .....(2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) reciben el nombre de "Ecuaciones Ordinarias".

Si se desarrolla la ecuación (1), se obtiene:

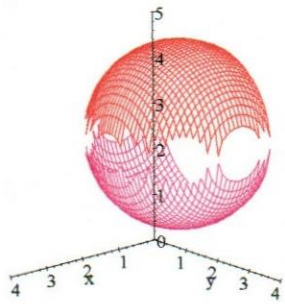
$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + K = 0$$

lo que se llama "Forma General" de la ecuaciónn de la esfera.

Se presenta a continuación la representación gráfica de la esfera de centro en $C(1,2,3)$ y radio $r = 2$

La acuación ordinaria será: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$ de donde:

$z = 3 \pm \sqrt{1 - (y-2)^2 - (z-3)^2}$



$3 + \sqrt{4 - (x-1)^2 - (y-2)^2}$

a.3) Hiperboloide de una hoja: Su ecuación es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Nótese que existen otras dos formas canónicas

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.

Intersecciones:

- **Intersecciones con el eje** z: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z^2 = -c^2$

  lo que es absurdo, por lo tanto, no existe intersección con eleje x.

- **Intersecciones con el eje x**: $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$

- **Intersecciones con el eje** y: $\left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b$

Trazas:

- Traza sobre el plano xy: $z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ Elipse de centro $(0,0,0)$ y semiejes: a y b ; $z = 0$
- Traza sobre el plano xz: $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ Hipérebola de centro $(0,0,0)$; $y = 0$
- Traza sobre el plano yz: $x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ Hipérbola de centro $(0,0,0)$; $x = 0$

Simetría:

- Por las mismas razones del ejemplo a) inmediato anterior, la superficie es simétrica con respecto a los planos coordenados, respecto de los ejes x, y, z y respecto del origen.

Secciones:

- Los planos $z = k$ con $(-\infty < k < \infty)$ cortan a la superficie con curvas de ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$ lo que representa a una familia de elipses de centro en $(0,0,k)$; $z = k$
  En particular $k = 0 \Rightarrow$ la traza con el plano xy es la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad k = 0$$

- De manera semejante los planos $y = k$ con $(-b \leq k \leq b)$ cortan a la superficie con curvas de ecuación: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2}$ lo que representa a una familia de hipérbolas.
  En particular $k = 0 \Rightarrow$ la traza con el plano xz es la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Los planos $x = k$ con $(-a \leq k \leq a)$ cortan a la superficie con curvas de ecuación: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}$ lo que representa a una familia de hipérbolas.
  En particular $k = 0 \Rightarrow$ la traza con el plano yz es la hipérbola:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Extensión:

- Las seis intersecciones de la superficie con los ejes coordenados, son los puntos $(\pm a, 0, 0)$; $(0, \pm b, 0)$; no hay corte con el eje z, luego:

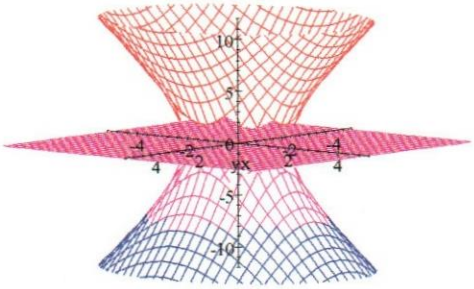
$$|x| \leq a \ ; \ |y| \leq b \ ; \ (-\infty < z < \infty)$$

Nombre:

- Dado que las trazas con los planos xz y yz son hipérbolas, y las secciones transversales para $z = k$ son elipses, la superficie recibe el nombre de HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

Gráfica:

Su gráfica para : $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{5}$, será:



$\pm 5\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - 1}$

Hiperboloide de una hoja : $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{5} = 1$

intersectado con el plano $z = 0$

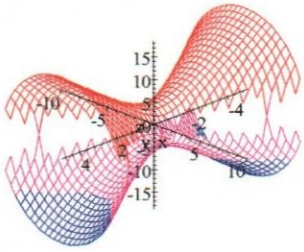
Consecuencias:

i) El eje z se llama, en este caso, Eje del Paraboloide.

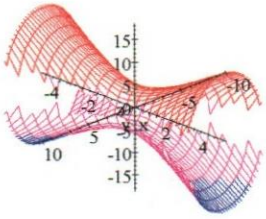
Si el signo menos de la ecuación de la superficie aparece en el primero o segundo de los términos, en vez del tercero, entonces el eje del Paraboloide será el *eje x* o el *eje y*, respectivamente.

Eje x : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; *Eje y* : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Las siguientes figuras ilustran lo aquí expuesto:



Eje: *Eje x*



Eje: *Eje* y

ii) Si en la ecuación de la superficie dada en este ejemplo, se hace $a = b$ la superficie se puede obtener haciendo girar una hipérbola:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{array} \right\} \text{, en torno al } eje \;\; z$$

a.4) Hiperboloide de dos hojas: Su ecuación es: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Nótese que existen otras dos formas canónicas.

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo.

Intersecciones:

- **Intersecciones con el eje** z: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z^2 = c^2 \Rightarrow$

  $z = \pm c$

- **Intersecciones con el eje x**:: $\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = -a^2 \Rightarrow$

  la superficie no corta al *eje x*.

- **Intersecciones con el eje** y: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 = -b^2 \Rightarrow$

  la superficie no corta al *eje y*.

Trazas:

- Traza sobre el plano xy: $z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \Rightarrow$

  Elipse imaginaria $\Rightarrow$ no hay trazas con el plano xy.

- Traza sobre el plano xz: $y = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ Hipérebola de centro $(0,0,0)$; $y = 0$

- Traza sobre el plano yz: $x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ Hipérbola de centro $(0,0,0)$; $x = 0$

Simetría:

- La presencia de potencias pares en x, y, z implica que la superficie es simétrica con respecto a los planos coordenados, respecto de los ejes x, y, z y respecto del origen.

Secciones:

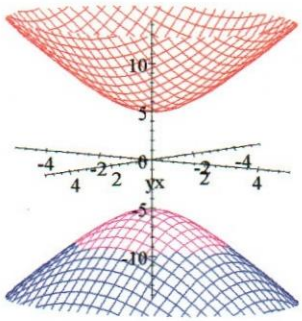
- Si $|k| > c$, el plano horizontal $z = k$ intersecta a la superficie con la curva de ecuaciön. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1$, lo que representa a una familia de elipses de centro en $(0,0,k)$; $z = k$.

- Si $|k| < c$, el plano $z = k$ no intersecta a la superficie. Por lo

tanto, la superficie dada consta de dos partes: una arriba del plano $z = c$ y otra debajo del plano $z = -c$. Por esta razón, se llama: HIPEREBOLOIDE DE DOS HOJAS.

Gráfica:

Su gráfica para : $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{5}$, será:



$5\sqrt{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}}$

Hiperboloide de dos hojas :$-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5} = 1$

Consecuencias:

i) El número de signos negativos en la ecuación inicial, indica el número de hojas del hiperboloide.

ii) El eje del hiperboloide es el correspondiente a la variable x, y o z , con un signo positivo, así:

$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ Hipereboloidde de dos hojas, con eje el *eje z*.

$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ Hipereboloidde de dos hojas, con eje el *eje y*.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow$ Hipereboloidde de dos hojas, con eje el *eje x*.

iii) Si $a = b$, la superficie es el Hiperboloide de Revolución de Dos Hojas, que se genera al hacer girar la hipérebola: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $x = 0$, alrededor del *eje z*.

a.5) Conos

Si el segundo miembro de la ecuación de los ejemplos c) o d) precedentes se sustituye por cero, se obtiene la superficie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \ , \quad \text{de donde:} \quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

lo que representa, como se verá a continuación , la ecuación de un cono.

Otras formas canónicas son:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Intersecciones:

- **Intersecciones con el eje** z: $\left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow$

  las únicas intersecciones con los ejes coordenados viene dadas por el origen de coordenadas: $x = y = z = 0$.

Trazas:

- Traza sobre el plano xy: $z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow$

  $x = y = z = 0.$
- Traza sobre el plano xz: $y = 0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow$

  $z = \pm\frac{c}{a}x \Rightarrow$ rectas de pendientes $\pm\frac{c}{a}$ y que pasan por el origen.
- Traza sobre el plano yz: $x = 0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow$

  $z = \pm\frac{c}{b}y \Rightarrow$ rectas de pendientes $\pm\frac{c}{b}$ y que pasan por el origen.

Simetría:

- Por las mismas razones del ejemplo a) inmediato anterior, la superficie es simétrica con respecto a los planos coordenados, respecto de los ejes x, y, z y respecto del origen.

Secciones:

- Los planos $z = k$ con $(-\infty < k < \infty)$ cortan a la superficie con curvas de ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}$ lo que representa a una familia de elipses de centro en $(0, 0, k)$; $z = k$

  En particular $k = 0 \Rightarrow$ la traza con el plano xy es el punto

  $.x = y = z = o$
- De manera semejante los planos $y = k$ cortan a la superficie con curvas de ecuación: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{b^2}$ lo que representa a :

  Una familia de hipérbolas, si $k \neq 0$

  Parejas de rectas , si $k = 0$
- Los planos $x = k$ con cortan a la superficie con curvas de ecuación: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2}$, lo que representa a:

  Una familia de hipérbolas, si $k \neq 0$

  Parejas de rectas , si $k = 0$

Extensión:

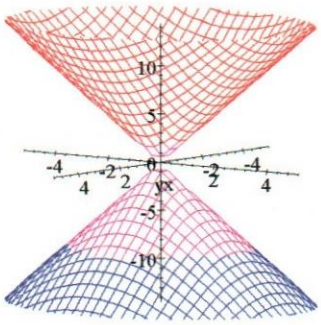
- Tanto x, y como z, pueden alcanzar todos los valores reales.

Nombre:

- Dado que las trazas con los planos xz y yz son rectas, y las secciones transversales para $z = k$ son elipses, la superficie recibe el nombre de CONO ELÍPTICO

Gráfica:

Su gráfica para : $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$ y $c = \sqrt{5}$, será:



$5\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}}$

Cono elíptico : $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{5} = 0$

Comparación entre el Hiperboloide y el Cono

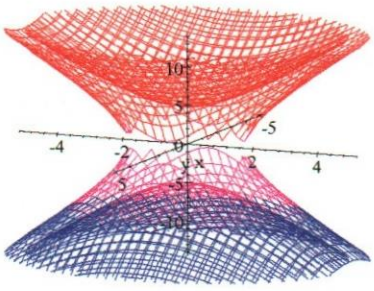
Se desea comparar el Hiperboloide de una y dos hojas con el cono: A tal efecto, recordemos que las respectivas ecuaciones son:

Ecuación del paraboloide de una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Ecuación del paraboloide de dos hojas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Ecuación del cono: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

El cono correspondiente a la ecuación arriba indicada, es asintótico tanto al hiperboloide de una hoja como al de dos hojas, tal como se ilustra a continuación:



b) Cónicas sin Centro

Como ya se indicó, son aquellas superficies cuádricas cuya eciacion general se

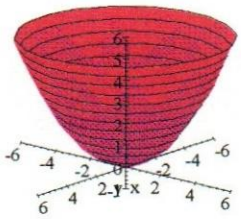
pero z no admite valores negativos.

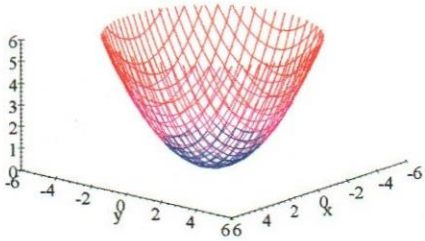
Nombre:

- Dado que las trazas con los planos xz y yz son parábolas, y las secciones transversales para $z = k$ son circunferencias, la superficie recibe el nombre de PARABOLOIDE CIRCULAR o también PARABOLOIDE DE REVOLUCIÓN.

Gráfica:

La gráfica para : $a = 2$, $b = 2$ y $c = 1$, será:





$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}$

b.2) **Paraboloide Elíptico**: Su ecuación es: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

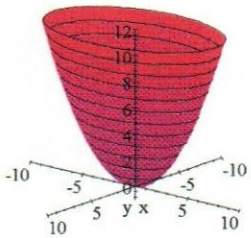
El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia 1.

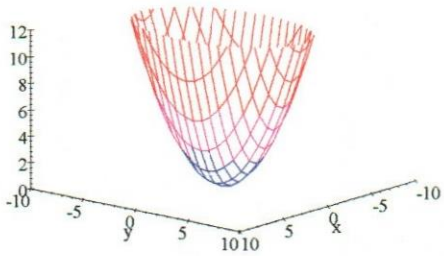
La traza con un plano paralelo a xy es una elipse.

La traza con un plano paralelo a xz es una parábola.

La traza con un plano paralelo a yz es una parábola.

Su gráfica para : $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5}$ y $c = 1$, en dos perspectivas, será:





$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5}$

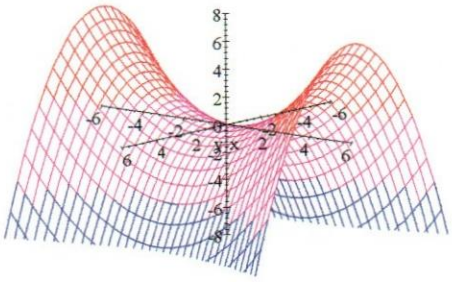
Plot Style: Patch & Control

Plot Style: Hidden Line

El eje del paraboloide dado es el *eje z* y su vértice está en el origen,

b.3) **Paraboloide Hiperbólico**: Su ecuación es: $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potemcia unidad.
La traza con un plano paralelo a xy es una hipérbola.
La traza con un plano paralelo a xz es una parábola.
La traza con un plano paralelo a yz es una parábola.
Su gráfica para : $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{5}$ será:



$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{2}$$

Obsérvese que, en las cercanías del origen, la forma de la superficie parece la de una silla de montar.

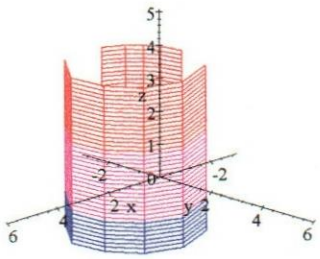
c.) **Cilindros Cuádricos**

Cuando una de las variables x , y o z no está presente en la ecuación de una superficie, entonces ésta es un cilindro cuádrico.

Superficie cilíndrica:

Se llama así a la superficie generada por una recta que se mueve de tal manera que se mantiene siempre paralela a una recta fija dada y pasa siempre por una curva fija, también dada.

La recta fija se llama " Generatriz" y la curva fija "Directriz" de la superficie cilíndrica.



