TESIS
E 2000
A5

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES

ESCUELA DE ECONOMÍA

Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

CAOS DETERMINÍSTICO Y ALEATORIEDAD EN EL COMPORTAMIENTO DEL PRECIO DEL CRUDO MARCADOR WEST TEXAS INTERMEDIATE (1986-1999)

Profesor Guía:
José Ramón Gascón
Autores:
Álvarez Alvarado, Marcos Tulio
Fridzon Benaim, David

CARACAS, OCTUBRE 2000

Papá

Fuiste, eres y serás por siempre mi ejemplo a seguir. Los valores que Mamá y tú me inculcaron, y el buen camino por el que me guiaron, son definitivamente un gran reto y responsabilidad que asumo con orgullo y alegría. Me siento muy afortunado por tener el privilegio de ser tu hijo. Papá, te admiro como un pequeño niño a su Padre. Completé una parte importante de mi vida, una que especialmente tú me enseñaste su importancia. Que alivio es sentirte tan cerca y saber que siempre lo estarás. Que D-os te bendiga y te mantenga por siempre muy cerca de Él. AMEN.

Mamá

Qué hogar tan cálido y cariñoso formaste junto a Papá. Lleno de enseñanzas reveladas y ocultas, sonrisas y carcajadas, regaños (de vez en cuando ☺) llenos de aprendizaje, y por sobre todas las cosas amor combinado con humor. Cada vez más me doy cuenta de lo mucho que tenemos en común. El lazo estrecho que nos une se hace evidente y robusto con el pasar del tiempo. Es una tranquilidad para mí tenerte cerca. Que D-os te bendiga y te de larga vida llena de salud, felicidad, amor, unión y éxito. AMEN.

A ustedes les dedico este trabajo y todo acto de bien que haga en mi vida.

LOS QUIERO MUCHO,

David

DEDICATORIAS

A mis Padres

Marcos

AGRADECIMIENTOS

Antes que todo queremos agradecerle a D-os Todopoderoso por habernos permitido llegar con éxito a este importante momento.

Queremos agradecerle a nuestro amigo y profesor guía José R. Gascón, por su dedicación, interés y mística demostrada a lo largo de los últimos 10 meses. Su empeño y cariño hacia el conocimiento fue clave en el desarrollo de este trabajo.

Muchas gracias a Ronald Balza Guanipa y a María Beatriz Orlando, por darnos libre acceso a sus fuentes bibliográficas.

Gracias a la Sra. Claudia Hernández del Centro de Información de la Energy Information Administration por facilitarnos gentilmente la data del crudo marcador West Texas Intermediate.

Mis más sinceras gracias a la Asociación Venezolana Americana de la Amistad (AVAA), especialmente a la Sra. Alba Castro, Presidenta de la Asociación, y la Sra. Evelyn Izquierdo, Coordinadora de Programas Educativos, por el gran apoyo, la excelente formación complementaria y los concejos oportunos que recibí durante toda mi participación en el Programa Beca de Mérito.

Igualmente, agradezco a Mc Donald's Corporation su apoyo financiero como patrocinante de mi participación en el Programa Beca de Mérito de la Asociación Venezolana Americana de la Amistad.

Marcos T. Álvarez Alvarado

De nuevo quiero agradecerle a D-os por haberme acompañado a lo largo de mi vida, regalándome una familia amorosa, unida e íntegra. Muchísimas gracias a mis padres, hermanos, tíos y primos por haberme querido y apoyado desde siempre. Mis bellos Nonos y Nonas, son uno de los tesoros más preciados que tengo, sólo puedo darles las gracias por todo y rezar porque D-os les de una buena y larga vida.

A ti Sharon, mi compañera de vida, te doy las gracias por tu amor, dedicación, paciencia, ayuda y TODO lo demás. Que D-os te bendiga, TE AMO.

David Fridzon Benaim

INDICE

DEDICATORIAS ii

AGRADECIMIENTOS iv

ÍNDICE DE FIGURAS ix

INTRODUCCIÓN 1

I.- INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL CAOS 7

I.I.- EL DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE COMPLEJIDAD 8

I.II.- DEFINICIÓN DE CAOS DETERMINÍSTICO 13

I.III.- UN EJEMPLO DE CAOS DETERMINÍSTICO 17

I.IV.- LA TEORÍA DEL CAOS EN LA CIENCIA ECONÓMICA..... 23

II.- LA MATEMÁTICA DEL CAOS 27

II.I.- MODELOS DINÁMICOS LINEALES EN ECONOMÍA 28

II.I.I.- TEORÍA GENERAL DE LA DINÁMICA DISCRETA 28

II.I.I.I.- PUNTOS FIJOS Y PERIÓDICOS DE UN SISTEMA DINÁMICO UNIDIMENSIONAL 30

II.I.II.- TEORÍA GENERAL DE LA DINÁMICA CONTINUA 34

II.II.- CONJUNTOS INVARIANTES Y ATRAYENTES 40

II.III.- DIMENSIÓN FRACTAL 43

II.IV.- EXPONENTES DE LYAPUNOV 47

II.V.- DEFINICIÓN FORMAL DE UN SISTEMA CAÓTICO 50

II.VI.- LA RUTA HACIA EL CAOS 51

III.- ANÁLISIS TEÓRICO DEL COMPORTAMIENTO DEL PRECIO DEL PETRÓLEO 57
III.I.- ENTORNO DEL MERCADO PETROLERO 58
III.II.- FUENTES DE ENERGÍA 59
III.III.- ENERGÍA Y ENTROPÍA 60
III.IV.- EL PETRÓLEO 62
III.IV.I.- DETERMINANTES DE LA DEMANDA DE PETRÓLEO 64
III.IV.II.- DETERMINANTES DE LA OFERTA DE PETRÓLEO 67
III.IV.II.I.- MERCADOS DE COBERTURA DE RIESGO..... 69
III.V.- REVISIÓN HISTÓRICA DE ALGUNOS SHOCKS PETROLEROS 71
IV.- CAOS Y ALEATORIEDAD 73
IV.I.- DEFINICIÓN DE CAMINATA ALEATORIA 74
IV.II.- CAMINATA ALEATORIA Y ESTACIONARIEDAD 76
IV.III.- EL CORRELOGRAMA COMO PRUEBA DE ALEATORIEDAD 79
IV.IV.- MODELOS ARIMA 81
IV.V.- EL TEST BDS 83
IV.VI.- CAOS Y ALEATORIEDAD 87
V.- RESULTADOS ESTADÍSTICOS 88
V.I.- SERIE GENERADA CON LA ECUACIÓN LOGÍSTICA 89
V.I.I.- ANÁLISIS DEL CORRELOGRAMA 89

V.I.II.- PRUEBA DICKEY-FULLER AMPLIADA (ADF) 90
V.I.III.- PRUEBA BROCK-DECHERT-SCHEINKMAN (BDS) 93
V.II.- SERIE DIARIA DEL PRECIO DEL CRUDO MARCADOR WTI 95
V.II.I.- ANÁLISIS DEL CORRELOGRAMA 95
V.II.II.- PRUEBA DICKEY-FULLER AMPLIADA (ADF) 96
V.II.III.- PRUEBA BROCK-DECHERT-SCHEINKMAN (BDS) 98
VI.- CONCLUSIONES 100
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 103
ANEXOS 108

INDICE DE FIGURAS

FIGURA I.1.- Producto A 108

FIGURA I.2.- Producto B 109

FIGURA I.3.- Producto C 110

FIGURA I.4.- Sensibilidad a las condiciones iniciales 111

FIGURA II.1.- Diagrama de fases: convergencia monotónica 112

FIGURA II.2.- Diagrama de fases: convergencia oscilante 112

FIGURA II.3.- Diagrama de fases: divergencia monotónica 113

FIGURA II.4.- Diagrama de fases: divergencia oscilante 113

FIGURA II.5.- Convergencia de órbitas a un punto fijo con 114

FIGURA II.6.- Convergencia de órbitas a un punto fijo con 114

FIGURA II.7.- Punto fijo repulsivo 115

FIGURA II.8.- Punto fijo indiferente 115

FIGURA II.9.- Puntos periódicos de segundo orden 116

FIGURA II.10.- Puntos periódicos de tercer orden 116

FIGURA II.11.- Extinción: trayectoria temporal 117

FIGURA II.12.- Extinción: trayectoria en el espacio de fases 117

FIGURA II.13.- Equilibrio: trayectoria temporal 118

FIGURA II.14.- Equilibrio: trayectoria en el espacio de fases 118

FIGURA II.15.- Ciclo de período dos: trayectoria temporal 119

FIGURA II.16.- Ciclo de período dos: trayectoria en el espacio de fases 119

FIGURA II.17.- Caos: trayectoria temporal 120
FIGURA II.18.- Caos: trayectoria en el espacio de fases 120
FIGURA II.19.- Árbol de Feigenbaum: la ruta hacia el caos 121
FIGURA III.1.- Evolución del precio diario WTI (1986-1999) 122
FIGURA V.1.- Datos Estadísticos "SER4" 123
FIGURA V.2.- Correlograma Serie "SER4" a nivel 124
FIGURA V.3.- Datos Estadísticos "PETRO1" 126
FIGURA V.4.- Correlograma Serie "PETRO1" a nivel 127
FIGURA V.5.- Correlograma Serie "PETRO1" en diferencia 129

INTRODUCCIÓN

El descubrimiento del caos determinístico y su presencia en una gran cantidad de fenómenos de la más diversa índole, han dado pie a un nuevo método en la elaboración de modelos matemáticos. Por una parte, impone un límite en la capacidad de predicción y, por otra, implica que muchos fenómenos considerados como aleatorios podrían no serlo y resultar, a corto y mediano plazo, mucho más comprensibles y predecibles de lo que se pensaba. Este enfoque ha permitido encontrar el orden oculto en una gran cantidad de sistemas y ha generado una intensa actividad de investigación en muchas áreas de la ciencia.

En vista de la enorme cantidad de situaciones en las que se ha detectado la presencia del caos determinístico, cabe preguntarse ¿cómo es que no se descubrió éste con anterioridad? En primer lugar es preciso destacar que este tipo de caos solamente puede estar presente en lo que técnicamente se denominan sistemas no-lineales. En estos sistemas, el estímulo y la respuesta no son proporcionales entre sí. Esto implica que aunque se conozca la respuesta a cada estímulo por separado, no se conoce la respuesta a la suma de estos estímulos. En otras palabras, la suma de estímulos no produce la

suma de respuestas. Por lo general, éstos son sistemas mucho más refractarios al análisis que los sistemas lineales para los cuales existe una teoría de modelaje sólidamente establecida. Durante muchos años se hicieron los modelos de sistemas no-lineales mediante aproximaciones lineales. Cuando esta táctica no daba resultado, se aplicaba, casi siempre, un tratamiento estadístico. En segundo lugar vale la pena recalcar que, en un sentido estrictamente formal, el germen del caos determinístico fue descubierto hace bastante tiempo en el área de la matemática denominada Teoría de Sistemas Dinámicos, pero a nadie le interesaban los resultados de esta teoría, sino como curiosidad académica. Frecuentemente, se observa en la historia del saber como una ocupación puramente espiritual, sin aplicación en la práctica, se convierte de repente en un centro de importante progreso.

El hecho de que reglas determinísticas simples puedan manejar el caos, con la pérdida del poder de predicción que ello implica, es algo que toca muy de cerca al procedimiento científico. Normalmente cuando se quiere validar una ley, ésta se usa para predecir y, posteriormente, se comparan los resultados con la realidad. Está claro que si la ley contiene en sí la posible aparición del caos, la validación de la misma según este esquema puede convertirse en algo muy delicado. Aún cuando la ley sea correcta, el menor desconocimiento que tengamos de la situación inicial a partir de la cual usamos la regla para predecir,

generará errores cada vez mayores con un deterioro progresivo en la calidad de las predicciones.

Reducir un sistema a la suma de sus partes y suponer que el conocimiento detallado de cada uno de los elementos que lo integran puede ayudarnos a la comprensión del mismo, es otro aspecto metodológico que necesita revisión.

Aunque conozcamos en detalle todo lo que es necesario saber acerca de las partes constituyentes de un sistema, si éstas se integran mediante vínculos que no son lineales, el comportamiento global puede ser radicalmente distinto al de la "suma de sus partes". Esto realmente ocurre en casi cualquier sistema biológico. Si los integrantes de un sistema son lineales, podemos construir modelos muy precisos de los mismos, pero basta con que algunos de ellos estén acoplados entre sí de manera no-lineal para que el comportamiento global del sistema pueda volverse caótico. En tales casos el sistema deber ser considerado como un todo.

Los fenómenos y variables estudiadas por la Ciencia Económica son, por lo general, complejos en su constitución debido a la gran cantidad de factores que los determinan. Por ello, se vislumbra a la Teoría del Caos como un apropiado método a aplicar en los sistemas económicos. El problema principal

radica en aceptar estos métodos como válidos entendiendo su utilidad y observando los grandes avances que pueden significar para la Economía y sus campos conexos. Además, existe la necesidad de encontrar pruebas y tests aún más precisos y diseñados especialmente para medir variables económicas, dado que ha pesar de hay economistas trabajando en la materia, la mayor información disponible se obtiene de las ciencias puras como la física y la biología.

El presente trabajo busca estudiar el comportamiento de la serie temporal del precio diario del crudo marcador West Texas Intermediate en el período 1986-1999[1] utilizando herramientas de la econometría lineal y de los métodos ofrecidos por la teoría del caos. Mediante estos procedimientos se intenta probar si la serie en estudio sigue un comportamiento aleatorio o caótico.

En el capítulo I, se desarrollará el concepto de caos determinístico haciendo comparaciones con los sistemas dinámicos tradicionales y tomando como ejemplo de serie temporal caótica a la conocida ecuación o mapa logístico. Además se dará una introducción a las aplicaciones de la teoría del caos en la ciencia económica.

[1] La data de la serie diaria del West Texas Intermediate (1986-1999) fue facilitada por la U.S. Energy Information Administration, vía correo electrónico.

En el capítulo II, se expondrán los conceptos matemáticos fundamentales en los cuales se basa la teoría del caos, utilizando las herramientas de la matemática de los sistemas dinámicos no-lineales y terminando con la definición formal de un sistema caótico.

En el capítulo III, se buscará dar una explicación breve de los distintos agentes y determinantes del precio del petróleo de manera tal de lograr entender la compleja dinámica de este mercado.

En el capítulo IV, se explicarán diferentes herramientas estadísticas, que se utilizan en el estudio de series de tiempo, con la finalidad de definir el comportamiento del mercado petrolero, además del comportamiento de la serie generada con la ecuación logística.

En el capítulo V, se aplicarán las pruebas de estacionariedad y caos sobre la serie generada con la ecuación logística y la serie temporal del petróleo para exponer, comparar y analizar los resultados obtenidos.

Por último, en el capítulo VI, se enumerarán las conclusiones obtenidas a lo largo de la investigación.

Esperamos que este trabajo contribuya al desarrollo de la Teoría del Caos y de sus útiles aplicaciones en la Ciencia Económica, tomando en consideración de que ésta es un área poco explorada en Venezuela.

Marcos T. Álvarez Alvarado David Fridzon Benaim

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DEL CAOS

... "Hay que tener en cuenta que los sistemas científicos son sistemas de creencias, mediante las cuales el hombre se protege de esa ansiedad que, formando parte esencial de la existencia humana, viene producida por la incertidumbre, la ignorancia y el desconocimiento del futuro"...

Ubaldo Nieto de Alba

I.I.- EL DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE COMPLEJIDAD

El desarrollo de la ciencia del mundo occidental durante los últimos tres siglos se ha debido a la disección de los problemas en sus componentes más elementales. La cláusula *ceteris paribus* permitía ignorar las complejas interacciones entre el problema en estudio y el resto del Universo; pero la ciencia no es una variable independiente, sino un sistema abierto e inmerso en un contexto social, sometido a las influencias externas de su entorno cultural. Por eso, estamos asistiendo a un proceso de integración con el nacimiento de nuevos paradigmas científicos y metodológicos que nos conducen a la moderna ciencia de la complejidad y del caos.

Desde el siglo XVIII al XX, una corriente ideológica (el cientifismo) ha defendido que la ciencia contaba con la respuesta a las cuestiones fundamentales del hombre. Hoy en día, y sin necesidad de acudir a referentes extracientíficos de carácter filosófico, se ponen límites a los principios omnicomprensibles de esta ideología científica para la cual los límites de la ciencia son claramente los límites humanos de la capacidad de conocer el mundo. Los límites de los dogmas de este cientifismo se presentaron, en primer lugar, en los ámbitos del reduccionismo ontológico y metodológico.

La evolución de los paradigmas metodológicos para predecir el futuro la podemos equiparar a una sucesiva ampliación de círculos en espiral ascendente. Así, el primer círculo representa el orden determinista del paradigma matemático y tiempo reversible. Posteriormente, con el advenimiento de la incertidumbre, la probabilidad sustituye a la certeza y el círculo se amplía; pero como la historia se mueve en ciclos, cuando los acontecimientos humanos completan un círculo lo hacen a nivel superior.

Ahora, el segundo círculo representa el nuevo orden del paradigma estadístico, donde las leyes científicas ya son leyes de promedio, aunque todavía en tiempo reversible.

En el ámbito particular de la economía, la bola de cristal del equilibrio macroeconómico ha permitido hacer predicciones estadísticas donde las trayectorias determinísticas han dejado paso a los procesos y, aunque manteniendo todavía ese concierto del hombre con la estabilidad, el orden y el equilibrio, la economía, como ciencia, cobró un mayor significado.

Sin embargo, aún quedan fuera muchos fenómenos científicos y económicos, cuya inestabilidad y no-equilibrio se resisten a entrar en el ámbito de esta nueva descripción estadística reductible a trayectorias. Pero las nuevas realidades que caracterizan hoy los cambios sociales exigen nuevos

paradigmas, en los que la naturaleza y el mundo ya no sean considerados bajo el aspecto de un orden en cuyo seno actúa el desorden, sino bajo el aspecto inverso: el del desorden, la inestabilidad, el desequilibrio y la alta sensibilidad de los sistemas a los cambios en el tiempo. El objetivo ya no es captar la secuencia orden-desorden-orden, sino interrogar al desorden en cuanto tal, hacer comprensible lo imprevisible y, en lo posible, ulteriormente, previsible. En todo caso, el sondeo del futuro siempre produce rendimientos en el presente.

Todo lo anterior nos conduce, nuevamente, a ampliar el círculo con una nueva vuelta completa al ciclo que se sitúa a un nivel superior, dando entrada al nuevo paradigma del caos, que nos va a permitir entender esta aleatoriedad endógena y estudiar el orden oculto en este desorden

EL PARADIGMA PREVALENTE DEL ORDEN ESTABLE[1] (Ciencia del Ser)	
LOCALIDAD: - Piezas separadas. - Principio "Causa-efecto". - Sistema Cerrado	**CIENCIA DE OBJETOS AISLADOS:** - Lo político, lo social, lo económico, lo "micro" y lo "macro" se consideran aisladamente. La organización económica es un sistema en equilibrio. - Cláusula *ceteris paribus.* - La especialización. La economía de los simple, de los teoremas concretos.
ESTABILIDAD: - Sistemas en equilibrio o próximos al equilibrio. - Efecto "José" o de persistencia.	**ATRACTORES PUNTUALES O PERIÓDICOS:** - Predictivos (matemática o estadísticamente). Ciencia de lo no-lineal. Bola de cristal del equilibrio. Obsesión por el control y la predicción. Todo está controlado. Gestión tecnocrática de la economía basada en esta legalidad científica y en el poder de la técnica. Economía de la nueva legalidad y el despotismo tecnocrático.
EL TIEMPO ES: - Reversible. - No atiende a los cambios. - No hay bifurcaciones divisorias.	**CIENCIA ATEMPORAL:** El tiempo es una variable exógena, un parámetro matemático que nos permite circular (pasado-presente-futuro, y viceversa). Es el tiempo lineal o "tiempo ilusión" (Einstein); al no alcanzar a lo esencial y a lo existencial, aparece una ciencia alienante. La economía resulta atemporal, ajena a la tecnología, a la innovación, al cambio, a la flecha del tiempo.
Racionalidad: Limitada al ideal omnisciente (el Universo se contempla como un reloj que obedece a reglas predecibles e inmutables) y al ideal omnipotente.	

[1] Nieto de Alba (1998).

EL PARADIGMA DEL CAOS Y DE LA COMPLEJIDAD[2] (Ciencia del Devenir)		
GLOBALIDAD: - Conjunto. - Principio holístico. - Sistemas abiertos. El entorno se va creando en el proceso dinámico.	**CIENCIA DE LO COMPLEJO:** La economía, en su globalidad, se contempla como entorno, como ecología.	**CIENCIA DE LA COMPLEJIDAD:** - El "todo" no es una suma de sus partes. Todas las variables son endógenas (políticas, sociales, económicas, "micro" y "macro"). - La complejidad también se encuentra en lo "micro"; la empresa constituye un sistema complejo.
INESTABILIDAD: - Sistemas de "no equilibrio". - Efecto "Noé" o de aluvión. - Efecto "Mariposa": Pequeñas causas producen grandes efectos. El revoloteo de una mariposa en Pekín termina produciendo un vendaval en California.	**ATRACTORES CAÓTICOS:** - Ciencia de la "no-linealidad". Bola de cristal del "no-equilibrio" que señala los límites de la predicción matemática. - Obsesión por el entendimiento y la creación.	**ECONOMÍA DEL CAOS:** Las variables pierden su significado estadístico, se caotizan. Preocupación por el atractor clima: moral colectiva, reglas de juego, tejido institucional.
EL TIEMPO ES: - Irreversible. Flecha del tiempo y entropía. - El tiempo es creación.	**CIENCIA DEL TIEMPO:** Variable endógena. El sistema hace el tiempo. El futuro es creación. Los valores de los parámetros, donde el sistema cambia de pauta, constituyen bifurcaciones del tiempo irreversible.	**ECONOMÍA TEMPORAL:** Ciencia de la complejidad. El tiempo y el orden son creación. Las bifurcaciones, que marcan la historia del tiempo, deben ser modeladas hacia niveles superiores de organización, bienestar y libertad.
Racionalidad: Diálogo con la realidad observada constantemente. Elabora una visión diferente del mundo.		

[2] Idem.

I.II.- DEFINICIÓN DE CAOS DETERMINÍSTICO

El concepto de caos determinístico se refiere a una gran cantidad de sistemas que existen en la naturaleza cuyo comportamiento va cambiando con el transcurrir del tiempo (sistemas dinámicos). Este comportamiento tiene la característica de que se hace extremadamente sensible a las condiciones iniciales, de modo que alteraciones muy pequeñas en sus causas son capaces de provocar grandes diferencias en los efectos. Como consecuencia de ello no es posible predecir con exactitud cómo se comportarán dichos sistemas más allá de cierto tiempo, por lo que parecen no seguir ninguna ley, cual si estuvieran regidos por el azar.

Ian Percival en su artículo "Chaos: A Science for the Real World" (Hall, 1993) señala que, "tradicionalmente, los científicos han tratado de buscar la manera más simple de ver al mundo que nos rodea. Ahora, los matemáticos y el increíble poder de las computadoras han producido una teoría que ayuda a entender las complejidades de la naturaleza. La teoría del caos está presente en todas las disciplinas".

En esencia, la teoría del caos muestra que una simple relación que es determinística[3] pero no-lineal, como por ejemplo una ecuación en diferencias no-lineal de primer orden, puede generar una trayectoria temporal extremadamente compleja. El comportamiento intertemporal puede adquirir una apariencia perturbada por shocks aleatorios que devenguen en cambios cualitativos abruptos y violentos, ya sea con el transcurrir del tiempo o por cambios pequeños en los valores de los parámetros. Las trayectorias temporales caóticas tienen las siguientes características[4]:

a) Presentan severos cambios cualitativos en su comportamiento, como aquellos asociados a grandes perturbaciones aleatorias o estocásticas, de forma tal que algunos tests estándares de aleatoriedad no podrían distinguir entre patrones caóticos de cambios y un verdadero comportamiento aleatorio[5].

---

[3] Por determinismo entendemos aquella "doctrina según la cual los sucesos están completamente determinados por causas previas, en lugar de estar afectados por el libre albedrío o factores aleatorios" (Nieto de Alba, 1998).

[4] Boumol y Benhabib (1986).

[5] En este sentido, Baumol y Benhabib, pp. 79 (1986), señalan que "una trayectoria (caótica) puede mostrar cambios cualitativos en su comportamiento similares a los que asociamos con grandes shocks aleatorios". Luego, Brock y Sayers, pp. 374 (1988) indicarían lo siguiente: "Sin embargo, hace unos años, la ciencia de lo no-lineal descubrió ejemplos en la naturaleza de procesos completamente determinísticos que pueden generar comportamientos que parecen aleatorios bajo los tests estadísticos como ***el análisis espectral y la función de autocovarianza***" (el énfasis es nuestro). Brock, Hsieh y Lebaron, pp. 1 (1991) concluyen que pueden construirse "modelos económicos que generan trayectorias determinísticas de equilibrio que parecen aleatorias a simple vista y para algunos tests estadísticos". Por su parte, Medio (pp. 7, 1992), desde una perspectiva histórica señala que "la posibilidad de que sistemas dinámicos simples y no-lineales puedan exhibir comportamientos muy complicados y aparentemente aleatorios, era ya conocida para Henri Poincaré a comienzos del siglo XX". Recientemente, Barnett y et al., pp. 9 (1999) van mas allá y concluyen que "es muy bien

b) Son extremadamente sensitivos a cambios microscópicos en los valores de los parámetros[6].

c) Pueden no regresar nunca a ningún punto que hayan recorrido previamente, pero pueden mostrar un patrón oscilante dentro de los límites de una determinada región de forma bastante desordenada.

