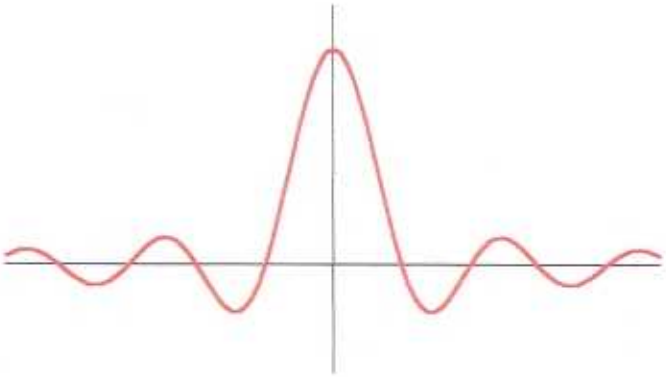
TRAB
ITC 200
B3
v. 2

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIONES

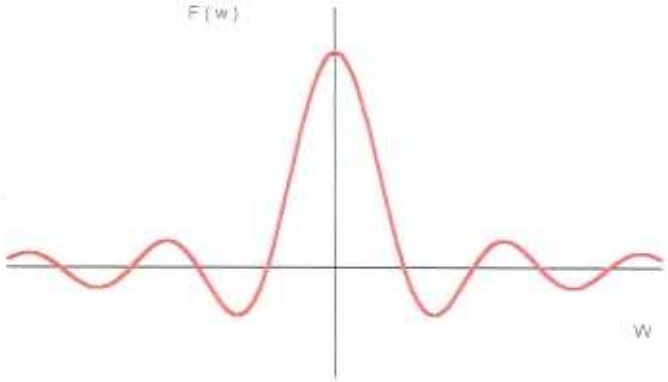
MATEMÀTICAS SUPERIORES PARA INGENIERÍA



Ing. Luis Barroso Alfaro

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIONES

MATEMÀTICAS SUPERIORES PARA INGENIERÍA



Trabajo de ascenso presentado ante la ilustre Universidad Católica Andrés Bello por el ingeniero Luis Barroso Alfaro para optar por la categoría de Profesor Agregado

CAPÍTULO X

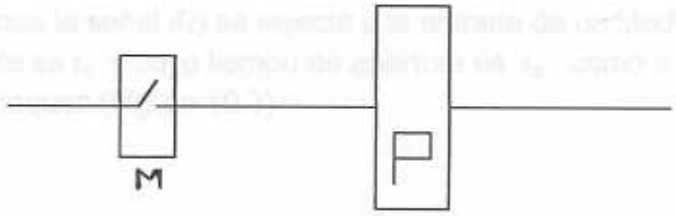
LA TRANSFORMADA Z

10.1) INTRODUCCIÓN

La transformada Z es un procedimiento matemático que consiste en crear una función analítica, a partir de una sucesión (muestras) de números. Obviamente, esta definción implica la existencia de los siguientes dispositivos:

a) Un generador de la sucesión.
b) Una herramienta matemática que genere la función analítica referida, a partir de la sucesión (o muestras) antes mencionada.

El dispositivo que permite crear dichas muestras o sucesión, es el Muestreador, también llamado Modulador (M) o simplemente " *Switch* ".
La herramienta matemática que permite crear la función analítica referida, es una serie de Laurent, cuyos coeficientes son los elementos de la sucesión.
Un ejemplo intuitivo de como obtener y procesar estas muestras, lo ilustra el siguiente diagrama de bloques (Figura 10.1) :



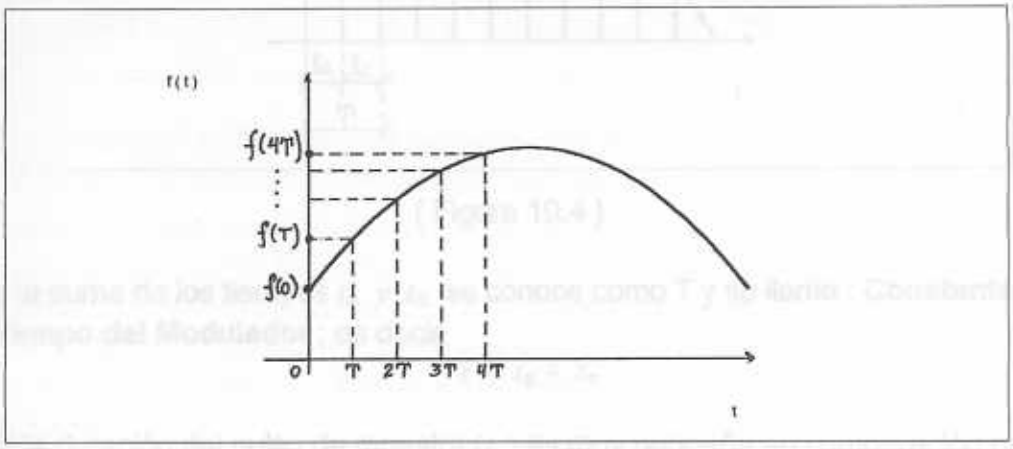
(Fig. 10.1 : Diagrama de bloques)

Este procedimiento se usa frecuentemente en el análisis de muestras de datos. Por ejemplo, supongamos que los valores que toma una señal eléctrica que varía en el tiempo $f(t)$, se registran a intervalos discretos regulares $t = nT$, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $T > 0$. Dichos valores o muestras $f(nT)$, forman una sucesión de números que se introducen en un Procesador (P) que los altera de diversas maneras. Tal procedimiento se conoce como **"Procesamiento digital de señales"** y se emplea con frecuencia en sistemas de radar y de telecomunicaciones.
El resultado que proporciona el computador (P) es la solución de una ecuación en diferencias, en la que intervienen, como el nombre sugiere, las diferencias de los valores de muestra.

Como se ha expuesto, un componente esencial en el diagrama de bloques de aquellos sistemas en los cuales la señal de entrada (función excitación) son

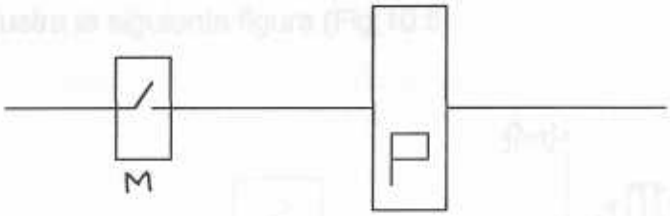
muestras discretas (pulsos) de corta duración, es el **" Modulador "**. Su función es generar la sucesión $f(nT) = f(0), f(T), f(2T), \ldots$, es decir, convertir una señal contínua $f(t)$, en un tren de pulsos $f(nT)$ regularmente espaciados, modulados en amplitud por $f(t)$.

En efecto, consideremos una función $f(t)$, definida para $t \geq 0$, como la que se muestra en la Figura 10.2 que se presenta a continuación:



(Figura 10.2 : Señal de entrada al Modulador)

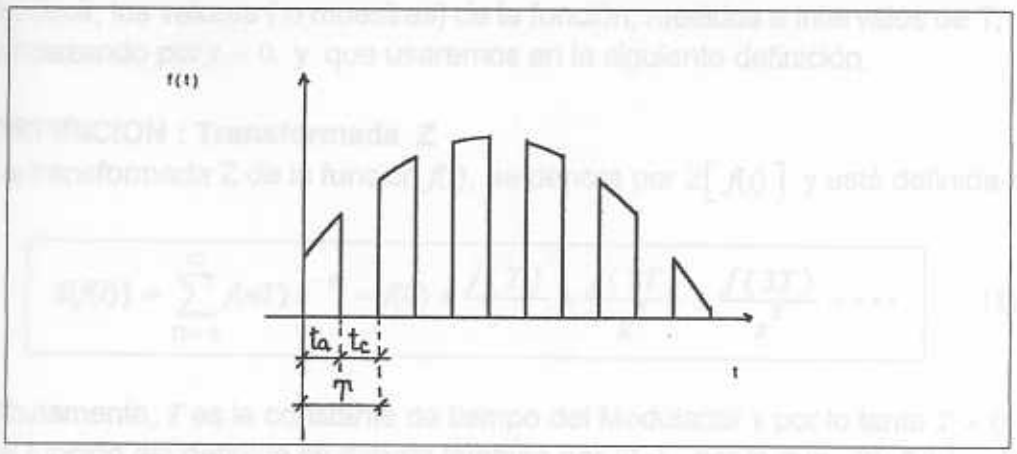
Supongamos que la señal $f(t)$ se inyecta a la entrada de un Modulador (M), cuyo tiempo de cierre es t_c y cuyo tiempo de apertura es t_a , como lo ilustra el siguiente diagrama de bloques (Figura 10.3)



(Fig. 10.3)

El Modulador está representado por un simple interruptor o "*switch*".

Bajo estas condiciones, la salida del Modulador será un tren de pulsos de duración t_a, espaciados un tiempo t_c y cuya amplitud será la determinada por f(t), según se muestra a continuación (Figura 10.4):



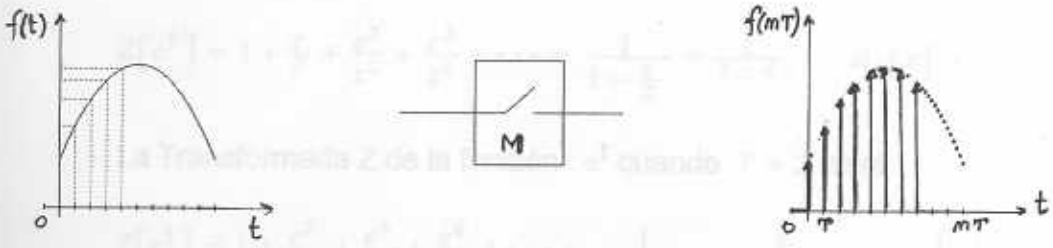
(Figura 10.4)

A la suma de los tiempos t_a y t_c se conoce como T y se llama : **Constante de tiempo del Modulador** ; es decir,

$$T = t_a + t_c$$

Si la duración del pulso de muestra (t_c) es muy pequeña en comparación con el valor del tiempo de apertura t_a ($t_c << t_a$), se puede considerar que la constante de tiempo del sistema del cual el modulador es parte, es : $T = t_a$, con lo que la muestra de salida del modulador, es decir, $f(nT)$, puede ser considerada como una secuencia de impulsos de duración cero, que ocurren en los instantes de muestreo: $0,\ T,\ 2T,\ 3T, \cdots, nT, \cdots$

Evidentemente, la longitud del impulso individual será igual al valor de la función de entrada $f(t)$ en el instante respectivo, $0,\ T,\ 2T,\ 3T, \cdots$, es decir, $f(nT)$ como lo ilustra la siguiente figura (Fig,10.5)



(Señal $f(t)$) (Modulador : M) (Salida: f (nT))

(Figura 10.5)

Por lo tanto, podemos escribir que la salida del modulador M es la sucesión :

$$f(nT) = f(0), f(T), f(2T), \cdots, f(nT), \cdots$$

es decir, los valores (o muestras) de la función, medidos a intervalos de T, empezando por $t = 0$, y que usaremos en la siguiente definición.

10.2) DEFINICIÓN : Transformada Z

La transformada Z de la función $f(t)$, se denota por $Z\left[\, f(t) \,\right]$ y está definida por :

$$\boxed{Z[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n} = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)}{z^3} + \cdots} \qquad (1)$$

Obviamente, T es la constante de tiempo del Modulador y por lo tanto $T > 0$.
La función así definida se denota también por $F(z)$, por lo que : $Z\left[\, f(t) \,\right] = F(z)$.
En general, usaremos letras minúsculas como: f, g, h, etc. para denotar funciones de t, en tanto que las correspondientes mayúsculas. F, G, H,etc., denotarán la transformada Z asociada a estas funciones.
Si la serie de la ecuación (1) converge en un dominio D a la suma $F(z)$, entonces se trata de una serie de Laurent **sin exponentes positivos** en ninguno de sus términos.

10.2.1) Observaciones

1) Obsérvese que $Z\left[\, f(t) \,\right]$ no sólo depende de la variable z, sino también de la constante de tiempo T del Modulador. En efecto :

$$Z[f(t)] = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)}{z^3} + \cdots + \frac{f(nT)}{z^n} + \cdots$$

Ejemplo 1:

La Transformada Z de la función : e^t cuando $T = 1$, será:

$$Z\left[e^t\right] = 1 + \frac{e}{z} + \frac{e^2}{z^2} + \frac{e^3}{z^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{e}{z}} = \frac{z}{z - e}, \qquad si \ \left|\, z \,\right| > e$$

La Transformada Z de la función : e^t cuando $T = 2$, será:

$$Z\left[e^t\right] = 1 + \frac{e^2}{z} + \frac{e^4}{z^2} + \frac{e^6}{z^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{e^2}{z}} = \frac{z}{z - e^2}, \qquad si \ \left|\, z \,\right| > e^2$$

Obviamente, $Z\left[e^t\right]_{T=1} \neq Z\left[e^t\right]_{T=2}$

2) No siempre es posible encontrar una forma cerrada $F(z)$ para la Transformada Z de $f(t)$. Si no se puede, como se ilustra en el ejemplo 2 que se expone a continuación, diremos que $F(z)$ está dada en forma abierta, es decir, por la serie de Laurent que la define.

Ejemplo 2:

$$F(z) = 1 + \frac{3}{z} - \frac{5}{z^3} + \frac{2}{z^5} \quad \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(T) = 3 \\ f(2T) = 0 \\ f(3T) = -5 \\ f(4T) = 0 \\ f(5T = 2 \\ f(nT) = 0, \quad \forall n \geq 6 \end{cases}$$

3) **Instante** $t = 0$

El instante $t = 0$ es el correspondiente al primer cierre del Modulador. por lo tanto, para obtener la transformada Z de una función, no es necesario conocer su valor cuando $t < 0$. Conviene por lo tanto establecer aquí que todas las funciones que emplearemos son nulas para $t < 0$.

Para formalizar esta condición, resulta muy útil definir la función **Escalón Unitario**, conocida tambien como **" Función de Heaviside "** y que definiremos a continuación :

a) Función Escalón Unitario o **" Función de Heaviside "**

Se designa por $U(t)$ y se define por :

$$Heaviside\ (t) = U(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

La gráfica de $U(t)$ se muestra a continuación (Figura 10.6) :

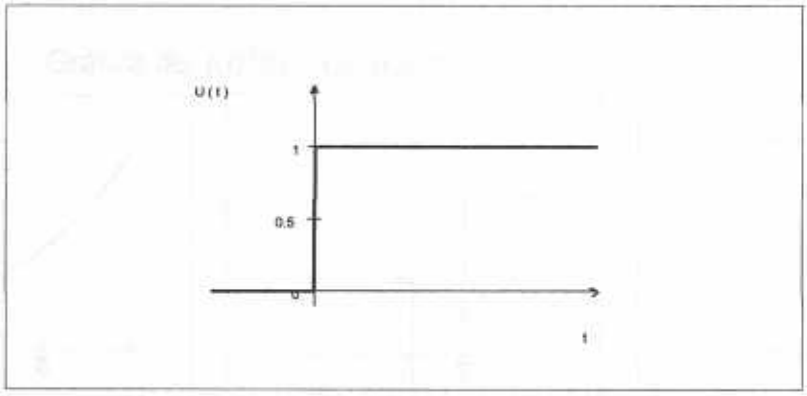


Fig. 10.6 :Función Escalón Unitario : U (t)

También será de gran utilidad, a los fines del anális de señales, el uso de la función : $U(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq \tau \\ 0, & \text{si } t < \tau \end{cases}$

cuya gráfica se muestra en la figura 10.7:

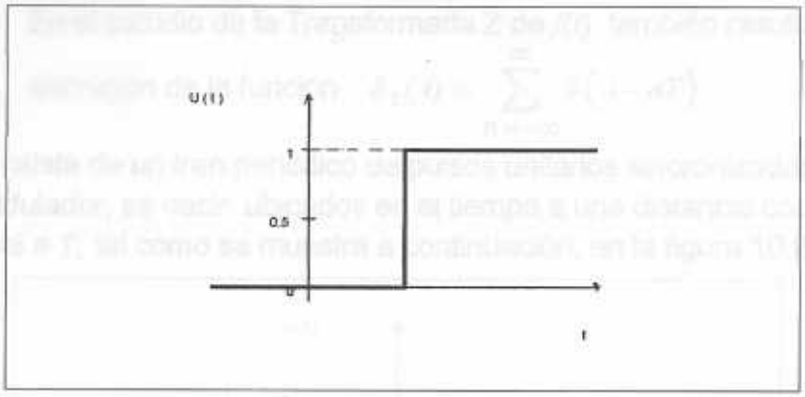
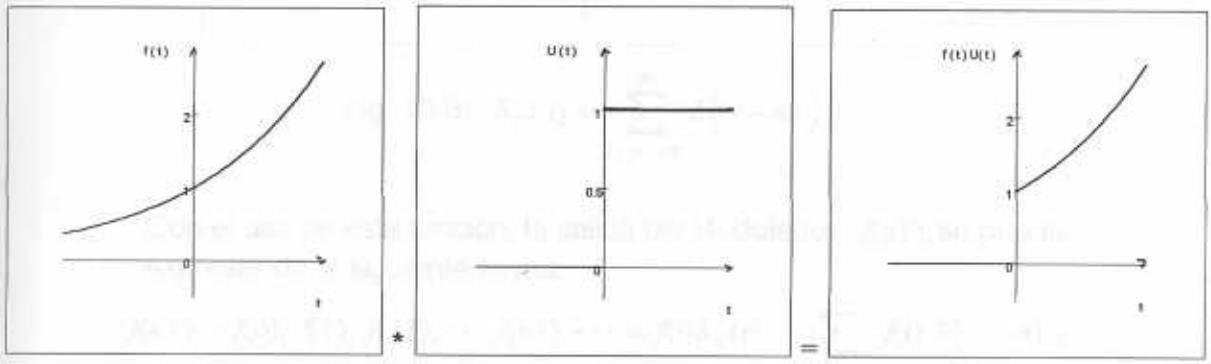


Fig.10.7 : Función : U (t -τ)

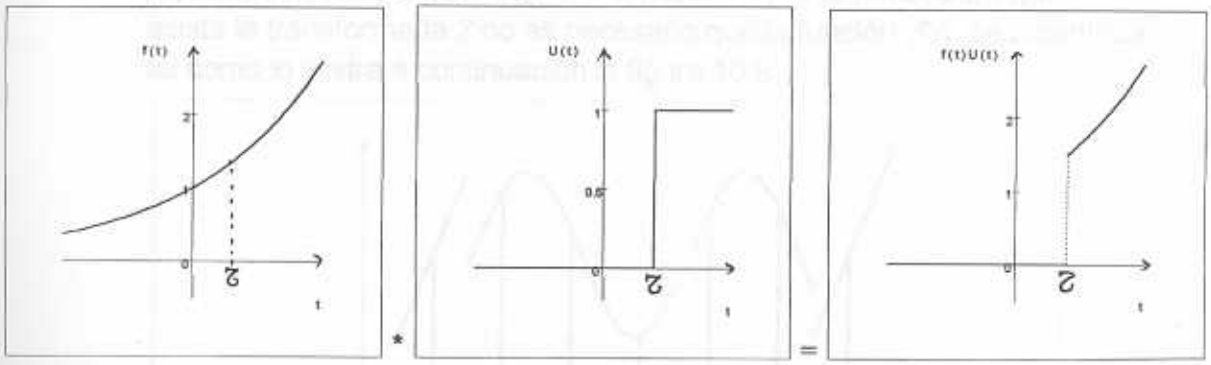
Las siguientes gráficas muestran la utilidad de las dos funciones aquí definidas :

a.1) Gráfica de: $f(t)U(t),\ a > 0$



($f(t)$) Heaviside(t) = $U(t)$ ($f(t)U(t)$)

a.2) Gráfica de: $f(t)U(t-\tau),\ a > 0$



($f(t)$) Heaviside($t-\tau$) = $U(t-\tau)$ ($f(t)U(t)$)

Obsérvese como la función $U(t-\tau)$ suprime la gráfica de $f(t)$ para $t < \tau$.

b) Función $\delta_T(t)$

En el estudio de la Transformada Z de $f(t)$ también resulta útil la definición de la función : $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$.

Consiste de un tren periódico de pulsos unitarios sincronizados con el Modulador, es decir, ubicados en el tiempo a una distancia constante e igual a T, tal como se muestra a continuación, en la figura 10.8:

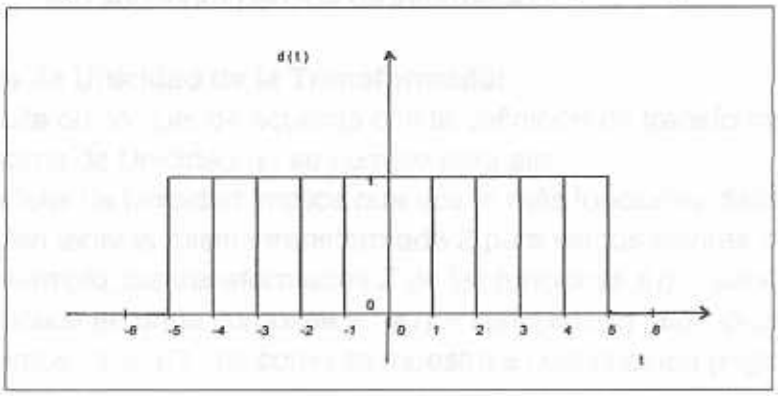


Fig. 10.8 : $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$

Con el uso de esta función, la salida del Modulador, $f(nT)$, se puede expresar de la siguiente forma:

$$f(nT) = f(0), f(T), f(2T), \cdots, f(nT), \cdots = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-nT)$$

4) Acerca de la continuidad de $f(t)$:

Nótese así mismo que, para efectuar la transformada Z, basta con que $f(t)$ esté definida para $t = nT$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. Por lo tanto, para que exista la transformada Z no es necesario que la función $f(t)$ sea contínua, tal como lo ilustra a continuación la figura 10.9

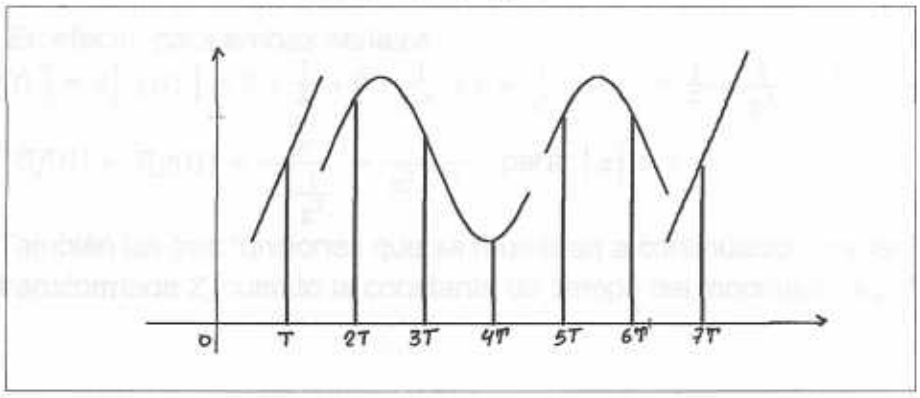


Fig. 10.9

La transformada consiste en corvertir una sucesión de números:

$$C_n = f(nT), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

en una función de z por medio de la serie:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{-n} \quad , \quad C_n = f(nT), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

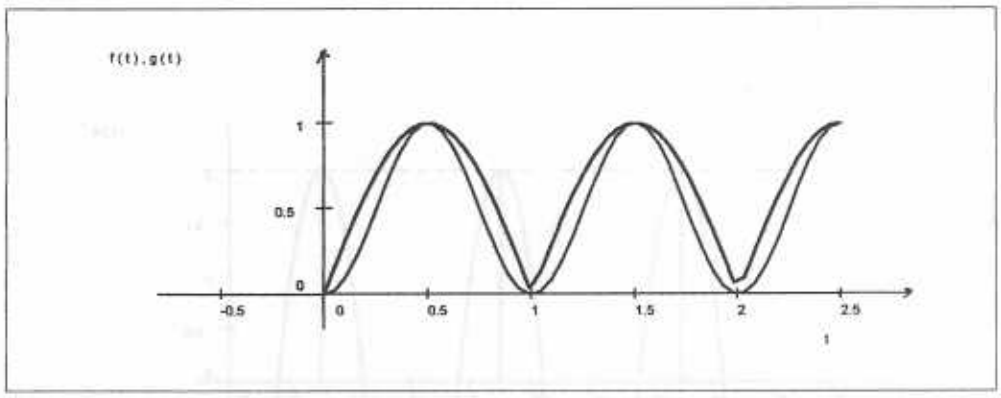
NOTA: Obviamente. si $f(nT)$ no está definida para algún valor de n, ello supondrá pérdida de información.

5) Falta de Unicidad de la Transformada:

Resulta obvio que, de acuerdo con la definición de transformda Z, el Teorema de Unicidad no se cumple para ella.

Esta falta de Unicidad implica que dos o más funciones distintas de t, pueden tener la misma transformada Z para ciertos valores de T.

Por ejemplo, las transformadas Z de las funciones $f(t) = \text{sen}(\pi t)U(t)$ rectificada en onda completa y $g(t) = \text{sen}^2(\pi t)U(t)$, son iguales si tomamos $T = 1/2$, tal como se muestra a continuación (Figura 10.10):



$f(t) = sen(\pi t)U(t)$ rectificada en onda completa ; $g(t) = sen^2(\pi t)U(t)$

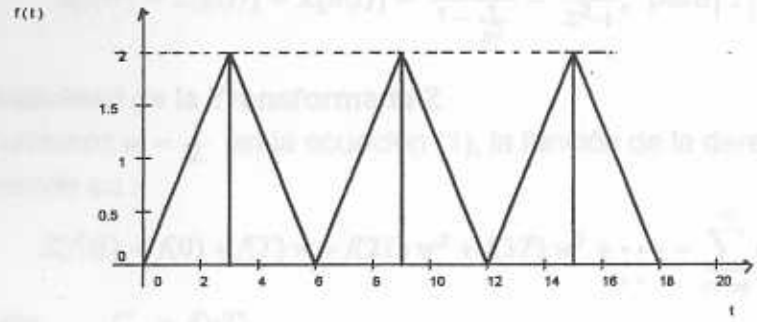
(Fig. 10.10)

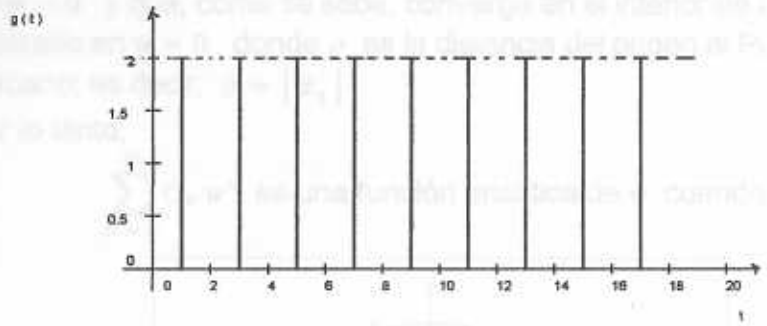
En efecto, para ambas señales:

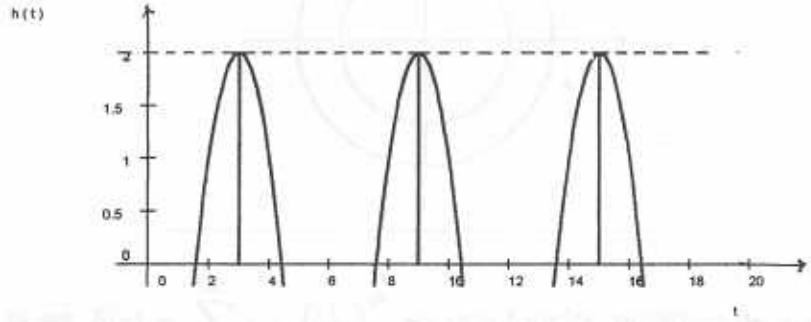
$$Z\left[\, f(t) \,\right] = Z\left[\, g(t) \,\right] = 0 + \frac{1}{z} + 0 + \frac{1}{z^3} + 0 + \frac{1}{z^5} + \cdots = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \cdots \Rightarrow$$

$$Z[f(t)] = Z[g(t)] = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z^2}} = \frac{z}{z^2 - 1}, \text{ para} : |\, z \,| > 1$$

También las tres funciones que se muestran a continuación, tienen la misma transformada Z, cuando la constante de tiempo del modulador es $T = 3$.







Esta falta de unicidad de la transformada Z no representa un impedimento ya que usaremos la transformada Z para resolver problemas en que sólo se requiere el valor de $f(t)$ para $t = nT$.

Para los ejemplos aquí expuestos se verifica que :

$$f(0) = 0;\ f(T) = 1;\ f(2T) = 0;\ f(3T) = 1, \ldots\ldots, f(nT) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, 2, 4, \cdots \\ 1, & \text{si } n = 1, 3, 5, \cdots \end{cases}$$

Por lo tanto ,

$$Z\left[\, f(t) \,\right] = Z\left[\, g(t) \,\right] = Z\left[\, h(t) \,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \cdots + \frac{1}{z^{2n+1}} + \cdots$$

De donde:

$$Z[f(t)] = Z[g(t)] = Z[h(t)] = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{z}{z^2-1}, \text{ para} \left| z \right| > 1$$

7) Analiticidad de la Transformada Z

Si hacemos $w = \frac{1}{z}$ en la ecuación (1), la función de la derecha se convierte en :

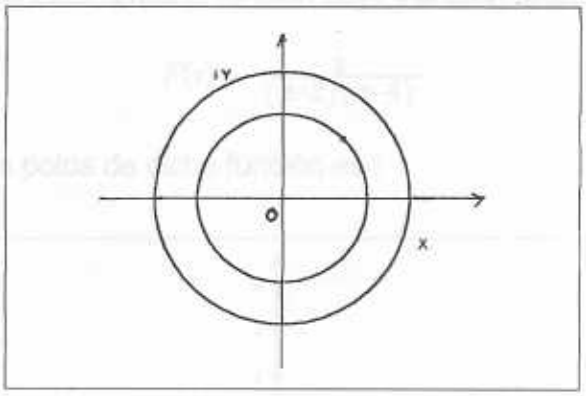
$$Z[f(t)] = f(0) + f(T)\, w + f(2T)\, w^2 + f(3T)\, w^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, w^n,$$

donde: $C_n = f(nT)$

Esta función de w es una serie de potencias (o serie de Taylor) alrededor de $w = 0$ y que, como se sabe, converge en el interior de un círculo de radio ρ centrado en $w = 0$, donde ρ es la distancia del origen al Punto singular más cercano; es decir, $\rho = \left| z_1 \right|$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\, w^n \text{ es una función analítica de } w \text{ cuando } \left| w \right| < \rho.$$



Así pues, $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$ es una función analítica de z cuando

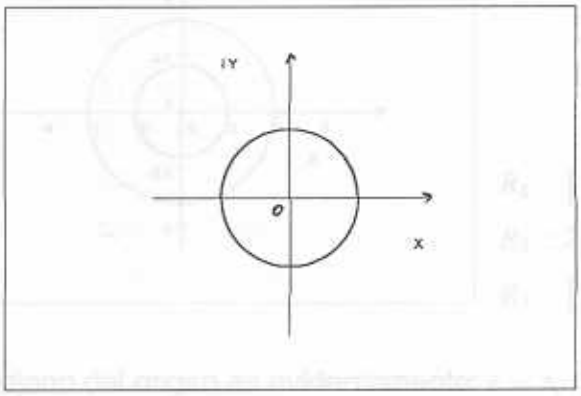
$$\left| \frac{1}{z} \right| < \rho, \quad \text{es decir, cuando:} \quad \left| z \right| > \frac{1}{\rho}$$

Por lo tanto, $F(z)$, transformada Z de $f(t)$, es una función definida por una serie de Laurent que es analítica en un dominio anular de radio exterior infinito en el plano z. El radio interior será el correspondiente a la singularidad de $F(z)$ más lejana del origen; si designamos por $\left| z_k \right|$ a dicho radio interior, la región de analiticidad de la Transformada Z será:

$$\left| z \right| > \left| z_k \right|$$

Lo que, evidentemente, representa el área del plano complejo exterior a la

circunferencia centrada en el origen y de radio $|z_k|$, tal como se ilustra a continuación (Figura 10.11)



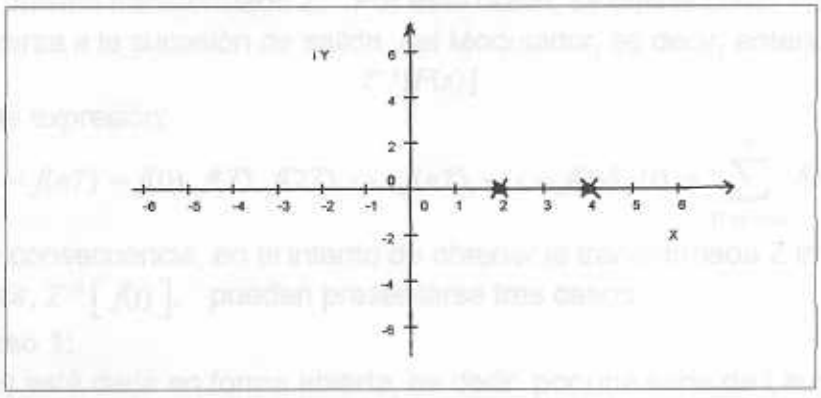
Región de Convergencia : $|z| > |z_k|$

El siguiente ejemplo ilustra lo aquí expuesto :

Ejemplo 3: Consideremos la función cuya transformada Z está dada por :

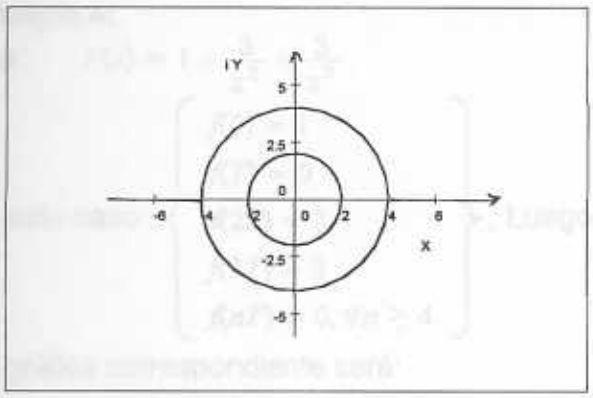
$$F(z) = \frac{z}{(z-2)(z-4)}$$

El diagrama de polos de dicha función es :



Ubicación de Polos de F(z))

Las posibles regiones de Laurent alrededor del origen (para que $F(z)$ pueda representar una Transformada Z), son :



$R_1 : |z| < 2$

$R_2 : 2 < |z| < 4$

$R_3 : |z| > 4$

El polo más lejano del origen es evidentemente: $z = 4$, por lo que, la región de analiticidad de la transformada Z será : $|z| > 4$, pues sólo ella garantiza las dos condiciones implícitas en la definición de dicha transformada y que explicitamos a continuación:

* Función analítica creada a partir de la sucesión.
* Serie de Laurent de potencias exclusivamente negativas.

8) Transformada Z Inversa : $Z^{-1}\left[\, F(z) \,\right]$

Estrictamente hablando, la falta de Unicidad de la Transformada Z, implica que no es posible obtener $f(t)$ a partir de la transformada $F(z)$. Como hemos señalado, dos o más funciones distintas de t pueden tener la misma transformada Z. Por esta razón, se define como Transformada Z Inversa a la sucesiòn de salida del Modulador, es decir, entenderemos por

$$Z^{-1}[F(z)]$$

a la expresión:

$$Z^{-1}[F(z)] = f(nT) = f(0),\, f(T),\, f(2T), \cdots, f(nT), \cdots = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta\left(\, t - nT\right)$$

En consecuencia, en el intento de obtener la transformada Z Inversa, es decir, $Z^{-1}\left[\, f(t) \,\right]$, pueden presentarse tres casos:

Caso 1:

$F(z)$ está dada en forma abierta, es decir, por una serie de Laurent :

$$F(z) = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)}{z^3} + \cdots \qquad \text{I}$$

En este caso, el lado derecho de esta ecuación permite siempre, por simple inspección, extraer los coeficientes de las potencias negativas de z y obtener así :

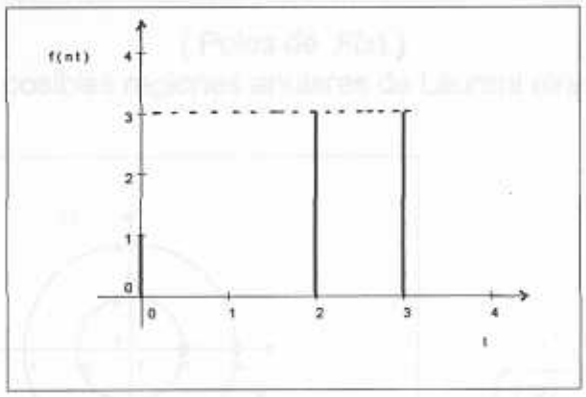
$$Z^{-1}\left[\, f(t) \,\right] = f(nT) = f^*(t) = f(0),\, f(T),\, f(2T),\, f(3T),\, \cdots = \text{ salida del Modulador}$$

Ejemplo 4:

Sea : $F(z) = 1 + \frac{3}{z^2} + \frac{3}{z^3}$

En este caso : $\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(T) = 0 \\ f(2T) = 3 \\ f(3T) = 3 \\ f(nT) = 0, \forall n \geq 4 \end{array} \right\}$, Luego : $Z^{-1}\left[f(t) \right] = 1, 0, 3, 3$

La gráfica correspondiente será:



Caso 2:

Si $F(z)$ se expresa por una forma cerrada, el procedimiento consiste en obtener un desarrollo de Laurent válido en un dominio anular centrado en el origen. El radio exterior de dicho dominio anular debe ser infinito, es decir, el dominio será de la forma $|z| > R$, donde R será la distancia medida desde el origen hasta el punto singular más lejano, de $F(z)$.
Una vez obtenido este desarrollo, se aplica lo dicho en el Caso 1.

Ejemplo 5:

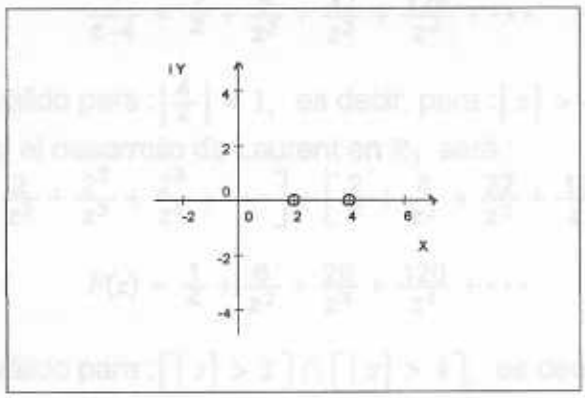
Dado $F(z) = \frac{z}{z^2 - 6z + 8}$, obtener $Z^{-1}[F(z)]$

Solución:

Descomponiendo en fracciones simples, se obtiene :

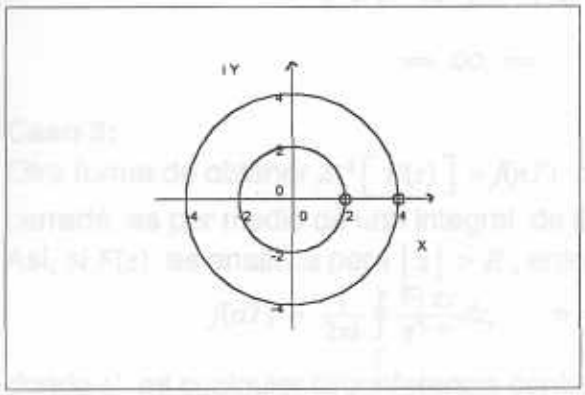
$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 6z + 8} = \frac{z}{(z-2)(z-4)} = -\frac{1}{z-2} + \frac{2}{z-4}$$

Los polos de $F(z)$ son : $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 2 \\ z_2 = 4 \end{array} \right\}$, cuya ubicación en el plano es :



(Polos de $F(z)$)

Luego , las posibles regiones anulares de Laurent alrededor de $z = 0$, son:



$$\begin{cases} R_1 : \ |z| < 2 \\ R_2 : \ 2 < |z| < 4 \\ R_3 : \ |z| > 4 \end{cases}$$

Regiones de Laurent)

Por lo anteriormente expuesto, la única de estas regiones que garantiza una serie de Laurent de Potencias exclusivamente negativas, y que dicha serie sea analítica en la región de convergencia, características estas fundamentales de toda Transformada Z, es la región R_3.

En efecto, el desarrollo de Laurent de $F(z)$ en R_3, será:

Primera fracción:(Potencias negativas)

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left[1 + \left(\frac{2}{z}\right) + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \left(\frac{2}{z}\right)^4 + \cdots\right] \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2^3}{z^4} + \cdots$$

desarrollo válido para : $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, es decir, para : $|z| > 2$

Segunda fracción:(Potencias negativas)

$$\frac{2}{z-4} = \frac{2}{z\left(1-\frac{4}{z}\right)} = \frac{2}{z}\left[1 + \left(\frac{4}{z}\right) + \left(\frac{4}{z}\right)^2 + \left(\frac{4}{z}\right)^3 + \left(\frac{4}{z}\right)^4 + \cdots\right] \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2}{z-4} = \frac{2}{z} + \frac{8}{z^2} + \frac{32}{z^3} + \frac{128}{z^4} + \cdots$$

desarrollo válido para : $\left|\frac{4}{z}\right| < 1$, es decir, para : $|z| > 4$

Por lo tanto, el desarrollo de Laurent en R_3 será :

$$F(z) = -\left[\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \frac{2^3}{z^4} + \cdots\right] + \left[\frac{2}{z} + \frac{8}{z^2} + \frac{32}{z^3} + \frac{128}{z^4} + \cdots\right] \quad \Rightarrow$$

$$F(z) = \frac{1}{z} + \frac{6}{z^2} + \frac{28}{z^3} + \frac{120}{z^4} + \cdots$$

desarrollo válido para : $[\,|z| > 2\,] \cap [\,|z| > 4\,]$, es decir, para : $|z| > 4$

Luego, aplicando ahora lo expuesto para el **Caso 2)**, se obtiene :

$f(0) = 0; \quad ;f(t) = 1; \quad f(2T) = 6; \quad f(3T) = 28; \quad f(4T) = 120, \cdots$

Por lo tanto :

$$Z^{-1}[F(z] = f(nt) = 0, 1, 6, 28, 120, \cdots$$

= oo =

Caso 3:

Otra forma de obtener $Z^{-1}[\,F(z)\,] = f(nT)$ cuando $F(z)$ está dada en forma cerrada, es por medio de una integral de línea.

Así, si $F(z)$ es analítica para $|z| > R$, entonces:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(z)}{z^{1-n}}dz, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

donde C es cualquier circunferencia centrada en el origen y de radio superior a R.

Para evaluar esta integral, podemos utilizar cualquiera de las técnicas ya conocidas, como son:

a) La Fórmula Integral de Cauchy y cualquiera de sus consecuencias.
b) El Teorema del Resíduo.

10.3) RELACIÓN ENTRE TRANSFORMADA Z Y TRANSFORMADA DE LAPLACE

Tal como ya se señaló, la salida del Modulador está dada por :

$$f^*(t) = f(nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\,\delta(t - nT)$$

Tomando transformada de Laplace de la función de salida $f^*(t)$, tenemos:

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(s) = \mathcal{L}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(t)\delta(t - nT)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\, e^{-nTs} \qquad \ldots(1)$$

Dado que la variable s aparece en esta expresión sólamente en el factor exponencial, es necesario introducir un nuevo símbolo: $z = e^{Ts}$, con lo cual, la ecuación (1) se transforma en :

$$\mathcal{L}\left[f^*(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\, z^{-n} = Z\left[f^*(t)\right]$$

En consecuencia,

$$F(z) = Z\left[f^*(t)\right] = \mathcal{L}\left[f^*(t)\right]_{s=\frac{\ln z}{T}}$$

$$= \text{oo} =$$

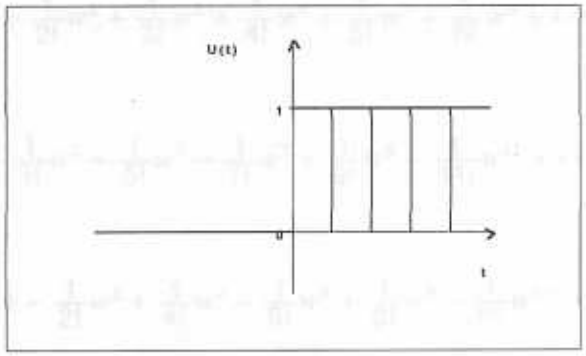
10.4) CÁLCULO DE TRANSFORMADAS Z

Se presentan a continuación el cálculo de la transformada Z de varias funciones, a partir de su definición.

Ejemplo 6

Determine la transformada Z de la función Escalón Unitario

Solución:



Heaviside$(t) = U(t)$

Es obvio que: $U(nT) = 1, \quad \forall n = 0, 1, 2, \cdots$

Luego, aplicando la definición de transformada Z, tenemos:

$$Z\left[\, U(t)\,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} U(nT)\, z^{-n} = U(0) + \frac{U(T)}{z} + \frac{U(2T)}{z^2} + \frac{U(3T)}{z^3} + \cdots$$

Por lo tanto:

$$Z\left[\, U(t)\,\right] = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

A objeto de obtener una forma cerrada de esta expresión, recordemos que:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots, \qquad si \ \left|\, u \,\right| < 1$$

Luego, haciendo: $u = \frac{1}{z}$, se obtiene:

$$1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

expresión que es válida para : $\left|\, \frac{1}{z} \,\right| < 1$, es decir, para: $\left|\, z \,\right| > 1$.

Así pues:

$$\boxed{Z\left[\, U(t)\,\right] = \frac{z}{z-1}}\ , \qquad \left|\, z \,\right| > 1.$$

En este caso, se ha tenido la suerte de obtener una expresión cerrada para expresar la transformada Z.

NOTA:

Por considerarlo de interés, dado su frecuente uso futuro, se resumen a continuación algunas series de Maclaurin de algunas funciones especiales:

a) $\frac{1}{1-z} = 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 + w^7 + w^8 + w^9 + w^{10} + w^{11} + \cdots$

b) $\frac{1}{1+w} = \frac{1}{1-w}\Big|_{w=-w} = 1 - w + w^2 - w^3 + w^4 - w^5 + w^6 - w^7 + w^8 - w^9 + \cdots$

c) $\frac{1}{(1-w)^2} = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + 5w^4 + 6w^5 + 7w^6 + 8w^7 + 9w^8 + 10w^9 + \cdots$

d) $\frac{1}{(1+w)^2} = 1 - 2w + 3w^2 - 4w^3 + 5w^4 - 6w^5 + 7w^6 - \cdots \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n(w)^n$

e) $e^w = 1 + w + \frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{3!}w^3 + \frac{1}{4!}w^4 + \frac{1}{5!}w^5 + \frac{1}{6!}w^6 + \cdots \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$

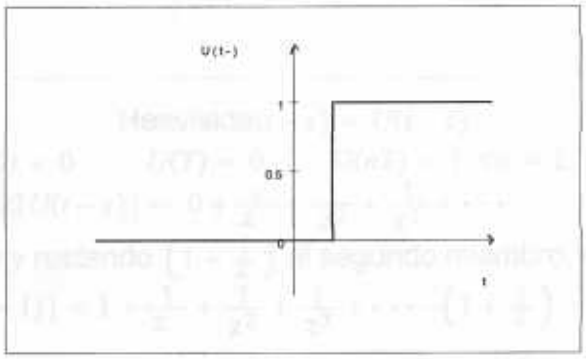
f) $\operatorname{sen} w = w - \frac{1}{3!}w^3 + \frac{1}{5!}w^5 - \frac{1}{7!}w^7 + \frac{1}{9!}w^9 - \frac{1}{11!}w^{11} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n-1}}{(2n-1)!}$

g) $\cos w = = 1 - \frac{1}{2!}w^2 + \frac{1}{4!}w^4 - \frac{1}{6!}w^6 + \frac{1}{8!}w^8 - \frac{1}{10!}w^{10} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n)!}$

Ejemplo 7

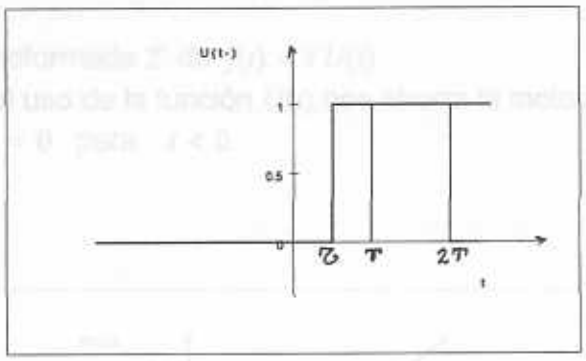
Determine $Z[U(t-\tau)]$, siendo T la constante del modulador.

Solución:



Heaviside$(t-\tau) = U(t-\tau)$

Caso 1: $T \geq \tau$ (En la gráfica se ha supuesto $T > \tau$)



$$\text{Heaviside}(t-\tau) = U(t-\tau)$$

En este caso: $U(0) = 0$; $\quad U(nT) = 1, \forall n = 1, 2, 3, \cdots$

Por lo tanto : $\quad Z\left[\, U(t-1)\,\right] =: 0 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$

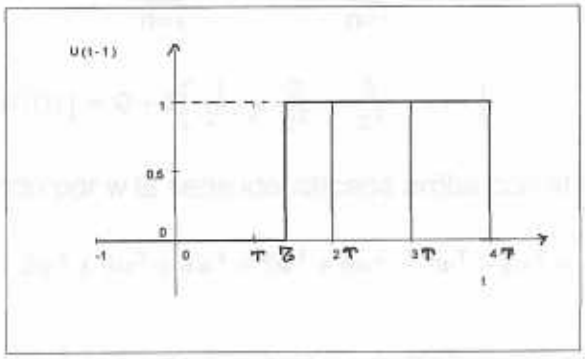
Luego, sumando y restando 1 al segundo miembro, se obtiene :

$$Z\left[\, U(t-1)\,\right] = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + (-1) = \frac{z}{z-1} - 1 = \frac{1}{z-1}$$

Es decir:

$$\boxed{Z\left[\, U(t-\tau)\,\right] = \frac{1}{z-1}} \qquad T > \tau,\ |z| > 1$$

Caso 2: $T < \tau$ (En la gráfica se ha supuesto $T < \tau < 2T$)



$$\text{Heaviside}(t-\tau) = U(t-\tau)$$

En este caso: $U(0) = 0$; $\quad U(T) = 0$; $\quad U(nT) = 1, \forall n = 2, 3, 4, \cdots$

Por lo tanto : $\quad Z[U(t-\tau)] =: 0 + \frac{0}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$

Luego, sumando y restando $\left(1 + \frac{1}{z}\right)$ al segundo miembro, se obtiene :

$$Z[U(t-1)] = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots - \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{z}{z-1} - \left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

Es decir:

$$\boxed{Z[U(t-\tau)] = \frac{1}{z(z-1)}} \qquad T < \tau < 2T,\ |z| > 1$$

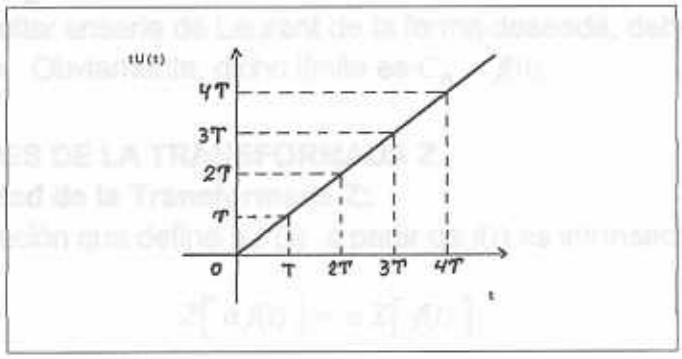
= oo =

Ejemplo 8

Determine la transformada Z de $f(t) = t\,U(t)$

Obsérvese que el uso de la función $U(t)$ nos ahorra la molestia de tener que escribir : $f(t) = 0$ para $t < 0$.

Solución:



$$f(t) = tU(t)$$

En este caso : $\quad f(nT) = nT \qquad ,\forall n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Por lo tanto : $\quad Z[tU(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (nT)\, z^{-n} \quad \Rightarrow$

$$Z[tU(t)] = 0 + T\left[\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \cdots\right] \quad \ldots\ldots(1)$$

Luego, multipicando por w la serie identificada arriba con el literal c), se obtiene:

$$\frac{w}{(1-w)^2} = w + 2w^2 + 3w^3 + 4w^4 + 5w^5 + 6w^6 + 7w^7 + 8w^8 + \cdots, \qquad |w| < 1$$

Si sustituímos w por $\frac{1}{z}$ en esta expresión y multiplicamos ambos lados por T, obtenemos:

$$\frac{T\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2} = T\left[\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \frac{5}{z^5} + \cdots\right], \qquad |z| > 1$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (1) arriba indicada, se obtiene:

$$Z[\,tU(t)\,] = \frac{T\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2} = \frac{zT}{(z-1)^2}$$

Es decir:

$$\boxed{Z[\,tU(t)\,] = \frac{zT}{(z-1)^2}} \qquad |z| > 1$$

10.5) CONDICIÓN PARA LA EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA Z INVERSA

Una función $F(z)$ no posee necesariamente una transformada Z inversa. Si $F(z)$ no se puede desarrollar en serie de Laurent de la forma : $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{-n}$, no es posible efectuar la transformada inversa.

Funciones tales como : $\frac{z^3-1}{z}$, sen z, etc., no tienen transformada inversa. Nótese que ninguna de ellas posee límite cuando $z \to \infty$. Una función que se pueda desarrollar enserie de Laurent de la forma deseada, debe tener límite cuando $z \to \infty$. Obviamente, dicho límite es $C_0 = f(0)$.

10.6) PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z

a) Linealidad de la Transformada Z:

La operación que define a $F(z)$ a partir de $f(t)$ es intrínsecamente lineal, es decir :

$$Z\left[\, a f(t) \,\right] = a\, Z\left[\, f(t) \,\right]$$

donde a es una constante cualquiera.

Además, si $f(t)$ y $g(t)$ están definidas para $t = nT,\ n = 0, 1, 2, \cdots$ entonces:

$$\boxed{Z\left[\, a f(t) + b\, g(t) \,\right] = a\, Z\left[\, f(t) \,\right] + b\, Z\left[\, g(t) \,\right] = a\, F(z) + b\, G(z)}$$

A objeto de ilustrar este resultado, podemos combinar los resultados de los ejemplos 1 y 3 inmediatos anteriores para obtener :

$$Z\left[(1+3t)\, U(t)\right] = Z\left[\, U(t) \,\right] + 3Z\left[\, tU(t) \,\right] = \frac{z}{z-1} + 3\frac{zT}{(z-1)^2}$$

Obviamente, $Z\left[(1+3t)\, U(t)\right]$ también puede obtenerse por definición:

En efecto, $Z\left[(1+3t)\, U(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (1+3nT) U(nT)\, z^{-n} \Rightarrow$

$$Z\left[(1+3t)\, U(t)\right] = 1 + \frac{(1+3T)}{z} + \frac{(1+6T)}{z^2} + \frac{(1+9T)}{z^3} + \cdots \Rightarrow$$

$$Z\left[(1+3t)\, U(t)\right] = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots + 3T\left[\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \cdots\right] \Rightarrow$$

$$Z\left[(1+3t)\, U(t)\right] = \frac{z}{z-1} + 3\frac{zT}{(z-1)^2} = \frac{z(z+3T-1)}{(z-1)^2}$$

tal como se obtuvo anteriormente.