En este caso, la directriz es una curva del plano xy de ecuación : $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

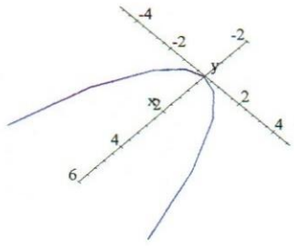
- Si $P(x.y.z)$ es un punto cualquiera sobre la superficie, entonces la generatriz "g" que pasa por P , corta a la directriz en el punto $P_1(x_1,y_1,0)$.
La ecuación de esta generatriz será:

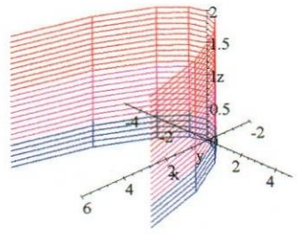
$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z}{c} \quad ,$$

siendo: a,b,c las componentesdel vector director $\overrightarrow{PP_1}$.
Además, como P_1 está sobre la directriz, entonces satisface su ecuación, es decir:

$$f(x_1,y_1) = 0 \quad ; \quad z_1 = 0$$

La siguiente gráfica ilustra lo aquí expuesto para : $y^2 = 3x$





Traza en el plano xy

- Si la directriz es una curva del plano zy, la ecuación de la directtriz será:

$$\begin{cases} f(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Si $P(x.y.z)$ es un punto cualquiera sobre la superficie, entonces la generatriz "g" que pasa por P , corta a la directriz en el punto $P_1(0,y_1,z)$.
La ecuación de esta generatriz será:

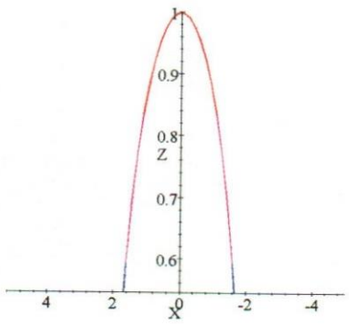
$$\frac{x}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \quad ,$$

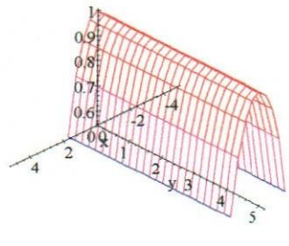
siendo: a,b,c las componentesdel vector director $\overrightarrow{PP_1}$.
Además, como P_1 está sobre la directriz, entonces satisface su ecuación, es decir:

$$f(y_1,z_1) = 0 \quad ; \quad x_1 = 0$$

La siguiente gráfica ilustra lo aquí expuesto para : $4z^2 + y^2 = 4$

La siguiente gráfica ilustra lo aquí expuesto para : $4z^2 + x^2 = 4$





$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

Traza en el plano zx

c.1) Cilindro Elíptico

Consideremos la superficie de ecuación : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Nótese que no está presente la variable z $\Rightarrow$La directriz está en elplano xy

- **Intersecciones con el eje** x: $\left\{ \begin{array}{c} z = ? \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \pm a$

- **Intersecciones con el eje** y: $\left\{ \begin{array}{c} z = ? \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = \pm b$

Trazas:

- Traza sobre el plano xy: $z = k \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ todas las trazas con planos horizontales $(z = k)$, son elipses congruentes.
- Traza sobre el plano xz: $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow$ las generatrices del cilindro son rectas verticales de ecuación : $x = \pm a$
- Traza sobre el plano yz: $x = 0 \Rightarrow y = \pm b \Rightarrow$ las generatrices del cilindro son rectas verticales de ecuación : $y = \pm b$

Simetría:

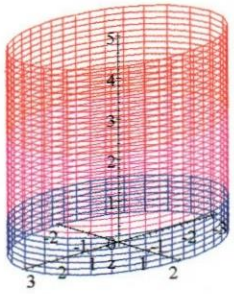
- $x \rightarrow -x \Rightarrow$ Simetría respecto del plano yz.
- $y \rightarrow -y \Rightarrow$ Simetría respecto del plano xz.
- $x, y \rightarrow -x, -y \Rightarrow$ Simetría respecto del *eje z*.

Nombre:

- Dado que las trazas con los planos $z = k$ son elipses, la superficie recibe el nombre de CILINDRO ELÍPTICO .

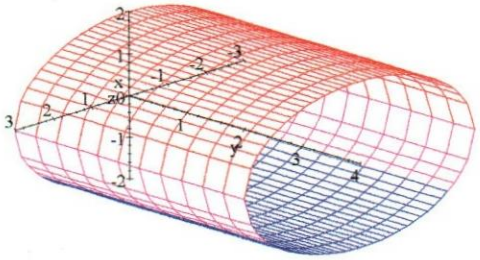
Gráfica:

- La gráfica para : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, obtenida a través de la técnica: "**Maple** + **Plot3D** + **Cylindrical**", se muestra a continuación:



$\rho = \frac{6}{\sqrt{4+5\sin^2\theta}}$

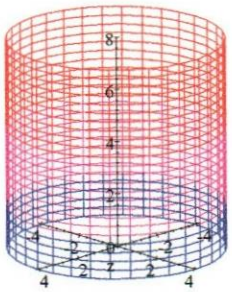
Si se trata de la ecuación: $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ el cilinro tendrá su directriz en el plano zx , y sus generatrices serán paralelas al *eje* y, como ilustra la siguiente figura:



$z = \pm 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$

c.2) **Cilindro Circular**

Si en las ecuaciones del ejemplo anterior se hace : $a = b$, la ecuación dada se reduce a : $x^2 + y^2 = a^2$, lo que representa una superficie en donde todas las trazas con planos horizontales $(z = k)$ son círculos congruentes; las trazas con planos veeticales son rectas paralelas al *eje z*. Su gráfica será un CILINDRO CIRCULAR RECTO como se muestra a continuación para el caso: $a = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$.



c.3) **Cilindro Parabólico**:

Consideremos la ecuación : $y = x^2$

(Nótese la ausencia de una de las variables: z)

Intersecciones:

- **Intersecciones con el eje** z: $\left\{ \begin{array}{c} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = 0 \ ; \ z = ? \Rightarrow$

  intersecta al eje z.

- **Intersecciones con el eje** x: $\left\{ \begin{array}{c} z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = ax^2 \Rightarrow x = 0$

- **Intersecciones con el eje** y: $\left\{ \begin{array}{c} z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 0$

Trazas:

- Traza sobre el plano xy : $z = k \Rightarrow y = ax^2 \Rightarrow$ todas las trazas con planos horizontales ($z = k$) son parábolas congruentes.
- Traza sobre el plano xz : $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \quad 0 = ax^2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ es la recta $(0, 0, z)$, es decir, el *eje z*.
- Traza sobre el plano yz : $x = 0 \Rightarrow \quad y \quad = a(0) = 0 \Rightarrow$ es la recta $(0, 0, z)$, es decir, el *eje z*.

  Por lo tanto, las generat5ices son rectas paralelas al *eje z*,

Simetría:

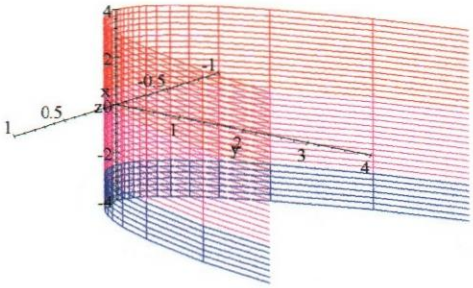
- $x \to -x \Rightarrow$ Simetría respecto del plano yz.

Nombre:

- Dado que las trazas con los planos $z = k$ son parábolas, la superficie recibe el nombre de CILINDRO PARABÓLICO .

Gráfica:

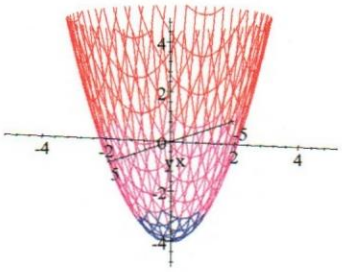
La gráfica para : $y = 4x^2$ se muestra a continuación:



5.3) Otras superficies cuádricas

a) Graficar la superficie de ecuación: $z = x^2 + y^2 - 4$

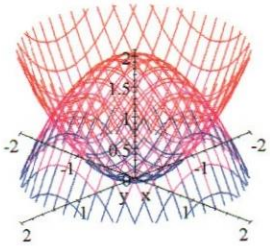
Aplicando los métodos antes expuestos, se obtiene



$x^2 + y^2 - 4$

b) Dibujar la región limitada por los paraboloides: $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$

Aplicando los métodos antes expuestos, se obtiene:



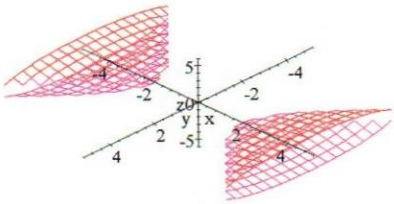
$x^2 + y^2$

c) Graficar la superficie de ecuación: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 1$

Pasando a la forma canónica, se obtiene:

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 1 \text{ de donde: } z = \pm\sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} - 1}$$

La superficie es un hiperboloide de dos hojas, con eje el eje y



$\sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} - 1}$

d) Discutir la superficie: $x^2 + z - 2 = 0$

Solución:

Dada la ausencia de la variable y, es evidente que se trata de un Cilindro; determinemos su naturaleza:±

Intersecciones:

- **Intersecciones con el eje** z: $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = ? \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow$

  se trata del plano horizontal $z = 2$ que, al intersectarse con la superficie dada, origina la recta : $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{array}\right.$

- **Intersecciones con el eje** x: $\left\{\begin{array}{l} y = ? \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ recta: $\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ y = y \\ z = 0 \end{array}$

- **Intersecciones con el eje** y: $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 = 0 \Rightarrow$ absurdo

  no hay cintersección con el *eje y*.

Trazas:

- Traza sobre el plano xy: $z = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ son rectas paralelas al *eje y*.
- Traza sobre el plano xz: $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 = 2 - z \Rightarrow$ parábola es la recta $(0,0,z)$, es decir, el *eje z*.
- Traza sobre el plano yz: $x = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow$ recta

Simetría:

- Si se sustituye x por -x, la ecuación dada no cambia por lo que la superficie es simétrica respecto del plano yz.

Secciones:

- Los planos $z = k$ cortan a la superficie con curvas de ecuación:

  $$x^2 + k - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2-k} \quad ; \; k \leq 2$$

  lo que representa una familia de rectas paralelas.
- Los planos verticales $y = k$ cortan a la superficie en curvas de ecuación: $x^2 = 2 - z$, lo que representa una familia de parábolas iguales y paralelas.
- Los planos verticales $x = k$ cortan a la superficie en curvas de ecuación: $k^2 + z = 2 \Rightarrow z = 2 - k^2$, lo que representa una familia de retas paralelas.

Extensión:

No hay restricciones para los valores de x, es decir: $x \in R$

Los valores de z deben satisfacer la ecuación dada, luego:

$$x^2 = 2 - z \quad \Rightarrow \quad z \leq 2$$

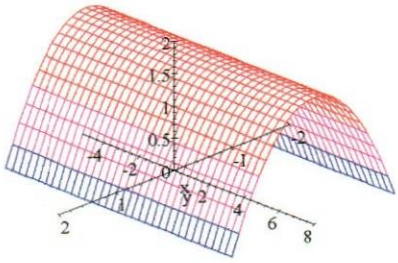
por lo tanto, la gráfica está dada en su totalidad, por ebajo del plano $z = 2$.

Nombre:

- Evidentemente, se trata de un CILINDRO PARABÓLICO, con generatrices paralelas al *eje y*.

Gráfica:

La gráfica correspondiente se muestra a continuación:



$z = 2 - x^2$

e) Hallar la ecuación de la superficie ccilíndrica cuya directriz es la parábola: $x^2 = 4y$; $z = 0$, contenida en el plano xy y cuyas generatrices tienen por vector director $\vec{A} = (1,1,3)$.

Solución:

Las ecuaciones de las generatrices son: $\frac{x-x_1}{1} = \frac{y-y_1}{1} = \frac{z-z_1}{3}$

de donde: $\left\{ \begin{array}{l} x - x_1 = \frac{z-z_1}{3} \\ y - y_1 = \frac{z-z_1}{3} \end{array} \right\}$; $z = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x - \frac{z}{3} \\ y_1 = y - \frac{z}{3} \end{array} \right.$

Como $P_1(x_1, y_1, z_1)$ está sobre la parábola $\Rightarrow \left(x - \frac{z}{3}\right)^2 = 4\left(y - \frac{z}{3}\right)$

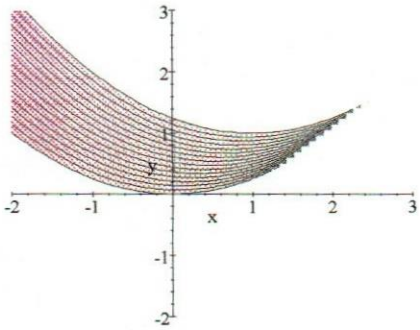
de donde: $x^2 - \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{9} = 4y - \frac{4z}{3}$ por loque, la ecuación de la superficie será:

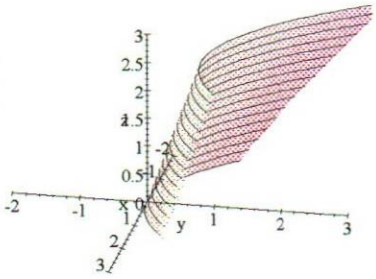
$$9x^2 - 6zx + z^2 - 36y + 12z = 0$$

cuya solución por z es:

$\left\{z = 3x - 6 + 6\sqrt{(-x+1+y)}\right\}, \left\{z = 3x - 6 - 6\sqrt{(-x+1+y)}\right\}$

La gráfica de esta superficie se presenta a continuación:





Proyección sobre plano xy

Si $P(x_1, y_1, z_1)$ es un punto cualquiera sobre la superficie, entonces: $\overrightarrow{PP_1} \,//\, (1,1,3)$

f) Demostrar que la ecuación: $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$, reprsenta una superficie cilíndrica; hallar las ecuaciones de la direcriz y las componentes del vector director de generatrices.

Solución:

- Trazas:

La intersección con planos horizontales $z = k$, son las curvas de ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2k^2 + 2xk - 2yk = 1 \;\; ; \quad z = k$$

Completando cuadrados, se obtiene:

$$(x^2 + 2kx + k^2) + (y^2 - 2ky + k^2) = 1$$

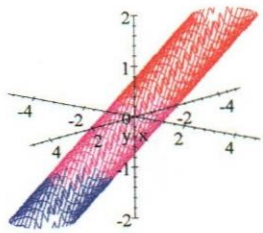
de donde:

$$(x + k)^2 + (y - k)^2 = 1$$

lo que representa una familia de circunferencias, de radio 1 y centro $(-k, k)$; $z = 0$
En particular , para $k = 0$, se obtiene: $x^2 + y^2 = 1$, lo que representa la ecuación de la directriz, en el plano xy ; en consecuencia, la superficie dada es un Cilndro Circular cuyas directriz es la circunferencia: $x^2 + y^2 = 1$; $z = 0$.
Además, el centro de cualquera de las circunferencias es $(-k, k, k)$
Si se une estos centros con el centro de la directriz $(0, 0, 0)$, se genera un vectro de coordenadas $(-k, k, k)$ que puede escribirse como: $\vec{u} = (-k, k, k)$. Dicho vector es el vector director de las generatrices, por loque estamos en presencia de un CILINDRO CIRCULAR OBLÍCUO, según lo demuestra la correspondiente gráfica, que se muestra a continuación.
En efecto, despejando la variable dependiente z de la ecuación dada, se obtiene:
$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$, *Solution is* :

$$\left\{z = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}\sqrt{(-x^2 - 2xy - y^2 + 2)}\right\}, \left\{z = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}\sqrt{(-x^2 - 2xy - y^2 + 2)}\right\}$$

en consecuencia, la gráfica correspodiente será:



Nota
Recuérdese que para resolver por la variable z la ecuación dada:

i) Se coloca el cursor a la derecha de la ecuación (o dentro de ella)

ii) Se hace *click* en el icono

iii) Se selecciona la z como variable a despejar, en la caja de diálogo.

iv) Se selecciona "OK"

g) **Otros problemas propuestos**:

Identificar y trazar la gráfica de las siguientes superficies:

g.1) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

g.2) $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

g.3) $x^2 + y^2 = 3$

g.4) $x^2 + z^2 = 1$

Compuébese que las soluciones respectivas son:

g.1) Hiperboloide de dos hojas, con eje el *eje y*.

g.2) Paraboloide Elíptico con vértice en el punto (3.1.0) , eje paralelo al *eje y*.

g.3) Cilindro circular recto, con eje el *eje z*.

g.4) Cilindro circular recto, con eje el *eje y*.

5.4) Superficies de Revolución

Si la fráfica de una función de radio r gira en torno a uno de los ejes de coordenadas, la ecuación de la superficie de revolución resultante tiene una de las formas siguientes:

a) En torno al eje x: $y^2 + z^2 = [r(x)]^2$

b) En torno al eje y: $x^2 + z^2 = [r(y)]^2$

c) En torno al eje z: $x^2 + y^2 = [r(z)]^2$

Ejemplo 1: Graficar la superficie de revolución generada cuando la gráfica de: $9x^2 = y^3$ gira en torno al eje y.