La dinámica caótica plantea problemas nuevos y más difíciles en la interpretación y el análisis de los datos, especialmente en aquellos datos socioeconómicos que aparecen asociados con magnitudes no-lineales, donde las perturbaciones del entorno actúan más directamente sobre los individuos y agentes socioeconómicos, dando lugar a una dinámica de grandes efectos globales debida a simples causas locales.

---

conocido, por ejemplo, que sistemas caóticos determinísticos pueden generar resultados cualitativamente similares a series económicas verdaderas".

[6] Según cuenta Ian Stewart en su libro ¿Juega Dios a los dados? (1989), en el invierno de 1961 el meteorólogo Edward Lorenz, con el objeto de predecir el tiempo, estaba iterando un complejo sistema dinámico con su ordenador para ver cómo se comportaba en un período de tiempo más grande. En vez de esperar durante varias horas, paró su ordenador y anotó los valores de la órbita en un instante intermedio de lo que ya había realizado, con la intención de volver a ponerlo a funcionar para irse a tomar una taza de té.

Un tiempo después puso de nuevo a funcionar su ordenador, para seguir calculando la órbita, con los datos que había tomado en aquel instante intermedio (en vez de las cifras de seis decimales que almacenaba el ordenador había anotado cifras de tres decimales). Lo que él esperaba que ocurriese es lo siguiente: la máquina repetiría la segunda mitad de la ejecución original, y luego seguiría a partir de allí. La repetición servía como una comprobación útil, pero ahorrándose la primera mitad.

Lorenz encontró que la nueva ejecución no había repetido la segunda mitad de la original. Empezaba de la misma manera pero lentamente las dos ejecuciones divergían, hasta que al final no guardaban ningún parecido la una con la otra. A consecuencia de esto, Lorenz ideó su famosa frase "efecto mariposa" para explicar lo sucedido: *El movimiento de una simple ala de mariposa en China, hoy produce un diminuto cambio en el estado de la atmósfera. Después de un cierto período de tiempo, el comportamiento de la atmósfera diverge del que debería haber*

En el estudio de los sistemas complejos la idea de elemento, parte o subsistema se quiebra de tal modo que la cuantificación del sistema se hace imposible y nos vemos obligados a recurrir al enfoque de la medición que proporciona una matemática cualitativa, en la que el énfasis se pone en la dinámica del sistema como un todo, no en lo que afecta cada elemento del sistema, sino cómo éste se comporta integralmente. El objetivo, en este caso, es detectar el comportamiento caótico de ciertos sistemas no-lineales. Los pasos a dar consisten en escribir la ecuación, que puede ser en diferencias y de primer orden, de más de una variable o diferencial. Si la dinámica del sistema queda restringida a un subconjunto del espacio de fases, el atractor queda atrapado en una región (también podría haber más de un atractor en una región)[7]. En la literatura especializada del caos hay muchos ejemplos de atractores extraños (de Lorenz, de Hénon, de Rossler...), donde nos encontramos con las medidas de caoticidad (dimensión del atractor[8], exponentes de Lyapunov[9], entropía de información[10]). Pero, habida cuenta que este modelo de ecuación es desconocido, el problema con el que nos

tenido. Así que, en el período de un mes, un huracán que habría devastado la costa de América no se forma. O quizás, uno que no se iba a formar, se forma.

[7] Nieto de Alba, (1998).

[8] Un atractor es una "región del espacio de fases de los sistemas disipativos hacia la cual convergen las trayectorias que parten de una determinada región, llamada cuenca del atractor. Los atractores "predecibles", de estructura simple, son el punto y el ciclo limite, que corresponden a comportamientos periódicos", Sametband (1994).

[9] Los exponentes de Lyapunov sirven para medir la sensibilidad a las condiciones iniciales en un sistema dinámico, es decir, constituyen una "medida de la tasa de divergencia a partir de situaciones similares y, por tanto, permite evaluar los limites de la predicción de la evolución del sistema", Nieto de Alba (1998).

enfrentamos es el de inferir estas medidas a través de los datos observados de una serie cronológica. Ello exige un rediseño de los métodos experimentales, en el que los datos se presenten de una manera más geométrica y donde la topología del atractor y su dimensión fractal[11] hagan más comprensible la hipótesis de los atractores extraños mediante el análisis experimental.

I.III.- UN EJEMPLO DE CAOS DETERMINÍSTICO

Cuando tratamos de comprender algún fenómeno es de importancia capital el poder discriminar si la información que logramos recabar acerca del mismo es de origen aleatorio o si, por el contrario, ésta indica la presencia de alguna regla determinística que gobierne la evolución del fenómeno en cuestión. En otras palabras, después de hacer las observaciones y experimentos que consideramos pertinentes tratamos de ver si es posible establecer conexiones causales entre los diversos resultados obtenidos.

Este procedimiento de clasificación consta de varias etapas. La primera es una simple inspección de los datos y la última es el cálculo de funciones de

[10] Entropía de Información: "medida en promedio, ergódica, de la indeterminación o la información de un sistema" Nieto de Alba (1998).
[11] La dimensión fractal "constituye el medio de ponderar cualidades como la escabrosidad, discontinuidad o irregularidad de un objeto aludiendo al grado de ocupación (la parte del

correlación y el análisis espectral. Hasta hace algunos años, si la aplicación de este esquema no indicaba algún tipo de estructura de los datos, se suponía que los mismos eran una consecuencia de un proceso aleatorio y cualquier predicción del comportamiento futuro del sistema bajo estudio se llevaba a cabo con ayuda de la teoría de probabilidades.

Una característica importante que comparten todos los mercados financieros en particular, y la economía en general, es que son sistemas con múltiples mecanismos de retroalimentación y autorregulación. Sabemos, por ejemplo, que si el precio de un bien se incrementa demasiado, su demanda disminuirá y el precio caerá. Este es uno de los mecanismos más simples de autorregulación en economía y finanzas. Sin embargo, la existencia de esta clase de mecanismos tiene indicaciones profundas y sorprendentes en el comportamiento de los mercados, los precios y el sistema económico.

Para ilustrar el punto anterior, consideremos un modelo simple de un sistema autorregulado con retroalimentación[12]. Supongamos que tenemos un mercado extremadamente simple con un solo commodity, digamos el petróleo. El precio de un barril de petróleo durante una semana particular t es P(t).

---

espacio de fases que llena el atractor) del espacio por el conjunto en estudio", Nieto de Alba 1998).

[12] Esta sección esta basado en el modelo presentado en el trabajo de Robert Savit, "***Chaos on the Trading Floor***", recogido en el capítulo 14 del libro de Nina Hall (1993), "***Exploring Chaos: A Guide to the New Science of Disorder***".

En este modelo, los productores intentarán aumentar el precio por un factor *A* (mayor que 1) cada semana. Entonces, el precio de la semana *t + 1* estará dado por la ecuación $P(t + 1) = AP(t)$. Pero los consumidores también son sensibles a las variaciones del precio, y cuando éste aumenta disminuye la demanda. Esto podría representarse sustrayendo del lado derecho de la ecuación anterior algún número multiplicado por $P(t)$. De esta forma no estaríamos alterando substancialmente la forma de la ecuación.

$$P(t+1) = AP(t) - BP(t) = (A - B)P(t)$$

Si $(A - B) > 1$, la ecuación conducirá a un crecimiento sostenido de precio, de tal forma que la retroalimentación negativa (debida a la disminución de la demanda) no es suficiente para contrarrestar el aumento del precio. Si $(A - B) < 1$, el precio eventualmente será cero.

Evidentemente, un modelo en el cual las únicas opciones son: a) aumentar indefinidamente el precio o b) el colapso del mercado, no es muy satisfactorio. Para corregir esta situación, podemos considerar la siguiente opción que todavía nos permitiría representar, sin demasiadas complicaciones, la resistencia de los consumidores a los altos precios. En vez de restar un término lineal en el lado derecho de la ecuación, podríamos sustraer un término

P(t) con mayor potencia. La opción más simple sería $P^2(t)$, de tal forma que la ecuación quedaría como:

$$P(t+1) = \lambda P(t) - \lambda P^2(t) = \lambda P(t)\{1 - P(t)\}$$

Esta ecuación se le conoce como ecuación o mapa logístico. A pesar de su simplicidad, la serie de tiempo P(t) generada por este mapa puede tener una asombrosa variedad de comportamientos, dependiendo del valor de λ[13], el cual es un coeficiente que suele llamarse parámetro de control y que determina el proceso.

Para fijar las ideas consideremos las gráficas representadas en las Figuras I.1, I.2 y I.3. Supongamos que éstas representan el precio diario, en una escala escogida a conveniencia, de tres productos que denominaremos A, B y C respectivamente. Está claro que la información disponible indica un precio estable del producto A, pero los precios de los productos B y C no resultan tan fácil de predecir. En el caso del producto B, un análisis espectral demuestra que si bien la señal es más compleja que la correspondiente al

[13] De esta forma, si $0 < \lambda < 3$, entonces, después de cierto tiempo, P(t) será constante. Para valores un poco más grande de λ ($3 < \lambda < 3{,}5699$), el comportamiento de P(t) es descrito por un ciclo límite; P(t) oscila entre varios valores periódicamente (el número preciso de valores o límites depende del valor de λ). Finalmente, para valores aún más grandes de λ ($\lambda > 3{,}5699$), el comportamiento de P(t) se convierte en aperiódico (nunca se repite), y para $\lambda = 4$ esta aperiocidicidad se vuelve bastante complicada, de hecho se vuelve caótica.

Producto A es, sin embargo, periódica y, por tanto, generada por una regla determinista. En el caso del producto C, tanto el cálculo de la función de correlación como el análisis espectral conducen a resultados idénticos a los que se obtendrían si se tratase de cierto tipo de procesos aleatorios. De esta forma, no sería difícil concluir que los precios de A y B varían de manera predecible, pero no así los precios futuros de C.

Sin embargo, resulta sencillo demostrar que estas tres gráficas son generadas por reglas muy parecidas y particularmente simples. En efecto, corresponden a la regla de la ecuación logística. Así, para $\lambda = 2{,}9$ resulta la figura I.1, para $\lambda = 3{,}5$ se obtiene la figura I.2 y para $\lambda = 4$ aparece la figura I.3. Modificando únicamente el valor del parámetro de control, las propiedades cualitativas de la regla cambian drásticamente. De una situación de estabilidad y regularidad se puede pasar a un aparente desorden al modificar el coeficiente λ. ***Esta capacidad de imitación del desorden y del comportamiento aleatorio que poseen ciertas reglas deterministas simples es una de las características más importantes de lo que se denomina caos determinista.***

Se podría pensar que basta conocer el precio de un producto en un solo período y la regla que determina la evolución de éste para poder predecir correctamente todos los precios futuros. A una fórmula determinada asociamos

el poder de predicción y lo hacemos porque suponemos que cualquier pequeño error que se cometa, tanto en la especificación de los datos iniciales como en el proceso de cálculo posterior, no afectará sensiblemente la predicción misma.

Este es efectivamente el caso para A y B mas no para C. Cuando $\lambda = 4$, cualquier pequeño error que se cometa en la especificación del precio inicial, o en alguna de las etapas del cálculo posterior, es rápidamente amplificado y se traduce en grandes errores de predicción. Para ser precisos, en la Figura I.4 se observa lo que ocurre cuando $\lambda = 4$. Se generan dos series de valores comenzando, en un caso con P(*a*) = 0,4 y, en el otro, con P(*b*) = 0,3999999. Esta pequeña diferencia en el dato inicial es amplificada, cincuenta períodos más tarde, hasta un valor cercano a uno, que es el máximo en la escala.

Esta propagación del error es otra característica del caos determinista. En aquellas reglas en las que está presente no solamente se observa un patrón complejo de comportamiento, sino que, además, impone un límite fundamental a la capacidad de prognosis, puesto que siempre se comete algún error. No importa cuan pequeño éste sea, sólo a "corto plazo" se puede predecir el futuro del proceso en cuestión con una precisión relativamente aceptable. Mientras transcurre el tiempo, el error se amplifica y la predicción está cargada con mayor incertidumbre. Por el contrario, las predicciones

logradas mediante la regla determinista de evolución a corto y mediano plazo resultan considerablemente mejores que las efectuadas con cualquier método estadístico.

I.IV.- LA TEORÍA DEL CAOS EN LA CIENCIA ECONÓMICA

Es posible que en un mercado no-lineal los movimientos de precios no se deban solamente a la nueva información que afecta a ese mercado en particular, sino también puede ser el resultado de la dinámica no-lineal del mercado en sí mismo. De hecho, es de esperar que parte de la estructura dinámica subyacente de un mercado se refleje en los movimientos de precios. Por supuesto, hay también muchas otras fuentes de ruido y nueva información impredecible entrando al sistema. Adicionalmente, existen numerosos mecanismos autorregulados mucho más complejos que el generado por la ecuación logística.

Para complicar aún más las cosas, el ambiente en el cual un mercado existe no es estático. Ocurren cambios en las sociedades y la economía en todas las escalas de tiempo, desde segundos a milenios. Un mercado financiero, interrelacionado con otros mercados y la sociedad como un todo reflejará en sus precios, de una forma altamente compleja, todos estos cambios

(así como las anticipaciones de dichos cambios), incorporando nueva información y los efectos de sus propios mecanismos (generalmente no-lineales) de autorregulación.

Estos mercados son sumamente complicados. Sus mecanismos de autorregulación son intrincados y reflejan los efectos de la psicología humana, el comportamiento social, la tecnología, y, en alguna medida, el "pensamiento racional". Resultan improductivos los esfuerzos por modelar tales sistemas en detalle, ya que más bien habría que apuntar hacia una aproximación holística o global de los mismos. Sin embargo, la esperanza de lograr una comprensión más profunda del comportamiento de estos sistemas en economía, reconociendo su estructura no-lineal intrínseca, es excitante y promisoria.

En particular, resulta atractivo para los economistas intentar aumentar su capacidad de predicción de los mercados financieros y de la economía en general. Al fin y al cabo, los mercados financieros y las economías de las naciones son sistemas dinámicos con mecanismos de realimentación y de autorregulación. En los últimos años, varios grupos de investigación han encarado el problema de aplicar el enfoque que utiliza la física de los sistemas dinámicos no-lineales al campo de la economía. El más conocido es el que se desarrolló en el Santa Fe Institute, en Nuevo México, donde en 1987, tres ganadores del premio Nobel (el economista Kenneth Arrow y los físicos Murray

Gell-Mann y Philip Anderson), reunieron a economistas, físicos, biólogos, matemáticos y especialistas en computación para empezar un programa de investigación sobre la economía considerada como un sistema dinámico complejo.

Estos investigadores han logrado construir modelos de computadora, para simular el comportamiento de la economía, en la que los inversionistas son, a su vez, programas de computadora capaces de reconocer pautas de variación en los precios y de actuar en consecuencia, y que además aprenden con la experiencia. El resultado de esta simulación por computadora comienza a acercarse a lo que se observa en las economías reales.

Sin embargo, la realidad económica es mucho más compleja y está afectada por los constantes cambios en la sociedad, además de que el precio de cada producto está vinculado al de muchos otros. Así, es posible que los efectos de caos determinista que aparecen en estos modelos no estén presentes en una economía real, y que sea igualmente válido seguir describiendo la economía mediante procesos lineales con datos que tienen un importante componente de "ruido", o sea de fluctuaciones al azar. Por otra parte, podrían existir simultáneamente efectos agregados de caos y azar, difíciles de separar y distinguir con el instrumental matemático y estadístico disponible en la actualidad.

Para decidir que enfoque es el más adecuado, hay que utilizar los casos reales, que son muy difíciles de aplicar porque se requieren conjuntos de datos extremadamente largos, y aquéllos con los que se cuenta son escasos generalmente, además de tener un fuerte componente de ruido.

Pero en los últimos años se han inventado nuevas técnicas de análisis estadístico que son capaces de distinguir entre las fluctuaciones debidas a perturbaciones ruido blanco y las que pueden exhibir una regularidad si se les examina adecuadamente y bajo ciertas condiciones[14]. La idea básica es que los sistemas complejos pueden revelar su estructura si se traducen los datos a un espacio de fases con un número apropiado de dimensiones.

Estos métodos se han aplicado con resultados alentadores a los estudios sobre poblaciones y otros sistemas biológicos, sobre fluidos turbulentos, y ahora también para estos modelos económicos. Entre los más poderosos figuran el de los algoritmos que utilizan una sola magnitud (población, temperatura, precio, o lo que sea que nos brinde una serie suficientemente larga de datos) tomada a intervalos de tiempos regulares.

[14] Entre las cuales tenemos, por ejemplo, que la serie de tiempo tenga suficientes datos.

CAPÍTULO II

LA MATEMÁTICA DEL CAOS

"Chaos always defeats order because is better organized."

Terry Pratchet

"Chaos often breeds life, when order breeds habit."

Henry Brooks Adams

II.I.- MODELOS DINÁMICOS LINEALES EN ECONOMÍA

Primero fue la fotografía, luego el cine. Primero fue la estática, luego la dinámica. La vida es dinámica, de modo que se supone que un enfoque dinámico de los problemas es más apropiado que un enfoque estático. Lo que no quiere decir que la estática carezca de interés y de utilidad. A veces preferimos analizar un problema en el ámbito estático, pero si queremos hacernos una idea cabal de él, necesitamos la dimensión dinámica, que, a menudo, cambia nuestra valoración del fenómeno; e, indudablemente, la hace más complicada[1].

II.I.I.- TEORÍA GENERAL DE LA DINÁMICA DISCRETA

Un modelo, aun siendo lineal, se convierte en dinámico tan pronto como las variables que relacionan períodos de tiempo diferentes contienen enlaces con el pasado o el futuro, a través de los mecanismos de retardos (lags) o de adelantos. Se trata de la dinámica estable de la física que describe, en tiempo reversible, la evolución del sistema hacia el equilibrio; mientras que lo estático trata del caso especial del sistema en equilibrio.

En el ámbito de los sistemas dinámicos, el diagrama de fases es un instrumento gráfico útil para analizar el comportamiento a lo largo del tiempo de modelos dinámicos no muy complejos.

Empecemos con un caso sencillo. Sea la ecuación

$$x_{t+1} = \alpha x_t$$

donde α es una constante. En la figura II.1.a, el eje de abscisas muestra los valores de x en un momento del tiempo, y el de ordenadas en el momento siguiente; la diagonal $(x_t = x_{t+1})$ permite proyectar los valores de un eje en el otro, conforme transcurre el tiempo, a partir de su valor en un momento inicial x_0, que se especifica. Si $\alpha \in (0,1)$, el sistema converge monotónicamente hacia el origen, como se ve en el figura II.1.b, que recoge la **trayectoria temporal** de x. Pero otros valores de α darán lugar a otros comportamientos. En efecto, para $\alpha \in (-1,0)$, el sistema converge a cero con oscilaciones amortiguadas (Figura II.2); para $\alpha \in (1,+\infty)$, el sistema explota (Figura II.3), y para $\alpha \in (-\infty,-1)$, presenta oscilaciones explosivas (Figura II.4).

[1] Argandoña et al., pp. 9 (1996).

II.I.I.I.- PUNTOS FIJOS Y PERIÓDICOS DE UN SISTEMA DINÁMICO UNIDIMENSIONAL

Dado un sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k),\ f : X \to X,$ se dice que $\xi \in X$ es un punto fijo del sistema si $f(\xi) = \xi$. Si ξ es un punto fijo, la solución cuya condición inicial es $x_0 = \xi$ verifica $f^k(x_0) = \xi.$ Esto significa que los puntos fijos son estados de equilibrio: una vez que el sistema entra en ellos, permanece invariable en todos los instantes futuros.

Los puntos fijos se clasifican según el comportamiento de las soluciones con condiciones iniciales cercanas a ellos, en **puntos fijos atractivos**, **repulsivos** e **indiferentes**.

Estudiaremos a continuación estos distintos tipos de puntos fijos. En lo que sigue de esta sección,

$$x_{k+1} = f(x_k), f : X \subseteq \Re \to \Re$$

designa un sistema dinámico unidimensional.

Supondremos también para simplificar que f' es continua en X, aunque esta hipótesis se podría suavizar en algunas ocasiones.

a) Puntos fijos Atractivos.

Definición: Sea ξ un punto fijo de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que ξ es atractivo si $|f'(\xi)| < 1$.

Teorema: Si ξ es un punto fijo atractivo, entonces existe un intervalo abierto $I \subseteq X$ conteniendo a ξ tal que para cualquier $x \in I$, se tiene

$$lim_{k\to\infty} f^k(x) = \xi$$

En las figuras II.5 y II.6 se muestran puntos fijos atractivos.

Sea ξ un punto fijo de f y consideremos el conjunto de puntos

$$\left\{x \in X : lim_{k\to\infty} f^k(x) = \xi\right\}$$

El interior $C(\xi)$ de este conjunto se llama **cuenca de atracción de** ξ (recuérdese que el interior de un conjunto es el mayor conjunto abierto contenido en el conjunto). Si ξ es un punto fijo atractivo, su cuenca de atracción consta al menos de un intervalo que rodea a ξ, pero puede incluir también a otras partes del espacio de fases.

b) Puntos fijos repulsivos.

Definición: Sea ξ un punto fijo de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que ξ es repulsivo si $|f'(\xi)| > 1$.

Teorema: Si ξ es un punto fijo repulsivo, debe pertenecer a algún intervalo abierto $I \subseteq X$ verificando que para cualquier $x_0 \in I$, existe un k tal que $f^k(x_0) \notin I$. Esto significa que las soluciones con condición inicial en el intervalo I escapan de I al cabo de un número finito de iteraciones. Ver Figura II.7.

c) Puntos fijos indiferentes.

Definición: Sea ξ un punto fijo de $x_{k+1} = f(x_k)$. Se dice que ξ es indiferente si $|f'(\xi)| = 1$. Ver Figura II.8.

d) Puntos cíclicos.

Definición: Se dice que ξ es un **punto periódico** o **cíclico** del sistema dinámico $x_{k+1} = f(x_k)$ si existe un n tal que $f^n(\xi) = \xi$. Así, un punto es periódico si su órbita se "cierra" recomenzando por su valor inicial. El mínimo entero k tal que $f^k(\xi) = \xi$ se llama **orden del punto periódico**. En tal caso la órbita

$$\{\xi, f(\xi), f^2(\xi), ..., f^{k-1}(\xi)\}$$

recibe el nombre de **período** o **ciclo de orden *k***. En las Figuras II.9 y II.10 pueden verse puntos periódicos de segundo y tercer orden.

e) Estabilidad y puntos de equilibrio.

Un punto fijo de un sistema dinámico representa un estado de equilibrio del sistema. Ahora bien, no todos los estados de equilibrio tienen la misma naturaleza. Si se deja rodar una bola en el cuenco de una copa, terminará deteniéndose en el centro de la misma. Si se desplaza la bola ligeramente de su posición de equilibrio, retornará a ella. Este es un equilibrio robusto frente a perturbaciones, conocido como equilibrio **asintóticamente estable**. Los puntos

fijos atractivos presentan esta forma de equilibrio. La forma de equilibrio opuesta es el **equilibrio inestable**, representado por una pelota en el borde del tejado: basta una ligera perturbación para romper el equilibrio. Los puntos fijos repulsivos presentan este tipo de equilibrio. Finalmente existe una forma intermedia de equilibrio, técnicamente conocido como **equilibrio estable**. Este se halla representado por una péndulo sin rozamiento en posición de reposo. Si se somete al péndulo a una pequeña perturbación, éste permanecerá oscilando indefinidamente en torno a la posición de equilibrio, sin alejarse mucho de ella, pero sin retornar a ella de forma definitiva.

II.I.II.- TEORÍA GENERAL DE LA DINÁMICA CONTINUA

En términos generales, para generar dinámicas complejas un modelo determinístico debe tener dos propiedades esenciales: (i) debe haber rezagos temporales discretos o continuos entre las variables y (ii) debe haber algún grado de no-linealidad en la relación funcional del modelo. En las disciplinas aplicadas, incluyendo a la economía, la primera de estas características está representada típicamente por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales o en diferencias. La aproximación geométrica (o topológica) a la dinámica, la cual puede ser identificada con la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales y

en diferencias, tiene como objeto el estudio de las propiedades geométricas asintóticas de la estructura de órbita de un sistema dinámico.

Un **sistema dinámico en tiempo continuo** es una ecuación de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad x \in \Re^n \tag{1}$$

donde $f : U \subseteq \Re^n \to \Re^n$, es un campo vectorial definido en cierta región abierta U de $\Re^n$ y $\dot{x} \equiv dx/dt$. El vector x denota las variables económicas en estudio, o alguna transformación apropiada de las mismas; $t \in \Re$ indica el tiempo. En este caso, el espacio $\Re^n$ de las variables dependientes es conocido como ***espacio de fases o espacio de estados***, mientras que $\Re^n \times \Re$ es llamado el espacio de movimientos.