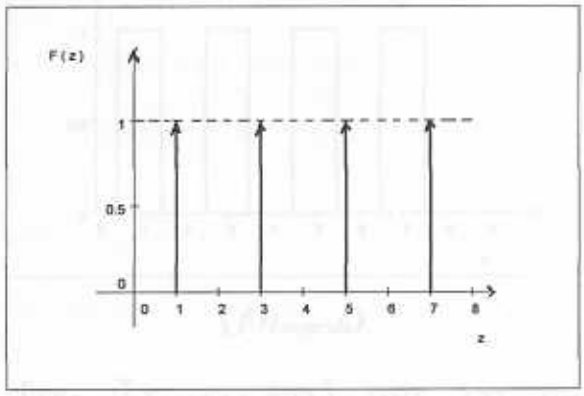
b) Linealidad de la Transformada Z Inversa:

Por razonamiento análogo podemos concluir que la transformada Z inversa es también lineal ; por lo tanto:

$$Z^{-1}\left[a\, F(z) + bG(z)\right] = a\, Z^{-1}\left[\, F(z) \,\right] + bZ^{-1}\left[\, G(z) \,\right] = a\, f(nT) + b\, g(nT)$$

Sin embargo, dada la falta de unicidad de la transformada Z , existen en

consecuencia infinitas soluciones para la transformada Z inversa.
Por ejemplo, para el caso:
$f(nT) = 0,1,0,1,0,1,\cdots$, cuya gráfica se muestra a continuación:

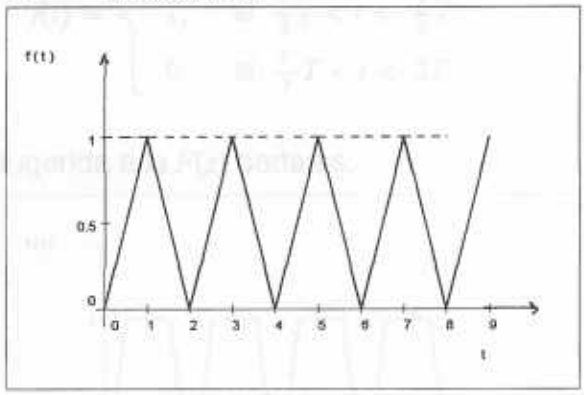


$(F(z))$

se pueden presentar, entro otras, las siguientes soluciones :

Solución 1:

Una solución sugerida $[f(t)_{sugerida}]$ podría ser:



$(f(t)_{sugerida})$

cuya ecuación puede expresarse por:

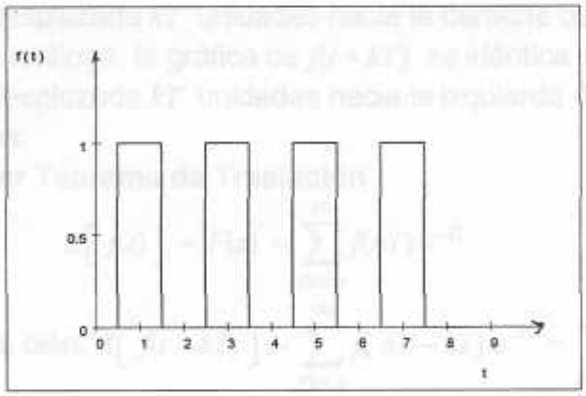
$$f(t) = t[U(t) - U(t-T)] + (-t+2T)[U(t-T) - U(t-2T)] +$$
$$+ (t-2T)[U(t-2T) - U(t-3T)] + (-t-4T)[U(t-3T) - U(t-4T)] + \cdots$$

Evidentemente, se trata de una función periódica, de período $2T$,cuya definición en un período es :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{T}t, & \text{si } 0 \le t \le T \\ -\frac{1}{T}t + 2, & \text{si } T \le t \le 2T \end{cases}$$

Solución 2:

Otra solución sugerida a la $F(z)$ dada es:



$(f(t)_{sugerida})$

En este caso :

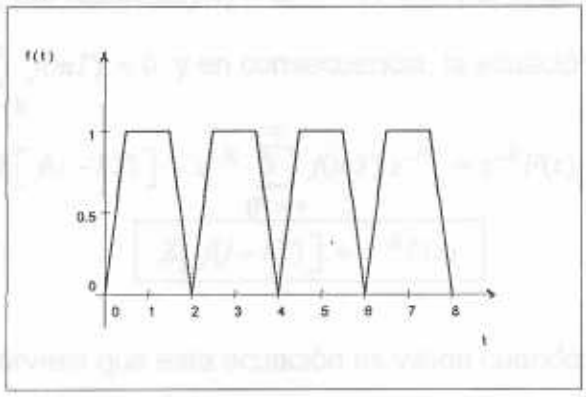
$$f(t)_{sugerida} = \left[U(t-\tfrac{T}{2}) - U(t+\tfrac{3}{2}T)\right] + [U(t-\tfrac{5}{2}T) - U(t-\tfrac{7}{2}T)] + \cdots$$

Evidentemente, se trata también de una función periódica , de período $P = 2T$, cuya definición en un período es :

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2}T \\ 1, & \text{si } \frac{1}{2}T < t < \frac{3}{2}T \\ 0, & \text{si } \frac{3}{2}T < t < 2T \end{cases}$$

Solución 3:

Otra solución sugerida a la $F(z)$ dada es:



$(f(t)_{sugerida})$

Así pueden obtenerse infinitas soluciones para la función $f(t)_{sugerida}$.

c) **Propiedad de Traslación**

La Transformada Z tiene dos propiedades conocidas como propiedades de traslación, que resultan útiles en la resolución de ecuaciones en diferencia. Estas propiedades nos permiten determinar:

$$Z\left[\, f(t \pm kT) \,\right]$$

donde k es entero, conociendo $Z\left[\, f(t) \,\right]$.

En efecto cuando $k \geq 0$, la gráfica de $f(t-kT)$ es idéntica a la de $f(t)$

pero está desplazada kT unidades hacia la derecha de la de $f(t)$.
De manera análoga, la gráfica de $f(t+kT)$ es idéntica a la de $f(t)$ pero está desplazada kT unidades hacia la izquierda de la de $f(t)$.
Así tenemos:

a) Primer Teorema de Traslación

Sea $\quad Z\left[f(t)\right] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n}$

Ahora bién, $Z\left[f(t-kT)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT-kT)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f\left[T(n-k)\right] z^{-n}$

Recordemos que $f(t) = 0$ si $t < 0$, por lo que:
$f\left[T(n-k)\right] = 0$ cuando $T(n-k) < 0$, es decir, cuando $n < k$
Si ahora cambiamos los índices de la sumatoria, haciendo $n-k = m$, podemos por lo tanto escribir:

$$Z\left[f(t-kT)\right] = \sum_{m+k=0}^{\infty} f(mT)\, z^{-(m+k)}$$

Pero el menor valor de n es cero, por lo tanto, el primer valor de m es : $m = -k$, por lo que la sumatoria anterior se puede escribir:

$$Z[f(t-kT)] = \sum_{m=-k}^{\infty} f(mT)\, z^{-(m+k)} \qquad \ldots(1)$$

Pero, por hipótesis $f(t) = 0, \quad \forall t < 0$, por lo tanto:

$\sum_{m=-k}^{0} f(mT) = 0$ y en consecuencia, la ecuación (1) se reduce a:

$$Z\left[f(t-kT)\right] = z^{-k} \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\, z^{-m} = z^{-k}F(z)$$

$$\boxed{Z\left[f(t-kT)\right] = z^{-k}F(z)}$$

Obsérvese que esta ecuación es válida cuando: $\begin{cases} Z[f(t)] = F(z) \\ k \geq 0 \\ f(t) = 0, \text{ si } t < 0 \end{cases}$

b) Segundo Teorema de Traslación

Sea : $\quad Z\left[f(t)\right] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n}$

Consideremos ahora :

$$Z\left[f(t+kT)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT+kT)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f\left[T(n+k)\right] z^{-n}$$

Caso 1: Consideremos el caso $k = 1$

En este caso, $Z\left[\, f(t+T)\,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(\,nT+T)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f\left[\, T(n+1)\,\right] z^{-n}$

de donde:

$$Z[f(t+T)] = f(T) + \frac{f(2T)}{z} + \frac{f(3T)}{z^2} + \frac{f(4T)}{z^3} + \cdots$$

Sumando y restando : $z\,f(0)$ a esta última serie, tenemos:

$$Z[f(t+T)] = \left[zf(0) + f(T) + \frac{f(2T)}{z} + \frac{f(3T)}{z^2} + \frac{f(4T)}{z^3} + \cdots \right] - zf(0)$$

La expresión que aparece entre corchetes es igual a : $z\,F(z)$, luego,

Para $k = 1$: $\quad Z[f(t+T)] = z\,F(z) - zf(0) \quad \Rightarrow$

$$\boxed{Z\left[\, f(t+T)\,\right] = z\left[\, F(z) - f(0)\,\right]}$$

Caso 2: Consideremos el caso $k = 2$

En este caso, $Z[f(t+2T)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(\,nT+2T)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f\left[\, T(n+2)\,\right]$

de donde:

$$Z[f(t+2T)] = f(2T) + \frac{f(3T)}{z} + \frac{f(4T)}{z^2} + \frac{f(5T)}{z^3} + \cdots$$

Sumando y restando : $z^2 f(0) + zf(T)$ a esta última serie, tenemos:

$$Z\left[\, f(t+T)\,\right] = \left[z^2 f(0) + zf(T) + f(2T) + \frac{f(3T)}{z} + \frac{f(4T)}{z^2} + \frac{f(5T)}{z^3} + \cdots \right] - z^2 f(0) - zf(T)$$

La expresión que aparece entre corchetes es igual a : $z^2\,F(z)$, por lo tanto,

Para $k = 2$: $\quad \boxed{Z\left[\, f(t+2T)\,\right] = z^2\left[\, F(z) - f(0)\,\right] - zf(T)}$

En forma análoga, para $k = 3$ se obtiene :

$$Z\left[\, f(t+3T)\,\right] = z^3\,[F(z) - f(0)] - z^2 f(T) - zf(2T)$$

Generalizando para cualquier $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$, se obtiene:

$$\boxed{Z[f(t+kT)] = z^k[F(z) - f(0)] - z^{k-1} f(T) - z^{k-2} f(2T) - \cdots - z\,f\left[\,(k-1)T\,\right]}$$

10.7) EJEMPLOS RESUELTOS: Tabla de Transformadas Z

A continuación desarrollaremos la Transformada Z de algunas de las más importantes funciones y operaciones, con miras a construir una Tabla de Transformadas Z, las cuales serán usadas más tarde.

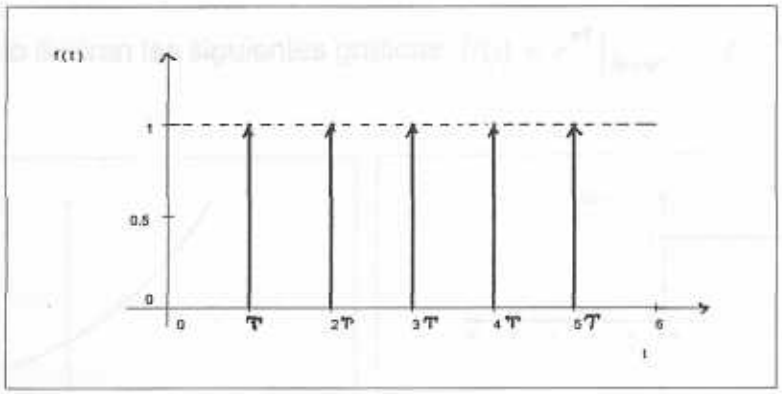
Todas las funciones $f(t)$ cumplirán con la condición :

$$f(t) = 0 \quad , \forall t < 0$$

Ejemplo 9.1: Transforma Z de la función tren de impulsosl $\delta_T(t)$

Solución:

Sea $f(t) = \delta_T(t)U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)\, U(t)$ cuya gráfica se muestra a continuación :



$$(\, f(t) = \delta_T(t)\, U(t)\,)$$

En este caso particular : $f^*(t) = f(t)$, ´por lo tanto, aplicando la definición de transformada Z, se obtiene:

$$Z[f(t)] = Z[\delta_T(t)U(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(nT)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (1)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$$

de donde:

$$Z[\delta_T(t)U(t)] = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \quad , \quad si \ \left|\frac{1}{z}\right| < 1, \text{ es decir, si } |z| > 1$$

Luego, $\boxed{Z[\delta_T(t)U(t)] = Z[U(t)] = \frac{z}{z-1}}$ $\quad |z| > 1$

= oo =

Ejemplo 9.2: Trandsforma Z de la función exponencial $f(t) = e^{at}U(t)$

Solución:

Usando la relación fundamental : $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n}$, se puede escribir :

$$Z\left[e^{at}U(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{anT} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{aT}z^{-1}\right)^{n} = 1 + \frac{e^{aT}}{z} + \frac{e^{2aT}}{z^2} + \frac{e^{3aT}}{z^3} + \cdots$$

lo que cinstituye una serie geométrica de razón : $\frac{e^{aT}}{z}$, por lo tanto :

$$Z\left[e^{at}\right] = \frac{1}{1-\frac{e^{aT}}{z}} = \frac{z}{z-e^{aT}}, \quad \text{si } \left|\frac{e^{aT}}{z}\right| < 1, \text{ es decir, si } |z| > e^{aT}.$$

En conclusión:

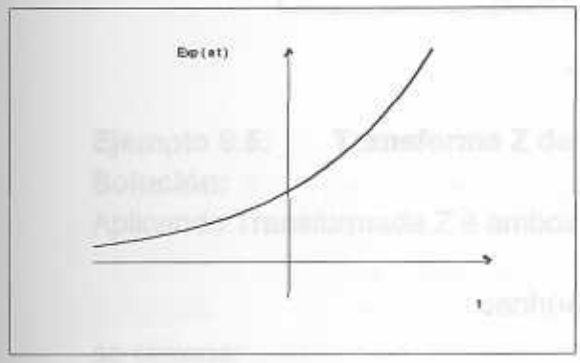
$$\boxed{Z\left[e^{at}\right] = \frac{z}{z-e^{aT}}} \quad \text{para: } |z| > e^{aT}$$

= oo =

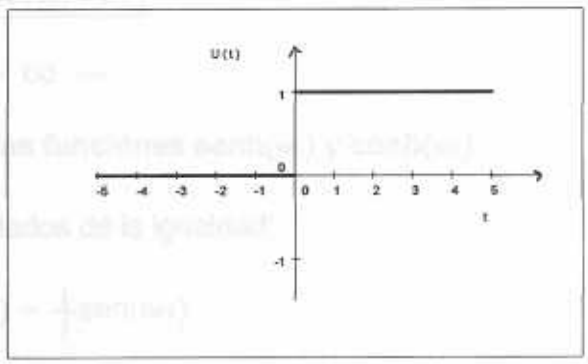
Ejemplo 9.3: Transforma Z de la función Escalón Unitario : $U(t)$

Solución:

Tal como lo ilustran las siguientes gráficas, $U(t) = e^{at}\big|_{a=0}, \quad t \geq 0$



(e^{at})



Heaviside$(t) = U(t)$

Aplicando el resultado del ejemplo anterior se obtiene:

$$Z[U(t)] = Z\left[e^{anT}\right]_{a=0} = \frac{z}{z-e^{aT}}\bigg|_{a=0} = \frac{z}{z-1}, \quad \text{si } |z| > e^{T}$$

tal como se obtuvo anteriormente.

= oo =

Ejemplo 9.4: Transforma Z de las funciónes seno y coseno

Solución:

Tal como se obtuvo en el ejemplo 9.2 anterior :

$$Z\left[e^{at}\,U(t)\right] = \frac{z}{z-e^{aT}}, \quad \text{si } |z| > e^{aT}$$

Luego, haciendo : $a = iw$, se obtiene:

$$Z\left[e^{iwt}U(t)\right] = \frac{z}{z-e^{iwT}} = \frac{z}{z-(\cos wT + i\,\text{sen}\,wT)} = \frac{z}{(z-\cos wT) - i\,\text{sen}\,wT}$$

de donde:

$$Z\left[e^{iwt}U(t)\right] = \frac{z\left[\left(z-\cos wT\right)+i\,\text{sen}\,wT\right]}{\left(z-\cos wT\right)^2-\left(i\,\text{sen}\,wT\right)^2} = \frac{z\left[\left(z-\cos wT\right)+i\,\text{sen}\,wT\right]}{z^2-2z\cos wT+1} \qquad \ldots(1)$$

Pero : $e^{iwt} = \cos wt + i\,\text{sen}wt \Rightarrow$

Pre lo tanto : $Z\left[e^{iwt}U(t)\right] = Z\left[\left(\cos wt + i\,\text{sen}wt\right)U(t)\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

Igualando las expresiones (1) y (2), se obtiene:

$$Z\left[\left(\cos wt + i\,\text{sen}wt\right)U(t)\right] = \frac{z\left[\left(z-\cos wT\right)+i\,\text{sen}\,wT\right]}{z^2-2z\cos wT+1}$$

Aplicando ahora la propiedad de linelidad de la Transforma Z e Igualando partes reales y partes imaginarias, se obtiene :

$$\boxed{Z[\cos wt] = \frac{z\left(z-\cos wT\right)}{z^2-2z\cos wT+1}} \qquad |z| > 1,\ t \geq 0$$

$$\boxed{Z\left[\,\text{sen}wt\right] = \frac{z\,\text{sen}\,(wT)}{z^2-2z\cos wT+1}} \qquad |z| > 1,\ t \geq 0$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 9.5: Transforma Z de las funciónes senh(wt) y cosh(wt)

Solución:

Aplicando Transformada Z a ambos lados de la igualdad:

$$\text{senh}(wt) = \frac{1}{i}\text{sen}(iwt)$$

se obtiene:

$$Z\left[\,\text{senh}(wt)\right] = Z\left[\frac{1}{i}\text{sen}(iwt)\right] = \frac{1}{i}Z\left[\,\text{sen}(iwt)\right] = \frac{1}{i}\frac{z\,\text{sen}\,(iwT)}{z^2-2z\cos(iwT)+1} \Rightarrow$$

$$Z\left[\,\text{senh}(wt)\right] = \frac{1}{i}\frac{i\,z\,\text{senh}\left(wT\right)}{z^2-2z\cosh\left(wT\right)+1} = \frac{z\,\text{senh}\left(wT\right)}{z^2-2z\cosh\left(wT\right)+1}$$

$$\boxed{Z\left[\,\text{senh}(wt)\right] = \frac{z\,\text{senh}\left(wT\right)}{z^2-2z\cosh\left(wT\right)+1}} \quad ,|z| > 1,\ t \geq 0$$

Análogamente, aplicando Transformada Z a ambos lados de la igualdad:

$$\cosh\left(wt\right) = \cos\left(iwt\right)$$

se obtiene:

$$Z\left[\,\cosh(wt)\right] = Z\left[\,\cos(iwt)\right] = \frac{z\left[z-\cos\,(iwT)\right]}{z^2-2z\cos(iwT)+1} \Rightarrow$$

$$\boxed{Z\left[\cosh(wt)\right] = \frac{z\left[z - \cosh\left(wT\right)\right]}{z^2 - 2z\cosh\left(wT\right) + 1}} \quad , |z| > 1, \ t \geq 0$$

= oo =

Ejemplo 9.6: Transforma Z de la función rampa: $f(t) = tU(t)$

Solución:

Aplicando las definición de transformada Z, se obtiene:

$$F(z) = Z\left[tU(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(nT)\,z^{-n} = \frac{T}{z} + \frac{2T}{z^2} + \frac{3T}{z^3} + \cdots \quad \Rightarrow$$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(nT)\,z^{-n} = \frac{T}{z}\left[1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{3}{z^2}\cdots\right] = \frac{T}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2}$$

Luego,

$$\boxed{Z\left[tU(t)\right] = \frac{Tz}{(z-1)^2}}$$

= oo =

Ejemplo 9.7: Transforma Z de una función con factor de amortiguamiento

Sea : $g(t) = f(t)\,e^{-at}U(t), \quad a > 0$, real

Solución:

Aplicando las definición de transformada Z, se obtiene:

$$G(z) = Z\left[f(t)\,e^{-at}U(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[f(nT)\,e^{-anT}\right]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\left(e^{aT}z\right)^{-n} \quad \Rightarrow$$

$$Z\left[e^{-at}f(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\left(e^{aT}z\right)^{-n} \quad \Rightarrow \quad .....(1)$$

Por lo tanto, comparando este resultado con la ecuación de síntesis de la transformada Z, dada por :$Z\left[f(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\,z^{-n}$, se observa que :

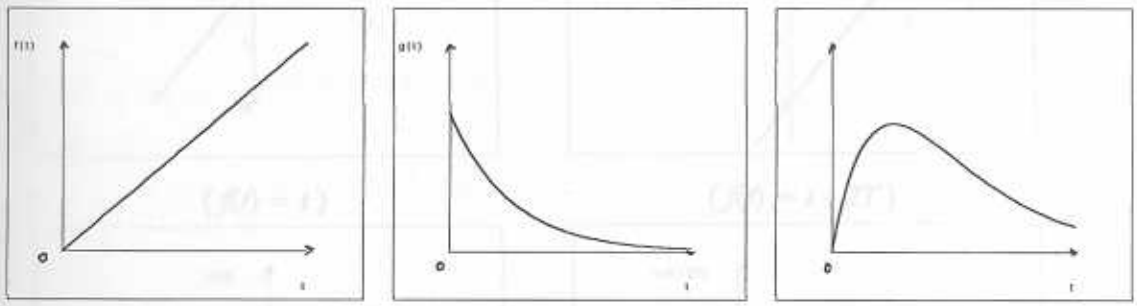
$$\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)\left(e^{-aT}z\right)^{-n} = Z\left[f(t)\right]_{z=z\,e^{aT}}$$

Por lo tanto, sustituyendo este resultado en la ecuación (1), se obtiene que :

$$\boxed{Z\left[e^{-at}f(t)\right] = Z\left[f(t)\right]_{z=z\,e^{aT}} = F(z)|_{z=ze^{aT}} = F\left(z\,e^{aT}\right)} \quad , \quad a > 0$$

NOTA:

Obsérvese que, multiplicar la función $f(t)$ por la exponencial real : e^{-at}, equivale a amortiguar la función $f(t)$ en el dominio del tiempo, tal como lo ilustra la siguiente figura en donde se ha multiplicado $f(t) = t\,U(t)$ por e^{-at}



($f(t) = t\,U(t)$) ($g(t) = e^{-at}\,U(t)$) ($t\,e^{-at}\,U(t)$)

Así se obtiene que:

a) En el caso particular : $f(t) = t\,U(T)\,e^{-2t} \Rightarrow$

$$Z\left[tU(T)e^{-2t}\right] = \frac{zT}{(z-1)^2}\bigg|_{z=ze^{2T}} = \frac{Tze^{2T}}{\left(z\,e^{2T}-1\right)^2}$$

b) En el caso particular : $f(t) = \cos(wt)\,e^{-3t}\;U(t) \Rightarrow$

$$Z\left[\cos(wt)\,e^{-3t}\right] = Z[\cos(wt)]_{z=ze^{2T}} = \frac{z(z-\cos wT)}{z^2-2z\cos wT+1}\bigg|_{z=ze^{2T}}$$

De donde :

$$Z\left[\cos(wt)\,e^{-3t}\,U(t)\right] = \frac{ze^{3T}\left(ze^{3T}-\cos wT\right)}{z^2e^{6T}-2z\cos wT+1}$$

== oo ==

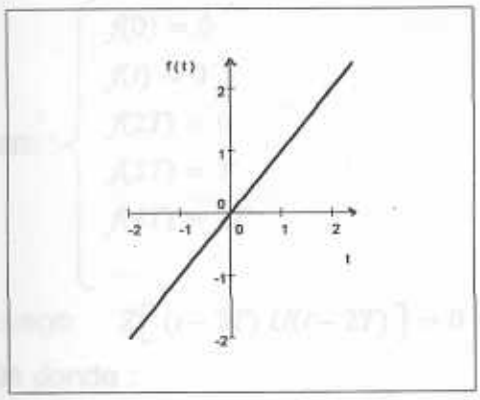
Ejemplo 9.8: Primer Teorema de Traslación

a) Evaluar : $Z\left[(t-2T)\,U(t-2T)\right]$

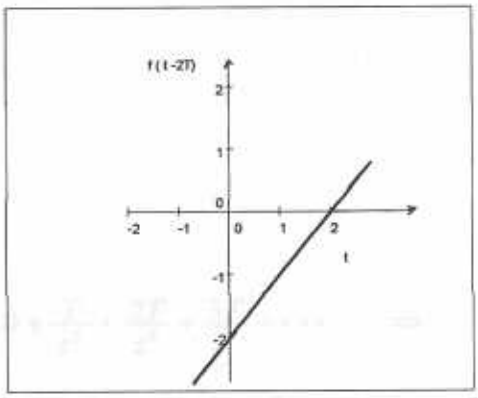
Solución:

Método 1: Primer Teorema de Traslación

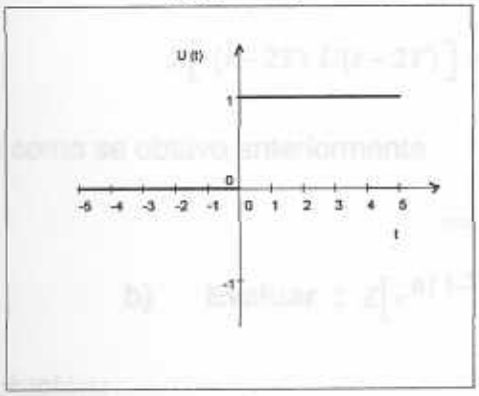
Se muestran a continuación la gráfica de las diferentes funciones involucradas en este ejemplo:



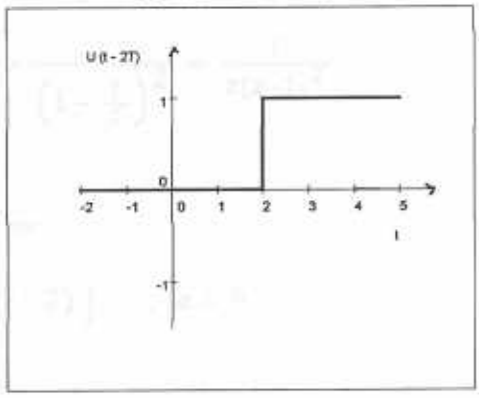
$(f(t) = t)$



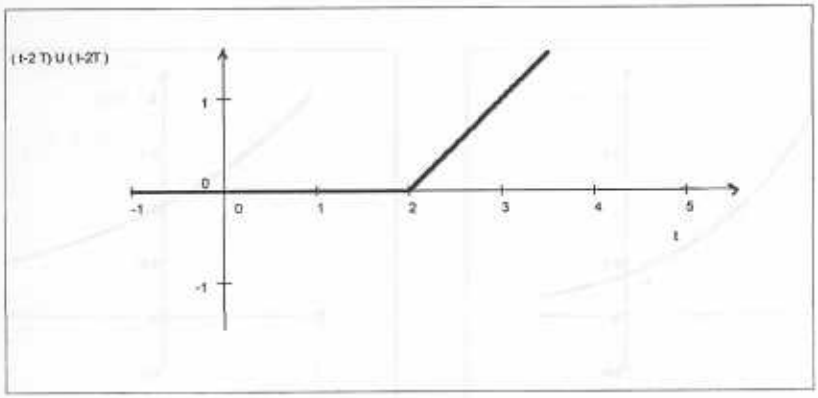
$(f(t) = t - 2T)$



Heaviside$(t) = U(t)$



Heaviside$(t - 2T) = U(t - 2T)$



$f(t) = (t - 2T)U(t - 2T)$

Luego:

$$Z\left[(t-2T)\,U(t-2T)\right] = z^{-2}\,Z\left[t\,U(t)\right] = z^{-2}\,\frac{zT}{(z-1)^2} = \frac{T}{z(z-1)^2}$$

Método 2: Por definición de Transformada Z

$$Z\left[\,(t-2T)\,U(t-2T)\,\right] = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)}{z^3} + \frac{f(4T)}{z^4} + \cdots$$

$$\text{Pero}: \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(t) = 0 \\ f(2T) = 0 \\ f(3T) = T \\ f(4T) = 2T \\ \dots \end{cases}$$

Luego: $Z\left[\ (t-2T)\ U(t-2T)\ \right] = 0 + 0 + 0 + \frac{T}{z^3} + \frac{2T}{z^4} + \frac{3T}{z^5} + \cdots \quad \Rightarrow$

De donde :

$$Z\left[\ (t-2T)\ U(t-2T)\ \right] = \frac{T}{z^3}\left[\ 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \cdots\right] \quad \Rightarrow$$

$$Z\left[\ (t-2T)\ U(t-2T)\ \right] = \frac{T}{z^3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} = \frac{T}{z(z-1)^2}$$

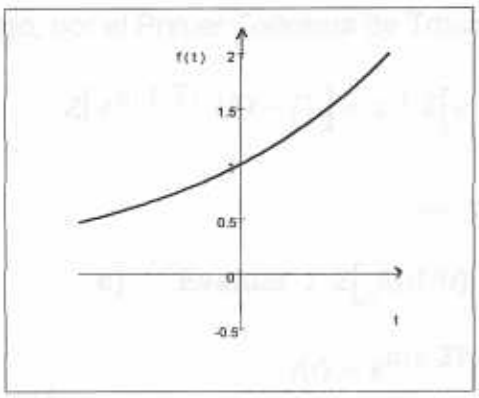
tal como se obtuvo anteriormente.

= oo =

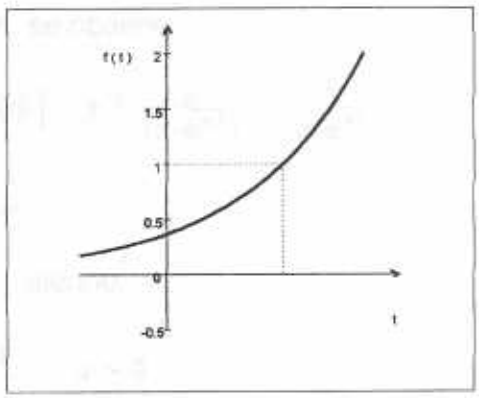
b) Evaluar : $Z\left[e^{a(t-T)}\ U(t-T)\right] \quad , \ a > 0$

Solución:

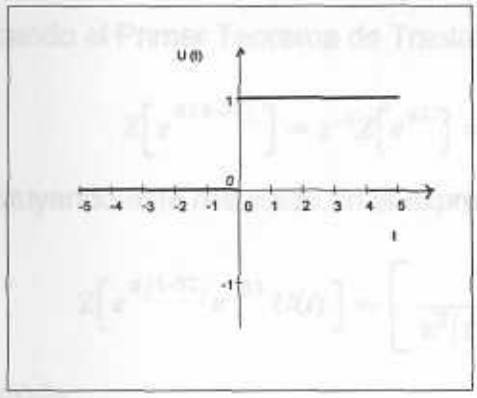
Se muestran a continuación las gráficas de las diferentes funciones involucradas en este ejemplo:



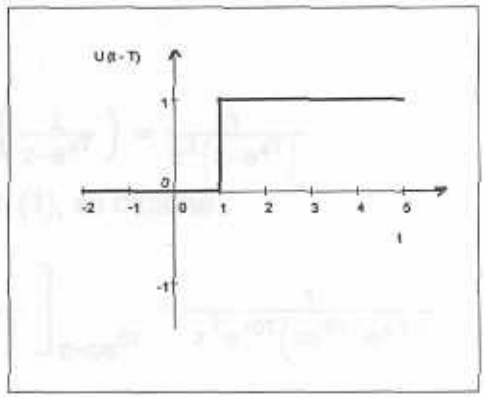
$(f(t) = e^{at})$



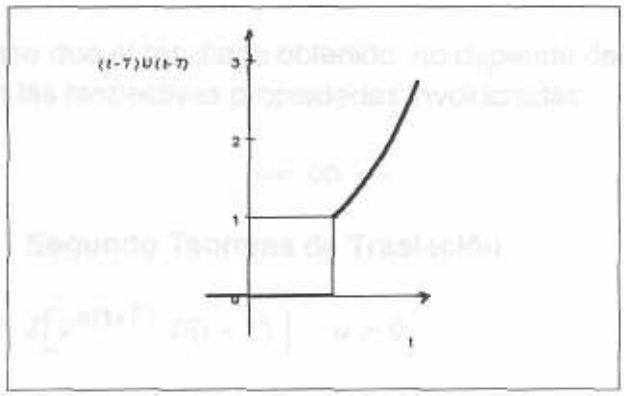
$(f(t) = e^{a(t-T)})$



Heaviside$(t) = U(t)$



Heaviside$(t - T) = U(t - T)$



$(t - T)U(t - T)$

Luego, por el Primer Teorema de Traslación, se obtiene :

$$Z\left[e^{a(t-T)}\,U(t-T)\right] = z^{-1}\,Z\left[e^{at}\,U(t)\right] = z^{-1}\,\frac{z}{\left(z-e^{at}\right)} = \frac{1}{z-e^{at}}$$

$$= oo =$$

c) Evaluar : $Z\left[f(t)U(t)\right]$, siendo:

$$f(t) = e^{a(t-3T)}\,e^{-5t}, \qquad a > 0$$

Solución:

La función : $g(t) = e^{a(t-3T)}$ corresponde al Primer Teorema de Traslación, mientras que : $h(t) = e^{-5t}$ representa un factor de amortiguamiento. Por lo tanto , la solución al problema planteado puede obtenerse por aplicación sucesiva de ambos teoremas. Así tenemos :

Aplicando en primer lugar el Factor de Amortiguamiento:

$$Z[f(t)U(t)] = Z\left[e^{a(t-3T)}e^{-5t}\,U(t)\right] = Z\left[e^{a(t-3T)}\right]_{z=ze^{5T}} \qquad \ldots\ldots(1)$$

Aplicando el Primer Teorema de Traslación:

$$Z\left[e^{a(t-3T)}\right] = z^{-3}Z\left[e^{at}\right] = z^{-3}\left(\frac{z}{z-e^{aT}}\right) = \frac{1}{z^2\left(z-e^{aT}\right)}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (1), se obtiene :

$$Z\left[e^{a(t-3T)}e^{-5t}\,U(t)\right] = \left[\frac{1}{z^2\left(z-e^{aT}\right)}\right]_{z=ze^{5T}} = \frac{1}{z^2e^{10T}\left(ze^{5T}-e^{aT}\right)} \Rightarrow$$

de donde :

$$Z\left[e^{a(t-3T)}e^{-5t}\,U(t)\right] = \frac{1}{z^2\left(ze^{15T}-e^{(a+10)T}\right)}$$

NOTA: Obsérvese que el resultado obtenido no depende del orden en que se apliquen las respectivas propiedades involucradas.

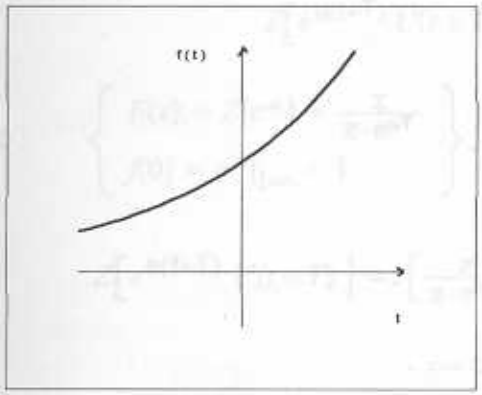
= oo =

Ejemplo 9.9: Segundo Teorema de Traslación

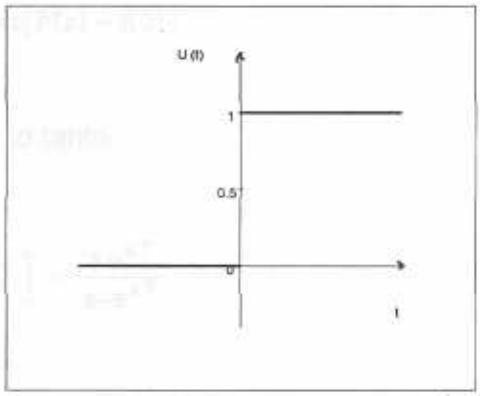
a) Evaluar : $Z\left[e^{a(t+T)}\,U(t+T)\right],\ a>0$

Solución:

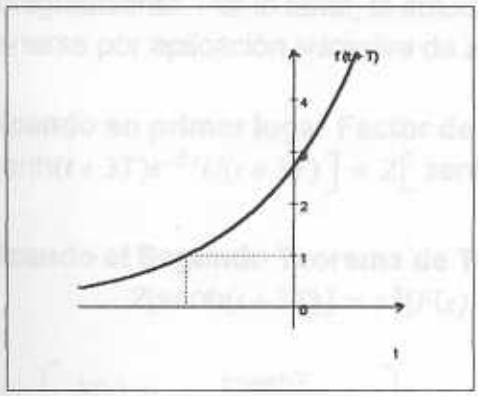
Se muestran a continuación la gráfica de las diferentes funciones involucradas en este ejemplo:



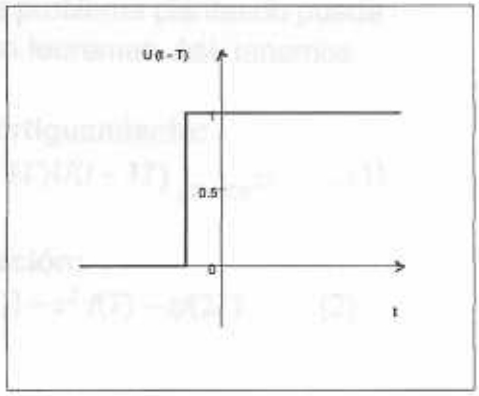
$(f(t) = e^{at})$



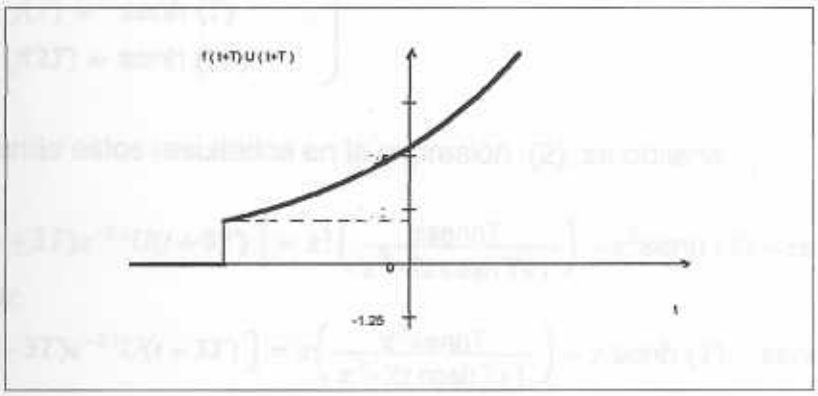
Heaviside$(t) = U(t)$



$(f(t) = e^{a(t-T)})$



Heaviside$(t+T) = U(t+T)$



$(e^{a(t+T)}\, U(t+T))$

Luego: $K = 1$ $\Rightarrow$

$$Z\left[e^{a(t+T)}\, U(t+T)\right] = z[F(z) - f(0)]$$

Pero : $\left\{ \begin{array}{l} F(z) = Z[e^{at}] = \dfrac{z}{z-e^{aT}} \\ f(0) = e^{at}|_{t=0} = 1 \end{array} \right\}$, por lo tanto :

$$Z\left[e^{a(t+T)}\, U(t+T)\right] = z\left[\frac{z}{z-e^{aT}} - 1\right] = \frac{z\, e^{aT}}{z-e^{aT}}$$

$$= \text{oo} =$$

b) Dado : $f(t) = \text{senh}(t+3T)\, e^{-2t}\, U(t+3T)$, $a > 0$

Calcular la expresión más simplificada de $Z\left[f(t)\right]$

Solución:

La función : $g(t) =$ senh$(t+3T)$ corresponde al Segundo Teorema de Traslación, con $k = 3$, mientras que : $h(t) = e^{-2t}$ representa un factor de

amortiguamiento. Por lo tanto, la solución al problema planteado puede obtenerse por aplicación sucesiva de ambos teoremas. Así tenemos :

Aplicando en primer lugar Factor de Amortiguamiento:

$$Z\left[\operatorname{senh}(t+3T)e^{-2t}U(t+3T)\right] = Z\left[\operatorname{senh}(t+3T)U(t+3T)\right]_{z=ze^{2T}} \quad ...(1)$$

Aplicando el Segundo Teorema de Traslación:

$$Z[\operatorname{senh}(t+3T)] = z^3[F(z)-f(0)] - z^2 f(T) - zf(2T) \quad ...(2)$$

$$\text{Pero:}\left\{\begin{array}{l} F(z) = \dfrac{z\operatorname{senh}T}{z^2-2z\cosh T+1} \\ f(o) = \operatorname{senh}(0) = 0 \\ f(T) = \operatorname{senh}(T) \\ f(2T) = \operatorname{senh}(2T) \end{array}\right\}$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión (2), se obtiene :

$$Z\left[\operatorname{senh}(t+3T)e^{-2t}U(t+3T)\right] = z^3\left(\frac{z\operatorname{senh}T}{z^2-2z\cosh T+1}\right) - z^2\operatorname{senh}(T) - z\operatorname{senh}(2T)$$

de donde:

$$Z\left[\operatorname{senh}(t+3T)e^{-2t}U(t+3T)\right] = z\left(\frac{z^3\operatorname{senh}T}{z^2-2z\cosh T+1}\right) - z\operatorname{senh}(T) - \operatorname{senh}(2T)$$

Finalmente, sustituyendo este resultado en la expresión (1), se obtiene:

$$Z[f(t)] = ze^{2T}\left(\frac{z^3e^{6T}\operatorname{senh}T}{z^2e^{4T}-2ze^{2T}\cosh T+1}\right) - ze^{2T}\operatorname{senh}(T) - \operatorname{senh}(2T)$$

Por lo que:

$$Z[f(t)] = \operatorname{senh}T\left[ze^{2T}\left(\frac{z^3e^{6T}}{z^2e^{4T}-2ze^{2T}\cosh T+1}\right) - ze^{2T} - 2\cosh(T)\right]$$

$$= \text{oo} =$$

c) **Dado :** $f(t) = \operatorname{sen}(t+3T)\,e^{-2t}\,U(t+3T)\,,\quad a>0$

Calcule:

c.1) La expresión más simplificada de $Z\left[f(t)\right]$

c.2) $Z\left[f(t)\right]$ cuando la constante de tiempo del Modulador es $T = \frac{\pi}{2}$

Solución:

c.1) Aplicando Factor de Amortiguamiento:

$$Z\left[\operatorname{senh}(t+3T)e^{-2t}\right] = Z[\operatorname{sen}(t+3T)]_{z=ze^{2T}} \quad ...(1)$$

Aplicando Segundo Teorema de Traslación:

$$Z[\text{sen}(t+3T)] = z^3[F(z) - f(0)] - z^2 f(T) - zf(2T) \quad ...(2)$$

Donde: $\left\{ \begin{array}{l} F(z) = \dfrac{z\text{sen}T}{z^2 - 2z\cos T + 1} \\ f(o) = \text{sen}(0) = 0 \\ f(T) = \text{sen}\,(T) \\ f(2T) = \text{sen}\,(2T) \end{array} \right\}$

Sustituyendo estos resultados en la expresión (2), se obtiene :

$$Z[\text{sen}(t+3T)] = z^3\left(\frac{z\text{sen}T}{z^2 - 2z\cos T + 1}\right) - z^2\text{sen}\,(T) - z\,\text{sen}\,(2T)$$

de donde:

$$Z[\text{sen}(t+3T)] = z\,\text{sen}T\left[\left(\frac{z^3}{z^2 - 2z\cos T + 1}\right) - z - 2\cos(T)\right]$$

Finalmente, sustituyendo este resultado en la expresión (1), se obtiene:

$$Z\left[\text{senh}(t+3T)e^{-2t}\right] = \left\{z\,\text{sen}T\left[\left(\frac{z^3}{z^2 - 2z\cos T + 1}\right) - z - 2\cos(T)\right]\right\}_{z=ze^{2T}}$$

$$Z[f(t)] = ze^{2T}\text{sen}T\left[\left(\frac{z^3e^{6T}}{z^2e^{4T} - 2ze^{2T}\cos T + 1}\right) - ze^{2T} - 2\cos(T)\right]$$

c.2) $Z\left[f(t)\right]$ cuando la constante de tiempo del Modulador es $T = \frac{\pi}{2}$

$$Z[f(t)]_{T=\frac{\pi}{2}} = Z[\text{sen}(t + \tfrac{3\pi}{2})e^{-2t}] = z^2e^{2\pi}\left[\left(\frac{z^2e^{2\pi}}{z^2e^{2\pi}+1}\right) - 1)\right] = -\frac{z^2e^{2\pi}}{z^2e^{2\pi}+1}$$

= oo =

Ejemplo 9.10: Encontrar una forma cerrada para la $Z\left[t^2\,U(T)\right]$

Solución:

Método 1: Aplicando la ecuación de síntesis de la Transformada Z:

$$Z\left[\, t^2\, U(T)\,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (nT)^2\, z^{-n} = T^2\left[\frac{1}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \frac{3^2}{z^3} + \frac{4^2}{z^4} + \cdots\right]$$

No es obvio que la serie obtenida se pueda expresar por una forma cerrada. Sin embargo, podemos basarnos en el Segundo Teorema de Traslación y

construir la siguiente expresión : $\begin{cases} f(t) = t^2 \\ f(t+T) = (t+T)^2 \end{cases}$

Restando miembro a miembro estas dos igualdades, se obtiene:

$$f(t+T) - f(t) = t^2 + 2tT + T^2 - t^2 = T(2t+T) \qquad \ldots\ldots(1)$$

Aplicando Transformada Z a ambos lados de la ecuación (1), tenemos :

$$Z[f(t+T) - f(t)] = Z[T(2t+T)] = T\,Z(2t+T) \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

Pero, por la propiedad de Linealidad de la Transformada Z, el primer miembro de la ecuación (2) es :

$$Z[f(t+T) - f(t)] = Z[f(t+T)] - Z[f(t)] = z[F(z) - f(0)] - F(z)$$

Pero :

$$f(t) = t^2 \Rightarrow f(0) = 0$$

por lo que :

$$Z[f(t+T) - f(t)] = z[F(z) - 0] - F(z) = F(z)(z-1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Además, en el segundo miembro de la ecuación (2) se obtiene:

$$T\,Z(2t+T) = 2T\left[\, Z(t)\,\right] + Z\left[\, T^2 U(t)\,\right] = 2T\left[\frac{zT}{(z-1)^2}\right] + T^2\left(\frac{z}{z-1}\right) \Rightarrow$$

De donde: $\quad T\,Z(2t+T) = zT^2\dfrac{(z+1)}{(z-1)^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

Igualando ahora las expresiones (3) y (4) , obtenemos :

$$F(z)(z-1) = zT^2\frac{(z+1)}{(z-1)^2}$$

de donde :

$$\boxed{F(z) = zT^2 \frac{(z+1)}{(z-1)^3}}$$

= oo =

Método 2: Aplicando la Transformada Z del producto: $t\,f(t)$

$$Z\left[t^2\,U(T)\right] = Z\{t[tU(t)]\} = -zT\frac{d}{dz}\left[\,Z(tU(t))\,\right]$$

Luego, $Z\left[t^2\,U(T)\right] = -zT\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{zT}{(z-1)^2}\right] = zT^2\left[\dfrac{z+1}{(z-1)^3}\right]$

tal como se obtuvo anteriormente.

= oo =

CAPÍTULO XI

LA TRANSFORMADA Z

(Continuación)

11.1) TEOREMA DEL VALOR INICIAL: $f(0)$

Este teorema permite, como su nombre indica, calcular el valor de la función en el instante $t = 0$, es decir, la primera muestra del Modulador, a partir de la Transforma Z de la función. En efecto,

Si $\quad Z[f(t)] = F(z)$

Entonces : $f(0) = \lim\limits_{z \to \infty} F(z)$

Demostración:

La demostración de este teorema se realiza recordando que :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n} = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)}{z^3} + \cdots \qquad \ldots(1)$$

Tomando el límite en ambos lados de esta ecuación, para $z \to \infty$, se obtiene:

$$\boxed{\lim_{z \to \infty} F(z) = f(0)}$$

La figura 11.1 ilustra este resultado :

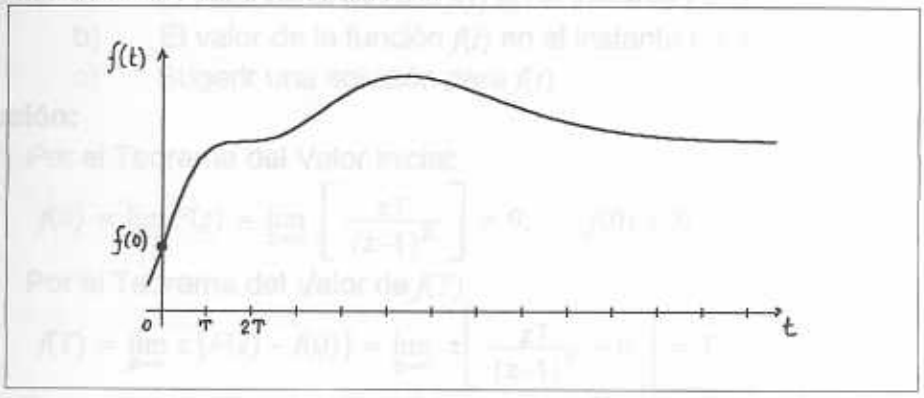


Fig.11.1 : $f(t)$

Corolario:

Nótese también que, si en la expresión (1) multiplicamos ambos lados de ella por z y tomamos el límite cuando $z \to \infty$, se obtiene :

$$\lim_{z \to \infty} z\, F(z) = \lim_{z \to \infty} z\left[f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)}{z^3} + \cdots \right]$$

de donde:

$$\lim_{z \to \infty} z\, F(z) = \lim_{z \to \infty} \left[z f(0) + f(T) + \frac{f(2T)}{z} + \frac{f(3T)}{z^2} + \cdots \right] = \lim_{z \to \infty} \left[z\, f(0) + f(T) \right]$$

de donde : $f(T) = \lim\limits_{z \to \infty} z\, F(z) - \lim\limits_{z \to \infty} z\, f(0)$

es decir:

$$\boxed{f(T) = \lim_{z\to\infty} z\,[F(z) - f(0)]}$$

En particular, si $f(0) = 0$, entonces: $f(T) = \lim_{z\to\infty} z\,F(z)$.

La figura 11.2 ilustra los valores : $f(0)$ y $f(T)$

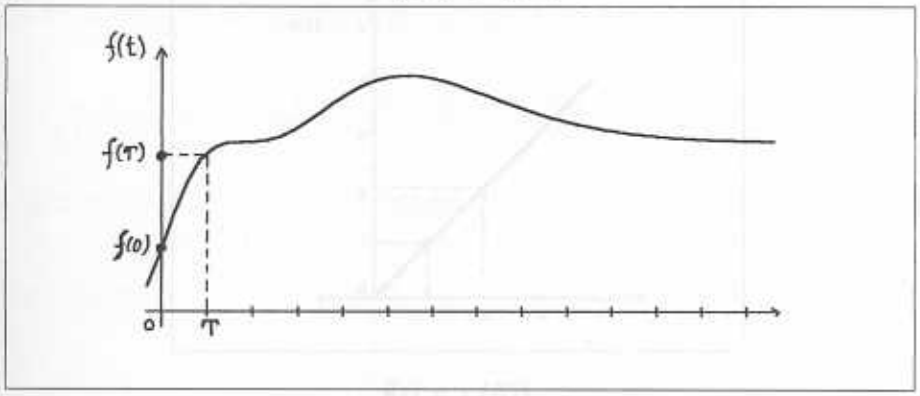


Fig. 11.2 : $f(t)$, $f(0)$, $f(T)$

Ejemplo 1:

Dado $F(z) = \dfrac{zT}{(z-1)^2}$

Calcular: a) El valor de la función $f(t)$ en el instante $t = 0$

b) El valor de la función $f(t)$ en el instante $t = T$

c) Sugerir una solución para $f(t)$

Solución:

a) Por el Teorema del Valor Inicial:

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{zT}{(z-1)^2}\right] = 0; \qquad f(0) = 0$$

b) Por el Teorema del Valor de $f(T)$:

$$f(T) = \lim_{z\to\infty} z\,[F(z) - f(0)] = \lim_{z\to\infty} z\left[\frac{zT}{(z-1)^2} - 0\right] = T$$

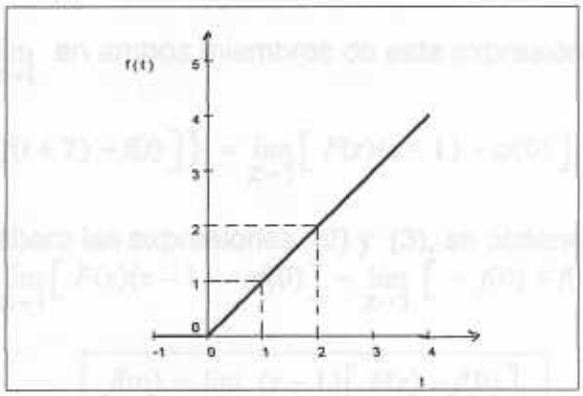
c) Para sugerir una solución para $f(t)$, deberíamos calcular en primer término, la Transformada Z Inversa de la función $F(z)$ dada.

Dicho cálculo se puede llevar a efecto por cualquiera de los tres (3) métodos antes expuestos, como son:

* Obtener la Serie de Laurent válida en la región $|z| > 1$ y extraer de ella los coeficientes : $f(nT) = f(0), f(T), f(2T), etc.$
* Realizar una "División Larga " del numerador (zT) entre el Denominador ordenado de mayor a menor : $\left(z^2 - 2z + 1\right)$.
* Evaluar la integral de línea: $f(nT) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{\frac{zT}{(z-1)^2}}{z^{1-n}}\,dz$, para

$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

* Obviamnete, cualquiera de los métodos expuestos conducen a la solución antes estudiada y ya contemplada en la Tabla de Transformas Z que hemos construído. Dicha solución es : $f(t) = tU(t)$, tal como se ilustra a continuación:



$f(t) = t\,U(t)$

11.2) TEOREMA DEL VALOR FINAL: $f(\infty)$

Este teorema permite, como su nombre indica, calcular el valor de la función cuando $t = \infty$. Se define en consecuencia $f(\infty)$ como :

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

y está expresado por :

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{z\to 1} (z-1)[F(z) - f(0)]$$

Demostración:

Establezcamos la diferencia :

$f(t+T) - f(t)$ y calculemos : $Z\left[\, f(t+T) - f(t) \,\right]$ .....(1)

Así se obtiene :

a) **Por definición de Transformada** Z

$$Z\left[\, f(t+T) - f(t) \,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\, f(nT+T) - f(nT) \,\right] z^{-n}$$

De donde:

$$Z[f(t+T) - f(t)] = [f(T) - f(0)] + \frac{f(2T)-f(T)}{z} + \frac{f(3T)-f(2T)}{z^2} + \cdots + \frac{f[(k+1)T]-f(kT)}{z^k} + \cdots$$

Tomando el límite en ambos lados de esta ecuación, para $z \to 1$, se obtiene:

$$\lim_{z\to 1} Z[f(t+T) - f(t)] = \lim_{z\to 1}\left\{[f(T) - f(0)] + \frac{f(2T)-f(T)}{z} + \frac{f(3T)-f(2T)}{z^2} + \cdots + \frac{f[(k+1)T]-f(kT)}{z^k} + \right\}$$

por lo que:

$$\lim_{z\to 1} Z\left[\, f(t+T) - f(t) \,\right] = \lim_{z\to 1}\left[\, -f(0) + f(\infty) \,\right] \quad \text{.....(2)}$$

b) **Por aplicación del Segundo Teorema de Traslación** (con $k = 1$) a la expresión (1), se obtiene :

$$Z[f(t+T) - f(t)] = Z[f(t+T)] - Z[f(t)] = z[F(z) - f(0)] - F(z)$$

de donde :

$$Z[f(t+T) - f(t)] = F(z)(z-1) - z\,f(0)$$

Tomando $\lim\limits_{z\to 1}$ en ambos miembros de esta expresión, obtenemos:

$$\lim_{z\to 1}\left\{Z\left[\,f(t+T) - f(t)\,\right]\right\} = \lim_{z\to 1}\left[\,F(z)(z-1) - zf(0)\,\right] \qquad \ldots\ldots(3)$$

Igualando ahora las expresiones (2) y (3), se obtiene que :

$$\lim_{z\to 1}\left[\,F(z)(z-1) - zf(0)\,\right] = \lim_{z\to 1}\left[\,-f(0) + f(\infty)\,\right]$$

De donde :

$$\boxed{f(\infty) = \lim_{z\to 1}\,(z-1)\left[\,F(z) - f(0)\,\right]}$$

La figura 11.3 ilustra los valores obtenidos por los tres teoremas anteriores, es decir: $f(0)$, $f(T)$ y $f(\infty)$.