Solución:

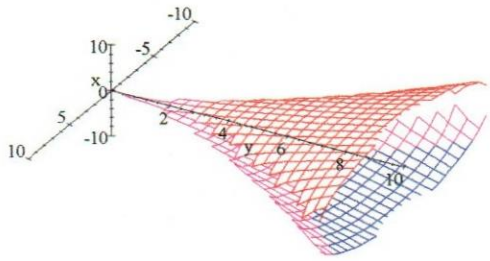
La función radio será: $x = \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} = r(y)$

La ecuación de la superficie será:

$$x^2 + z^2 = [r(z)]^2 \rightarrow x^2 + y^2 = \left[\ \tfrac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}\ \right]^2$$

de donde: $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}y^3 \rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{9}y^3 - x^2}$

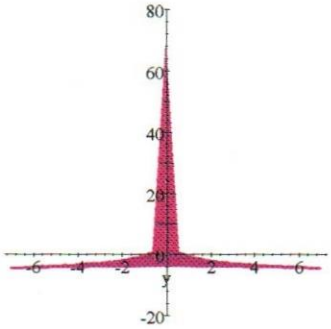
La gráfica correspondiente será:

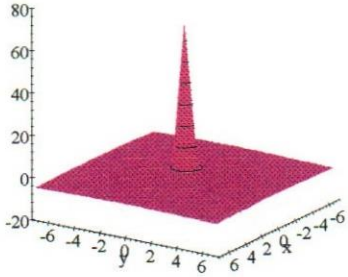


$\sqrt{\frac{1}{9}y^3 - x^2}$

Ejemlo 2 : Graficar la superficie de ecuación: $x^2 + y^2 = e^{-z}$

Su gráfica será:



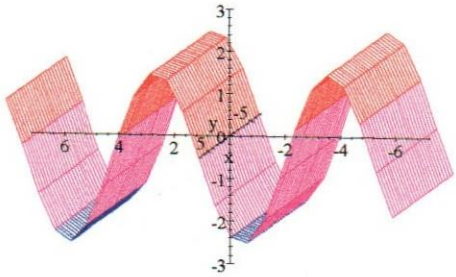


$z = -\ln(x^2 + y^2)$

5.5) Otras superficies en $\mathbf{R}^3$

a) Graficar la superficie de ecuación: $z = 2\sin x$

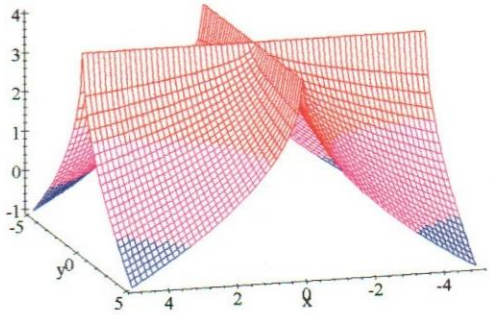
Su gráfica será:



▶ $z = 2\sin x$

b) Graficar la superficie de ecuación: $z = 4 - \sqrt{|xy|}$

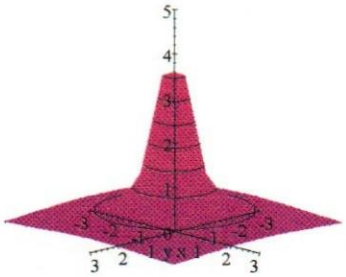
Su gráfica será:

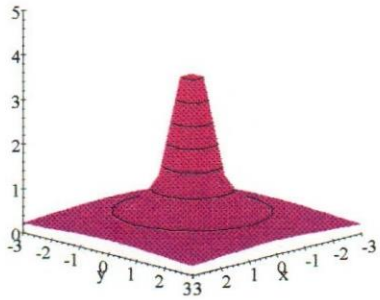


$4 - \sqrt{|xy|}$

c) Graficar la superficie de ecuación: $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Su gráfica será:

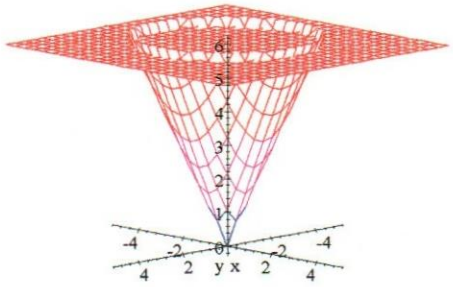




d) Graficar la región acotada por las gráficas de las ecuaciónes:

$$z = 2\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad z = 6$$

Su gráfica será



$2\sqrt{x^2+y^2}$

5.6) Ecuaciones Paramétricas en coordenadas rectangulares

Del mismo modo como se describe una curva en un plano a través de dos ecuaciones paramétricas: $x = x(t)$ y $y = y(t)$ para valores de t en un intervalo I, se pueden describir superficies en el espacio con tres ecuaciones paramétricas. En coordenadas rectángulares, las superficies está definidas en ecuaciones paramétricas, cuando están dadas por las ecuaciones:

$$x = f(s,t) \ , \quad y = g(s,t), \quad \wedge \quad z = h(s,t)$$

para : $a \le s \le b \ , \ c \le t \le d$

5.6.1) Gráfica

Para obtener la gráfica de una superficie parametrizada en coordenadas rectangulares:

a) Se hace *clik* en el icono de la Barra de Herramientas.

Opcionalmenta, se puede elegir: "**Isert**+**Brackets**+( )"

b) En el modo Matemática, se escriben las componentes :

$$f(s,t),\ \ g(s,t),\ \ h(s,t)$$

dentro del paréntesis, en el el orden prefijado.

c) Se selecciona: "**Maple+Plot3D+Rectangular**"

El resultado será la gráfica de la superficie parametrizada.

5.6.2) Ejemplos:

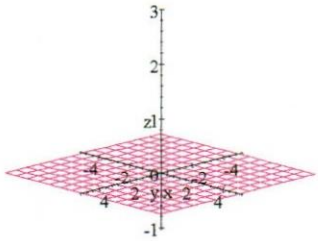
Ejemplo 1

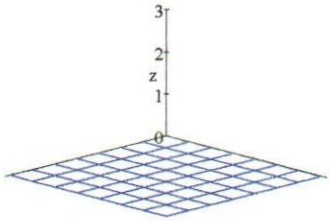
Obtener la gráfica del plano horizontal (plano xy: $z = 0$)

Solución:

Obviamente, las ecuaciones paramétricas de este plano son: $(x, y, 0)$

La respectiva gráfica se muestra a continuación:





$(x, y, 0)$

Giro, 45° ; Elevación: 75° Giro, 45° ; Elevación: 75°

Ejemplo 2

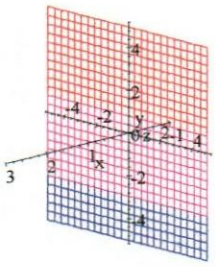
Obtener la gráfica del plano vertical (plano zy: $x = 0$)

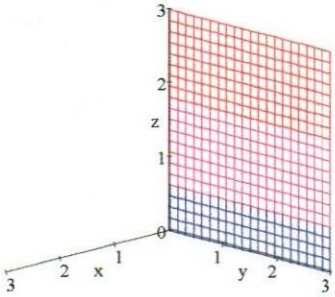
Solución:

Las ecuaciones paramétricas de este plano son: $(0, y, z)$

La respectiva gráfica se muestra a continuación:

a) $(y, z) \in R$; $x = 0$ b) $y, z \geq 0$; $x = 0$





$(0, y, z)$

Giro, 45° ; Elevación: 75° Giro, 45° ; Elevación: 75°

Ejemplo 3

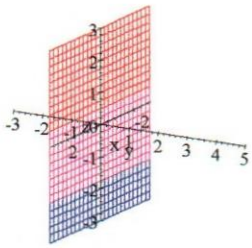
Obtener la gráfica del plano lateral (plano zxy: $y = 0$)

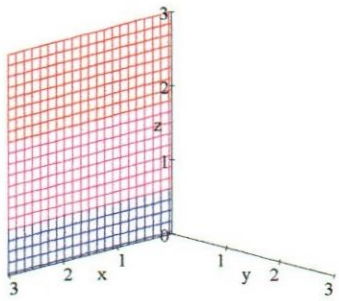
Solución:

Las ecuaciones paramétricas de este plano son: $(x, 0, z)$

La respectiva gráfica se muestra a continuación:

a) $(x,z) \in R \;\; ; \;\; y = 0$ b) $x,z \geq 0 \;\; ; \;\; y = 0$





$(x, 0, z)$

Giro, 30° ; Elevación: 75° Giro, 45° ; Elevación: 75°

Ejemplo 4

Obtener la gráfica de la superficie dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = s \sin s \cos t$$
$$y = s \cos s \cos t$$
$$z = s \sin t$$

Solución:

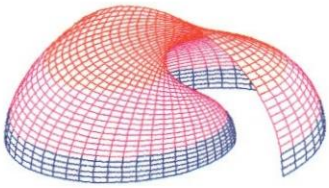
Se escribe el vector: $(s \sin s \cos t, s \cos s \cos t, s \sin t)$ y, procediendo en la forma señalada anteriormente, para:

$$0 \leq s \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq t \leq \pi$$

se obtiene:

$(s \sin s \cos t, s \cos s \cos t, s \sin t)$

Plot Style: Patch



$(s\sin s\cos t, s\cos s\cos t, s\sin t)$

Plot Style: Wire Frame

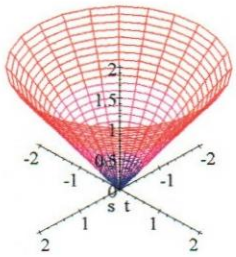
Ejemplo 2

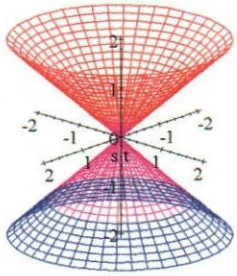
Obtener la gráfica de la superficie dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = s\cos t$$
$$y = s\sin t$$
$$z = s$$

Solución:

Escribiendo el vector: $(s\cos t, s\sin t, s)$, y procediendo como se indicó anteriormente, se obtiene





$(s\cos t, s\sin t, s)$

$0 \le s \le 2$, $0 \le t \le 2\pi$ $\qquad$ $-2 \le s \le 2$, $0 \le t \le 2\pi$

En efecto, de las ecuaciones dadas se obtiene:

$x^2 + y^2 = s^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = s^2$; pero $z = s \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2$

lo que, de acuerdo con lo expresado en el numeral 3.6.1.4), literal d) del presente trabajo, corresponde a un cono circular recto, tal como lo confirman las gráficas precedentes.

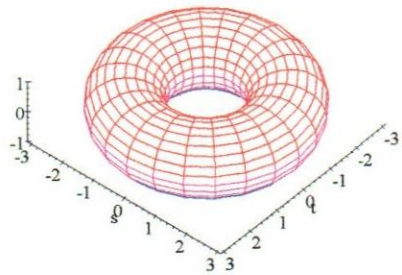
Ejemplo 3

Obtener la gráfica e la superficie dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = (2 + \cos s)\cos t$$
$$y = (2 + \cos s)\sin t$$
$$z = \sin s$$

Solución:

Escribiendo el vector: $\left[\ (2 + \cos s)\cos t, (2 + \cos s)\sin t, \sin s\ \right]$, y procediendo como se indicó anteriormente, se obtiene:



$\left[\ (2 + \cos s)\cos t, (2 + \cos s)\sin t, \sin s\ \right]$

$$0 \le s \le 2\pi \ , \ \ 0 \le t \le 2\pi$$

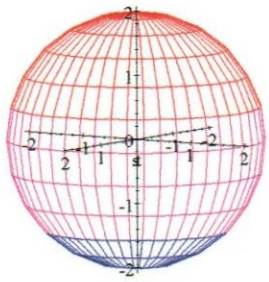
Ejemplo 4

Obtener la gráfica e la superficie dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = 2\cos s \cos t$$
$$y = 2\cos s \sin t$$
$$z = 2\sin s$$

Solución:

Escribiendo el vector: $\left[\ 2\cos s\cos t, 2\cos s\sin t, 2\sin s\ \right]$, y procediendo como se indicó anteriormente, se obtiene



$\left[\ 2\cos s\cos t, 2\cos s\sin t, 2\sin s\ \right]$

$$0 \le s \le 2\pi \ , \ \ 0 \le t \le \pi$$

De las ecuaciones dadas se obtiene: $\begin{cases} x^2 = 4\cos s \bullet \cos t \\ y^2 = 4\cos s \bullet \sin t \end{cases}$ de donde:

$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 s$$

además : $$z^2 = 4\sin^2 s$$

por lo que, sumando miembro a miembro, se obtiene :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

la que evidencia una esfera de centro $(0,0,0)$ radio $R = \sqrt{4} = 2$ tal com muestra figura anterior.

5.7) Otros Sistemas de Coordenadas en R^3

Hemos tenido oportunidad de comprobar que ciertas gráficas bidimensionales son más fáciles de representar en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares.
En esta sección, introduciremos dos sistemas alternativos de coordenadas en el espacio:

a) El Sistema de coordenadas Cilíndricas
b) El Sistema de Coordenadas Esféricas

los cuales son tambiém muy útiles para describir con mayor facilidad ciertas superficies y sólidos en el espacio.
El primero de ellos, el Sistema de Coordenadas Cilíndricas, como se verá a continuación, es una generalización de las coordenadas polares al espacio.

5.7.1) Sistema de Coordenadas Cilíndricas

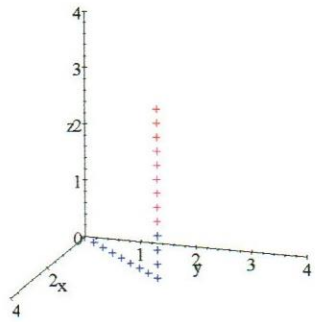
En un sitema de coordenadas cilíndricas, un punto P del espacio se representa por un trío ordenado (r,θ,z) donde:

- (r,θ) son las coordenadas polares de la proyección de P sobre el plano xy.
- z es la distancia dirigida de P a (r,θ).

Las coordenadas cilíndricas son muy convenientes para representar cilindros y superficies de revolución en general, para las cuales el eje z sea un eje de simetría.
Si (r,θ,z) con $r > 0$, son coordenadas cilíndricas de un punto P que no está sobre el eje z, entonces $(r,\theta + 2n\pi,z)$ será también una terna ordenada de P, para todo n. Para evitar esta multiplicidad de coordnadas un mismo punto, se exige que : $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) Conversión de Cilíndricas a Rectángulares: (r,θ,z) a (x,y,z)

Supongamos que un sistema de coordenadas cartesianas y un sistema coordenadas ccilíndricas so colocan de yal manera que el plano xy es plano polar del sistema cilíndrico.



En estas condiciones, las ecuaciones transferencia del sistema de Coordenadas Cilíndricas al Rectangular, son:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

b) **Conversión de Rectángulares a Cilíndricas**: (x,y,z) a (r,θ,z)

Las ecuaciones de transferencia del sistema de Coordenadas Rectangular al Cilíndrico , son:

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$z = z$$

c) **Gráficas en coordenadas Cilíndricas**

Las coordenadas cilíndricas son especialmente adecuadas para representar superficies cilíndricas y superficies de revolución, con el eje z como eje de simetría.

Ejemplo 1:

Representar gráficamente la ecuación: $x^2 + y^2 = 9$

Solución:

Como se está trabajando en tres dimensiones y la ecuación no contiene la variable z , se observa que, fijadas la x y la y, z es arbitraria sobre cada punto del plano xy. En consecuencia, se trata de un cilindro cuya traza en el plano xy es la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = 9$$

Pasando a cilíndricas, se obtiene: $r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$ pues $r > 0$

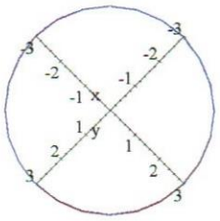
Para representar gráficamente esta superficie:

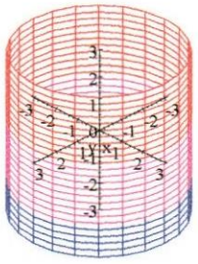
1°) En el modo Matemática, se escribe: $r = 3$

2°) Con el cursor a la derecha de la expresión, se selecciona: "**Maple+Plot 3D+Cylindrical**".