La ecuación (1) es usualmente referida como un *campo vectorial*, dado que una solución de (1) en cada punto x es una curva en $\Re^n$, cuyo vector velocidad está dado por $f(x)$. Una solución de la Ecuación (1) es una función

$$\Phi : I \to \Re^n$$

donde I es un intervalo en $\Re$ (en las aplicaciones económicas, esto es típicamente $I=[0,+\infty)$), tal que Φ es diferenciable en I, $[\Phi(t)]\in U \ \forall \ t\in I$, y

$$\dot{\Phi}(t)=f[\Phi(t)], \ \forall \ t\in I.$$

El conjunto $\{\Phi(t)|t\in I\}$ es la *órbita* de Φ: está contenida en el espacio de fases; el conjunto $\{(t,\Phi(t))|t\in I\}$ es la *trayectoria* de Φ: está contenida en el espacio de movimientos. Sin embargo, en la práctica, los términos "órbita" y "trayectoria" son empleados usualmente como sinónimos. Si se deseara indicar explícitamente la dependencia en las condiciones iniciales, entonces una solución de la ecuación (1) pasando a través del punto x_0 en un momento t_0 tiene la siguiente nomenclatura:

$$\Phi(t,t_0,x_0),$$

(si t_0 es igual a cero, puede ser omitida). **Para que exista una solución $\Phi(t,x_0)$, la continuidad de f es suficiente. Para que tal solución sea única, es suficiente que f sea continua y diferenciable en U [2].**

De esta forma, un sistema dinámico en tiempo continuo especifica una pauta de evolución de ciertas variables de estado, determinando los ritmos de variación de cada una de ellas –sus derivadas- en función de los valores que las variables toman.

Podríamos también interpretar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en una manera ligeramente diferente, la cual está adquiriendo mayor importancia en la teoría de sistemas dinámicos y será muy útil para entender algunos de los conceptos discutidos en las secciones subsiguientes. Suponga que denotamos por $\Phi_t(x)$ el punto en $\Re^n$ alcanzado por el sistema en el momento t a partir del punto x en el momento 0, bajo la acción del campo vectorial f de la Ecuación (1). Entonces, la totalidad de las soluciones de (1) puede ser representado por una familia de mapas de un parámetro en el espacio de fases, $\Phi_t : \Re^n \to \Re^n$, la cual es llamada flujo de fases o, simplemente, flujo.

Si ahora tomamos t como un parámetro fijo y consideramos que, para campos vectoriales autónomos, las soluciones trasladadas en el tiempo continúan siendo soluciones (por ejemplo, si $\Phi(t)$ es una solución de la

[2] Esto se conoce como el ***teorema de la existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias***.

ecuación (1), $\Phi(t+\tau)$ es también una solución para cualquier $\tau \in \Re)$, el problema puede ser formulado así

$$x_{t+1} = T(x_t), \qquad x \in \Re^n, t \in N \tag{2}$$

donde $T = \Phi_\tau$ y τ es el valor fijo del parámetro t y normalizado de forma que $\tau = 1$.

De esta manera, una ecuación en diferencias como (2) puede ser obtenida a partir de una ecuación diferencial como (1). Este no es necesariamente el caso en todas las situaciones y muchos problemas en economía (al igual que en otras áreas de investigación) dan origen directamente a sistemas dinámicos en tiempo discreto. De hecho, mapas no invertibles como el mapa o ecuación logística no pueden ser derivados a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ecuaciones como la (2) son conocidas usualmente como *mapas iterados*, dado que su órbita es obtenida recursivamente dada una condición inicial x_t. Por ejemplos, si componemos T consigo mismo, entonces obtenemos la segunda iteración

$$x_{t+2} = T \circ T(x_t) = T^2(x_t)$$

y por inducción podemos obtener la iteración enésima,

$$x_{t+n} = T \circ T^{n-1}(x_t) = T^n(x_t)$$

La notación $T^n(x)$ significa que T está compuesto consigo mismo *n – 1* veces, no que es la derivada o potencia enésima de T.

Nótese la siguiente diferencia entre las órbitas de sistemas de tiempo continuo y sistemas de tiempo discretos: los primeros son curvas continuas en el espacio de estados, mientras que los segundos son *secuencias de puntos* en el espacio. Adicionalmente, el hecho de que un mapa es una función implica que, partiendo de cualquier punto dado en el espacio, sólo existe una órbita hacia delante. Sin embargo, si la función es no invertible, las órbitas hacia atrás no están definidas.

La dinámica de corto plazo de órbitas individuales puede ser usualmente descrita con suficiente exactitud mediante integración numérica de las ecuaciones diferenciales o por iteración de los mapas. En las aplicaciones, y específicamente en las económicas, rara vez estamos interesados en las

propiedades de corto plazo de las soluciones individuales. En realidad, nuestro interés se dirige a las propiedades cualitativas globales de conjuntos de soluciones que parten de ciertos subconjuntos de condiciones iniciales de relevancia práctica. Estas propiedades globales sólo pueden ser efectivamente investigadas en relación a las trayectorias que son de alguna forma recurrentes, es decir, aquellas trayectorias que pasan reiteradamente por cualquier región del espacio de estados.

II.II. CONJUNTOS INVARIANTES Y ATRAYENTES

Para discutir las propiedades recurrentes de las órbitas de un sistema dinámico, debemos comenzar con la noción de conjuntos invariantes. Estos conjuntos juegan un papel importante en la organización de los sistemas de órbitas en el espacio de fases y su investigación es un paso indispensable para el estudio de la dinámica de un sistema.

Definición: Formalmente, para el sistema dinámico discreto dado por la Ecuación (2), tenemos que el conjunto $S \subseteq X$ es *invariante* bajo la acción del mapa T sí:

$$\phi_t(S) \subseteq S, \forall t \in \Re$$

$$T^n(S) \subseteq S, \forall n \in N$$

Esto indica que si aplicamos el mapa T a cualquier punto de S, entonces obtenemos otro punto de S.

Ejemplo: Sí $\phi(x) = x^2 \ \ \forall x \in [0, \infty)$

$[0,1]$ y $[1, \infty)$ son conjuntos invariantes

Cuando se construye un modelo matemático de la evolución temporal de ciertas variables económicas, usualmente deseamos imponer ciertas restricciones en el conjunto A con respecto a valores "razonables" que pueden tomar dichas variables. Por ejemplo, cantidades como acervo de capital, cantidades consumidas o precios deben permanecer positivas, o al menos no negativas en cualquier momento del tiempo; cantidades como la proporción de ahorro o de inversión con respecto al producto deben estar entre cero y uno. En otras palabras, deseamos que el conjunto "aceptable" A sea invariante. La invarianza de A es condición necesaria (mas no suficiente) para la validez de un modelo dinámico y en particular de sus mecanismos de ajuste implícitos o explícitos.

En la mayoría de los casos, sin embargo, conseguir los conjuntos invariantes no es suficiente. Queremos también localizar la región o las regiones que capturan todas las órbitas que se originan en un cierto dominio.

Definición: Se dice que un conjunto invariante cerrado es un conjunto atrayente si para cada conjunto abierto $V \supset A$, existe un entorno abierto U de A, tal que para todo $X \in U$, $T^n(x) \in V$ para todo $n > N > 0$ y $T^n(x) \to A$ para $n \to \infty$.

Ejemplo: Sí $\phi(x) = x^2$

$\{0\}$ es un conjunto atrayente, si tomamos $x = 0$

Para un conjunto atrayente también podemos definir la *cuenca de atracción*, como el conjunto de puntos que da origen a una órbita que es atrapada por el conjunto atrayente.

El hecho de que un conjunto sea atrayente no implica que todas sus partes sean atrayentes también. Por tanto, para describir el régimen asintótico de un sistema, necesitamos el concepto de *atractor*. Una propiedad deseable de un atractor –en contraste con un conjunto atrayente- es la irreductibilidad. Esta propiedad se obtiene cuando una órbita, comenzando a partir de cualquier

punto en el atractor, se acerca arbitrariamente a cualquier otro punto a medida que transcurre el tiempo.

II.III. DIMENSIÓN FRACTAL

El término "fractal" fue acuñado por el investigador de IBM Benoit Mendelbrot (1985) y se refiere a objetos geométricos caracterizados por dimensiones no enteras y autosimilitud. Intuitivamente, un copo de nieve puede ser considerado como un fractal natural. El problema de definir criterios de medidas diferentes a las familiares dimensiones euclideas (longitud, área, volumen) con la finalidad de cuantificar las propiedades geométricas de objetos "quebrados" o "porosos" fue abordada por los matemáticos mucho antes que los fractales y sus propiedades se hicieran populares. En estos momentos existe una gran cantidad de criterios para medir cualidades que de otra forma no tendrían una definición clara (como el grado de "porosidad" de un objeto).

Sea S un conjunto de puntos en un espacio de dimensión euclidea p (por ejemplo, los puntos en la línea real generada por las iteraciones de un mapa unidimensional). Ahora consideremos ciertas cajas de lado ε (o, equivalentemente, ciertas esferas de radio ε), y calculemos el número mínimos

de dichas celdas, $N(\varepsilon)$, necesario para "cubrir" S. Entonces, la *dimensión fractal D* del conjunto S estará dada por el siguiente límite (asumiendo que existe)

$$D \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)} \tag{3}$$

La cantidad definida en la ecuación (3) es también conocida como la dimensión de capacidad. Es fácil observar que, para los objetos geométricos más familiares esta ecuación permite obtener resultados perfectamente intuitivos. Por ejemplo, si S consiste de sólo un punto, $N(\varepsilon)=1$ y $D=0$; si es un segmento de longitud unitaria, $N(\varepsilon)=1/\varepsilon$ y $D=1$; si es un plano de área unitaria, $N(\varepsilon)=1/\varepsilon^2$ y $D=2$; finalmente, si S es un cubo de volumen unitario, $N(\varepsilon)=1/\varepsilon^3$ y $D=3$. Para objetos geométricos "regulares", la dimensión D no difiere de la dimensión euclideana usual, y, en particular, D es un entero.

No obstante, la dimensión fractal no siempre es un entero. Consideremos el fractal llamado *conjunto de Cantor.* Para generar un conjunto de Cantor, comience con un segmento lineal de longitud unitaria. Remueva el tercio del medio y repita este proceso infinitamente. El Conjunto de Cantor es el conjunto de puntos resultante, los cuales son infinitos pero su longitud total es

cero. ¿Cuál es la dimensión fractal del Conjunto de Cantor? Haciendo uso de la noción de dimensión de capacidad, tenemos que $N(\varepsilon)=1$ para $\varepsilon=1$, $N(\varepsilon)=2$ para $\varepsilon=1/3$, y, generalizando, $N(\varepsilon)=2^n$ para $\varepsilon=(1/3)^n$. Tomando el límite para $n\to\infty$ (o equivalentemente, tomando el límite para $\varepsilon\to 0$), podemos escribir

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{\log 2^n}{\log 3^n}\cong 0{,}63$$

Así tenemos caracterizado cuantitativamente un conjunto geométrico que es más complejo que los objetos euclideos usuales. De hecho, la dimensión del Conjunto de Cantor no es un entero. Podríamos decir que el Conjunto de Cantor es un objeto "más grande" que un punto (dimensión 0) pero más pequeño que un segmento (dimensión 1). También podría verificarse que el Conjunto de Cantor está caracterizado por autosimilitud.

Consideremos ahora otro fractal, llamado el triángulo de Sierpinsky. Para construir el triángulo de Sierpinsky comenzaremos con un triángulo equilátero cuyos lados son de medida unitaria. Conectamos los puntos medios de cada lado con rectas y removemos el triángulo interno de los cuatro triángulos iguales. Repetimos el proceso al infinito y cada vez tenemos tres

triángulos equiláteros más. Cuando el triángulo de Sierpinsky está completamente lleno, esté consistirá de un número infinito de triángulos con un área total del cero. ¿Cuál es el valor de D para el triángulo de Sierpinsky? Después de n repeticiones del proceso tenemos $N(\varepsilon) = 3^n$ triángulos cuyos lados tienen longitud $\varepsilon = 1/2^n$. Tomando el límite para $n \to \infty$, tenemos

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} \cong 1{,}584$$

Aquí D es menor que 2, por el hecho de que el triángulo esta sumergido en dos dimensiones.

El concepto de dimensión fractal es útil para el análisis geométrico de los sistemas dinámicos, porque puede emplearse como una medida de la forma como las trayectorias llenan el espacio de fases bajo la acción de un flujo o de un mapa. Una dimensión fractal no entera, por ejemplo, indica que las trayectorias de un sistema completan menos que un subespacio entero del espacio de fases. También el concepto es útil en el análisis cuantitativo de los atractores caóticos. Por ejemplo, la dimensión fractal del atractor de un sistema puede ser tomada como un índice de complejidad.

II.IV. EXPONENTES DE LYAPUNOV

Para permitir una caracterización rigurosa, así como una forma de medir la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, discutiremos ahora una poderosa herramienta conceptual conocida por los exponentes de Lyapunov. Éstos proveen una herramienta extremadamente útil para caracterizar el comportamiento de sistemas dinámicos no-lineales. **Los exponentes de Lyapunov miden la tasa exponencial infinitesimal a la cual órbitas cercanas divergen**. Un exponente de Lyapunov positivo es una definición operacional de comportamiento caótico.

A pesar de que los exponentes de Lyapunov pueden ser discutidos en un marco general, nos concentraremos en el contexto de mapas unidimensionales, dado que son el tipo más común de sistema dinámico encontrado en la aplicaciones económicas de la teoría del caos. Consideremos, entonces, el mapa dado por la ecuación (2), con $T : U \to \Re$, siendo U un subconjunto de $\Re$. Queremos describir la evolución en el tiempo de dos órbitas que parten de dos puntos cercanos x_0 y $x_0 + \varepsilon$ (donde ε es la diferencia -infinitesimalmente pequeña- entre x_0 y $x_0 + \varepsilon$). Si aplicamos la función T, n veces a cada punto, la diferencia entre los resultados estará relacionada con ε en la siguiente forma:

$$d_n = e^{n\lambda(x_0)}\varepsilon$$

donde d_n es la diferencia entre los dos puntos después que han sido iterados por el mapa T, n veces y $\lambda(x_0)$ es la tasa de convergencia o divergencia.

Tomando el logaritmo de la ecuación anterior y despejando $\lambda(x_0)$ tenemos

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{n}\log\left|\frac{d_n}{\varepsilon}\right|.$$

Asintóticamente, tenemos

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|\frac{d_n}{\varepsilon}\right| \tag{4}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|T'(x_{n-1})...T'(x_1)T'(x_0)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\log\left|T'(x_j)\right|$$

La cantidad $\lambda(x_0)$ es llamada exponente de Lyapunov. Nótese que el lado derecho de (4) es un promedio a lo largo de una órbita del logaritmo de la

derivada. Para la ecuación (4), la interpretación de $\lambda(x_0)$ es la siguiente: es la tasa exponencial asintótica de divergencia de órbitas cercanas.

Ejemplo: sea el siguiente sistema

$$x_{t+1} = \begin{matrix} T_r(x_t) \\ rx_t(1-x_t), \end{matrix} \quad x \in [0,1], r \in (0,4]$$

un mapa logístico. Dado que $T_r'(x_j) = r(1-2x_j)$, tenemos que el exponente de Lyapunov está representado por:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log\left|r(1-2x_j)\right|$$

$$= \log r + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log\left|1-2x_j\right|$$

Claramente, si $x_0 = 0$ ó 1, entonces $\lambda(x_0) = \log r$. Para puntos $x_0 \in (0,1)$ y para $r = 4$, $\lambda(x_0) = \log 2$.

El signo de los exponentes de Lyapunov es especialmente importante para clasificar los diferentes tipos de comportamientos dinámicos. En particular,

la presencia de un exponente de Lyapunov positivo indica que órbitas cercanas divergen a tasas exponenciales. Esto se traduce que los errores de observación serán amplificados por la acción del mapa.

II.V. DEFINICIÓN FORMAL DE UN SISTEMA CAÓTICO

Decimos que $x_t = \phi(x_{t-1})$ es un sistema caótico si se verifican las condiciones siguientes:

a) ***Sensibilidad a las condiciones iniciales o "efecto mariposa".***

b) ***Los puntos periódicos son densos:*** Significa que todo punto del espacio de fases puede ser aproximado arbitrariamente por medio de puntos periódicos. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, $x \in I$ $\exists$ y periódico / $|x - y| < \varepsilon$.

c) ***Conjugación topológica:*** Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos mapas. Un mapa $h : X \to Y$ es conocido como una conjugación topológica (o una equivalencia topológica) sí $h \circ f = g \circ h$. También decimos que f y g

están conjugados topológicamente por h, o, simplemente, que f y g están conjugados.

II.VI. LA RUTA HACIA EL CAOS

En tiempo anteriores al paradigma caótico el estudio de cualquier sistema requería de su clasificación previa: determinístico o aleatorio, de tal forma que la simplicidad y la complejidad no tenían un terreno común y la posibilidad de que un sistema determinístico simple se comportara como un sistema aleatorio iba contra la intuición general. Para encontrar esta conexión en el terreno de la teoría del caos tenemos que recurrir a la dinámica no-lineal, lo cual haremos a través del modelo de la ecuación logística.

Este modelo viene dado por la ecuación no-lineal

$$Y_{t+1} = \lambda Y_t (1 - Y_t),$$

en donde se representa uno la población máxima y por λ la tasa de reproducción. Obsérvese que a ella se puede llegar a partir de $X_{t+1} = \lambda X_t (1 - X_t / K)$, siendo K la población máxima, sin más que hacer el

cambio $Y_t = X_t / K$. El segundo término de la ecuación, es decir, $1 - Y_t$, es lo que convierte en no-lineal la ecuación. Dicho término representa la reacción al impacto de crecimiento proporcional del primer término λY_t. A medida que crece la población, el segundo término produce una retroalimentación no-lineal que va frenando el crecimiento del primer término pues, cuanto mayor sea Y_t, menor es $1 - Y_t$. Esta ecuación ha encontrado múltiples aplicaciones en todo tipo de poblaciones, al crecimiento de las ventas de una empresa o a la difusión de una información o rumor que se va expandiendo hasta que todos lo conocen. Es todos los casos en los que encuentra aplicación nos aproximamos potencialmente al caos. Ello va a depender de los valores de λ, que contiene la tasa de crecimiento (r), al suponer $\lambda = 1 + r$. Así nos encontramos con los siguientes casos, que nos llevan del orden al caos:

a) ***Extinción***: Para $\lambda = 0{,}8$, lo cual supone una tasa de crecimiento negativo del 20% ($\lambda = 1 + r = 1 - 0{,}20$), aparece la serie temporal representada en la Figura II.11 y las trayectorias en el espacio de fases, es decir, el atractor de la Figura II.12.

b) ***Equilibrio:*** Para $\lambda = 2{,}5$, lo cual supone una tasa de crecimiento del 150% ($r = 1{,}5$). La serie temporal, en donde p representa el punto límite

del crecimiento estable, aparece en la Figura II.13 y el atractor puntual en la Figura II.14.

c) ***Ciclo de período dos:*** Para $\lambda = 3{,}1$, la serie temporal, Figura II.15 constituye un movimiento periódico, de período dos, donde *p* y *q* representan el valor mínimo y máximo, respectivamente. En la Figura II.16, en el espacio de fases, aparece el atractor con órbitas de período dos. Estos sistemas periódicos se caracterizan por regresar siempre al mismo punto del espacio de fases, por compleja que sea la senda de retorno. Se dice que tales sistemas se encuentran enjaulados.

d) ***Caos*:** Por último, para $\lambda = 3{,}8$ $(r = 2{,}8)$, ya nos encontramos con una serie cronológica, Figura II.17, con apariencia de proceso aleatorio y que, al representarla en el espacio de fases, nos muestra un atractor extraño o caótico, Figura II.18. En este caso, el proceso de acción-reacción ha generado una dinámica caótica. Se habla también de ruido caótico cuando se observan estas oscilaciones irregulares con apariencia aleatoria, pero que están producidas por un mecanismo determinista. Es decir, en el fenómeno del caos, el orden determinista crea el desorden del azar.

La ruta hacia el caos: Este tránsito del orden al caos asociado a la logística aparece ahora en la Figura II.19 (llamado árbol de Feigenbaum), para valores de $0 < \lambda < 4$, y de acuerdo con el siguiente proceso:

a) Para $0 < \lambda < 3$, todas las órbitas de los puntos $Y_0 \in (0,1)$, en el sistema dinámico convergen a un punto fijo. Así para $\lambda = 2{,}5$, el sistema converge al punto *p* que en la figura II.13 señala el punto límite que se representa en la ordenada Y_t de la Figura II.19.

b) Para $3 < \lambda < 1+\sqrt{6}$, el sistema converge a órbitas de período "dos". Así para $\lambda = 3{,}1$, todas las órbitas convergen a p_1 y q_1 (Figura II.15), cuyos puntos límites se representan ahora en la ordenada Y_t de la Figura II.19. A medida que λ crece, aparecen órbitas de período 4, 8, 16, ..., tal que, a partir de $\lambda > 3$, toda la sencillez y todo el determinismo del sistema dinámico empiezan a desaparecer en esa ruta hacia el caos. Para el valor de $\lambda_0 = 3{,}569446$, se tiene una infinidad de órbitas periódicas, el sistema es aperiódico, pero todavía no es caótico. A partir de aquí, entra en el régimen caótico $\lambda_0 < \lambda \leq 4$. En las proximidades de $\lambda = 4$ el sistema es caótico, tal que, para dos puntos próximos $Y_0 = 0{,}20304$ e $Y'_0 = 0{,}20305$, en que $\varepsilon = |Y'_0 - Y_0| = 10^{-5}$, las dos trayectorias

correspondientes a Y_0 e Y'_0 se hacen rápidamente divergentes (Figura II.17). Aquí las órbitas se acercan y se alejan sin ningún tipo de control y estos pequeños errores en la medición inicial ocasionan grandes errores en los resultados. Es la llamada sensibilidad a las condiciones iniciales.

Regiones de Intermitencia: En esta ruta hacia el caos existe un número grande de pequeñas ventanas de valores de λ para los cuales se producen zonas en las que el sistema se convierte nuevamente en estable y previsible y con ciclos periódicos. Así, en la Figura II.19 tenemos: entre λ_1 y λ_2, el sistema fluctúa imprevisiblemente dentro de dos regiones de atracción, entre λ_2 y λ_3 fluctúa entre cuatro, después de λ_3 continúa duplicándose y, a partir de ese λ_0, entra en el régimen caótico; pero aparece una intermitencia entre $\lambda_a = 3{,}828427$ y $\lambda_b = 3{,}84199...$, donde el sistema deja de ser caótico y contiene un ciclo de período tres. A partir de λ_b, nuevamente el caos toma el relevo y un atractor pequeño deja paso a un atractor más grande que ocupa el lugar del primero. Estas intermitencias vienen a constituir transiciones hacia sistemas con un mayor grado de complejidad, donde el viejo atractor va a quedar incluido en otro nuevo de mayor dimensión. En estas regiones de intermitencia las iteraciones que generan caos producen momentáneamente

regularidad, lo cual parece indicar que el orden y el caos de un sistema son características de un proceso indivisible.

Así, esta ruta hacia el caos, partiendo de comportamientos regulares y haciendo variar el parámetro, obedece más bien a un planteamiento teórico. Tratándose de sistemas reales no hay necesidad de postular la existencia de una ruta desde la regularidad al caos, ya que, igualmente, podemos hablar de rutas desde el caos a la regularidad; es decir, de cambios desde la inestabilidad a la estabilidad. Entrar en el caos, salir de él y volver a un caos de mayor complicación es otra característica de las familias de sistemas dinámicos. Normalmente vemos el mundo desde la perspectiva del orden, pero la teoría del caos nos sugiere que podemos ver las cosas desde otra perspectiva, según la cual el orden aparece como intermitencias de un atractor extraño.

CAPITULO III

ANÁLISIS TEÓRICO DEL COMPORTAMIENTO DEL PRECIO DEL PETRÓLEO

"La edad del petróleo se puede acabar habiendo petróleo, así como la edad de piedra se acabó habiendo piedras."

Yamani

III.I.- ENTORNO DEL MERCADO PETROLERO

Una de las características resaltantes de la teoría del caos es que toma en consideración todos los factores que influyen, aunque sea infinitesimalmente, en el comportamiento de los fenómenos en estudio. Por ello, es importante tocar ciertos tópicos que ayuden a entender el entorno en el que se desenvuelve el mercado petrolero, que si bien es imposible de describir por completo en la práctica, se considera fundamental entender ciertos detalles, determinantes y fenómenos para lograr entender los resultados que se obtienen en la realidad.

El estudio de los fenómenos caóticos se lleva a cabo mediante una estrategia metodológica que difiere significativamente de la empleada en las aplicaciones tradicionales, donde se acostumbra a modelar los fenómenos en estudio por más complicados que fueran, con el propósito de generar una ecuación que describa la evolución de la variable. Si la ecuación utilizada contiene la más mínima imprecisión u omisión, el comportamiento anticipado por el modelo puede diferir fuertemente del resultado en el mundo real.