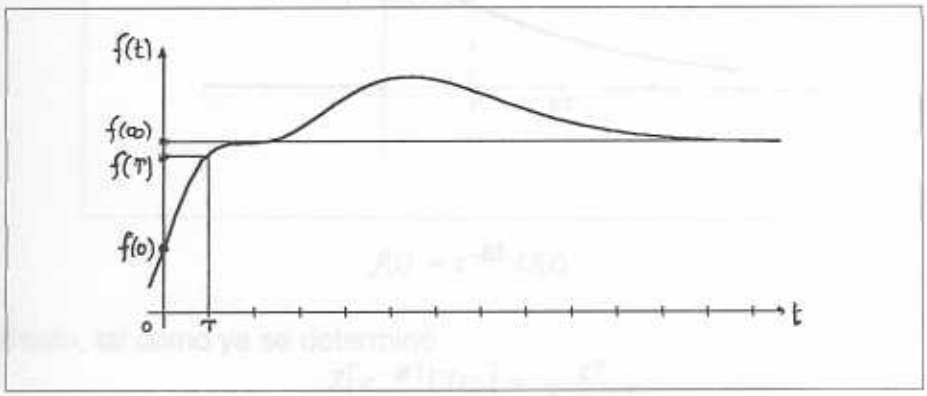


Fig. 11.3 : $f(t)$, $f(0)$, $f(T)$, $f(\infty)$

11.2.1) Ejemplos Resueltos I

Ejemplo 2

Dado $F(z) = \dfrac{z}{z - e^{aT}}$, $\quad a > 0$

Calcular: a) El valor de la función $f(t)$ en el instante $t = 0$

b) El valor de la función $f(t)$ en el instante $t = T$

c) El valor Final de la función $f(t)$: $f(\infty)$

d) Una solución para $f(t)$

Solución:

a) Por el Teorema del Valor Inicial:

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{z}{z - e^{aT}}\right] = 1; \qquad f(0) = 1$$

b) Por el Teorema del Valor de $f(T)$:

$$f(T) = \lim_{z\to\infty} z\,[F(z) - f(0)] = \lim_{z\to\infty} z\left[\frac{z}{z-e^{aT}} - 1\right] = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{ze^{-aT}}{z-e^{aT}}\right] = e^{-aT}$$

c) Por el Teorema del Valor Final: $f(\infty)$

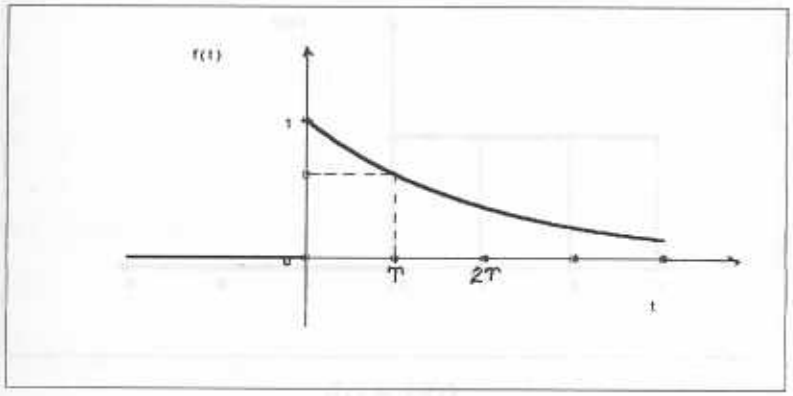
$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)[F(z) - f(0)], \text{ por lo tanto :}$$

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\left[\frac{z}{z-e^{aT}} - 1\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^{-aT}}{\left(z-e^{-aT}\right)}\right] = 0$$

d) Cálculo de $f(t)$ sugerido:

Tal como ya se calculó: $\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(T) = e^{-aT} \\ f(\infty) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_{\text{sugerido}}(t) = e^{-at}U(t),$

como lo iliustra la siguiente gráfica :



$$f(t) = e^{-at}\,U(t)$$

En efecto, tal como ya se determinó :

$$Z\left[e^{-at}U(t)\right] = \frac{zT}{z-e^{-aT}}$$

== oo ==

Ejemplo 3:

Dado $F(z) = \dfrac{z}{z-1}$. $\quad |z| > 1$

Calcular: a) El valor de la función $f(t)$ en el instante $t = 0$

b) El valor de la función $f(t)$ en el instante $t = T$

c) El valor Final de la función $f(t)$: $f(\infty)$

d) Una solución para $f(t)$

Solución:

a) Por el Teorema del Valor Inicial:

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{z}{z-1}\right] = 1; \qquad f(0) = 1$$

b) Por el Teorema del Valor de $f(T)$:

$$f(T) = \lim_{z\to\infty} z\,[F(z) - f(0)] = \lim_{z\to\infty} z\left[\frac{z}{z-1} - 1\right] = \lim_{z\to\infty} \left(\frac{z}{z-1}\right) = 1$$

c) Por el Teorema del Valor Final: $f(\infty)$

$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)[F(z) - f(0)], \text{ por lo tanto :}$$

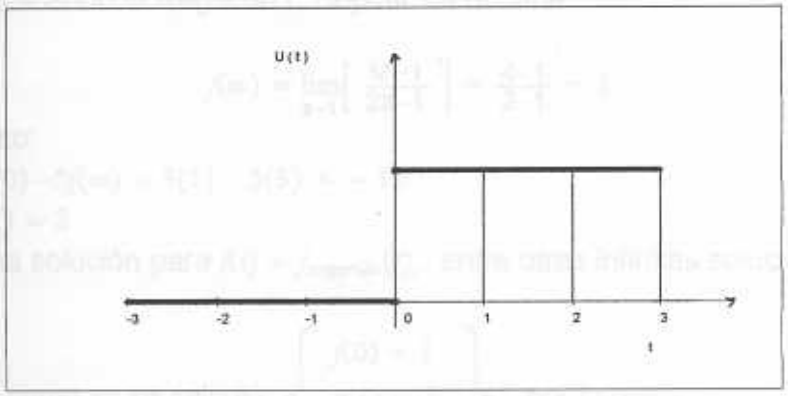
$$f(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\left[\frac{z}{z-1} - 1\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{1}{(z-1)}\right] = 1$$

d) Cálculo de $f(t)$ sugerido:

Tal como ya se calculó:

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(T) = 1 \\ f(\infty) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_{\text{sugerido}}(t) = U(t) = \left\{\begin{array}{ll} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{array}\right.$$

como lo iliustra la siguiente gráfica :



$$f(t) = U(t)$$

En efecto, tal como ya se determinó: $Z[U(t)] = \dfrac{z}{z-1}$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 4:

Dado $\quad F(z) = \dfrac{z^3-1}{z^3-2z^2+z}. \qquad |z| > 1$

Calcular: a) $3\,f(0) - 5f(\infty)$

b) El valor de la función $f(t)$ en el instante $t = T$

c) Una solución para $f(t)$

Solución:

Por el Teorema del Valor Inicial :

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{z^3-1}{z^3-2z^2+z}\right] = 1; \qquad f(0) = 1$$

Por el Teorema del Valor de $f(T)$:

$$f(T) = \lim_{z\to\infty} z\,[F(z) - f(0)] = \lim_{z\to\infty} z\left[\frac{z^3-1}{z^3-2z^2+z} - 1\right] = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{2z^3 - z^2 - z}{z^3-2z^2+z}\right) = 2$$

Por el Teorema del Valor Final : $f(\infty)$

$$f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)\left[F(z) - f(0)\right],$$ por lo tanto :

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\left[\frac{z^3-1}{z^3-2z^2+z} - 1\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{(2z^2-z-1)}{(z^3-2z^2+z)}\right] \Rightarrow$$

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{(2z^2-z-1)}{z\,(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{(2z^2-z-1)}{z\,(z-1)}\right] \to \frac{0}{0} \quad \Rightarrow$$

Aplicando la Regla de L¨Hopital, se obtiene:

$$f(\infty) = \lim_{z\to 1}\left[\frac{4z-1}{2z-1}\right] = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

Por lo tanto:

a) $3\,f(0) - 5f(\infty) = 3(1) - 5(3) = -12$

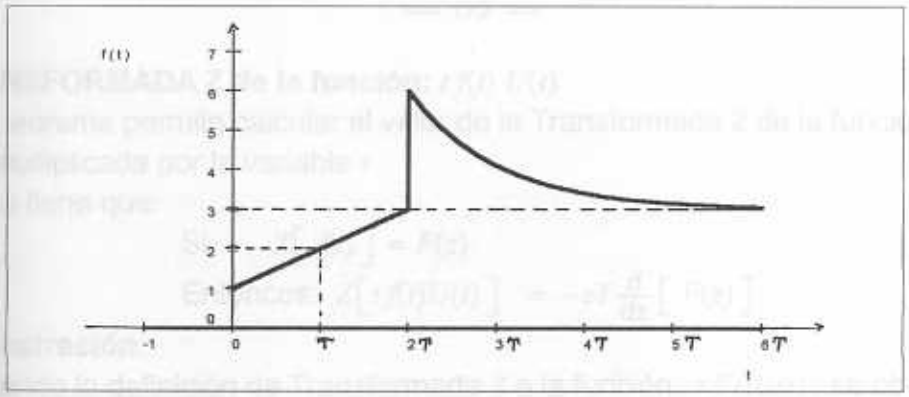
b) $f(T) = 2$

c) Una solución para $f(t) = f_{sugerido}(t)$, entre otras infinitas soluciones, será :

Tal como ya se calculó : $\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(T) = 2 \\ f(\infty) = 3 \end{array}\right\}$, por lo que .

$$f_{\text{sugerido}}(t) = (t+1)[U(t) - U(t-2T)] + \left(3e^{-(t-2T)} + 3\right)U(t-2T)$$

como lo iliustra la siguiente gráfica :



$$f(t) = (t+1)[U(t) - U(t-2T)] + \left(3e^{-(t-2T)} + 3\right)U(t-2T)$$

= oo =

11.3) FACTOR DE AMPLIFICACIÓN: e^{at}, $a > 0$

Este teorema permite, como su nombre sugiere, calcular el valor de la Transformada Z del producto de la función $f(t)$ por el factor de amplificación : e^{at}, con $a > 0$.

Así se tiene que:

$$\text{Si} \quad Z\left[\, f(t) \,\right] = F(z)$$

$$\text{Entonces:} \quad Z\left[\, f(t)\, e^{at} \,\right] = F(z)\big|_{z=ze^{aT}} = F(ze^{-at})$$

Demostración:

Aplicando la definición de Transformada Z a la función $f(t)\, e^{at}$, se obtiene:

$$Z\left[f(t)\, e^{at}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, e^{anT}\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\left(z\, e^{-aT}\right)^{-n}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{Z\left[\, f(t)\, e^{at} \,\right] = F(z)\big|_{z=ze^{-aT}} = F(ze^{-at})}$$

tal como se quería demostrar.

== oo ==

Ejemplo 5

Sea: $f(t) = \text{sen}(2t)\, e^{5t}\, U(t)$. Calcular : $Z[f(t)]$

Solución:

$$Z\left[\text{sen}(2t)e^{5t}U(t)\right] = Z\left[\, \text{sen}(2t)U(t) \,\right]_{z=ze^{-5T}} = \left[\frac{z\,\text{sen}(2T)}{z^2 - 2z\cos(2T) + 1}\right]_{z=ze^{-5T}} \Rightarrow$$

$$Z\left[\, \text{sen}(2t)e^{5t}U(t) \,\right] = \left[\frac{ze^{-5T}\,\text{sen}(2T)}{z^2e^{-10T} - 2ze^{-5T}\cos(2T) + 1}\right], \quad |z| > 1$$

== oo ==

11.4) TRANSFORMADA Z de la función: $t\, f(t)\, U(t)$

Este teorema permite calcular el valor de la Transformada Z de la función $f(t)$ multiplicada por la variable t .

Así se tiene que:

$$\text{Si} \quad Z\left[\, f(t) \,\right] = F(z)$$

$$\text{Entonces:} \quad Z\left[\, t\, f(t)U(t) \,\right] = -zT\frac{d}{dz}\left[\, F(z) \,\right]$$

Demostración:

Aplicando la definición de Transformada Z a la función : $t\, f(t)U(t)$, se obtiene:

$$Z\left[\, t\, f(t)U(t) \,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (nT)f(nT)\, z^{-n} = \frac{Tf(T)}{z} + \frac{2Tf(2T)}{z^2} + \frac{3Tf(3T)}{z^3} + \cdots$$

De donde:

$$Z\left[t\,f(t)U(t)\right] = zT\left[\frac{f(T)}{z^2} + \frac{2f(2T)}{z^3} + \frac{3f(3T)}{z^4} + \cdots\right] = zT\sum_{n=0}^{\infty} n\,f(nT)\,z^{-(n+1)} \Rightarrow$$

$$Z\left[t\,f(t)U(t)\right] = -zT\,\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,z^{-n}\right] = -zT\,\frac{d}{dz}[F(z)]$$

Por lo tanto : $\boxed{Z\left[t\,f(t)U(t)\right] = -zT\,\frac{d}{dz}\left[F(z)\right]}$

lo que completa la demostración.

== oo ==

11.4.1) Ejemplos Resueltos II

Ejemplo 6

Sea: $f(t) = t^2U(t)$. Calcular : $Z\left[f(t)\right]$

Solución:

$Z\left[t\,f(t)U(t)\right] = -zT\,\frac{d}{dz}[F(z)]$, por lo tanto:

$$Z\left[t^2U(t)\right] = Z\left[t\,tU(t)\right] = -zT\frac{d}{dz}\left\{Z\left[tU(t)\right]\right\} \qquad \ldots\ldots(1)$$

Pero, según ya se calculó en el Capítulo precedente: $Z\left[tU(t)\right] = \frac{zT}{(z-1)^2}$

Por lo que, sustituyendo en (1), se obtiene:

$$Z\left[t^2U(t)\right] = -zT\frac{d}{dz}\left[\frac{zT}{(z-1)^2}\right] = -zT^2\left[\frac{(z-1)^2-2z(z-1)}{(z-1)^4}\right] = -zT^2\left[\frac{(z-1)-2z}{(z-1)^3}\right] \Rightarrow$$

$$Z\left[t^2U(t)\right] = -zT^2\left[\frac{-z-1}{(z-1)^3}\right] = zT^2\frac{(z+1)}{(z-1)^3}$$

tal como se obtuvo en el Ejemplo 9.10 de Capítulo X, por aplicación del Segundo Teorema de Traslación.

== oo ==

Ejemplo 7

Sea : $f(t) = t^3U(t)$. Calcular : $Z\left[f(t)\right]$

Solución:

De nuevo aplicaremos la expresión : $Z\left[t\,f(t)\right] = -zT\,\frac{d}{dz}\,[F(z)]$

En este caso: $f(t) = t^2U(t) \Rightarrow F(z) = zT^2\frac{(z+1)}{(z-1)^3}$ según se obtuvo en el ejemplo precedente. Por lo tanto :

$$Z\left[t^3U(t)\right] = Z\left[t\,t^2U(t)\right] = -zT\frac{d}{dz}\left\{zT^2\frac{(z+1)}{(z-1)^3}\right\}$$

Por lo que,

$$Z\left[t^3U(t)\right] = -zT^3\left[\frac{(2z+1)(z-1)^3-3z(z-1)^2(z+1)}{(z-1)^6}\right] = -zT^3\left[\frac{(2z+1)(z-1)-3z(z+1)}{(z-1)^4}\right] \Rightarrow$$

$$Z\left[t^3U(t)\right] = zT^3\left[\frac{z^2+4z+1}{(z-1)^4}\right]$$

$$= oo =$$

Ejemplo 8

Sea : $f(t) = t^2\, e^{-5t}\, U(t)$. Calcular : $Z\left[f(t)\right]$

Solución:

Evidentemente, podemos considerar dos situaciones:

$f(t)) = \left[t^2U(t)\right]e^{-5t}$, o también, $f(t) = t\left[t\, e^{-5t}U(t)\right]$

Método 1: En el primer caso, consideraremos que :

$$Z\left\{\left[t^2U(t)\right]e^{-5t}\right\} = \left\{Z\left[t\,t\,U(t)\right]\right\}_{z=ze^{5T}} = \left\{-zT\frac{d}{dz}Z\left[t\,U(t)\right]\right\}_{z=ze^{5T}} \Rightarrow$$

$$Z\left\{\left[t^2U(t)\right]e^{-5t}\right\} = \left\{-zT\frac{d}{dz}\frac{zT}{(z-1)^2}\right\}_{z=ze^{5T}}$$

de donde :

$$Z\left\{\left[t^2U(t)\right]e^{-5t}\right\} = \left\{-zT\,\frac{T(z-1)^2-2zT(z-1)}{(z-1)^4}\right\}_{z=ze^{5T}} = \left[-zT\,\frac{T(z+1)}{(z-1)^3}\right]_{z=ze^{5T}}$$

En resumen :

$$\boxed{Z\left\{\left[t^2U(t)\right]e^{-5t}\right\} = T^2ze^{5T}\,\frac{(ze^{5T}+1)}{(ze^{5T}-1)^3}}$$

Método 2: En el segundo caso, consideraremos que :

$$f(t) = t\left[t\,e^{-5t}U(t)\right] \quad \Rightarrow Z\left[f(t)\right] = -zT\,\frac{d}{dz}\left\{Z\left[tU(t)\right]_{z=ze^{5T}}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$Z\left\{\left[t^2U(t)\right]e^{-5t}\right\} = -zT\frac{d}{dz}\left\{\left.\frac{z\,T}{(z-1)^2}\right|_{z=ze^{5T}}\right\} = -zT\frac{d}{dz}\left[\frac{z\,T\,e^{5T}}{\left(ze^{5T}-1\right)^2}\right] \quad \Rightarrow$$

$$Z\left\{\left[t^2U(t)\right]e^{-5t}\right\} = -z\,T^2\,e^{5T}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{\left(ze^{5T}-1\right)^2}\right], \text{ de donde :}$$

$$Z\left\{\left[t^2U(t)\right]e^{-5t}\right\} = -z\,T^2\,e^{5T}\,.\,\frac{\left(z\,e^{5T}-1\right)^2-2z\left(z\,e^{5T}-1\right)e^{5T}}{\left(z\,e^{5T}-1\right)^4}$$

simplificando :

$$Z\left\{\left[\,t^2U(t)\,\right]e^{-5t}\right\} = -z\,T^2\,e^{5T}\,\frac{\left(z\,e^{5T}-1\right)-2\,z\,e^{5T}}{\left(z\,e^{5T}-1\right)^3}$$

de donde :

$$\boxed{Z\left\{\left[\,t^2U(t)\,\right]e^{-5t}\right\} = z\,T^2e^{5T}\,\frac{\left(z\,e^{5T}+1\right)}{\left(z\,e^{5T}-1\right)^3}}$$

lo que confirma que el resultado es indiferente del orden en que se apliquen los diferentes teoremas que eventualmente puedan estar presentes en la función a la cual se le está calculando la Transformada Z.

== oo ==

Ejemplo 9

Sea : $f(t) = t\,\text{sen}3t\;U(t)$. Calcular : $Z[f(t)]$

Solución:

De nuevo aplicaremos la expresión :$Z\left[\,t\,f(t)\,\right] = \;-zT\,\frac{d}{dz}[F(z)]$

En este caso:$f(t) = \text{sen}(3t)U(t) \Rightarrow F(z) = \dfrac{z\,\text{sen}(3T)}{z^2-2z\cos(3T)+1}$

Por lo tanto :

$$Z\left[\,t\,\text{sen}(3t)U(t)\,\right] = -zT\frac{d}{dz}\left(\frac{z\,\text{sen}(3T)}{z^2-2z\cos(3T)+1}\right)$$

De donde:

$$Z\left[\,t\,\text{sen}(3t)U(t)\,\right] = -zT\,\frac{\text{sen}(3T)\left(z^2-2z\cos(3T)+1\right)-z\text{sen}(3T)\left(2z-2\cos(3T)\right)}{\left(z^2-2z\cos(3T)+1\right)^2} \Rightarrow$$

$$Z\left[\,t\,\text{sen}(3t)U(t)\,\right] = -zT\,\text{sen}(3T)\frac{z^2-2z\cos(3T)+1-2z^2-2z\cos(3T)}{\left(z^2-2z\cos(3T)+1\right)^2} \Rightarrow$$

$$Z\left[\,t\,\text{sen}(3t)U(t)\,\right] = -zT\,\text{sen}(3T)\frac{\left(-z^2-4z\cos(3T)+1\right)}{\left(z^2-2z\cos(3T)+1\right)^2} \Rightarrow$$

$$Z\left[\,t\,\text{sen}(3t)U(t)\,\right] = zT\,\text{sen}(3T)\frac{\left(z^2+4z\cos(3T)-1\right)}{\left(z^2-2z\cos(3T)+1\right)^2}$$

== oo ==

11.5) TRANSFORMADA Z DEL PRODUCTO DE FUNCIONES: $Z\left[\,f(t)\,g(t)\,\right]$

CASO 1: Se conocen las Transformadas Z de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ en forma abierta, es decir, por la serie de Laurent que las define.

En este caso, la transformada Z del producto $f(t)\,g(t)$ se puede expresar también en forma abierta, por una serie de Laurent.

Demostración:

$$\text{Sea}: \begin{cases} Z[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n} = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)}{z^3} + \frac{f(4T)}{z^4} + \cdots \\ Z[g(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT)\, z^{-n} = g(0) + \frac{g(T)}{z} + \frac{g(2T)}{z^2} + \frac{g(3T)}{z^3} + \frac{g(4T)}{z^4} + \cdots \end{cases}$$

Aplicando la definición de Transformada Z a la función producto : $f(t)\, g(t)$, se obtiene:

$$Z\left[f(t)\, g(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, g(nT)\, z^{-n} \quad \Rightarrow$$

$$Z\left[f(t)\, g(t)\right] = f(0)\, g(0) + \frac{f(T)\, g(T)}{z} + \frac{f(2T)\, g(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)\, g(3T)}{z^3} + \cdots$$

De donde:

$$\boxed{Z\left[f(t)\, g(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, g(nT)\, z^{-n}}$$

lo que completa la demostración. Por lo tanto, si se conoce la transformada Z de $f(t)$ y $g(t)$ en forma de serie de Laurent, la transformada Z del producto $Z\left[f(t)\, g(t)\right]$ se puede expresar también como una serie de Laurent.

NOTA: Obsérvese que $Z\left[f(t)\, g(t)\right] \neq Z[f(t)] \cdot Z[g(t)]$

== oo ==

CASO 2: Si las transformadas Z de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ se conocen en forma cerrada, se puede calcular $Z\left[f(t)\, g(t)\right]$ también en forma cerrada, es decir, sin necesidad de tener que obtener primero el desarrollo en serie de Laurent de $F(z)$ y $G(z)$.

En este caso, sin embargo, será necesario evaluar la integral de Línea (o integral de contorno) que se muestra continuación:

$$Z\left[f(t)\, g(t)\right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F(w)\, G\left(\frac{z}{w}\right)}{w} dw$$

Demostración:

Sean $F(z)$ y $G(z)$ dos funciones analíticas en los dominios $|z| > R_1$ y $|z| > R_2$, respectivamente.

De acuerdo con la definición de Transformada Z podemos escribir:

$$F(z) = Z\left[f(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(mT)\, z^{-m}, \text{ es analítica para todo } z \text{ tal que: } |z| > R_1 .$$

Es decir, $|z| > R_1$ encierra todas las singularidades presentes en $F(z)$.

Además,

$$G(z) = Z\left[\, g(t) \,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT)\, z^{-n}, \text{ es analítica para todo } z \text{ tal que: } |\, z \,| > R_2$$

Es decir, $|\, z \,| > R_2$ encierra todas las singularidades presentes en $G(z)$.
Las figuras 11.4 y 11.5 ilustran estas consideraciones :

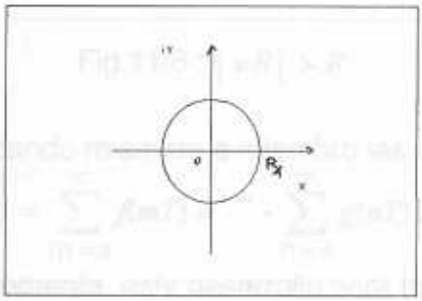


Fig.11.4 : $|\, z \,| > R_1$

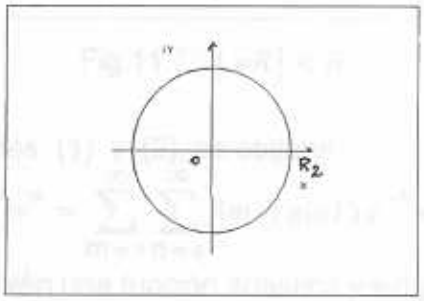


Fig. 11.5 : $|\, z \,| > R_2$

NOTA: Se ha supuesto $R_2 > R_1$, lo que no restringe la generalidad de la demostración.

Hagamos el cambio : $z = w$ en $F(z)$ y tomemos $R = Mayor\{R_1, R_2\}$.
Se obtiene entonces que :

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} f(mT)\, w^{-m}, \text{ es analítica para todo } w \text{ tal que: } |\, w \,| > R \qquad \ldots\ldots(1)$$

Hagamos ahora el cambio : $z = \frac{z}{w}$ en $G(z)$ y tomemos $R = Mayor\{R_1, R_2\}$

Se obtiene:

$$G\left(\frac{z}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f(mT)\, \left(\frac{z}{w}\right)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT)\, z^{-n} w^{n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Evidentemente, $G\left(\frac{z}{w}\right)$ es analítica en una región: $\left|\, \frac{z}{w} \,\right| > R$, es.decir, para $|\, z \,| > wR$. Esta región estará :

$$\begin{cases} \text{Fuera de la circunferencia } |\, z \,| = R, \quad si \quad |\, wR \,| > R \Rightarrow |\, w \,| > 1 \quad \text{(Ver Figura 11.6)} \\ \text{Dentro de la circunferencia } |\, z \,| = R, \quad si \quad |\, wR \,| < R \Rightarrow |\, w \,| > 1 \quad \text{(Ver Figura 11.7)} \end{cases}$$

Las siguientes figuras ilustran lo aquí expuesto:

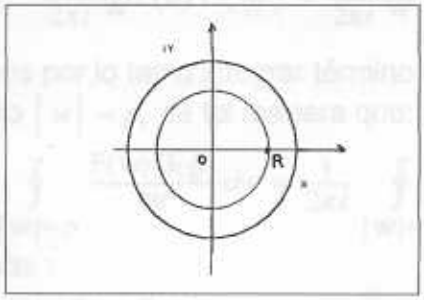


Fig.11.6 : $|wR| > R$

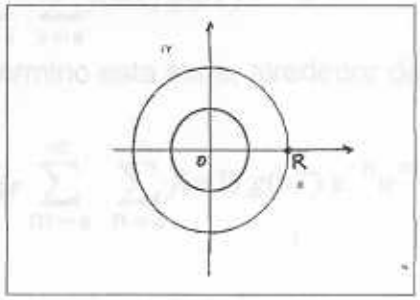


Fig.11.7 : $|wR| < R$

Multiplicando miembro a miembro las series (1) y (2), se obtiene :

$$F(w)\,G(\tfrac{z}{w}) = \sum_{m=0}^{\infty} f(mT)\,w^{-m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g(nT)\,z^{-n}w^{n} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(mT)\,g(nT)\,z^{-n}w^{n-m} \quad ...(3)$$

Evidentemente, este desarrollo será también una función analítica y exige que:

$$\begin{cases} w > R \\ |z| > |w|R \end{cases}$$

Consideremos ahora una circunferencia de radio ρ, centrada en el origen del plano complejo de los números w, tal que $\rho > R$. (Ver figura 11.8).
Coloquemos la variable w sobre esta circunferencia, de tal manera que: $|w| = \rho$ como lo ilustra la siguiente figura.

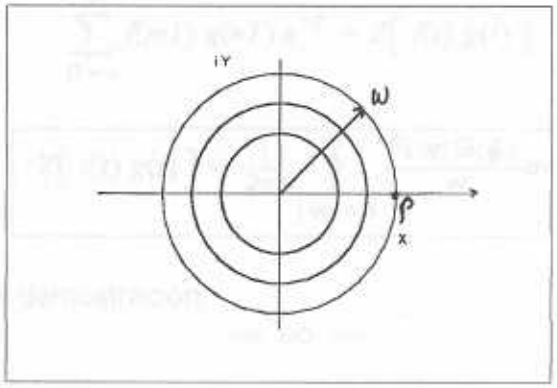


Fig. 11.8 : (Plano w : $|w| = \rho$)

La condición $|w| = \rho$ exige a su vez que : $|z| > \rho R$
De acuerdo con el Teorema de Laurent, el desarrollo en serie de Laurent de la ecuación (3) converge uniformemente en un dominio del plano w que contiene a la circunferencia $|w| = \rho$, por lo tanto, también corvergerá en dicho dominio el desarrollo :

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{w}F(w)\,G(\frac{z}{w}) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{w}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(mT)\,g(nT)\,z^{-n}w^{n-m}$$

Podemos por lo tanto integrar término a término esta serie, alrededor del contorno $|w| = \rho$, de tal manera que:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=\rho}\frac{F(w)\,G(\frac{z}{w})}{w}dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=\rho}\frac{1}{w}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(mT)\,g(nT)\,z^{-n}w^{n-m}\,dw$$

De donde :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=\rho}\frac{F(w)\,G(\frac{z}{w})}{w}dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} f(mT)\,g(nT)\,z^{-n}\oint_{|w|=\rho}\frac{w^{n-m}}{w}\,dw \qquad \ldots(4)$$

Para evaluar la integral del lado derecho, recuérdese que, si $k = entero$,

entonces:
$$\oint_{|w|=\rho} w^{k}dw = \begin{cases} 0\,, & \text{si } k \neq 1 \\ 2\pi i\,, & \text{si } k = -1 \end{cases}$$

En consecuencia,se puede observar que todas las integrales del lado derecho de la ecuación (4) son nulas, excepto cuando $n = m$, y en este caso:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=\rho}\frac{F(w)\,G(\frac{z}{w})}{w}dw = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty} f(mT)\,g(nT)\,z^{-n}\,(2\pi i) = \sum_{n=0}^{\infty} f(mT)\,g(nT)\,z^{-n}$$

Pero,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(mT)\,g(nT)\,z^{-n} = Z\left[\,f(t)\,g(t)\,\right]$$

Por lo tanto:

$$\boxed{Z\left[\,f(t)\,g(t)\,\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=\rho}\frac{F(w)\,G(\frac{z}{w})}{w}dw}$$

lo que completa la demostración.

$$= \text{oo} =$$

11.5.1) Ejemplos Resueltos III

Ejemplo 10

Dado :
$$\begin{cases} Z\left[\,tU(t)\,\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(nT)\,z^{-n} = \frac{T}{z} + \frac{2T}{z^2} + \frac{3T}{z^3} + \frac{4T}{z^4} + \cdots \\ Z\left[\,\text{sen t}\,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} sen(nT)\,z^{-n} = \frac{\text{sen}T}{z} + \frac{\text{sen}2T}{z^2} + \frac{\text{sen}3T}{z^3} + \frac{\text{sen}4T}{z^4} + \cdots \end{cases}$$

Calcular :$Z\left[\,t\,\text{sen t}U(t)\,\right]$

Solución:

Evidentemente, estamos en presencia del Caso 1 antes expuesto, por lo que:

$$Z\left[t\,\text{sen}\,tU(t)\right] = \frac{T\text{sen}T}{z} + \frac{2T\text{sen}2T}{z^2} + \frac{3T\text{sen}3T}{z^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nT)\text{sen}(nT)}{z^n}$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 11

Dado : $f(t) = \text{sen}^2 t$

Calcular : $Z\left[f(t)U(t)\right]$

Solución:

Método 1: Forma abierta

Considerando:

$$f(t) = \text{sen}t \cdot \text{sen}t \quad \Rightarrow Z\left[sen^2 tU(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \text{sen}(nT)\,\text{sen}(nT)\,z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} sen^2(nT)z^{-n}$$

Luego:

$$Z[\text{sen}^2 tU(t)] = \frac{\text{sen}^2(T)}{z} + \frac{\text{sen}^2(2T)}{z^2} + \frac{\text{sen}^2(3T)}{z^3} + \frac{\text{sen}^2(4T)}{z^4} + \cdots \quad \Rightarrow$$

$$Z\left[\text{sen}^2 tU(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(nT)}{z^n}$$

Método 2: Forma cerrada

Considerando:

$$f(t) = \text{sen}^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2} \Rightarrow Z\left[\text{sen}^2 tU(t)\right] = \frac{1}{2}Z\left[1-\cos 2t\right] \quad \Rightarrow$$

$$Z[\text{sen}^2 tU(t)] = \frac{1}{2}Z[U(t) - \cos 2tU(t)] = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{z(z-\cos 2T)}{z^2-2\cos 2T+1}\right]$$

O también:

$$Z[\text{sen}^2 tU(t)] = \frac{z}{2}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{z-\cos 2T}{z^2-2\cos 2T+1}\right], \qquad |z| > 1$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 12

Encuentre : $Z\left[t\,e^{at}U(t)\right]$, $a > 0$

Solución:

Aplicaremos el método antes descrito. Así se obtiene:

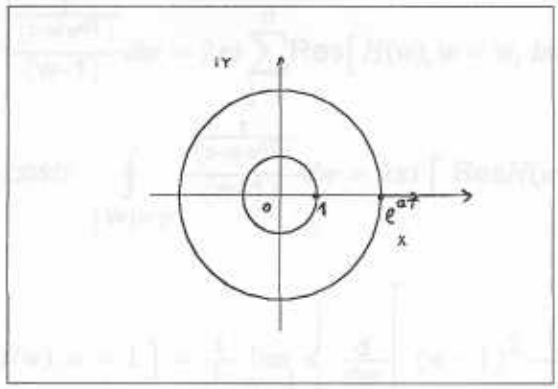
$$\begin{cases} f(t) = tU(t) \Rightarrow Z\left[f(t)\right] = F(z) = \dfrac{zT}{(z-1)^2}, & |z| > 1 \\ g(t) = e^{aT}U(t) \Rightarrow Z\left[g(t)\right] = G(z) = \dfrac{z}{(z-e^{aT})}, & |z| > e^{aT} \end{cases}$$

Obsérvese que:

a) $F(z)$ tiene un polo en : $|z| = 1$

b) $G(z)$ tiene un polo en : $|z| = e^{aT} > 1$, pues $a, T > 0$

Por lo tanto, el producto $F(z) \cdot G(z)$ es analítico en la corona circular: $1 < |z| < e^{aT}$



(Corona : $1 < |z| < e^{aT}$)

De las expresiones anteriores se obtiene:

$$\begin{cases} F(w) = \dfrac{wT}{(w-1)^2} \\ G(\frac{z}{w}) = \dfrac{\frac{z}{w}}{\left(\frac{z}{w} - e^{aT}\right)} = \dfrac{z}{\left(z - w\,e^{aT}\right)} \end{cases}$$

Por lo que:

$$Z\left[f(t)\,g(t)\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(w)G(\frac{z}{w})}{w}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\dfrac{wT}{(w-1)^2}\dfrac{z}{\left(z - w\,e^{aT}\right)}}{w}\,dw \quad \Rightarrow$$

$$Z\left[f(t)\,g(t)\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=\rho} \frac{\dfrac{wT}{(w-1)^2}\dfrac{z}{\left(z - w\,e^{aT}\right)}}{w}\,dw, \text{ donde } : \rho > 1,\ e^{aT}$$

Luego:

$$Z\left[t\,e^{aT}U(t)\right] = \frac{zT}{2\pi i}\oint_{|w|=\rho} \frac{\dfrac{1}{\left(z - w\,e^{aT}\right)}}{(w-1)^2}\,dw \qquad \ldots(1)$$

Para evaluar esta integral se puede aplicar cualquiera de los siguientes métodos:

Método 1: Aplicando la "**Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy**" antes expuesta :

$$Z\left[t\,e^{aT}U(t)\right] = \frac{zT}{2\pi i}\oint_{|w|=\rho} \frac{\dfrac{1}{\left(z - w\,e^{aT}\right)}}{(w-1)^2}\,dw = \frac{zT}{2\pi i}\,\frac{2\pi i}{1!}\,\frac{d}{dw}\left[\frac{1}{(z - w\,e^{aT})}\right]_{w=1}$$

de donde:

$$Z\left[t\,e^{aT}U(t)\right] = zT\left[\frac{e^{aT}}{(z - w\,e^{aT})^2}\right]_{w=1} = zT\,\frac{e^{aT}}{\left(z - e^{aT}\right)^2}$$

Método 2: Aplicando el "**Teorema del Residuo**" anteriormente expuesto:

$$\oint_{|w|=\rho} \frac{\frac{1}{(z-we^{aT})}}{(w-1)} dw = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}\left[H(w), w = w_j \text{ interiores a } |w| = \rho\right]$$

En este caso: $$\oint_{|w|=\rho} \frac{\frac{1}{(z-we^{aT})}}{(w-1)} dw = 2\pi i \left[\text{Res}H(w), w = 1\right] \quad \ldots.(2)$$

Pero:

$$\left[\text{Res}H(w), w = 1\right] = \frac{1}{1!}\lim_{w\to 1}\left\{\frac{d}{dw}\left[(w-1)^2 \frac{\frac{1}{(z-we^{aT})}}{(w-1)^2}\right]\right\} \Rightarrow$$

$$\left[\text{Res}H(w), w = 1\right] = \lim_{w\to 1}\left\{\frac{d}{dw}\left[\frac{1}{(z-we^{aT})}\right]\right\} = \lim_{w\to 1}\left[\frac{e^{aT}}{(z-we^{aT})^2}\right] = \frac{e^{aT}}{(z-e^{aT})^2}$$

Sustituyendo en (2). se obtiene:

$$\oint_{|w|=\rho} \frac{\frac{1}{(z-we^{aT})}}{(w-1)} dw = 2\pi i \frac{e^{aT}}{(z-e^{aT})^2}$$

Sustituyendo ahora este resultado en la expresión (1) se obtiene finalmente:

$$Z\left[t\, e^{aT} U(t)\right] = \frac{zT}{2\pi i} 2\pi i \frac{e^{aT}}{(z-e^{aT})^2} = zT \frac{e^{aT}}{(z-e^{aT})^2}$$

tal como se obtuvo por el método anterior.

== oo ==

Ejemplo 13

Sea $f(t) = t\,\text{sen}t U(t)$. Encuentre : $Z\left[f(t)\right]$

Solución:

Método 1 :

Paso 1:

Aplicado el método antes descrito, se obtiene

$$\begin{cases} f(t) = tU(t) \Rightarrow Z[f(t)] = F(z) = \dfrac{zT}{(z-1)^2}, & |z| > 1 \\ g(t) = \text{sen}\, tU(t) \Rightarrow Z\left[g(t)\right] = G(z) = \dfrac{z\,\text{sen}T}{z^2-2z\cos T+1}, & |z| > e^{aT} \end{cases}$$

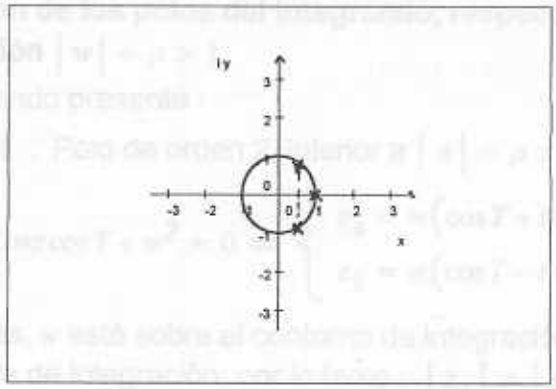
Obsérvese que:

a) $F(z)$ tiene un polo en : $z_1 = 1$

b) $G(z)$ tiene dos polos derivados de la ecuación : $z^2 - 2z\cos T + 1 = 0$

es decir, en $\begin{cases} z_2 = \cos T + i\,\text{sen}\,T \Rightarrow |z_2| = 1 \\ z_3 = \cos T - i\,\text{sen}\,T \Rightarrow |z_3| = 1 \end{cases}$

La ubicación de los polos de $F(z)$ y de $G(z)$ en el plano complejo, será:

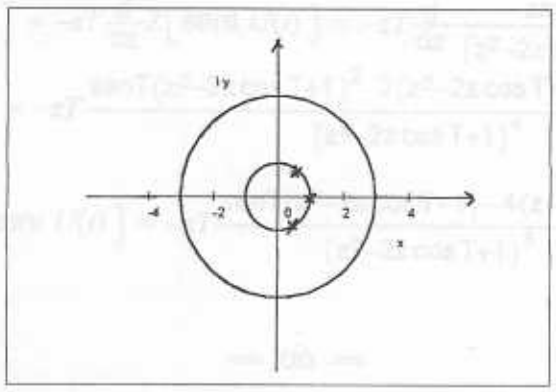


(Corona : $|z| > 1$)

Paso 2: Definición de R y ρ

Tal como se demostró en el Teorema respectivo: $\begin{cases} R = Mayor\{z_1, z_2, z_3\} \\ \rho > R \end{cases}$

Por lo tanto, en este caso : $\rho > 1$



(Contorno de integración : $|z| = \rho > 1$)

Paso 3: Construcción de F(w) y de G(z/w)

$$F(z) = \frac{zT}{(z-1)^2} \Rightarrow \qquad F(w) = \frac{wT}{(w-1)^2}$$

$$G(z) = \frac{z\,\text{sen}T}{z^2-2z\cos T+1} \Rightarrow G(z/w) = \frac{(z/w)\,\text{sen}T}{(z/w)^2-2(z/w)\cos T+1} = \frac{zw\,\text{sen}\,T}{z^2-2wz\cos T+w^2}$$

Paso 4: Construcción de $Z\left[f(t)g(t)\right]$

$$Z[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho>1} \frac{\frac{wT}{(w-1)^2} \cdot \frac{zw\,\text{sen}\,T}{z^2-2wz\cos T+w^2}}{w} dw \qquad \Rightarrow$$

$$Z[f(t)g(t)] = \frac{zT}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho>1} \frac{w\,\text{sen}T}{(w-1)^2\left(z^2-2wz\cos T+w^2\right)} dw$$

Paso 5: Ubicación de los polos del Integrando, respecto del contorno de integración $|w| = \rho > 1$.

El integrando presenta :

$$\begin{cases} w = 1 \ : \text{ Polo de orden 2, interior a } |w| = \rho > 1 \\ z^2 - 2wz\cos T + w^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_4 = w(\cos T + i\,\text{sen}T) \\ z_5 = w(\cos T - i\,\text{sen}T) \end{cases} \end{cases}$$

Además, w está sobre el contorno de integración, por ser la variable de integración; por lo tanto : $|z_4| = |z_5| = |w| = \rho > 1$

En consecuencia, z_4 y z_5 están **sobre** el contorno de integración, por lo que este método no permite determinar el valor de la integral de línea planteada.

Método 2:

Obviamente, la transformada Z planteada también puede determinarse de la siguiente manera:

$$Z\left[t\,\text{sen}t\,U(t)\right] = -zT\frac{d}{dz}Z\left[\text{sen}t\,U(t)\right] = -zT\frac{d}{dz}\frac{z\text{sen}T}{(z^2-2z\cos T+1)^2} \Rightarrow$$

$$Z\left[t\,\text{sen}t\,U(t)\right] = -zT\frac{\text{sen}T(z^2-2z\cos T+1)^2-2(z^2-2z\cos T+1)(2z-2\cos T)}{(z^2-2z\cos T+1)^4} \Rightarrow$$

$$\left[t\,\text{sen}t\,U(t)\right] = -zT\frac{\text{sen}T(z^2-2z\cos T+1)-4(z-\cos T)}{(z^2-2z\cos T+1)^3}$$

$$= \text{oo} =$$

11.6) TABLA DE TRANSFORMADAS Z

Se presenta a continuación una Tabla de las más importantes Transformadas Z, la cual es de gran utilidad para la resolución de futuros problemas.
Muchas de las mismas han sido previamente calculadas. Otras se dejan al estudiante como ejercicios propuestos :

TABLA DE TRANSFORMADAS "Z"

$$Z[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)Z^{-n}$$

	$f(t)$	$Z[f(t)] = F(z)$	Domonio
1	$U(t) = \begin{cases} 1, \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ , si } t < 0 \end{cases}$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z \rvert > 1$
2	$U(t-T) = \begin{cases} 1, \text{ si } t \geq T \\ 0 \text{ , si } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{z-1}$	$\lvert z \rvert > 1$
3	$tU(t)$	$\frac{zT}{(z-1)^2}$	$\lvert z \rvert > 1$
4	$t^2U(t)$	$\frac{z(z+1)T^2}{(z-1)^3}$	$\lvert z \rvert > 1$
5	$(1+t)U(t)$	$\frac{z^2+z(T-1)}{(z-1)^2}$	$\lvert z \rvert > 1$
6	$f(t-kT)U(t-kT)$	$z^{-k}F(z)$	$Z[f(t)] = F(z)$ $k \geq 0$ $f(t) = 0, si\ t < 0$
7	$f(t+kT)$	$z^k[F(z)-f(0)] - z^{k-1}f(T) - z^{k-2}f(2T) -$ $- \cdots - z\left[f(k-1)T\right]$	$Z[f(t)] = F(z)$ $k \geq 0$ $f(t) = 0, si\ t < 0$
8	$e^{-at}f(t)U(t)$ (Factor de Amortiguamiento)	$F(z)\lvert_{z=ze^{aT}} = F\left(ze^{aT}\right)$	$\lvert z \rvert > e^{-aT}$ $a \geq 0$
9	$e^{-at}U(t)$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\lvert z \rvert > e^{-aT}$ $a \geq 0$
10	$e^{a(t-T)}U(t-T)$	$\frac{1}{z-e^{aT}}$	$\lvert z \rvert > e^{aT}$ $a \geq 0$
11	$e^{a(t+T)}U(t+T)$	$\frac{ze^{aT}}{z-e^{aT}}$	$\lvert z \rvert > e^{aT}$ $a \geq 0$
12	$t\,e^{at}U(t)$	$\frac{zTe^{aT}}{\left(z-e^{aT}\right)^2}$	$\lvert z \rvert > e^{aT}$ $a \geq 0$

TABLA DE TRANSFORMADAS " Z "
(Continuación)

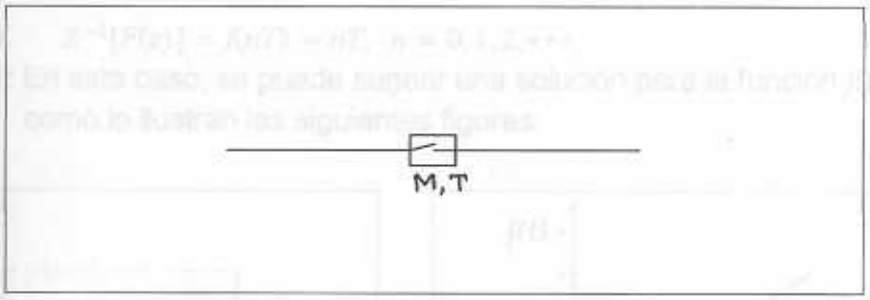
	$f(t)$	$Z[f(t)] = F(z)$	Domonio
13	$sen(at)$	$\dfrac{z\,sen(aT)}{z^2 - 2z\cos(aT) + 1}$	$\begin{cases} \lvert z \rvert > 1 \\ a \text{ real} \end{cases}$
14	$\cos(at)$	$\dfrac{z[z - \cos(aT)]}{z^2 - 2z\cos(aT) + 1}$	$\begin{cases} \lvert z \rvert > 1 \\ a \text{ real} \end{cases}$
15	$senh(at)$	$\dfrac{z\,senh(aT)}{z^2 - 2z\cosh(aT) + 1}$	$\begin{cases} \lvert z \rvert > e^{\lvert a \rvert T} \\ a \text{ real} \end{cases}$
16	$\cosh(at)$	$\dfrac{z[z - \cosh(aT)]}{z^2 - 2z\cosh(aT) + 1}$	$\begin{cases} \lvert z \rvert > e^{\lvert a \rvert T} \\ a \text{ real} \end{cases}$
17	$tf(t)$	$-zT\left[\dfrac{dF(z)}{dz}\right]$	$F(z) = Z[f(t)]$
18	$U(t) - U(t-T)$	$\dfrac{z+1}{z}$	$\forall z \neq 0$
19	$U(t-T) - U(t-2T)$	$\dfrac{z+1}{z^2}$	$\forall z \neq 0$
20	$e^{at}f(t)$ (Factor de Amplificación)	$F(z)\lvert_{z=ze^{-aT}} = F(ze^{-aT})$	$\lvert z \rvert > e^{aT}$ $a \geq 0$
21	$e^{at}U(t)$	$\dfrac{z}{z - e^{aT}}$	$\lvert z \rvert > e^{aT}$ $a \geq 0$
22	$e^{at}sen(bt)$	$\dfrac{ze^{aT}sen(bT)}{z^2 - 2ze^{aT}\cos(bT) + e^{2aT}}$	$\lvert z \rvert > e^{aT}$ $a, b \geq 0$, reales
23	$\delta(t)$	$z[\delta(t-nT)]_{n=0} = z^{-0} = 1$	$\forall z$
24	$\delta(t-nT)$	z^{-n}	$\forall z \neq 0$
25	$k^{\left(\frac{t}{T}\right)}$	$\dfrac{z}{z-k}$	$\lvert z \rvert > k$

11.7) TRANSFORMADAS Z INVERSA : Z^{-1}

Consiste en obtener la función $f(t)$ a partir de $F(z) = Z\left[\, f(t) \,\right]$, en donde:

$$Z\left[\, f(t) \,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n}$$

Recordemos la generación de la Serie de Laurent que caracteriza la Transformada Z.



(Modulador con constante de tiempo: T)

Estrictamente hablando, dada la falta de unicidad de la Transformada Z, la operación de encontar $Z^{-1}\left[\, F(z) \,\right] = f(t)$ no es posible pues como se ha señalado, dos o más funciones distintas de t pueden tener la misma transformada Z. Por lo tanto, dado $F(z)$, lo que podemos obtener es la sucesión o conjunto de números $f(nT)$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$

Se define entonces como Transformada Z inversa a la salida del Modulador, es decir :

$$Z^{-1}[F(z)] = f(nT) = f(t)\, \delta_T(t) \neq f(t)$$

11.7.1) Cálculo de la Transformada Z Inversa

Para el cálculo de $Z^{-1}[F(z)]$ se pueden presentar tres casos, a saber:

CASO 1: $F(z)$ está dada en forma abierta

Si $F(z)$ se expresa en forma abierta, es decir, por medio de una serie de Laurent, tal como lo indica el lado derecho de la siguiente ecuación:

$$F(z) = Z[f(t)] = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)}{z^3} + \frac{f(4T)}{z^4} + \cdots$$

entonces:

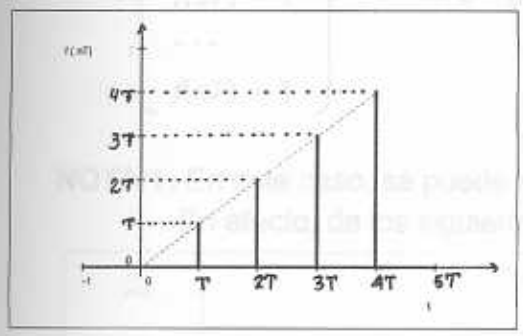
$Z^{-1}[F(z)] = f(nT)$ se obtiene por simple identificación de los coeficientes de los términos que contienen a las potencias: $z^0, z^{-1}, z^{-2}, \cdots$

Ejemplo 14

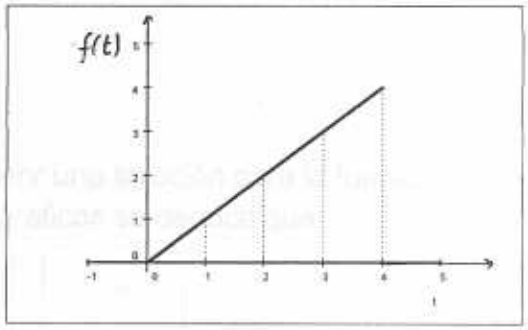
Sea: $F(z) = \frac{T}{z} + \frac{2T}{z^2} + \frac{3T}{z^3} + \frac{4T}{z^4} + \cdots \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(T) = T \\ f(2T) = 2T \\ \cdots \\ f(nT) = nT, \ \ n = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$

Luego, $Z^{-1}[F(z)] = f(nT) = nT, \ \ n = 0, 1, 2, \cdots$

NOTA: En este caso, se puede sugerir una solución para la función $f(t)$, tal como lo ilustran las siguientes figuras:



($f(nT) = nT$)



($f(t)_{\text{sugerida}} = tU(t)$)

$$f(nT) = nT \qquad \Rightarrow f(t)_{sugerida} = t\,U(t)$$

Recuérdese que, efectivamente:

$$Z\left[\, tU(t) \,\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (nT)\, z^{-n} = \frac{zT}{(z-1)^2} = \frac{T}{z} + \frac{2T}{z^2} + \frac{3T}{z^3} + \frac{4T}{z^4} + \cdots \Rightarrow$$

$$Z\left[\, tU(t) \,\right] = T\left[\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \cdots\right] = T\frac{\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2} = \frac{zT}{(z-1)^2}$$

tal como se obtuvo anteriormente.

CASO 2: $F(z)$ **se expresa en forma cerrada**

Si $F(z)$ se expresa en forma cerrada, es decir, por medio del cociente de dos polinimios de z. En este caso es preciso obtener un desarrollo de Laurent válido en un dominio anular centrado en el origen. El radio exterior de dicho dominio anular debe ser infinito ($|z| > R$).

Para encontrar la transformada Z inversa, todo lo que tenemos que hacer es expandir dicho cociente, en potencias de z^{-n} por una simple división larga. Los coeficientes de esta serie serán los valores de $Z^{-1}[F(z)] = f(nT)$, en cada instante de la muestra $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$F(z) = Z[f(t)] = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \frac{f(3T)}{z^3} + \frac{f(4T)}{z^4} + \cdots$$

Ejemplo 15

Dado $F(z) = \frac{z}{z-1}$, encontrar : $Z^{-1}[F(z)]$

Solución:

Antes de realizar la división, es necesario ordenar tanto el numerador como el denominador, en potencias crecientes de z^n.