El resultado se presenta a continuación:

$$0 \le \theta \le 2\pi \ ; \ -3 \le z \le 3$$





$r = 3$

Traza en el plano xy Giro: 45° ; Elevación : 60°

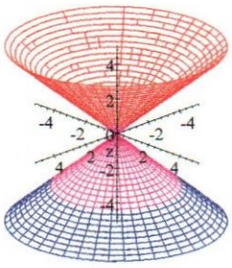
De lo expuesto se deduce que el cilindro circular recto : $x^2 + y^2 = c^2$ tiene por eje el *eje z* . En coordenadas cilíndricas, dicho cilindro tiene por ecuación: $r = c$. Esta es la razón del nombre de coordenadas "cilíndricas".

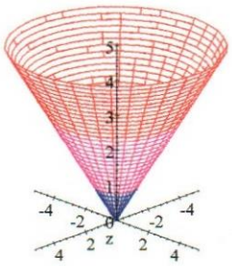
Ejemplo 2:
Describir la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es: $z = r$
Solución
Convirtiendo a una ecuación en coordenadas rectángulares, se obtiene:

$$x^2 + y^2 = r^2 \ ; \quad z = r \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = z^2$$

por lo tanto, corresponde a la ecuación de un Cono Circular Recto, cuyo eje es el eje z, tal como se ilustra a continuación :

a) Cono: **b) Semicono**:





$r = z$

$0 \le \theta \le 2\pi \ ; \ -5 \le z \le 5$ $0 \le \theta \le 2\pi \ ; \ 0 \le z \le 5$

Ejemplo 3:
Expresar en coordenadas cilíndricas la ecuación del paraboloide:

$$x^2 + y^2 = 4z$$

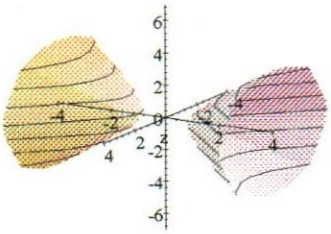
y representarlo gráficamente.
Solución: pasando a cilídricas, se obtiene: $r^2 = 4z \Rightarrow r = 2\sqrt{z}$
Para representar gráficamente esta superficie:

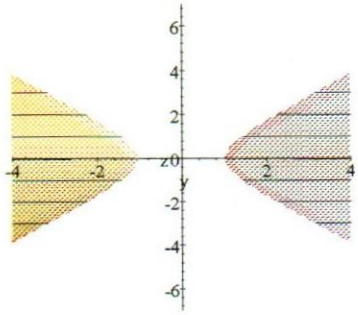
Representarlo gráficamente .
Solución:
Pasando a cilíndricas : $r^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) - z^2 = 1 \Rightarrow r^2\cos 2\theta + z^2 = 1$
de donde:

$$r = \pm\sqrt{-\frac{1+z^2}{\cos 2\theta}}$$

Procediendo en forma análoga a los ejemplos anteriores, se obtiene:

a) Giro: 30°; Elevación: 75° b) Proyección sobre plano xy





$\sqrt{-\frac{1+z^2}{\cos 2\theta}}$

Ejemplo 6:

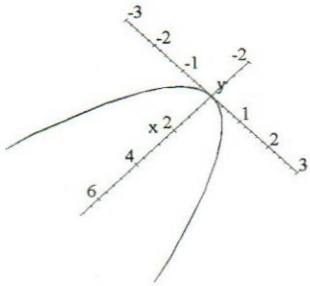
Representar gráficamente el cilindro parabólico: $y^2 = x$

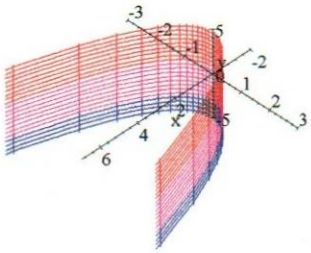
Solución: pasando a cilídricas, se obtiene: $r^2\sin^2\theta = r\cos\theta$

de donde: $r\sin^2\theta = \cos\theta \Rightarrow r = \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \csc\theta\cot\theta$

La representación gráfica será:

a) Giro: 45° ; Elevación : 0° b) Giro: 45° ; Elevación : 30°





Traza con el plano horizontal

Ejemplo 7:

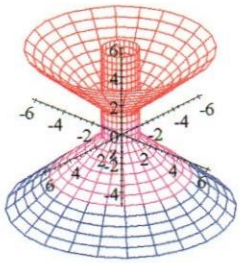
Representar en el mismo sistema de coordenadas, las gráficas de las superficies corespondientes al cilindro $r = 1$ y al cono: $r = 1 - z$

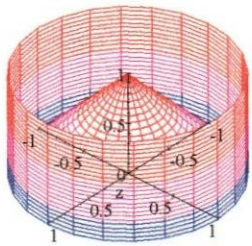
Solución: Para ello, en el modo Matemática, se escriben las expresiones separadas por una coma (en color rojo).

Luego se selecciona:

"**Maple+Plot3D+Cylindrical**"

La representación gráfica será:





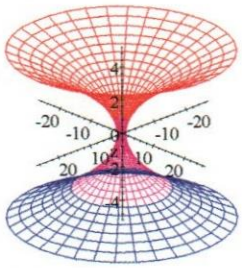
$1, 1-z$

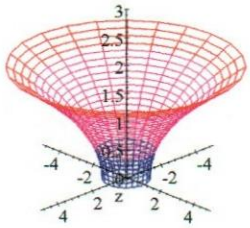
$0 \leq \theta \leq 2\pi \ ; \ -5 \leq z \leq 6$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 2\pi \ ; \ 0 \leq z \leq 1$

Ejemplo 8:

Representar gráficamente : $r = z^2 + 1$

Solución: Seleccionando:"**Maple+Plot3D+Cylindrical**", se obtiene:





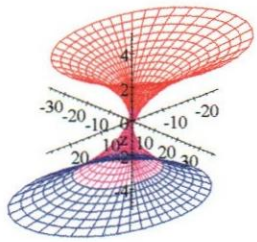
$z^2 + 1$

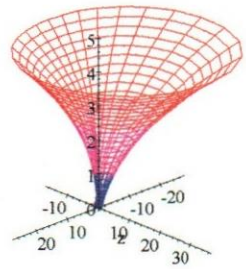
$0 \leq \theta \leq 2\pi \ ; \ -5 \leq z \leq 5$ $\qquad$ $0 \leq \theta \leq 2\pi \ ; \ 0 \leq z \leq 3$

Ejemplo 9:

Representar gráficamente : $r(\theta, z) = (z + \sin\theta)^2$

Solución: Seleccionando:"**Maple+Plot3D+Cylindrical**", se obtiene:





$(z+\sin\theta)^2$

$0 \le \theta \le 2\pi \;\; ; \;\; -5 \le z \le 5$ $\qquad$ $0 \le \theta \le 2\pi \;\; ; \;\; 0 \le z \le 5$

5.7.2) Superficies parametrizadas en Coordenads Cilíndricas

Para graficar una superficie parametrizada en coordenadas cilíndricas, se construye el vector: $[r,\theta,z]$ en donde:

$$r = f(s.t)$$
$$\theta = g(s,t)$$
$$z = h(s,t)$$

y se selecciona: "**Maple+Plot3D+Cylindrical**"

Ejemplo 1

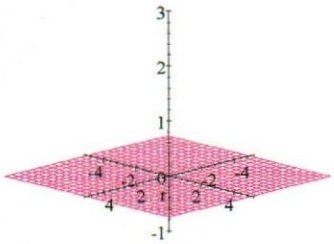
Obtener la gráfica del plano horizontal (plano xy: $z = 0$)

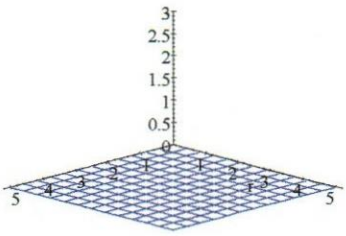
Solución:

Obviamente, en coordenadas cilíndricas, las ecuaciones paramétricas de este plano son:$(r,\theta,0)$

La respectiva gráfica se muestra a continuación:

a) $(r,\theta) \in R \;\; ; \;\; z = 0$ $\qquad$ b) $r,\theta \ge 0 \;\; ; \;\; z = 0$





$(r,\theta,0)$

Giro, 45° ; Elevación: 75° $\qquad$ Giro, 45° ; Elevación: 75°

Ejemplo 2

Obtener la gráfica del plano vertical (plano zy: $x = 0$)

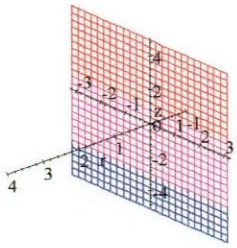
Solución:

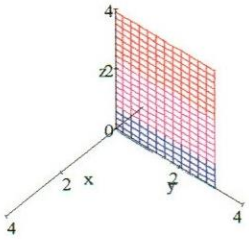
Las ecuaciones paramétricas de este plano, en coordnadas cilíndricas, son:

$$\left(r, \tfrac{\theta}{2}, z\right)$$

La respectiva gráfica se muestra a continuación:

a) $(y,z) \in R$; $\theta = \frac{\pi}{2}$ b) $y,z \geq 0$; $\theta = \frac{\pi}{2}$





$\left(r, \frac{\pi}{2}, z\right)$

Ejemplo 3

Obtener la gráfica del plano lateral (plano zx : $y = 0$)

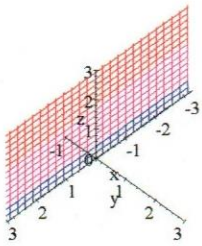
Solución:

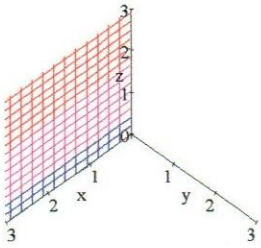
Las ecuaciones paramétricas de este plano, en coordenadas cilíndricas, son:

$$(r, 0, z)$$

La respectiva gráfica se muestra a continuación:

a) $(r,z) \in R$; $\theta = 0$ b) $x,z \geq 0$; $\theta = 0$





$(r, 0, z)$

Ejemplo 4

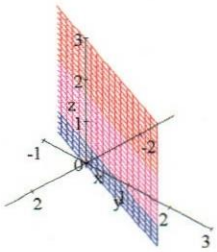
Obtener la gráfica del plano definido en coordenadas cilindricas por la ecuación: $\theta = \frac{\pi}{3}$.

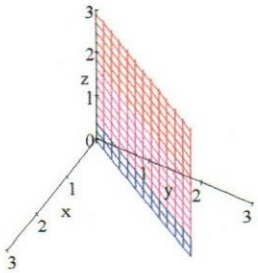
Solución:

Las ecuaciones paramétricas de este plano, en coordenadas cilíndricas, son: $\left(r, \frac{\pi}{3}, z\right)$

La respectiva gráfica se muestra a continuación:

a) $(r,z) \in R$; $\theta = \frac{\pi}{3}$ b) $x,z \geq 0$; $\theta = \frac{\pi}{3}$





$\left(r, \frac{\pi}{3}, z\right)$

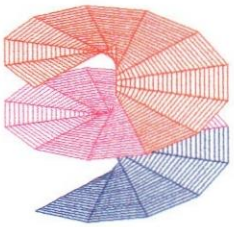
Giro: 45° ; Elevación : 45° Giro: 30° ; Elevación: 45°

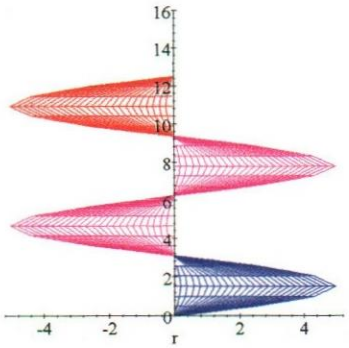
Ejemplo 5:

Se presenta a continuación la gráfica de la "**Escalera en espiral**", dada por la ecuación paramétrica: $z = \theta$.

La parametrización correspondiente será: $[r,\theta,\theta]$

a) Giro: 45° ; Elevación: 45° b) Giro: 0° ; Elevación: 90°





$[r,\theta,\theta]$

$0 \leq r \leq 1$; $0 \leq \theta \leq 4\pi$ $0 \leq r \leq 1$; $0 \leq \theta \leq 5\pi$

5.7.3) Sistema de Cordenadas Esféricas

El Sistema de Coordenadas Esféricas contiene un plano polar y un eje perpendicular a dicho plano polar. Si el origen del eje z se hace coincidir con el polo del plano polar, un punto P del espacio se representa por un trio ordenado (ρ,θ,ϕ), donde:

* La coordenada ρ es la distancia de P al origen, es decir, el módulo del vector de posoción $\overrightarrow{OP}$; en consecuencia : $\rho = \left|\overrightarrow{OP}\right|$
* La coordenada θ es la medida en radianes del ángulo polar de la proyección de $\overrightarrow{OP}$ en el plano polar. Es en consecuencia, el mismo ángulo θ de las coordenadas cilíndricas.

Se toma siempre el valor princip

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2\left[\sin^2\phi\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)+\cos^2\phi\right] = \rho^2$$

luego: $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$

NOTA

El origen de coordenadas, en el sistema de coordenadas esféricas, es:

$$0(0,\theta,\phi)$$

en donde:

$r = 0$, θ y ϕ pueden adquirir cualquier valor.

b) **Conversión de Rectángulares a Esféricas**: (x,y,z) a (ρ,θ,ϕ)

Las ecuaciones de transferencia del sistema de CoordenadasCilíndricas al Rectangular, son:

* $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$
* $\tan\theta = \frac{y}{x}$
* $\phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$

Las coordenadas esféricas son especialmente apropiadas para estudiar superficies que tengan simetría respecto del origen de coordenadas, tales como: esferas, conos, ciertos planos. En efecto, nótese la sencillez de las ecuaciones de las siguientes superficies, expresadas en este sistema:

*	Esfera con centro en el origen y radio R	:	$\rho = R$
*	Semiplano vertical	:	$\theta = c$
*	Plano horizontal $(z = 0)$	:	$\phi = \frac{\pi}{2}$
*	Plano vertical $(x = 0)$	:	$\theta = \frac{\pi}{2}$
*	Plano lateral $(y = 0)$	:	$\theta = 0$
*	Semicono	:	$\phi = c\,, 0 < c < \frac{\pi}{2}$

c) **Gráfica en Cooredenadas Esféricas**:

Las ecuaciones de transferencia del sistema de Coordenadas

Para representar gráficamente una superficie expresada encoordenadas esféricas, se sigue el siguiente procedimiento;

1°) En el modo Matemática, se escribe: $\rho = f(\theta,\phi)$

2°) Con el cursor a la derecha de la expresión, se selecciona: "**Maple+Plot 3D+Spherical**".

El resultado, será la gráfica de la superficie en estudio.

Ejemplo 1:

Esfera de centro en el origen y radio c

La gráfica de la ecuación : $\rho = c$ con $c = constante$ es una superficie esférica de radio c y centro en el origen.

En efecto, como $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$, entonces: $\rho = c \Rightarrow$

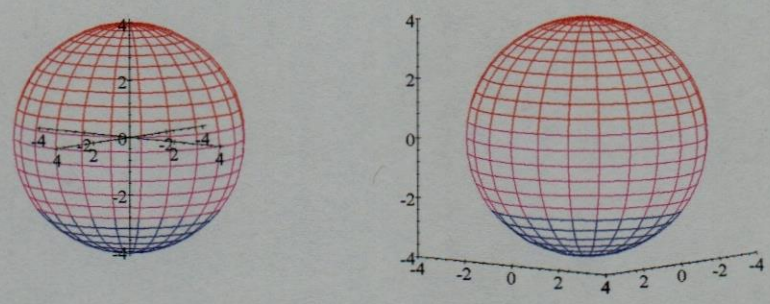
$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 ,$$

lo que representa una esfera de centro en $(0,0,0)$ y radio c.
Esta circunstancia es la que le da el nombre de"**coordenads esféricas**" al sistema bajo estudio.
En el caso particular : $\rho = 4$, para representar gráficamente esta superficie:

1°) En el modo Matemática, se escribe: $\rho = 4$

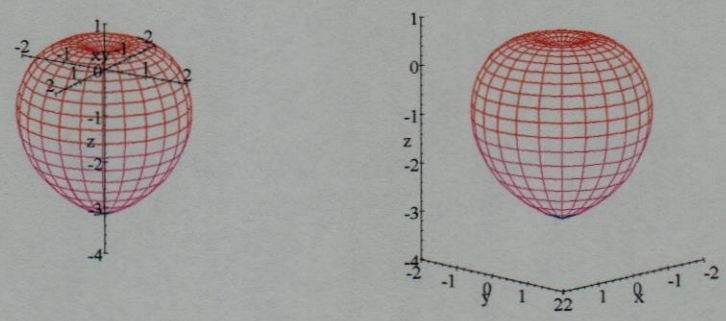
2°) Con el cursor a la derecha de la expresión, se selecciona: "**Maple+Plot 3D+Spherical**".