La alta cantidad de factores que intervienen en la determinación del precio del crudo, unido a la complejidad evidenciada por este mercado en la

práctica, hacen sospechar la presencia de un posible comportamiento caótico de la variable.

Evidentemente, todos estos factores no son fáciles (y, en la práctica más bien imposible) de identificar. Sin embargo, hay ciertos temas que tienen a simple vista una influencia determinante en el mercado petrolero, por lo que serán tratados a continuación para tener una idea más clara del entorno de dicho mercado.

III.II.- FUENTES DE ENERGÍA

Las fuentes de energía se pueden clasificar en dos grandes grupos: las renovables y las no renovables. El primero de estos dos grupos se refiere a aquellos recursos naturales de donde se puede extraer energía sin que ésta necesite de largos períodos de tiempo para concentrarse de nuevo para ser reutilizada, por lo tanto en teoría son inagotables. Ejemplos de estos recursos son: el agua, la madera, la fauna, la flora, entre otros.

El segundo grupo, se refiere a aquellos recursos naturales que al ser utilizados como fuentes de energía, ameritan períodos largos (millones de años)

para poder ser reutilizados. Algunos de estos recursos son: el carbón, el petróleo y el gas natural.

III.III.- ENERGÍA Y ENTROPÍA

La ley de la conservación de la energía, establece que el total de energía de un sistema es siempre constante en el tiempo al menos que penetre o salga del sistema un flujo de energía. De aquí se desprende la conocida frase: La energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma. Esta ley es también conocida como la primera ley de la termodinámica.[1]

Si la primera ley de la termodinámica fuese lo único a tomar en cuenta, no habría ningún problema en utilizar la misma energía una y otra vez sin que jamás escaseara. Sin embargo, la segunda ley de la termodinámica (conocida también como la **Ley de la Entropía**) se refiere a que cada vez que la energía pasa de un estado a otro, se reduce la cantidad de energía disponible para realizar un trabajo. Por lo tanto en teoría debe llegar un momento en que se agoten las fuentes de energía disponible.[2]

[1] Rifkin (1990).
[2] Idem.

El petróleo es una fuente de energía concentrada y disponible para ser utilizada. En el momento en que es utilizada para movilizar un carro o para encender una lámpara, la energía se transforma y se hace no disponible, de manera tal de que partiendo de un stock de petróleo, a medida que aumenta su consumo, disminuye la cantidad total de petróleo, por lo que llegará un momento en que se agotará por completo. Esta característica unida a su gran utilidad como fuente de energía, hace del crudo un producto de un alto valor en la sociedad actual.

A medida que aumenta la entropía, aumenta el nivel de desorden de la energía por lo que la teoría del caos cobra mayor importancia para el estudio de los fenómenos naturales, económicos, sociales, etc.

La entropía describe el nivel de desorden de un sistema, por lo que la entropía de la información describe la cantidad de información contenida en una serie de tiempo. Un sistema representado por una serie temporal puede ser considerado como un conjunto de números que contienen en si un mensaje. La medición de la entropía es relevante en estos casos por dos razones:

- El inverso de la entropía es la escala de tiempo relevante para la predicción en un sistema.
- Ofrece información topológica sobre el proceso en estudio.

En un sistema caótico, con el paso del tiempo, "dos puntos de partida indistinguibles dan lugar a trayectorias distinguibles, lo cual supone una pérdida o revelación de información."[3] La entropía mide entonces, la tasa media en que un sistema pierde (o revela) información.

Desafortunadamente, la entropía es difícil de medir en series temporales, sin embargo es importante tenerla presente a la hora de analizar la serie de datos.

Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

III.IV.- EL PETRÓLEO

El petróleo es reconocido como el recurso energético más importante en la historia de la humanidad por su alto impacto en el desarrollo. Es un recurso natural no renovable que aporta el mayor porcentaje del total de la energía que se consume en el mundo.

Aunque se conoce de su existencia y utilización desde épocas milenarias, la historia del petróleo como elemento vital y factor estratégico de desarrollo es relativamente reciente, aproximadamente de menos de 200 años.

[3] Nieto de Alba (1998).

La alta dependencia que el mundo tiene del petróleo y la inestabilidad que caracteriza al mercado internacional y a los precios de este producto, han conducido al desarrollo de fuentes energéticas alternativas sin que hasta el momento se haya logrado una opción que realmente lo sustituya, aunque se han dado importantes pasos en ese sentido.

El petróleo es uno de los más importantes productos que se negocian en el mercado mundial de materias primas. Las bolsas de Nueva York (NYMEX) y de Londres (IPC) son los principales centros donde se transa, pero también tiene un mercado **spot** o al momento. Los precios se regulan por unos **marcadores** o **precios de referencia**, entre los que sobresalen el WTI[4], Brent y Dubai. El comportamiento del precio diario del WTI para el período 1986-1999 se muestra en la figura III.1.

Además existen parámetros internacionales, como los del Instituto Americano del Petróleo (API) que diferencian sus calidades y, por tanto, su valor. Así, entre más grados API tenga un petróleo, mejor es su calidad y por lo tanto su precio.[5]

---

[4] En el presente estudio utilizaremos al West Texas Intermediate (WTI) como marcador del precio del petróleo. Se ha demostrado empíricamente que en general los distintos marcadores se comportan de manera similar a través del tiempo, por lo que para los fines de este trabajo no es relevante cuál de ellos se utilice.

[5] Los llamados "livianos" son aquellos que tienen más de 26° API. Los "intermedios" se sitúan entre 20° y 26° API, y los "pesados" por debajo de 20° API.

III.IV.I.- DETERMINANTES DE LA DEMANDA DE PETRÓLEO

La demanda de petróleo[6] está determinada por numerosos factores de variado y dinámico comportamiento. Cada agente tiene sus propios determinantes que a su vez van cambiando en el tiempo. Cada uno reacciona de manera diferente a los cambios y a su vez es generador de información relevante para los demás agentes que interviene en el mercado.

La economía tradicional identifica los factores comunes y de mayor peso (aparente) y busca agregar las preferencias individuales para estudiar al mercado. La teoría del caos va más allá y toma en cuenta todos los factores sin importar su peso relativo en el comportamiento de la variable en estudio en un momento dado. Esto se debe a la ya explicada premisa del "Efecto Mariposa"[7].

La teoría del caos ofrece herramientas de estudio de series de tiempo, sin embargo no ofrece una metodología para identificar todos los factores que intervienen en el comportamiento de una variable. Por lo tanto se mencionarán aquellos más comúnmente conocidos para tener una idea de qué determina el comportamiento precio del petróleo:

[6] Según datos de la Agencia Internacional de Energía, la demanda total de petróleo crece entre 1,5 y 2% anualmente.
[7] También conocida como sensibilidad a las condiciones iniciales.

- La Ley de la oferta y la demanda.
- El desarrollo económico, medido principalmente a través del crecimiento del PIB, es intuitiva y empíricamente un factor que aumenta la demanda de recursos energéticos.
- Los avances tecnológicos en la actualidad ameritan cada vez más procesos transformadores de energía.
- Los problemas de contaminación ambiental y de agotamiento de los recursos naturales disponibles (entropía), presionan a los agentes para que hagan un uso más racional de las distintas fuentes de energía, teniendo así una relación inversa con la demanda de petróleo. Uno de los mecanismos que se utilizan para presionar a la baja la demanda, es aumentar los impuestos que además pueden ser utilizados para llevar a cabo programas de conservación del ambiente[8].
- El comportamiento de los gobiernos, principalmente en la política impositiva[9] y de subsidios, actúa ya sea como agente que estimula, entorpece o bloquea el comercio libre del petróleo, por lo que se considera un factor importante en la determinación de la demanda del petróleo.

[8] Guerrero E., Alexander (2000).
[9] Según la OPEP, el impuesto a la gasolina (principal derivado del petróleo) representa una alta proporción del precio final por lo que la política impositiva de los gobiernos es determinante. Por ejemplo en Inglaterra la tasa impositiva es del 68%, en Italia es 70%, en Alemania es 64% y en Estados Unidos está sobre el 50%.

- El agotamiento de los recursos naturales como el petróleo, unido a los altos precios del mismo en los últimos años, ha estimulado la investigación y el uso de fuentes alternativas de energía que puedan ser competitivas y en un futuro sustituir al petróleo como recurso natural proveedor de energía por excelencia.
- El petróleo es un importante insumo de otras industrias, por lo que los cambios en estos mercados tienen un impacto en la demanda de petróleo[10].
- El Clima es un factor que influye de manera importante sobre la demanda de petróleo dependiendo de los requerimientos en función de la temperatura principalmente[11].
- Con el transcurrir del tiempo, se nota una clara tendencia a nivel mundial a consumir cada vez productos con mayores procesos industriales y manufactureros, buscando alcanzar niveles de vida comparables con los Estados Unidos.[12]

[10] Algunos productos que utilizan al petróleo como insumo son los siguientes: velas, pintura, creyones, insecticida, fertilizantes, aspirina, nylon, shampú, tinta, antihistamínicos, perfumes, vitaminas, etc.
[11] Hay un comportamiento cíclico de la variable donde históricamente aumenta el precio en los períodos de temperaturas frías y disminuye en temporadas de temperaturas cálidas.
[12] Rifkin (1990).

III.IV.II.- DETERMINANTES DE LA OFERTA DE PETRÓLEO

Al igual que la demanda, la oferta tiene muchos factores que la determinan, pero se mencionarán aquellos que la economía tradicional identifica como importantes, entre ellos están:

- El consumo creciente del petróleo mantiene una tasa positiva de aumento de la producción mundial cada año.
- Los avances tecnológicos relacionados directa (extracción, refinación, distribución) o indirectamente (telecomunicaciones) con la industria petrolera, ha disminuido los costos y facilitado el proceso productivo.
- Las reservas probadas de petróleo son la cantidad de crudo disponible para su extracción en un momento determinado[13]. Las reservas tienen un comportamiento creciente en los últimos años producto principalmente de las mejoras tecnológicas y por el intento de perpetuar al máximo el uso del petróleo como fuente principal de energía.
- Las exportaciones de petróleo se han ido incrementando con el pasar del tiempo, los grandes centros de consumo de energía tienen cada vez menos capacidad para suplir su demanda y por lo tanto hay una

[13] Las reservas mundiales de petróleo se estiman en 700.000 millones de barriles aproximadamente según cifras de la OPEP.

tendencia de aumento de las exportaciones desde los países productores a los países consumidores.

- La inversión en exploración y explotación está directamente relacionada con el nivel de producción de petróleo. A mayor inversión, mayor capacidad de producción.
- Las políticas internas de los países influyen de forma determinante sobre la oferta de petróleo. Si los grandes centros consumidores deciden incentivar el uso de fuentes de energías alternativas, o si deciden aumentar su producción interna de petróleo, o si deciden devaluar su moneda, etc. esto tiene una influencia determinante en el nivel de producción. A su vez, las políticas internas de los países productores, determinan según su importancia, la producción petrolera.
- La política internacional en materia petrolera, las decisiones de la ONU, las políticas comunes que adopten los países miembros de la OPEP, son determinantes en el nivel de producción de petróleo[14].
- La política internacional en materia no petrolera, tales como conflictos religiosos, ideológicos, políticos, etc. tienen un impacto ya comprobado en la historia sobre el mercado petrolero[15].

[14] Recientemente, las políticas de recortes de producción de los países miembros de la OPEP y algunos otros como México han buscado estabilizar los precios en niveles favorables para los países exportadores netos de petróleo.

[15] El ejemplo más claro fue la Guerra de Yom Kipur en 1973 entre los países árabes e Israel, donde el petróleo fue utilizado como herramienta de presión con una fuerte carga religiosa y no económica. El precio aumentó de $2 a $12 el barril. Para más información, ver el apartado III.V.

- Los inventarios almacenados de petróleo son una variable que cobra cada vez más importancia. A medida que aumentan los inventarios, hay una tendencia a bajar los precios cuando la oferta no se ajusta a la baja.
- La investigación y el uso de fuentes alternativas de energía tales como la solar y la nuclear disminuyen la oferta de petróleo. Es por esto que los grandes inversionistas en estas fuentes de energía son las propias industrias petroleras que buscan garantizar su estadía en el mercado en un futuro.
- El precio es un componente fundamental, cuando estos están altos, los yacimientos cuyos costos de producción son elevados, son capaces de producir de manera eficiente y rentable, aumentando así la oferta. Mientras que si los precios están deprimidos, diversas zonas con condiciones adversas no estarían en capacidad de producir.

III.IV.II.I.- MERCADOS DE COBERTURA DE RIESGO

La alta volatilidad de los precios del crudo ha generado un escenario de gran incertidumbre en su entorno. Esto a su vez ha impulsado el desarrollo de los mercados a futuro[16] como una medida alternativa de cobertura de riesgo

[16] Los instrumentos más conocidos en estos mercados son: los futuros, las opciones y los swaps.

ante movimientos drásticos e inesperados del precio del petróleo y la correspondiente merma de los ingresos que se obtienen por operaciones relacionadas. Paralelamente a la estrategia de cobertura, la volatilidad ha creado las condiciones ideales para el desarrollo de estrategias especulativas, donde los agentes juegan con las expectativas de sus rivales y con las propias, aceptando el riesgo de apostar a un movimiento de precios que les sea favorable.

El uso de estos novedosos instrumentos ha traído entonces un componente de naturaleza ambigua. Por un lado ofrece un sistema eficiente para disminuir los riesgos relacionados principalmente con la comercialización de petróleo, y por otro lado introduce dentro del mercado un componente especulativo que crea distorsiones por el comportamiento de los inversionistas, buscadores y, en ocasiones, provocadores de situaciones de arbitraje comercial.

El mercado petrolero se ve fuertemente influenciado por la calidad de la información que se genere. Hay comprobados comportamientos de agencias de noticia que buscan oportunidades de inversión manipulando, ya sea escondiendo, exagerando e incluso inventando informaciones para favorecer determinadas inversiones bursátiles.

En la actualidad se consumen alrededor de 75 millones de barriles diarios, sin embargo se calcula que los operadores bursátiles movilizan diariamente alrededor de 200 millones de barriles por día. Esta situación genera serias distorsiones en el proceso de formación del precio.[17]

III.V.- REVISIÓN HISTÓRICA DE ALGUNOS SHOCKS PETROLEROS

1956. El día 29 de octubre de 1956, las tropas israelíes invadieron Egipto en una maniobra militar preventiva, seguido por los franceses y los ingleses. Durante esta crisis, los barcos que transportaban el crudo estaban imposibilitados de utilizar el Canal de Suez. El principal oleoducto que transportaba petróleo desde Irak hasta Siria fue saboteado, por lo que las exportaciones hacia Inglaterra y Francia fueron bloqueadas. La producción global del Medio Oriente disminuyó en 1.7 millones de barriles diarios (mbd) lo que representaba un 10,1% de la producción mundial.[18]

1973. La llamada Guerra de Yom Kipur entre Israel y sus vecinos árabes explotó el 17 de Octubre de 1973, ocasionando una declaración de los países

[17] Belén Rodríguez T., María (2000).
[18] Los datos estadísticos de esta sección fueron obtenidos del Historical Monthly Energy Review, 1973-1992, U.S. Energy Information Administrartion, U.S. Government Printing Office, 1994.

árabes miembros de la OPEP, de embargar el abastecimiento de petróleo a todos aquellos países percibidos como colaboradores de Israel. La producción de estos países pasó de 19.865 mbd en Septiembre de 1973, a 15.528 mbd en Noviembre, es decir, una disminución del 7,8% de la producción mundial de petróleo que para ese tiempo era de 55.679 mbd.

1978. La revolución iraní en Octubre de 1978 produjo una disminución de la producción de este país de 6.093 mbd en Septiembre de 1978 a tan sólo 0.729 mbd en Enero de 1979, es decir, una disminución de un 8,9% de la producción mundial.

1980. La guerra entre Irán e Irak produjo una caída de la producción iraní de 3.240 mbd a 0.143 mbd entre Julio y Octubre de 1980, y una caída de la producción irakí de 1.699 mbd a 0.510 mbd entre el mismo período. Esto representaba una disminución del 7,2% de la producción mundial que para el momento era de 59.599 mbd.

1990. El 1ro. De Agosto de 1990 Irak invadió a Kuwait. Para antes del conflicto Kuwait producía 1.858 mbd mientras que Irak producía 3.454 mbd. Durante la guerra ambos países pararon su producción lo que representó un baja del 8,8% de los 60.471 mdb de producción mundial.

CAPITULO IV

CAOS Y ALEATORIEDAD

"No sé lo que le parece al mundo; pero para mí mismo me parece que he sido sólo como un niño jugando a la orilla del mar y divirtiéndose de vez en cuando al encontrar una piedra más suave o una concha más hermosa de lo normal, mientras el inmenso océano de la verdad yacía ante mí sin descubrir."

Isaac Newton

IV.I.- DEFINICIÓN DE CAMINATA ALEATORIA

La **caminata aleatoria** o **random walk**, es un proceso estocástico no estacionario cuyas primeras diferencias si lo son. Específicamente, un proceso estocástico camino aleatorio se comporta como una variable cuyo valor actual es explicado, a través del valor asumido en el período anterior más un término de perturbación (ε_t) con media cero y varianza constante, es decir, el término de perturbación es **ruido blanco**[1]. Matemáticamente, la caminata aleatoria se define de la siguiente manera:

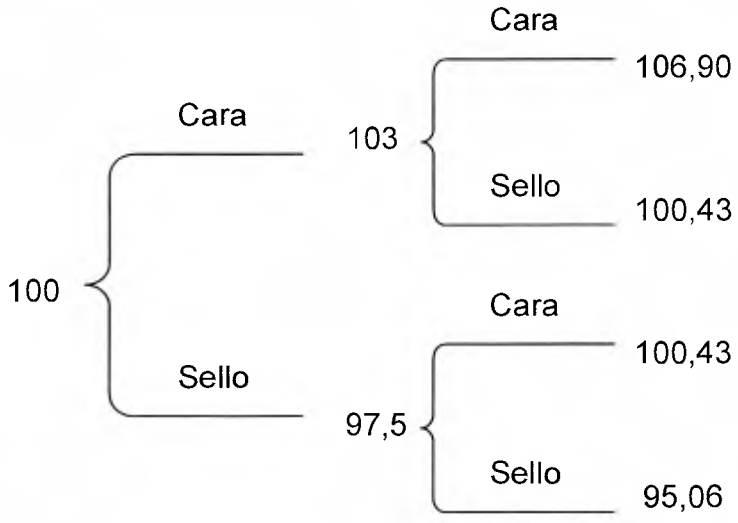
$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

Nótese que $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t$ donde $\varepsilon_t \sim (0, \sigma^2)$, es decir, el término de perturbación es ruido blanco.

El nombre de caminata aleatoria proviene de que al depender X_t de los valores que haya asumido en el pasado más un componente errático, la variable no sigue un patrón definido que pueda ser predicho con un alto nivel de certeza.

[1] Si los términos de perturbación ε_t no están autorrelacionados entre si y además son independientes se denomina ruido blanco estricto.

Una manera fácil de entender un modelo cuya variable tiene un comportamiento de caminata aleatoria lo proporcionan Brealey & Myers (1993, pp. 347) mediante un ejercicio. Se parte de un valor inicial de 100, al lanzar una moneda anualmente, si se obtiene "Cara" la variable aumenta en un 3% y si se obtiene "Sello", la variable disminuye en 2,5%. El juego puede ser resumido mediante el siguiente diagrama:



La variable que hoy vale 100 puede caminar aleatoriamente por cualquiera de esos valores siguiendo las ramificación y sólo conoce sus nuevas probabilidades al haber asumido el valor en el período anterior. En el estudio presentado por Brealey & Myers[2], de seguir el juego durante 5 años, se obtiene

[2] El estudio fue realizado originalmente por Maurice Kendall en "The Analysis of Economic Time-Series, Parte I. Prices" Journal of the Royal Statistical Society, 96, pp. 11-25 (1953).

una gráfica que puede confundirse con una gráfica del comportamiento del índice Standard & Poor's[3].

Este juego es una caminata aleatoria con un incremento acumulativo de un 0,25% semanal[4], donde los cambios sucesivos en el valor de la variable son independientes, es decir, la probabilidad de ganar en cada año es del 50%, independientemente del valor inicial de la variable.

IV.II.- CAMINATA ALEATORIA Y ESTACIONARIEDAD

La **estacionariedad** de una variable puede medirse en dos sentidos, uno fuerte y uno débil. Una serie es fuertemente estacionaria "si la distribución de probabilidad condicional y conjunta del proceso no cambia al desplazarse en el tiempo"[5].

Por otra parte, se considera que una serie temporal estocástica es débilmente estacionaria si se cumplen las siguientes condiciones:

---

[3] Índice compuesto de calificación que representa una cartera de 500 acciones ordinarias de empresas estadounidenses.

[4] El incremento acumulativo es igual al resultado esperado: $\frac{1}{2}(3)+\frac{1}{2}(-2,5)=0,25\%$

[5] Páez, pp. 25 (1994).

- Media: $E(Y_t) = \mu$
- Varianza: $Var(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2 = \sigma^2$
- Covarianza: $\gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)]$

Una de las pruebas de estacionariedad[6] más utilizadas es la llamada **prueba de la raíz unitaria**. Para explicar la prueba se parte del modelo de caminata aleatoria formulado anteriormente:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \text{ donde } \varepsilon_t \sim (0, \sigma^2)$$

Este tipo de regresión se conoce como AR(1) porque la variable dependiente tiene como variable independiente a ella misma pero con un período de rezago. Por lo tanto si se realiza la siguiente regresión,

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t$$

y se encuentra que el coeficiente $\rho = 1$, se dice que la variable X_t es estocástica con una raíz unitaria.

[6] Según Gujarati (1997), se dice que un proceso estocástico es débilmente estacionario si su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos períodos depende solamente de la distancia o rezago entre estos dos períodos de tiempo y no del tiempo en el cual se ha calculado la covarianza.

Para determinar si una serie temporal es estacionaria o no, suelen utilizarse varios tests. Entre ellos el test de Dickey-Fuller y el Dickey-Fuller Ampliado (ADF).[7]

Este último busca conocer el valor del coeficiente ρ de X_t en una función como la que describe una caminata aleatoria, pero incluyéndole también como variables independientes los rezagos de la variable dependiente, que igualan a las primeras diferencias de la variable en estudio. Esto se hace con el fin de reducir la autocorrelación. Por lo tanto, la función sería la siguiente,

$$\Delta X_t = \beta_1 + \beta_2 t + \rho X_{t-1} + \alpha_t \sum_t^k \Delta X_t + \varepsilon_t$$

donde $\varepsilon_t \sim (0, \sigma^2)$. Puede incluirse en la función una constante como β_1 y una tendencia temporal como $\beta_2 t$, según convenga.

[7] Las especificaciones funcionales de cada uno escapan a los objetivos de este trabajo y no se consideran indispensables para el entendimiento de esta investigación.

IV.III.- EL CORRELOGRAMA COMO PRUEBA DE ALEATORIEDAD

El **correlograma**, es usualmente utilizado como prueba de estacionariedad, pero **tiene también utilidad en la detección de aleatoriedad en una serie temporal**. Está basado en la denominada función de autocorrelación. del rezago k, denotada por ρ_k, cuya formulación matemática es:

$$\rho_k = \frac{y_k}{y_0}$$

$$\rho_k = \frac{\text{covarianza al rezago } k}{\text{varianza}}$$

Donde ρ_k es un número comprendido entre –1 y 1 sin unidad de medida. Al graficar ρ_k en función de k se obtiene el llamado correlograma poblacional.

Para el caso en que se utilice una muestra de una serie de tiempo, ρ_k tendría la siguiente formulación matemática:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{y}_k}{\hat{y}_0}$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{\text{covarianza muestral al rezago } k}{\text{varianza muestral}}$$

El correlograma representa el siguiente contraste de hipótesis: Si individualmente los ρ_k son iguales a cero, entonces la serie temporal se considera **estacionaria**. Sin embargo, si los ρ_k son significativamente diferentes de cero, la serie temporal es considerada **no estacionaria**. Por lo tanto, si un proceso estocástico es puramente aleatorio, su **autocorrelación**[8] en cualquier rezago mayor que cero es cero.

Los procesos estocásticos tienen autocorrelación decreciente, donde la velocidad de disminución depende de las propiedades particulares del proceso en estudio. La autocorrelación en un sistema caótico determinístico decrece exponencialmente con incrementos de los rezagos. La autocorrelación no es una característica suficiente para distinguir entre aleatoriedad y caos determinístico.

[8] También conocida como correlación serial, indica que el residuo de las observaciones en una serie de tiempo están correlacionadas.