Así se obtiene:

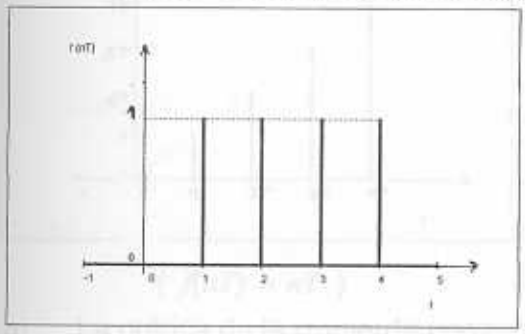
$$F(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \quad , \quad |z| > 1$$

Luego:

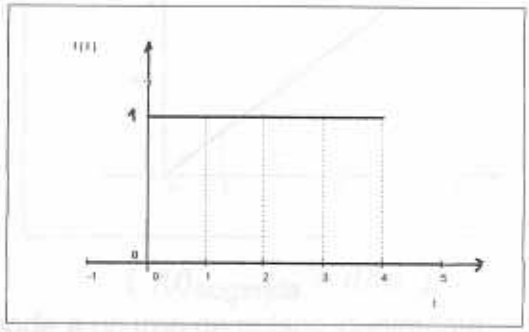
$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(t) = 1 \\ f(2T) = 1 \\ \cdots \\ f(nT) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow Z^{-1}[F(z)] = f(nT) = 1, \ \forall n = 0, 1, 2, \cdots$$

NOTA 1: En este caso, se puede sugerir una solución para la función $f(t)$.

En efecto, de los siguientes gráficos se deduce que :



($Z^{-1}[F(z)] = f(nT) = 1$)



($f(t)_{sugerida} = U(t)$)

a) La gráfica de la izquierda corresponde a un tren de pulsos igualmente espaciados, cuya amplitud es constante e igual a uno.

b) La gráfica sugiere que : $f(t)_{sugerida} = U(t)$, como muestra la gráfica de la derecha.

NOTA 2: Obsérvese que también puede sugerirse como solución $f(t)$,

a la señal : $f(t)_{sugerida} = \delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad , \ n = 0, 1, 2, \cdots$

Obviamente, ambas funciones de t tienen la misma transformada Z.

Ejemplo 16

Dado $F(z) = \dfrac{zT}{(z-1)^2}$, encontrar : $Z^{-1}[F(z)]$

Solución:

Ordenando tanto el numerador como el denominador, en potencias crecientes de z^n, se obtiene :

$$F(z) = \frac{zT}{(z-1)^2} = \frac{zT}{z^2-2z+1}$$

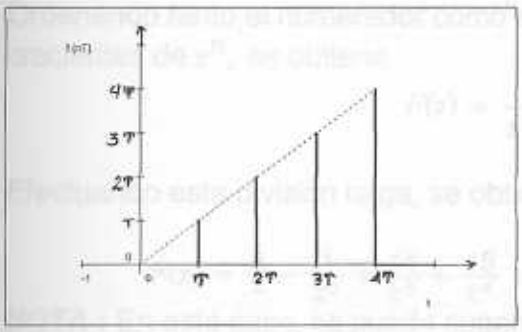
Efectuando esta división larga, se obtiene:

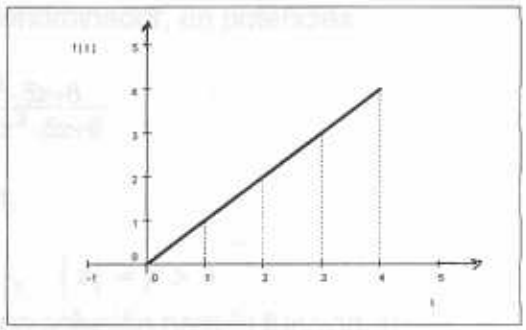
$$F(z) = T\left[\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \cdots\right] = \sum_{n=0}^{\infty} (nT)\, z^{-n}, \quad |z| > 1$$

de aquí que .

$$Z^{-1}\left[F(z)\right] = Z^{-1}\left[\frac{zT}{(z-1)^2}\right] = f^*(t) = f(nT) = \sum_{n=0}^{\infty} (nT)\ \delta(t-nT)$$

NOTA : En este caso, se puede sugerir una solución para la función $f(t)$.
En efecto, de los siguientes gráficos se deduce que .





($f(nT) = nT$) ($f(t)_{\text{sugerida}} = tU(t)$)

a) La gráfica de la izquierda corresponde a un tren de pulsos igualmente espaciados, cuya longitud aumenta directamente con el tiempo T del Muestreador.

b) La gráfica sugiere que : $f(t)_{sugerida} = t\,U(t)$, como muestra la gráfica de la derecha.

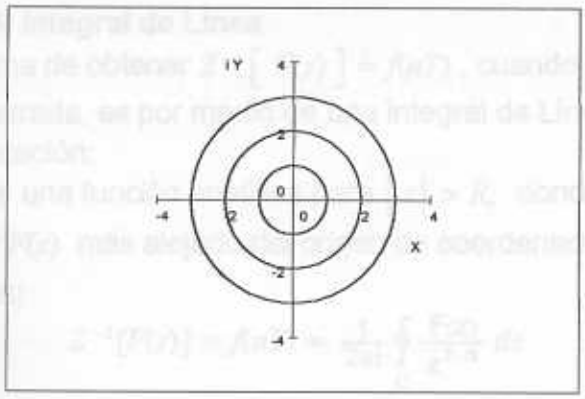
= oo =

Ejemplo 17

Dado $F(z) = \dfrac{2z^2-5z+6}{(z-3)(z-1)(z+2)}$, encontrar : $Z^{-1}\left[F(z)\right]$

Solución:

Los polinomios del numerador y del denominador son primos entre si. Además, los polos de $F(z)$ son : $z_1 = 1$, $z_2 = -2$ y $z_3 = 3$, por lo que las posibles regiones de Laurent alrededor del origren, son



$R_1 : \lvert z \rvert < 1$
$R_2 : 1 < \lvert z \rvert < 2$
$R_3 : 2 < \lvert z \rvert < 3$
$R_4 : \lvert z \rvert > 3$

(Regiones de Laurent)

De acuerdo con la definición de Transformada Z , el radio exterior de la región correspondiente debe ser infinito; por la tanto , la región para la cual la función $F(z)$ dada representa una Transformada Z es : $R_4 : \lvert z \rvert > 3$ pues sólo en dicha región se garantiza un desarrollo de Laurent con potencias de z, exlusivamente negativas.

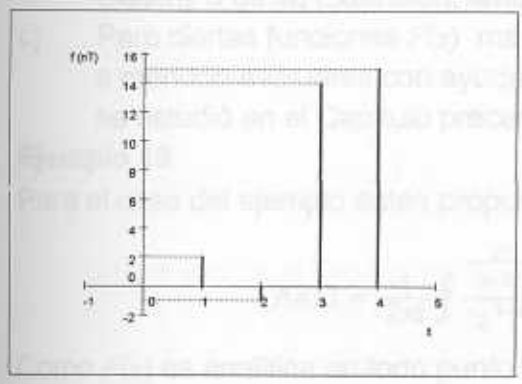
Ordenando tanto el numerador como el denominador, en potencias crecientes de z^n, se obtiene :

$$F(z) = \frac{2z^2-5z+6}{z^3-2z^2-5z+6}$$

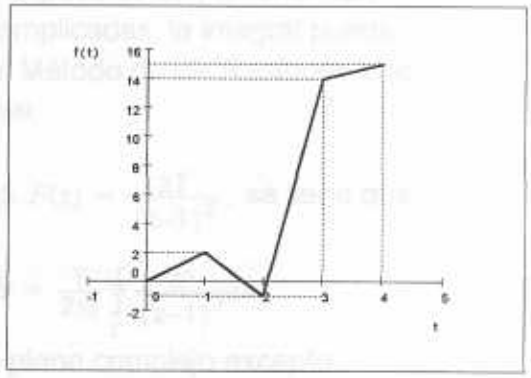
Efectuando esta división larga, se obtiene:

$$F(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{14}{z^3} + \frac{15}{z^4} + \cdots, \quad \lvert z \rvert = \rho > 3$$

NOTA : En este caso, se puede sugerir una solución para la función $f(t)$, como se ilustra en los siguientes gráficos :



($f(nT) = nT$)



($f(t)_{\text{sugerida}} = tU(t)$)

La gráfica de la izquierda corresponde a un tren de pulsos igualmente espaciados, cuya longitud es igual a $f(nT) = 0, 2, -1, 14, 15, \cdots$

La función : $f(t)_{sugerida}$ se muestra en la gráfica de la derecha.

CASO 3: Integral de Línea

Otra forma de obtener $Z^{-1}\left[\, F(z) \,\right] = f(nT)$, cuando $F(z)$ está dada en forma cerrada, es por medio de una integral de Línea como se muestra a continuación:

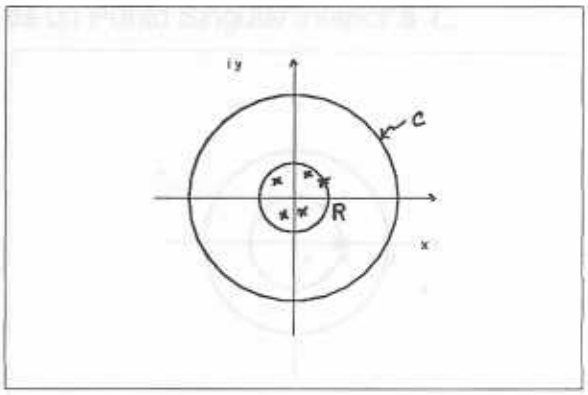
Sea $F(z)$ una función analítica para $|\, z \,| > R$, donde R es el módulo del polo de $F(z)$ más alejado del origen de coordenadas $\left(R = |\, z_j \,|_{máximo}\right)$

Entonces:

$$Z^{-1}[F(z)] = f(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(z)}{z^{1-n}}\, dz \quad , \; n = 0, 1, 2, \cdots$$

donde:

a) C es cualquier circunferencia centrada en el origen y de radio superior a R .



(Contorno $|\, z \,| = \rho > R$)

b) En ciertos caso en que $F(z)$ es una función simple, se puede evaluar la integral anterior por medio de la Fórmula Integral de Cauchy o de su Extensión, ambas expuestas con anterioridad.

c) Para ciertas funciones $F(z)$ más complicadas, la integral puede a menudo evaluarse con ayuda del Método de los Resíduos que se estudió en el Capítulo precedente.

Ejemplo 18

Para el caso del ejemplo antes propuesto, $F(z) = \dfrac{zT}{(z-1)^2}$, se tiene que:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\frac{zT}{(z-1)^2}}{z^{1-n}}\, dz = \frac{T}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n}{(z-1)^2}\, dz$$

Como $F(z)$ es analítica en todo punto del plano complejo excepto en $z = 1$, definamos como contorno de integración C la curva :

$|\, z \,| = \rho > 1$, con lo que:

$$f(nT) = \frac{T}{2\pi i}\oint \frac{z \cdot z^{n-1}}{(z-1)^2}\, dz = \frac{T}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n}{(z-1)^2}\, dz = \frac{T}{2\pi i}(2\pi i)\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[z^n\right]_{z=1}$$

De donde:

$$f(nT) = T\,n\,z^{n-1}\Big|_{z=1} = nT \quad , \; n = 0,1,2,\cdots$$

Las gráficas de $f(nT)$ y de $f(t)_{sugerida}$ son, por supuesto, las mostradas en el Ejemplo 3 inmediato anterior.

== oo ==

Ejemplo 19

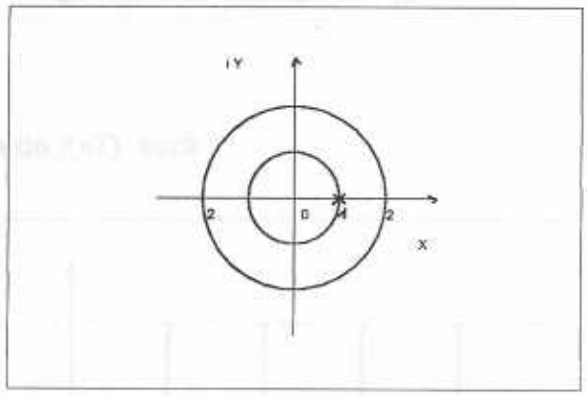
Dado $F(z) = \frac{z}{(z-1)}$, calcular : $Z^{-1}[F(z)] = f(nT)$

Solución:

$F(z) = \frac{z}{(z-1)}$ $\Rightarrow$ la única singularidad de $F(z)$ es : $z = 1$

Por lo tanto, la región de convergencia de la serie de Laurent correspondiente es : $|z| = \rho > 1$ (*radio exterior igual a infinito*).

En consecuencia, la trayectoria de integración C será : $|z| = \rho > 1$, por lo que $z = 1$ es un Punto Singular interior a C.



(Contorno : $|z| = \rho > 1$)

Por lo tanto,aplicando la Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy, se obtiene:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{F(z)}{z^{1-n}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\frac{z}{(z-1)}}{z^{1-n}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho>1} \frac{z^n}{(z-1)}dz \quad \Rightarrow$$

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[(z-1)\frac{z^n}{(z-1)}\right]_{z=1} = 1 \quad , \; \forall n = 0,1,2,\cdots$$

NOTA:

Si se desea aplicar el Teorem de Resíduo para evaluar esta integral, se tiene ($z = 1$ es un polo de orden 1):

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\,\frac{1}{1!}\frac{d^{(0}}{dz^0}\left[(z-1)\frac{z^n}{(z-1)}\right]_{z=1} = \left[z^n\right]_{z=1} = 1$$

Es decir, $f(nT) = 1 \quad , \; \forall n = 0,1,2,\cdots$

== oo ==

11.7.2) Propiedades de la Transformada Z Inversa

La Transformada Z Inversa tiene las siguientes propiedades:

a) Linealidad

La operación que define la Transformada Z Inversa es lineal, es decir,

$$Z^{-1}[aF(z)+bG(z)] = Z^{-1}[aF(z)] + Z^{-1}[bG(z)] = aZ^{-1}[F(z)] + bZ^{-1}[G(z)]\ Z^{-1} \Rightarrow$$

$$Z^{-1}[aF(z)+bG(z)] = af(nT) + bg(nT)$$

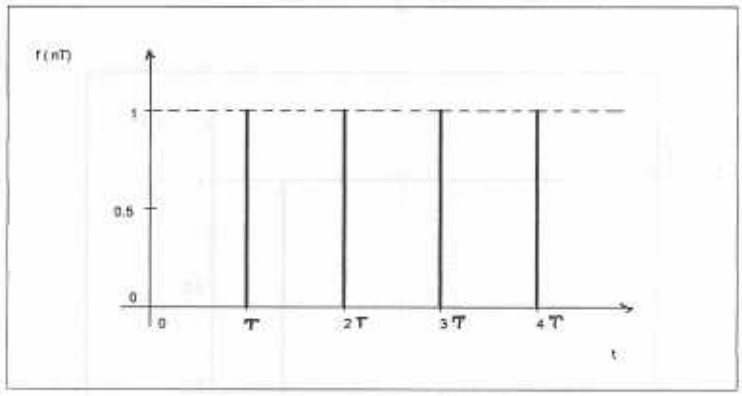
Ejemplo 20

Dado : $F(z) = \frac{z+1}{z^2}$, encontrar $f(nT)$

Solución:

$$F(z) = \frac{z+1}{z^2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = f(0) + \frac{f(T)}{z} + \frac{f(2T)}{z^2} + \cdots \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(T) = 1 \\ f(2T) = 1 \\ f(nT) = 0, \forall n \geq 3 \end{cases}$$

La gráfica de $f(nT)$ será :



$(f(nT))$

So se desea aplicar el Caso 3 (Fórmula cerrada), obtenemos:

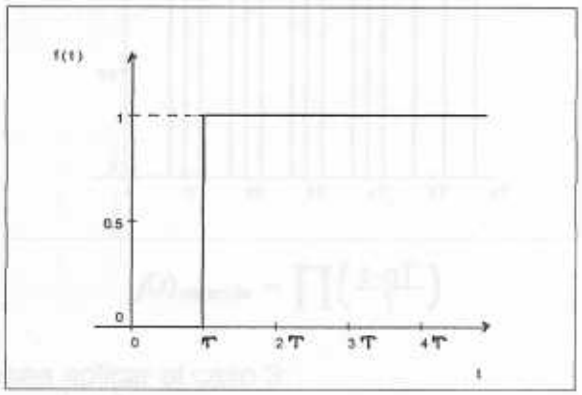
$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\left(\frac{z+1}{z}\right)}{z^{1-n}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z+1)}{z^{3-n}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho>0} \frac{(z+1)z^n}{z^3}dz \Rightarrow$$

Aplicando ahora la Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy a la integral de la derecha, obtenemos:

$$
\begin{cases}
n = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho>0} \frac{(z+1)}{z^3} dz = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\, \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}(z+1) \right]_{z=0} = 0 \\
n = 1 \Rightarrow f(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho>0} \frac{(z+1)}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\, \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dz}(z+1) \right]_{z=0} = 1 \\
n = 2 \Rightarrow f(2T) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho>0} \frac{(z+1)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\, \frac{1}{0!}\left[(z+1) \right]_{z=0} = 1 \\
n = 3 \Rightarrow f(3T) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho>0} \frac{(z+1)}{z^0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=\rho>0} (z+1) = 0, \\
n = 4, 5, 6, \cdots \Rightarrow f(nT) = 0, \quad \forall n \geq 3
\end{cases}
$$

En resumen, una gráfica de $f(t)_{sugerida}$, puede ser cualquiera de las siguientes funciones:

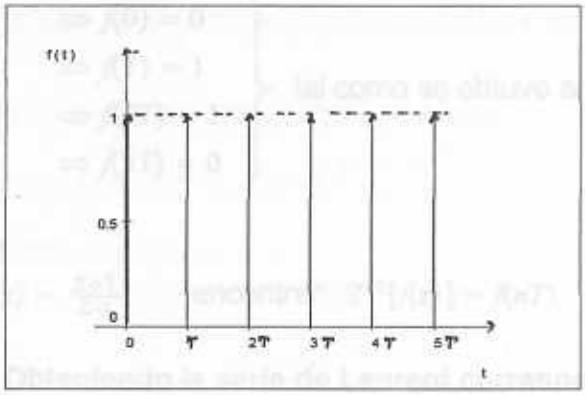
$$
a) \qquad f(t)_{sugerida} = U(t-T) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \geq T \\ 0, & \text{si } 0 \leq t < T \end{cases}
$$



$$
f(t)_{sugerida} = U(t-T)
$$

$$
= \text{oo} =
$$

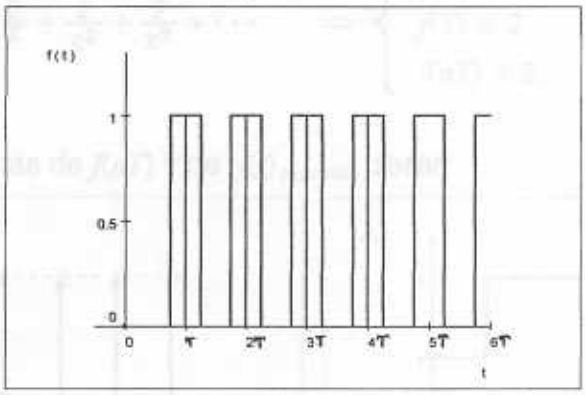
$$
b) \qquad f(t)_{sugerida} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-nT) \quad \Rightarrow
$$



$$f(t)_{sugerida} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$= \text{oo} =$$

c) $f(t)_{sugerida} = \prod\left(\frac{t-nT}{1}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$



$$f(t)_{sugerida} = \prod\left(\frac{t-nT}{1}\right)$$

Si desea aplicar el caso 3:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\left(\frac{z+1}{z^2}\right)}{z^{1-n}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z+1)}{z^{3-n}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z+1)z^n}{z^3}dz \quad \Rightarrow$$

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i) = 1, \quad \forall n = 0, 1, 2,$$

Evidentemente, para $n \geq 3$ la integral anterior se reduce a :

$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C (z+1)\, z^{n-3} dz = 0$ por el Teorema de Cauchy-Goursat.

En resumen:

$$\left.\begin{cases} n=0 & \Rightarrow f(0)=0 \\ n=1 & \Rightarrow f(T)=1 \\ n=2 & \Rightarrow f(2T)=1 \\ n\geq 3 & \Rightarrow f(3T)=0 \end{cases}\right\} \text{ tal como se obtuvo anteriormente.}$$

Ejemplo 21

Dado : $F(z)=\frac{z+1}{z-1}$, encontrar: $Z^{-1}[f(z)]=f(nT)$

Solución:

Método 1: Obteniendo la serie de Laurent correspondiente

$$F(z)=\frac{z+1}{z-1}=\frac{(z-1)+2}{z-1}=1+\frac{2}{z-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

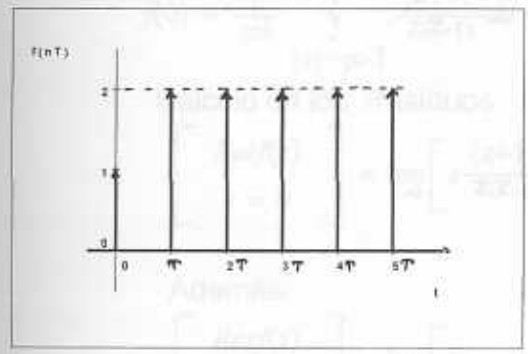
Pero: $\frac{2}{z-1}=\frac{2}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)}=\frac{2}{z}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\cdots\right]$, $\quad para: \left|\frac{1}{z}\right|<1$,

es decir, para : $|z|>1$.

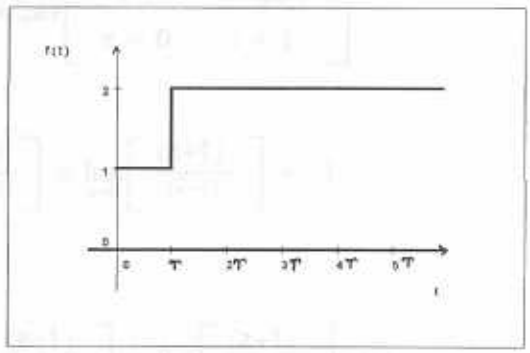
Luego, sustituyendo en (1):

$$F(z)=1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z^3}+\cdots \quad \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(T)=2 \\ f(nT)=2, \quad \forall n\geq 1 \end{cases}$$

Las gráficas de $f(nT)$ y de $f(t)_{sugerida}$, serán



($f(nT)$)



($f(t)_{sugerida}$)

donde : $\quad f(t)_{sugerida}=\delta_0(t)+2U(t-T)$

o también : $\quad f(t)_{sugerida}=U(t)-U(t-T)+2U(t-T)=U(t)+U(t-T)$

Método 2: Efectuando la división correspondiente

$$F(z)=\frac{z+1}{z-1}=1+\frac{2}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2}{z^3}+\cdots \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(T)=2 \\ f(nT)=2, \quad \forall n\geq 1 \end{cases}$$

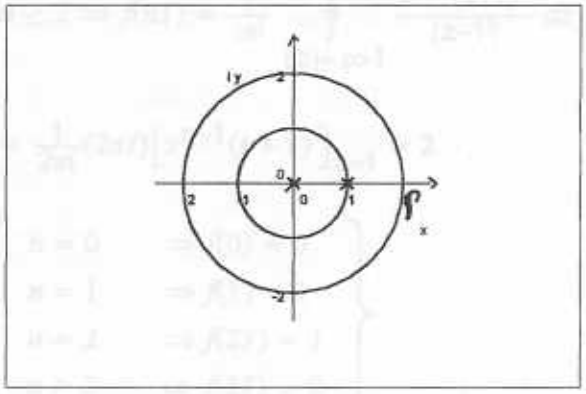
tal como se obtuvo anteriormente.

Método 3: $F(z) = \frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1} \qquad \Rightarrow f(t) = U(t) + 2U(t-T)$

Método 4: Calculando la Integral de Línea

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}{z^{1-n}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(z+1)z^{n-1}}{(z-1)}dz \qquad \Rightarrow C \text{ es la}$$

circunferencia : $|z| = \rho > 1$



$(|z| = \rho > 1)$

Para: $n = 0$

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho>1} \frac{(z+1)}{z(z-1)}dz = 2\pi i\left[\begin{matrix} Resf(z) + Resf(z) \\ z=0 \qquad z=1 \end{matrix}\right]$$

Cálculo de los Residuos:

$$\left[\begin{matrix} Resf(z) \\ z=0 \end{matrix}\right] = \lim_{z\to 0}\left[z\frac{(z+1)}{z(z-1)}\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{(z+1)}{(z-1)}\right] = -1$$

Además:

$$\left[\begin{matrix} Resf(z) \\ z=1 \end{matrix}\right] = \lim_{z\to 0}\left[(z-1)\frac{(z+1)}{z(z-1)}\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{(z+1)}{z}\right] = 2$$

Por lo tanto : $\qquad f(0) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[-1+2\right] = 1$

Para: $n = 1$

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho>1} \frac{(z+1)}{(z-1)}dz = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[\begin{matrix} Resf(z) \\ z=1 \end{matrix}\right]$$

O también, por el Teorema Integral de Cauchy se tiene que :

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i\right)\left[z+1\right]_{z=1} = 2$$

Para: $n = 2$

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho>1} \frac{\frac{(z+1)}{(z-1)}}{(z)^{1-2}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho>1} \frac{\frac{(z+1)}{(z-1)}}{(z)^{-1}} dz \Rightarrow$$

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho>1} \frac{z(z+1)}{(z-1)} dz = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[z\left(z+1 \right) \right]_{z=1} = 2$$

Evidentemente, $n \geq 2 \Rightarrow f(nT) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho>1} \frac{z^{n-1}(z+1)}{(z-1)} dz \Rightarrow$

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[z^{n-1}(z+1) \right]_{z=1} = 2$$

En resumen:

$$\left\{ \begin{array}{ll} n = 0 & \Rightarrow f(0) = 0 \\ n = 1 & \Rightarrow f(T) = 1 \\ n = 2 & \Rightarrow f(2T) = 1 \\ n \geq 3 & \Rightarrow f(3T) = 0 \end{array} \right\}$$

tal como se obtuvo anteriormente.

$$= \text{oo} =$$

11.7.3) Condición para la Existencia de la Transformada Z Inversa

Una función $F(z)$ dada no posée necesariamente una Transformada Z inversa. En efecto, si $F(z)$ no se puede descomponer en serie de Laurent de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^{-n} \quad , \quad C_n = f(nT) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

no es posible obtener la Transformda Z inversa.

Por ejemplo, las funciones : $\frac{z^3 - 1}{z}$, sen(z), no tienen transformada Z inversa, Obsérvese que ninguna de ellas posée límite cuando $z \to \infty$ y una función $F(z)$ que se pueda desarrollar en serie de Laurent de la forma deseada, debe tener límite cuando $z \to \infty$. Dicho límite es $C_0 = f(0)$, es decir,

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = f(0) \neq \infty$$

$$= \text{oo} =$$

11.7.4) Ejemplos Resueltos III

Ejemplo 22

Encontrar : $Z^{-1}\left[\frac{z}{3z^2 - 4z + 1} \right]$

a) En la región $|z| > 1$

b) En la región $\frac{1}{3} < |z| < 1$

Solución:

Método 1: Descomposición en fracciones simples

Este problema puede ser resuelto por el método de la "división larga", para lo cual debemos ordenar numerador y denominador en potencias crecientes de z^n.
Sin embargo, haciéndolo por este camino, no tenemos seguridad de que podamos llegar a una forma cerrada como respuesta. Por esta razón, factorizaremos el denominador de la expresión dada y usemos el método de descomposición en fracciones simples.
Observemos que se necesita una z en el numerador a fin de encontrar la Transformada Inversa usando directamente la Tabla antes mostrada; en consecuencia, se tiene:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{3z^2-4z-1} = \frac{1}{3(z-1)(z-1/3)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z-1/3)}\right]$$

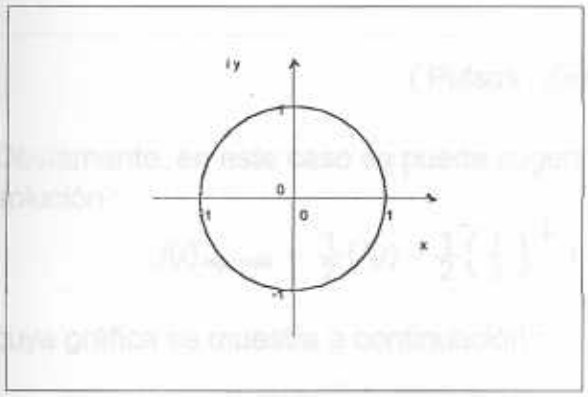
Por lo que :

$$F(z) = \frac{1}{2}\left[\frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{(z-1/3)}\right] = F_1(z) + F_2(z), \qquad |z| > 1$$

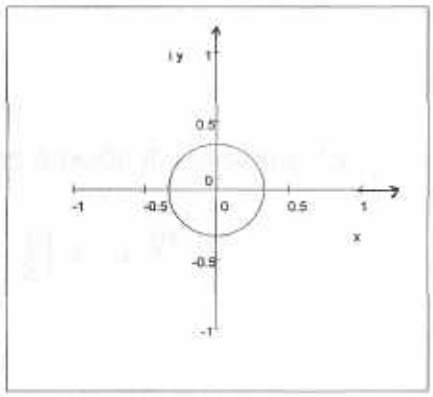
Entrando en la Tabla anteriormente mostrada, se obtiene :

$$\begin{cases} \text{Primera fracción :} \quad F_1(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)} \Rightarrow Z^{-1}[F_1(z)] = \frac{1}{2}U^*(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \\ \text{Segunda fracción :} \quad F_2(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1/3)} \Rightarrow Z^{-1}[F_2(z)] = \frac{1}{2}\left[(\tfrac{1}{3})^{\frac{t}{T}}\, U(t)\right]^* \end{cases}$$

En ambos casos, hemos usado el símbolo (*) para denotar la salida del Modulador con constante de tiempo T.
Las respectivas regiones de convergencia se muestran a continuación:



$(|z| > 1)$



$(|z| > 1/3)$

Luego,

a) Para $|z| > 1$ ambas fraciones parciales son válidas, por lo que, en este caso :

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{3z^2-4z+1}\right] = \frac{1}{2}Z^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{(z-1/3)}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

pero:

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)}\right] = U^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{(z-1/3)}\right] = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{T}}\right]^* = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{nT}{T}}\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}\delta(t-nT) \qquad \ldots (3)$$

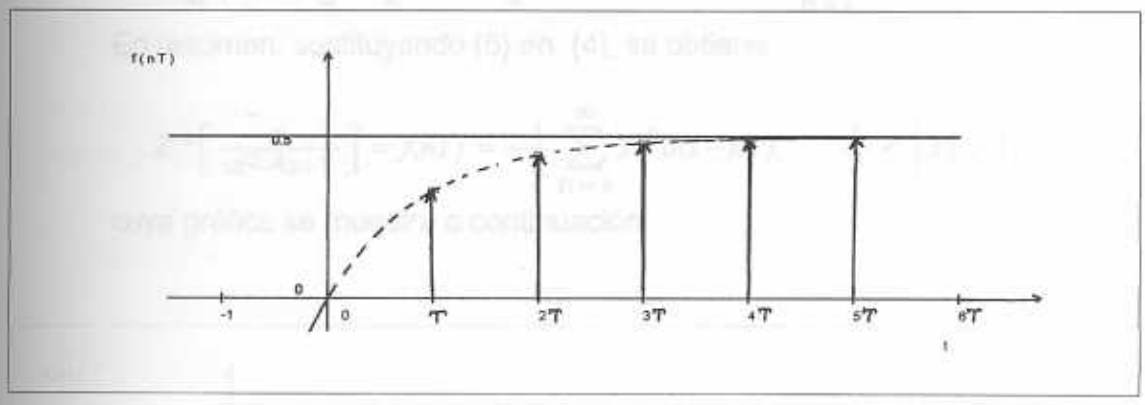
En resumen, sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene :

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{3z^2-4z+1}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}\delta(t-nT)$$

O también :

$$f(nT) = Z^{-1}\left[\frac{z}{3z^2-4z+1}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-3^{-n}\right)\delta(t-nT) \quad , \quad |z| > 1$$

cuya gráfica se muestra a continuación:

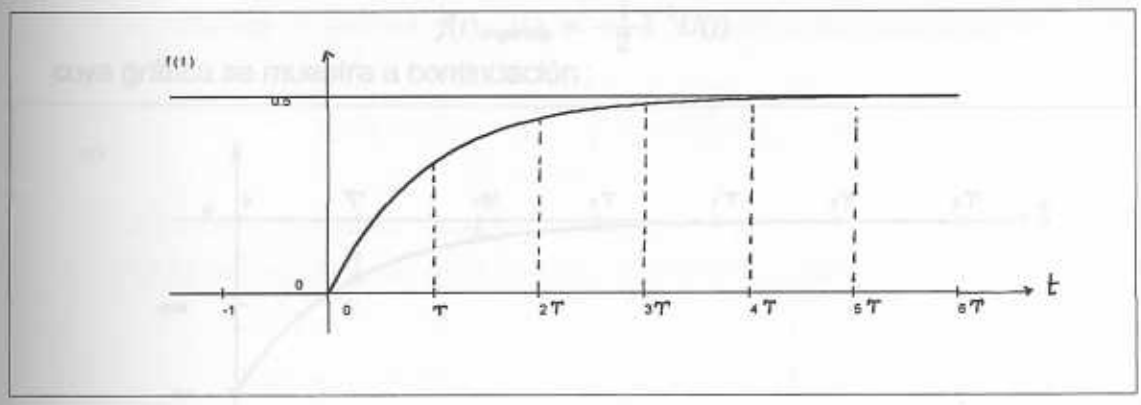


(Pulsos : $f(nT)$)

Obviamente, en este caso se puede sugerir como función $f(t)$ la siguiente solución :

$$f(t)_{sugerida} = \frac{1}{2}U(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{T}} U(t) = \frac{1}{2}\left[\,1-3^{-t/T}\,\right]U(t)$$

cuya gráfica se muestra a continuación :



($f(t)_{sugerida}$)

b) Para el dominio : $\frac{1}{3} < |z| < 1$ la fracción parcial $\frac{1}{(z-1)}$ no es válida, por lo que, en este caso:

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{3z^2-4z+1}\right] = \frac{1}{2}Z^{-1}\left[-\frac{1}{(z-1/3)}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

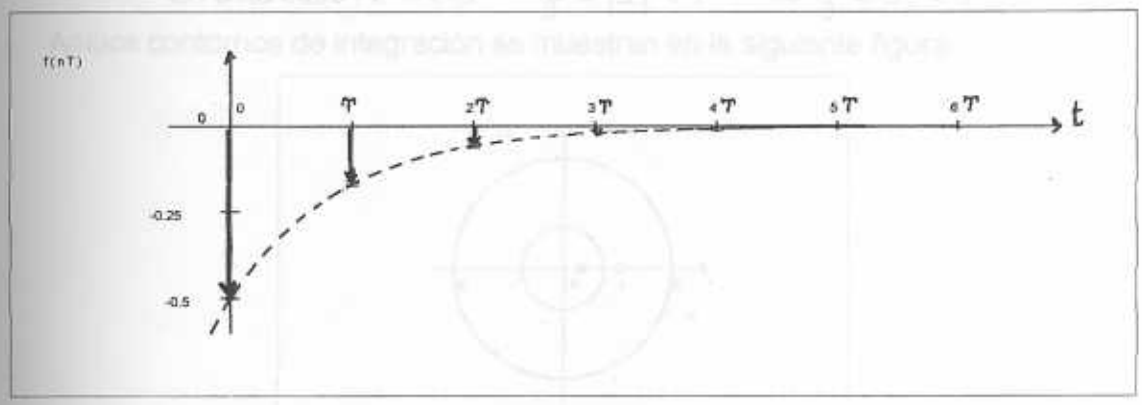
pero:

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{(z-1/3)}\right] = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{T}}\right]^{*} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{nT}{T}}\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}\delta(t-nT) \qquad \ldots (5)$$

En resumen, sustituyendo (5) en (4), se obtiene :

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{3z^2-4z+1}\right] = f(nT) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}\delta(t-nT), \qquad \frac{1}{3} < |z| > 1$$

cuya gráfica se muestra a continuación:

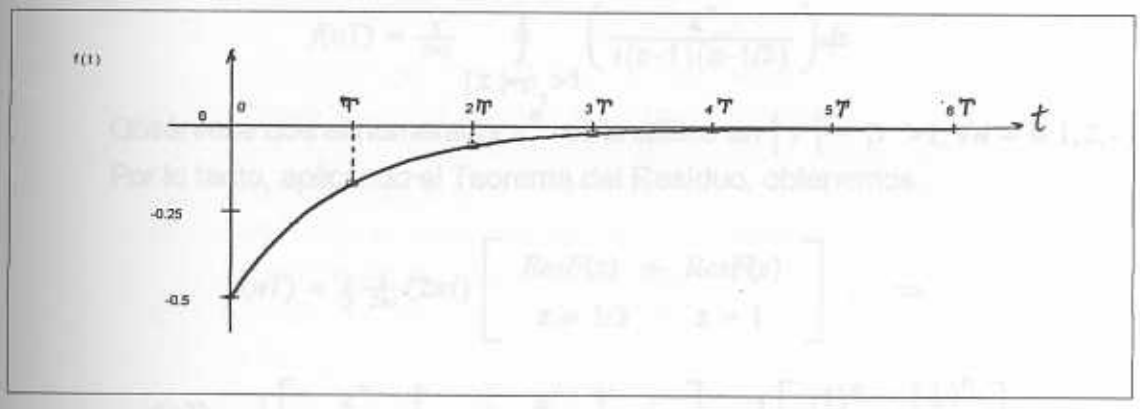


(Pulsos : $f(nT)$)

Obviamente, en este caso se puede sugerir como función $f(t)$ la siguiente solución :

$$f(t)_{sugerida} = -\frac{1}{2}3^{-t}U(t)$$

cuya gráfica se muestra a continuación :



($f(t)_{sugerida}$)

Método 2: Aplicando la Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy (O el Teorema del Resíduo)

Por este método se obtiene:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\frac{z}{3(z-1)(z-1/3)}}{z^{1-n}}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^n}{3(z-1)(z-1/3)}dz \quad \Rightarrow$$

Los puntos singulares del integrando son : $\begin{cases} z_1 = 1/3 \\ z_2 = 1 \end{cases}$

por lo tanto, el contorno de integración C será :

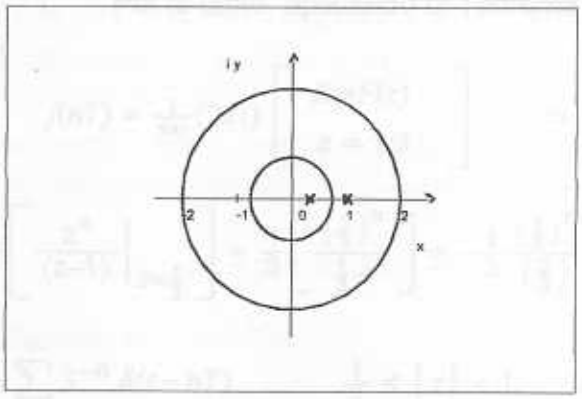
Caso a: Dominio $|z| > 1$

En este caso : $C = C_1 / \quad |z| > 1 \quad \Rightarrow \rho_1 > 1$

Caso b: Dominio $\frac{1}{3} < |z| < 1$

En este caso : $C = C_2 / \quad \frac{1}{3} < |z| < 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{3} < \rho_2 < 1$

Ambos contornos de integración se muestran en la siguiente figura



(Contornos C_1 y C_2)

a) **Dominio:** $|z| > 1$

Los puntos singulares $z_1 = 1/3$ y $z_2 = 1$, son ambos interiores al contorno $C_1 : |z| > 1$, luego:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_1>1} \left(\frac{z^n}{3(z-1)(z-1/3)} \right) dz$$

Obsérvese que el numerador z^n es analítico en $|z| = \rho > 1, \forall n = 0,1,2,\cdots$
Por lo tanto, aplicando el Teorema del Resíduo, obtenemos:

$$f(nT) = \frac{1}{3}\frac{1}{2\pi i}(2\pi i) \left[\underset{z=1/3}{ResF(z)} + \underset{z=1}{ResF(z)} \right] \Rightarrow$$

$$f(nT) = \frac{1}{3}\left[\frac{z^n}{(z-1/3)}\bigg|_{z=1} + \frac{z^n}{(z-1)}\bigg|_{z=1/3} \right] = \frac{1}{3}\left[\frac{(1)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(-\frac{2}{3}\right)} \right]$$

de donde:

$$f(nT) = \frac{1}{2}(1+3^{-n}) \quad , \quad |z| > 1, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

o también : $$f(nT) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1+3^{-n})\delta(t-nT)$$

b) **Dominio:** $\frac{1}{3} < |z| < 1$

En este caso la trayectoria de integración es :$C_2 : \frac{1}{3} < |z| < 1$, por lo que sólo el punto singular $z_1 = 1/3$ es interior a ella.
En consecuencia: $\frac{1}{2} < \rho_2 < 1$

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho_2} \left(\frac{z^n}{3(z-1)(z-1/3)} \right) dz = \frac{1}{6\pi i} \oint_{|z|=\rho_2} \left(\frac{\frac{z^n}{(z-1)}}{(z-1/3)} \right) dz$$

Obsérvese que el numerador $\frac{z^n}{(z-1)}$ es analítico en $|z| = \rho_2 > 1$, $\forall n = 0,1,2,\cdots$. Por lo tanto, aplicando el Teorema del Resíduo, obtenemos:

$$f(nT) = \frac{1}{6\pi i}(2\pi i) \left[\underset{z=1/3}{ResF(z)} \right] \Rightarrow$$

$$f(nT) = \frac{1}{3}\left[\frac{z^n}{(z-1)}\bigg|_{z=\frac{1}{3}} \right] = \frac{1}{3}\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}-1} \right] = -\frac{1}{3}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)} = -\frac{1}{2}(3)^{-n}$$

de donde:

$$f(nT) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}\,\delta(t-nT) \quad , \quad \frac{1}{3} < |z| < 1, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

= oo =

11.7.4) Ejercicios Propuestos

1°) Dada la función: $F(z) = \dfrac{8z^2}{z^3 - 3z^2 - z + 3}$

a) Descomponga $F(z)$ en fracciones simples.

b) Ubique los polos de $F(z)$ en el plano complejo.

c) Determine y grafique las posibles regiones válidas para un eventual desarrollo en serie de Laurent, alrededor del origen.

d) Determine el desarrollo en serie de Laurente que sea válido en cada una de las regiones antes calculadas.

e) Efectúe las dos " divisiones largas " de interés para la función $F(z)$ dada.

f) Escriba al menos cinco (5) conclusiones sobre los resultados obtenidos en los literales $a)$ hasta $e)$.

= oo =

2°) Dada la función: $F(z) = \dfrac{8z^2}{z^3 - 3z^2 - z + 3}$

Evalúe la integral $: I = \oint_{|z| = \rho} F(z)dz$ siendo ρ tal que :

a) $\rho < 1$; *b)* $1 < \rho < 3$: *c)* $\rho > 3$

d) Determine $Z^{-1}\left[\, F(z) \,\right]$ por tres (3) métodos diferentes.

e) Sugiera una solución para $f(t)$, en correspondencia con los métodos antes citados.

f) Determine los valores de: $f(0)$, $f(T)$ y $f(\infty)$

g) Sugiera una gráfica para la función $f(t)$.

= oo =

11.8) TRAMSFORMADA Z INVERSA DEL PRODUCTO DE DOS FUNCIONES DE z

Supongamos que tenemos dos funciones $F(z)$ y $G(z)$ y que conocemos sus transformadas inversas $f(nT)$ y $g(nT)$, respectivamenete. ¿Podemos calcular directamente $Z^{-1}\left[\, f(z) \cdot G(z) \,\right]$? La respuesta es afirmativa. Para demostrarlo, es preciso definir previamente el concepto de Convolución de $f(t)$ con $g(t)$, que se denota por : $f(t) * g(t)$ y se escribe :

$$Convolución\ de\ f(t)\ con\ g(t) = f(t) * g(t)$$

11.8.1) Definición de Convolución

La convolución de $f(t)$ con $g(t)$ se define por :

$$f(t) * g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot g\left[\ (n-k)T\right], \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

De esta definición se deduce de inmediato que :

$$g(t) * f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(kT) \cdot f\left[\ (n-k)T\right] = f(t) * g(t), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

es decir, la operación matemática que define la convolución de dos funciones, admite la propiedad conmutativa, cuando $f(t)$ y $g(t)$ son iguales a cero para $t < 0$. Obsérvese que, en ambas sumatorias, basta con sumar los términos desde $k = 0$ hasta $k = n$.

11.8.2) Transformada Z de la Convolución

La función $g(t) * f(t)$ define una función de la variable (nT), donde: $n = 0,, 1, 2, \cdots$

Sea :

$$h(T) = f(t) * g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot g[(n-k)T]\ , \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Por definición de Transformada Z , se tiene que:

$$Z\left[\ h(T)\ \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot g\left[\ (n-k)T\right] \right\} z^{-n}$$

Hagamos: $(n-k) = m \qquad \Rightarrow n = k + m$, por lo que:

$$Z[h(T)] = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{K=0}^{\infty} f(kT) \cdot g(mT) \right\} z^{-(k+m)}$$

De donde:

$$Z\left[\ h(T)\ \right] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g(mT) \cdot z^{-m} \qquad \ldots (1)$$

Pero: $\left\{ \begin{array}{l} m = n - k \\ n = 0 \Rightarrow \text{ el primer valor de } m \text{ es : } m = -k \end{array} \right\}$, sustituyendo en (1)

$$Z\,[h(T)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k} \cdot \sum_{m=-k}^{\infty} g(mT) \cdot z^{-m} \qquad \ldots (2)$$

Además, por hipótesis se tiene que: $f(t),\ g(t) = 0, \forall t < 0,$ por lo que :

$$\sum_{m=-k}^{0} g(mT) \cdot z^{-m} = 0$$

En consecuencia, el subíndice : $m = -k$ se puede sustituir en la segunda sumatoria por : $m = 0$.

Así hemos obtenido que la ecuación (2) puede escribirse como :

$$[h(T)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} g(mT) \cdot z^{-m} \quad \ldots (3)$$

Pero, obsérvese que, por definición de transformada Z, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot z^{-k} = Z[f(t)] = F(z) \\ \sum_{m=0}^{\infty} g(mT) \cdot z^{-m} = Z[g(t)] = G(z) \end{array} \right\}, \quad si\ f(t) = g(t) = 0, \forall t < 0$$

Se obtiene así el importante resultado:

$$\boxed{Z\left[\, h(t) \,\right] = Z\left[\, f(t) * g(t) \,\right] = F(z) \cdot G(z)}$$

En resumen :

a) La Transformada Z de la convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, es igual al producto de las respectivas transformadas Z de dichas funciones. Y recíprocamente:

b) La Transformada Z Inversa del producto de las transformadas Z de dos funciones, es igual a la convolución de dichas funciones.

En otras palabras :

a) $\boxed{Z[f(t) * g(t)] = F(z) \cdot G(z)}$

b) $\boxed{Z^{-1}\left[\, F(z) \cdot G(z) \,\right] = f(t) * g(t) = h(nT)}$

= oo =

11.8.3) Tabla Resumen

Se resume a continuación las principales características de la Transformada Z y de su respectiva Transformada Inversa:

	$f(t)$	*Transformada* $Z = Z[f(t)] = F(z)$	$Z^{-1}[F(z)]$
1	$f(t)$	$Z[f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n}$	$Z^{-1}[F(z)] \neq f(t)$ $Z^{-1}[F(z)] = f^*(t) = f(nT)$
2	$f(t)$	$F(z)$	$Z^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lvert z\rvert=\rho} \frac{F(z)}{z^{1-n}} dz$
3	$f(t) \cdot g(t)$	$Z\left[f(t) \cdot g(t) \right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{w=\rho} \frac{F(w) \cdot G(\frac{z}{w})}{w} dw$	$Z^{-1}\left[F(z) \cdot G(z) \right] = f(t) * g(t)$

= oo =

11.8.4) Ejemplos Resueltos IV

Ejemplo 23

Valiéndose del concepto de Convolución, determine:

$$Z^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-e^{aT})(z-1)} \right] = h(nT)$$

Solución :

Método 1: Aplicando el concepto de Convolución

Escribiendo de nuevo la expresión que está entre corchetes y usando el concepto de convolución, se obtiene:

$$Z^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-e^{aT})(z-1)} \right] = Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-e^{aT})} \cdot \frac{z}{(z-1)} \right] = f(t) * g(t)$$

donde:

$$f(nT) = Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-e^{aT})} \right] \quad \text{y} \quad g(nT) = Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)} \right]$$

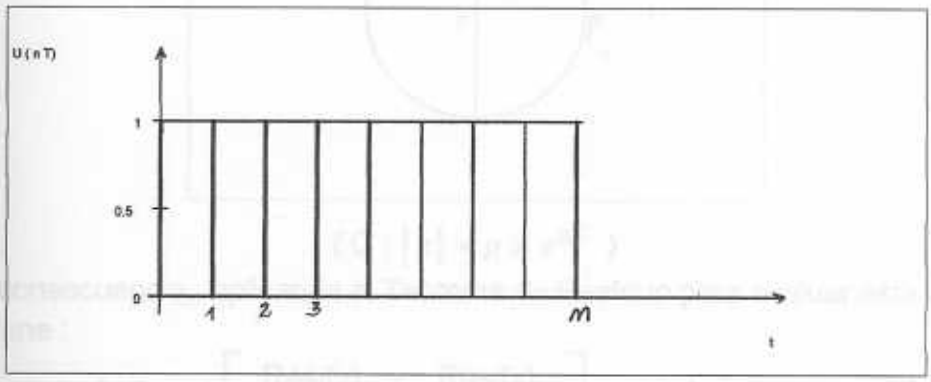
Podemos usar la Tabla de Transformadas Z para encontrar que:

$$\begin{cases} f(nT) = e^{at} U(t) \\ g(nT) = U^*(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \end{cases}$$

Efectuando la convolución de estas dos funciones, obtenemos :

$$h(nT) = f(t) * g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{akT} \delta_T[(n-k)T]$$

Pero : $\delta_T[(n-k)T] = \left\{ \begin{array}{l} 0\,,\ \text{si}\ n-k<0 \Rightarrow k>n \\ 1\,,\ \text{si}\ n-k\geq 0 \Rightarrow k\leq n \end{array} \right\}$, tal como se ilustra a continuación:



$\delta_T[(n-k)T]$

Podemos entonces escribir la expresión anterior de la siguiente manera :

$$h(nT) = \sum_{k=0}^{n} e^{akT} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{aT}\right)^{k} = 1 + e^{aT} + e^{2aT} + e^{3aT} + e^{4aT} + \cdots$$

resultado este que constituye una serie geométrica finita, por lo que :

$h(nT) = \frac{a_1-(R)^{n+1}}{1-R}$; tomando: $\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ R = e^{aT} \end{array} \right\}$, obtenemos :

$$h(nT) = \frac{1-\left(e^{aT}\right)^{n+1}}{1-e^{aT}}$$

En definitiva:

$$Z^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-e^{aT})(z-1)}\right] = h(nT) = \frac{1-e^{a(n+1)T}}{1-e^{aT}} = \frac{e^{a(n+1)T}-1}{e^{aT}-1}$$

Método 2: Aplicando la Integral de Línea

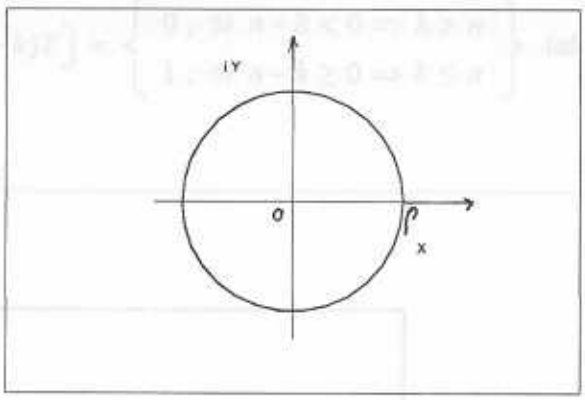
Para la función dada, $H(z) = \frac{z^2}{(z-e^{aT})(z-1)}$ se obtiene:

$$h(nT) = Z^{-1}\left[\frac{z^2}{(z-e^{aT})(z-1)}\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho} \frac{\frac{z^2}{(z-e^{aT})(z-1)}}{z^{-n+1}}dz \quad \Rightarrow$$

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho} \frac{z^{n+1}}{(z-e^{aT})(z-1)}dz$$

Los polos del integrando son: $\left\{ \begin{array}{l} z = e^{aT} > 1, \ \text{ya que}\ a,T>0 \\ z = 1 \end{array} \right.$

Por lo tanto, la trayectoria de integración será . $|z| = \rho > e^{aT}$



$$(C : |z| = \rho > e^{aT})$$

En consecuencia, aplicando el Teorema de Resíduo para evaluar esta integral, se obtiene :

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi i}\left(2\pi i \right)\left[\underset{z = e^{aT}}{\text{Res} f(z)} + \underset{z = 1}{\text{Res} f(z)} \right] = \frac{z^{n+1}}{(z-1)}\bigg|_{z=e^{aT}} + \frac{z^{n+1}}{(z-e^{aT})}\bigg|_{z=1}$$

De donde :

$$h(nT) = \frac{e^{aT(n+1)}}{(e^{aT}-1)} + \frac{1}{\left(1-e^{aT}\right)} = \frac{e^{aT(n+1)}-1}{(e^{aT}-1)}$$

tal como se obtuvo anteriormente.