El resultado, en dos perspectivas, se presenta a continuación:



$\rho = 4$

Ejemplo 2:
Gráfica de : $\rho = \phi$; $0 \le \phi \le \pi$
Su gráfica , en dos perspectivas, se presenta a continuación:



ϕ

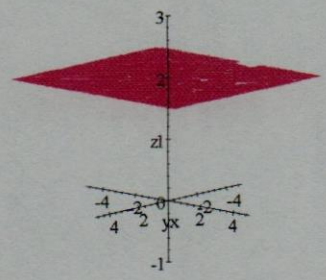
c.1) Planos paralelos a los planos coordenados

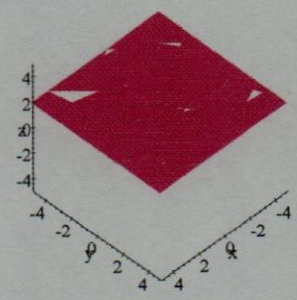
c.1.1) Plano paralelo al plano xy: $z = Constante$

Ejemplo: $z = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = \rho\cos\theta$,

de donde se obtiene: $\rho = 2\sec\theta$

Su gráfica , en dos perspectivas, se presenta a continuación:





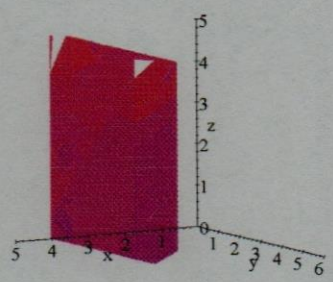
$2\sec\phi$

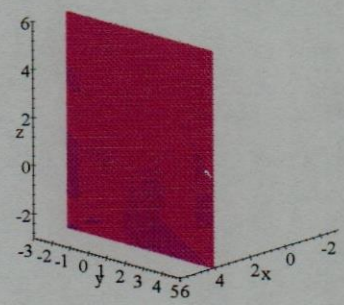
c.1.2) Plano paralelo al plano zy: $x = Constante$

Ejemplo: $x = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = \rho\sin\phi\cos\theta$

de donde se obtiene: $\rho = 4\csc\phi\sec\theta$

Su gráfica , en dos perspectivas, se presenta a continuación:





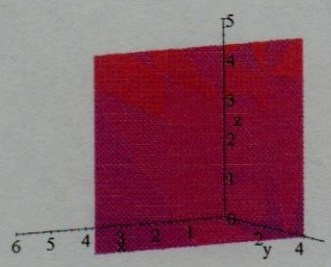
$4\csc\phi\sec\theta$

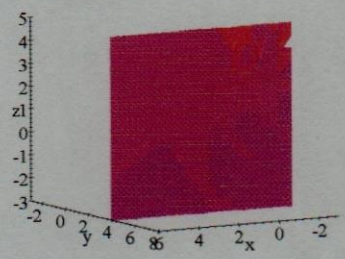
c.1.3) Plano paralelo al plano zx: $y = Constante$

Ejemplo: $y = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = \rho\sin\phi\sin\theta$,

de donde se obtiene: $\rho = 4\csc\phi\sec\theta$

Su gráfica , en dos perspectivas, se presenta a continuación:





$4\csc\phi\csc\theta$

c.2) Cono : representar gráficamente el cono: $x^2 + y^2 = z^2$

Solución: pasando a esféricas, se obtiene: $\tan^2\phi = 1$

de donde: $\phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

La solución: $\phi = \frac{\pi}{4}$ representam la mitad superior del cono y la

ecuación: $\phi = \frac{3\pi}{4}$, su mitad inferior.

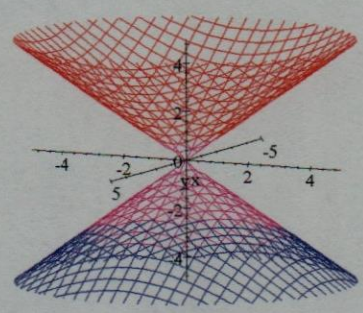
Para representar gráficamente esta superficie:

1°) En el modo Matemática, se escribe: $\phi = \frac{\pi}{4}$

2°) Como $\phi = \frac{\pi}{4}$ no depende de ρ, se despeja la variable z en la ecuación dada, por lo que : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Con el cursor a la derecha de la expresión, se selecciona: "**Maple+Plot 3D+Rectangular**".

El resultado se presenta a continuación:



$\sqrt{x^2 + y^2}$

NOTA:

La solución de este problema estrictamente en el sistema de coordenadas esféricas, se presenta más adelante (Punto 6.6.3.4), en el estudio de las superficies parametrizadas en dicho sistema.

c.3) **Esfera**: Representar gráficamente la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

Solución: En coordenadas esféricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{y} \qquad z = \rho\cos\phi \ ,$$

la ecuación dada adopta la siguiente forma :

$$\rho^2 - 4\rho\cos\phi = 0 \Rightarrow \rho(\rho - 4\cos\phi) = 0$$

De donde:

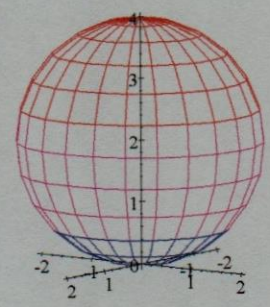
$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = 4\cos\phi \end{cases}$$

Para representar gráficamente esta superficie:

1°) En el modo Matemática, se escribe: $\rho = 4\cos\phi$

2°) Con el cursor a la derecha de la expresión, se selecciona: "**Maple+Plot 3D+Spherical**".

El resultado es una esfera con centro en $C(0,0,2)$ y $Radio = 2$ como se muestra a continuación:



$$\rho = 4\cos\phi$$

Obsérvese que el conjunto solución de esta ecuación ($\rho = 4\cos\phi$), incluye un punto con $\rho = 0$

Ejemplo 1:

Determine una ecuación en coordenadas esféricas del paraboloide elíptico de ecuación rectangular: $z = x^2 + y^2$. y represéntelo gráficamente.

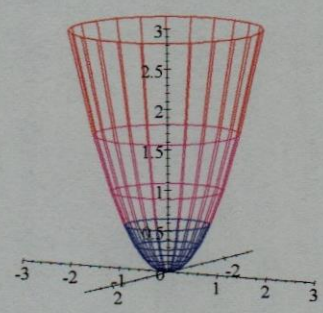
Solución:

Pasando a coordenadas esféricas: $\rho\cos\phi = \rho^2\cos^2\theta\sin^2\phi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi$

de donde: $\rho\cos\phi = \rho^2\sin^2\phi\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) \Rightarrow \cos\phi = \rho\sin^2\phi, porloque$:

$$\rho = \frac{\cos\phi}{\sin^2\phi} = \frac{1}{\sin\phi}\frac{\cos\phi}{\sin\phi} \quad \Rightarrow \quad \rho = \csc\phi\cot\phi$$

La gráfica correspondiente se presenta a continuación:



$$\rho = \csc\phi\cot\phi$$

Ejemplo 2:

Determinar la gráfica de la ecuación esférica: $\rho = 2\cos\phi$

Solución:

Multiplicando por ρ ambos miembros de la ecuación dada: $\rho^2 = 2\rho\cos\phi$

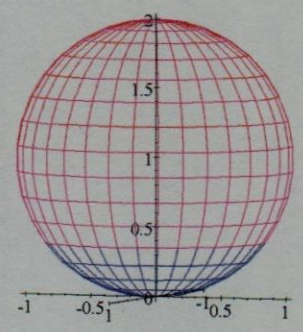
Además: $\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ z = \rho = 2\cos\phi \end{cases}$ luego: $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

de donde:

$$x^2 + y^2 + (z^2 - 2z) = 0$$

Completando cuadrados: $x^2 + y^2 + (z^2 - 1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + (z^2 - 1)^2 = 1$

la superficie es entonces una esfera de centro $(0,0,1)$ y radio 1, tal como se ilustra a continuación:



$$\rho = 2\cos\phi$$

Ejemplo 3:
Identifique la superficie dada por la ecuación esférica: $\rho = 2\sin\theta\sin\phi$
y dibuje su gráfica.
Solución:
Multiplicando por ρ ambos miembros de la ecuación dada: $\rho^2 = 2\rho\sin\theta\sin\phi$

Además: $\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \end{cases}$ luego: $x^2 + y^2 + z^2 = y$

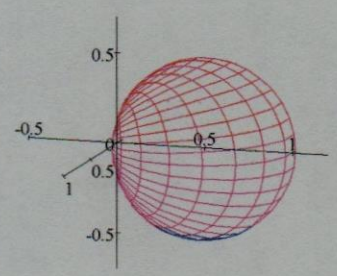
de donde:

$$x^2 + (y^2 - 1) + z^2 = 0$$

Completando cuadrados:

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 + z^2 - \tfrac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4}$$

la superficie es entonces una esfera de centro $\left(0, \tfrac{1}{2}, 0\right)$ y radio $\tfrac{1}{2}$, tal como se ilustra a continuación:



$$\rho = \sin\theta\sin\phi$$

5.7.4) Superficies parametrizadas en Coordenadas Esféricas

Para representar gráficamente una superficie parametrizada en coordenadas esféricas, se escribe en el modo Matemática, el vector: $[\rho, \theta, \phi]$ en donde:

$$\rho = f(s,t)$$

$$\theta = g(s,t)$$
$$\phi = h(s,t)$$

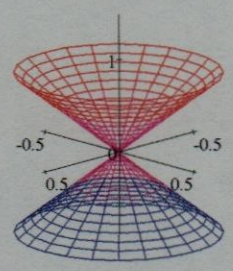
y se selecciona : "**Maple+Plot 3D + Spherical**"

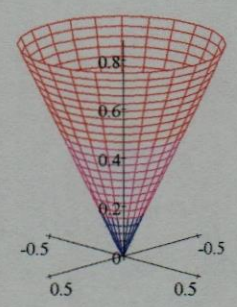
Ejemplos:

a) Consideremos la superficie del cono dado por la ecuación: $\phi = \frac{\pi}{6}$

La ecuación paramétrica en coordenadas esféricas será: $\left[\rho, \theta, \frac{\pi}{6}\right]$ y la gráfica correspondiente será:

i) Cono **ii) Semicono**





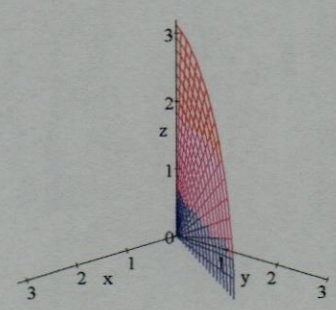
$\left[\rho, \theta, \frac{\pi}{6}\right]$

$-1 \leq \rho \leq 1$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $\qquad$ $0 \leq \rho \leq 1$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$

b) Consideremos la superficie dada por la ecuación: $\theta = c$ con: $c = constante$

La ecuación paramétrica en coordenadas esféricas será: $[\rho, c, \phi]$ y la gráfica corresponde a un plano perpendicular al plano xy, que contiene al eje z.

Su gráfica para $\theta = \frac{\pi}{3}$, será:



$\left[\rho, \frac{\pi}{3}, \phi\right]$

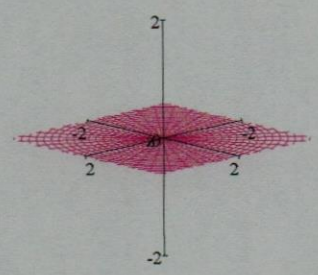
c.) **Planos Coordenados**:

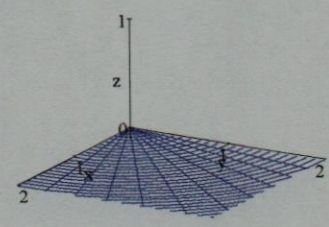
c.1) **Plano horizontal**:

La ecuación parametrica correspondiente en coordenadas esféricas, será: $\left[\rho, \theta, \frac{\pi}{2}\right]$

La gráfica, de acuerdo con lo arriba expuesto, será:

i) $\rho \in R$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $\phi = \frac{\pi}{2}$ ii) $\rho \in R$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $\phi = \frac{\pi}{2}$





$[\rho, \theta, \frac{\pi}{2}]$

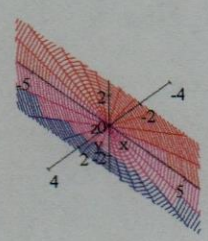
i) ii)

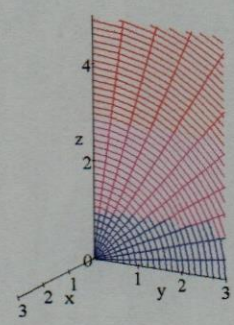
c.2) Plano vertical:

La ecuación parametrica correspondiente, en coordenadas esféricas, será: $[\rho, \frac{\pi}{2}, \phi]$

La gráfica, en dos perspectivas, será:

i) $\rho \in R$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ii) $\rho \in R$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$





$[\rho, \frac{\pi}{2}, \phi]$

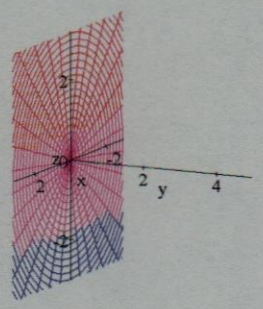
i) ii)

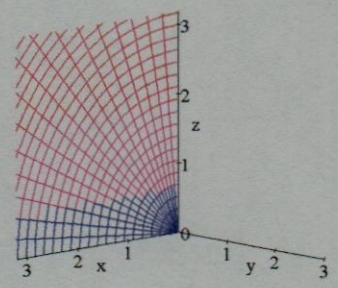
c.3) Plano lateral:

La ecuación parametrica correspondiente, en coordenadas esféricas, será: $[\rho, 0, \phi]$

la gráfica corresponde al plano xz $(y = 0)$, tal como se ilustra a continuación:

i) $\rho \in R$; $\theta = 0$; $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ii) $\rho \in R$; $\theta = 0$; $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$





$[\rho, 0, \phi]$

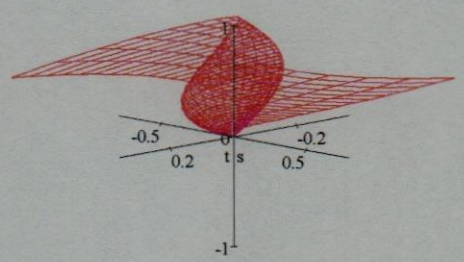
i) ii)

d) Representar gráficamente una superficie parametrizada en coordenadas esféricas de acuerdo a lo siguiente:

$$\rho = s$$
$$\theta = s^2 + t^2$$
$$\phi = t$$

El vector: $[\rho, \theta, \phi]$ correspondiente, será: $[s, s^2 + t^2, t]$

Seleccionando : "**Maple+Plot 3D + Spherical**", se obtiene:



$[s, s^2 + t^2, t]$

5.8) EJERCÍCIOS PROPUESTOS

1) Transformar a coordenadas esféricas, la ecuación cartesiana del plano:
$3x + 2y + 6z = 0$ y trazar su gráfica

2) Dada la ecuación cartesiana : $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$, expresarla en :
- Coordendas cilíndricas
- Coordenadas esféricas
- Trazar su gráfica

3) Hallar la ecuación cartesiana y la gráfica correspndiente, de la supereficie cuya ecuación en coordenadas esféricas está dada por : $\rho - 2\cos\theta = 0$.