IV.IV.- MODELOS ARIMA

Un método comúnmente utilizado en el análisis de series de tiempo estacionarias es el **ARIMA** (autorregresivo integrado de media móvil), el cual está basado en la metodología **Box-Jenkins**. Para explicar los modelos ARIMA es preciso partir de los conceptos de proceso autorregresivo (AR), proceso de media móvil (MA) y proceso autorregresivo de media móvil (ARMA).

a) Proceso autorregresivo: sea,

$$(X_t - \delta) = \alpha_1 (X_{t-1} - \delta) + \mu_t$$

donde δ es la media de X y $\mu_t \sim (0, \sigma^2)$, es decir, ruido blanco. Se dice que X_t sigue un **proceso autorregresivo de primer orden** o AR(1), donde el valor de X en el tiempo t depende de su valor en el período anterior más un término aleatorio, estando los valores de X expresados como desviaciones de su valor medio. En general se tiene que un **proceso autorregresivo de orden p** o AR(p) es,

$$(X_t - \delta) = \alpha_1 (X_{t-1} - \delta) + \alpha_2 (X_{t-2} - \delta) + \ldots + \alpha_p (X_{t-p} - \delta) + \mu_t$$

b) Proceso de media móvil: sea,

$$X_t = u + \beta_0 \mu_t + \beta_1 \mu_{t-1}$$

donde u es una constante y $\mu_t \sim (0, \sigma^2)$. Entonces X_t sigue **proceso de media móvil de primer orden** o MA(1) dado que es igual a una constante más el promedio móvil de los términos de error presente y pasado. En general se tiene que un **proceso de media móvil de orden q** o MA(q) es,

$$X_t = u + \beta_0 \mu_t + \beta_1 \mu_{t-1} + \beta_2 \mu_{t-2} + ... + \beta_q \mu_{t-q}$$

c) Proceso autorregresivo y de media móvil:

Los procesos AR y MA pueden darse en una misma serie de tiempo, por lo tanto un proceso ARMA(p,q) se define como,

$$X_t = \Theta + \beta_0 \mu_t + \beta_1 \mu_{t-1} + ... + \beta_q \mu_{t-q} + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + ... + \alpha_p X_{t-p}$$

donde Θ representa un término constante.

Si se debe diferenciar la serie de tiempo d veces para hacerla estacionaria, es decir, que tenemos una serie integrada de orden d o I(d), para luego aplicar el modelo ARMA, entonces se dice que la serie temporal es ARIMA (p,q,d) o autorregresiva integrada de media móvil.

IV.V.- EL TEST BDS

En 1996, William Brock, Davis Dechert, Blake Lebaron y Jose Sheinkman desarrollaron un nuevo test estadístico conocido como el test BDS. El test BDS, examina la hipótesis nula de que las observaciones de una serie de tiempo estén distribuidas idéntica e independientemente (*whiteness*) contra una alternativa no especificada usando una técnica no paramétrica.

El test BDS está basado en el test estadístico de Grassberger y Procaccia (1983) sobre la integral de correlación[9]. En particular, bajo la hipótesis nula especificada, el estadístico BDS es

$$W(N,m,\varepsilon) = \sqrt{N}\,\frac{C(N,m,\varepsilon) - C(N,1,\varepsilon)^m}{\hat{\sigma}(N,m,\varepsilon)}$$

[9] Medida de la correlación espacial de puntos dispersos o partículas en el espacio m-dimensional.

Donde $\hat{\sigma}$ (N,m, ε) es un estimado de la desviación estándar asintótica de $C(N,m,\varepsilon)-C(N,1,\varepsilon)^m$. **El estadístico BDS se distribuye asintóticamente como una normal estandarizada, bajo la hipótesis nula de observaciones independientes e idénticamente distribuidas.**[10]

La explicación intuitiva del estadístico BDS es la siguiente. $C(N,m,\varepsilon)$ es un estimado de la probabilidad de que la distancia entre cualesquiera dos *m*-historias, X_t y X_s de la serie $\{x_t\}$ es menor que ε. Si $\{x_t\}$ es independiente, entonces para $t \neq s$ la probabilidad de este evento conjunto es igual al producto de las probabilidades individuales. Adicionalmente, si $\{x_t\}$ está idénticamente distribuido, entonces todas las m probabilidades bajo la operación del producto son la misma. El estadístico BDS examina, entonces, la hipótesis nula de que $C(N,m,\varepsilon)=C(N,1,\varepsilon)^m$ [11].

El test tiene dos variables libres cuyos valores deben ser determinados por el investigador, la dimensión de inmersión m y la distancia métrica ε, los cuales pueden tomar diferentes niveles dependiendo de la robustez que se desee. La necesidad de escoger los valores de ε y m puede ser una

[10] Brock, Hsieh, Le Baron, pp. 43 (1993).
[11] Nótese que el hecho de que las observaciones sean independientes e igualmente distribuidas implican que $C(N,m,\varepsilon)=C(N,1,\varepsilon)^m$, pero no lo contrario.

complicación en el uso del test BDS[12]. En particular tomaremos la desviación estándar de la data como valor de ε. Para el valor de ε seleccionado se correrá el test BDS con valores de m que van desde 2 hasta 5.

El test BDS constituye un avance importante en las pruebas para determinar dependencia estocástica, lo cual lo convierte en una contribución significativa al campo de la estadística. Sin embargo, el test BDS no permite actualmente testar directamente no-linealidad ni caos, dado que la distribución del test no es conocida, tanto para muestra finitas como asintóticamente, bajo la hipótesis nula de no-linealidad, linealidad, caos o ausencia de caos. La distribución asintótica es conocida bajo la hipótesis nula de independencia. De esta forma, la hipótesis de no-linealidad y caos están contenidas en la hipótesis alternativa, la cual incluye proceso no independientes, tanto lineales como no-lineales.

No obstante, es posible usar el BDS para testar cualquier proceso estocástico contra las alternativas restantes, si vamos descartando éstas últimas mediante mecanismos de filtros de la data. Por ejemplo, **si todas las posibilidades lineales han sido removidas mediante un ajuste ARIMA, el test BDS puede ser usado sobre los residuales para examinar la hipótesis**

12 En el marco de esta investigación se adoptará la aproximación empleada por Barnett et al. (1997).

nula de independencia contra la hipótesis alternativa de dependencia no-lineal[13] (la cual incluye tanto dependencia caótica como dependencia no-caótica, ya que la no-linealidad es una condición necesaria mas no suficiente para garantizar la existencia de dependencia caótica).

Similarmente, sí todas las posibilidades no-caóticas pudiesen ser removidas ajustando el mejor modelo no-caótico, el BDS podría ser usado para determinar si los residuales presentan dependencia caótica. Pero filtrar todas las posibilidades no-caóticas ciertamente está fuera del alcance de las herramientas disponibles en la actualidad.

Filtrar todas las posibilidades lineales es bastante difícil en el mejor de los casos, sin embargo **el ajuste ARIMA es considerado usualmente como un mecanismo respetado para eliminar la dependencia lineal**[14]. De esta forma, el BDS es utilizado para examinar dependencia no-lineal en los residuos de un proceso ARIMA obtenido según la metodología Box-Jenkins. En conclusión, con los desarrollos estadísticos actuales resulta extremadamente complicado utilizar el test BDS para determinar la presencia de caos, ya que esta posibilidad queda contenida en una misma hipótesis con la alternativa de procesos no-lineales pero no caóticos.

[13] Barnett et al. (1997).
[14] Idem.

IV.VI.- CAOS Y ALEATORIEDAD

Una de las diferencias esenciales entre el modelo de caminata aleatoria y el sistema caótico es la respuesta a shocks externos. Los efectos en ambos modelos son persistentes, sin embargo el perfil temporal de los impactos son muy distintos. Para el caso de la caminata aleatoria el efecto permanece constante, mientras que es amplificado por el sistema caótico. Los exponentes de Lyapunov pueden ser utilizados para discriminar efectivamente los patrones de respuesta a los shocks, dado que mide la tasa de divergencia (o convergencia) de dos puntos iniciales cercanos en un sistema dinámico.[15]

[15] Park & Whang (1999).

CAPÍTULO V

RESULTADOS ESTADÍSTICOS

En esta sección se presentan los resultados de la aplicación de las pruebas de estacionariedad, constituidas por el análisis del correlograma de la serie y el Test Dickey-Fuller Ampliado (ADF), y la prueba de no-linealidad, representada por el Test Brock-Dechert-Scheinkman (BDS). Las pruebas mencionadas anteriormente fueron aplicadas a dos series de tiempo de igual longitud (3550 datos). La primera serie, denominada "SER4", fue generada mediante un proceso logístico con $\lambda = 4$ y $x_0 = 0{,}1$. La segunda serie, denominada "PETRO1", está constituida por los precios diarios del crudo marcador West Texas Intermediate (WTI) desde el 02/01/1986 hasta el 30/12/1999.

Así mismo, es necesario recordar los dos objetivos básicos de esta investigación: 1) realizar una simulación numérica para verificar la efectividad de los tests estadísticos estándares de aleatoriedad (representados en el marco de este estudio por el análisis del correlograma y el test ADF) ante la presencia de procesos caóticos deterministícos en series de tiempo; y 2) determinar la existencia de caos determinístico en el comportamiento del precio del crudo

marcador WTI para el período 1986-1999. El primero de estos objetivos se traduce en la hipótesis nula siguiente: *los tests estadísticos estándares de aleatoriedad fallan ante series generadas por procesos caóticos determinísticos.* Por su parte, el segundo objetivo conlleva a la hipótesis nula siguiente: *el comportamiento del precio del crudo marcador WTI, para el período 1986-1999, es generado por un proceso caótico determinístico.*

V.I.- SERIE GENERADA CON LA ECUACIÓN LOGÍSTICA

Con esta serie se pretende verificar que los tests estándares de aleatoriedad fallan ante la existencia de caos en series de tiempo. Para ello, se generó esta serie de 3550 observaciones mediante una simulación numérica obtenida a partir de la ecuación logística. Para información estadística ver Anexo V.1.

V.I.I.- ANÁLISIS DEL CORRELOGRAMA

El primer paso para probar está hipótesis consiste en verificar que el análisis del correlograma "confunde" esta serie con una serie estacionaria puramente aleatoria. De acuerdo al correlograma presentado en el Anexo V.2,

la serie en estudio muestra un comportamiento que asemeja aleatoriedad y, desde el punto de vista de la teoría de series de tiempo, esta serie es considerada estacionaria.

V.I.II.- PRUEBA DICKEY-FULLER AMPLIADA (ADF)

Sin embargo, para ser más precisos en esta apreciación, es necesario correr la prueba ADF para corroborar estadísticamente si la serie en cuestión es generada por un proceso aleatorio, tal como se considera para las series de tiempo estacionarias.

El resultado de la prueba ADF obtenida por el paquete econométrico *E-views* se detalla a continuación.

Prueba ADF para la serie SER4, a nivel, sin intercepto y 4 lags.

ADF Test Statistic	**-7.440985**	1% Critical Value*	-2.5664
		5% Critical Value	-1.9394
		10% Critical Value	-1.6157

***MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.**

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

LS // Dependent Variable is D(SER4)

Date: 09/26/00 Time: 10:39

Sample: 6 3550

Included observations: 3545 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
SER4(-1)	-0.091683	0.012321	-7.440985	0.0000
D(SER4(-1))	-0.714399	0.019114	-37.37512	0.0000
D(SER4(-2))	-0.529498	0.021149	-25.03704	0.0000
D(SER4(-3))	-0.378195	0.020427	-18.51441	0.0000
D(SER4(-4))	-0.172601	0.016554	-10.42647	0.0000

R-squared	0.402353	Mean dependent var	-0.000182
Adjusted R-squared	0.401678	S.D. dependent var	0.495803
S.E. of regression	0.383510	Akaike info criterion	-1.915372
Sum squared resid	520.6618	Schwartz criterion	-1.906665
Log likelihood	-1630.140	F-statistic	595.8082
Durbin-Watson stat	2.057711	Prob(F-statistic)	0.000000

Los resultados de esta prueba indican que, para la serie SER4 a nivel, se debe rechazar la hipótesis de raíz unitaria, es decir, esta serie es estacionaria, y por ende ruido blanco, de acuerdo a la prueba ADF. Para corroborar estos resultados se procede a realizar la prueba ADF para la serie SER4 en diferencias, con los resultados que se detallan a continuación:

Prueba ADF para la serie SER4, en diferencia, sin intercepto y 4 lags.

ADF Test Statistic	-46.71893	1% Critical Value*	-2.5664
		5% Critical Value	-1.9394
		10% Critical Value	-1.6157

***MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.**

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

LS // Dependent Variable is D(SER4,2)

Date: 09/26/00 Time: 10:37

Sample: 7 3550

Included observations: 3544 after adjusting endpoints

Variable	**Coefficient**	**Std. Error**	**T-Statistic**	**Prob.**
D(SER4(-1))	-3.516626	0.075272	-46.71893	0.0000
D(SER4(-1),2)	1.694173	0.065655	25.80419	0.0000
D(SER4(-2),2)	1.034857	0.050743	20.39394	0.0000
D(SER4(-3),2)	0.514039	0.033717	15.24556	0.0000
D(SER4(-4),2)	0.180679	0.016533	10.92826	0.0000

R-squared	0.803547	Mean dependent var	-0.000152
Adjusted R-squared	0.803325	S.D. dependent var	0.857280
S.E. of regression	0.380187	Akaike info criterion	-1.932776
Sum squared resid	511.5338	Schwartz criterion	-1.924067
Log likelihood	-1598.839	F-statistic	3618.876
Durbin-Watson stat	2.046148	Prob(F-statistic)	0.000000

Estas pruebas corroboran la inspección visual del correlograma de residuos. Concluimos que la serie es estacionaria, lo cual, en principio, podría considerarse como aleatoriedad si no se efectúan tests más elaborados.

V.I.III.- PRUEBA BROCK-DECHERT-SCHEINKMAN (BDS)

La aplicación de la prueba BDS debe ser realizada sobre los residuos obtenidos a partir de un modelo de ajuste lineal, como por ejemplo el ajuste ARIMA obtenido mediante la metodología Box-Jenkins. Sin embargo, el ajuste lineal que obtenemos para esta serie es ARIMA(0, 0, 0)[1], es decir, que, en este caso, debemos trabajar con la serie original, en vez de los residuos[2].

Con un ε igual a la desviación estándar de la serie ($\varepsilon = 0{,}3547$), se obtienen los siguientes resultados:

[1] Para obtener mayor información sobre los procesos de ajuste lineal ARIMA, el lector puede referirse a la sección IV.IV.

[2] Esto se debe a que la serie de los residuos es exactamente igual a la serie original con un ARIMA(0,0,0).

Dimensión de Inmersión (m)	Resultado BDS
2	3,2989
3	3,3469
4	2,6522
5	1,8523

Con un nivel de significación del 5%, se acepta que con m = 2, 3, 4 y 5 la serie presenta dependencia no-lineal, rechazándose la hipótesis nula de independencia o *whiteness* de la prueba BDS.

Con un nivel de significación del 1%, se acepta que con m = 2, 3 y 4 la serie presenta dependencia no-lineal, rechazándose la hipótesis nula de independencia o *whiteness* de la prueba BDS.

En resumen, tenemos que el análisis del correlograma y la prueba ADF parecen estar indicando que estamos en presencia de una serie de tiempo generada por un proceso ruido blanco. Sin embargo, una prueba más elaborada, como la prueba BDS, contradice este resultado y permite verificar que la serie SER4, generada mediante simulación numérica, presenta dependencia no-lineal, la cual puede incluir tanto dependencia no-lineal caótica

como dependencia no-lineal no caótica. De esta forma, ***nuestra hipótesis nula acerca de la posibilidad de que los tests estándares de aleatoriedad fallan ante la presencia de caos determinístico se acepta.***

V.II.- SERIE DIARIA DEL PRECIO DEL CRUDO MARCADOR WTI

En esta sección se pretende verificar que la serie diaria del crudo marcador WTI es generada mediante un proceso caótico determinístico. Para verificar esta hipótesis realizaremos las pruebas siguientes: análisis del correlograma, prueba ADF y prueba BDS. Para información estadística ver Anexo V.3.

V.II.I.- ANÁLISIS DEL CORRELOGRAMA

El examen del correlograma correspondiente a la serie PETRO1 a nivel (Anexo V.4) permite intuir que esta serie no es estacionaria. Sin embargo, es necesario diferenciar esta serie tantas veces como sea necesario hasta que sea estacionaria. Una inspección del correlograma de la serie PETRO1 en primera diferencia (Anexo V.5) nos muestra un panorama diferente que parece indicar que la serie es integrada de orden 1, es decir, I(1).

V.II.II.- PRUEBA DICKEY-FULLER AMPLIADA (ADF)

El resultado de la prueba ADF obtenida por el paquete econométrico *E-views* se detalla a continuación.

Prueba ADF para la serie PETRO1, a nivel, sin intercepto y 4 lags.

ADF Test Statistic	-0.708182	1% Critical Value*	-2.5664
		5% Critical Value	-1.9394
		10% Critical Value	-1.6157

***MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.**

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
LS // Dependent Variable is D(PETRO1)
Date: 09/26/00 Time: 10:45
Sample: 6 3550
Included observations: 3545 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
PETRO1(-1)	-0.000325	0.000459	-0.708182	0.4789
D(PETRO1(-1))	-0.009698	0.016809	-0.576915	0.5640
D(PETRO1(-2))	-0.043349	0.016700	-2.595776	0.0095
D(PETRO1(-3))	-0.112990	0.016699	-6.766239	0.0000
D(PETRO1(-4))	0.014371	0.016806	0.855135	0.3925

R-squared	0.015074	Mean dependent var	-3.10E-05
Adjusted R-squared	0.013961	S.D. dependent var	0.535794
S.E. of regression	0.532041	Akaike info criterion	-1.260659
Sum squared resid	1002.060	Schwartz criterion	-1.251952
Log likelihood	-2790.618	F-statistic	13.54471
Durbin-Watson stat	1.998358	Prob(F-statistic)	0.000000

Esta primera prueba ADF verifica la existencia de raíz unitaria para la serie PETRO1 a nivel. Sin embargo, es necesario correr nuevamente la prueba para la serie PETRO1, pero esta vez en primera diferencia.

Prueba ADF para la serie PETRO1, en diferencia, sin intercepto y 4 lags.

ADF Test Statistic	**-29.88882**	1% Critical Value*	-2.5664
		5% Critical Value	-1.9394
		10% Critical Value	-1.6157

***MacKinnon critical values for rejection of hypothesis of a unit root.**

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

LS // Dependent Variable is D(PETRO1,2)

Date: 09/26/00 Time: 10:48

Sample: 7 3550

Included observations: 3544 after adjusting endpoints

Variable	Coefficient	Std. Error	T-Statistic	Prob.
D(PETRO1(-1))	-1.205170	0.040322	-29.88882	0.0000
D(PETRO1(-1),2)	0.195926	0.035471	5.523625	0.0000
D(PETRO1(-2),2)	0.147361	0.029672	4.966302	0.0000
D(PETRO1(-3),2)	0.032125	0.023872	1.345693	0.1785
D(PETRO1(-4),2)	0.045798	0.016793	2.727219	0.0064

R-squared	0.511502	Mean dependent var	-0.000229
Adjusted R-squared	0.510950	S.D. dependent var	0.760147
S.E. of regression	0.531587	Akaike info criterion	-1.262368
Sum squared resid	1000.066	Schwartz criterion	-1.253659
Log likelihood	-2786.801	F-statistic	926.4154
Durbin-Watson stat	2.003795	Prob(F-statistic)	0.000000

Esta segunda prueba ADF verifica que la serie PETRO1 es integrada de orden 1, ya que su primera diferencia no presenta raíz unitaria.

V.II.III.- PRUEBA BROCK-DECHERT-SCHEINKMAN (BDS)

Para aplicar la prueba BDS es necesario ajustar primero la serie PETRO1 con un modelo ARIMA, de acuerdo a la metodología Box-Jenkins. En el caso de la serie PETRO1, se obtuvo un modelo ARIMA(6,1,0). Con los residuos obtenidos a partir del modelo ARIMA se aplica la prueba BDS y se fija

un ε igual a la desviación estándar de dichos residuos ($\varepsilon = 0{,}5311$), obteniendo los siguientes resultados:

Dimensión de Inmersión (m)	Resultado BDS
2	-0,000028447
3	-0,000085317
4	-0,00016108
5	-0,00027473

Para cualquier nivel de significación se acepta que la serie presenta independencia o *whiteness* para *m* = 2, 3, 4 y 5, rechazándose, por tanto, la hipótesis alternativa de la prueba BDS de dependencia no-lineal. De esta forma, después de un ajuste lineal, el comportamiento de los residuos es puramente aleatorio.

Estos resultados nos conducen a rechazar la hipótesis nula de que la serie del precio del crudo marcador WTI presenta un comportamiento caótico determinístico. Por el contrario, se acepta la hipótesis alternativa de que la serie del crudo marcador WTI es generada mediante un proceso aleatorio y que el mejor ajuste es un modelo lineal.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

1. Los resultados obtenidos con la simulación numérica basada en la ecuación logística, nos permiten afirmar que un proceso puramente caótico determinístico puede confundirse con un proceso aleatorio sí nos limitamos a las pruebas basadas en el análisis del correlograma y el test Dickey-Fuller Ampliado. Por lo tanto, se desprende la idea que debe incluirse dentro de la rutina del análisis econométrico pruebas más avanzadas que permitan verificar sí los datos están siendo generados por un proceso aleatorio o no, tal como la prueba BDS.

2. Luego de aplicar la prueba BDS a las residuos generados por un modelo de ajuste lineal de la serie diaria del precio del crudo marcador West Texas Intermediate desde 1986 hasta 1999, se determinó que, después de dicho ajuste lineal, los residuos responden a un comportamiento puramente aleatorio. Este resultado nos conduce a rechazar la posibilidad de encontrar mecanismos caóticos determinísticos subyacentes en el comportamiento de esta serie en particular. Debemos recordar que esta conclusión no puede extrapolarse literalmente a todo el

mercado petrolero, ya que la escogencia del período a estudiar puede generar resultados diferentes.

3. La teoría del caos ha enriquecido en los últimos años a la Ciencia Económica en la búsqueda de una mayor comprensión de diversos fenómenos económicos, los cuales representan un verdadero reto por el alto grado de complejidad que encierran. De esta forma, tenemos que se ha generado una nueva aproximación metodológica para el tratamiento de la realidad económica, basada en un paradigma holístico que integra la matemática no-lineal, la teoría de los sistemas dinámicos y la utilización de potentes sistemas informáticos. Sin embargo, es necesario destacar que todavía queda un largo trecho por recorrer, dada la necesidad de seguir desarrollando nuevas herramientas estadísticas y matemáticas que permitan profundizar la caracterización de los sistemas dinámicos no-lineales. A su vez, debemos reconocer que lo más importante no es sustituir el paradigma lineal por el no-lineal, sino más bien comprender la necesidad de su complementariedad.

4. A partir de las pruebas realizadas se desprende que, para la serie WTI estudiada, el precio del petróleo sigue un proceso no estacionario de tipo caminata aleatoria. No hay evidencia de la existencia de correlación serial, es decir, no es predecir cambios en los precios (más allá de una

tendencia) dada la información presente. Con todo esto, podemos decir que el mejor predictor de los precios futuros es el precio actual. Las afirmaciones anteriores coinciden con las conclusiones obtenidas por Hausmann, Powell y Rigobón (1993, pp. 134), claro está, que es necesario hacer la observación de que estos utilizaron una serie de datos distinta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Argandoña, Antonio; Gámez, Consuelo; Mochón, Francisco. ***Macroeconomía Avanzada I: Modelos dinámicos y teoría de la política económica***, Madrid, McGraw-Hill, 1996, pp.419.
2. Barnett, William A.; Gallant, A. Ronald; Hinich, Melvin J.; Jungeilges, Jochen; Kaplan, Daniel y Jensen, Mark J., ***Robustness of Nonlinearity and Chaos Tests to Measure Error, Inference Method, and Sample Size***, Journal of Economic Behavioral Organizations, 27 (2), 1995, pp. 301-320.
3. Barnett, William A.; Medio, Alfredo y Serletis, Apostolos***. Nonlinear and Complex Dynamics in Economics***, 1999.
4. Baumol, William J. y Benhabib, Jess. ***Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications***, Journal of Economic Perspectives, Winter 1989, Volume 3, Number 1, 77-105.
5. Belén Rodríguez T., María. ***Factor tecnológico impacta en el crudo***, Caracas, Diario El Universal, 23 de Septiembre del 2000, pp. 2-1.
6. Benhabib, Jess (comp.), ***Cycles and Chaos in Economic Equilibrium***, Princeton, New Jersey, 1992, pp. 474.

7. Brealey, Richard A. y Myers, Stewart C., ***Principios de Finanzas Corporativas***, 4ta. Edición, Madrid, McGraw-Hill,1993, pp. 1203.
8. Brock, William A; Hsieh, David A. y LeBaron Blake. ***Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability***, Cambridge, Massachusetts, MIT Press, 1991, pp. 328.
9. Brock, William A. y Sayers, Chera L., ***Is the Business Cycle Characterized by Deterministic Chaos?***, Journal of Monetary Economics 22, 1988, pp. 71-90, en Banhabib (1992).
10. Diebold, Francis. ***Elementos de Pronósticos***, Madrid, International Thomson Editores, 1999, pp. 329.
11. Fernández Díaz, Andrés. ***La Economía de la Complejidad: Economía dinámica caótica***, Madrid, España, McGraw-Hil, 1994, pp. 170.
12. Guerrero E., Alexander. ***Los impuestos y los altos precios del petróleo***, Caracas, Diario El Universal, 17 de Septiembre del 2000.
13. Gleick, James. ***Chaos: Making a New Science***, New York, Penguin Books, 1987, pp. 352.
14. Goodwin, Richard M., ***Chaotic Economic Dynamics***, New York, Oxford University Press, 1990, pp. 137.
15. Grandmont, Jean-Michel. ***On Endogenous Competitive Bussiness Cycles***, Econometrica 22, 1985, pp. 995-1037, en Benhabib (1992).
16. Granger, C.W.J. y Newbold, Paul. ***Forecasting Economic Time Series***, 2° ed., San Diego, California, Academic Press, 1986, pp. 338.