== oo ==

Ejemplo 24

Dada: $H(z) = \dfrac{z^2}{(z+2)(z+1)}$, *calcular* : $Z^{-1}\left[H(z) \right]$

Solución :

$$H(z) = \frac{z^2}{(z+2)(z+1)} = \frac{z}{(z+2)}\frac{z}{(z+1)}$$

Luego, entrando en la Tabla de Transformadas Z, se obtiene:

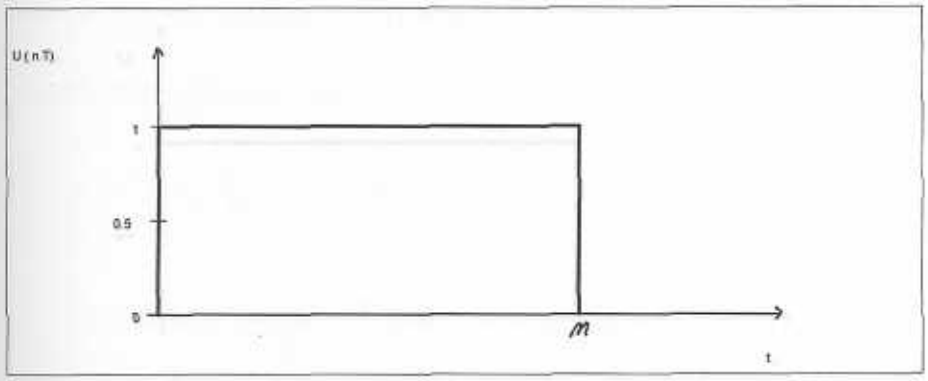
$$\begin{cases} F(z) = \dfrac{z}{(z+2)} \Rightarrow f(t) = (-2)^{\frac{t}{T}} U(t) \\ G(z) = \dfrac{z}{(z+1)} \Rightarrow g(t) = (-1)^{\frac{t}{T}} U(t) \end{cases}$$

Por lo tanto, aplicando el concepto de convolución, se obtiene .

$$Z^{-1}\left[H(z) \right] = f(t) * g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot g[(n-k)T] \qquad \Rightarrow$$

$$Z^{-1}\left[H(z) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^{\frac{kT}{T}} \cdot (-1)^{\frac{(n-k)T}{T}} U[(n-k)T]$$

Pero : $U\left[\,(n-k)T\right] = \left\{ \begin{array}{l} 0\,,\ \text{si}\ n-k<0 \Rightarrow k>n \\ 1\,,\ \text{si}\ n-k\geq 0 \Rightarrow k\leq n \end{array} \right\}$ tal como se ilustra a continuación:



$U[(n-k)T]$

Podemos entonces escribir la expresión anterior de la siguiente manera :

$$Z^{-1}\left[\,H(z)\,\right] = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^{k}\cdot(-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(2)^{k}(-1)^{k}\cdot(-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n}(2)^{k}$$

$$Z^{-1}\left[\,H(z)\,\right] = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n}(2)^{k}$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 25

Dada: $H(z) = \dfrac{z^4}{(z^2+1)^2}$, $\quad$ *calcular* : $Z^{-1}\left[\,H(z)\,\right]$

Solución :

$$H(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2}\,\frac{z^2}{(z+1)^2}$$

Luego, entrando en la Tabla de Transformadas Z, se obtiene:

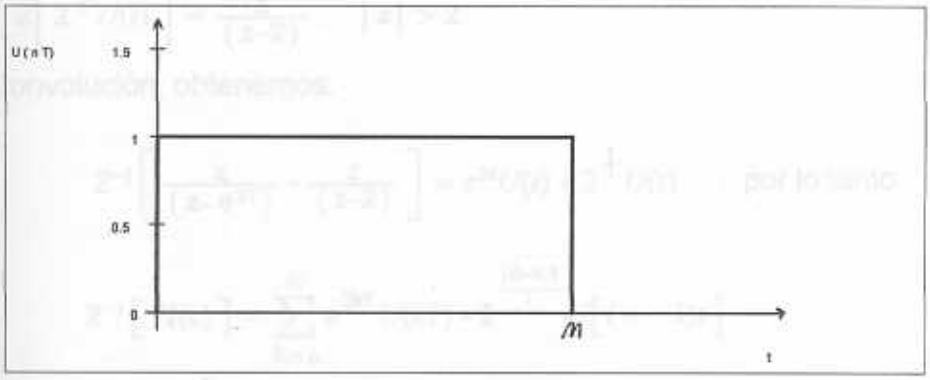
$$\left\{ F(z) = G(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2} \Rightarrow f(t) = \cos t U(t) \Leftrightarrow T = \frac{\pi}{2} \right.$$

Por lo tanto,

$$Z^{-1}[H(z)] = f(t) * g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\cdot g\left[\,(n-k)T\right] \quad \Rightarrow$$

$$Z^{-1}[H(z)] = \sum_{k=0}^{\infty}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left[(n-k)\frac{\pi}{2}\right]U\left[\,(n-k)T\right]$$

Pero : $U[(n-k)T] = \left\{ \begin{array}{l} 0\,,\ \text{si}\ n-k<0 \Rightarrow k>n \\ 1\,,\ \text{si}\ n-k \geq 0 \Rightarrow k \leq n \end{array} \right\}$ tal como se ilustra a continuación:



$U[(n-k)T]$

Podemos entonces escribir la expresión anterior de la siguiente manera :

$$Z^{-1}[H(z)] = \cos(\tfrac{n\pi}{2}) + 0 - \cos(n-2)\frac{\pi}{2} + 0 + \cos(n-4)\frac{\pi}{2} + 0 - \cos(n-6)\frac{\pi}{2} + \cdots$$

$$h(nT) = h(n\tfrac{\pi}{2}) = Z^{-1}[H(z)] = \cos(n)\frac{\pi}{2} - \cos(n-2)\frac{\pi}{2} + \cos(n-4)\frac{\pi}{2} - \cos(n-6)\frac{\pi}{2} + \cdots \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n=0 \Rightarrow h(0) = 1+1+\cdots+1\cdots = \infty \\ n=1 \Rightarrow h(T) = 0 \\ n=2 \Rightarrow h(2T) = -1-1-\cdots-1\cdots = -\infty \\ n=3 \Rightarrow h(3T) = 0 \\ n=4 \Rightarrow h(4T) = 1+1+\cdots+1\cdots = \infty \end{array} \right.$$

== oo ==

Ejemplo 26

Dado $H(z) = \dfrac{z^2}{(z-e^{3T})(z-2)}$

Demuestre que: $Z^{-1}\left[\,H(z)\,\right] = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2^n - \left(\frac{e^{3T}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{3T}}{2}}, & \text{si}\ \dfrac{e^{3T}}{2} > 1 \\ \dfrac{2^n}{1-\frac{e^{3T}}{2}}, & \text{si}\ \dfrac{e^{3T}}{2} < 1 \end{array} \right.$

Solución:

Método 1

Evidentemente, $H(z) = \dfrac{z}{(z-e^{3T})} \cdot \dfrac{z}{(z-2)}$

Usando la Tabla de Transformadas se puede obtener:

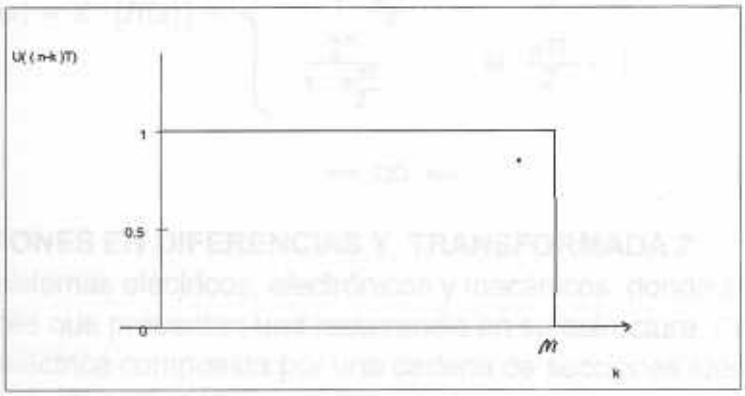
$$\begin{cases} Z\left[\, e^{3t}U(t)\,\right] = \dfrac{z}{(z-e^{3T})}\ , & |z| > e^{3T} \\ Z\left[\, 2^{\frac{t}{T}}U(t)\,\right] = \dfrac{z}{(z-2)}\ , & |z| > 2 \end{cases}$$

por lo tanto, aplicando el Principio de Convolución, obtenemos:

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-e^{3T})}\cdot\frac{z}{(z-2)}\right] = e^{3t}U(t) * 2^{\frac{t}{T}}U(t)$$, por lo tanto:

$$Z^{-1}\left[\,H(z)\,\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{3kT}U(kT)\cdot 2^{\frac{(n-k)t}{T}}\,U\left[\,(n-k)t\,\right]$$

Pero :
$$\begin{cases} U(kT) = 1\ ,\ \forall k > 0 \\ U[(n-k)t] = \begin{cases} 1\ ,\ \text{si}\ n-k \geq 0 \rightarrow k \leq n \\ 0\ ,\ \text{si}\ k > n \end{cases} \end{cases}$$



Por lo tanto:

$$h(nt) = Z^{-1}[H(z)] = \sum_{k=0}^{n} e^{3kT}\cdot 2^{n-k}$$

De donde:

$$h(nt) = 2^{n} + e^{3T}2^{n-1} + e^{6T}2^{n-2} + e^{9T}2^{n-3} + e^{12T}2^{n-4} + \cdots$$

Evidentemente, $h(nt)$ es una serie geomérica en donde:

$$\begin{cases} a_1 = 2^{n} \\ Razón = \dfrac{e^{3kT}\cdot 2^{n-1}}{2^{n}} = e^{3T}2^{-1} = \dfrac{e^{3T}}{2} \end{cases}$$

por lo que:

$$h(nt) = Z^{-1}[H(z)] = \begin{cases} \dfrac{2^n - \left(\frac{e^{3T}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{3T}}{2}}, & \text{si } \dfrac{e^{3T}}{2} > 1 \\ \dfrac{2^n}{1-\frac{e^{3T}}{2}}, & \text{si } \dfrac{e^{3T}}{2} < 1 \end{cases}$$

Método 2 :

$$h(nt) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C H(z)\cdot z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^2}{(z-e^{3T})(z-2)}z^{n-1}dz \Rightarrow$$

$$h(nt) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^{n+1}}{(z-e^{3T})(z-2)}dz = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\left[\underset{z=e^{3T}}{ResF(z)} + \underset{z=2}{ResF(z)}\right] \Rightarrow$$

$$h(nt) = \frac{z^{n+1}}{(z-2)}\bigg|_{z=e^{3T}} + \frac{z^{n+1}}{(z-e^{3T})}\bigg|_{z=2} = \frac{(e^{3T})^{n+1}}{(e^{3T}-2)} + \frac{2^{n+1}}{(2-e^{3T})} = \frac{2^{n+1}-(e^{3T})^{n+1}}{(2-e^{3T})}$$

Dividiendo por 2, se obtiene:

$$h(nt) = Z^{-1}[H(z)] = \begin{cases} \dfrac{2^n - \left(\frac{e^{3T}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{3T}}{2}}, & \text{si } \dfrac{e^{3T}}{2} > 1 \\ \dfrac{2^n}{1-\frac{e^{3T}}{2}}, & \text{si } \dfrac{e^{3T}}{2} < 1 \end{cases}$$

== oo ==

11.9) ECUACIONES EN DIFERENCIAS Y TRANSFORMADA Z

Existen sistemas eléctricos, electrónicos y mecánicos donde se presentan ecuaciones que presentan una recurrencia en su estructura. Por ejemplo, una red eléctrica compuesta por una cadena de secciones idénticas: filtros, amplificadores multi-etapa, resortes aislados, etc, tal como se esquematiza en la figura 11.9

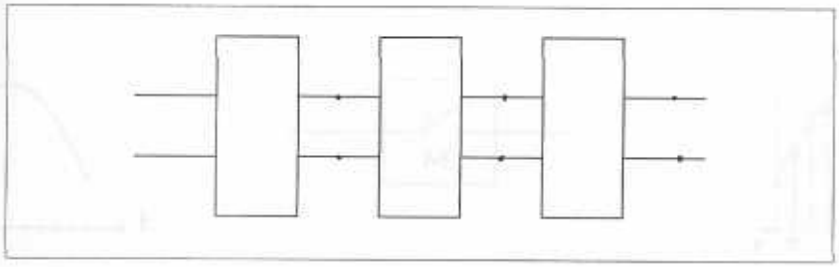


Fig. 11.9 : Conexión en cascada

Estos sistemas se analizan en forma óptima por el método de " Ecuaciones en Diferencias ", una por cada sección. La solución de una Ecuación en

Diferencia, para una sección típica, seria suficiente.
Se presenta a continuación las técnicas de la Transformada Z para resolver Ecuaciones en Diferencias.

Ecuación General:

Mientras las ecuaciones diferenciales contienen derivadas de la variable dependiente, por ejemplo :

$$\frac{d^2w}{dt^2} + a_1 \frac{dw}{dt} + a_0 w = g(t)$$

constituye una Ecuación Diferencial de 2° orden.

En su defecto, las ecuaciones en Diferencias contienen, como su nombre lo sugiere, diferencias de valores de la variable dependiente, espaciados a intervalos iguales, los cuales corresponden a valores discretos de la variable dependiente.

Como ya se explicó, estos valores discretos de la variable independiente y los correspondientes valores de la variable dependiente, se obtienen haciendo uso del siguiente dispositivo (Ver figura 11.10):

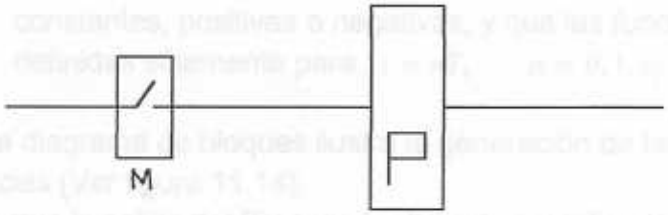


Fig. 11.10

Como lo sugiere la figuras 11.11, 11.12 y 11.13 mostradas a continuación, a la salida del " *Switche*" se obtienen valores discretos de la variable dependiente $f(t)$, espaciados a intervalos iguales, para valores discretos de la variable independiente t.

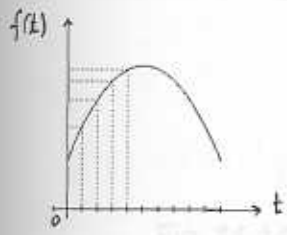


Fig.11.11 : Señal $f(t)$

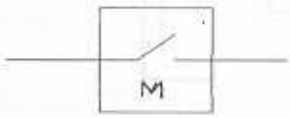
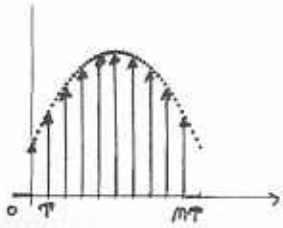


Fig.11.12: Muestreador M



Fig,11.13: Salida f (nT)

Dichos valores estan dados por :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Valores discretos de la variable dependiente : } f(nT)\\ \text{Valores discretos de la variable independiente : } t = nT\end{array}\right\}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Por lo tanto, la ecuación general de una Ecuación en Diferencias se genera inyectando la señal : $f^*(t) = f(nT)$ a un Procesador (P), cuya responsabilidad será generar mediante algoritmo específico, una señal de salida del mismo, de la forma:

$$g(t) = a_0 f\left[\, t + nT \,\right] + a_1 f\left[\, t + (n-1)T \,\right] + a_2 f\left[\, t + (n-2)T \,\right] + \cdots + a_n f(t)$$

donde:

* $g(t)$ debe estar definida para estos valores de t, y se conoce como función exitación.
* $n = 0,1,2,\ldots$
* Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ pueden ser funciones conocidas de "t".

  Por simplicidad, consideraremos que estos coeficientes son constantes, positivas o negativas, y que las funciones f están definidas sólamente para : $t = nT, \quad n = 0,1,2,\ldots$.

El siguiente diagrama de bloques ilustra le generación de las Ecuaciones en Diferencias (Ver figura 11.14).
Obsérvese que la salida del Procesador ha sido amplificada por un factor "A" y luego filtrada por un filtro selectivo "F", pasa bajo, pasa banda, o pasa alto, según convenga a los fines de la señal que se desea a la salida de dicho filtro.

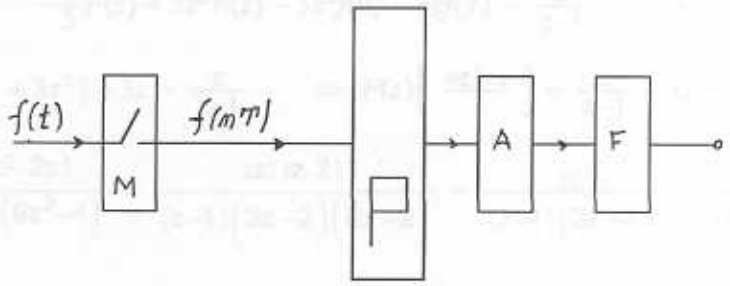


Fig. 11.14 : Circuito Generador de Ecuaciones en Diferencia

Ejemplo 27

La salida del Procesdor P es la solución de la ecuación en diferencias:

$$-\tfrac{4}{3} f(t) + 3f(t + 2T) = U(t)$$

T = Constante de tiempo del Modulador o " *Switche*" S.
Se sabe que $f(0) = 0$, $f(T) = 1$
El amplificador "A" multiplica por cinco (5) las entrada al mismo
El filtro "F" es : a) Un pasa bajo: $|z| < 1$
b) Un pasa alto : $|z| > \frac{2}{3}$
Para cada caso, calcule la transformada Z Inversa a la salida del filrto "F", y sugiera una solución para la sañal de salida.

Solución :
La salida del Procesador es la solución de la ecuación en diferencias:

$$-\frac{4}{3}f(t) + 3f(t+2T) = U(t)$$

Luego, aplicando transformada Z a ambos lados de dicha ecuación, se obtiene:

$$-\frac{4}{3}Z\left[\, f(t)\,\right] + 3\,Z\left[\, f(t+2T)\,\right] = Z\left[\, U(t)\,\right] \qquad \ldots(1)$$

Pero :

$$\begin{cases} Z\left[\, f(t)\,\right] = F(z) \\ \text{Además, por el Segundo Teorema de Traslación:} \\ Z\left[\, f(t+2T)\,\right] = \left\{z^2\left[\, F(z) - f(0)\,\right] - zf(T)\right\} \\ \text{Adicionalmente: } Z\left[\, U(t)\,\right] = \frac{z}{z-1} \end{cases}$$

Luego, sustituyendo estos resultados en la expresión (1), tenemos :

$$-\frac{4}{3}F(z) + 3\left\{z^2\left[\, F(z) - f(0)\,\right] - zf(T)\right\} = \frac{z}{z-1}$$

De donde :

$$-\frac{4}{3}F(z) + 3z^2F(z) - 3z^2f(0) - 3zf(T) = \frac{z}{z-1} \qquad \Rightarrow$$

$$F(z)[-\tfrac{4}{3} + 3z^2] - 3z = \frac{z}{z-1} \qquad \Rightarrow F(z)\left[\,\frac{9z^2-4}{3}\,\right] = \frac{z}{z-1} + 3z = \frac{3z^2-2z}{z-1}$$

Es decir:

$$F(z) = \frac{3(3z^2-2z)}{(z-1)(9z^2-4)} = \frac{3z(3z-2)}{(z-1)(3z-2)(3z+2)} = \frac{3z}{(z-1)(3z+2)} = \frac{z}{(z-1)(z+2/3)}$$

De aquí se obtiene, dividiendo ambos miembros por z que :

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z+2/3)} = \frac{3}{5(z-1)} - \frac{9}{5(3z+2)}$$

Por lo que , a la salida del Procesador: $F(z) = \frac{3z}{5(z-1)} - \frac{3z}{5(z+\frac{2}{3})}$

A la sailda del Amplificador se obtendrá : $5F(z) = \frac{3z}{(z-1)} - \frac{3z}{(z+\frac{2}{3})}$

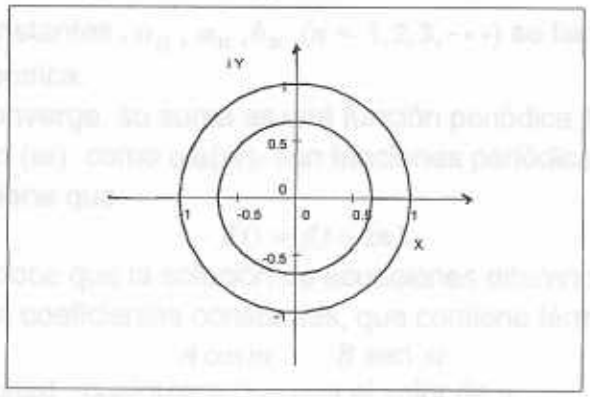
A la entrada del filtro se tiene : $G(z) = \frac{3z}{(z-1)} - \frac{3z}{(z+\frac{2}{3})}$

La región de Convergencia de cada fracción será :

Primera fracción: $\frac{3z}{(z-1)} = 3\frac{z}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = 3\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$

Segunda fracción: $\frac{3z}{\left(z+\frac{2}{3}\right)} = 3\frac{z}{z\left(1-\frac{2}{3z}\right)} = 3\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3z}\right)} \Rightarrow \left|\frac{2}{3z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{2}{3}$

La ubicación de los polos de $G(z)$ se muesra a continuación:



Por lo tanto :

a) Si el filtro es un pasa bajo : $|z| < 1$, a la salida del mismo sólo estará presente la primera de estas fracciones, por lo que :

$$O(z) = \frac{3z}{(z-1)} \qquad \Rightarrow O(nT) = 3U^*(t) = 3\delta_T(t) = 3\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$$

es decir, la salida del filtro se obtendrán infinitos pulsos de amplitud 3, distanciados un tiempo $t = T$, uno del otro.

Obviamente, la función $O(t)_{sugerida} = 3U(t)$.

b) Si el filtro es un pasa bajo : $|z| > \frac{2}{3}$, a la salida del mismo sólo estará presente la segunda de estas fracciones, por lo que :

$$O(z) = \frac{3z}{\left(z+\frac{2}{3}\right)} \qquad \Rightarrow O(nT) = \left[3\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{T}}\right]^* = 3\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{nT}{T}}\right] \Rightarrow$$

$$O(z) = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^n\delta_T(t) = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\delta(t-nT)$$

es decir, a la salida del filtro se obtendrán infinitos pulsos de amplitud $3\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, distanciados un tiempo T, uno del otro.

Obviamente, en este caso, la función $O(t)_{sugerida} = 3\left(-\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{T}}U(t)$

= oo =

CAPÍTULO XII

SERIES DE FOURIER

12.1) DEFINICIÓN: SERIE GEOMÉTRICA

Se llama así, a la serie de funciones de la forma:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + a_3 \cos 3t + \cdots + b_1 \operatorname{sen} t + b_2 \operatorname{sen} 2t + b_3 \operatorname{sen} 3t + \cdots$$

o, de forma más compacta, a la serie: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt \right)$ ...(1)

Los números constantes : a_0 , a_n , b_n $(n = 1,2,3,\cdots)$ se llaman: "Coeficientes " de la serie trigonométrica.

Si la serie (1) converge, su suma es una función periódica $f(t)$, de período 2π, ya que tanto sen (nt) como $\cos(nt)$ son funciones periódicas de período 2π.

Por lo tanto, se tiene que:

$$f(t) = f(t + 2\pi)$$

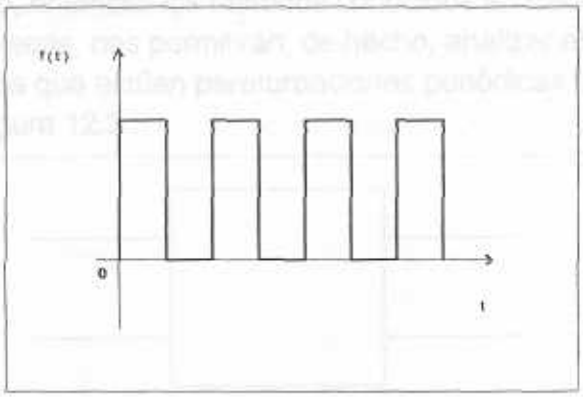
El alumno ya conoce que la solución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes, que contiene términos de la forma:

$$A \cos nt, \qquad B \operatorname{sen} nt$$

no encierra dificultad , cualquiera que sea el valor de n.

También ha visto que las ecuaciones diferenciales de este tipo son fundamentales para estudiar Sistemas Físicos sometidos a pereturbaciones periódicas. No obstante, en muchos los casos, las fuerzas de torsión, voltajes o corrientes que actúan sobre un sistema, aunque periódicas, no son en modo alguno tan simples como las ondas puramente senoidales o cosenoidales.

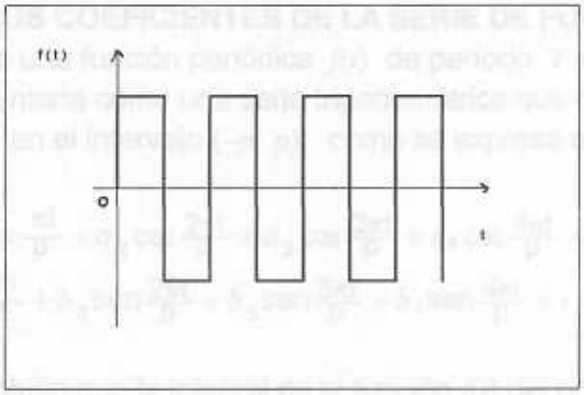
Por ejemplo, el voltaje aplicado a un circuito eléctrico podría consistir en una serie de pulsos, como se muestra en la figura 12.1:



(Figura 12.1)

En determinadas circunstancias, la influencia perturbadora que actúa sobre un circuito o sistema mecánico podría ser una fuerza de magnitud constante, cuyo

sentido se invierte periódica e instantáneamente, como se muestra en la figura 12.2:



(Figura 12.2)

Esto nos lleva a pensar si una función periódica general, de período $T = 2p$ $\left[f(t) = f(t+T) = f(t+2p) \ , \forall t \right]$, puede expresarse como serie de términos senoidales y cosenoidales.

Efectivamente, como para todos los valores enteros de n :

$$\cos\frac{n\pi(t+2p)}{p} = \cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) \qquad y \qquad \operatorname{sen}\frac{n\pi(t+2p)}{p} = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$$

es natural preguntarse si una función arbitraria $f(t)$, de período $2p$, puede representarse por una serie de la forma:

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi t}{p} + a_2\cos\frac{2\pi t}{p} + a_3\cos\frac{3\pi t}{p} + a_4\cos\frac{4\pi t}{p} + \cdots + a_n\cos\frac{n\pi t}{p} + \cdots +$$
$$+ b_1\operatorname{sen}\frac{\pi t}{p} + b_2\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{p} + b_3\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{p} + b_4\operatorname{sen}\frac{4\pi t}{p} + \cdots + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p} + \cdots$$

Si este es el caso, entonces los métodos conocidos aplicados a cada uno de los términos de esta serie, nos permitirán, de hecho, analizar el comportamiento de sistemas sobre los que actúan pereturbaciones periódicas de tipo general, como se ilustra en la figura 12.3 :

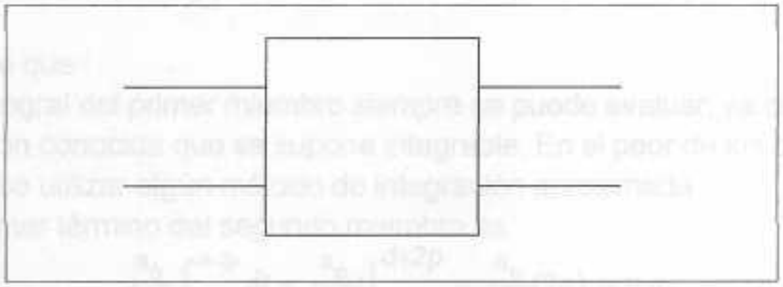


Fig.12.3 : Sistema sometido a perturbaciones periódicas

La posibilidad de este tipo de desarrollos y su determinación en caso de existir,

constituye el objeto del Análisis de Fourier, al cual dedicamos este capítulo.

12.2) CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE DE FOURIER

Supongamos que una función periódica $f(t)$ de período $T = 2p$ es tal que podemos representarla como una serie trigonométrica que converge hacia la función $f(t)$ dada, en el intervalo $(-p, p)$, como se expresa a continuación :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{\pi t}{p} + a_2 \cos\frac{2\pi t}{p} + a_3 \cos\frac{3\pi t}{p} + a_4 \cos\frac{4\pi t}{p} + \cdots + a_n \cos\frac{n\pi t}{p} + \cdots +$$
$$+ b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi t}{p} + b_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{p} + b_3 \operatorname{sen}\frac{3\pi t}{p} + b_4 \operatorname{sen}\frac{4\pi t}{p} + \cdots + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p} + \cdots \quad (1$$

Supongamos también que la integral de la función $f(t)$ del primer miembro de esta igualdad, es igual a la suma dee las integrales de los términos del segundo miembro de dicha igualdad.

NOTA: Esto sucede si la serie $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt\right)$ es Mayorable, es decir, si la serie trigonométrica converge Absolutamente. En otras palabras, si converge la serie numérica positiva :

$$\left|\frac{a_0}{2}\right| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots + |b_1| + |b_2| + \cdots |b_n| + \cdots$$

Bajo tal hipótesis, podemos integrar término a término en un período, es decir. el intervalo $[d, d+2p]$, $d \in R$. y aprovecharemos esta propiedad para calcular los coeficientes de la serie trigonométrica. En efecto :

12.2.1) Cálculo de a_0

Integrando término a término ambos miembros de la igualdad (1), entre los límites d y $d+2p$, se obtiene :

$$\int_d^{d+2p} f(t)dt = \frac{a_0}{2}\int_d^{d+2p} dt + a_1 \int_d^{d+2p} \cos\frac{\pi t dt}{p} dt + a_2 \int_d^{d+2p} \cos\frac{2\pi t}{p} dt + \cdots + a_n \int_d^{d+2p} \cos\frac{n\pi t}{p} dt + \cdots$$
$$+ b_1 \int_d^{d+2p} \operatorname{sen}\frac{\pi t}{p} dt + b_2 \int_d^{d+2p} \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{p} dt + b_3 \operatorname{sen}\frac{3\pi t}{p} + \cdots + b_n \int_d^{d+2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p} dt + \cdots$$

Obsérvese que :

* La integral del primer miembro siempre se puede evaluar, ya que $f(t)$ es una función conocida que se supone integrable. En el peor de los casos, será preciso utilizar algún método de integración aproximada.
* El primer término del segundo miembro es :
$$\frac{a_0}{2}\int_d^{d+2p} dt = \frac{a_0}{2} t\Big|_d^{d+2p} = \frac{a_0}{2}(2p) = p\, a_0$$
* Todas la integrales con un coseno o con un seno en el integrando se anulan, es decir: $\int_d^{d+2p} \cos\frac{n\pi t}{p} dt = 0, \quad \int_d^{d+2p} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p} dt = 0, \quad n \neq 0$

por ser el intervalo de integración igual al período $2p$.

En consecuencia: $\int_d^{d+2p} f(t)dt = a_0\, p$, por lo que :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)dt} \qquad \ldots(2)$$

12.2.2) Cálculo de a_n

Para hallar a_n, multipliquemos los dos miembros de la ecuación (1) por: $\cos\frac{n\pi t}{p}$ y después Integremos término desde d a $d+2p$, suponiendo que en este caso también se justifica la integración término a término. Así se obtiene :

$$\int_d^{d+2p} f(t)\cos\frac{n\pi t}{p}dt = \frac{a_0}{2}\int_d^{d+2p}\cos\frac{n\pi t}{p}dt + a_1\int_d^{d+2p}\cos\frac{\pi t}{p}\cos\frac{n\pi t}{p}dt + \cdots +$$
$$+ a_n\int_d^{d+2p}\cos^2\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt + \cdots +$$

$$+ b_1\int_d^{d+2p}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{p}\cos\frac{n\pi t}{p}dt + b_2\int_d^{d+2p}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{p}\cos\frac{n\pi t}{p}dt + b_3\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{p} + \cdots +$$
$$+ b_n\int_d^{d+2p}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}\cos\frac{n\pi t}{p}dt + \cdots$$

Obsérvese que :

* La integral del primer miembro está completamente determinada.
* Todas la integrales del segundo miembro que contienen sólo términos coseno, se anulan, excepto la que contiene la función: $\cos^2\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$, la cual es igual a p. Es decir :

$$\int_d^{d+2p}\cos\frac{m\pi t}{p}\cos\frac{n\pi t}{p}dt = 0, \qquad m \neq n, \qquad m,n = enteros$$

$$\int_d^{d+2p}\cos^2\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt = p$$

$$\frac{a_0}{2}\int_d^{d+2p}dt = \frac{a_0}{2}t\Big|_d^{d+2p} = \frac{a_0}{2}(2p) = p\,a_0$$

* Por último, todas las integrales que contienen la función seno son iguales a cero. Es decir :

$$\int_d^{d+2p}\cos\frac{m\pi t}{p}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}dt = 0, \qquad m \neq n, \qquad m,n = enteros$$

$$\int_d^{d+2p}\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{p}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}dt = 0, \qquad m \neq n, \qquad m,n = enteros$$

En consecuencia: : $$\int_d^{d+2p} f(t)\cos\frac{n\pi t}{p}dt = a_n\, p$$

De donde :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\cos\frac{n\pi t}{p}dt} \qquad \ldots(3)$$

12.2.3) Cálculo de b_n

Para hallar b_n, multipliquemos los dos miembros de la ecuación (1) por: $\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}$ y después Integremos término desde d a $d+2p$, suponiendo que en este caso también se justifica la integración término a término. Así se obtiene :

$$\int_d^{d+2p} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}dt = \frac{a_0}{2}\int_d^{d+2p} sen\frac{n\pi t}{p}dt + a_1\int_d^{d+2p}\cos\frac{\pi t}{p}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}dt + \cdots +$$
$$+ a_n\int_d^{d+2p}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt + \cdots +$$

$$+ b_1\int_d^{d+2p}\operatorname{sen}\frac{\pi t}{p}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}dt + b_2\int_d^{d+2p}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{p}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}dt + \cdots +$$
$$+ b_n\int_d^{d+2p}\operatorname{sen}^2\frac{n\pi t}{p}dt + \cdots$$

Obsérvese de nuevo que :

* La integral del primer miembro está completamente determinada.
* Todas la integrales del segundo miembro que contienen sólo términos seno, se anulan, excepto la que contiene la función: $\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi t}{p}\right)$, la cual es igual a p. Es decir :

$$\int_d^{d+2p}\operatorname{sen}\frac{m\pi t}{p}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}dt = 0, \quad m \neq n, \quad m,n = enteros$$

$$\int_d^{d+2p}\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt = p$$

En consecuencia: : $$\int_d^{d+2p} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}dt = b_n\, p$$

De donde :

$$\boxed{b_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}dt} \qquad \ldots(4)$$

Las fórmulas (2), (3) y (4) se conocen como **"Fórmulas de Euler "** o de " Euler - Fourier " y la serie dada por la ecuación (1), cuando los coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots, b_1, \cdots, b_n, \cdots$, tienen estos valores, se llama :**" Serie de Fourier "** de la función $f(t)$

= oo =

NOTAS:

1º) La frecuencia angular w_0 está dada por :

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p} \ (rad./seg.)$$

Por lo tanto : $\frac{n\pi t}{p} = \frac{n\pi t}{\frac{T}{2}} = n\left(\frac{2\pi}{T}\right)t = nw_0 t$

por lo que , las fórmulas (2), (3) y (4) antes citadas se pueden escribir como:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\cos(nw_0 t)dt \quad ; \quad b_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\,\mathrm{sen}(nw_0 t)dt$$

A la serie : $$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nw_0 t) + b_n sen(nw_0 t)\right]}$$

se le conoce como: **" SERIE TRIGONOMÉTRICA REAL DE FOURIER "**

2º) En la mayoría de las aplicaciones, el intervalo en que se calculan los coeficientes a_0, a_n y b_n es $(-p, p)$ o bien $(0, 2p)$, por lo que el valor de "d" que aparece en las Fórmulas de Euler suele ser $-p$ o bien cero (0).

3º) En realidad, no es necesario considerar la fórmula de a_0 , ya que ésta se puede obtener de la expresión general de a_n, sin más que hacer $n = 0$. Esta es la razón por la cual en el desarrollo original escribimos el término constante bajo la forma $\frac{a_0}{2}$.

4º) El resultado antes obtenido no debe llevarnos a la falsa conclusión de que toda función periódica $f(t)$ tiene una desarrollo de Fourier que converge a ella. Lo que hasta ahora hemos demostrado es que, si una función $f(t)$ posee una desarrollo de la forma (1) antes expresada, que sea válido integrar término a término, entonces sus coeficientes están dados por las fórmulas de Euler.

Las cuestiones referentes a la convergencia de las series de Fourier y (si converge) , las condiciones bajo las cuales representarán las funciones que las generan, son muchas y difíciles.

Estos problemas tienen principalmente un interés teórico que escapa al objetivo de este curso; sin embargo, casi toda aplicación práctica que pueda concebirse, es cubierta por el famoso Teorema de DIRICHLET, que enunciaremos posteriormente pero tampoco demostraremos. Una demostración de mismo puede encontrarse en : "*Matemáticas Superiores*

para Ingeniería ", C.Ray Wylie," Editorial McGraw - Hill. Cuarta Edición.

12.2.4) Ejemplos de cálculo de desarrollos en Serie de Fourier

Ejemplo 1:

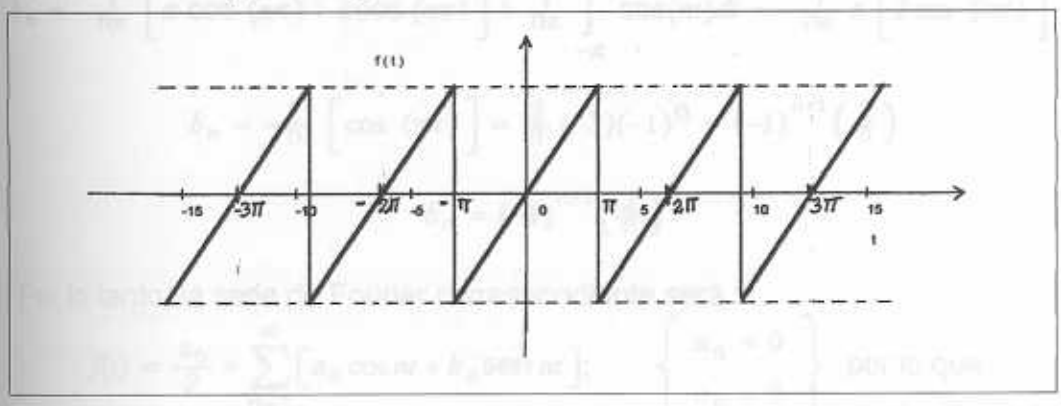
Sea una función periódica $f(t)$ de período 2π, definida en un período del modo siguiente:

$$f(t) = t \quad , \quad -\pi < t < \pi$$

Calcular el desarrollo en serie de Fourier.

Solución:

Dicha función es monótona a tramos y acotada en el intervalo $T : -\pi \leq t \leq \pi$ como indica la siguiente figura :



$$(f(t) = t, \quad -\pi < t < \pi)$$

por lo tanto, admite desarrollo de Fourier. Así se tiene :

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t)dt = \frac{1}{\pi}\frac{t^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Además:

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi t}{p}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t)\cos\frac{n\pi t}{\pi}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t)\cos(nt)dt \quad \Rightarrow$$

Integrando por partes: $\left\{\begin{array}{l} t = u \Rightarrow dt = du \\ \cos(nt)dt = dv \Rightarrow v = \frac{1}{n}\text{sen}(nt) \end{array}\right\}$ por lo que :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[t\,\frac{\text{sen}(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\text{sen}(nt)dt = 0$$

Adicionalmente:

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,\text{sen}\frac{n\pi t}{p}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t)\,\text{sen}\frac{n\pi t}{\pi}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t)\,\text{sen}(nt)dt$$

Integrando de nuevo por partes: $\left\{\begin{array}{l} t = u \Rightarrow dt = du \\ \text{sen}(nt)dt = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{array}\right\}$ por lo que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-t\,\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)dt \quad \Rightarrow$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\left[\pi\cos(n\pi) + \pi\cos(n\pi)\right] + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)dt = -\frac{1}{n\pi}\,\pi\left[2\cos(n\pi)\right] \Rightarrow$$

$$b_n = -\frac{2}{n}\left[\cos(n\pi)\right] = \frac{2}{n}(-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$b_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{2}{n}\right)$$

Por lo tanto, la serie de Fourier correspondiente será :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nt + b_n\,\text{sen}\,nt\right]; \qquad \left\{\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \end{array}\right\} \text{ por lo que :}$$

$$f(t) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[0 + (-1)^{n+1}\left(\frac{2}{n}\right)\text{sen}\,nt\right]$$

de donde :

$$f(t) = 2\left[\frac{\text{sen}t}{1} - \frac{\text{sen}2t}{2} + \frac{\text{sen}3t}{3} + \frac{\text{sen}4t}{4} + \frac{\text{sen}5t}{5} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\text{sen}(nt)}{n} + \cdots\right]$$

NOTA 1:

Esta igualdad se satisface en todos los puntos, excepto en los de discontinuidad. En cada punto de discontinuidad la suma de la serie es igual a la media aritmética de los límites de la función a la derecha y a la izquierda. En este caso concreto, dicha media aritmética es : $\frac{1-1}{2} = 0$ en todos los puntos de discontinuidad.

Puede escribirse en consecuencia que :

$$f(t) = t = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{n}\right)\text{sen}(nt), & t \neq n\pi \\ 0\ , \quad t = n\pi \end{cases}$$

NOTA 2:

Se observa también que la amplitud de cada componente (armónica) es

inversamente proporcional a la frecuencia, es decir, la magnitud de las componentes de baja frecuencia es mayor que la magnitud de las frecuencias altas.

Esto explica la posición óptima de los ecualizadores de frecuencia de un equipo de audio, la cual se representa en el siguiente esquema :

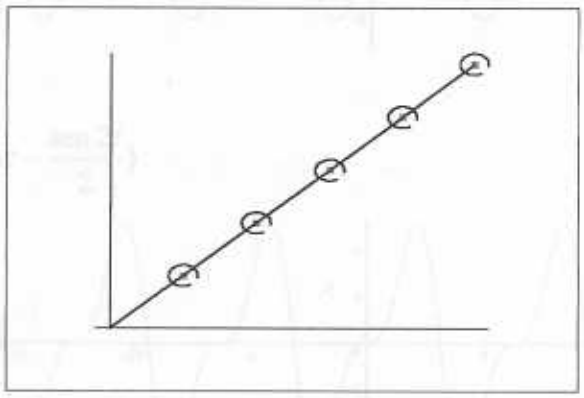
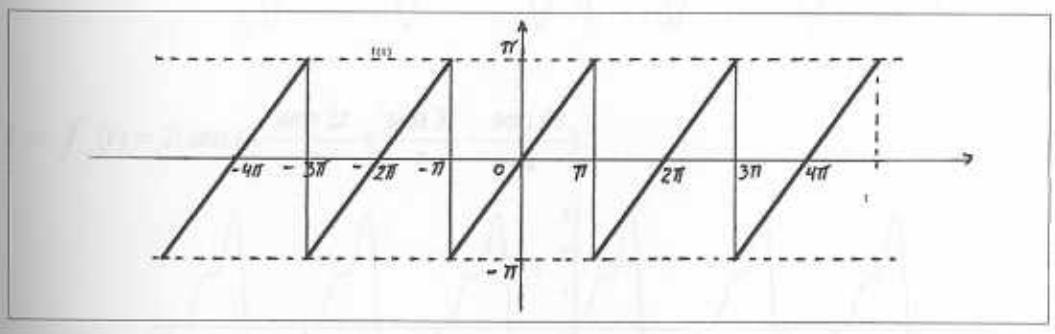


Fig.12.4 : Posición de Ecualizadores

Se presenta también a continuación, para el ejemplo aquí analizado, la generación de la función $f(t)$ a medida que se suman los diferentes armónicos o términos contemplados en la serie de Fourier :

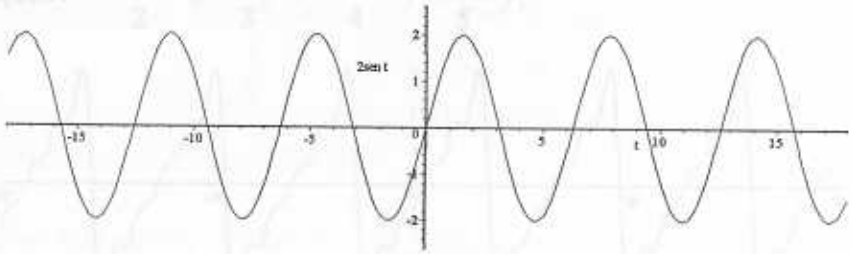
$$f(t) = t = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen } nt}{n}$$

En particular, la última de estas gráficas muestra la suma: $2\sum_{n=1}^{14}(-1)^{n+1}\frac{\text{sen } nt}{n}$

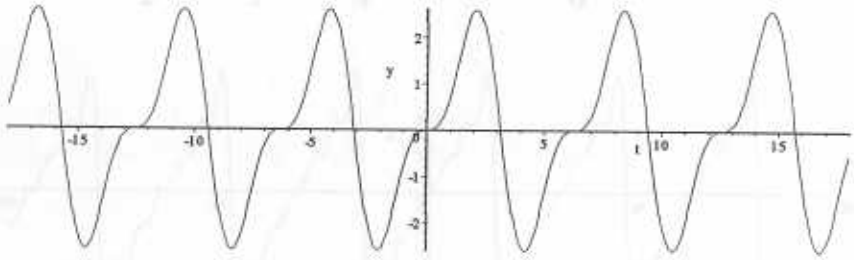


$(f(t) = t, \quad -\pi < t < \pi)$

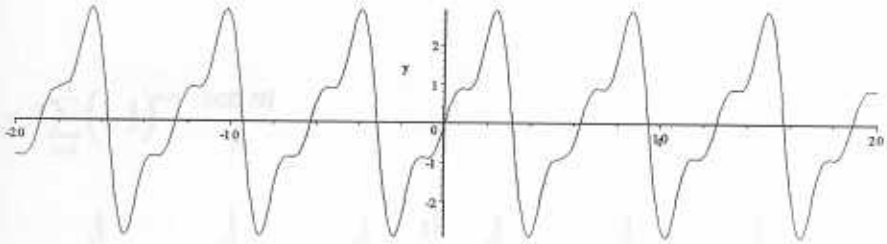
$n=1 \Rightarrow f_1(t) = 2\,\text{sen}\,t$



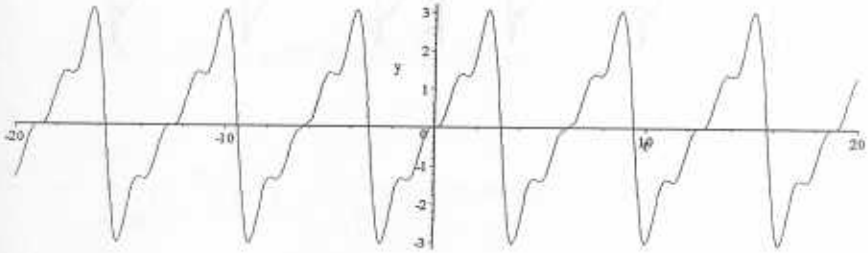
$n=2 \Rightarrow f_1(t) = 2(\text{sen}\,t - \dfrac{\text{sen}\,2t}{2})$:



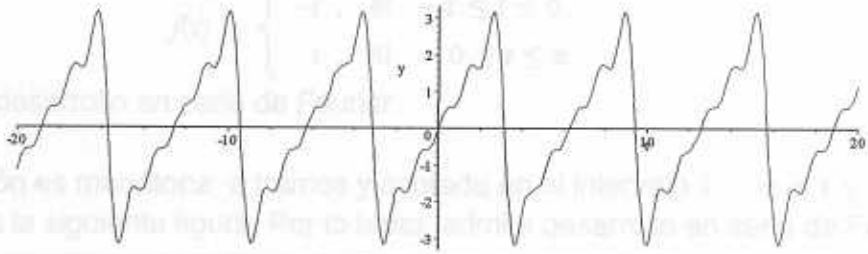
$n=3 \Rightarrow f_1(t) = 2(\text{sen}\,t - \dfrac{\text{sen}\,2t}{2} + \dfrac{\text{sen}\,3t}{3})$:



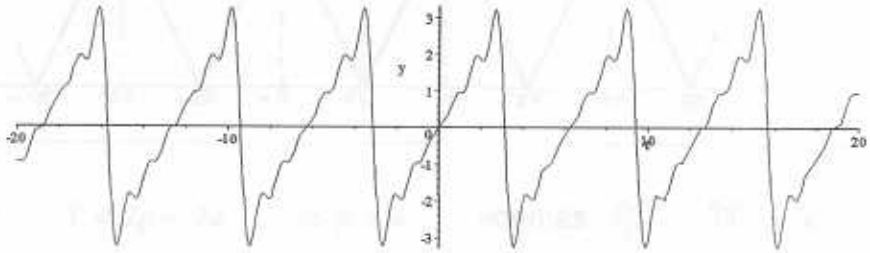
$n=4 \Rightarrow f_1(t) = 2(\text{sen}\,t - \dfrac{\text{sen}\,2t}{2} + \dfrac{\text{sen}\,3t}{3} - \dfrac{\text{sen}\,4t}{4})$:



$$n=5 \Rightarrow f_1(t) = 2(\operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3t}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4t}{4} + \frac{\operatorname{sen} 5t}{5}):$$

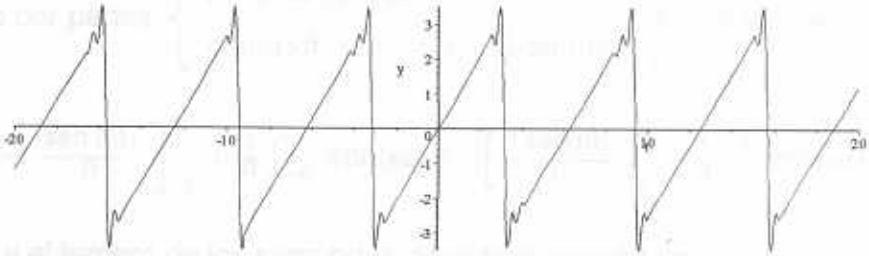


$$n=6 \Rightarrow f_1(t) = 2(\operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3t}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4t}{4} + \frac{\operatorname{sen} 5t}{5} - \frac{\operatorname{sen} 6t}{6}):$$



$$\vdots$$

$$n=14 \Rightarrow f_1(t) = 2\sum_{n=1}^{14}(-1)^{n+1} \cdot \frac{\operatorname{sen} nt}{n}:$$



Ejemplo 2:

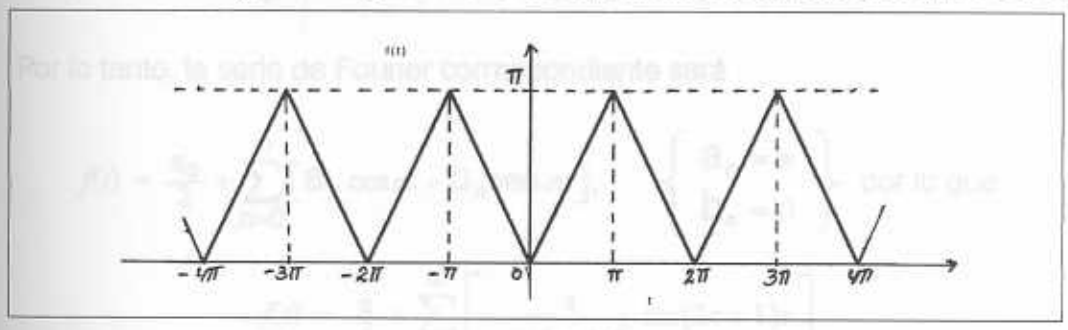
Dada la función periódica $f(t)$ de período 2π, definida de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} -t\ , & \text{si } -\pi \le t \le 0 \\ t\ , & \text{si } \quad 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

Calcular el desarrollo en serie de Fourier.

Solución:

Dicha función es monótona a tramos y acotada en el intervalo $T: -\pi \le t \le \pi$ como indica la siguiente figura. Por lo tanto, admite desarrollo en serie de Fourier:



Así se tiene : $T = 2p = 2\pi \quad \Rightarrow p = \pi;$ además: $\frac{n\pi t}{p} = \frac{n\pi t}{\pi} = nt$

Por lo que:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(t)dt = \frac{1}{\pi}\frac{2\pi\cdot\pi}{2} = \pi$$

Además:

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi t}{p}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-t)\cos(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(t)\cos(nt)dt \quad \Rightarrow$$

Integrando por partes: $\left\{\begin{array}{l} t = u \Rightarrow dt = du \\ \cos(nt)dt = dv \Rightarrow v = \frac{1}{n}\text{sen}(nt) \end{array}\right\}$ por lo que :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-t\,\frac{\text{sen}(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\text{sen}(nt)dt + \left[\frac{t\,\text{sen}(nt)}{n}\right]_{0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\text{sen}(nt)dt\right\} \Rightarrow$$

El primero y el tercero de los sumandos de esta expresión son nulos, por lo que:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{\cos nt}{n^2}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}[-1 + \cos n\pi + \cos n\pi - 1] = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1)$$

Es decir : $a_n = \begin{cases} 0 \ , & \text{si } n = 2,4,6,\cdots(par) \\ \dfrac{4}{\pi n^2} \ , & \text{si } n = 1,3,5,\cdots(impar) \end{cases}$

Adicionalmente:

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-t)\operatorname{sen}ntdt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(t)\operatorname{sen}ntdt = 0$$

Por lo tanto, la serie de Fourier correspondiente será :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos nt + b_n\operatorname{sen} nt\right]; \quad \left\{\begin{array}{l} a_0 = \pi \\ b_n = 0 \end{array}\right\} \text{ por lo que :}$$

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)t\right]$$

o también :

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos t}{1^2} - \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \frac{\cos 7t}{7^2} + \cdots + \frac{\cos(2n+1)}{(2n+)^2} + \cdots\right]$$

NOTA 1:

Esta serie converge en todos los puntos y su suma es igual a la función dada.

NOTA 2:

Si en la función dada hacemos : $t = \pi \Rightarrow f(\pi) = \pi$, por lo que, sustituyendo en el desarrollo en serie obtenido, se encuentra que :

$$\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[-1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} - \cdots - \frac{1}{(2n+)^2} + \cdots\right]$$

De donde :

$$\pi^2 = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 3:

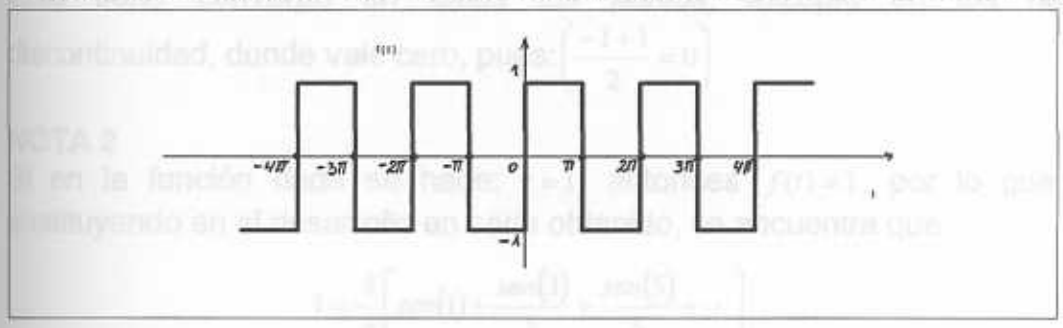
Dada la función periódica $f(t)$ de período $T = 2\pi$, definida en un período por :

$$f(t) = \begin{cases} -1 \ , & \text{si } -\pi \le t \le 0 \\ 1 \ , & \text{si } \quad 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

Calcular el desarrollo en serie de Fourier.

Solución:

Dicha función es monótona a tramos y acotada en el intervalo $T: -\pi \le t \le \pi$ como indica la siguiente figura. Por lo tanto, admite desarrollo en serie de Fourier:



$$f(t) = \begin{cases} -1 \ , & \text{si} \ -\pi \le t \le 0 \\ 1 \ , & \text{si} \ \ 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

Así se tiene : $T = 2p = 2\pi \quad \Rightarrow p = \pi;$ ademas : $\frac{n\pi t}{p} = \frac{n\pi t}{\pi} = nt$

Por lo que:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(1)dt = 0$$

Además:

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi t}{p}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(1)\cos(nt)dt = 0$$

Adicionalmente:

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\text{sen}\frac{n\pi t}{p}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\text{sen}ntdt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(1)\text{sen}ntdt \quad \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{\cos nt}{n}\right]_{0}^{\pi}\right\} = \frac{1}{n\pi}[1 - \cos n\pi - (\cos n\pi - 1)] \quad \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}[2 - 2\cos n\pi] = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & , si \ \ n = par \\ \frac{4}{n\pi} & , si \ \ n = impar \end{cases}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier correspondiente a la función considerada será :

:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos nt + b_n\text{sen}\, nt]; \qquad \left\{\begin{matrix} a_0 = \pi \\ a_n = 0 \end{matrix}\right\} \text{ por lo que :}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\text{sen}t}{1} - \frac{\text{sen}3t}{3} + \frac{\text{sen}5t}{5} + \frac{\text{sen}7t}{7} + \cdots + \frac{\text{sen}\,(2n+1)t}{(2n+1)} + \cdots\right] \Rightarrow$$

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\circ\sum_{n=0}^{\infty}\circ\left[\frac{sen(2n+1)}{(2n+1)}\right]$$

NOTA 1

Esta serie converge en todos los puntos, excepto en los de discontinuidad, donde vale cero, pues: $\left(\frac{-1+1}{2}=0\right)$

NOTA 2

Si en la función dada se hace: $t=1$, entonces $f(t)=1$, por lo que, sustituyendo en el desarrollo en serie obtenido, se encuentra que :

$$1=\frac{4}{\pi}\left[sen(1)+\frac{sen(3)}{3}+\frac{sen(5)}{5}+\cdots\right]$$

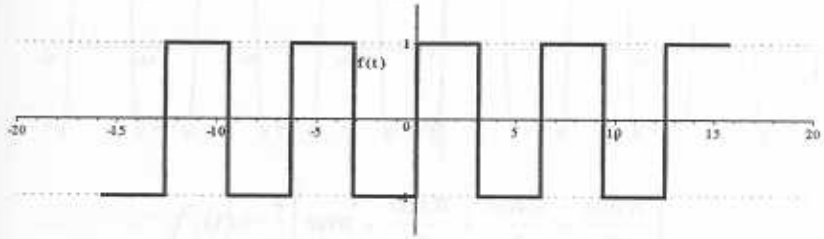
de donde :

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sen(2n+1)}{(2n+1)}$$

NOTA 3:

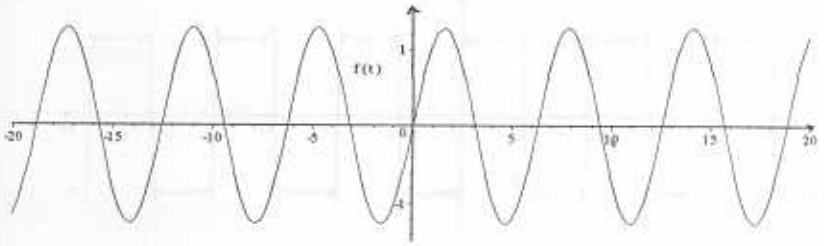
La siguiente figura muestra claramente como las sumas parciales (S_n) de la serie, representan cada vez más exactamente la función f(t), al aumentar el número de términos.