4) Hallar la ecuación en coordenadas esféricas y reprersentar gráficamente, del paraboloide hiperbólico dado por la ecuación cartesiana : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -2z$

5) Dadas las siguientes ecuaciónes en coordenadas cilíndricas, expresarlas en

coordenadas cartesianas y dibujar la respectiva gráfica:

- $r = 4$
- $\theta = \frac{\pi}{4}$
- $r = 3\cos\theta$

6) Dadas las siguientes ecuaciónes en coordenadas esféricas, expresarlas en coordenadas cartesianas y dibujar la respectiva gráfica:

- $\rho = 4$
- $\theta = \frac{\pi}{4}$
- $\phi = \frac{\pi}{6}$

7) Expresar en coordenadas esféricas, la ecuación del hiperboloide de dos hojas:

$$-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$$

8) Use el sub-menú "**Plot 2D+Implicit**" para graficar en el mismo sistema de coordenadas, las secciones cónicas : $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$ y seleccione para tal propósito, el color rojo .
Añada a dicho sistema la gráfica de la cónica : $x + y^2 = 0$, en color azul.

9) Use el sub-menú "**Plot 2D+Implicit**" para graficar en el mismo sistema de coordenadas, las secciones cónicas : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$ y $(x-2)^2 - (y+1)^2 = 1$ y seleccione para tal propósito, el color rojo .
Añada a dicho sistema la gráfica de la cónica : $(x-2) + (y+1)^2 = 0$, en color azul.
Compare esta gráficas con las obtenidas en el problema N° y diga que conclusiones puede extraer de los resultados.

10) Determine gráfica y analíticamente los puntos de intersección de las curvas

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{y} \quad x^2 - y^2 = 4$$

Sugerencia: Grafique las dos curvas en el mismo sistema de coordenadas; para comprobar las soluciones, escriba las dos ecuaciones en una matriz y seleccione : "**Maple+Solve+Numeric**".

11) Dibuje la gráfica de las siguientes curvas, dadas en coordenadas cartesianas:

- Astroide: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$
- Folium de Descartes : $x^3 + y^3 = 6xy$

12) Dibuje en un mismo gráfico las curvas representadas por las ecuaciones:

$$xy = \frac{\pi}{2}\ ,\quad xy = \frac{3\pi}{2}\ ,\quad xy = \frac{5\pi}{2}\ .$$

Asigne colores diferentes a cada gráfica.

13) Calcule e ilustre gráficamente, los puntos de intersección de los cilindros dados por las ecuaciones paramétricas:

$$[s, \cos t. \sin t] \quad \text{y} \quad [\cos t, s, \sin t]$$

14) Calcule la intersección de la esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano de ecuación: $x + y + z = \frac{1}{2}$.
Verifique que los puntos de intersección están sobre una círcunferencia de ecuación : $x^2 + y^2 + xy - \frac{x}{4} - \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

CAPÍTULO VI

LAGRANGE

Joseph Louis Lagrange, matemático francés nacido en 1736 enTurín (Italia), donde pasó los primeros treinta años de su vida; murió en 1813. Es recordado por sus grandes tratados acerca de la mecánica analítica y de teoría de funciones, donde resumió gran parte de las matemáticas puras y aplicadas del siglo XVIII.

En 1766 y a la muerte de Leonhard Euler, sucede a éste como director de la Academia de Berlín., en Alemania. Allí residió hasta que en 1787 fue nombrado profesor de la *École Normale*, de París.

En 1762 terminó su *Calcul des Variations* obra fundamental que es todavía hoy la base fundamental de esta rama de las Matemáticas. En 1788 publicó su *Mécanique Analytic*, que es realidad el primer libro conocido de Física teórica ; en 1797 apareció su *Thérie des Fonction Analytic*. Ambos libros fueron desarrollados aplicando en forma amplia el cálculo diferencial e integral de las funciones de varias variables, expresados en términos de las coordenadas x, y, z en el espacio tridimensional.

Lagrange considertaba que su mejor obra en el campo de las Matemáticas, lo constituía su trabajo acerca de los problemas de máximos y mínimos, trabajo que inicia a la edad de 19 años, en una carta a Euler. En el método propuestro, Lagrange resolvía el típico *problema isoperimétrico* , donde se pregunta cuál es la curva de longitud de arco dada, que encierra una región plana de área máxima.

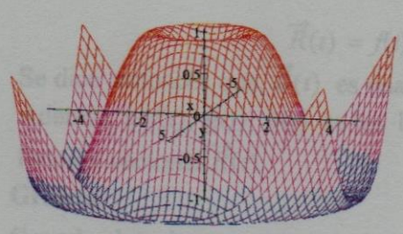
(La respuesta es el círculo).

En su obra *Mécanique Analytic* , Lagrange aplicó el conocido " Método de los Multiplicadores " para investigar el movimeinto de una partícula en el espacio, restringida a moverse sobre una superficie plana definida por una ecuaciónnde la forma:

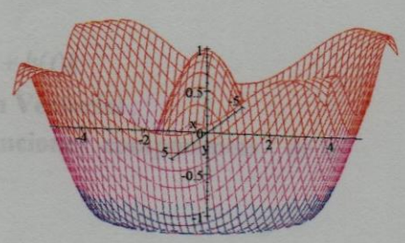
$$g(x,y,z) = 0$$

En la actualidad es método tiene aplicaciones que varían desde minimizar la cantidad de combustible que necesita una nave espacial para lograr un atrayectoria deseada, hasta maximizar la productividad de una empresa comercial limitada por la disponibilidad de recursos financieros, naturales o de personal.

La"superficie de sombrero": $|x| \leq 5, \ |y| \leq 5$



$z = \sin\sqrt{x^2+y^2}$



$z = \cos\sqrt{x^2+y^2}$

la variable t.

Evidentemente, la curva será contínua en un intervalo I si y sólo si lo son sus ecuaciones paramétricas : $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$.

Para obtener la gráfica de una "Función Vectorial" :

1°) En el modo Matemática, se escribe el vector:

$$[f(t), g(t), h(t)]$$

2°) Con el cursor a la derecha de la expresión (o en ella), se selecciona: "**Maple+Plto3D+Rectangular**" .

El resultado será la gráfica de la curva descrita por el extremo del

vector $\vec{R}(t)$.

Ejemplo 1:

Describir la gráfica definida por la función vectorial:

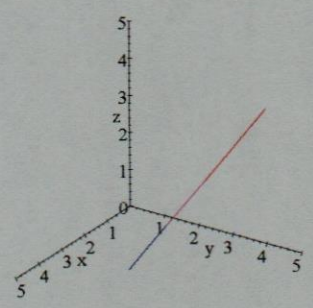
$$\vec{R}(t) = (3+t, 2-2t, -3t)$$

Solución:

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3+t \\ y = 2-2t \\ z = -3t \end{array}\right\} \text{ de donde: } \tfrac{x-3}{1} = \tfrac{y-2}{-2} = \tfrac{z}{-3} = t$$

Estas ecuaciones identifican la ecuación de una recta que pasa por el punto $P(3,2,0)$ y es paralela al vector : $\vec{A} = (1,-2,-3)$ tal como se ilustra a continuación:



$[3+t, 2-2t, -3t]$

Ejemplo 2:

Describir y representar graficamente, en un mismo sistema de coordenadas, las curvas descritas por el extremo de los vectores:

a) $\vec{R}(t) = (t, t, t)$

b) $\vec{R}(t) = (t, t, 0)$

c) $\vec{R}(t) = (5, 5, t)$

Solución: Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

a) $$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right\} \text{ de donde: } \tfrac{x}{1} = \tfrac{y}{1} = \tfrac{z}{1} = t \quad \Rightarrow$$

recta que pasa por $(0,0,0)$ y es paralela vector: $\vec{A} = (1,1,1)$;

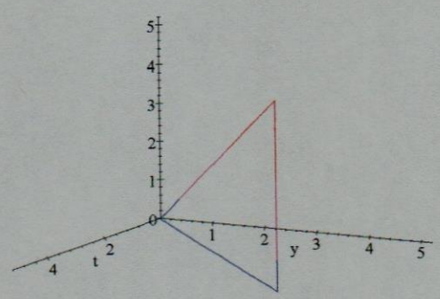
b) $$\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{ de donde: } \tfrac{x}{1} = \tfrac{y}{1} = \tfrac{0}{c} = t \quad \Rightarrow$$

recta que pasa por $(0,0,0)$ y es paralela vector: $\vec{A} = (1,1,0)$;

c) $\left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 5 \\ z = t \end{array}\right\}$ de donde: $\frac{x-5}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{1} = t \Rightarrow$

recta que pasa por $(5,5,0)$ y es paralela vector: $\vec{A} = (0,0,1)$

La representación gráfica se muestra a continuación:



Ejemplo 3:

Describir la gráfica definida por la función vectorial: $\vec{R}(t) = (\sin t, \sin t, 2\cot t)$

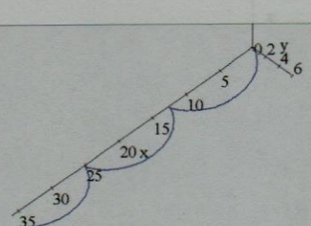
Solución:

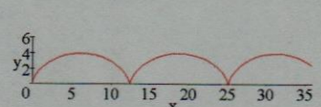
Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \sin t \\ y = \sin t \\ z = 2\cos t \end{array}\right\} \text{ de donde:}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + z^2 = y^2 + z^2 = \sin^2 t + 4\cos^2 t = 1 + 3\cos^2 t \end{array}\right.$$

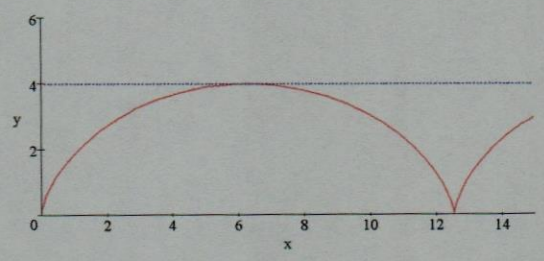
Estas ecuaciones identifican la ecuación de una circunferencia con centro en $(0,0,0)$, radio $\sqrt{2}$ y contenida en el plano bisector del primer octante, tal como se ilustra a continuación:





$[2(t - \sin t), 2(1 - \cos t), 0]$

R^3 Plano xy (z=0)



Detalle de la Cicloide

Ejemplo 5:

Trazar la gráfica definida por la función vectorial: $\vec{R}(t) = 2\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$

Solución:

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{array}\right\}$$ elevando al cuadrado y sumando término a término las dos primeras ecuaciones, se obtiene:

$$\left(\tfrac{x}{2}\right)^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

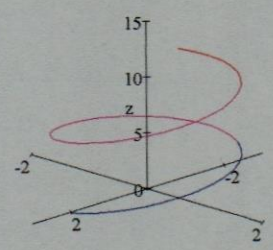
por lo que:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\tfrac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \\ z = t \end{array}\right\}$$

Estas ecuaciones identifican la ecuación de una curva que asciende alrededor de un cilindro elíptico: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, cuando t aumenta.

La curva así generada se llama " **hélice**" y la misma se encuentra presente en los resortes helicoidales.

Su gráfica se muestra a continuación:



$[2\cos t, \sin t, t]$

Ejemplo 6:

Trazar la gráfica definida por la función vectorial:

$$\vec{R}(t) = t\cos t\,\vec{i} + t\sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$$

Solución:

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = t\cos t \\ y = t\sin t \\ z = t \end{array}\right\} \text{ elevando al cuadrado y sumando}$$

término a término las dos primeras ecuaciones, se obtiene:

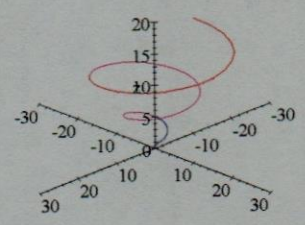
$$x^2 + y^2 = t^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = t^2$$

por lo que:

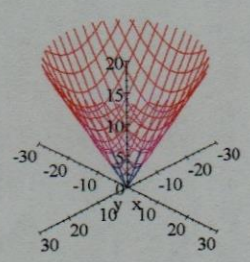
$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = t \end{array}\right\}$$

Estas ecuaciones identifican la ecuación de una curva que asciende cuando t aumenta, alrededor de un cono circular recto de ecuación: $x^2 + y^2 = z^2$

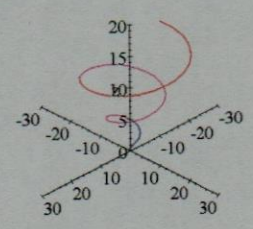
La gráfica correspondiente se muestra a continuación:



$t\cos t, t\sin t, t$



Cono



Hélice

Ejemplo 7:

Trazar la gráfica definida por la función vectorial:

$$\vec{R}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + \sin^2 t\,\vec{k}$$

Solución:

Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sin^2 t \end{array}\right\}$$ elevando al cuadrado y sumando término a término las dos primeras ecuaciones, se obtiene:

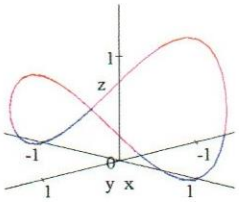
$$x^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

por lo que:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = \sin^2 t \end{array}\right\}$$

Estas ecuaciones identifican la ecuación de una curva que asciende cuando t aumenta, alrededor de un cilindro recto de ecuación: $x^2 + y^2 = 1$

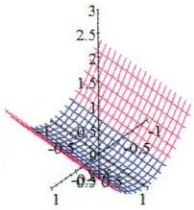
La gráfica correspondiente se muestra a continuación:



$$[\sin t, \cos t, \sin^2 t]$$

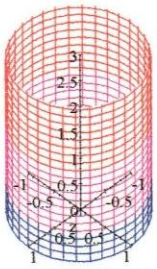
Puede demostrarse que la curva aquí mostrada representa la curva de intersección de la superficie parabólica: $z = x^2$, con el cilindro circular recto: $x^2 + y^2 = 1$, como se ilustra a continuación:

Superficie parabólica



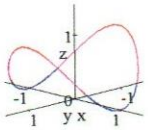
$z = x^2$

Cilindro



Cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Intersección



$\vec{R}(t) = [\sin t, \cos t, \sin^2 t]$

CAPÍTULO VII

DEL 2500 (a.C.) al 1913 (d.C.)

El docuemnto más antíguo que existe referente a las Matemáticas, es un papiro debido a un sacerdote egipcio llamado Ahames, cuyo origen se remonta a 2000 ó 2500 años antes de Jesucristo. Se titula:"*Instrucciones para conocer todas las cosas secretas*" y consiste en una colección de problemas de Arimética, Geometría y Álgebra con sus resoluciones., Las soluciones de estos problemas hacen suponer que los egipcios conocían las progresiones aritméticas y geométricas, y aventajaron a los chinos y caldeos en la determinación del valor de π, definido como la relación entre la longitud de la circunferencia a su diámetro y para el que encontraron el valor de 3,1604.

En el año de 1913 de nuestra era, el eminente profesor de Cambrige, G.H. Hardy recibió una carta de un desconocido, empleado de una oficina del gobierno en Madras, India. Su autor, Srinivasa Ramanujan, no tenía cultura universitaria ni había seguido un curso convencional en Matemáticas. En las 10 primeras páginas presentaba en letra manuscrita, aproximadamente 50 fórmulas relativas en su mayoría a integrales y series infinitas por él descubiertas. Ramanujan le pedía a Hardy su opinión para ver si tenían algo de valor. Las fórmulas eran tan exóticas y presentaban una apariencia tan extraña que Hardy pensó en un principio que se trataba de un engaño. Pronto él y su colega J. E. Littlewood se dieron cuenta que estaban viendo el trabajo de un genio matemático.

En 1914 Ramanujan llegó a Inglaterra y pasó de ser un pobre matemático autodidacta y aficionado, a colaborar como igual con los grandes matemátricos profesionales de la época. Murió en 1920 a la edad de 32 años en su tierra natal, dejando para la historia cuadernos con trabajos cuya conclusión ha ocupado a importantes matemáticos del siglo XX.

Con la posible excepción de Euclides, ninguna persona antes de Ramanujan había exhibido tal virtuosidad con las series infinitas. Un ejemplo de sus descubrimientos es la serie infinita:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{(1103+26.390\, n)}{(396)^{4n}}$$

cuyo primer término ($n = 0$) produce la conocida aproximación : $\pi = 3,14159$.