17. Gujarati, Damodar N., ***Econometría***, 3° ed., Santafé de Bogotá, Colombia, McGraw-Hill, 1997, pp. 824.

18. Hall, Nina (comp.). ***Exploring Chaos: A guide to the new science of disorder***, New York, W.W. Norton Company, 1993, pp. 224.

19. Hamilton, James D., ***Time Series Analysis***, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1994, pp. 799.

20. Hausmann, Ricardo; Powell, A.; Rigobón, Roberto. ***An Optimal Spending Rule Facing Oil Income Uncertainty (Venezuela)***, en Engel E. Y Meller P., ***External Shocks and Stabilization Mechanism***, Chile, CIEPLAN-IDB, 1993.

21. Hilborn, Robert C., ***Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for scientist and engineers***, Oxford, Oxford University Press, 1994, pp. 654.

22. ***Historical Monthly Energy Review, 1973-1992***, U.S. Energy Information Administrartion, U.S. Government Printing Office, 1994.

23. Kantz, Holger y Schreiber, Thomas. ***Nonlinear Time Series Analysis***, Cambridge, Cambridge University Press, 1997, pp. 304.

24. Karl, Terry Lynn. ***The Paradox of Plenty***, Berkeley and Los Angeles, California, University of California Press, 1997, pp. 342.

25. Lorenz, Edward N., ***The Essence of Chaos***, Seattle, Washington, University of Washington Press, 1993, pp. 227.

26. Malinvaud, Edmond. ***Métodos Estadísticos de la Econometría***, Barcelona, Edicones Ariel, 1967, pp. 706.

27. Martín, Miguel Ángel; Morán, Manuel; Reyes, Miguel. ***Iniciación al Caos: Sistemas Dinámicos***, Madrid, Editorial Síntesis, 1995, pp. 287.

28. McNevin, Bruce y Neftçy, ***Some Evidence on the Non-Linearity of Economic Time Series: 1890-1981***, en Benhabib (1992).

29. Medio, Alfredo. ***Chaotic Dynamics: Theory and applications to Economies***, Cambridge, Cambridge University Press, 1992, pp. 344.

30. Mitchell Waldrop, M., ***Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos***, New York, Simon and Schuster, 1992, pp. 380.

31. Nieto de Alba, Ubaldo. ***Historia del tiempo en la economía: Predicción, caos y complejidad***, Madrid, España, McGraw-Hill, 1998, pp. 344.

32. Nychka, Douglas; Ellner, Stephen; Gallant, Ronald y McCaffrey, Daniel. **Finding Chaos in Noisy Systems**, Journal of the Royal Statistical Society B, 54 (2), 1992, pp. 399-426.

33. Páez, Karina. ***Demanda de Dinero: Un Enfoque de Cointegración, Caso Venezuela 1983-1992***, Caracas, UCAB, 1994.

34. Park, Joon Y. y Whang, Yoon-Jae. ***Random Walk or Chaos: A Formal Test on the Lyapunov Exponent***, 1999, sacado de internet.

35. Prigogine, Ilya. ***The End of Certainty: Time, Chaos and the New Laws of Nature***, New York, The Free Press, 1997, pp. 228.

36. Puv, Tönu, ***Nonlinear Economic Dynamics***, 4ta. Ed., New York, Springer-Verlag, 1997, pp. 288.

37. Rifkin, Jeremy. ***Entropía: Hacia el Mundo Invernadero***, Barcelona, Ediciones URANO, 1990, pp. 307.

38. Samentband, Moises J., ***Entre el Orden y el Caos : La Complejidad***, Buenos Aires, Fondo de Cultura Económica, 1994, pp. 147.

39. Steward, Ian. ***Does God Play Dice?: The Mathematics of Chaos***, Cambridge, Massachusetts, Blackwell Publishers, 1989, pp. 348.

40. Tvede, Lars. ***Business Cycles: From John Law to Chaos Theory***, Holanda, Hardwood Academic Publishers, 1997, pp. 275.

41. Wei, William W. S., ***Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods***, California, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

Figura I.1.- Producto A

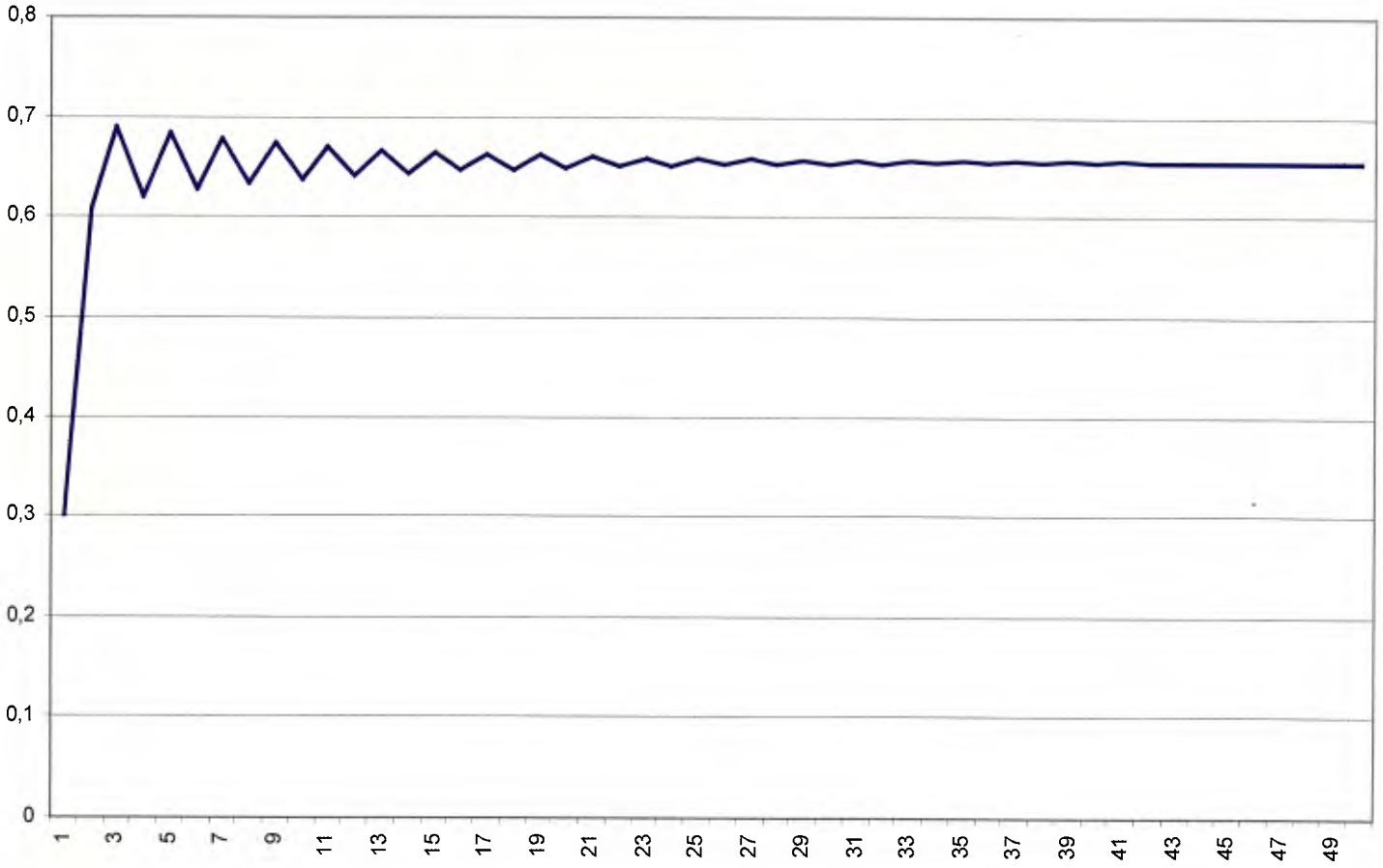


Figura I.2.- Producto B

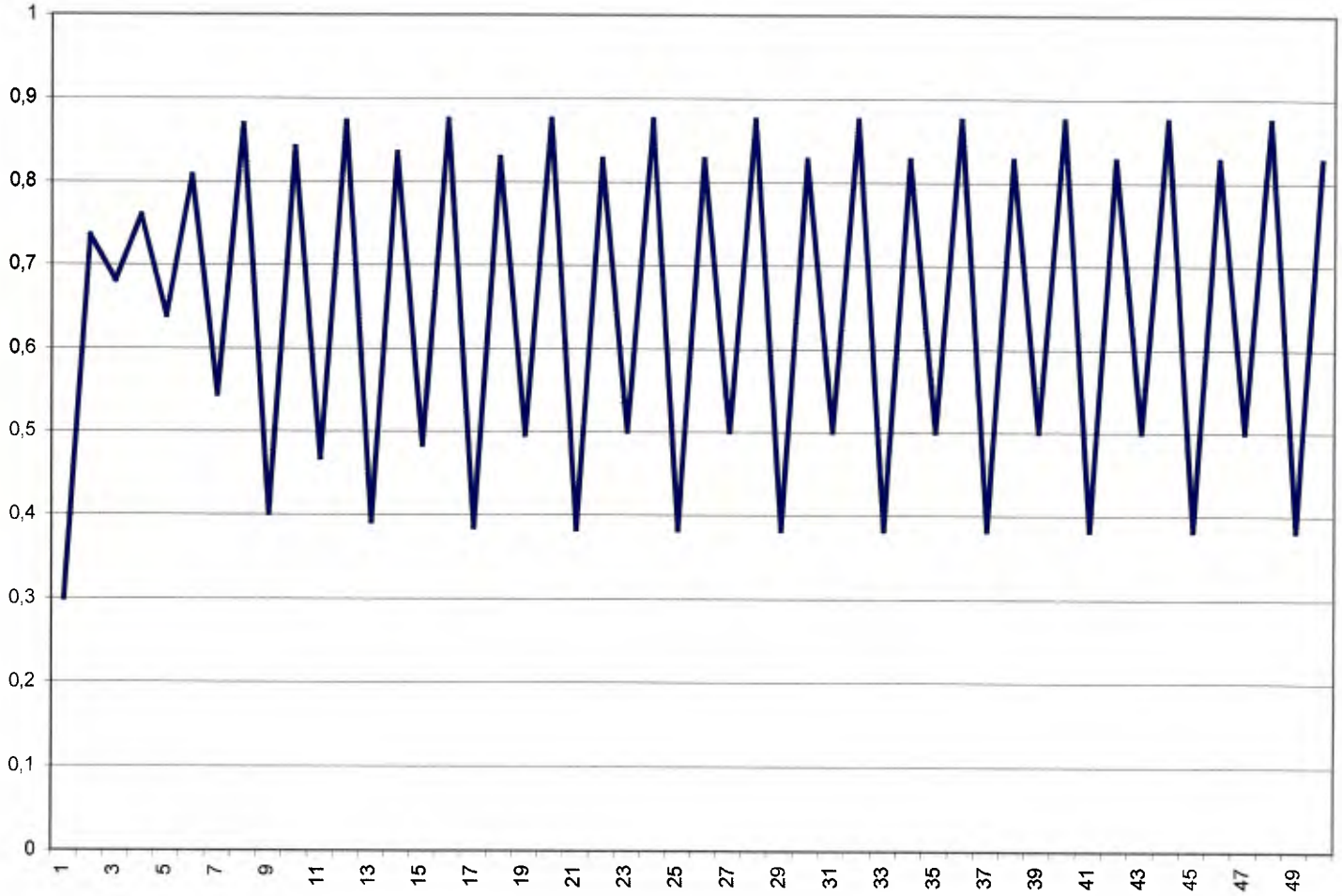


Figura I.3.- Producto C

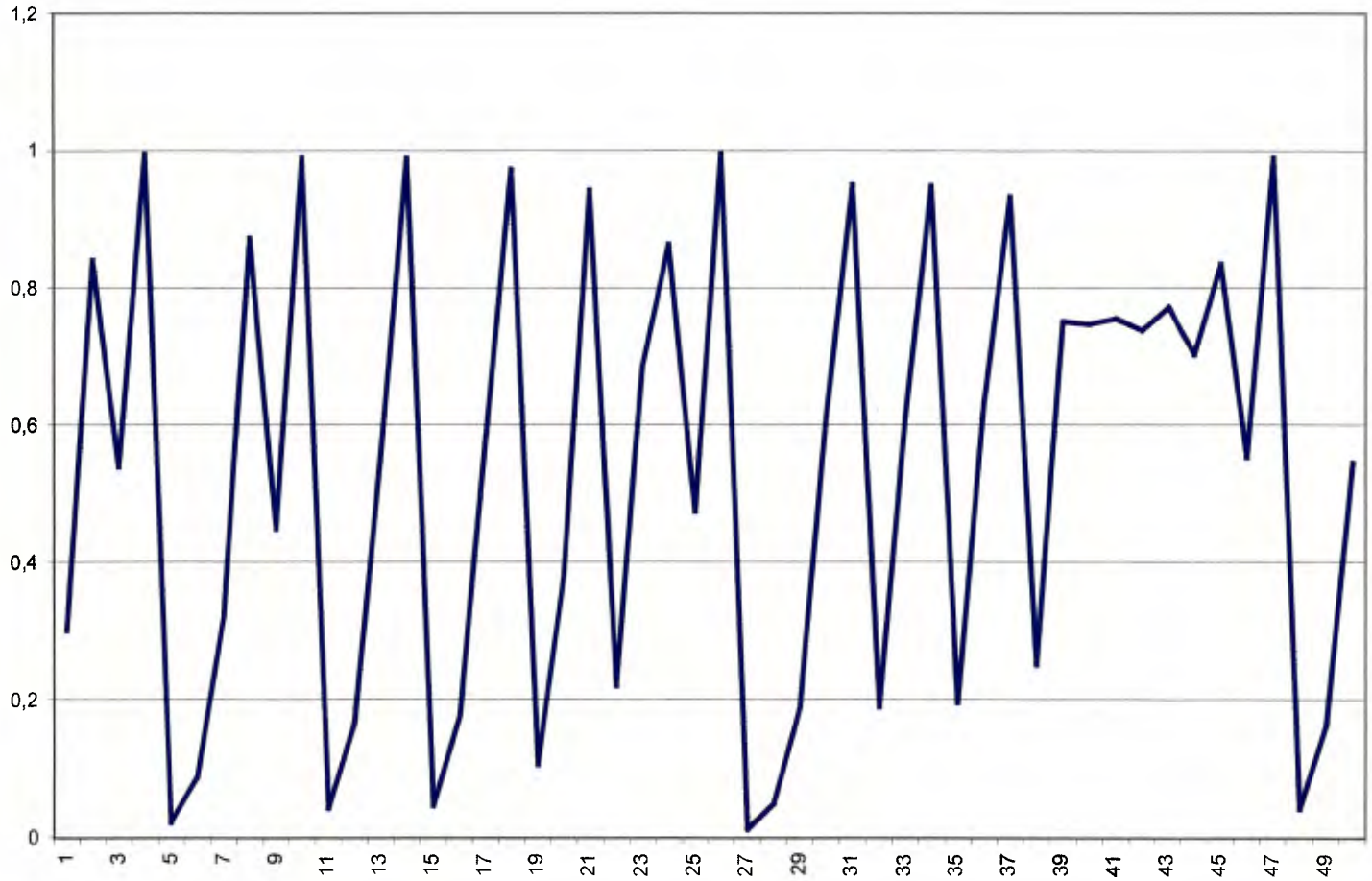


Figura I.4.- Sensibilidad a las condiciones iniciales

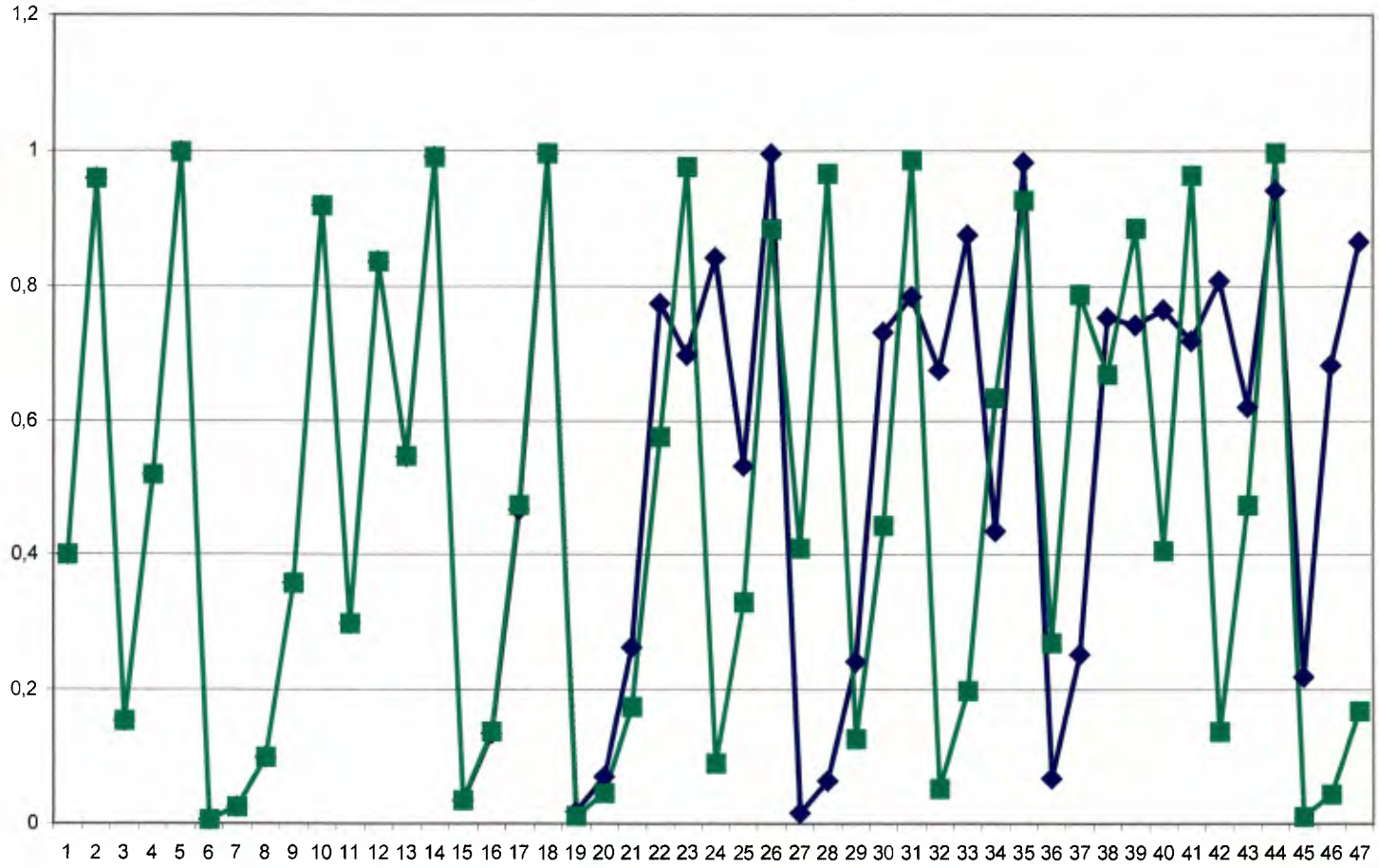
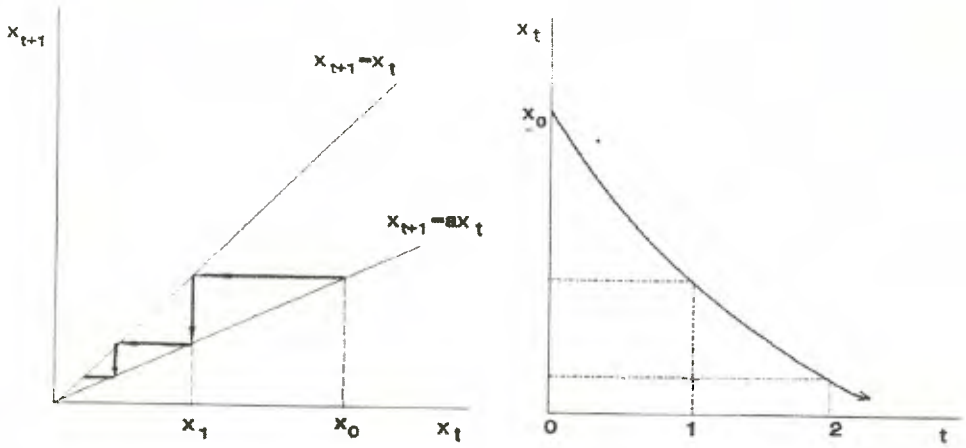


Figura II.1.- Diagrama de fases: convergencia monotónica



II.1.a. II.1.b.

Figura II.2.- Diagrama de fases: convergencia oscilante

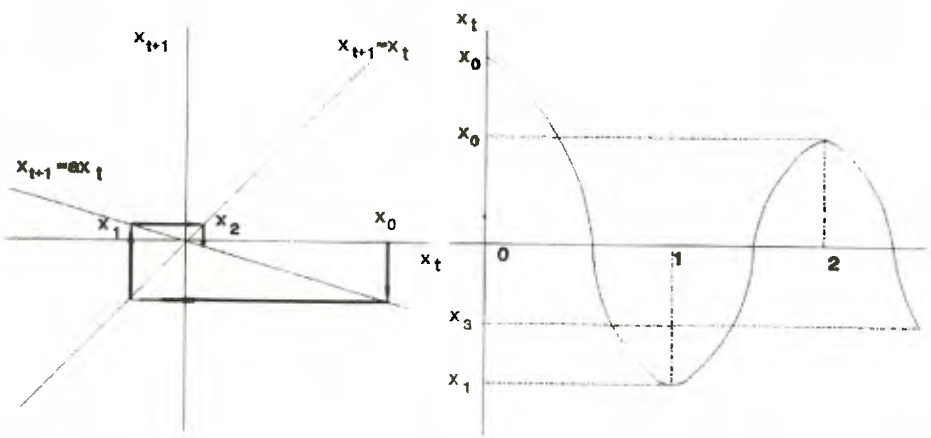


Figura II.3.- Diagrama de fases: divergencia monotónica

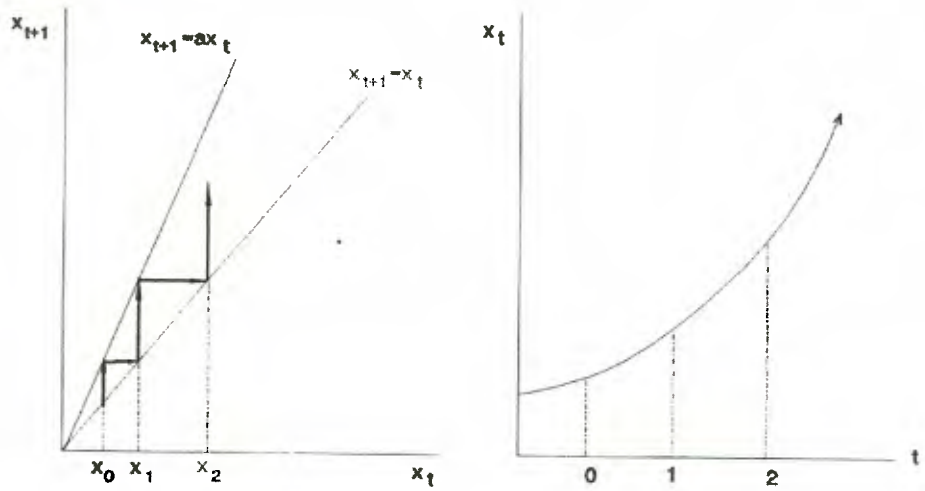


Figura II.4.- Diagrama de fases: divergencia oscilante

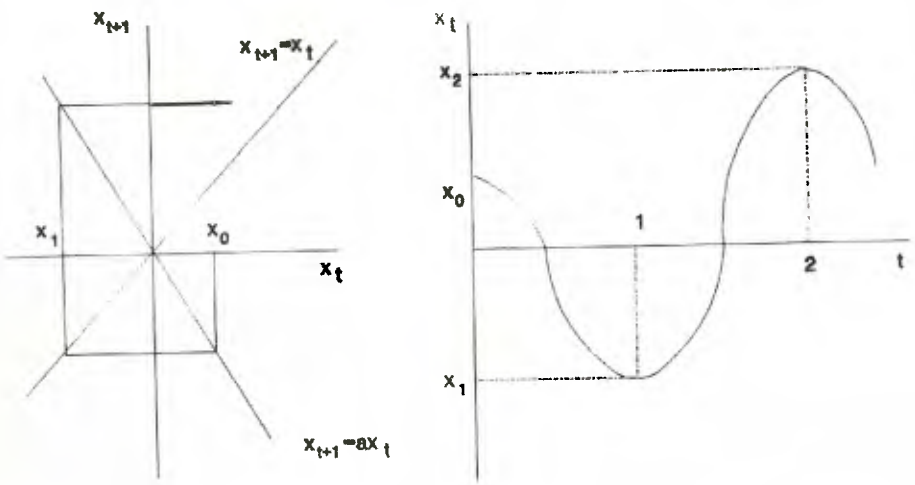


Figura II.5.- Convergencia de órbitas a un punto fijo ξ con $0 \leq f'(\xi) < 1$

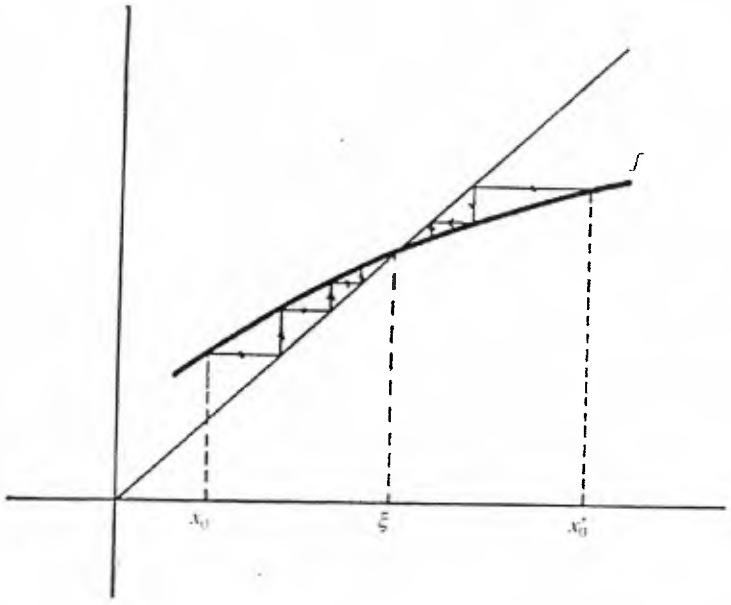


Figura II.6.- Convergencia de órbitas a un punto fijo ξ con $-1 \leq f'(\xi) < 0$