En efecto :



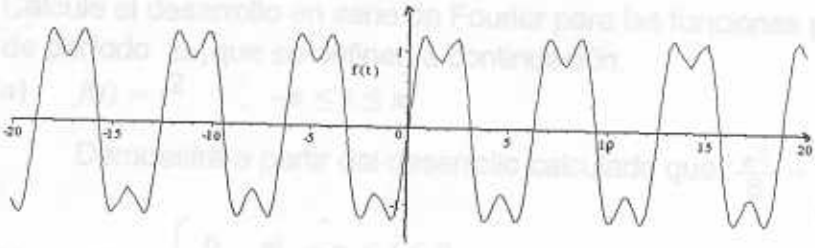
$$f(t)=\left\{\begin{matrix}-1, & si & -\pi<t<0\\ 1, & si & 0<t<\pi\end{matrix}\right\}$$

$n=1$



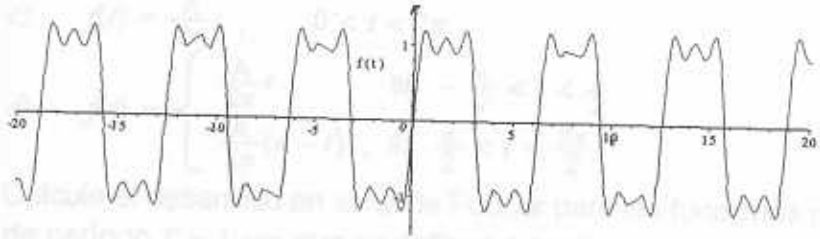
$$f_1(t)=\frac{4}{\pi}sent$$

$n = 2$



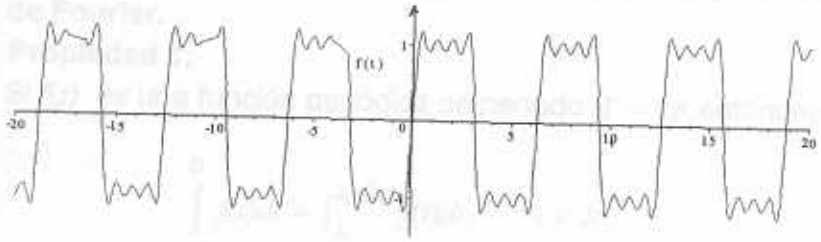
$$f_1(t) = \frac{4}{\pi}\left[sent + \frac{sen3t}{3}\right]$$

$n = 3$



$$f_1(t) = \frac{4}{\pi}\left[sent + \frac{sen3t}{3} + \frac{sen5t}{5}\right]$$

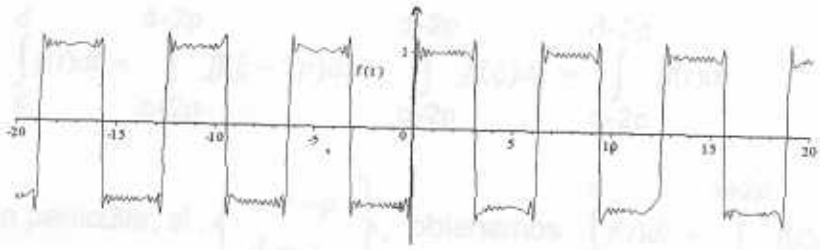
$n = 7$



$$f_1(t) = \frac{4}{\pi}\left[sent + \frac{sen3t}{3} + \frac{sen5t}{5} + \frac{sen9t}{9}\right]$$

$$\vdots$$

$n = 23$



$$f_1(t) = \frac{4}{\pi}\left[sent + \frac{sen3t}{3} + \frac{sen5t}{5} + \frac{sen9t}{9} + \cdots + \frac{sen23t}{23}\right]$$

12.2.5) Ejercicios Propuestos I

Calcule el desarrollo en serie de Fourier para las funciones periódicas, de período 2π, que se definen a continuación.

a) $f(t) = t^2 \quad , \ -\pi \le t \le \pi$

Demuestre a partir del desarrollo calculado que : $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $f(t) = \begin{cases} 0 \ , \ \text{si} \ -\pi \le t \le 0 \\ t \ , \ \text{si} \ \ 0 \le t \le \pi \end{cases}$

Demuestre a partir del desarrollo calculado que : $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

c) $f(t) = \frac{A}{2\pi} t \ , \qquad 0 < t < 2\pi$

d) $f(t) = \begin{cases} \frac{A}{2\pi} t \ , & \text{si} \ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ \frac{A}{2\pi}(\pi - t) \ , & \text{si} \ \frac{\pi}{2} < t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Calcule el desarrollo en serie de Fourier para las funciones periódicas, de período $T = 1 \ seg$, que se definen a continuación:

e) $f(t) = A \ \text{sen} \ w_0 t \ , \quad 0 \le t \le 1$ (Función senoidal rectificada)

f) $f(t) = t - t^2 \quad , \ 0 < t < 1$

12.2.6) Observaciones sobre el desarrollo de funciones periódicas en serie de Fourier.

a) **Propiedad 1:**

Si $f(t)$ es una función periódica de periodo $T = 2p$, entonces :

$$\int_{-p}^{p} f(t)dt = \int_{\lambda}^{\lambda+2p} f(t)dt, \qquad \lambda \in R$$

Demostración:

Como $f(t)$ es por hipótesis una función periódica : $f(\xi - 2p) = f(\xi)$

Luego, haciendo : $t = \xi - 2p \Rightarrow dt = d\xi$, podemos escribir, para cualquier intervalo $[c, d]$ que :

$$\int_{c}^{d} f(t)dt = \int_{c+2p}^{d+2p} f(\xi - 2p)d\xi = \int_{c+2p}^{d+2p} f(\xi)d\xi = \int_{c+2p}^{d+2p} f(t)dt$$

En particular, si : $\left\{ \begin{array}{l} c = -p \\ d = \lambda \end{array} \right\}$, obtenemos : $\int_{c}^{d} f(t)dt = \int_{p}^{\lambda+2p} f(t)dt$

Por lo que :

$$\int_{\lambda}^{\lambda+2p} f(t)dt = \int_{\lambda}^{-p} f(t)dt + \int_{-p}^{p} f(t)dt + \int_{-p}^{\lambda+2p} f(t)dt = \int_{\lambda}^{-p} f(t)dt + \int_{-p}^{p} f(t)dt + \int_{-p}^{\lambda} f(t)dt$$

De donde : $\displaystyle\int_{\lambda}^{\lambda+2p} f(t)dt = \int_{-p}^{p} f(t)dt$

Esta propiedad indica que la integral de una función periódica $f(t)$ en un intervalo arbitrario de longitud igual al período, tiene siempre el mismo valor.

La figura12.4 ilustra geométricamente lo aquí expuesto:

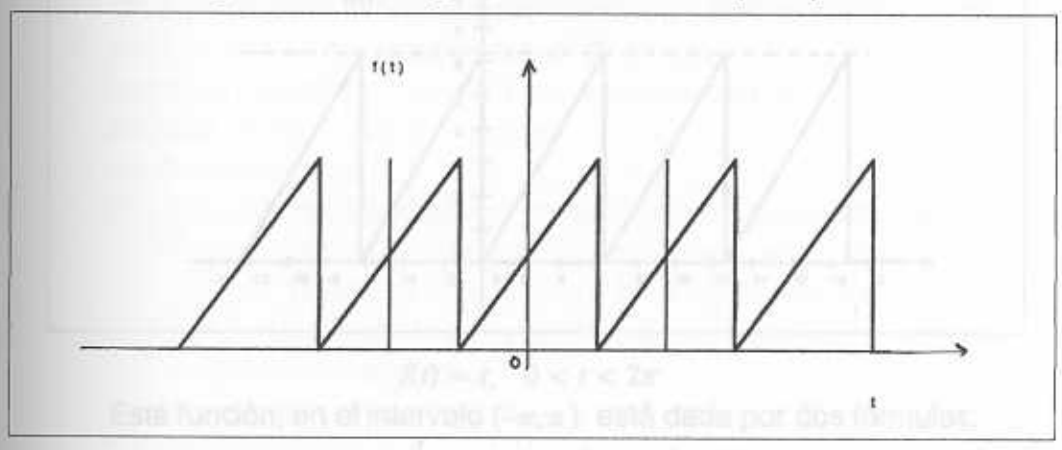


Fig. 12.4

De la propiedad aquí demostrada se deduce que, al calcular los coeficientes de Fourier, podemos sustituir el intervalo de integración $(-p,p)$ por otro $(\lambda,\lambda+2p)$, es decir, podemos escribir :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\lambda}^{\lambda+2p} f(t)dt \\ a_n = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\lambda}^{\lambda+2p} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt \\ b_n = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\lambda}^{\lambda+2p} f(t)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt \end{array}\right\}, \quad \lambda \text{ es un número real arbitrario.}$$

NOTA:

Si $f(t)$ es periódica de período $T = 2\pi$, entonces las funciones : $f(t)\cos nt$ y $f(t)$ sen nt son también periódicas, de período 2π.

Ilustremos a continuación como la propiedad demostrada, en algunos casos, simplifica el proceso de cálculo de los coeficientes

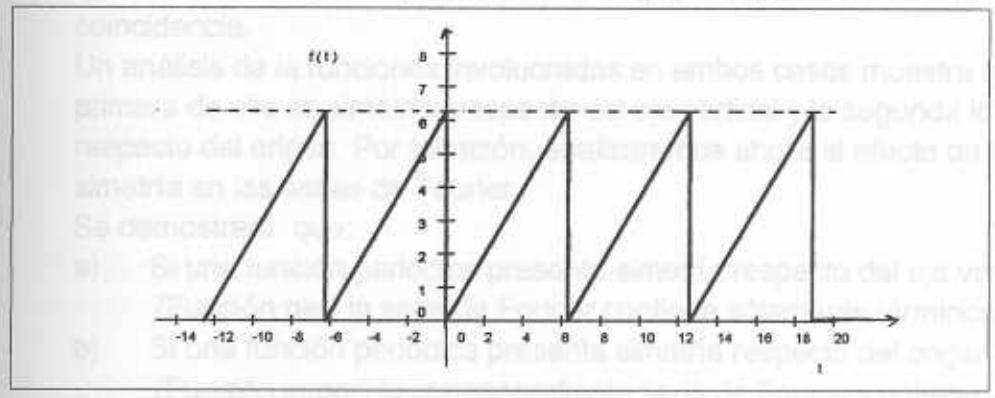
Ejemplo 4:

Supongamos que se desea desarrollar en serie de Fourier, la función $f(t)$ de período 2π, dada por la igualdad:

$$f(t) = t, \quad 0 < t < 2\pi$$

Solución:

La gráfica de $f(t)$ se presenta en la siguiente figura :



$$f(t) = t, \quad 0 < t < 2\pi$$

Esta función, en el intervalo $(-\pi, \pi)$ está dada por dos fórmulas:

$$f(t) = \begin{cases} t + 2\pi & , \text{ si } t \in (-\pi, 0) \\ t & , \text{ si } t \in (0, \pi) \end{cases}$$

Ahora bien, en el intervalo $(0, 2\pi)$ la función está definida de un modo más simple por una sóla fórmula (haciendo $\lambda = 0$) con lo que:

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} tdt = 2\pi$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\text{sen}(nt)}{n} + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_\lambda^{2\pi} f(t)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\,\text{sen}(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nt)}{n} + \frac{\text{sen}(nt)}{n^2}\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}$

Por consiguiente:

$$f(t) = \pi - \frac{2}{1}\text{sen}(x) - \frac{2}{2}\text{sen}(2x) - \frac{2}{3}\text{sen}(3x) - \frac{2}{4}\text{sen}(4x) - \cdots$$

Esta serie representa la función dada en todos los puntos, excepto en los de discontinuidad (es decir, excepto en los puntos $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$). En estos puntos, la suma de la serie es igual a la mitad de la suma de los límites laterales de la función, que en el caso dado es : $\frac{2\pi+0}{2} = \pi$.

== oo ==

b) **Propiedad 2: Condiciones de Simetría. Función par e impar**

En los ejemplos anteriores se encontró que todos los términos seno del ejemplo 2 , son nulos ($b_n = 0$). Adicionalmente, en el ejemplo 3 se encontró que todos los términos coseno son nulos ($a_n = 0$). Esto no es una coincidencia.

Un análisis de la funciones involucradas en ambos casos muestra que la primera de ella es simétrica respecto del eje vertical y la segunda lo es respecto del origen. Por tal razón, analizaremos ahora el efecto de la simetría en las series de Fourier.

Se demostrará que:

a) Si una función periódica presenta simetría respecto del eje vertical, (Función par) la serie de Fourier contiene sólamente términos coseno.

b) Si una función periódica presenta simetría respecto del origen, (Función impar) la correspondiente serie de Fourier contiene sólamente términos seno.

En este contexto, es util recordar el concepto de **" Función Par "** y de **" Función Impar ".**

Función Par: Una función $f(t)$ se dice que es Función Par de la variable "t" , si : $f(t) = f(-t)$.

Dos ejemplos típicos se muestran a continuación en las figuras 12.5 y 12.6

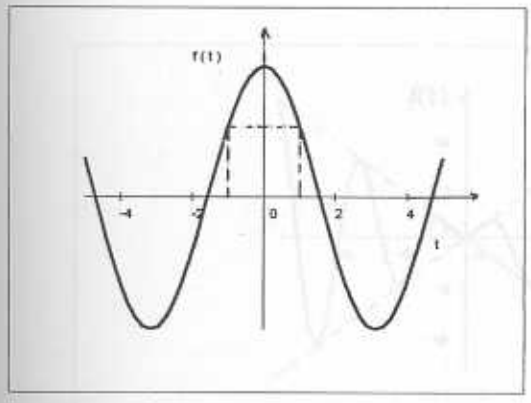


Fig.12.5 : $f(t) = \cos t$

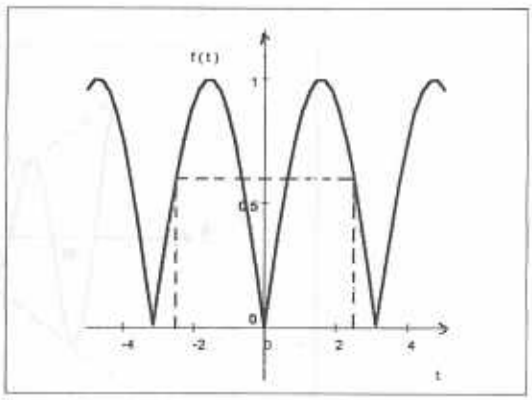


Fig.12.6 : $f(t) = |\sin t|$

Función Impar: Una función $f(t)$ se dice que es Función Impar de la

variable "t" , si : $f(t) = -f(-t)$.
Dos ejemplos típicos se muestran seguidamente, en las figuras 12.7 y 12.8

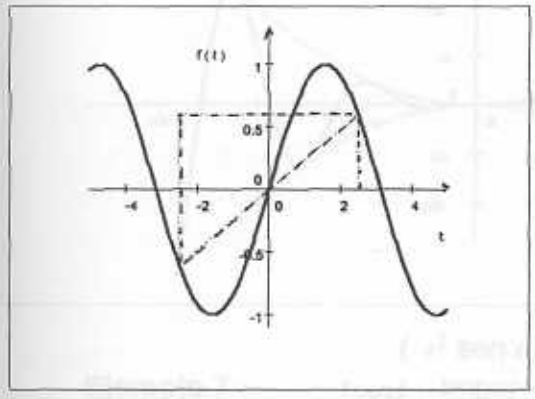


Fig.12.7 : $f(t) = \sin t$

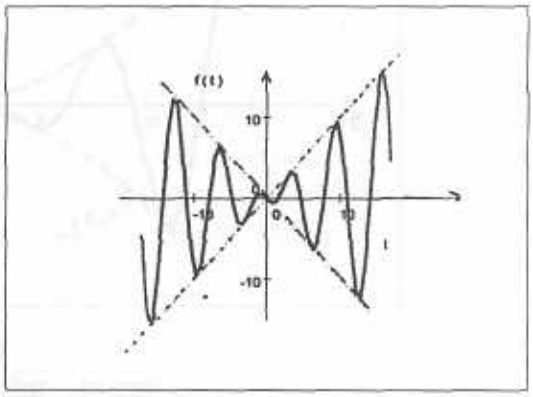


Fig.12.8 : $f(t) = -t\cos t$

Nótese que la paridad o imparidad no requiere de la periodicidad de la función $f(t)$.

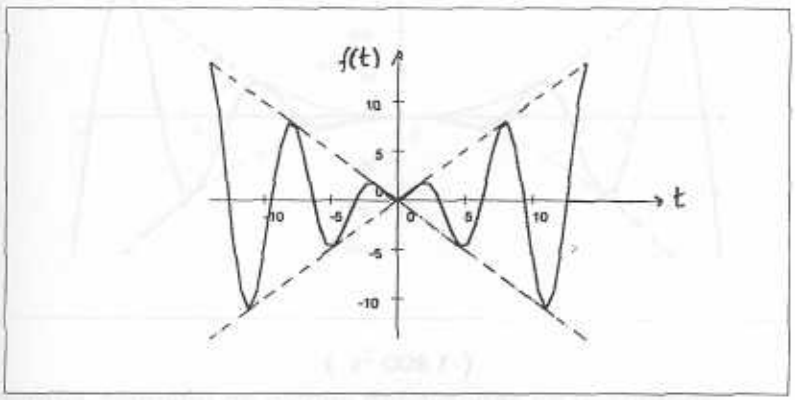
CONSECUENCIAS:

De las definiciones de función par e impar se deduce que:

a) El producto de una función par por otra impar es una función Impar.
b) El producto de una función impar por otra impar es una función Par.
c) El producto de dos funciones pares es otra función Par.

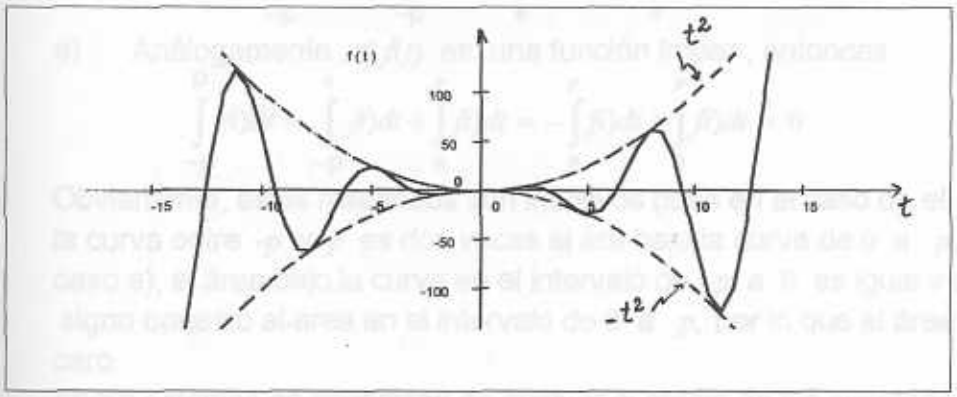
Las siguientes gráficas uilustran lo aquí expuesto:

Ejemplo 5 : $t\sin t$: Impar • Impar = Par :



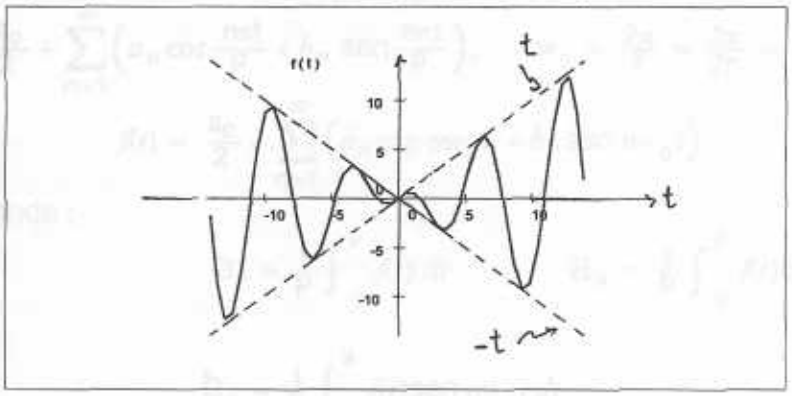
(t sen t)

Ejemplo 6 : $t^2 \sin t$: Par • Impar = Impar



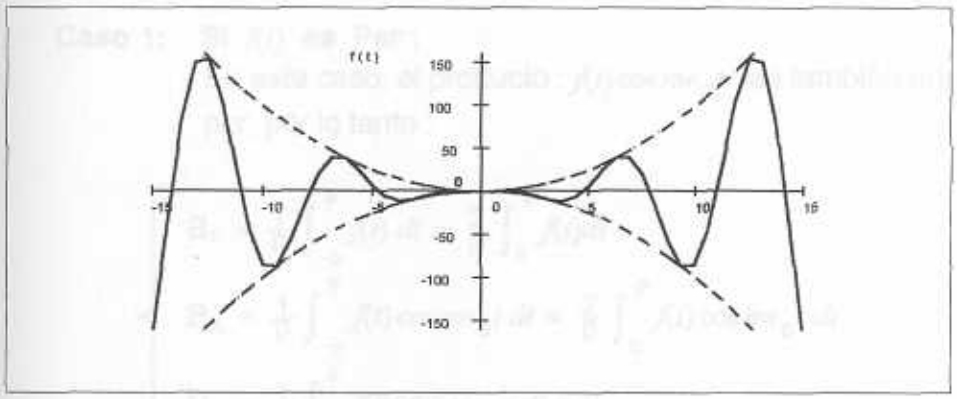
(t^2 sen t)

Ejemplo 7 : $t \cos t$: Impar • Par = Impar



($t \cos t$)

Ejemplo 8 : $t^2 \cos t$: Par • Par = Par



(t^2 cos t)

Además, también de dichas definiciones se desprende:

d) Si $f(t)$ es una función Par , entonces :

$$\int_{-p}^{p} f(t)dt = \int_{-p}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{p} f(t)dt = 2\int_{0}^{p} f(t)dt$$

e) Análogamente , si $f(t)$ es una función Impar , entonces :

$$\int_{-p}^{p} f(t)dt = \int_{-p}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{p} f(t)dt = -\int_{0}^{p} f(t)dt + \int_{0}^{p} f(t)dt = 0$$

Obviamente, estos resultados son intuitivos pues en el caso d), el área bajo la curva entre $-p$ y p es dos veces el ára bajo la curva de 0 a p. En el caso e), el área bajo la curva en el intervalo de $-p$ a 0 es igual y de signo opuesto al área en el intervalo de 0 a p, por lo que el área neta es cero.

Ahora estamos en capacidad de evaluar el efecto de las simetrías en el cáculo del desarrollo en serie de Fourier. En efecto, como se recordará dicho desarrollo está dado, en egeneral, por :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{p} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}\right); \qquad w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p} \qquad \Rightarrow$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nw_0 t + b_n \operatorname{sen} nw_0 t\right)$$

donde :

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt \quad ; \quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos nw_0 t\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\operatorname{sen} nw_0 t\,dt$$

Por lo tanto :

Caso 1: Si $f(t)$ es Par :

En este caso, el producto : $f(t)\cos nw_0 t$ es también una función par, por lo tanto :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(t)dt \\ a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos nw_0 t\,dt = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(t)\cos nw_0 t\,dt \\ b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\operatorname{sen} nw_0 t\,dt = 0 \end{cases}$$

Es decir, el desarrollo en serie de Fourier de una función Par contendrá sólamente términos coseno, tal como se muestra en el ejemplo 2 anterior.

Caso 2: Si $f(t)$ es Impar :

En este caso, el producto : $f(t)\cos nw_0 t$ es también una función Impar, por lo tanto :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = 0 \\ a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos nw_0 t\,dt = 0 \\ b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\,\text{sen}\,nw_0 t\,dt = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(t)\,\text{sen}\,nw_0 t\,dt \end{cases}$$

Es decir, el desarrollo en serie de Fourier de una función Imparr contendrá sólamente términos seno, tal como se muestra en el ejemplo 3 antes desarrollado.

= oo =

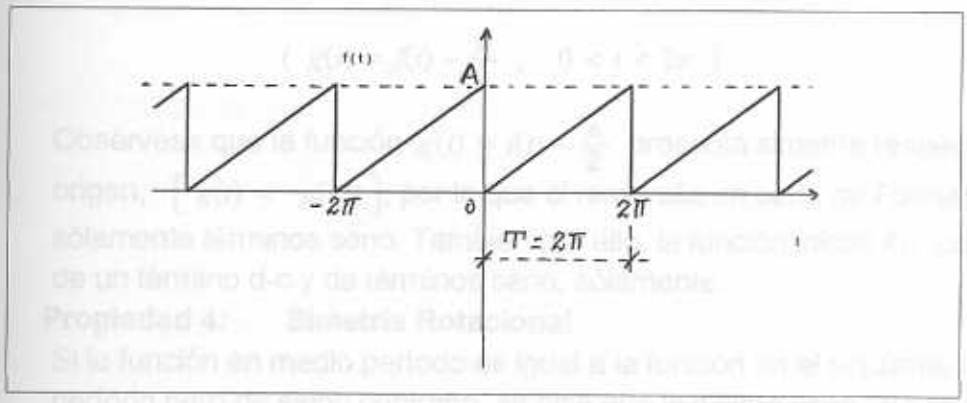
c) **Propiedad 3: Simetría Escondida**

Con frecuencia se presentan el caso de una función periódica, aparentemente,sin ningún tipo de simetría, pero que su desasrrollo en serie de Fourirer contiene sólamente términos coseno o términos seno.

Un ejemplo de tales funciones lo constituye el siguiente: supongamos que se desea obtener el desarrollo en serie de Fourier de la función periódica

$$f(t) = \frac{A}{2\pi}t \ , \quad \text{si} \quad 0 < t < 2\pi$$

cuya gráfica se muestra a continuación :



$$\left(f(t) = \frac{A}{2\pi}t \ , \quad 0 < t < 2\pi \right)$$

En este caso : $T = 2\pi \qquad \Rightarrow p = \frac{T}{2} = \pi$

Alicando las fórmulas de sintesis correspondientes se obtiene :

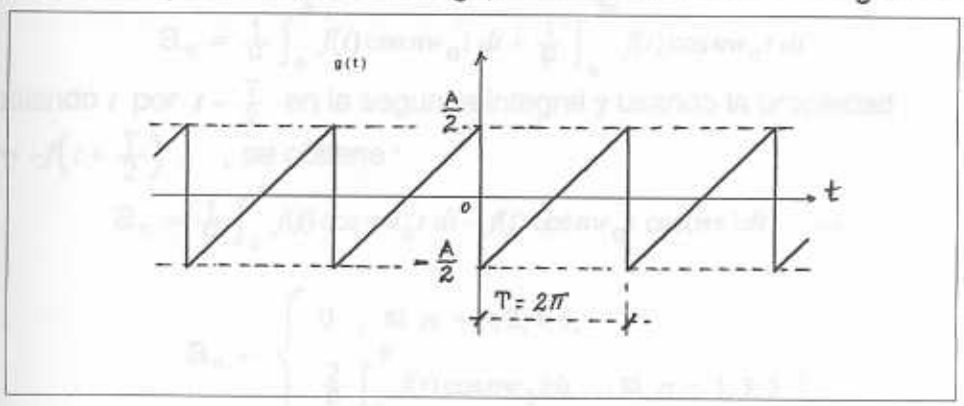
$$\begin{cases} a_0 = A \\ a_n = 0 \\ b_n = -\dfrac{A}{N\pi} \end{cases}$$

Por lo que : $$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\text{sen}(nt)$$

La función dada no satisface las condiciones de simetría antes expuestas, sin embargo, la serie de Fourier correspondiente consiste de un término constante (tèrmino d-c) y de términos seno, sólamente.

La razón de este comportamiento es que la simetría de esta función está " escondida " por el tèrmino d-c. En efecto, restemos la constante $\frac{A}{2}$ de la función dada y definamos una nueva función: $g(t) = f(t) - \frac{A}{2}$, es decir: $g(t) = \frac{A}{2\pi}t - \frac{A}{2}$, $T = 2\pi$

Con la resta de este término constante, hemos obtenido una función $g(t)$ la cual es la misma función dada $f(t)$, desplazada una cantidad $\frac{A}{2}$ hacia abajo, es decir, en el rango, tal como se ilustra en la siguiente figura:



$$\left(g(t) = f(t) - \frac{A}{2} \ , \quad 0 < t < 2\pi \right)$$

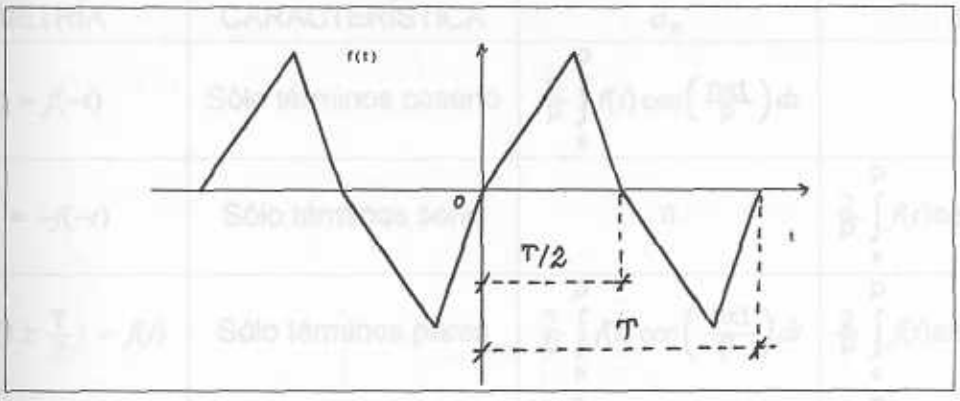
Obsérvese que la función $g(t) = f(t) - \frac{A}{2}$ presenta simetría respecto del origen, $\left[g(t) = -g(-t) \right]$, por lo que el resarrollo en serie de Fourier contiene sólamente términos seno. También por ello, la función inicial $f(t)$ consiste de un término d-c y de términos seno, sólamente.

d) **Propiedad 4: Simetría Rotacional**

Si la función en medio período es igual a la función en el siguiente medio período pero de signo contrario, se dice que la misma tiene "simetría rotacional ". Este tipo de simetría puede ser expresada analíticamente como sigue:

$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

La siguiente gráfica ilustra lo aquí expuesto:



$$f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

Se puede demostar que la serie de Fourier de una señal periódica con simetría rotacional, contiene sólamente los armónicos impares, es decir : $w_0, 3w_0, 5w_0, \ldots$

Demostración

En general: $$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos nw_0 t\, dt \quad \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(t)\cos nw_0 t\, dt + \frac{1}{p}\int_{p}^{2p} f(t)\cos nw_0 t\, dt$$

Cambiando t por $t + \frac{T}{2}$ en la segunda integral y usando la propiedad : $f(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$, se obtiene :

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(t)\cos nw_0 t\, dt - f(t)\cos nw_0 t\cos(n\pi)dt \quad \Rightarrow$$

$$a_n = \begin{cases} 0 \ , \ \text{si } n = 0,2,4,6,\ldots \\ \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(t)\cos nw_0 t dt \ , \ \text{si } n = 1,3,5,7,,\ldots \end{cases}$$

En forma análoga se puede demostrar que:

$$b_n = \begin{cases} 0 \ , \ \text{si } n = 0,2,4,6,\ldots \\ \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(t)\,\text{sen}\, nw_0 t dt \ , \ \text{si } n = 1,3,5,7,,\ldots \end{cases}$$

La siguiente Tabla resume las implicaciones en la serie de Fourier de los diferentes tipos de simetría de la función $f(t)$:

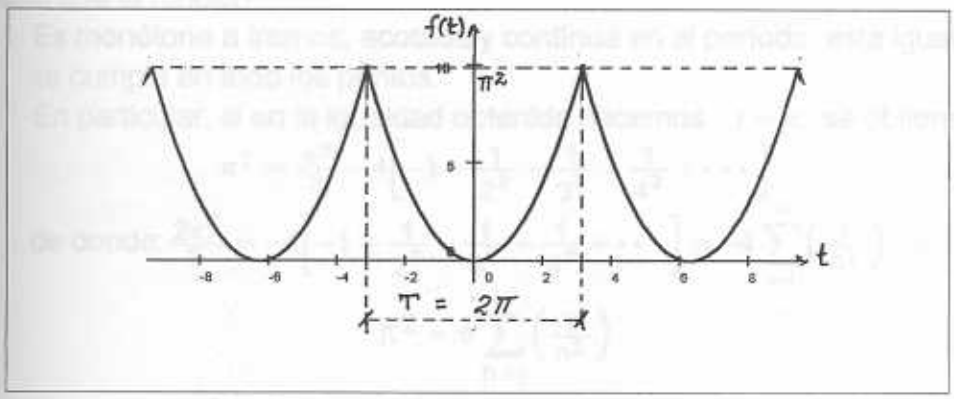
SIMETRÍA	CARACTERÍSTICA	a_n	b_n
$f(t) = f(-t)$	Sólo términos coseno	$\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$	0
$f(t) = -f(-t)$	Sólo términos seno	0	$\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$
$f(t) = f(t \pm \frac{T}{2}) = f(t)$	Sólo términos pares	$\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$	$\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$
$f(t) = f(t \pm \frac{T}{2}) = -f(t)$	Sólo términos impares	$\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$	$\frac{2}{p}\int_0^p f(t)\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$

Ejemplo 9:

Calcule la Serie trigonométrica de Fourier de la función periódica $f(t) = t^2$, siendo $T = 2\pi$.

Solución:

La gráfica de la función $f(t)$ se muestra a continuación:



$$(f(t) = t^2 \ , \ T = 2\pi \ )$$

Luego:

$f(t) = t^2 \Rightarrow f(t) = f(-t)$ por lo que $f(t)$ es una función Par.

Además, $T = 2\pi \quad \Rightarrow p = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{n\pi t}{p} = nt$

En consecuencia,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3} = \frac{2}{3\pi}(\pi^3 - 0) = \frac{2\pi^2}{3}$$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt$; Integrando por partes, se obtiene :

$$\left\{\begin{array}{l} t^2 = u \Rightarrow 2tdt = du \\ \cos nt\, dt = dv \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} dt = \dfrac{du}{2t} \\ v = \dfrac{\text{sen}\, nt}{n} \end{array}\right\}, \text{ por lo que:}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[t^2 \frac{\text{sen}(nt)}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}(nt)}{n} 2t\, dt \right] = -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\, sen\,(nt)\, dt \quad \Rightarrow$$

$$a_n = -\frac{4}{\pi}\left[-t\,\frac{\cos(nt)}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n}\, dt \right] = \frac{4}{\pi n^2}\left[\pi\cos(nt) + \frac{1}{n^2}\, sen\,(nt)\right]_0^{\pi} \quad \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}\left[\cos\left(n\pi\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2}, & \text{si } n = 2,4,6,\cdots \\ -\dfrac{4}{n^2}, & \text{si } n = 1,3,5,\cdots \end{cases}$$

Por lo tanto, recordando que $b_n = 0$. se obtiene:

$$f(t) = t^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos t}{1} - \frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} - \frac{\cos 4t}{4^2} + \cdots\right]$$

Puesto que la función:

a) Es monótona a tramos, acotada y contínua en el período, esta igualdad se cumple en todo los puntos.

b) En particular, si en la igualdad obtenida hacemos $t = \pi$, se obtiene:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots\right]$$

de donde: $\dfrac{2\pi^2}{3} = -4\left[-1 - \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots\right] = -4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow$

$$\pi^2 = 6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

12.3) EJERCICIOS PROPUESTOS II

Calcular la serie Trigonométrica de Fourier para la señales periódicas cuya definción en un período se señala a continuación

a) $f(t) = \begin{cases} -1\ , & \text{si } -\pi < t < 0 \\ 1\ , & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases}$

b) $f(t) = \begin{cases} 0\ , & \text{si } -\pi < t < 0 \\ t\ , & \text{si } 0 < t < \pi \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} 0\ , & \text{si } -\pi < t < 0 \\ sen\, t\ , & \text{si } \quad 0 < t < \pi \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} -t\ , & \text{si } -\pi < t < 0 \\ sen\, t\ , & \text{si } \quad 0 < t < \pi \end{cases}$

e) $f(t) = \begin{cases} 0\ , & \text{si } -2 \le t \le 0 \\ sen\, \frac{\pi t}{2}\ , & \text{si } \quad 0 \le t \le 2 \end{cases}$

f) $f(t) = \begin{cases} -t\ , & \text{si } -3 < t < 0 \\ t\ , & \text{si } \quad 0 < t < 3 \end{cases}$

g) $f(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } 0 < t < \frac{2\pi}{3} \\ 1\ , & \text{si } \quad \frac{2\pi}{3} < t < \frac{4\pi}{3} \\ 0\ , & \text{si } \quad \frac{4\pi}{3} < t < 2\pi \end{cases}$

h) $f(t) = \begin{cases} 0\ , & \text{si } -\pi < t < 0 \\ t\ , & \text{si } \quad 0 < t < \pi \end{cases}$

i) Úsense los resultados del ejercicio h) para establecer las siguientes igualdades:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$
$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots$$
$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

j) Hállese el desarrollo de Fourier de la función periódica $f(t)$ dada por la función alternante de onda cuadrada que se especifica a continuación:

$$f(t) = \begin{cases} 20, & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ -20, & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

Use el resultado para establecer que: $\pi = 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$

== oo ==

12.4) DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN NO PERIÓDICA EN SERIE DE FOURIER

Supongamos que una función $f(t)$, monótona a tramos, está definida en un intervalo $[a,b]$. como lo ilustra la figura 12.9 :

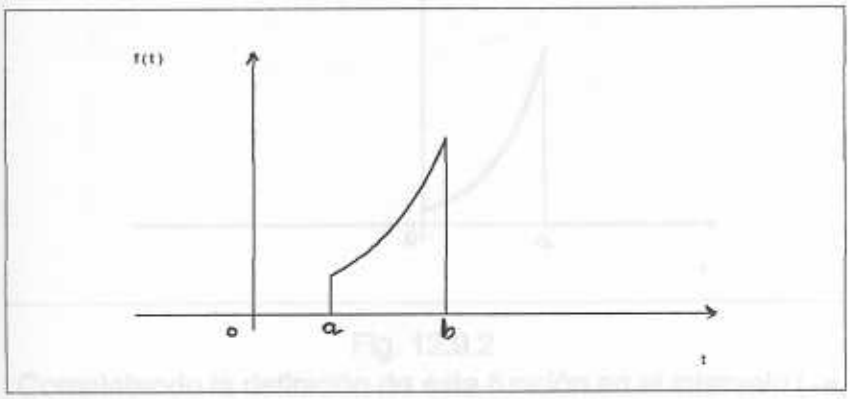


Fig. 12.9

Mostraremos que se puede representar esta función $f(t)$ en los puntos de continuidad, por una serie de Fourier. Para ello, distinguiremos tres casos:

Caso 1:Desarrollo de Pleno Rango

Consideremos una función periódica, monótona a tramos, $f_T(t)$ de periodo $T = |b-a|$, que coincida con la función $f(t)$ dada en el intervalo $[a,b]$,tal como se muestra en la figura 12.9.1

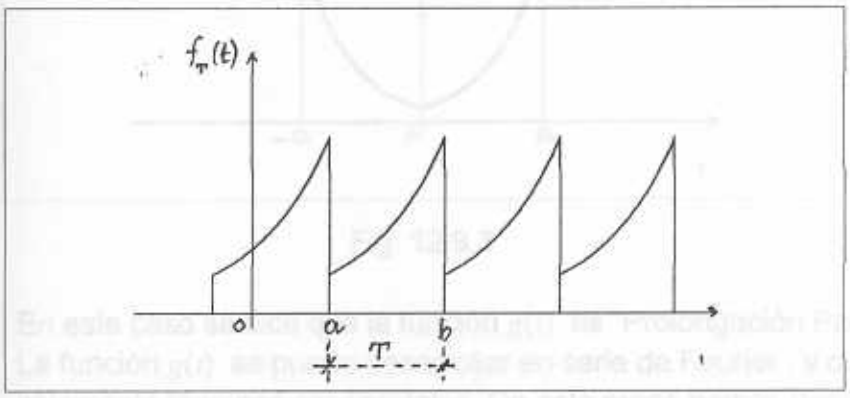


Fig. 12.9. 1 : Desarrollo de Pleno Rango

Obviamente, esta función $f_T(t)$ así definida puede ser desarrollada en serie de Fourier . La suma de dicha serie en todos los puntos del intervalo $[a,b]$, excepto en los de discontinuidad, coincide con la función dada $f(t)$, lo que significa que hemos desarrollado a $f(t)$ en serie de Fourier en el intervalo (a,b). Eventualmente, este desarrollo contendrá términos cosenoidales y senoidales.

Caso 2:Desarrollo de Medio Rango Cosenoidal

Consideremos ahora una función $f(t)$, definida en el intervalo $[0,a]$,

como lo ilustra la figura 12.9.2

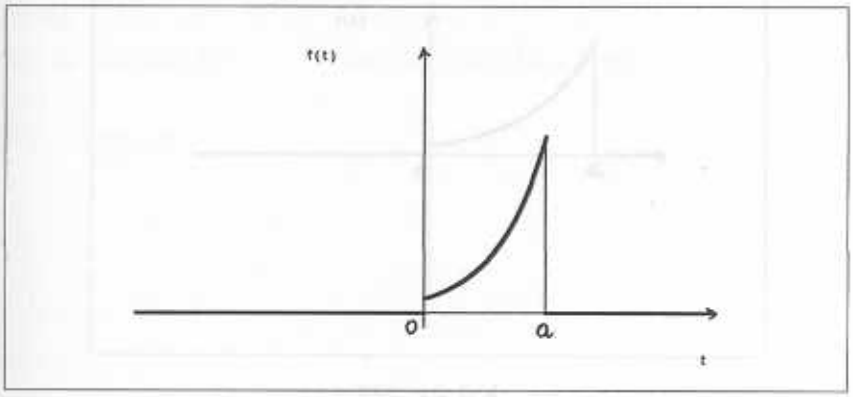


Fig. 12.9.2

Completando la definición de esta función en el intervalo $[-a,0]$, conservando la monotonía a tramos y de modo que en el intervalo $[-a,0]$ se verifique $f(t) = f(-t)$, obtenemos en definitiva una nueva función $g(t)$ par , como lo ilustra la figura 12.9.3

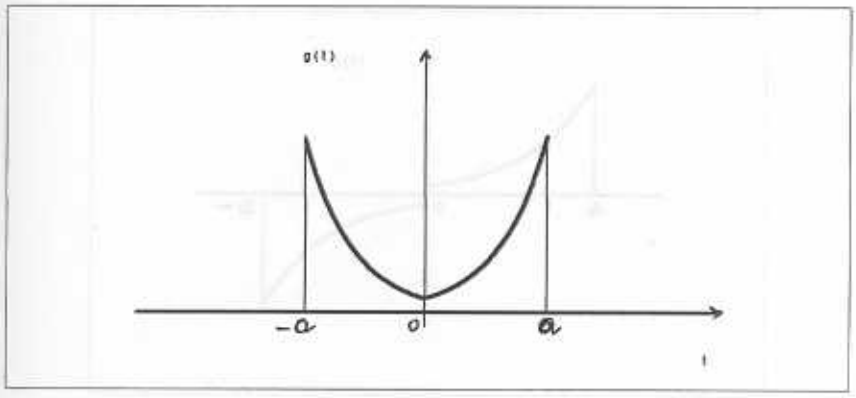


Fig. 12.9.3

En este caso se dice que la función $g(t)$ es "Prolongación Par" de $f(t)$. La función $g(t)$ se puede desarrollar en serie de Fourier , y contendrá sólamente términos cosenoidales. De este modo hemos desarrollado la función $f(t)$ original, definida en el intervalo $[0,a]$, en una serie de cosenos; es decir, hemos efectuado un desarrollo cosenoidal ($b_n = 0$).

Caso 3:Desarrollo de Medio Rango Senoidal

Consideremos de nuevo la función $f(t)$, definida en el intervalo $[\ 0,a\ ]$, como lo ilustra la figura 12.9.4

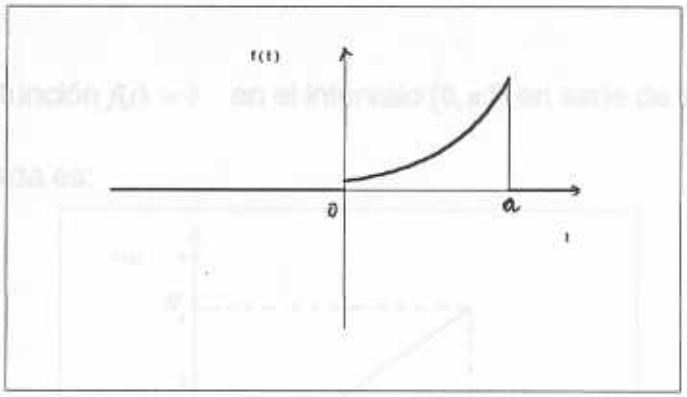


Fig. 12.9.4

Si completamos la definición de esta función en el intervalo $[-a,0]$, conservando la monotonía a tramos y de modo que en el intervalo $[-a,0]$ se verifique $f(t) = -f(-t)$, obtenemos en definitiva una nueva función $g(t)$ impar , como lo ilustra la figura 12.9.5

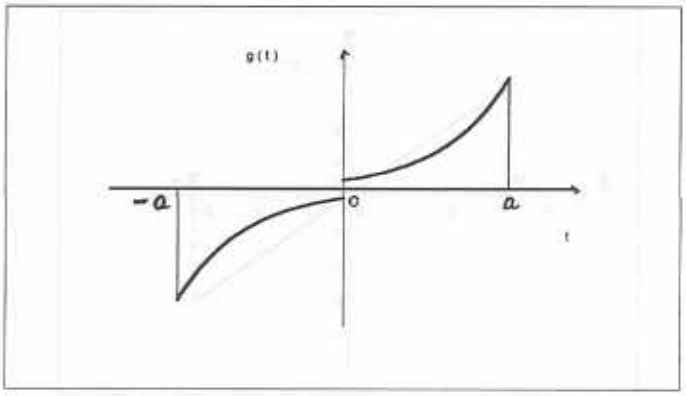


Fig. 12.9.5

En este caso se dice que la función $g(t)$ es "Prolongación Impar" de $f(t)$. La función $g(t)$ así definida se puede desarrollar en serie de Fourier , y contendrá sólamente términos senoidales. De este modo hemos desarrollado la función $f(t)$ original, definida en el intervalo $[0,a]$, en una serie de senos; es decir, hemos efectuado un desarrollo senoidal ($a_n = 0$).

En conclusión, si en el intervalo $[0,a]$ está definida una cierta función monótona a tramos $f(t)$, podemos desarrollar tanto en serie de Fourier de cosenos (Caso 2), como en serie de Fourier de senos (Caso 3), o de ambos, como sería en el Caso 1 arriba expuesto.

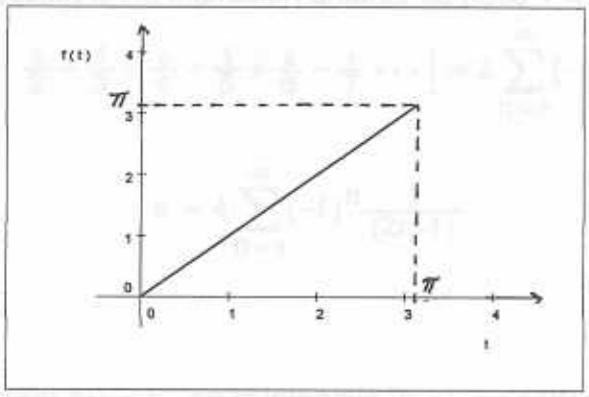
= oo =

Ejemplo 10

Dearrollar la función $f(t) = t$ en el intervalo $[0, \pi]$, en serie de senos.

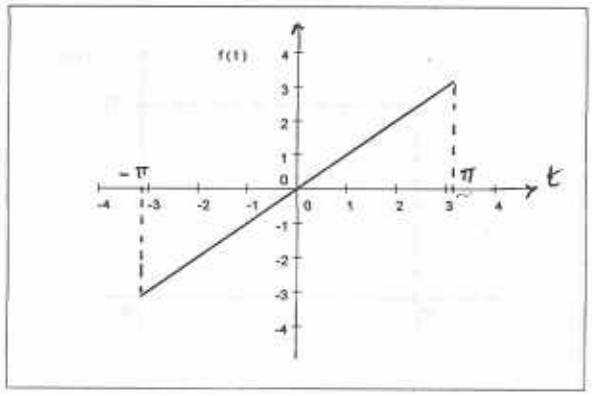
Solución:

La función dada es:



$$(f(t) = t, \quad 0 \le t \le \pi)$$

Prolongando esta función de manera impar, se obtiene.



$$g(t) = t, \quad -\pi \le t \le \pi, \; T = 2\pi$$

Luego:

$$a_n = 0, \qquad \forall n \in N$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right) dt; \qquad T = 2\pi \Rightarrow p = \pi, \text{ por lo tanto:}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \operatorname{sen}(nt)\, dt \text{ ; Integrando por partes : } \begin{cases} t = u \Rightarrow dt = du \\ sen(nt)\, dt = dv \end{cases}$$

Por lo que:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-t\frac{\cos nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\, dt\right] = -\frac{1}{\pi}\left[2\pi\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nt\Big|_{-\pi}^{\pi}\right];$$

$$b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

En consecuencia :

$$f(t) = t = 2\left[\frac{\text{sen } t}{1} - \frac{\text{sen } 2t}{2} + \frac{\text{sen } 3t}{3} - \frac{\text{sen } 4t}{4} + \frac{\text{sen } 5t}{5} - \cdots\right], \forall t \in (0,\pi)$$

NOTA:

Si en particular, en la expresión anterior se hace: $t = \frac{\pi}{2}$, se obtiene:

$$\frac{\pi}{2} = 2\left[1 - \frac{0}{2} - \frac{1}{3} - \frac{0}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0}{6} - \frac{1}{7} \cdots\right] = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)}$$

es decir :

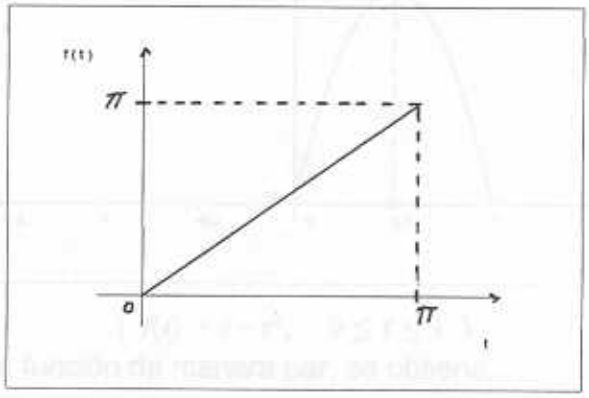
$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)}$$

Ejemplo 11

Desarrollar la función $f(t) = t$ en el intervalo $[0,\pi]$, en serie de cosenos.