Cada término adicional produce una aproximación a π de ocho (8) cifras decimales adicionales de precisión. Bastan los primeros cuatro términos de la serie de Ramanujan para calcular la aproximación de 30 cifras decimales: π =3,14159 26535 89793 23846 26433 83279, lo cual supone

suficiente precisión para cualquier aplicación práctica. Si el universo fuera una esfera con un radio de 10.000 millones de años luz, entonces este valor de π daría el valor de la longitud de su circunferencia con una precisión de centésimas de pulgada.

En años recientes las ideas de Ramanujan han sido utilizados para calcular el valor de π con una precisión de ¡***mil millones de cifras decimales***¡ Tales cálculos gigantescos de π se utilizan por lo general para verificar la precisión de las nuevas supercomputadoras.

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,279\,502\,884\,197\,169\,399\,375\,105\,820\,974\,944\,592$$
$$307\,816\,406\,286\,208\,998\,628\,034\,825\,342\,117\,067\,982\,148\,086\,513\,282\,306\,647\,093\,844 \ldots$$

¡Obsérvese cuán próximos estuvieron los matemáticos egipcios del verdadero valor de π calculado hoy en día¡

CAPÍTULO VII
MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

7.) VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

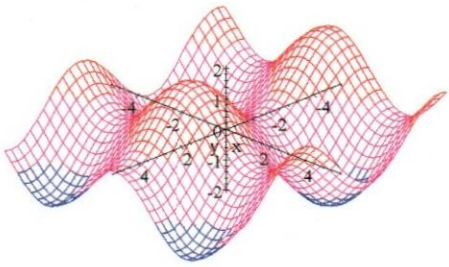
7.1) DEFINICIONES:

a) Se dice que la función $z = f(x,y)$ tiene un **máximo local** en el punto $P_0(x_0,y_0)$, si $f(x_0,y_0) > f(x,y)$ para todos los puntos (x,y) pertenecientes a un Vecindad del punto (x_0,y_0) (disco con centro en (x_0,y_0)).
Al número $f(x_0,y_0)$ se le llama "**Máximo Local**".

b) Análogamente, si $f(x_0,y_0) > f(x,y)$ para todos los puntos (x,y) pertenecientes a dicha Vecindad del punto (x_0,y_0) , al número $f(x_0,y_0)$ se le llama "**Mínimo Local**".

c) Si la desigualdades incluídas en los literales a) y b) se satisfacen para todos los puntos (x,y) del dominio de f, entonces f tiene un "**Máximo Absoluto**" o un "**Mínimo Absoluto**" en (x_0,y_0) , según el caso.

La figura muesta una función ($z = \sin x + \cos x$), con varios máximos y mínimos



$\sin x + \cos y$

Ejemplo 1

La función $z = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1$, alcanza un mínimo en el punto $(1,1)$, siendo su valor:

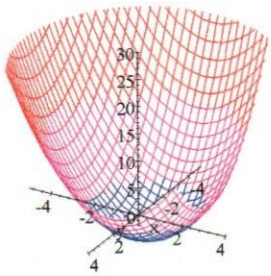
$$f(1,1) = -1.$$

En efecto, $(x-1)^2$ y $(y-1)^2$ son siempre positivos, para todo $(x,y) \neq (1,1)$, luego:

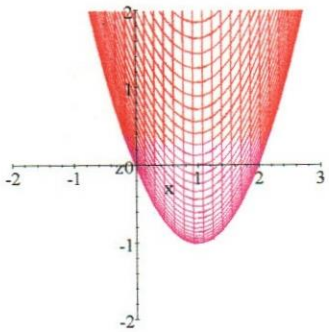
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 > -1$$

La siguiente gráfica ilustra este resultado:

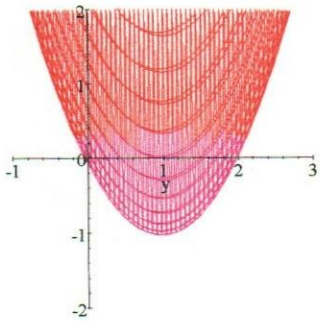
$$z = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1$$



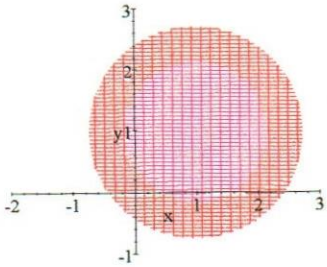
Giro:30° ; Inclinación: 60°



Proyección sobre plano zx:



Proyección sobre plano zy



Proyección sobre plano xy

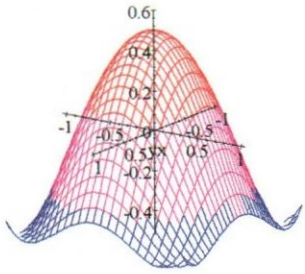
Ejemplo 2

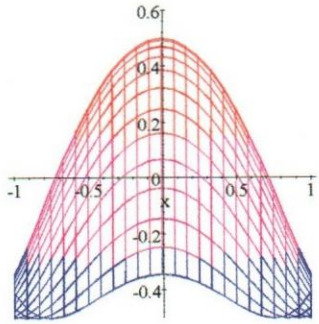
La función $z = \frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$, alcanza un máximo en el punto $(0,0)$, siendo su valor:

$$z = f(0,0) = \frac{1}{2} - \sin(0) = \frac{1}{2}$$

Además , $z = 0 \Rightarrow \sin(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{\pi}{6}$

Las siguientes gráficas ilustran lo aquí expuesto:

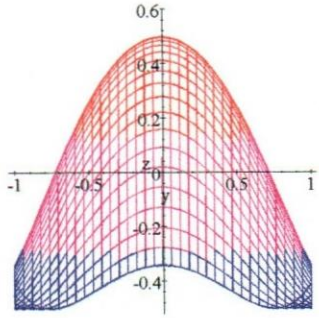


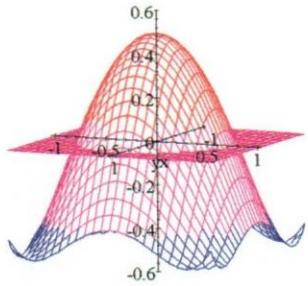


$\frac{1}{2} - \sin(x^2 + y^2)$

Giro: 35° ; Elevación: 75°

Proyección en el plano zx





Proyección sobre plano: zy

Intersección con plano: z=0

- Los Máximos y los Mínimos de una función se llaman **EXTREMOS** de dicha función
- Los puntos (x,y) donde la función diferenciable $f(x,y)$ alcanza un Extremo, se llaman **PUNTOS ESTACIONARIOS**.

7.2) CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE UN EXTREMO LOCAL

Teorema

Si $f(x,y)$ tiene un extremo local (esto es, un máximo o un mínimo local) en (x_0,y_0) y las derivadas parciales de primer orden de f existen, entonces:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = 0$$

Demostración:

Sea $g(x) = f(x,y_0)$

Si f tiene un extremo local en (x_0,y_0), entonces $g(x)$ tiene un extremo en $x_0 \Rightarrow$ $g'(x_0) = 0$

Pero:

$$g'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = 0$$

Análogamente, si $h(y) = f(x_0,y)$ y f tiene un extremo local en (x_0,y_0), entonces $h(y)$ tiene un extremo en: $y_0 \Rightarrow h'(y_0) = 0$

Pero:

Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

$$h'(y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = 0$$

Por lo tanto, los puntos (x_0,y_0) donde las funciones diferenciables $f(x,y)$ pueden alcanzar un extremo, se obtienen resolviendo el sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

ecuaciones que constituyen la condición necesaria para la existencia de un extremo.

NOTA
Si se sustituye : $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en la ecuación del Plano Tangente en (x_0,y_0) , de ecuación: $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$ se obtiene:

$$z = z_0$$

de modo que, la interpretación geométrica d este teorema es que si la gráfica de $f(x,y)$ tiene plano tangente en un extremo local, entonces dicho plano es horizontal.

NOTA
Al punto (x_0,y_0) donde $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = 0$ y $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = 0$ o bien donde una de estas derivadas parciales no existe, se le denomina Punto Estacionario o también Punto Crítico. Sin embargo, al igual que en el caso de una variable, no todos los puntos Críticos dan lugar a Valores Extremos de la función, como se demuestra a continuación, en el Ejemplo 2 .

Ejemplo 1
Dado $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$, encontrar los valores extremos e ilustrar gráficamente
Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{El único punto crítico es } (1,3)$$

Completando cuadrados se obtiene:

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-3)^2 + 4$$

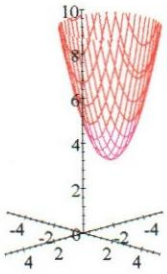
Como:

$$\left\{\begin{array}{l} (x-1)^2 \geq 0 \\ (y-3)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x,y) \geq 4, \quad \forall\ (x,y) \in R^2 \ ,$$

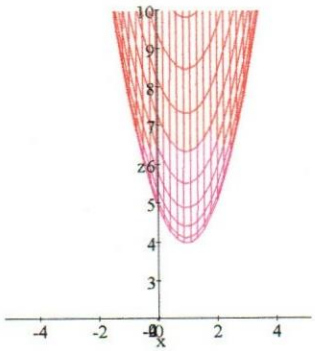
por lo tanto, el punto $(1,3,4)$ es un Mínimo Absoluto

Ilustración gráfica:
La siguientes gráficas ilustran lo aquí expuesto:

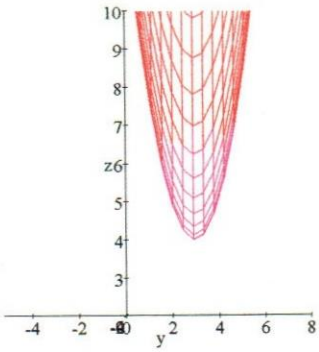
$(x-1)^2+(y-3)^2+4$



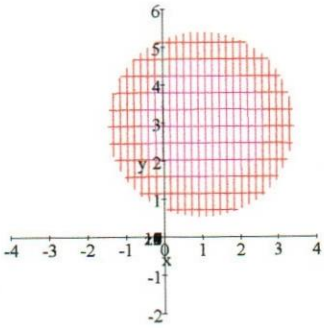
Giro: 45° ; Elevación: 75°



Proyección sobre plano zx



Proyección sobre plano zy



Proyección sobre plano xy

Ejemplo 2

Dado $f(x,y) = y^2 - x^2$, encontrar los valores extremos e ilustrar gráficamente

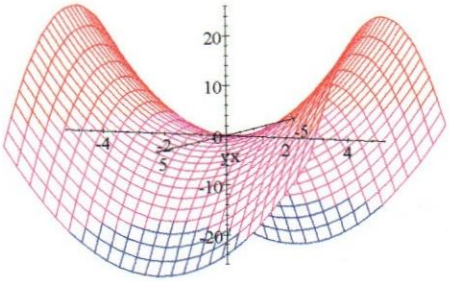
Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

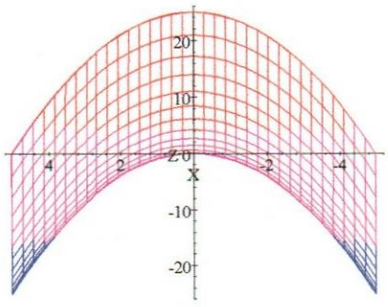
$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 & \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{El único punto crítico es } (0,0)$$

Obsérvese que, para puntos del eje x, se tiene que: $y = 0 \Rightarrow f(x,y) = -x^2 < 0$ (Si $x \neq 0$)

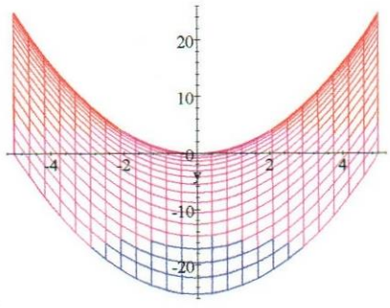
Ilustración gráfica:



$y^2 - x^2$



Proyección sobre plano: zx



Proyección sobre plano zy

La gráfica es un paraboloide hiperbólico $(z = y^2 - x^2)$ que tiene un plano tangente horizontal $(z = 0)$ en el origen.
Se puede observar que $f(0,0) = 0$ es un máximo en la dirección del eje x , pero es un mínimo en la dirección del eje y. En las cercanías del origen, la gráfica tiene la forma de una silla de montar, por lo que el punto $(0,0)$ se llama "Punto de Silla" de $f(x,y)$.
Luego, en un Punto Crítico, una función puede tener máximo local, mínimo local o ninguno de ellos, como lo demuestra el ejemplo precedente; en consecuencia, es necesario establecer un criterio que permita determinar si una función tiene o no valor extremo (máximo o mínimo), en un punto crítico. En efcto, el siguiente criterio es análogo al criterio de la segunda derivada para funciones de una variable.

7.2.1) Criterio de la segunda derivada

Supóngase que las siguientes derivadas pareciales de $f(x,y)$ son contínuas en una vecindad con centro (x_0,y_0) y que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

es decir, (x_0,y_0) es un Punto Crítico.
Sea:

$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x_0,y_0)} \quad ; \quad B = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x_0,y_0)} \quad ; \quad C = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(x_0,y_0)}$$

Formemos el discriminante: $\triangle = A \bullet B - C^2$,
Entonces:

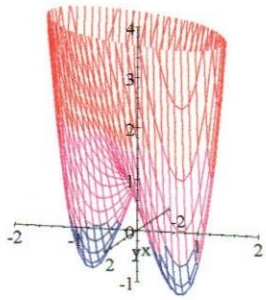
a) Si $\triangle < 0 \Rightarrow$ en el punto (x_0,y_0) no existe extremo
b) Si $\triangle = 0 \Rightarrow$ el criterio no proporciona información; $f(x,y)$ puede tener un máximo local o un mínimo local en el punto (x_0,y_0) , o (x_0,y_0) puede ser un Punto de Silla de la función $f(x,y)$ por lo que es necesario proseguir la investigación.

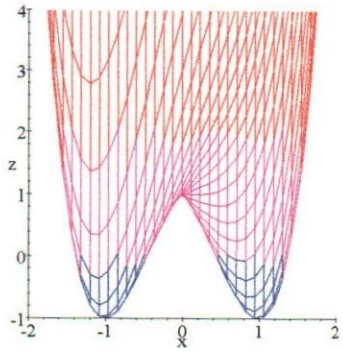
Ejemplo 1:
Encontrar los extremos locales de: $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.
Ilustrar gráficamente los resultados.
Solución:

Además: $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(1,1)} = 12(1)^2 = 12 > 0 \Rightarrow$Mínimo Local en $(1,1)$
El valor del mínimo es: $f(1,1) = 1^4 + 1^4 - 4(1)(1) + 1 = -1$

c) **Para el Punto Crítico** $(-1,-1)$:
$\triangle(1,1) = 144(-1)^2(-1)^2 - 16 = 128 > 0 \Rightarrow$Existe Extremo Local en $(-1,-1)$
Además: $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(1,1)} = 12(-1)^2 = 12 > 0 \Rightarrow$Mínimo Local en $(-1,-1)$
El valor del mínimo es: $f(-1,-1) = (-1)^4 + (-1)^4 - 4(-1)(-1) + 1 = -1$

Ilustración gráfica:
La siguiente figura ilustran los resultados antes obtenidos:

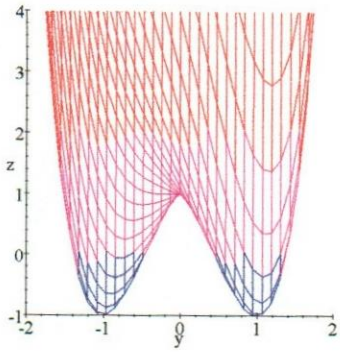


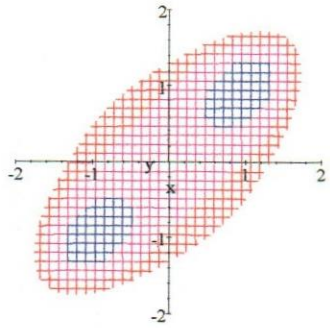


$x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Giro: 15° ; Elevación: 80°
(Perspectiva)

Giro: 270° ; Elevación: 90°
(Proyección sobre plano zx)





Giro: 0° ; Elevación: 90°
(Proyección sobre plano zy)

Giro; -90° ; Elevación: 0°
(Proyección sobre plano xy)

NOTA
Este ejemplo ilustra el hecho de que una función no necesariamente tiene un punto máximo o mínimo en un punto crítico.