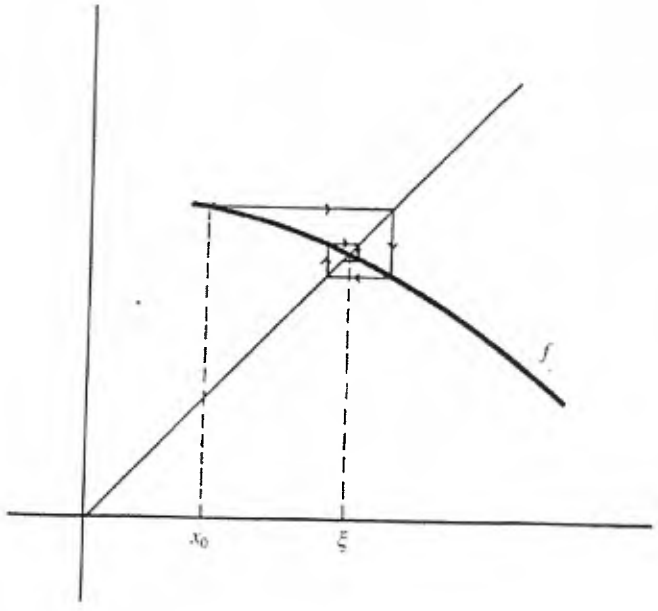


Figura II.7.- Punto fijo repulsivo

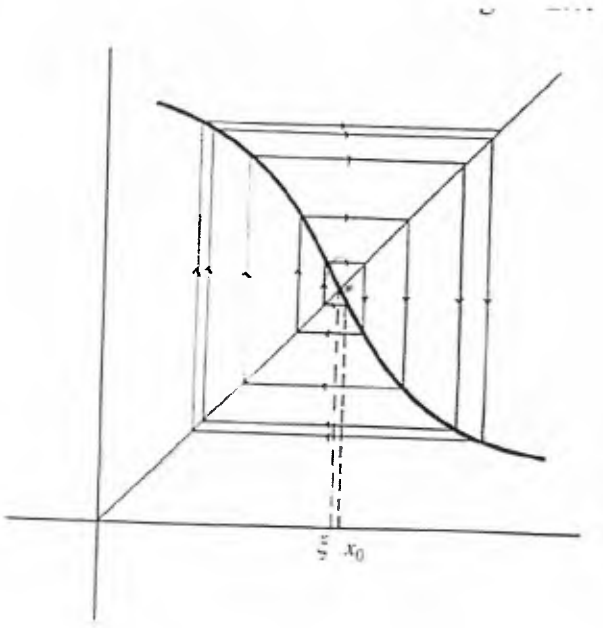
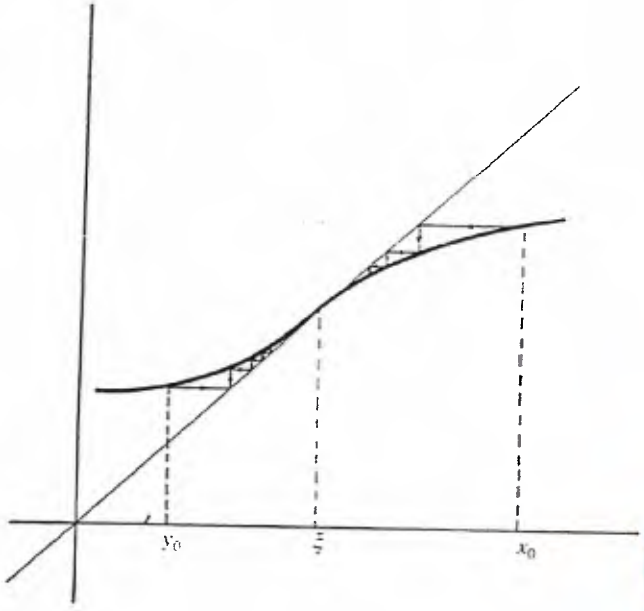


Figura II.8.- Punto fijo indiferente



Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

Figura II.9.- Puntos periódicos de segundo orden

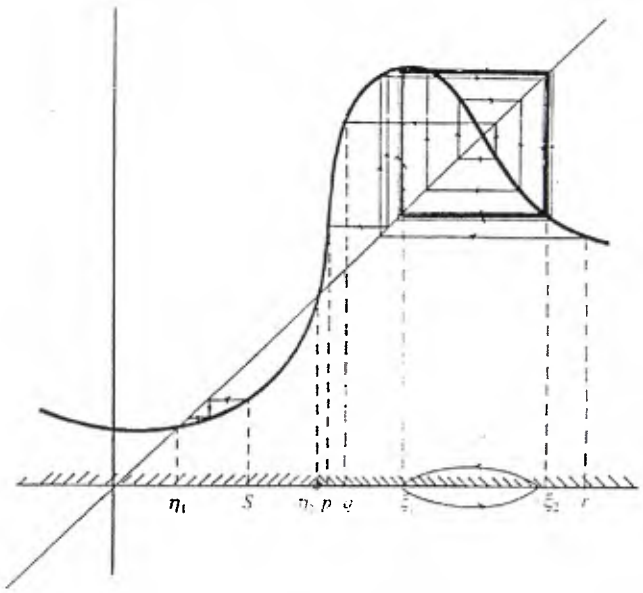


Figura II.10.- Puntos periódicos de tercer orden

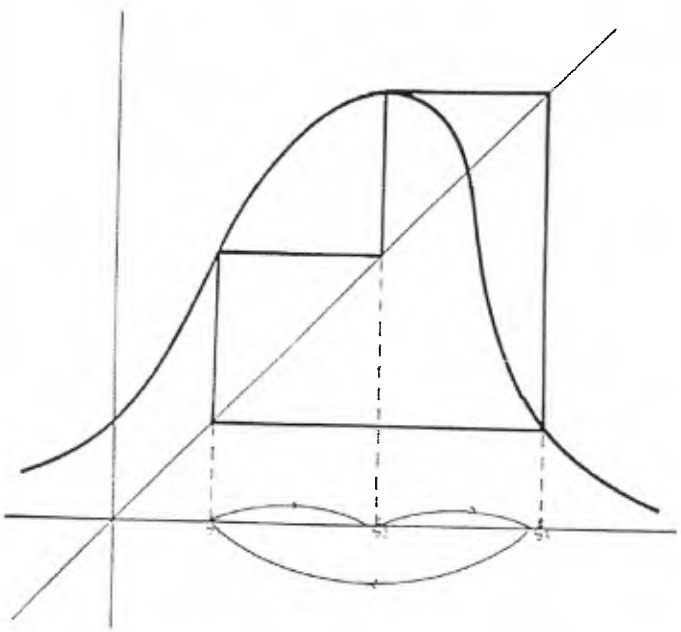


Figura II.11.- Extinción: trayectoria temporal

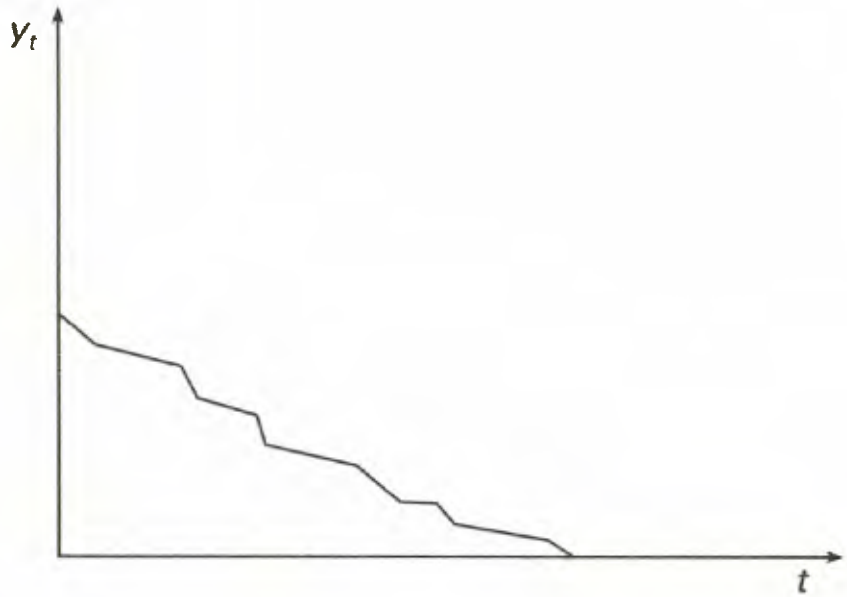


Figura II.12.- Extinción: trayectoria en el espacio de fases

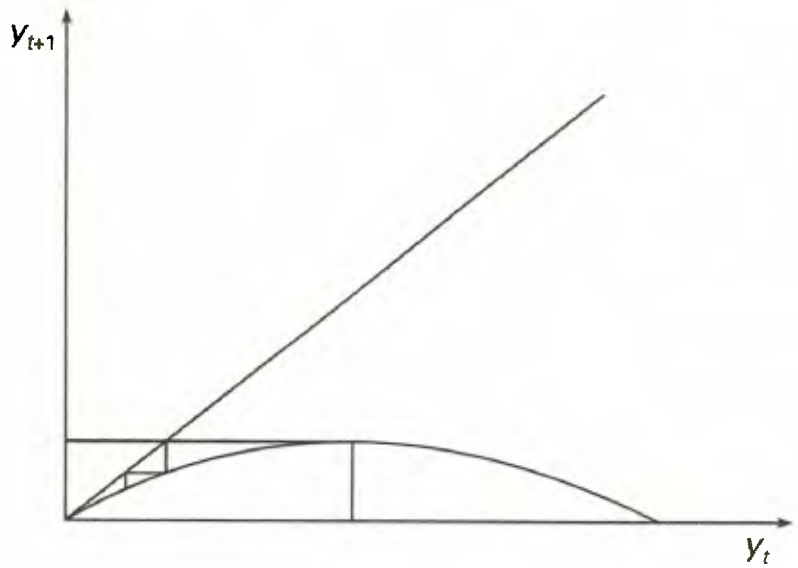


Figura II.13.- Equilibrio: trayectoria temporal

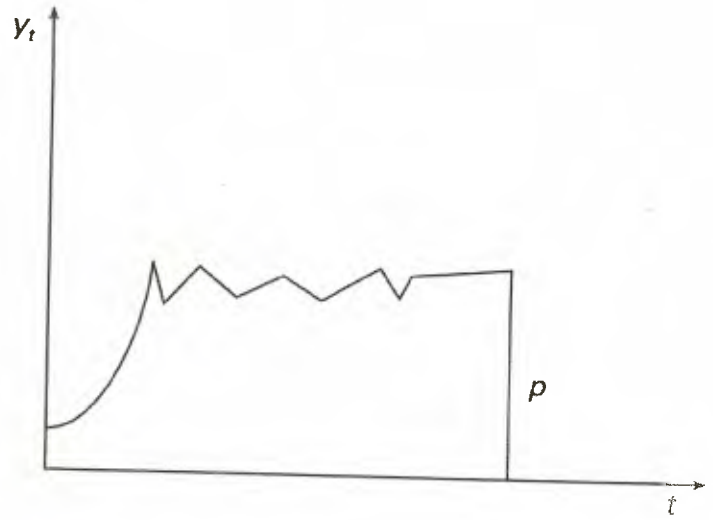


Figura II.14.- Equilibrio: trayectoria en el espacio de fases

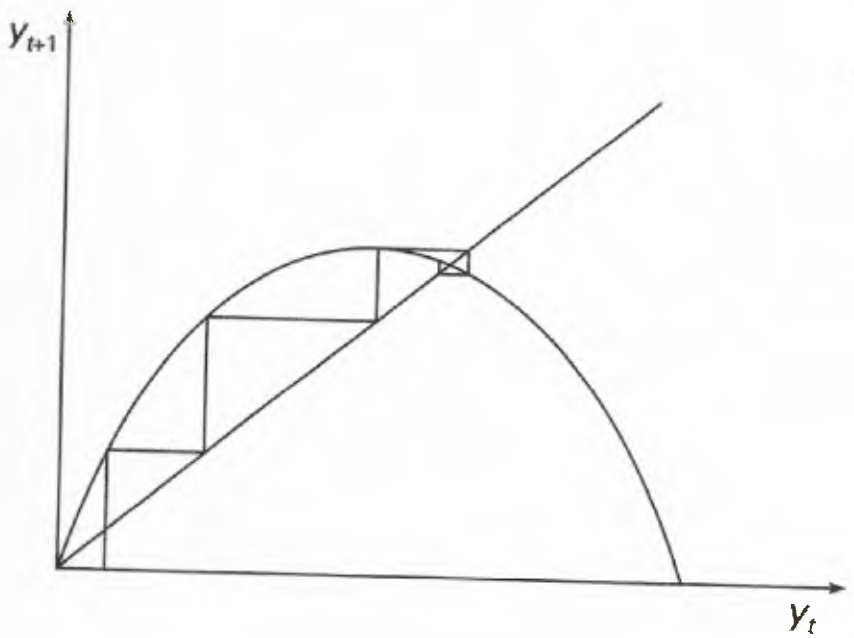


Figura II.15.- Ciclo de período dos: trayectoria temporal

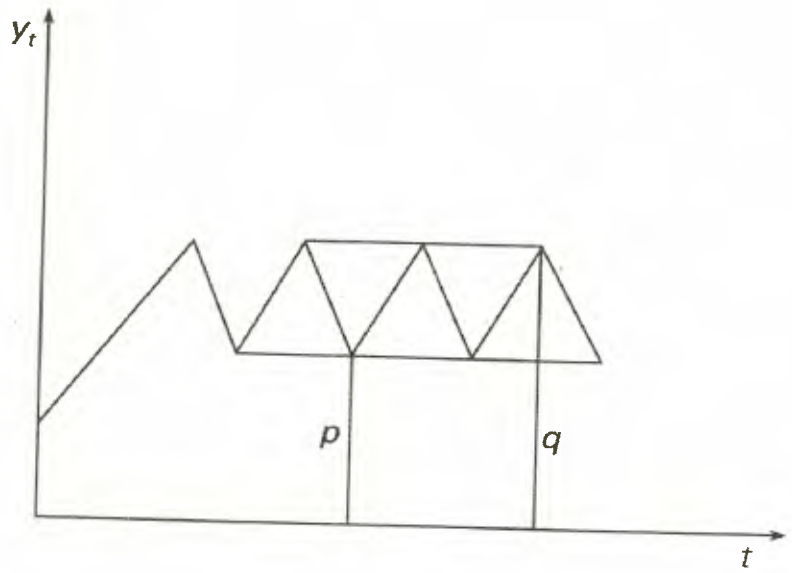


Figura II.16.- Ciclo de período dos: trayectoria en el espacio de fases

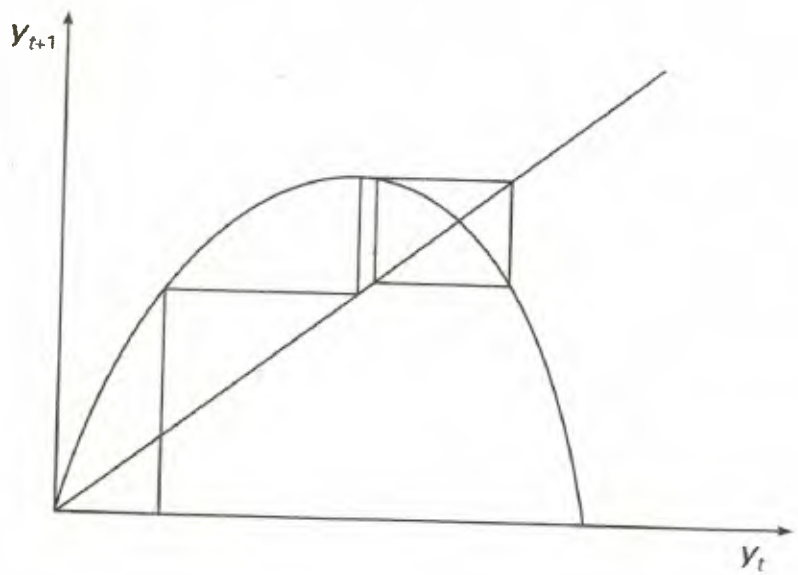


Figura II.17.- Caos: trayectoria temporal

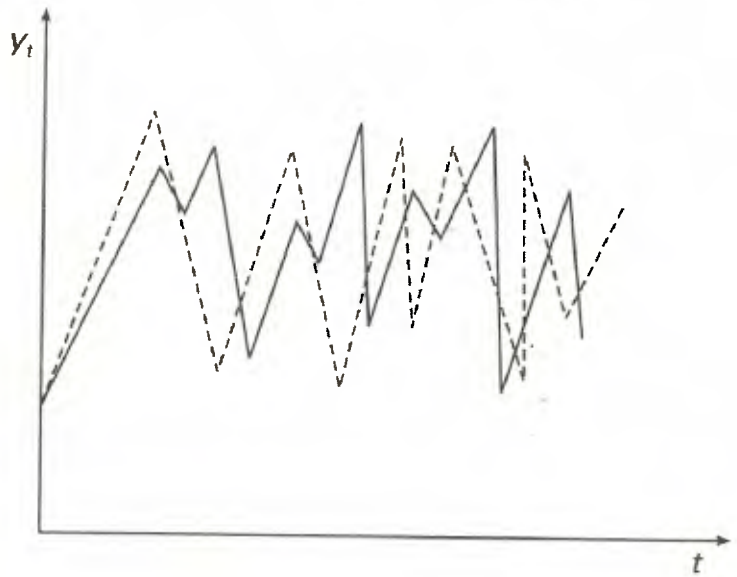


Figura II.18.- Caos: trayectoria en el espacio de fases

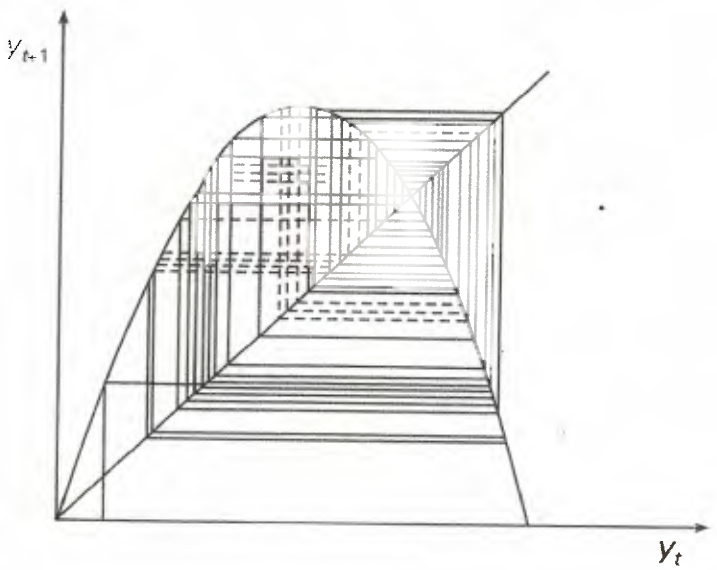
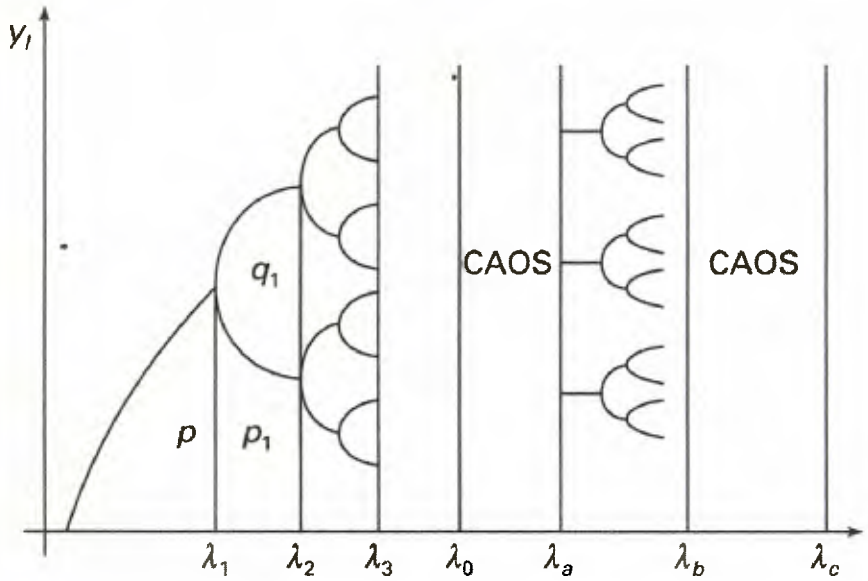


Figura II.19.- Árbol de Feigenbaum: la ruta hacia el caos



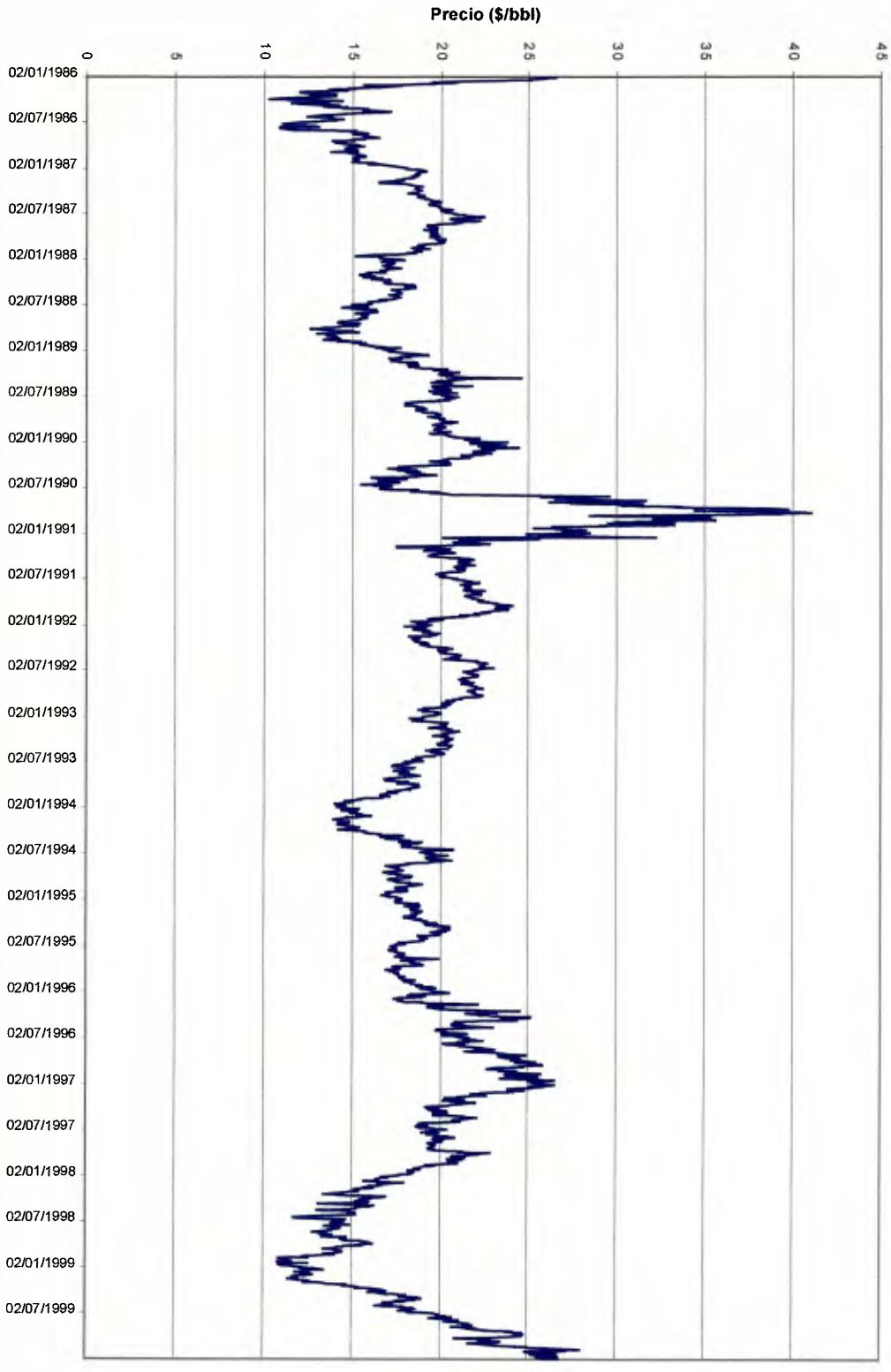
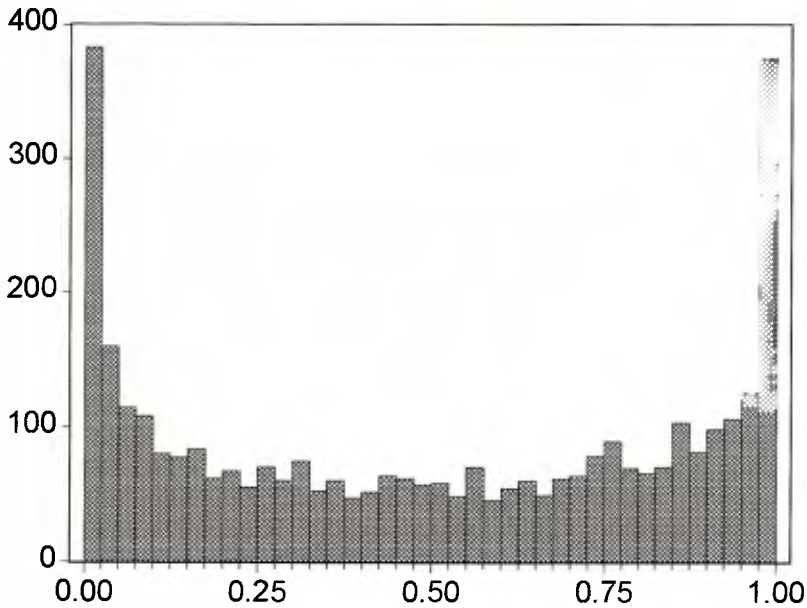