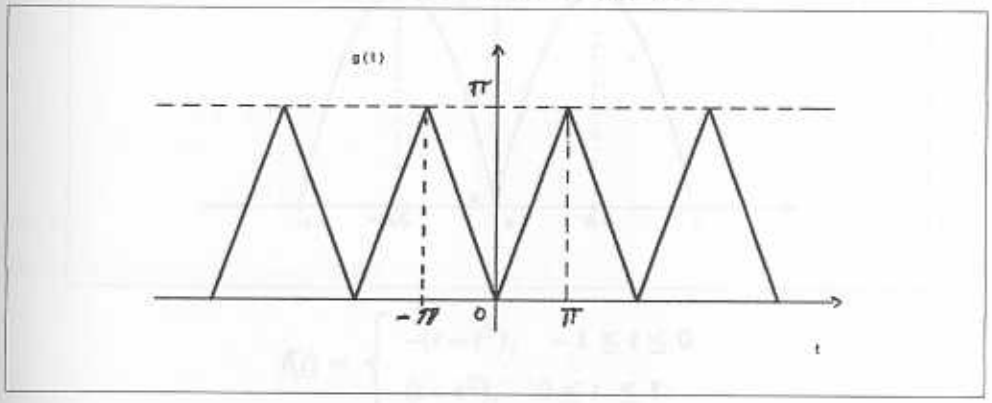
Solución:

La función dada es:



$$(\ f(t) = t, \quad 0 \le t \le \pi\ )$$

Prolongando esta función de manera par, se obtiene.



$$(\ g(t) = t, \quad -\pi \le t \le \pi, \ T = 2\pi\ )$$

Luego:

$$b_n = 0, \qquad \forall n \in N$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -t\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt; \qquad T = 2\pi \Rightarrow p = \pi,$$

por lo tanto Integrando por partes, se obtiene :

$$f(t) = t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos t}{1} + \frac{\text{sen } 3t}{3^2} + \frac{\text{sen } 5t}{5^2} - \frac{\text{sen } 7t}{7^2} + \cdots\right], \forall t \in (0,\pi)$$

$$= \text{oo} =$$

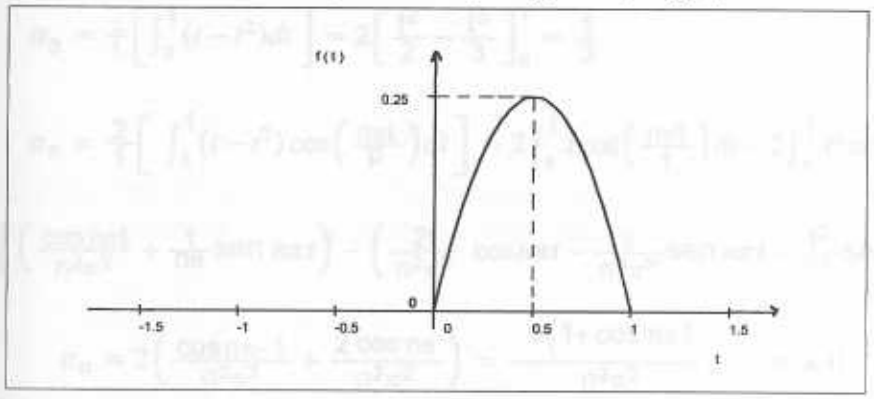
Ejemplo 12

Hállense los desarrollos de medio rango de la función $f(t) = t - t^2$, $0 < t < 1$,

Solución:

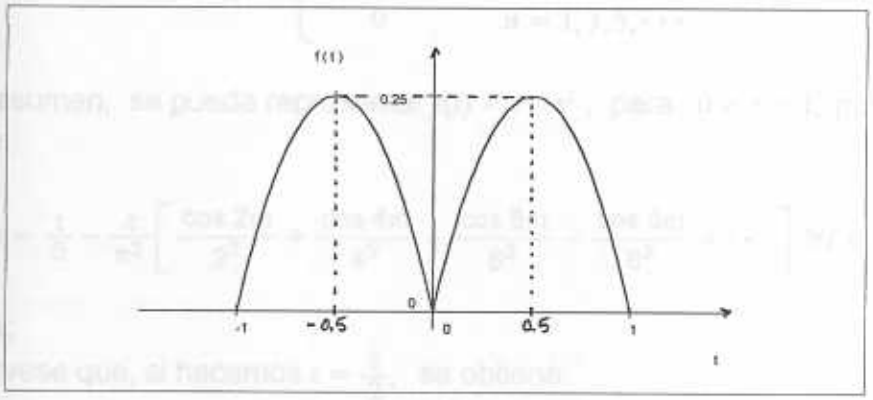
a) Desarrollo de medio rango cosenoidal:

La función dada es el arco de parábola :$(y - \frac{1}{4}) = -(t - \frac{1}{2})^2$, $0 < t < 1$



$$(f(t) = t - t^2, \quad 0 \le t \le 1)$$

Prolongando esta función de manera par, se obtiene.



$$f(t) = \begin{cases} -(t + t^2), & -1 \le t \le 0 \\ (t - t^2), & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Luego: $T = 2 \Rightarrow p = 1$

$b_n = 0, \quad \forall n \in N$

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{0} -(t+t^2)\,dt + \frac{1}{1}\int_0^1 (t-t^2)dt = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{0} -(t+t^2)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt \text{ , con } p = 1$$

Sin embargo, una vez que se ha comprendido el razonamiento que fundamenta el procedimiento, no necesitamos pensar en la extensión, sino que podemos escribir de inmediato, con base en el desarrollo teórico antes expuesto, que:

$$a_0 = 2\left[\frac{1}{p}\int_0^p f(t)dt\right] \quad ; \quad a_n = 2\left[\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt\right]$$

de donde:

$$a_0 = \frac{2}{1}\left[\int_0^1 (t-t^2)dt\right] = 2\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{1}\left[\int_0^1 (t-t^2)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt\right] = 2\int_0^1 t\cos\left(\frac{n\pi t}{1}\right)dt - 2\int_0^1 t^2\cos\left(\frac{n\pi t}{1}\right)dt;$$

$$a_n = 2\left[\left(\frac{\cos n\pi t}{n^2\pi^2} + \frac{t}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi t\right) - \left(\frac{2t}{n^2\pi^2}\cos n\pi t - \frac{2}{n^3\pi^3}\operatorname{sen} n\pi t + \frac{t^2}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi t\right)\right]_0^1$$

$$a_n = 2\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2} + \frac{2\cos n\pi}{n^2\pi^2}\right) = -\frac{2(1+\cos n\pi)}{n^2\pi^2}, \qquad n \neq 0$$

Luego:

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n = 2,4,6,\cdots \\ 0, & n = 1,3,5,\cdots \end{cases}$$

En resumen, se puede representar $f(t) = t - t^2$, para: $0 < t < 1$, por la serie:

$$f(t) = \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos 2\pi t}{2^2} + \frac{\cos 4\pi t}{4^2} + \frac{\cos 6\pi t}{6^2} + \frac{\cos 8\pi t}{8^2} + \cdots\right], \forall t \in (0,1)$$

NOTA:

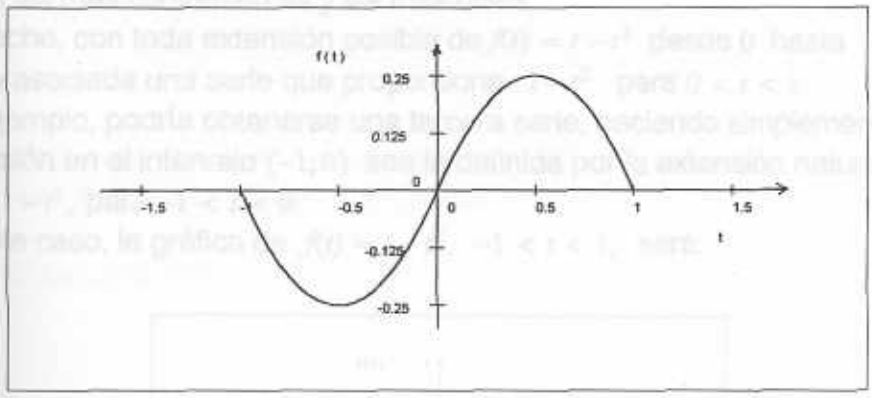
Obsérvese que, si hacemos $t = \frac{1}{2}$, se obtiene:

$$\pi^2 = 48\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

= oo =

b) Desarrollo de medio rango senoidal:

El desarrollo de medio rango senoidal se obtiene extendiendo primero la función dada $f(t) = t - t^2$, hacia el intervalo $(-1, 0)$ por reflexión en el origen y extendiendo a continuación periódicamente la función así definida sobre $(-1, 1)$.



$$f(t) = \begin{cases} -(-t - t^2), & -1 \le t \le 0 \\ t - t^2, & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Sin embargo, todo lo que en realidad se necesita hecer para obtener este desarrollo, es observar que, de acuerdo con lo antes expuesto:

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_n = 0 \quad ; \quad b_n = 2\left[\frac{1}{p}\int_0^p f(t)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt\right]$$

Luego : $T = 2 \Rightarrow p = 1$

$$a_n = 0, \qquad \forall n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (t - t^2)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{1}\right)dt$$

$$b_n = 2\left[\left(\frac{\text{sen } n\pi t}{n^2\pi^2} - \frac{t}{n\pi}\cos n\pi t\right) - \left(\frac{2t}{n^2\pi^2}\,\text{sen } n\pi t + \frac{2}{n^3\pi^3}\cos n\pi t - \frac{t^2}{n\pi}\cos n\pi t\right)\right]_0^1$$

$$b_n = 2\left[-\frac{\cos n\pi - 1}{n\pi} - \left(\frac{2(\cos n\pi - 1)}{n^3\pi^3} - \frac{\cos n\pi}{n\pi}\right)\right] = \frac{4(1 - \cos n\pi)}{n^3\pi^3}, \qquad n \ne 0$$

En consecuencia :

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{8}{n^3\pi^3}, & n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0 & , n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

En resumen, se puede representar $f(t) = t - t^2$, para: $0 < t < 1$, por medio de la serie:

$$f(t) = \frac{8}{\pi}\left[\frac{\text{sen } \pi t}{1} + \frac{\text{sen } 3\pi t}{3^3} + \frac{\text{sen } 5\pi t}{5^3} - \frac{\text{sen } 7\pi t}{7^3} + \cdots\right], \forall t \in (0,1)$$

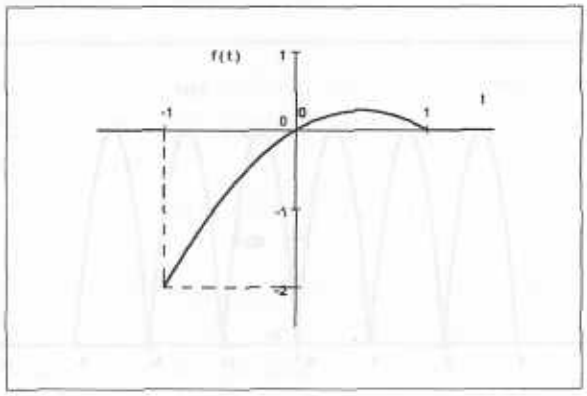
OBSERVACIÓN:

Las series de medio rango antes obtenidas no son las únicas series de Fourier que representan a la función $f(t) = t - t^2$ sobre el intervalo $(0,1)$, sin embargo, si son las más convenientes y las más útiles.

De hecho, con toda extensión posible de $f(t) = t - t^2$ desde 0 hasta -1, existe asociada una serie que proporciona $t - t^2$ para $0 < t < 1$.

Por ejemplo, podría obtenerse una tercera serie, haciendo simplemente que la extensión en el intervalo $(-1,0)$ sea la definida por la extensión natural de $f(t) = t - t^2$, para $-1 < t < 0$.

En este caso, la gráfica de $f(t) = t - t^2$, $-1 < t < 1$, será:



$f(t) = t - t^2$

Por lo que:

$$a_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(t - t^2)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt; \qquad T = 2 \Rightarrow p = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$a_n = \left[\left(\frac{\cos n\pi t}{n^2\pi^2} + \frac{1}{n\pi}\text{sen } n\pi t\right) - \left(\frac{2t}{n^2\pi^2}\cos n\pi t - \frac{2}{n^3\pi^3}\text{sen } n\pi t + \frac{t^2}{n\pi}\text{sen } \pi t\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$a_n = -\frac{4\cos n\pi}{n^2\pi^2}, \qquad n \neq 0$$

Además,

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(t - t^2)dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3}$$

Adicionalmente:

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}(t - t^2)\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt \qquad \Rightarrow$$

$$b_n = \left[\left(\frac{\text{sen } n\pi t}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n\pi}\cos n\pi t\right) - \left(\frac{2t}{n^2\pi^2}\text{sen } n\pi t + \frac{2}{n^3\pi^3}\text{ccos } n\pi t - \frac{t^2}{n\pi}\cos \pi t\right)\right]_{-1}^{1}$$

De donde :

$$b_n = -\frac{2\cos n\pi}{n\pi}$$

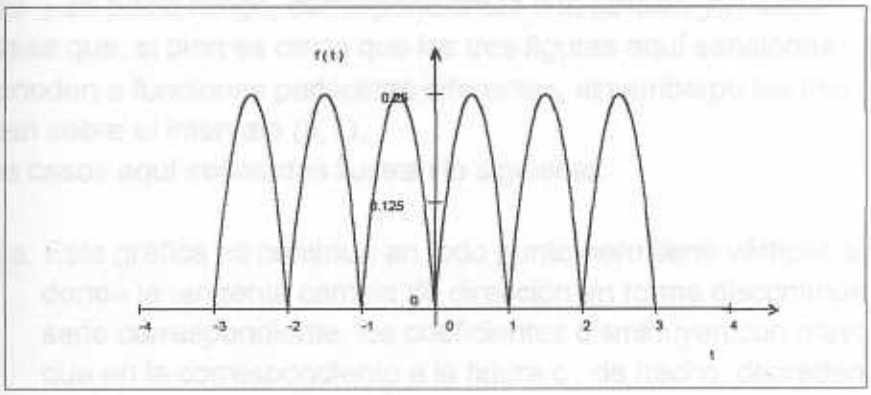
En consecuencia, para el intervalo : $0 < t < 1$, también es posible escribir :

$$f(t) = -\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{\cos \pi t}{1} - \frac{\cos 2\pi t}{2^2} + \frac{\cos 3\pi t}{3^2} - \frac{\cos 4\pi t}{4^2} + \cdots\right] +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} \pi t}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2\pi t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3\pi t}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4\pi t}{4} + \cdots\right], \forall t \in (0,1)$$

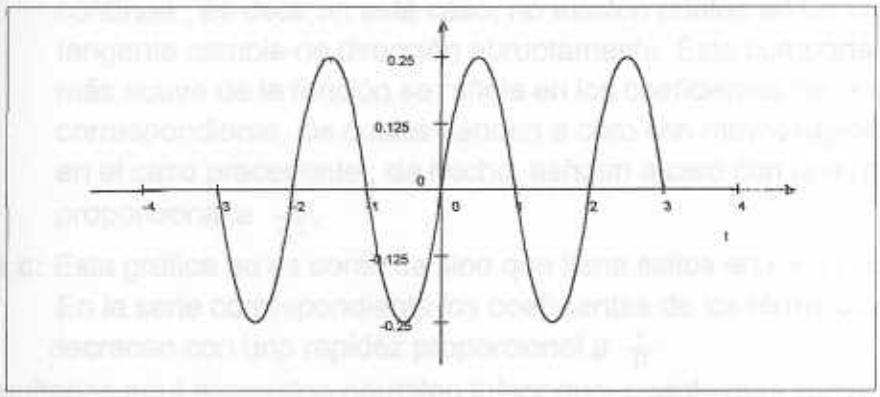
Se resume a continuación las funciones periódicas extendidas, correspondientes a los tres casos expuestos anteriormente:

a) **Extensión Par:**



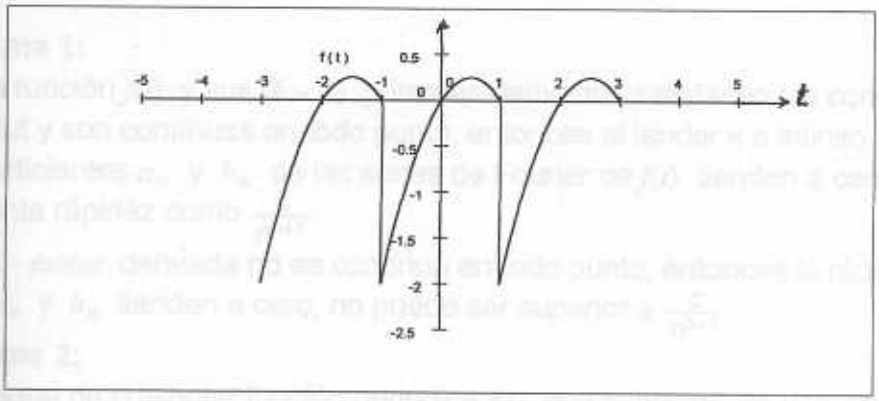
(Fig. a : Extensión Par)

b) **Extensión Impar:**



(Fig. b : Extensión Impar)

c) **Extensión natural:**



(Fig. c : Extensión en su propio dominio)

Las Figuras a, b y c arriba mostradas muestran las funciones periódicas extendidas que representan, respectivamente, a la serie cosenoidal, senoidal y de pleno rango, correspondientes a la función $f(t)$ dada. Obsérvese que, si bien es cierto que las tres figuras aquí señaladas corresponden a funciones periódicas diferentes, sin embargo las tres coinciden sobre el intervalo $(0,1)$.
Los tres casos aquí señalados ilustran lo siguiente:

Figura a: Esta gráfica es contínua en todo punto pero tiene vértices o puntos en donde la tangente cambia de dirección en forma discontínua. En la serie correspondiente, los coeficientes disminuyen con mayor rapidéz que en la correspondiente a la figura c ; de hecho, decreden con una rapidéz proporcional a $\frac{1}{n^2}$.

Figura b: Esta gráfica no sólo es contínua sino también tiene una tangente contínua ; es decir,en este caso, no existen puntos en los cuales la tangente cambie de dirección abruptamente. Este comportamiento más suave de la función se refleja en los coeficientes de la serie correspondiente, los cuales tienden a cero con mayor rapidéz que en el caso precedente ; de hecho, tienden a cero con una rapidéz proporcional a $\frac{1}{n^3}$.

Figura c: Esta gráfica no es contínua sino que tiene saltos en $t = \pm 1, \pm 2, \pm 3. \cdots$ En la serie correspondiente los coeficientes de los términos senoidales decrecen con una rapidéz proporcional a $\frac{1}{n}$.

Los resultados aquí expuestos permiten inferir que, cuanto más suave varía la función $f(t)$, más rápidamente converge su desarrollo de Fourier. Inversamente, observando el grado de rapidez a la cual los términos de la serie de Fourier de una función desconocida tiende a cero, podemos obtener información útil acerca del grado de suavidad de la función.
Estrechamente vinculados con estos resultados están los siguientes tres teoremas:

Teorema 1:
Si una función $f(t)$ y sus $(k-1)$ primeras derivadas satisfacen las condiciones de Dirichlet y son contínuas en todo punto, entonces al tender n a infinito $(n \to \infty)$, los coeficientes a_n y b_n de las series de Fourier de $f(t)$ tienden a cero al menos con tanta rápidéz como $\frac{c}{n^{k+1}}$.
Si la $k-ésima$ derivada no es contínua en todo punto, entonces la rápidéz con que a_n y b_n tienden a cero, no puede ser superior a $\frac{c}{n^{k+1}}$.

Teorema 2:
La integral de cualquier función periódica $f(t)$ que satisfaga las condiciones de Dirichlet se puede hallar integrando término a término la serie de Fourier de dicha función.

Teorema 3:
Si $f(t)$ es una función contínua en todo punto, la cual, así como su derivada $f'(t)$, satisface las condiciones de Dirichlet, entonces $f'(t)$ se puede hallar derivando término a término la serie de Fourier de dicha función.

$$= oo =$$

12.5) FORMAS ALTERNAS DE LA SERIE DE FOURIER

La forma original de la serie de Fourier de una función periódica, como se dedujo en la sección anterior, conocida también como **" Forma Trigonométrica Real "**, puede transformarse en otras formas trigonométricas y en una forma exponencial compleja, las cuales resultan de gran utilidad para estudiar el comportamiento de las funciones periódicas tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. En las siguiente sección se desarrollarán tales formas alternas.

12.5.1) Forma Trigonométrica Alterna

En la Serie trigonométrica Real, dada po r:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{p} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}\right) \quad \ldots\ldots(1)$$

podemos aplicar a cada par de términos de la misma frecuencia, el procedimeinto normal para reducir la suma de un seno y un coseno del mismo ángulo, a un sólo término. A tal efecto, consideremos el triángulo que se presenta en la figura 12.10 :

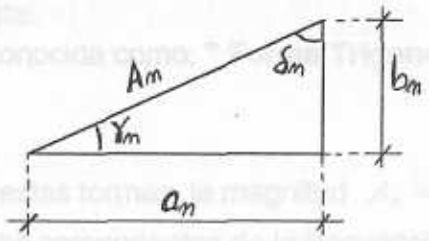


Fig. 12.10

Por construcción:
$$\begin{cases} A_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \quad ; \quad A_0 = \dfrac{a_0}{2} \\ \cos\gamma_n = \dfrac{a_n}{\sqrt{(a_n)^2+(b_n)^2}} = \dfrac{a_n}{A_n} \\ \operatorname{sen}\gamma_n = \dfrac{b_n}{\sqrt{(a_n)^2+(b_n)^2}} = \dfrac{b_n}{A_n} \\ \gamma_n = \arctan\dfrac{b_n}{a_n} \; ; \quad \gamma_n + \delta_n = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Luego, podemos escribir: $\left\{ \begin{array}{l} a_n = A_n \cos\gamma_n \\ b_n = A_n \operatorname{sen}\gamma_n \end{array} \right\} \Rightarrow$ sustituyendo en (1)

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\cos\frac{n\pi t}{p}\cos\gamma_n + \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}\operatorname{sen}\gamma_n\right)$$

De donde:

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{n\pi t}{p} - \gamma_n\right)}$$

Obviamente, γ_n es el ángulo de retraso en fase de la armónica n, respecto de la frecuencia fundamental.

Esta forma alterna de la serie de Fourier se conoce como :**"Forma Trigonométrica Alterna"** y más propiamente como :**" Forma Trigonométrica Alterna Cosenoidal".**

Con igual propiedad, aplicando la función seno al ángulo δ_n, podemos escribir:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\cos\frac{n\pi t}{p}\operatorname{sen}\delta_n + \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}\cos\delta_n\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{p} + \delta_n\right)}$$

Obviamente, δ_n es el ángulo de adelanto en fase de la armónica n, respecto de la frecuencia fundamental.
Esta forma alterna es conocida como: **" Forma Trigonométrica Alterna Senoidal".**

OBSERVACIÓN:

a) En cualquiera de estas formas, la magnitud $A_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2}$ es la amplitud resultante de las componentes de la frecuencia $\frac{n\pi t}{p}$, es decir, la amplitud de la $n-ésima$ armónica del desarrollo.

b) Los ángulos de fase:

$$\gamma_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \quad \text{y} \quad \delta_n = \arctan\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_n\right)$$

miden el retraso o adelanto en fase, respectivamente, de la $n-ésima$ armónica con respecto a una onda senoidal o cosenoidal estandard de la misma frecuencia.

$$= \text{oo} =$$

12.5.2) Forma Exponencial Compleja

La forma exponencial compleja de una serie de Fourier se obtiene sustituyendo, en la Forma Trigonométrica Real, los términos cosenoidales y senoidales por sus equivalentes exponenciales de Euler. En consecuencia :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{\frac{in\pi t}{p}} + e^{-\frac{in\pi t}{p}}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{in\pi t}{p}} - e^{-\frac{in\pi t}{p}}}{2i}\right)$$

Agrupando términos y teniendo en cuenta que $\frac{1}{i} = -i$, obtenemos:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - i\,b_n}{2} e^{\frac{in\pi t}{p}} + \frac{a_n + i\,b_n}{2} e^{-\frac{in\pi t}{p}}\right)$$

Si ahora definimos: $\begin{cases} C_0 = \dfrac{a_0}{2} \\ C_n = \dfrac{a_n - i\,b_n}{2} \\ C_{-n} = \dfrac{a_n + i\,b_n}{2} \end{cases}$

La última serie se puede escribir:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{\frac{in\pi t}{p}} + C_{-n} e^{-\frac{in\pi t}{p}}\right)$$

Pero,

$$C_n = \frac{1}{2}\left[a_n - i\,b_n\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt - i\frac{1}{2}\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt \quad \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\left[\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)\right]dt = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)e^{-\frac{in\pi t}{p}}\,dt$$

Procediendo en forma análoga, se obtiene : $C_{-n} = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)e^{\frac{in\pi t}{p}}\,dt$, por lo que :

$C_{-n} = C_n\big|_{n=-n}$, es decir, C_n y C_{-n} son complejos conjugados

por lo que , sin importar si el índice es positivo, negativo o cero, $f(t)$ y C_n vienen dados por :

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{\frac{in\pi t}{p}}} \quad \text{y} \quad \boxed{C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)e^{-\frac{in\pi t}{p}}}$$

Esta forma alterna de la serie de Fourier se conoce como :**"Forma Exponencial Compleja" .**

NOTA:

Cuando se construye esta Forma Exponencial Compleja, se calcula la misma directamente a partir de la función dada, sin necesidad de obtener previamente la transformación a partir de la Forma Trigonométrica Real.

Para ello, se construye directamente estas expresiones a partir de las ecuaciones de síntesis de $f(t)$ y de C_n , arriba anotadas.

Nótese también que :

$$C_0 = C_n\big|_{n=0} = \frac{a_0 - i\,b_0}{2} = \frac{a_0}{2}, \qquad \text{pues } b_0 = 0$$

OBSERVACIÓN: Amplitud de la armónica "n"

Recuérdese que la amplitud de cada armónica está dada por :

$$A_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Pero : $\left\{\begin{array}{l} a_n = C_n + C_{-n} \\ b_n = i(C_n - C_{-n}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a_n)^2 = C_n^2 + 2C_nC_{-n} + C_{-n}^2 \\ (b_n)^2 = -\left(C_n^2 - 2C_nC_{-n} + C_{-n}^2\right) \end{array}\right.$

De donde:

$(a_n)^2 + (b_n)^2 = 4C_nC_{-n} = 4\left|C_n\right|^2 \Rightarrow$ sustituyendo en (1) :

$$A_n = \sqrt{4\left|C_n\right|^2} = 2\left|C_n\right|$$

$$\boxed{A_n = \; = 2\left|C_n\right| = 2\left|C_{-n}\right|}$$

= oo =

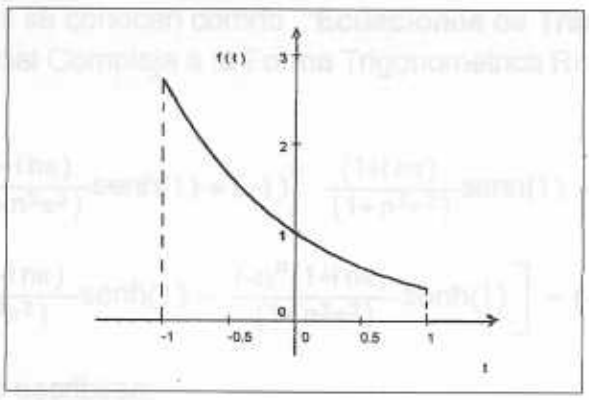
Ejemplo 13:

Encuentre la forma Exponencial compleja de la serie de Fourier, de la función periódica $f(t)$ cuya definición en un período es:

$$f(t) = e^{-t} \quad , \quad -1 < t < 1$$

Solución:

La gráfica de la función dada, en un período, es:



$$(f(t) = e^{-t})$$

$T = 2 \quad \Rightarrow p = 1,$ por lo tanto:

$$C_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-t} e^{-\frac{in\pi t}{1}}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-t(1+in\pi)}\, dt = \frac{1}{2}\left.\frac{e^{-t(1+in\pi)}}{-(1+in\pi)}\right|_{-1}^{1} \quad \Rightarrow$$

$$C_n = -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(1+in\pi)} - e^{(1+in\pi)}}{(1+in\pi)}\right] = \frac{1}{(1+in\pi)}\left[\frac{e^{(1+in\pi)} - e^{-(1+in\pi)}}{2}\right] \quad \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{\operatorname{senh}(1+in\pi)}{(1+in\pi)} = \frac{\operatorname{senh}(1)\cosh(in\pi) + \cosh(1)\operatorname{senh}(in\pi)}{(1+in\pi)} \quad \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{\operatorname{senh}(1)\cos(n\pi) + i\cosh(1)\operatorname{sen}(n\pi)}{(1+in\pi)} = \frac{(-1)^n \operatorname{senh}(1)}{(1+in\pi)}$$

De donde:

$$C_n = (-1)^n \frac{(1-in\pi)}{(1+n^2\pi^2)}\operatorname{senh}(1)$$

El desarrollo de $f(t)$ buscado es por lo tanto: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{\frac{in\pi t}{p}}$,

es decir :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-in\pi)}{(1+n^2\pi^2)}\operatorname{senh}(1)\, e^{in\pi t}$$

NOTA:

1°) Por supuesto que este desarrollo puede ponerse sin dificultad en la forma

Trigonométrica Real, ya que , por definición:

$$C_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2} \quad y \quad C_{-n} = \frac{a_n + i\,b_n}{2}$$

Por consiguiente, sumando y restando ambas expresiones, se obtiene:

$$\boxed{a_n = C_n + C_{-n}} \quad y \quad \boxed{b_n = i(C_n - C_{-n})}$$

Estas ecuaciones se conocen comno **"Ecuaciones de Transferencia "** de la Forma Exponencial Compleja a la Forma Trigonométrica Real.

En este casdo :

$$a_n = (-1)^n \frac{(1-i\,n\pi)}{(1+n^2\pi^2)}\text{senh}(1) + (-1)^n \frac{(1+i\,n\pi)}{(1+n^2\pi^2)}\text{senh}(1) = (-1)^n \frac{2\text{senh}(1)}{(1+n^2\pi^2)}$$

$$b_n = i\left[\frac{(-1)^n(1-i\,n\pi)}{(1+n^2\pi^2)}\text{senh}(1) - \frac{(-1)^n(1+i\,n\pi)}{(1+n^2\pi^2)}\text{senh}(1)\right] = (-1)^n \frac{2\pi n\,\text{senh}(1)}{(1+n^2\pi^2)}$$

Por lo que puede escribirse:

$$f(t) = \text{senh}(1) - 2\text{senh}(1)\left(\frac{\cos\pi t}{1+\pi^2} - \frac{\cos 2\pi t}{1+4\pi^2} + \frac{\cos 3\pi t}{1+9\pi^2} - \cdots\right) -$$
$$-2\pi\text{senh}(1)\left(\frac{\text{sen}\pi t}{1+\pi^2} - \frac{2\text{sen}2\pi t}{1+4\pi^2} + \frac{3\text{sen}3\pi t}{1+9\pi^2} - \cdots\right)$$

De donde:

$$f(t) = \text{senh}(1)\left(1 - \frac{2\cos\pi t}{1+\pi^2} + \frac{2\cos 2\pi t}{1+4\pi^2} - \frac{2\cos 3\pi t}{1+9\pi^2} + \cdots\right) -$$
$$-2\pi\text{senh}(1)\left(\frac{\text{sen}\pi t}{1+\pi^2} - \frac{2\text{sen}2\pi t}{1+4\pi^2} + \frac{3\text{sen}3\pi t}{1+9\pi^2} - \cdots\right)$$

2°) También puede calcularse sin dificultad, la forma Trigonométrica Alterna. Para ello, recuérdese que:

$$A_n = 2|C_n| \Rightarrow A_n = 2\left|(-1)^n \frac{(1-i\,n\pi)}{(1+n^2\pi^2)}\text{senh}(1)\right| = 2\frac{\sqrt{1+n^2\pi^2}}{(1+n^2\pi^2)}\text{senh}(1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{2}{\sqrt{1+n^2\pi^2}}\text{senh}(1); \qquad A_0 = 2\text{senh}(1) \\ \gamma_n = \arctan\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right) = \arctan\dfrac{(-1)^n 2\pi n\,\text{senh}(1)}{(-1)^n 2\text{senh}(1)} = \arctan(n\pi) \\ \delta_n = \arctan\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \gamma_n \end{cases}$$

Por lo tanto, la forma Trigonimétrica Alterna (cosenoidal), será:

$$f(t) = 2\text{senh}(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1+n^2\pi^2}}\text{senh}(1)\cos\left[\frac{n\pi t}{p} - \arctan(n\pi)\right]$$

3°) Además puede obtenerse, en particular:

* Amplitud de la cuarta armónica: $A_4 = 2\left| C_4 \right| = \dfrac{2}{\sqrt{1+16\pi^2}}\text{senh}(1)$

* Ángulo de retraso en fase de la cuarta armónica: $\gamma_4 = \arctan(4\pi)$

= oo =

12.5.3) Ejercicios Propuestos III

Hállese la forma Exponencial Compleja de la serie de Fourier, de las funciones periódicas cuyas definiciones en un período son:

a) $f(t) = \begin{cases} t\ , & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0\ , & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$ b) $f(t) = \begin{cases} 1\ , & \text{si } 0 < t < 1 \\ -1\ , & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$

c) $f(t) = t$, si $0 < t < 1$ d) $f(t) = t$, si $-1 < t < 1$

e) $f(t) = \cos t$, si $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

f) $f(t) = \text{sen}\, t$, si $0 < t < \pi$

h) $f(t) = \cosh t$, si $-1 < t < 1$

i) $f(t) = \text{senh}\, t$, si $< -t < 1$

= oo =

12.6) TEOREMA DE DIRICHCLET

Hagámonos ahora una importante pregunta: ¿ Es posible representar cualquier función periódica por una serie de Fourier ?

Es obvio que, para una serie de Fourier dada, todos los coeficientes C_n deben existir y respoinder a :

$$C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-\frac{i n\pi t}{p}}\, dt = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-i n w_0 t}\, dt$$

Como la magnitud de : $e^{-i n w_0 t}$ es 1, es evidente que:

$$C_n \le \frac{1}{T}\int_0^T \left| f(t) \right| \left| e^{-\frac{i n\pi t}{p}} \right| dt \Rightarrow C_n \le \frac{1}{T}\int_0^T \left| f(t) \right| dt$$

Asi, si la integral del lado derecho de esta ecuación es finita, entonces el coeficiente C_n es también finito. Por lo tanto, los coeficientes C_n existen si la función $f(t)$ es **Absolutamente Integrable sobre el intervalo T segundos;** es decir, si:

$$\int_0^T \left| f(t) \right| dt \neq \infty$$

Esta condiciónes es conocida como **" Condición de Dirichclet "** y la misma

establece que, si una función (o señal) satisface dicha condición, la existencia de la serie de Fourier está garantizada, aunque dicha serie puede no converger en todos los puntos.
Así, si la serie es infinita en algunos puntos, la serie representativa de la función será también infinita en dichos puntos y no convergente en ellos.
Análogamente, si la función tiene un número infinito de máximos y mínimos en un período, entonces la función tiene una apreciable cantidad de componentes infinitas en frecuencia y la serie entonces no converge rápido ni uniformemente.
En resumen, para que una serie de Fourier converja uniformemente, la función $f(t)$ debe permanecer finita y debe tener sólamente un número finito de máximos y mínimos en T. Adicionalmente, $f(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades finitas.
Las condiciones aquí expuestas se conocen como: **"Condiciones Duras de Dirichclet"** *o "Strong Dirichclet Conditions"*, para la convergencia de una serie de Fourier. La figura 12.11 ilustra lo aquí expuesto:

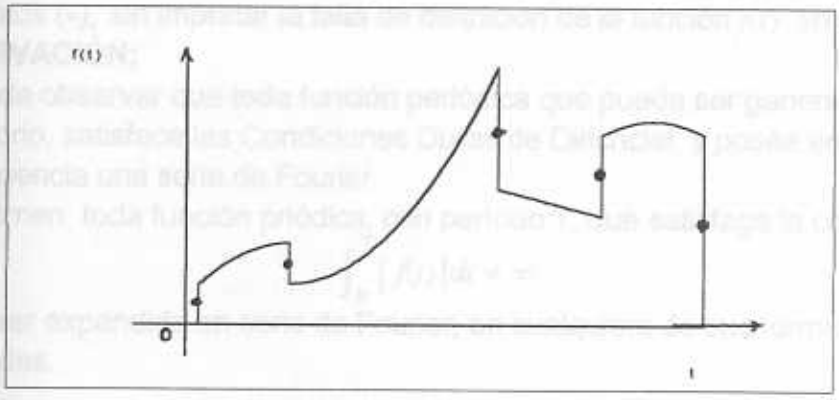


Fig. 12. 11

Las condiciones de Dirichclet establecen entonces que no es necesario que una función sea contínua para tener un desarrollo válido de Fourier. Esto significa que una función puede tener una gráfica que conste de un cierto número finito de arcos separados correspondientes a curvas diferentes, cada una de las cuales está definida por una fórmula diferente, y todavía ser representada por medio de una serie de Fourier. Obviamente, para encontrar los coeficientes será necesario dividir el intervalo de integración $(d,\ d+2p)$, para hacerlo así corresponder a los diversos segmentos de la función.
En el caso de la Figura 12.11 precedente, la función $f(t)$ está definida por cuatro expresiones diferente: $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ y $f_4(t)$ sobre porciones sucesivas del intervalo $(d,\ d+2p)$. Por consiguiente, es necesario escribir las fórmulas de Euler como :

$$a_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt \quad \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_d^r f_1(t)cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt + \int_r^s f_2(t)cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt + \int_s^t f_3(t)cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt +$$

$$+\int_t^u f_4(t)cos\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$$

Análogamente:

$$b_n = \frac{1}{p}\int_d^{d+2p} f(t)\ \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt \quad \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_d^r f_1(t)\ \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt + \int_r^s f_2(t)\ \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt + \int_s^t f_3(t)\ \text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt +$$

$$+\int_t^u f_4(t)\text{sen}\left(\frac{n\pi t}{p}\right)dt$$

De acuerdo con el teorema de Dirichclet, en los puntos de discontiunuidad (d, r, s, t ,u), la serie de Fourier de $f(t)$ convergerá a los valores promedio indicados por puntos ($\circ$), sin importar la falta de definición de la función $f(t)$ en estos puntos.

OBSERVACIÓN:

Se puede observar que toda función periódica que pueda ser generada en un laboratorio, satisface las Condiciones Duras de Dirichclet y posée en consecuencia una serie de Fourier.

En resumen, toda función priódica, con período T, que satisfaga la condición:

$$\int_0^T |f(t)|dt \neq \infty$$

puede ser expandida en serie de Fourier, en cualquiera de sus formas antes estudiadas.

= oo =

12.7) ESPECTRO DE FRECUENCIAS DE FOURIER

La expansión en serie de Fourier de una función periódica, es realmente equivalente a expresar la función en términos de sus componentes en el dominio de la frecuencia.

Una función periódoca con período T, tiene componentes de frecuencia cuya frecuencia angular es : $w = nw_0 \Rightarrow w = 0,\ \pm w_0,\ \pm 2w_0,\ \pm 3w_0, \cdots, \pm nw_0, \cdots,$

Además :

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p}$$

La gráfica que representa a C_n en función de la fecuencia $w = nw_0$ se conoce como **"Espectro de Frecuencias "**

En general, las magnitudes C_n son magnitudes complejas, por lo que deben ser descritas por magnitud y fase. Por esta razón, cuando se quiere representar una función periódica en el dominio de la frecuencia, se requiere, en general,

dos líneas espectrales o gráficos : una de magnitudes y otra de fases, es decir, el Espectro de Frecuencias constará, en general de dos gráficas:

a) Una gráfica que representa $|C_n|$ y $|C_{-n}|$ en función de $w = \pm nw_0$,

b) Otra que gráfica que representará a la fase $\theta(w) = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(C_n)}{\mathrm{Re}(C_n)}\right)$, en función de $w = \pm nw_0$.

Sin embargo, en la mayoría de los casos, las magnitudes de las componentes de frecuencia C_n , o son reales o sen imaginarias puras, por lo que es posible describir el Espectro de Frecuencias por sólo una gráfica.

12.7.1) Características del Espectro de Frecuencias

Las características fundamentales del Espectro de Frecuencias las enunciaremos en el siguiente Teorema

TEOREMA:

a) El spectro de Amplitudes $\left[\text{gráfica de} \left| C_n \right| vs. (nw_0)\right]$, es una Función PAR

b) El Espectro de Fase $\left[\text{ gráfica de } \theta(w) vs. (nw_0)\right]$, es una Función IMPAR.

Demostración:

Los coeficientes C_n están dados por :

$$C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-\frac{i n\pi t}{p}}\, dt = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-i n w_0 t}\, dt$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{\frac{i n\pi t}{p}}\, dt = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{i n w_0 t}\, dt$$

de donde:

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t)\cos(nw_0)dt - \dfrac{i}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t)\, sen(nw_0)dt \\ C_{-n} = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t)\cos(nw_0)dt + \dfrac{i}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(t)\, sen(nw_0)dt \end{cases}$$

Es evidente en estas ecuaciones que C_n y C_{-n} son complejos conjugados uno del otro, es decir, $C_n = C^*_{-n}$, por lo que : $|C_n| = |C_{-n}|$.

En consecuencia, el Espectro de Frecuencias (también conocido como **" Espectro de Magnitudes "** es simétrico respecto del eje vertical, es decir, es una Función PAR.

Además :

Si C_n es complejo, entonces: $\begin{cases} C_n = |C_n|\, e^{i\theta_n} \\ C_{-n} = |C_{-n}|\, e^{i\theta_{-n}} \end{cases}$

donde θ_n es la fase de C_n y θ_{-n} es la fase de C_{-n}. Como C_n y C_{-n} son comklejos conjugados, se tiene que :

$$\begin{cases} |C_n| = |C_{-n}| \\ \theta_n = -\theta_{-n} \end{cases}$$

En consecuencia, el Espectro de Fase (θ_n *vs.* nw_0) es simétrico respecto del origen, es decir, θ_n es una Función IMPAR, lo que completa el Teorema.
La figura 12.12 ilustra lo aquí expuesto :

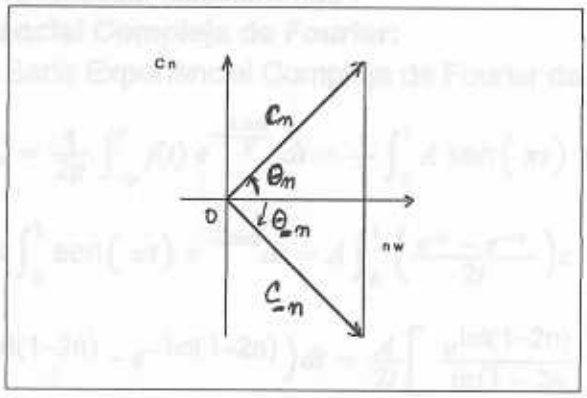


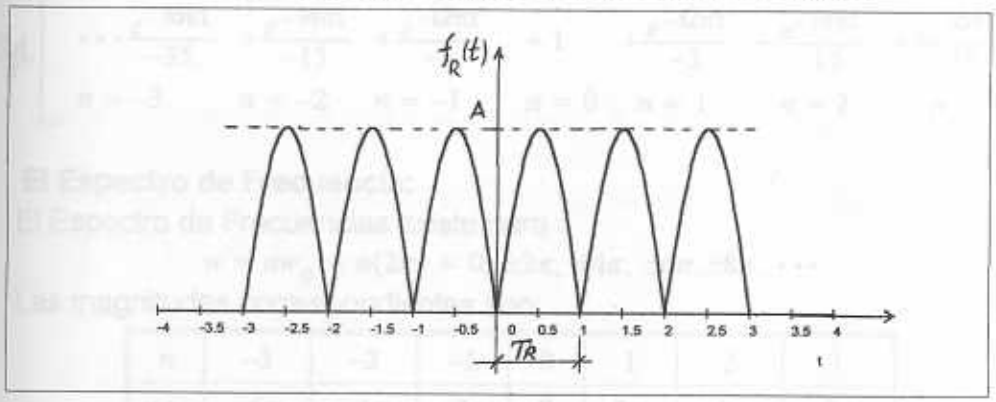
Fig. 12.12

Ejemplo 14:

Para ilustrar lo expuesto, consideremos la función periódica correspondiente a una onda senoidal de amplitud A y período $T = 2\ seg.$, la cual ha sido rectificada en onda completa.
La ecuación genérica de la señal senoidal dada es : $f(t) = A$ sen $(w_0 t)$, luego:

La ecuación de la señal sin rectificar es : $\begin{cases} w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad./seg.} \\ f(t) = A \operatorname{sen}(\pi t),\ T = 2\ seg. \end{cases}$

La gráfica de la señal rectificada se muestra en la siguiente figura:



($f_R(t) = A \operatorname{sen}(\pi t),\quad 0 \le t \le 1,\ T_R = 1\ seg.$)

La ecuación de la señal rectificada es : $\begin{cases} T_R = 1 \text{ seg.} \\ w_0 = \dfrac{2\pi}{T_R} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ rad./seg.} \\ f(t) = A \operatorname{sen}(\pi t), \ 0 \le t \le 1 \end{cases}$

Para dicha onda rectificada, calcularemos :

a) **La Serie Exponencial Compleja de Fourier:**

La expansión en Serie Exponencial Compleja de Fourier de esta onda, será:

$$C_n = C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-\frac{i n\pi t}{p}}\, dt = \frac{1}{1}\int_0^1 A \operatorname{sen}(\pi t)\, e^{-\left(\frac{in\pi t}{1/2}\right)} dt$$

$$C_n = A\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi t)\, e^{-i2n\pi t} dt = A\int_0^1 \left(\frac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{2i}\right) e^{-i2n\pi t} dt \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{A}{2i}\int_0^1 \left(e^{i\pi t(1-2n)} - e^{-i\pi t(1+2n)}\right) dt = \frac{A}{2i}\left[\frac{e^{i\pi t(1-2n)}}{i\pi(1-2n} + \frac{e^{-i\pi t(1+2n)}}{i\pi(1+2n}\right]_0^1$$

$$C_n = -\frac{A}{2\pi}\left[\frac{e^{i\pi(1-2n)} - 1}{(1-2n)} + \frac{e^{-i\pi(1+2n)} - 1}{(1+2n)}\right] = -\frac{A}{2\pi}\left[\frac{e^{i\pi}\, e^{-i2n\pi} - 1}{(1-2n)} + \frac{e^{-i\pi}\, e^{-i2n\pi} - 1}{(1+2n)}\right]$$

$$C_n = -\frac{A}{2\pi}\left[\frac{-\cos 2n\pi - 1}{(1-2n)} + \frac{-\cos 2n\pi - 1}{(1+2n)}\right] = \frac{A}{2\pi}(1+\cos 2n\pi)\left[\frac{1}{(1-2n)} + \frac{1}{(1+2n)}\right]$$

$$C_n = \frac{A}{2\pi}(1+\cos 2n\pi)\left[\frac{2}{(1-4n^2)}\right] = \frac{A}{\pi}\,\frac{(1+\cos 2n\pi)}{(1-4n^2)} = \frac{2A}{\pi}\,\frac{1}{(1-4n^2)}$$

Por lo tanto : $f(t) = \dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)}\, e^{i2n\pi t} \quad \Rightarrow$

$$f(t) = \frac{2A}{\pi}\left[\begin{array}{ccccccc} \cdots\dfrac{e^{-i6\pi t}}{-35} & +\dfrac{e^{-i4\pi t}}{-15} & +\dfrac{e^{-i2\pi t}}{-3} & +1 & +\dfrac{e^{-i2\pi t}}{-3} & +\dfrac{e^{-i4\pi t}}{-15} & +\dfrac{e^{-i6\pi t}}{-35} + \cdots \\ n=-3 & n=-2 & n=-1 & n=0 & n=1 & n=2 & n=3 \end{array}\right]$$

b) **El Espectro de Frecuencia:**

El Espectro de Frecuencias existe para :

$$w = nw_0 = n(2\pi) = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \pm 6\pi, \pm 8\pi,\ \cdots$$

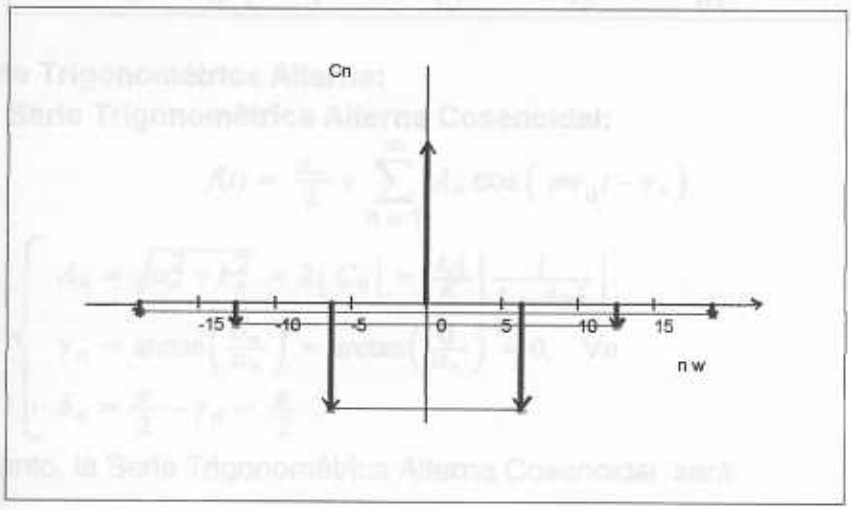
Las magnitudes correspondientes son:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
nw_0	-6π	-4π	-2π	0	2π	4π	6π
C_n	$-\dfrac{2A}{35\pi}$	$-\dfrac{2A}{15\pi}$	$-\dfrac{2A}{3\pi}$	$\dfrac{2A}{\pi}$	$-\dfrac{2A}{3\pi}$	$-\dfrac{2A}{15\pi}$	$-\dfrac{2A}{35\pi}$

Nótese que, en este caso, todas las amplitudes son reales y en consecuencia,

es suficiente con graficar un sólo espectro: $(C_n \; vs. \; w)$

El Espectro de Frecuencias correspondiente se muestra en la suiguiente figura:



(Espectro de frecuencias de una onda senoidal rectificada)

$(C_n \; vs. \; nw_o \;)$

Nótese que el espectro existe sólamente para : $w = 0, \pm w_0, \pm 2w_0, \pm 3w_0, \cdots,$ así que el espectro de frecuencias de una función periódica **NO** es una función contínua; es en consecuencia una función discreta, pues existe sólo para valores discretos de la frecuencia w. Es por ello que que se conoce también como : " Espectro Discreto " o " Líneas Espectrales " de la función $f(t)$.

Se representa gráficamente dicho espectro de frecuencias, mediante líneas verticales en : $w = 0, \pm w_0, \pm 2w_0, \pm 3w_0, \cdots, \pm nw_0, \cdots,$ con altura proporcional a la amplitud de la corrrespondiente componente de frecuencia.

Evidentemente, en este caso,

$$\theta(w) = \frac{\mathrm{Im}[C_n]}{\mathrm{Re}[C_n]} = \frac{0}{\frac{2A}{\pi}\frac{1}{(1-4n^2)}} = 0, \quad \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

c) **La Serie Trigonométrica Real:** $f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nw_o t) + b_n \operatorname{sen}(nw_o t) \right]$

De acuerdo con las ecuaciones de transferencia antes calculadas, tenemos :

$$\begin{cases} \frac{a_o}{2} = C_o = \frac{2A}{\pi} \\ a_n = C_n + C_{-n}; \text{ En este caso : } C_n = C_{-n} \Rightarrow a_n = 2C_n = \frac{4A}{\pi}\frac{1}{(1-4n^2)} \\ b_n = i(C_n - C_{-n}) = 0 \end{cases}$$

Luego:

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-4n^2)} \cos\left(2n\pi t \right)$$

O también :

$$\boxed{f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\left[\frac{\cos 2\pi t}{3} + \frac{\cos 4\pi t}{15} + \frac{\cos 6\pi t}{35} + \frac{\cos 8\pi t}{63} + \cdots\right]}$$

d) **La Serie Trigonométrica Alterna:**

d.1) Serie Trigonométrica Alterna Cosenoidal:

$$f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(nw_0 t - \gamma_n\right)$$

$$\text{donde: } \begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\left|C_n\right| = \frac{4A}{\pi}\left|\frac{1}{1-4n^2}\right| \\ \gamma_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \arctan\left(\frac{0}{a_n}\right) = 0, \quad \forall n \\ \delta_n = \frac{\pi}{2} - \gamma_n = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto, la Serie Trigonométrica Alterna Cosenoidal será :

$$\boxed{f(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left|1-4n^2\right|}\cos\left(2n\pi t\right)}$$

d.2) Serie Trigonométrica Alterna Senoidal:

Esta serie es de la forma: $f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(nw_o t + \delta_n\right)$

Por lo tanto, la Serie Trigonométrica Alterna Senoidal será .

$$\boxed{f(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left|1-4n^2\right|}\operatorname{sen}\left(2n\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

= oo =

12.7.2) Significado de las Frecuencias Negativas

Las señales e^{iwt} y e^{-iwt} oscilan a la frecuencia w. Dichas señales, no obstante, pueden ser consideradas como dos fasores que rotan en sentido opuesto, y que, cuando se suman, producen una función real en el dominio del tiempo. En efecto :

$$e^{iwt} + e^{-iwt} = 2\cos wt$$

Para una función periódica dada de período T, la Serie Exponencial Compleja está dada por:

$$f(t) = C_0 + C_1 e^{iw_0 t} + C_2 e^{i2w_0 t} + C_3 e^{i3w_0 t} + \cdots + C_n e^{inw_0 t} + \cdots +$$

$$+ C_{-1} e^{-iw_0 t} + C_{-2} e^{-i2w_0 t} + C_{-3} e^{-i3w_0 t} + \cdots + C_{-n} e^{-inw_0 t} + \cdots$$

Luego, en el desarrollo exponencial de Fourier están presentes:

a) Las amplitudes :

$$C_0, C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n, \cdots, C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}, \cdots + C_{-n}, \cdots$$

b) Las frecuencias :

$$w = 0, w_0, 2w_0, 3w_0, \cdots, nw_0, \cdots, -w_0, -2w_0, -3w_0, \cdots, -n\,w_0$$

= oo =

12.8) EFECTO DEL DESPLAZAMIEMTO EN EL TIEMPO EN EL ESPECTRO DE FRECUENCIAS

Investigaremos ahora que efecto sobre la frecuencia (espectro de frecuencias) de una función periódica, causa el dresplazamiento en el tiempo de dicha función.

Sea $f(t)$ una función periódica de período T y sea la Serie Exponencial Compleja correspondiente la dada por :

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{inw_0 t}} \qquad \text{.....(1)}$$

donde:

$$\boxed{C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-inw_0 t}\, dt}$$

Investigaremos el Espectro de Frecuencias de $f(t-t_0)$

Sustituyendo en la ecuación (1) t por $(t-t_0)$, tenemos :

$$f(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inw_0(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{-inw_0 t_0}\, e^{inw_0 t} \Rightarrow$$

$$f(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C'_n\, e^{inw_0 t}, \qquad \text{siendo} \quad C'_n = C_n\, e^{-inw_0 t_0}$$

Luego, si $C_n = |C_n|\, e^{i\theta_n}$,entonces : $C'_n = |C_n|\, e^{i(\theta_n - n w_0 t_0)}$ .....(3)

Por lo tanto:

a) $f(t-t_0)$ tiene las componentes de frecuencia en :

$$w = 0, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \pm 5\pi, \cdots$$

Evidentemente, estas son las misms frecuencias de $f(t)$.

b) Las ecuaciones (3) demuestran que las magnitudes de las componentes de frecuencia también son las mismas de $f(t)$.

c) Las fases, sin embargo, son diferentes. El desplazamiento en tiempo (t_0) causa un corrimiento de fase en una cantidad $(n\,w_0 t_0)$ radianes, en la componente de frecuencia $(n\,w_0)$.

Podemos así concluir que el desplazamiemto en el tiempo en una función periódica, no tiene efecto sobre el espectro de magnitudes (o Espectro de

Frecuencias), pero cambia el espectro de fases en una cantidad :"$-n\,w_0 t_0$" radianes para la componente de frecuencia $(n\,w_0)$.
Asi, para una señal sinusoidal de frecuencia $(n\,w_0)$, un retardo de t_0 segundos es equivalente a un corrimiento de fase de $-n\,w_0 t_0$ radianes.
Obviamente:

$$\text{sen}\, nw_0(t-t_0) = \text{sen}(nw_0 t - nw_0 t_0) \quad \Rightarrow$$

corrimiento de fase neto de $-nw_0 t_0$ radianes, como se ilustra a continuación en la figura 12.13

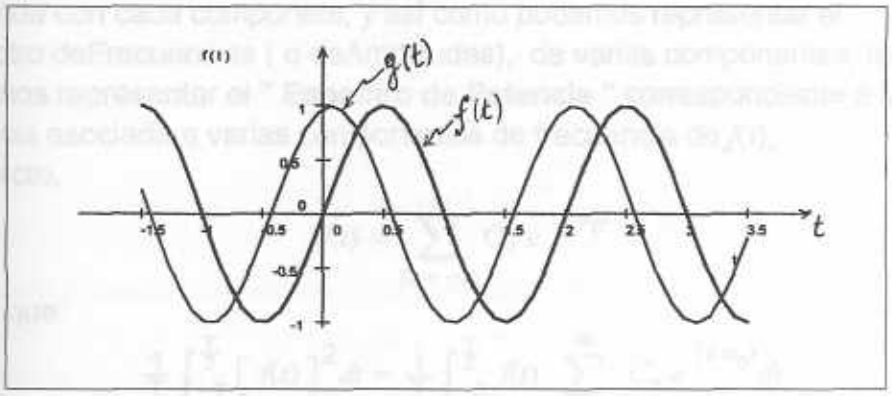


Fig. 12.13 : $f(t) = \text{sen}\pi t$, $g(t) = \text{sen}\,\pi(t-\frac{\pi}{2})$

Análogamente, para una señal sinusoidal de frecuencia $(n\,w_0)$, un adelanto de t_0 segundos es equivalente a un corrimiento de fase de $n\,w_0 t_0$ radianes.
Obviamente:

$$\text{sen}\, nw_0(t+t_0) = \text{sen}(nw_0 t + nw_0 t_0) \quad \Rightarrow$$

corrimiento de fase neto de $nw_0 t_0$ radianes, como se ilustra a continuación en la figura 12.14

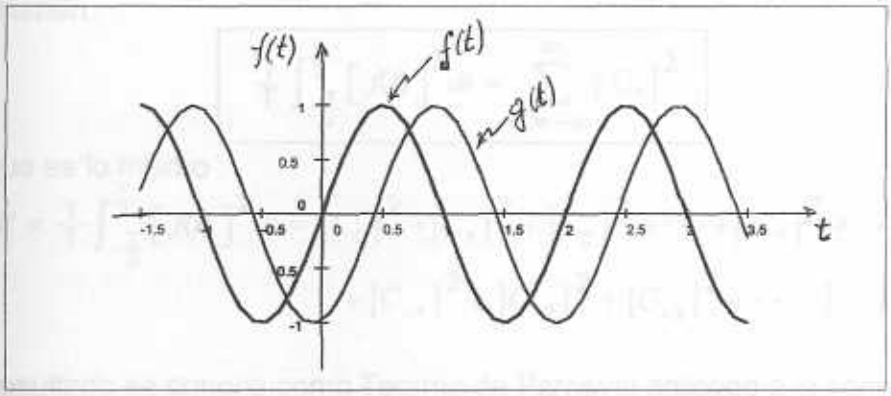


Fig. 12.14 : ($f(t)$ =senπt y $g(t)$ =sen$\left[\pi(t+\frac{\pi}{2})\right]$

= oo =

12.9) EL ESPECTRO DE POTENCIA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA:

TEOREMA DE PARSEVAL

Si asumimos que la función $f(t)$ es un voltaje o una fuente de corriente, entonces la integral :

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[f(t)\right]^2 dt = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left[f(t)\right]^2 dt \quad \ldots\ldots(1)$$

representa la potencia disipada por una resistencia de 1 Ohm. Esta integral es llamada " Potencia " de la señal $f(t)$.