Ejemplo 2:
Encontrar los extremos locales de: $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$.
Ilustrar gráficamente los resultados.
Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \text{.....}(1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 6xy - 12 = 0 \text{.....}(2)$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene: $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 15 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 \\ 6xy = 12 \Rightarrow xy = 2 \end{cases}$

Resolviendo este sistema por el método expuesto en el punto1.6.1.15 (pág.17), del

presente trabajo, se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 5$$
$$xy = 2$$
$$, \textit{Solution is} : \{y = 1, x = 2\}, \{y = 2, x = 1\}, \{y = -2, x = -1\}, \{y = -1, x = -2\}$$

Por lo tanto, existen cuatro puntos críticos: $\begin{cases} P_1(2,1) \\ P_2(-2,-1) \\ P_3(1,2) \\ P_4(-1,-2) \end{cases}$

Naturaleza de los puntos críticos

Para determinar la naturaleza de los puntos críticos, calculemos las segundas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6xy - 12) = 6y$$

Luego:

a) **En** $P_1(2,1)$:

$$\left.\begin{cases} A_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(P_1)} = 6(2) = 12 \\ B_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(P_1)} = 6(2) = 12 \\ C_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(P_1)} = 6(1) = 6 \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle_1 = A_1 \bullet B_1 - C_1 \Rightarrow$$

$$\triangle_1 = (12)(12) - (6)^2 = 108 > 0$$

Además, $A_1 = 12 > 0 \Rightarrow$ Mínimo en $P_1(2,1)$

El valor del mínimo será:

$$Z_{mínimo} = (2)^3 + 3(2)(1)^2 - 15(2) - 12(1) = -28$$

b) **En** $P_2(-2,-1)$:

$$\left.\begin{cases} A_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(P_2)} = 6(-2) = -12 \\ B_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(P_2)} = 6(-2) = -12 \\ C_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(P_2)} = 6(-1) = -6 \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle_2 = A_2 \bullet B_{21} - C_2 \Rightarrow$$

$$\triangle_2 = (-12)(-12) - (6)^2 = 108 > 0$$

Además, $A_2 = -12 < 0 \Rightarrow$ Máximo en $P_2(-2,-1)$

El valor del mínimo será:

$$Z_{máximo} = (-2)^3 + 3(-2)(-1)^2 - 15(-2) - 12(-1) = 28$$

c) **En** $P_3(1,2)$:

$$\left\{\begin{array}{l} A_3 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(P_3)} = 6(1) = 6 \\ B_3 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(P_3)} = 6(1) = 6 \\ C_3 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(P_3)} = 6(2) = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle_3 = A_3 \bullet B_3 - C_3 \Rightarrow$$

$$\triangle_3 = (6)(6) - (12)^2 = -108 < 0$$

Luego, en el punto $P_3(1,2)$ no hay extremo.

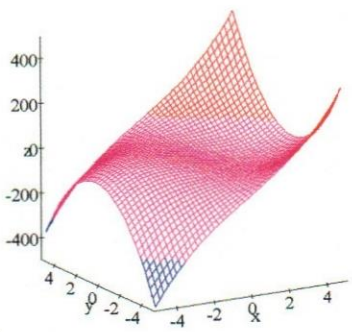
d) **En** $P_4(-1,-2)$:

$$\left\{\begin{array}{l} A_4 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(P_1)} = 6(-1) = -6 \\ B_4 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(P_1)} = 6(-1) = -6 \\ C_4 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(P_1)} = 6(-2) = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle_4 = A_4 \bullet B_4 - C_4 \Rightarrow$$

$$\triangle_4 = (-6)(-6) - (-12)^2 = -108 < 0$$

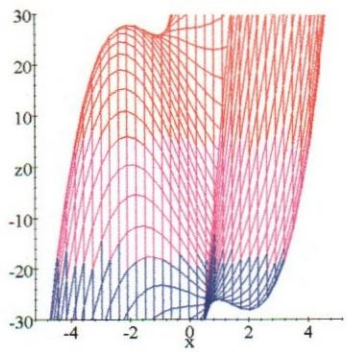
Luego, en el punto $P_4(-1,-2)$ no hay extremo.

Ilustración gráfica:
La siguiente gráfica confirma e ilustra los resultados obtenidos:

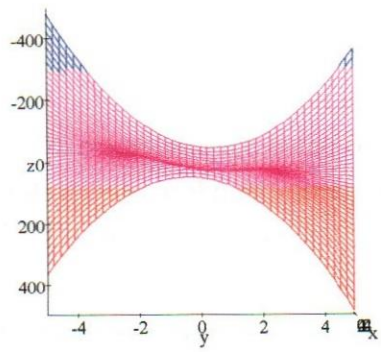


$x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$

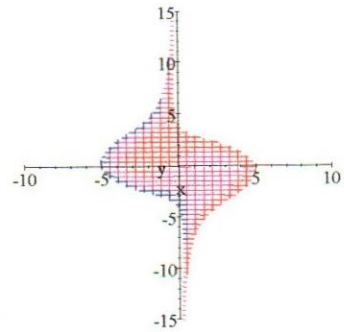
Giro: -120 ° ; Elevación:75°
(Perspectiva)



Giro: -90° ; Elevación: 90°
(Proyección en el plano zx)



Giro: 0° ; Elevación: 90°
(Proyección sobre el plano zy)



Giro: 0° ; Elevación: 0°
(Proyección sobre el plano xy)

7.3) TEOREMA DE LOS VALORES EXTREMOS

Si f es contínua en un conjunto cerrado y acotado D en R^2, entonces f adquiere un valor Mínimo Absoluto $f(x_1,y_1)$ y un Máximo Absoluto $f(x_2,y_2)$, en ciertos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) del conjunto D. Los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son pues Puntos Críticos de f o bien puntos de la frontera de D.

Para encontrar los valores máximos y mínimos absolutos garantizados por este teorema, se aplica el siguiente procedimiento:

a) Se encuentran los Puntos Críticos de f y los valores de f en dichos puntos.
b) Se encuentran los valores extremos de f en la frontera de D.
c) El mayor de los valores extremos de f así obtenidos, es el Máximo Absoluto y el menor de dichos valores es el Mínimo Absoluto.

Ejemplo 1:

Encontrar los valores máximos y mínimos absolutos de la función:

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y,$$

en la región efinida por: $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ x + y \geq -3 \end{cases}$, e ilustrar gráficamente.

Solución:

a) Puntos Críticos o Puntos Estacionarios

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \quad \text{.....(1)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2y - x + 1 = 0 \quad \text{.....(2)}$$

Resolviendo este sistema por el método expuesto en el punto 1.6.1.15 (pág.17), se obtiene:

$$z(x,0) \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow z = (-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6 \Rightarrow \begin{cases} (-3,0) \\ z = 6 \end{cases} \\ x = 0 \Rightarrow z = (0)^2 + 0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (0,0) \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

* **Para** L_2 **se tiene**: $x = 0$

$z = f(x,y) = f(0,y) = (0)^2 + y^2 - (0)y + 0 + y = y^2 + y \;;\quad -3 \le y \le 0$

$$z(0,y) = y^2 + y$$

Optimizando esta función de una variable, se obtiene:

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + y) = 2y + 1 \;;\; \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2y + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{(y=-\frac{1}{2})} = 2 > 0 \Rightarrow$ Mínimo en : $y = -\frac{1}{2} \in [-3,0]$

Por lo tanto, el mínimo ocurre en el punto $P(0,-\frac{1}{2})$ y el valor del mismo será:

$$Z_{mínimo} = (0)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

Además, en los extremos del intervalo $-3 \le y \le 0$, se obtiene:

$$z(0,y) \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \Rightarrow z = (-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6 \Rightarrow \begin{cases} (-3,0) \\ z = 6 \end{cases} \\ y = 0 \Rightarrow z = (0)^2 + 0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (0,0) \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

* **Para** L_3 **se tiene**: $x + y = 0$ (Frontera)

$y = -3 - x = -(x+3) \Rightarrow$

$z = f[x,y(x)] = x^2 + [-(x+3)]^2 + x(x+3) + x - (x+3) =$

$z = x^2 + x^2 + 6x + 9 + x^2 + 3x + x - x - 3 = 3x^2 + 9x + 6$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 9x + 6) = 6x + 9 \;;\; \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \quad 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6 > 0 \Rightarrow$ Mínimo en $x = -\frac{3}{2} \;;\; y = -\left(-\frac{3}{2} + 3\right) = -\frac{3}{2}$

luego:

$$\begin{cases} \text{Mínimo en } \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \\ z = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow z = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

En resumen, se obtiene:

a) Puntos Críticos o Puntos Estacionarios

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y \quad ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x - 2y = 0 \Rightarrow x - y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -x + 1 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Resolviendo este sistema por el método expuesto en el punto 1.6.1.15), se obtiene:

$$x - y = 0$$
$$-x + 1 = 0$$
$$, \textit{Solution is} : \{x = 1, y = 1\}$$

Por lo tanto, existe un único punto crítico en: $P(1,1)$

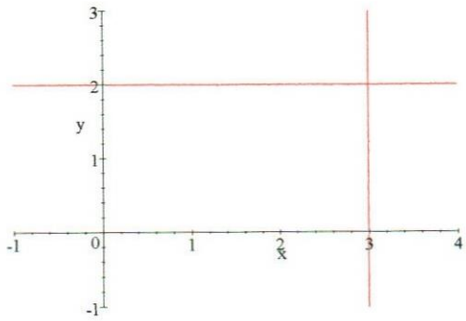
El valor de f en dicho punto es:

$$z = f(x,y) = f(1,1) = (1)^2 - 2(1)(1) + 2(1) = 1$$

b) Estudio de la función en la frontera de la región D

La frontera D esta definida por los los tres segmnetos :

$$\begin{cases} L_1 / \ 0 \le x \le 3 \ , \ y = 0 \\ L_2 / \ 0 \le y \ge 2 \ , \ x = 3 \\ L_3 / \ 0 \le x \le 3 \ , \ y = 2 \\ L_4 / \ 0 \le y \ge 2 \ , \ x = 0 \end{cases}$$ según se muestra a continuación:



$(3,t)$

Para L_1 se tiene: $y = 0 \Rightarrow$

$z = f(x,y) = f(x,0) = x^2$; como $0 \le x \le 3 \Rightarrow f(x)$ es creciente, por lo que no es necesario aplicar el criterio de la segunda derivada.

En consecuencia:

$$f_{mínimo} = (0)^2 = 0 \quad ; \quad f_{máximo} = (3)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} P_1(0,0) & \Rightarrow \ z = 0 \\ P_2(3,0) & \Rightarrow \ z = 9 \end{cases}$$

Por lo tanto, en la frontera de la región D , el valor mínimo es cero (0) y el máximo es nueve (9).

En resumen, se obtiene:

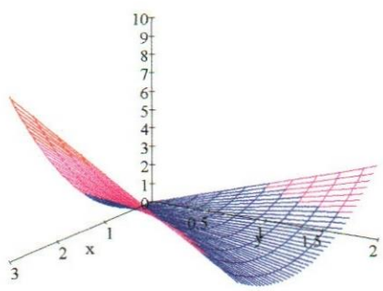
	Puntos (x,y)	$z = f(x,y)$
Críticos	$(1,1)$	-1
L_1	$(0,0)$	0
	$(3,0)$	9
L_2	$(3,0)$	9
	$(3,2)$	1
L_3	$(0,2)$	4
	$(3,2)$	1
Extremo de Intervalo	$(2,2)$	4

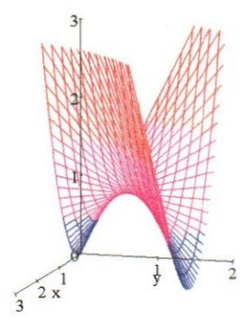
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Mínimo Absoluto:} \begin{cases} P_1(3,0) \\ z = 9 \end{cases} \\ \text{Máximo Absoluto:} \begin{cases} P_2(0,0) \\ P_3(2,2) \\ z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Ilustración gráfica:

Las siguientes gráficas ilustran lo aquí expuesto: $z = x^2 - 2xy + 2y$

$$D = \{(x,y)/\ 0 \le x \le 3\ ,\quad 0 \le y \le 2\}$$





$x^2 - 2xy + 2y$

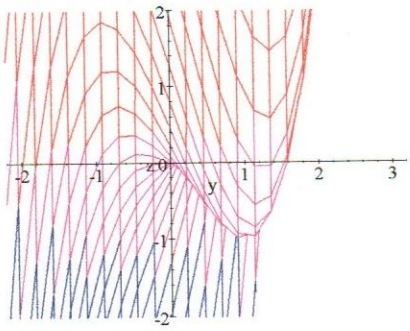
Perspectiva 1 Perspectiva 2

, *Solution is* : $\{y = 0, x = 0\}, \{x = 1, y = 1\}$

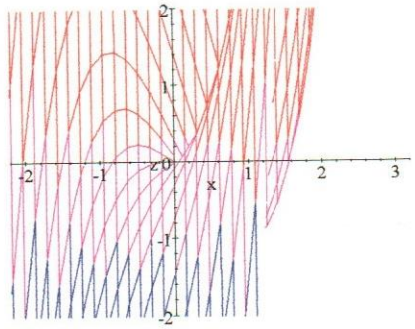
Por lo tanto, existen dos puntos críticos en: $\begin{cases} P_1(0,0) \\ P_2(1,1) \end{cases}$

b) Naturaleza de los Puntos Críticos

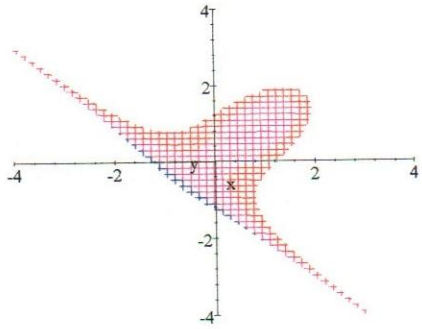
Perspectiva 2 Perspectiva 3



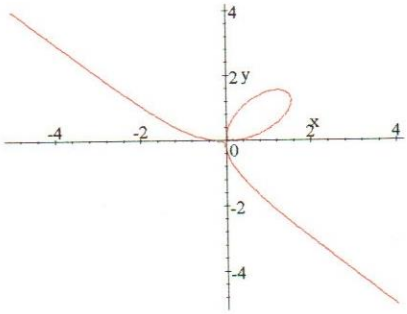
Proyección sobre plano zy



Proyección sobre plano zx



Proyección sobre plano xy



Traza con el plano xy (z=0)

Ejercícios propuestos

1) En los ejercícios siguientes, encuentre los valores máximos y mínimos locales y puntos de silla de las funciones dadas. Ilustre gráficamente las soluciones, en cada caso.

a.) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x - 6y$
b.) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y$
c.) $f(x,y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}$
d.) $f(x,y) = e^x \cos y$
e) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

Soluciones:

a.) Mínimo $f(-2,3) = -13$
b) Mínimo $f(0,-1) = -1$
c) Máximo $f(-\frac{1}{2},4) = -6$
d) Ninguno
e) Máximo $f(0,0) = 2$; Mínimo $f(0,2) = -2$; Puntos de silla: $(\pm 1, 1)$

2.) En los ejercícios siguientes, encuentre los valores máximos y mínimos absolutos de la función f en el conjunto D especificado:

BIBLIOGRAFÍA

1°)| CÁLCULO,
JAMES STEWART.
Grupo Editorial Latinoamericana

2° *CALCULUS AND ANALYTIC GEOMETRY,.- 9th Edition*
THOMAS / FINNEY
Addison – Wesley Publishing Company

3°) CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES, Volumen 2
GERALD L. BRADLEY / KARL J. SMITH
Prentice Hall Iberia

4°) CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA, Volumenes 1 y 2.
LARSON ROLAND E., HOSTETLER ROBERT P. Y EDWARDS BRUCE H.
Quinta Edición.
Mc Graw Hill.

5°) CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA, Cuarta Edición
EDWARDS C. HENRY y PENNY DAVID E.
Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

6°) EL CÁLCULO, Séptima Edición
LEITHOLD, LOUIS
Oxford University Press