Figura III.1.- Evolución del precio diario del crudo marcador WTI (1986-1999)



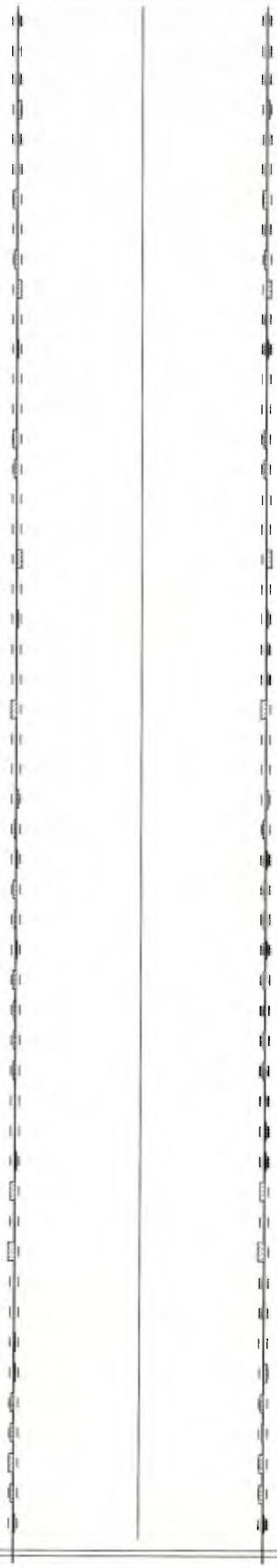
Series: SER4	
Sample 1 3550	
Observations 3550	
Mean	0.496700
Median	0.497660
Maximum	1.000000
Minimum	3.84E-07
Std. Dev.	0.354705
Skewness	0.002452
Kurtosis	1.496056
Jarque-Bera	334.5687
Probability	0.000000

Correlogram of SER4

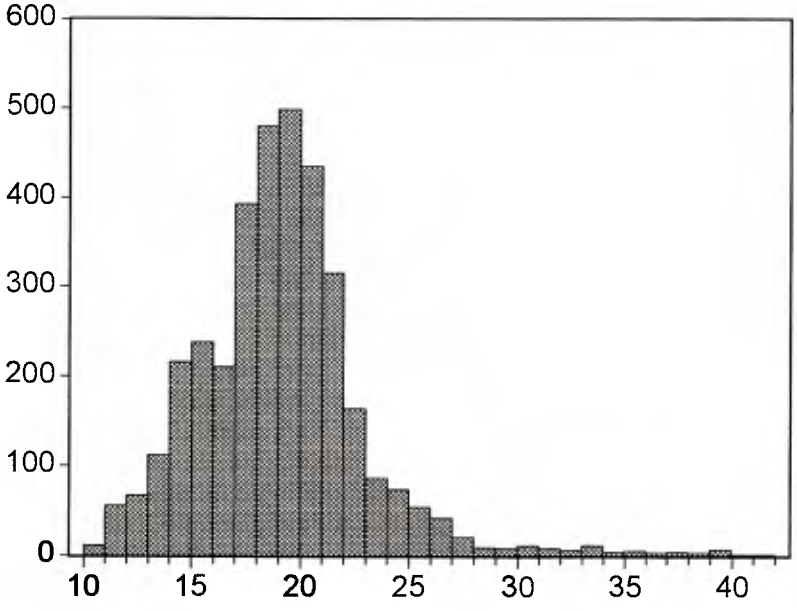
Date: 10/13/00 Time: 06:44
Sample: 1 3550
Included observations: 3550

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.023	0.023	1.8768	0.171
		2	0.014	0.013	2.5395	0.281
		3	-0.014	-0.015	3.2601	0.353
		4	0.033	0.033	7.0981	0.131
		5	0.004	0.002	7.1435	0.210
		6	0.028	0.026	9.8550	0.131
		7	-0.001	-0.001	9.8575	0.197
		8	0.020	0.018	11.265	0.187
		9	0.004	0.004	11.319	0.254
		10	0.013	0.010	11.885	0.293
		11	0.001	0.000	11.886	0.372
		12	-0.008	-0.010	12.091	0.438
		13	0.007	0.007	12.246	0.508
		14	-0.021	-0.023	13.835	0.462
		15	0.023	0.023	15.707	0.402
		16	0.011	0.010	16.146	0.443
		17	0.002	-0.000	16.161	0.512
		18	0.018	0.020	17.276	0.504
		19	-0.014	-0.017	17.976	0.524
		20	-0.017	-0.017	19.065	0.518
		21	0.003	0.003	19.093	0.579
		22	0.037	0.036	23.896	0.353
		23	-0.008	-0.010	24.099	0.398
		24	-0.006	-0.007	24.238	0.448
		25	0.020	0.022	25.711	0.423
		26	-0.006	-0.010	25.847	0.472
		27	0.019	0.020	27.104	0.458
		28	-0.009	-0.011	27.399	0.497
		29	-0.001	-0.001	27.404	0.550
		30	-0.026	-0.026	29.863	0.473
		31	0.032	0.030	33.506	0.347
		32	0.011	0.011	33.907	0.376
		33	0.020	0.015	35.361	0.357
		34	0.011	0.013	35.771	0.385
		35	-0.017	-0.021	36.843	0.384
		36	-0.002	0.002	36.857	0.429
		37	0.027	0.023	39.424	0.362
		38	-0.008	-0.011	39.660	0.396
		39	-0.000	0.000	39.660	0.440
		40	0.037	0.035	44.606	0.284
		41	0.004	0.003	44.677	0.320
		42	0.008	0.006	44.898	0.351
		43	-0.011	-0.012	45.336	0.375
		44	-0.023	-0.026	47.166	0.344
		45	0.007	0.011	47.336	0.377

Correlogram of SER4



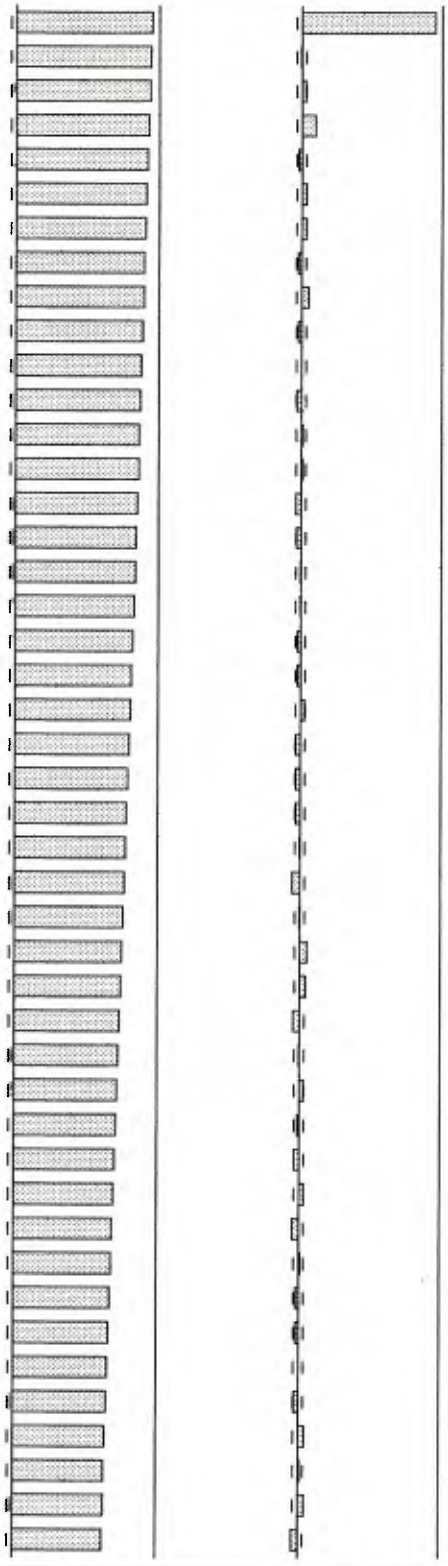
46	-0.006	-0.008	47.457	0.413
47	0.004	0.002	47.521	0.451
48	0.006	0.007	47.639	0.488
49	0.026	0.021	50.052	0.431
50	0.003	0.003	50.085	0.470
51	-0.002	0.000	50.096	0.510
52	-0.027	-0.025	52.728	0.446
53	0.001	-0.000	52.733	0.484
54	-0.018	-0.017	53.963	0.476
55	0.037	0.034	58.981	0.332
56	-0.001	-0.003	58.987	0.367
57	0.010	0.011	59.369	0.389
58	0.004	0.001	59.417	0.424
59	0.006	0.004	59.565	0.455
60	-0.025	-0.022	61.854	0.410
61	-0.021	-0.020	63.495	0.389
62	-0.006	-0.005	63.617	0.419
63	0.005	0.004	63.715	0.451
64	0.046	0.045	71.319	0.248
65	0.007	0.003	71.483	0.271
66	0.013	0.014	72.090	0.284
67	-0.006	-0.005	72.214	0.310
68	-0.001	-0.004	72.219	0.340
69	-0.047	-0.043	80.089	0.170
70	-0.006	-0.007	80.221	0.189
71	0.001	-0.001	80.222	0.212
72	0.022	0.019	81.999	0.197
73	-0.015	-0.016	82.806	0.203
74	0.016	0.014	83.749	0.205
75	-0.017	-0.011	84.858	0.204
76	-0.011	-0.011	85.308	0.218
77	0.009	0.012	85.614	0.235
78	-0.017	-0.016	86.679	0.235
79	-0.009	-0.007	86.993	0.252
80	-0.008	-0.013	87.252	0.271
81	-0.015	-0.015	88.059	0.277
82	0.004	0.001	88.127	0.302
83	0.004	0.010	88.197	0.328
84	0.010	0.015	88.546	0.346
85	-0.037	-0.033	93.616	0.245
86	0.001	0.001	93.620	0.269
87	-0.055	-0.056	104.80	0.094
88	0.007	0.007	105.00	0.104
89	-0.004	-0.005	105.05	0.118
90	0.010	0.007	105.41	0.128
91	0.015	0.026	106.22	0.131
92	-0.021	-0.023	107.89	0.123
93	-0.017	-0.010	109.00	0.123
94	-0.036	-0.031	113.65	0.082
95	-0.021	-0.025	115.33	0.077
96	0.009	0.010	115.60	0.084



Series: PETRO1	
Sample 1 3550	
Observations 3550	
Mean	19.08829
Median	18.97000
Maximum	41.07000
Minimum	10.25000
Std. Dev.	3.818152
Skewness	1.197951
Kurtosis	7.391664
Jarque-Bera	3701.918
Probability	0.000000

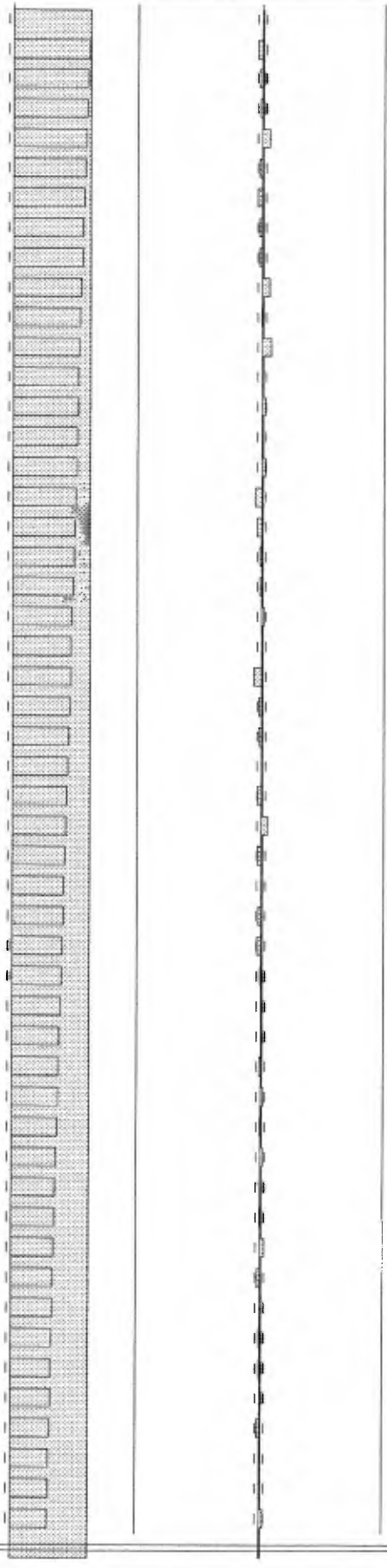
Correlogram of PETRO1

Date: 09/26/00 Time: 10:25
Sample: 1 3550
Included observations: 3550



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.989	0.989	3477.5	0.000
		2	0.979	-0.006	6881.3	0.000
		3	0.969	0.029	10217.	0.000
		4	0.961	0.106	13502.	0.000
		5	0.953	-0.016	16734.	0.000
		6	0.946	0.038	19918.	0.000
		7	0.940	0.039	23060.	0.000
		8	0.933	-0.022	26157.	0.000
		9	0.927	0.053	29215.	0.000
		10	0.920	-0.018	32232.	0.000
		11	0.914	0.005	35210.	0.000
		12	0.907	-0.026	38143.	0.000
		13	0.901	0.012	41035.	0.000
		14	0.894	0.009	43887.	0.000
		15	0.887	-0.040	46695.	0.000
		16	0.880	-0.028	49455.	0.000
		17	0.872	-0.006	52169.	0.000
		18	0.865	-0.007	54837.	0.000
		19	0.857	-0.022	57458.	0.000
		20	0.849	-0.017	60031.	0.000
		21	0.842	0.032	62563.	0.000
		22	0.834	-0.029	65049.	0.000
		23	0.826	-0.033	67488.	0.000
		24	0.817	-0.030	69877.	0.000
		25	0.809	-0.002	72217.	0.000
		26	0.799	-0.054	74504.	0.000
		27	0.790	-0.004	76738.	0.000
		28	0.782	0.054	78928.	0.000
		29	0.775	0.041	81081.	0.000
		30	0.768	-0.048	83192.	0.000
		31	0.760	-0.003	85260.	0.000
		32	0.752	0.030	87288.	0.000
		33	0.745	-0.014	89277.	0.000
		34	0.737	-0.033	91223.	0.000
		35	0.729	0.037	93129.	0.000
		36	0.721	-0.049	94993.	0.000
		37	0.713	0.014	96815.	0.000
		38	0.704	-0.022	98595.	0.000
		39	0.695	-0.022	100332	0.000
		40	0.687	0.004	102027	0.000
		41	0.678	-0.032	103679	0.000
		42	0.670	0.042	105292	0.000
		43	0.662	0.010	106869	0.000
		44	0.656	0.044	108417	0.000
		45	0.648	-0.048	109929	0.000

Correlogram of PETRO1



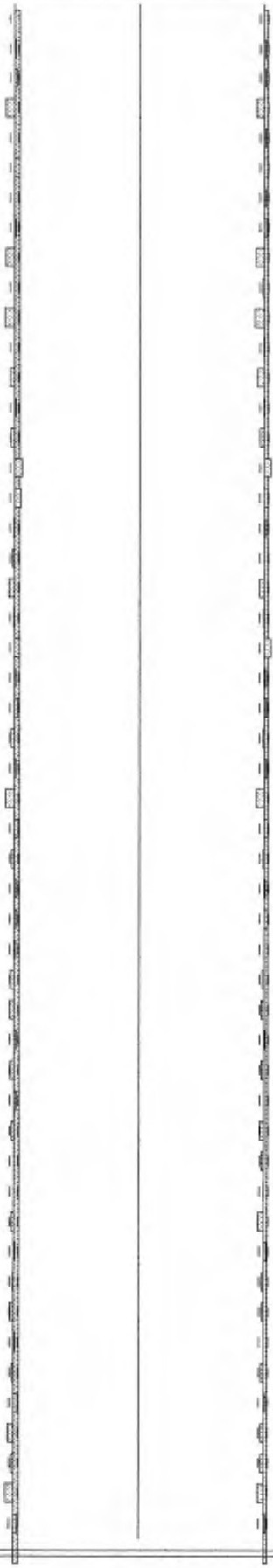
46	0.641	0.014	111407	0.000
47	0.633	-0.038	112849	0.000
48	0.624	-0.021	114252	0.000
49	0.615	-0.015	115617	0.000
50	0.608	0.059	116949	0.000
51	0.601	-0.023	118250	0.000
52	0.592	-0.038	119515	0.000
53	0.584	-0.022	120743	0.000
54	0.575	-0.021	121935	0.000
55	0.567	0.061	123097	0.000
56	0.560	-0.004	124229	0.000
57	0.554	0.078	125337	0.000
58	0.548	0.001	126424	0.000
59	0.543	0.033	127489	0.000
60	0.538	0.005	128534	0.000
61	0.533	0.025	129560	0.000
62	0.527	-0.052	130563	0.000
63	0.519	-0.041	131537	0.000
64	0.512	-0.014	132485	0.000
65	0.504	-0.016	133405	0.000
66	0.498	0.018	134302	0.000
67	0.491	0.007	135176	0.000
68	0.484	-0.059	136024	0.000
69	0.476	-0.018	136847	0.000
70	0.468	-0.018	137641	0.000
71	0.461	0.015	138412	0.000
72	0.453	-0.027	139157	0.000
73	0.447	0.057	139882	0.000
74	0.440	-0.030	140586	0.000
75	0.434	0.006	141269	0.000
76	0.427	-0.021	141931	0.000
77	0.420	-0.025	142571	0.000
78	0.412	-0.002	143188	0.000
79	0.405	0.007	143785	0.000
80	0.399	0.013	144364	0.000
81	0.393	-0.009	144924	0.000
82	0.387	0.018	145468	0.000
83	0.380	-0.007	145994	0.000
84	0.375	0.023	146505	0.000
85	0.369	0.013	146999	0.000
86	0.363	-0.002	147477	0.000
87	0.357	0.036	147941	0.000
88	0.351	-0.022	148391	0.000
89	0.345	0.007	148825	0.000
90	0.340	-0.002	149247	0.000
91	0.335	-0.005	149655	0.000
92	0.330	0.014	150052	0.000
93	0.324	-0.021	150434	0.000
94	0.319	0.016	150805	0.000
95	0.314	0.014	151165	0.000
96	0.311	0.030	151517	0.000

Correlogram of D(PETRO1)

Date: 09/26/00 Time: 10:31
Sample: 1 3550
Included observations: 3549

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.006	-0.006	0.1483	0.700
		2	-0.044	-0.044	6.8840	0.032
		3	-0.112	-0.113	51.792	0.000
		4	0.018	0.014	52.939	0.000
		5	-0.036	-0.046	57.444	0.000
		6	-0.037	-0.049	62.198	0.000
		7	0.022	0.021	63.922	0.000
		8	-0.049	-0.063	72.411	0.000
		9	0.021	0.013	73.946	0.000
		10	0.002	0.002	73.960	0.000
		11	0.044	0.029	80.895	0.000
		12	-0.004	0.003	80.945	0.000
		13	-0.004	-0.004	81.016	0.000
		14	0.032	0.038	84.753	0.000
		15	0.027	0.031	87.374	0.000
		16	0.007	0.011	87.569	0.000
		17	-0.022	-0.006	89.372	0.000
		18	0.033	0.038	93.238	0.000
		19	0.006	0.013	93.351	0.000
		20	-0.036	-0.032	97.867	0.000
		21	0.026	0.037	100.22	0.000
		22	0.033	0.033	104.12	0.000
		23	0.034	0.033	108.25	0.000
		24	-0.019	-0.002	109.49	0.000
		25	0.049	0.053	118.20	0.000
		26	-0.021	-0.013	119.75	0.000
		27	-0.055	-0.050	130.70	0.000
		28	-0.050	-0.042	139.74	0.000
		29	0.049	0.039	148.50	0.000
		30	0.014	0.000	149.25	0.000
		31	-0.030	-0.029	152.57	0.000
		32	0.020	0.019	154.08	0.000
		33	0.039	0.032	159.62	0.000
		34	-0.030	-0.041	162.86	0.000
		35	0.043	0.055	169.47	0.000
		36	-0.013	-0.022	170.04	0.000
		37	0.026	0.022	172.49	0.000
		38	-0.000	0.022	172.49	0.000
		39	0.006	-0.001	172.62	0.000
		40	0.035	0.041	177.14	0.000
		41	-0.051	-0.042	186.38	0.000
		42	-0.018	-0.010	187.50	0.000
		43	-0.060	-0.051	200.29	0.000
		44	0.059	0.033	212.72	0.000
		45	-0.023	-0.019	214.68	0.000

Correlogram of D(PETRO1)



46	0.042	0.031	220.97	0.000
47	0.013	0.010	221.57	0.000
48	0.020	0.011	223.01	0.000
49	-0.070	-0.058	240.49	0.000
50	0.005	0.013	240.58	0.000
51	0.045	0.029	247.93	0.000
52	0.008	0.013	248.15	0.000
53	0.013	0.021	248.75	0.000
54	-0.069	-0.073	266.05	0.000
55	0.001	-0.009	266.05	0.000
56	-0.077	-0.074	287.25	0.000
57	0.007	-0.008	287.42	0.000
58	-0.033	-0.053	291.38	0.000
59	0.012	-0.002	291.90	0.000
60	-0.026	-0.034	294.26	0.000
61	0.058	0.049	306.51	0.000
62	0.056	0.031	317.95	0.000
63	-0.001	0.009	317.95	0.000
64	-0.014	0.003	318.68	0.000
65	-0.043	-0.034	325.26	0.000
66	-0.005	-0.000	325.37	0.000
67	0.042	0.054	331.84	0.000
68	0.015	0.015	332.61	0.000
69	0.026	0.023	335.00	0.000
70	-0.030	-0.015	338.32	0.000
71	0.012	0.021	338.89	0.000
72	-0.069	-0.058	355.98	0.000
73	0.036	0.026	360.59	0.000
74	-0.022	-0.009	362.42	0.000
75	0.020	0.013	363.88	0.000
76	0.022	0.027	365.65	0.000
77	0.010	0.000	366.03	0.000
78	-0.031	-0.013	369.49	0.000
79	-0.040	-0.022	375.16	0.000
80	0.024	0.009	377.24	0.000
81	-0.025	-0.021	379.46	0.000
82	0.020	0.004	380.85	0.000
83	-0.024	-0.029	383.00	0.000
84	0.001	-0.024	383.00	0.000
85	0.003	-0.003	383.02	0.000
86	-0.021	-0.043	384.61	0.000
87	0.013	0.020	385.26	0.000
88	-0.008	-0.009	385.50	0.000
89	-0.031	-0.015	389.02	0.000
90	0.011	0.008	389.43	0.000
91	-0.016	-0.023	390.33	0.000
92	0.033	0.015	394.40	0.000
93	-0.041	-0.018	400.55	0.000
94	-0.018	-0.023	401.71	0.000
95	-0.058	-0.042	414.01	0.000
96	0.032	0.020	417.83	0.000