El Espectro de Frecuencias de $f(t)$ representa las amplitudes de varias componentes de frecuencia de $f(t)$, por lo que existe una potencia asociada con cada componete, y así como podemos representar el Espectro deFrecuencias (o deAmplitudes), de varias componentes, también podemos representar el **" Espectro de Potencia "** correspondiente a la potencia asociada a varias componentes de frecuencia de $f(t)$.

En efecto,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inw_0t}$$

por lo que:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[f(t)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inw_0t} dt$$

Intercambiando las operaciones de integración y sumatoria, obtenemos :

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[f(t)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{inw_0t} dt \quad \ldots\ldots(2)$$

Pero: $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, {}_n e^{inw_0t} dt = T C_{-n}$. Sustituyendo en (2), se obtiene:

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[f(t)\right]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n C_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

En resumen :

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[f(t)\right]^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2}$$

O lo que es lo mismo :

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[f(t)\right]^2 dt = |C_0|^2 + |C_1|^2 + |C_2|^2 + \cdots + |C_n|^2 + \cdots +$$
$$+ |C_{-1}|^2 + |C_{-2}|^2 + |C_{-3}|^2 + \cdots + |C_{-n}|^2 + \cdots$$

Este resultado se conoce como Teorma de Parseval aplicado a la serie Exponencial Compleja de Fourier y el mismo puede imterpretarse como sigue: *"La potencia contenida en un señal periódica es igual a la suma de las potencias de sus componentes "*

Dicha ecuación sugiere que existe una potencia asociada con cada componente

frecuencia.

- La magnitud de la potencia contenida enn la componente de frecuencia nw_0 es : $|C_n|^2$
- La magnitud de la potencia contenida enn la componente de frecuencia $-nw_0$ es : $|C_{-n}|^2$

Pero : $C_{-n} = C_n^*$ por lo que : $|C_{-n}|^2 + \cdots + |C_n|^2$

De aquí que la potencia asociada con una componente de frecuencia nw_0 es la misma que la correspondiente a la componente $-nw_0$.

Como las señales e^{inw_0t} y e^{-inw_0t} son señales de la misma frecuencia nw_0, la potencia total asociada con la frecuencia nw_0 de la señal dada es :

$$\boxed{P_n = 2|C_n|^2}$$

Este hecho puede también ser interpretado como que las dos componentes $C_n e^{inw_0t}$ y $C_{-n} e^{-inw_0t}$ juntas, dan por resultado una función en el dominio del tiempo $f_n(t)$, es decir :

$$f_n(t) = C_n e^{inw_0t} + C_{-n} e^{-inw_0t}$$

Pero: $\left\{ \begin{array}{l} C_n = |C_n| e^{i\theta_n} \\ C_{-n} = |C_n| e^{-i\theta_n} \end{array} \right\}$, por lo tanto :

$$f_n(t) = C_n e^{i(nw_0t+\theta_n)} + C_{-n} e^{-i(nw_0t+\theta_n)}$$

De donde :

$$\boxed{f_n(t) = 2|C_n| \cos(n w_0 t + \theta_n)}$$

= oo =

12.9.1) Espectro de Potencia

Podemos graficar la potencia asociada con cada componente de frecuencia de una señal periódica, en función de su respectiva frecuencia. Dicha gráfica se conoce como : " Espectro de Potencia " de la señal $f(t)$ y , obviamente, es también una función discreta y existe para valores de frecuencia dados por:

$$w = 0, \pm w_0, \pm 2w_0, \pm 3w_0, \pm 4w_0, \cdots$$

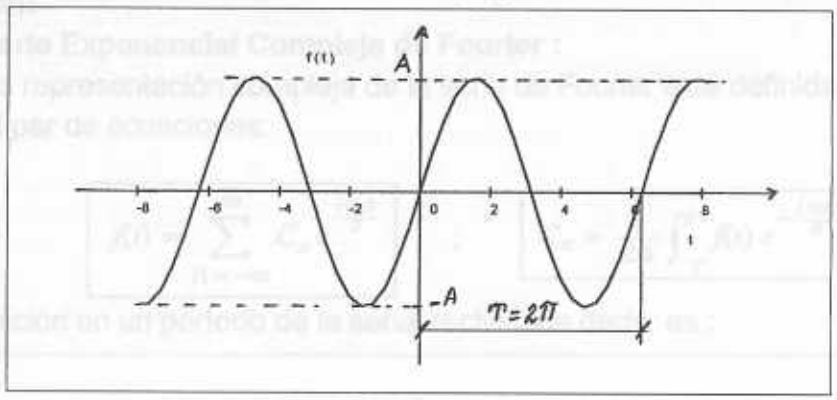
Además, dicho espectro es simétrico respecto del eje vertical y pasa por el origen.

Ejemplo 15:

Hallar la potencia contenida en una onda senoidal de amplitud A y período 2π.

Solución:

La onda en estudio es: $f(t) = A$ sen t, cuya gráfica se muestra a continación:



$$(f(t) = A \text{ sen } t, \ T = 2\pi)$$

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[f(t) \right]^2 dt = \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\text{sen(t)} \right]^2 dt = \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos 2t)}{2} dt \quad \Rightarrow$$

$$P = \frac{A^2}{4\pi}\left[t - \frac{\text{sen}2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{A^2}{4\pi}\left[2\pi \right] = \frac{A^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{A^2}{2}} \text{ vatios}$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 16:

Hallar la potencia contenida en la señal : $f(t) = 2\left| C_n \right| \cos\left(n\, w_0 t + \theta_n \right)$,

Solución:

Aplicando el resultado anterior, tenemos que : $P = \dfrac{[2|C_n|]^2}{2} = 2\left| C_n \right|^2$

$$= \text{oo} =$$

12.10) EJEMPLOS RESUELTOS

Ejemplo 17:

Sea $f(t)$ una onda senoidal de amplitud A y período $T = 2\ seg.$ Si dicha onda es rectificada en onda completa, calcular :

a) La serie Exponencial Compleja de Fourier.
b) La serie Trigonométrica Real de Fourier
c) Las series Trigonométrica Alterna Cosenoidal y Senoidal de Fourier
d) Amplitud de la quinta armónica.
e) Ángulo de retraso en fase de la quinta armónica
f) Potencia total de la señal
g) Potencia asociada a la quinta armónica
h) Espectro de Frecuencias de la señal
i) Espectro de Potencia de la señal
j) Espectro de fase

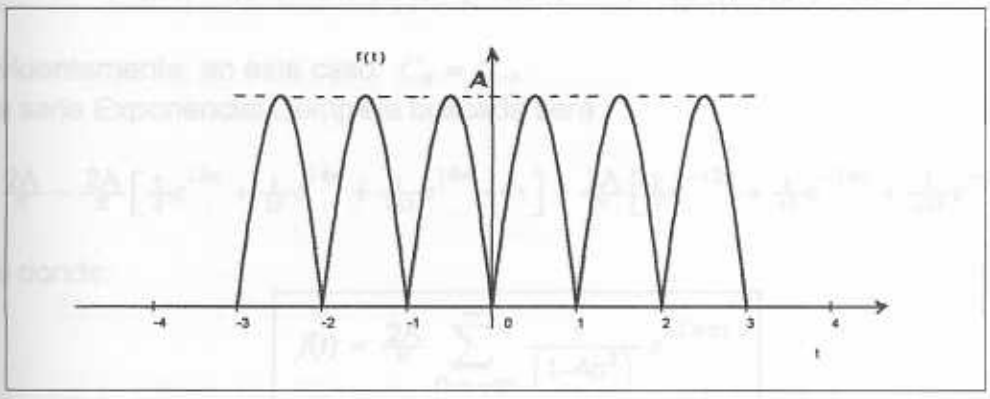
Solución:

a) **Serie Exponencial Compleja de Fourier :**

La representación compleja de la serie de Fourier está definida por el par de ecuaciones:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{i n\pi t}{p}}} \quad ; \quad \boxed{C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-\frac{i n\pi t}{p}}\, dt}$$

La definición en un período de la señal rectificada dada, es :



$$f(t) = sen\pi t, \quad 0 \le t \le 1, \quad T = 1$$

Luego : $\left\{ \begin{array}{l} T = 1 \Rightarrow p = 1/2 \\ \dfrac{i n\pi t}{p} = \dfrac{i n\pi t}{1/2} = i2n\pi t \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$C_n = \frac{1}{1}\int_0^T f(t)\, e^{-\frac{i n\pi t}{p}}\, dt = A\int_0^1 \text{sen}(\pi t)\, e^{-i2n\pi t}\, dt = A\int_0^1 \left(\frac{e^{i2n\pi t} - e^{-i2n\pi t}}{2i} \right) e^{-i2n\pi t}\, dt \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{A}{2i}\int_0^1 \left(e^{i\pi t(1-2n)} - e^{-i\pi t(1+2n)} \right) dt = \frac{A}{2i}\left[\frac{e^{i\pi t(1-2n)}}{i\pi(1-2n)} + \frac{e^{-i\pi t(1+2n)}}{i\pi(1+2n)} \right]_0^1 \Rightarrow$$

$$C_n = -\frac{A}{2\pi}\left[\frac{e^{i\pi(1-2n)} - 1}{(1-2n)} + \frac{e^{-i\pi(1+2n)} - 1}{(1+2n)} \right] = -\frac{A}{2\pi}\left[\frac{e^{i\pi} e^{-i2n\pi} - 1}{(1-2n)} + \frac{e^{-i\pi} e^{-i2n\pi} - }{(1+2n)} \right]$$

$$C_n = -\frac{A}{2\pi}\left[\frac{-\cos 2n\pi - 1}{(1-2n)} + \frac{-\cos 2n\pi - 1}{(1+2n)} \right] = \frac{A}{2\pi}(1 + \cos 2n\pi)\left[\frac{1}{(1-2n)} + \frac{1}{(1+2n)} \right] \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{A}{2\pi}(1 + \cos 2n\pi)\left[\frac{1+2n+1-2n}{\left(1-4n^2\right)} \right] = \frac{A}{\pi}(1 + \cos 2n\pi)\left[\frac{1+2n+1-2n}{\left(1-4n^2\right)} \right] \Rightarrow$$

$$\boxed{C_n = \frac{2A}{\pi}\frac{1}{\left(1-4n^2\right)}} \quad , \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que, en este caso: $w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$
y que , además, $w = nw_0$, podemos construir la siguiente tabla:

n	0	1	2	3	4	$\cdots$	-1	-2	-3	-4	$\cdots$
w_0	2π	2π	2π	2π	2π	$\cdots$	2π	2π	2π	2π	$\cdots$
$w = nw_0$	0	2π	4π	6π	8π	$\cdots$	-2π	-4π	-6π	-8π	$\cdots$
C_n	$\frac{2A}{\pi}$	$-\frac{2A}{3\pi}$	$-\frac{2A}{15\pi}$	$-\frac{2A}{35\pi}$	$-\frac{2A}{63\pi}$		$-\frac{2A}{3\pi}$	$-\frac{2A}{15\pi}$	$-\frac{2A}{35\pi}$	$-\frac{2A}{63\pi}$	$\cdots$

Evidentemente, en este caso: $C_n = C_{-n}$
La serie Exponencial Compleja buscada será:

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{2A}{\pi}\left[\frac{1}{3}e^{i2\pi} + \frac{1}{15}e^{i4\pi} + \frac{1}{135}e^{i6\pi}\cdots\right] - \frac{2A}{\pi}\left[\frac{1}{3}e^{-i2\pi} + \frac{1}{15}e^{-i4\pi} + \frac{1}{135}e^{-i6\pi} + \cdots\right]$$

de donde:

$$\boxed{f(t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)}e^{i2n\pi t}}$$

= oo =

b) Serie Trigonométrica Real de Fourier :

Su expresión matemática es :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi t}{p} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}\right]$$

donde:

$$\begin{cases} \frac{a_0}{2} = C_0 = \frac{2A}{\pi} \\ a_n = C_n + C_{-n} = \frac{2A}{\pi}\frac{1}{(1-4n^2)} + \frac{2A}{\pi}\frac{1}{(1-4n^2)} = \frac{4A}{\pi}\frac{1}{(1-4n^2)} \\ b_n = i(C_n - C_{-n}) = i(0) = 0 \\ p = 1/2 \quad \Rightarrow \quad \frac{n\pi t}{p} = \frac{n\pi t}{1/2} = 2n\pi t \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{\pi}\frac{1}{(1-4n^2)}\cos(2n\pi t)}$$

= oo =

$$\gamma_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{0}{a_n} = 0 \quad ,\forall n = 0,1,2,\cdots \qquad \Rightarrow$$

La quinta armónica está en fase con la frecuencia fundamental

f) **Potencia total de la señal:** $(R = 1\ \Omega)$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[f(t)\right]^2 dt = \frac{A^2}{1}\int_0^1 \text{sen}^2(\pi t)dt = A^2\int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi t)}{2}dt \qquad \Rightarrow$$

$$P = \frac{A^2}{2}\left[t - \frac{\text{sen}(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 = \frac{A^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P = \frac{A^2}{2}} \ \textit{vatios}$$

g) **Potencia asociada a la quinta armónica:**

$$P_5 = 2\left|C_5\right|^2 = 2\left[\left|\frac{2A}{\pi}\frac{1}{\left(1-4n^2\right)}\right|_{n=5}\right]^2 = 2\left|-\frac{2}{99}\frac{A}{\pi}\right|^2 = 8\left(\frac{A}{99\pi}\right)^2 \text{ vatios}$$

h) **Espectro de Frecuencias de la señal:**

De la tabla antes calculada y que reproducimos a continuación, se deduce el siguiente espectro de frecuencia $(C_n \ vs. w)$:

n	0	1	2	3	4	$\cdots$	-1	-2	-3	-4	$\cdots$
w_0	2π	2π	2π	2π	2π	$\cdots$	2π	2π	2π	2π	$\cdots$
$w = nw_0$	0	2π	4π	6π	8π	$\cdots$	-2π	-4π	-6π	-8π	$\cdots$
C_n	$\frac{2A}{\pi}$	$-\frac{2A}{3\pi}$	$-\frac{2A}{15\pi}$	$-\frac{2A}{35\pi}$	$-\frac{2A}{63\pi}$		$-\frac{2A}{3\pi}$	$-\frac{2A}{15\pi}$	$-\frac{2A}{35\pi}$	$-\frac{2A}{63\pi}$	$\cdots$

Los valores de la frecuencia son :

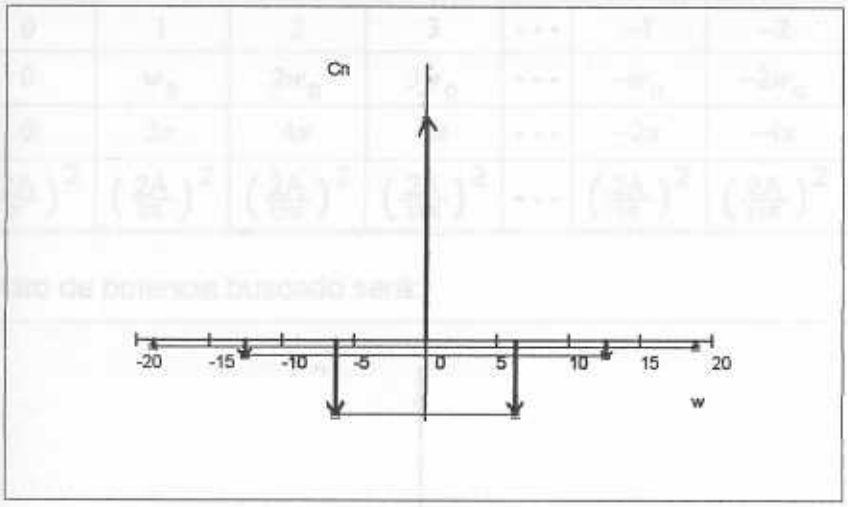
$$w = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \pm 6\pi, \pm 8\pi,\ \cdots$$

Las magnitudes correspondientes son :

$$\frac{2A}{\pi}, -\frac{2A}{3\pi}, -\frac{2A}{15\pi}, -\frac{2A}{35\pi}, \cdots$$

Nótese que, también en este caso, todas las amplitudes son reales y en consecuencia, es sufuciente con graficar un sólo espectro: $(C_n \ vs. \ w)$

El Espectro de Frecuencias correspondiente se muestra en la suiguiente figura:



(Espectro de frecuencias de una onda senoidal rectificada)

i) **Espectro de Potencia de la señal**

Según ya se obtuvo en el literal a) de este ejercicio, la serie Exponencial Compleja de Fourier correspondiente a la señal bajo estudio, es :

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{2A}{\pi}\left[\frac{1}{3}e^{i2\pi} + \frac{1}{15}e^{i4\pi} + \frac{1}{135}e^{i6\pi} \cdots\right] - \frac{2A}{\pi}\left[\frac{1}{3}e^{-i2\pi} + \frac{1}{15}e^{-i4\pi} + \frac{1}{135}e^{-i6\pi} + \cdots\right]$$

es decir :

$$\boxed{f(t) = \frac{2A}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)}e^{i2n\pi t}}$$

Por lo tanto, las componentes de potencia correspondientes a cada frecuencia, son :

$$P = \left(\frac{2A}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2A}{\pi}\right)^2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{135}\right)^2 + \cdots\right] +$$

$$+ \left(\frac{2A}{\pi}\right)^2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{135}\right)^2 + \cdots\right]$$

De donde :

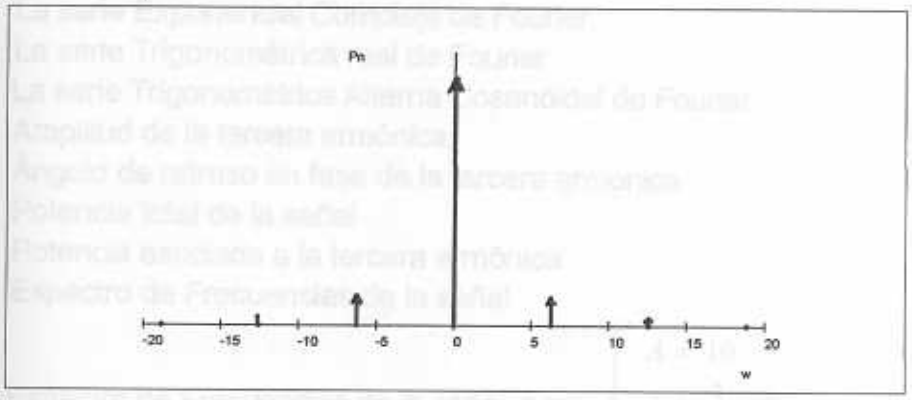
$$P = \left(\frac{2A}{\pi}\right)^2 + 2\left(\frac{2A}{\pi}\right)^2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{135}\right)^2 + \cdots\right] \quad \Rightarrow$$

$$P = \left(\frac{2A}{\pi}\right)^2\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1-4n^2}\right)^2\right], \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

Podemos así construir la siguiente tabla $(P_n \ vs. \ w)$:

n	0	1	2	3	$\cdots$	-1	-2	-3	$\cdots$
nw_0	0	w_0	$2w_0$	$3w_0$	$\cdots$	$-w_0$	$-2w_0$	$-3w_0$	$\cdots$
$w = nw_0$	0	2π	4π	6π	$\cdots$	-2π	-4π	-6π	$\cdots$
P_n	$\left(\frac{2A}{\pi}\right)^2$	$\left(\frac{2A}{3\pi}\right)^2$	$\left(\frac{2A}{15\pi}\right)^2$	$\left(\frac{2A}{35\pi}\right)^2$	$\cdots$	$\left(\frac{2A}{3\pi}\right)^2$	$\left(\frac{2A}{15\pi}\right)^2$	$\left(\frac{2A}{35\pi}\right)^2$	$\cdots$

El espectro de potencia buscado será:



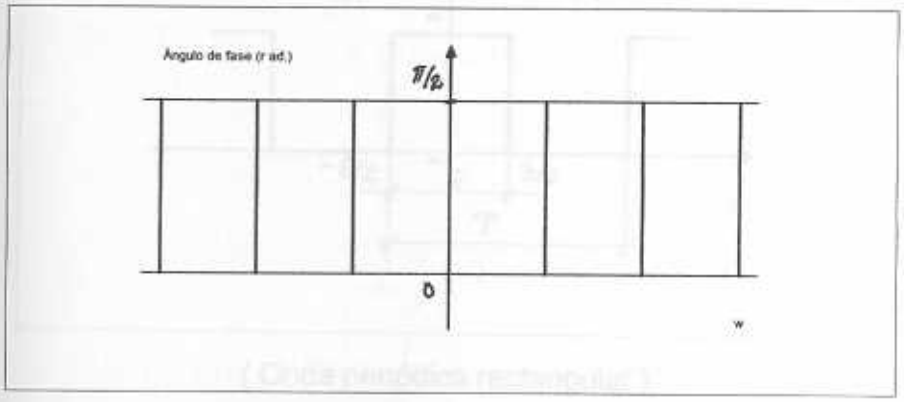
(Espectro de Potencia: P_n $vs.\, w$)

j) Espectro de fase

Tal como ya se indicó, $b_n = 0, \quad \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Por lo tanto, $\boxed{\begin{array}{l} \gamma_n = 0 \\ \delta_n = \frac{\pi}{2} \text{ radianes} \end{array}}$, $\forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Se muestran a continuación las gráficas correspondiemtes:



(Espectro de Fase : $\gamma_n = 0$; $\delta_n = \frac{\pi}{2}$)

== oo ==

Ejemplo 18:

Sea $f(t)$ una onda periódica rectanguar de amplitud A y período T, definida en un período por : $f(t) = \begin{cases} A\ , & \text{si } -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2} \\ 0\ , & \text{si } \frac{\delta}{2} < t < T - \frac{\delta}{2} \end{cases}$

lo que abreviaremos en adelante por : $f(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right),\ T$

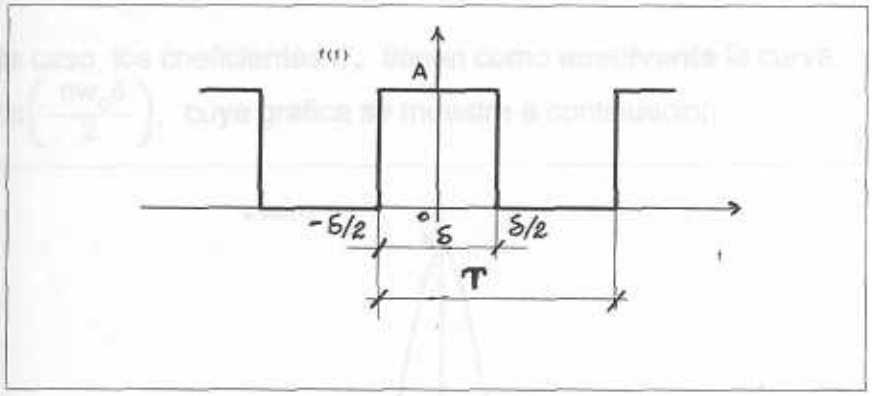
Determine:

a) La serie Exponencial Compleja de Fourier.
b) La serie Trigonométrica real de Fourier
c) La serie Trigonométrica Alterna Cosenoidal de Fourier
d) Amplitud de la tercera armónica.
e) Ángulo de retraso en fase de la tercera armónica
f) Potencia total de la señal
g) Potencia asociada a la tercera armónica
h) Espectro de Frecuencias de la señal
i) Espectro de Frecuencias de la señal, para $\begin{cases} A = 10 \\ T = \frac{1}{4} seg. \\ \delta = \frac{1}{20} seg. \end{cases}$
j) Espectro de Potencia de la señal, para : $A = 10, T = 1/4,\ \delta = 1/20$
k) Espectro de fase

Solución:

a) **Serie Exponencial Compleja de Fourier.**

La gráfica de la señal dada, es :



(Onda periódica rectangular)

Además:

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{\frac{i n \pi t}{p}}} \quad ; \quad \boxed{C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-\frac{i n \pi t}{p}}\, dt}$$

$$\text{Luego}: \left\{ \begin{array}{l} T = 2p \Rightarrow p = 1/2 \\ w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p} \\ \frac{i\,n\pi t}{p} = i\,n w_0 t \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n w_0 t}} \\ \boxed{C_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, e^{-i n w_0 t}\, dt} \end{array} \right.$$

Por lo tanto:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} A\, e^{-i n w_0 t}\, dt = \frac{A}{T}\left.\frac{e^{-i n w_0 t}}{-i n w_0}\right|_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \Rightarrow$$

$$C_n = -\frac{A}{i n w_0 T}\left[e^{-\frac{i n w_0 \delta}{2}} - e^{\frac{i n w_0 \delta}{2}} \right] = \frac{2A}{n w_0 T}\left[\frac{e^{-\frac{i n w_0 \delta}{2}} - e^{\frac{i n w_0 \delta}{2}}}{2i} \right] \Rightarrow$$

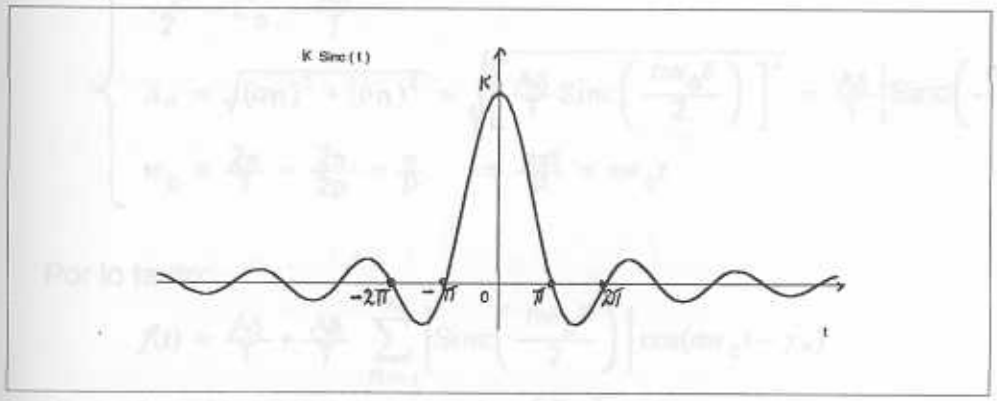
$$C_n = \frac{2A}{T} \cdot \frac{\delta}{2} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n w_0 \delta}{2}\right)}{\left(\frac{n w_0 \delta}{2}\right)} = \frac{A\delta}{T}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n w_0 \delta}{2}\right)}{\left(\frac{n w_0 \delta}{2}\right)} \right]$$

La expresión entre corchetes es de la forma $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Dicha función juega un importante rol en la teoría de telecomunicaciones y es conocida como : **"Señal de muestreo "** o **" Sampling function "** y por conveniencia se abrevia por : $\operatorname{Sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Introduciendo esta nomenclatura en las espresiónes anteriores, se obtiene :

$$\boxed{C_n = \frac{A\delta}{T}\operatorname{Sinc}\left(\frac{n w_0 \delta}{2}\right)} \quad y \quad \boxed{f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\delta}{T}\operatorname{Sinc}\left(\frac{n w_0 \delta}{2}\right) e^{i n w_0 t}}$$

En este caso, los coeficientes C_n tienen como **envolvente** la curva : $\frac{A\delta}{T}\operatorname{Sinc}\left(\frac{n w_0 \delta}{2}\right)$, cuya gráfica se muestra a continuación:



(Gráfica de una función Sinc(x) : $f(t) = k\operatorname{Sinc}(t) = k\frac{\operatorname{sen} t}{t}$)

Nótese que la función Sinc(t) oscila con un período 2π , su amplitud decrece en cada dirección de la variable "t" y tiene ceros en los valores : $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$

b) Serie Trigonométrica Real de Fourier

La serie Trigonométrica Real de Fourier será :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi t}{p} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{p}\right]$$

donde:

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{2} = C_0 = \lim\limits_{n\to 0}\dfrac{A\delta}{T}\operatorname{Sinc}\left(\dfrac{nw_0\delta}{2}\right) = \dfrac{A\delta}{T} \\ a_n = C_n + C_{-n} = \dfrac{A\delta}{T}\operatorname{Sinc}\left(\dfrac{nw_0\delta}{2}\right) + \dfrac{A\delta}{T}\operatorname{Sinc}\left(\dfrac{nw_0\delta}{2}\right) = \dfrac{2A\delta}{T}\operatorname{Sinc}\left(\dfrac{nw_0\delta}{2}\right) \\ b_n = i(C_n - C_{-n}) = i(0) = 0 \\ w_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2p} = \dfrac{\pi}{p} \quad \Rightarrow \dfrac{n\pi t}{p} = nw_0 t \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f(t) = \frac{A\delta}{T} + \frac{2A\delta}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)\cos w_0}$$

= oo =

c) Serie Trigonométrica Alterna Cosenoidal de Fourier:

La serie buscada es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} An\cos\left(\frac{n\pi t}{p} - \gamma_n\right)$$

donde:

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{2} = C_0 = \dfrac{A\delta}{T} \\ A_n = \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} = \sqrt{\left[\dfrac{A\delta}{T}\operatorname{Sinc}\left(\dfrac{nw_0\delta}{2}\right)\right]^2} = \dfrac{A\delta}{T}\left|\operatorname{Sinc}\left(\dfrac{nw_0\delta}{2}\right)\right| \\ w_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2p} = \dfrac{\pi}{p} \quad \Rightarrow \dfrac{n\pi t}{p} = nw_0 t \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$f(t) = \frac{A\delta}{T} + \frac{A\delta}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\operatorname{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)\right|\cos(nw_0 t - \gamma_n)$$

Además, en este caso : $\gamma_n = \arctan\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right) = 0$

Por lo tanto, la serie Trigonométrica Alterna de Fourier buscada será:

$$\boxed{f(t) = f(t) = \frac{A\delta}{T} + \frac{A\delta}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\mathrm{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)\right|\cos nw_0 t}$$

= oo =

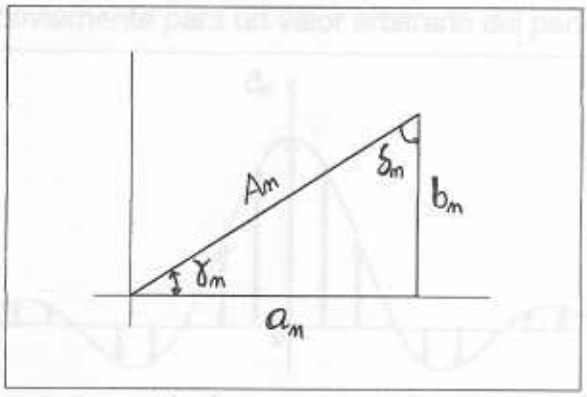
d) Amplitud de la tercera armónica (A_3)

Tal como ya fue expuesto, $A_3 = 2|C_3|$; $C_n = \frac{A\delta}{T}\mathrm{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)$

Por lo tanto:

$$A_3 = 2\left|\frac{A\delta}{T}\mathrm{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)\right|_{n=3} = \left|\frac{A\delta}{T}\mathrm{Sinc}\left(\frac{3w_0\delta}{2}\right)\right|$$

e) Ángulo de retraso en fase de la tercera armónica:



$$\gamma_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{0}{a_n} = 0 \quad ,\forall n = 0,1,2,\cdots$$

(La tercera armónica está en fase con la frecuencia fundamental)

f) Potencia total de la señal ($R = 1\ \Omega$)

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}}[A]^2 dt = \frac{A^2}{T}t\Big|_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} = \frac{A^2}{T}\left(\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}\right) = \frac{A^2}{T}\delta$$

g) Potencia asociada a la tercera armónica

$$P_3 = 2|C_3|^2 = 2\left[\left|\frac{A\delta}{T}\mathrm{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)\right|_{n=3}\right]^2 = 2\left[\frac{A\delta}{T}\right]^2\left[\mathrm{Sinc}\left(\frac{3w_0\delta}{2}\right)^2\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{P_3 = 2\left[\frac{A\delta}{T}\right]^2\left[\mathrm{Sinc}\left(\frac{3w_0\delta}{2}\right)^2\right]} \text{ vatios}$$

h) Espectro de Frecuencias de la señal: (C_n $vs.\ w$)

Del valor de C_n antes calculado y teniendo en cuenta que, en este caso: $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ y que , además, $w = nw_0$, podemos construir la siguiente

tabla:

n	0	1	2	3	4	$\cdots$	-1	-2	-3	-4	$\cdots$
nw_0	0	w_0	$2w_0$	$3w_0$	$4w_0$	$\cdots$	$-w_0$	$-2w_0$	$-3w_0$	$-4w_0$	$\cdots$
$w = nw_0$	0	$\frac{2\pi}{T}$	$\frac{4\pi}{T}$	$\frac{6\pi}{T}$	$\frac{8\pi}{T}$	$\cdots$	$-\frac{2\pi}{T}$	$-\frac{4\pi}{T}$	$-\frac{6\pi}{T}$	$-\frac{8\pi}{T}$	$\cdots$
C_n	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4		C_{-1}	C_{-2}	C_{-3}	C_{-4}	$\cdots$

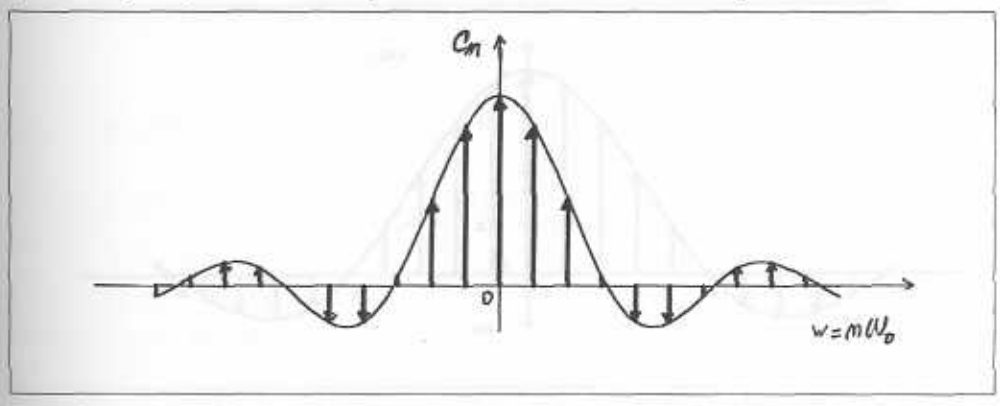
Los valores de la frecuencia son:

$$w = 0,\ \pm\frac{2\pi}{T},\ \pm\frac{4\pi}{T},\ \pm\frac{6\pi}{T}, \pm\frac{8\pi}{T},\ \cdots$$

Las magnitudes correspondientes son:

$$C_n = \frac{A\delta}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Nótese que, también en este caso, todas las amplitudes son reales y en consecuencia, es sufuciente con graficar un sólo espectro: $(C_n\ vs.\ nw_0)$.
El Espectro de Frecuencias correspondiente lucirá como se muestra en la siguiente figura, obviamente para un valor arbitrario del período T.



(Espectro de Frecuencias: $C_n\ vs. nw_0$)

i) **Espectro de Frecuencias de la señal, para :** $\begin{cases} A = 10 \\ T = \frac{1}{4} seg. \\ \delta = \frac{1}{20} seg. \end{cases}$

En este caso particular, $w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1/4} = 8\pi \quad rad./seg$

por lo tanto, la primera frecuencia de corte ocurre en:

$$\frac{w_c\delta}{2} = \pi \quad , \quad \text{por lo que :} \quad w_c = \frac{2\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{1/20} = 40\pi$$

En consecuencia, en el intervalo $(0, 40\pi)$ la frecuencia $w_0 = 8\pi$ cabe: $\frac{40\pi}{8\pi} = 5\ veces$; es decir : $nw_0 = 40\pi \Rightarrow n = 0, 1, 2, 3, 4$

Los componetes de frecuencia en ese intervalo son:

$$w = 0,\ \pm 8\pi,\ \pm 16\pi,\ \pm 24\pi, \pm 32\pi,\ \cdots$$

Las magnitudes correspondientes son:

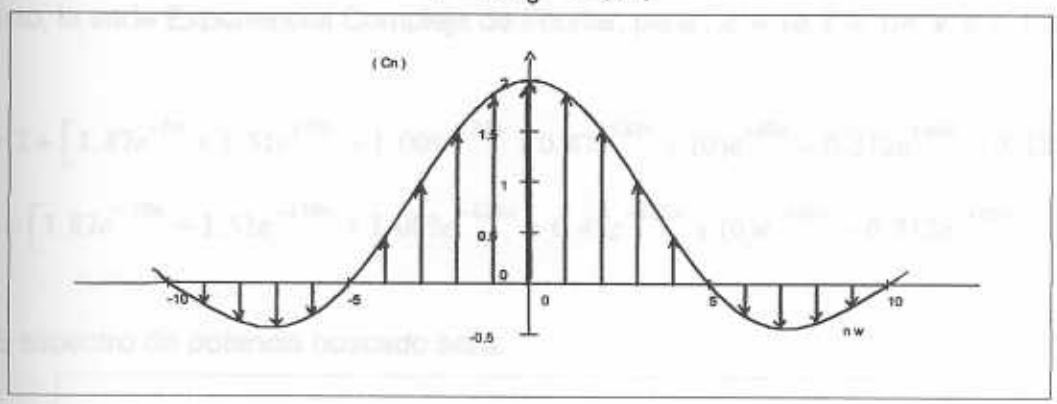
$$C_n = \frac{A\delta}{T}\,\text{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right) = \frac{10\left(\frac{1}{20}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}\,\text{Sinc}\left(\frac{n8\pi\left(\frac{1}{20}\right)}{2}\right) = 2\,\text{Sinc}\left(\frac{n\pi}{5}\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

El espectro en este caso será, por tanto:

n	0	1	2	3	4	$\cdots$	-1	-2	-3	-4	$\cdots$
nw_0	0	w_0	$2w_0$	$3w_0$	$4w_0$	$\cdots$	$-w_0$	$-2w_0$	$-3w_0$	$-4w_0$	$\cdots$
$w = nw_0$	0	8π	16π	24π	32π	$\cdots$	-8π	-16π	-24π	-32π	$\cdots$
C_n	2	1.87	1.51	1.009	0.47		1.87	1.51	1.009	0.47	$\cdots$

Por razones del graficador utilizado, la siguiente gráfica muestra Cn vs. n y no Cn vs. nw_0. como fue definido. Nótese sin embargo que, en este caso,

$$w = nw_0 = n(8\pi)$$



(Espectro de Frecuencias: C_n *vs.* nw_0)

j) **Espectro de Potencia de la señal para:** $A = 10, T = 1/4\ seg.,\ \delta = 1/20\ seg.$
Según ya se obtuvo en el literal a) de este ejercicio, la serie Exponencial Compleja de Fourier correspondiente a la señal bajo estudio, es:

$$\boxed{C_n = \frac{A\delta}{T}\,\text{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(t) = \frac{A\delta}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)e^{inw_0t}}$$

de donde:

$$f(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{Sinc}\left(\frac{n\pi}{5}\right)e^{i8n\pi t}$$

Para : $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
nw_0	0	w_0	$2w_0$	$3w_0$	$4w_0$	$5w_0$	$6w_0$	$7w_0$	$8w_0$	$\cdots$
$w = nw_0$	0	8π	16π	24π	32π	40π	48π	56π	64π	$\cdots$
(C_n)	2	1.871	1.514	1.009	0.467	0.00	–0.312	–0.432	–0.378	$\cdots$
$(C_n)^2$	$(2)^2$	$(1.87)^2$	$(1.51)^2$	$(1.009)^2$	$(0.47)^2$	0.00	0.10	0.19	0.14	$\cdots$

Para : $n = 0, -1, 2 -, -3, \cdots$

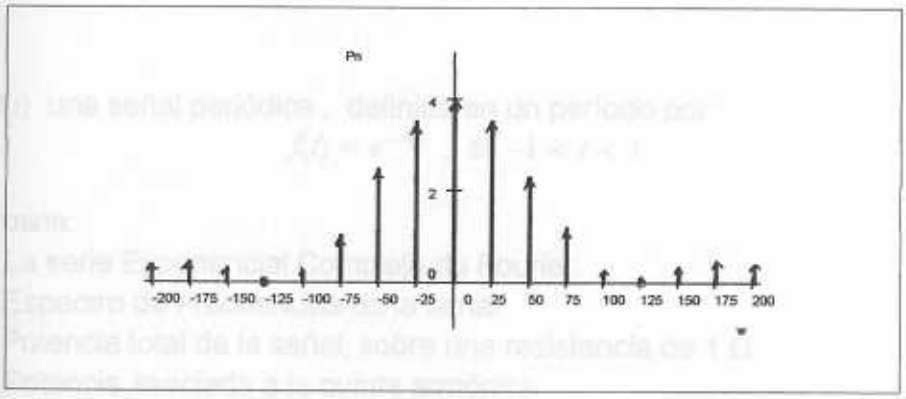
n	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	$\cdots$
nw_0	0	$-w_0$	$-2w_0$	$-3w_0$	$-4w_0$	$-5w_0$	$-6w_0$	$-7w_0$	$-8w_0$	$\cdots$
w	0	-8π	-16π	-24π	-32π	-40π	-48π	-56π	-64π	$\cdots$
(C_n)	2	1.87	1.51	1.009	0.47	0.00	–0.312	–0.432	–0.378	$\cdots$
$(C_n)^2$	$(2)^2$	$(1.87)^2$	$(1.51)^2$	$(1.009)^2$	$(0.47)^2$	0.00	0.10	0.19	0.14	$\cdots$

Por lo tanto, la serie Exponencial Compleja de Fourier, para : $A = 10, T = 1/4$ y $\delta = 1/20$, es:

$$f(t) = 2 + \left[1.87e^{i8\pi} + 1.51e^{i16\pi} + 1.009e^{i24\pi} + 0.47e^{i32\pi} + (0)e^{i40\pi} - 0.312e^{i48\pi} - 0.432e^{i56\pi}\right.$$

$$+ \left[1.87e^{-i8\pi} + 1.51e^{-i16\pi} + 1.009e^{-i24\pi} + 0.47e^{-i32\pi} + (0)e^{-i40\pi} - 0.312e^{-i48\pi} - 0.432e\right.$$

El espectro de potencia buscado será:



(Espectro de Potencia: P_n $vs.$ nw_0)

Obsérvese como

a) Las altas frecuencia decaen rápidamente.

b) En este ejemplo, la potencia total de la señal es:

$$P = \frac{A^2}{T}\delta = (10)^2\frac{1/20}{1/4} = 20 \; vatios$$

Por lo tanto, casi el 50% de la potencia total de la señal está

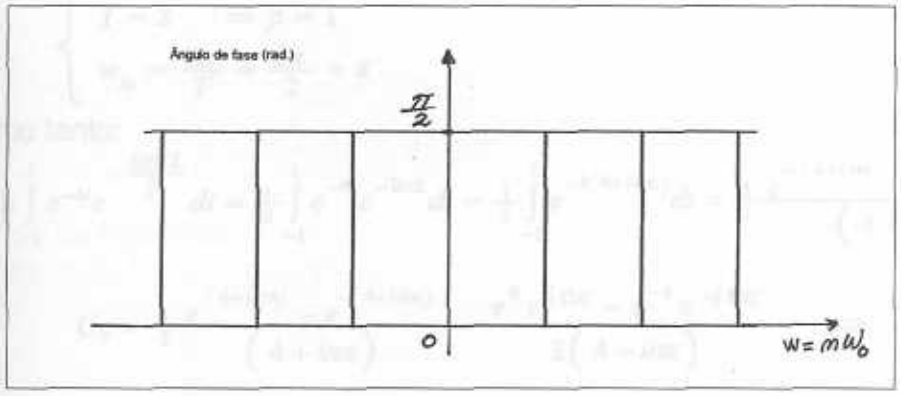
contenida en la componente d-c y en los dos primeros armónicos.

j) **Espectro de fase**

Tal como ya se indicó, $b_n = 0, \quad \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Por lo tanto, $\left\{ \boxed{\begin{array}{l} \gamma_n = 0 \\ \delta_n = \frac{\pi}{2} \text{ radianes} \end{array}} \right. , \quad \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Se muestran a continuación las gráficas correspondiemtes:



(Espectro de Fase: $\gamma_n = 0$; $\delta_n = \frac{\pi}{2}$)

= oo =

Ejemplo 19:

Sea $f(t)$ una señal periódica , definida en un período por :

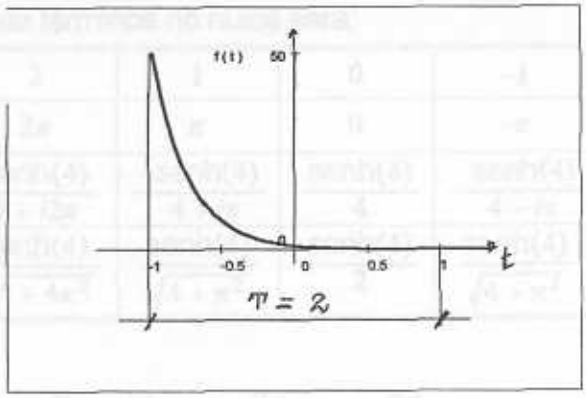
$$f(t) = e^{-4t} \text{ , si } -1 < t < 1$$

Determine:

a) La serie Exponencial Compleja de Fourier.
b) Espectro de Frecuencias de la señal
c) Potencia total de la señal, sobre una resistencia de 1 Ω
d) Potencia asociada a la quinta armónica
e) Los ángulos de adelanto o de retraso en fase de la quinta armónica

Solución:

La gráfica de la función periódica , en el intervalo dado, se muestra a continuación :



Luego:

$$\begin{cases} T = 2 \quad \Rightarrow p = 1 \\ w_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$C_n = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-4t} e^{-\frac{in\pi t}{p}}\, dt = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-4t} e^{-in\pi t}\, dt = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-t(4+in\pi)}\, dt = \tfrac{1}{2}\,\frac{e^{-(4+in\pi)} - e^{(4+in\pi)}}{-\left(4+in\pi\right)}$$

$$C_n = \tfrac{1}{2}\,\frac{e^{(4+in\pi)} - e^{-(4+in\pi)}}{\left(4+in\pi\right)} = \frac{e^{4}e^{in\pi} - e^{-4}e^{-in\pi}}{2\left(4+in\pi\right)} \quad \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{e^{4}\left[\cos n\pi + isen(n\pi)\right] - e^{-4}\left[\cos n\pi - isen(n\pi)\right]}{2\left(4+in\pi\right)} = \frac{e^{4}\left[\cos n\pi\right] - e^{-4}\left[\cos n\pi\right]}{2\left(4+in\pi\right)}$$

$$C_n = \frac{\cos(n\pi)\left(e^{4} - e^{-4}\right)}{2\left(4+in\pi\right)} = \frac{\operatorname{senh}(4)\,\cos(n\pi)}{\left(4+in\pi\right)}$$

$$\boxed{C_n = (-1)^n \frac{\operatorname{senh}(4)}{\left(4+in\pi\right)}} \quad \text{o también :} \quad \boxed{C_n = (-1)^n \frac{\operatorname{senh}(4)}{16+(n\pi)^2}\left(4-in\pi\right)}$$

En consecuencia :

a) **Serie Exponencial Compleja:**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi t}{p}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{senh}(4)}{\left(4+in\pi\right)} e^{in\pi t}$$

$$\boxed{f(t) = \operatorname{senh}(4) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\left(4+in\pi\right)} e^{in\pi t}}, \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

El desarrollo en siete términos no nulos será:

n	3	2	1	0	-1	-2	-3
nw_0	3π	2π	π	0	$-\pi$	-2π	-3π
C_n	$-\dfrac{\text{senh}(4)}{4+i3\pi}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{4+i2\pi}$	$-\dfrac{\text{senh}(4)}{4+i\pi}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{4}$	$-\dfrac{\text{senh}(4)}{4-i\pi}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{4-i2\pi}$	$-\dfrac{\text{senh}(4)}{4-i3\pi}$
$\lvert C_n \rvert$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+9\pi^2}}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+4\pi^2}}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+\pi^2}}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{2}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+\pi^2}}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+4\pi^2}}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+9\pi^2}}$

De donde:

$$f(t) = \frac{\text{senh}(4)}{4} + \text{senh}(4)\left[-\frac{e^{i\pi t}}{4+i\pi} + \frac{e^{i2\pi t}}{4+i2\pi} - \frac{e^{i3\pi t}}{4+i3\pi} + \cdots - \frac{e^{-i\pi t}}{4+i\pi} + \frac{e^{-i2\pi t}}{4+i2\pi} - \frac{e^{-i3\pi t}}{4+i3\pi} + \right.$$

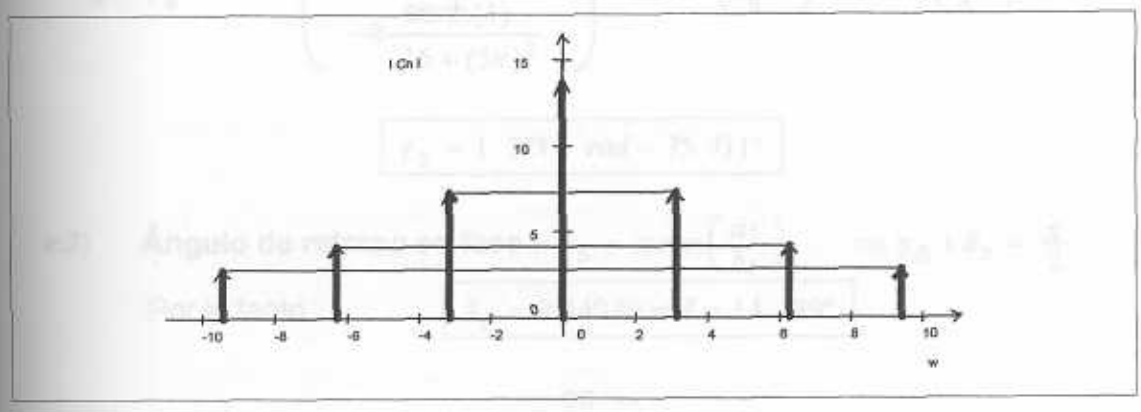
O también:

$$\boxed{f(t) = \text{senh}(4)\left[\frac{1}{4} - \frac{e^{i\pi t}}{4+i\pi} + \frac{e^{i2\pi t}}{4+i2\pi} - \frac{e^{i3\pi t}}{4+i3\pi} + \cdots - \frac{e^{-i\pi t}}{4+i\pi} + \frac{e^{-i2\pi t}}{4+i2\pi} - \frac{e^{-i3\pi t}}{4+i3\pi} + \cdots \right]}$$

b) **Espectro de Potencia:**

Gráfica de $\lvert C_n \rvert$ *vs.* (nw_0)

n	3	2	1	0	-1	-2	-3
nw_0	3π	2π	π	0	$-\pi$	-2π	-3π
C_n	$-\dfrac{\text{senh}(4)}{4+i3\pi}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{4+i2\pi}$	$-\dfrac{\text{senh}(4)}{4+i\pi}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{4}$	$-\dfrac{\text{senh}(4)}{4-i\pi}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{4-i2\pi}$	$-\dfrac{\text{senh}(4)}{4-i3\pi}$
$\lvert C_n \rvert$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+9\pi^2}}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+4\pi^2}}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+\pi^2}}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{4}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+\pi^2}}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+4\pi^2}}$	$\dfrac{\text{senh}(4)}{\sqrt{4+9\pi^2}}$
$\lvert C_n \rvert$	2.8325	4.1387	7.3277	13.645	7.3277	4.1387	2.8325



$\lvert C_n \rvert$ *vs.* (nw_0)

c) **PotenciaTotal** $(R = 1\Omega)$

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)\right]dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^{-4t}\right]^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-8t}\,dt = \frac{1}{2}\frac{e^{-8t}}{(-8)}\Bigg|_{-1}^{1} = -\frac{1}{16}[e^{-8}-e^{8}]$$

$$\Rightarrow$$

$$P = \frac{1}{8}\left[\frac{e^{8}-e^{-8}}{2}\right] = \frac{1}{8}\text{senh}(8) = 186.31\ \textit{vatios} \qquad \boxed{P = 186.31} \text{ vatios}$$

d) **Potencia de la Quinta armónica:**

$$P_5 = 2\left|C_5\right|^2 = 2\left(\frac{\text{senh}(4)}{\sqrt{16+25\pi^2}}\right)^2 = \frac{2\sinh^2(4)}{16+25\pi^2} = 5.669 \text{ vatios}$$

e) **Ángulos de adelanto o de atraso en fase de la quinta armónica**

e.1) **Ángulo de adelanto en fase :** $\gamma_5 = \arctan\left(\frac{b_5}{a_5}\right)$

$$a_5 = C_5 + C_{-5} = -\frac{\text{senh}(4)}{16+(5\pi)^2}\left(4-i5\pi\right) - \frac{\text{senh}(4)}{16+(5\pi)^2}\left(4+i5\pi\right) \qquad \Rightarrow$$

$$a_5 = -8\frac{\text{senh}(4)}{16+(5\pi)^2}$$

$$b_5 = i(C_5 - C_{-5}) = i\left[-\frac{\text{senh}(4)}{16+(5\pi)^2}\left(4-i5\pi\right) + \frac{\text{senh}(4)}{16+(5\pi)^2}\left(4+i5\pi\right)\right] \qquad \Rightarrow$$

$$b_5 = \left[-\frac{\text{senh}(4)}{16+(5\pi)^2}\left(4i+5\pi\right) + \frac{\text{senh}(4)}{16+(5\pi)^2}\left(4i-5\pi\right)\right] \qquad \Rightarrow$$

$$b_5 = -10\pi\frac{\text{senh}(4)}{16+(5\pi)^2}$$

Luego, $\gamma_5 = \arctan\left(\dfrac{-10\pi\dfrac{\text{senh}(4)}{16+(5\pi)^2}}{-8\dfrac{\text{senh}(4)}{16+(5\pi)^2}}\right) = \arctan\left(\frac{10}{8}\pi\right) = \arctan\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 1.3214$

$$\boxed{\gamma_5 = 1.3214\ \textit{rad} = 75.711^\circ}$$

e.2) **Ángulo de retraso en fase :** $\delta_5 = \arctan\left(\frac{a_5}{b_5}\right) \Rightarrow \gamma_5 + \delta_5 = \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto : $\boxed{\delta_5 = 0.24940\ \textit{rad} = 14.289^\circ}$

= oo =

12.11) EJERCICIOS PROPUESTOS IV

1) Calcular el espectro de potencia de una onda cosenoidal de amplitud A y período $T = 1$, cuando la misma es rectificada según lo siguiente.

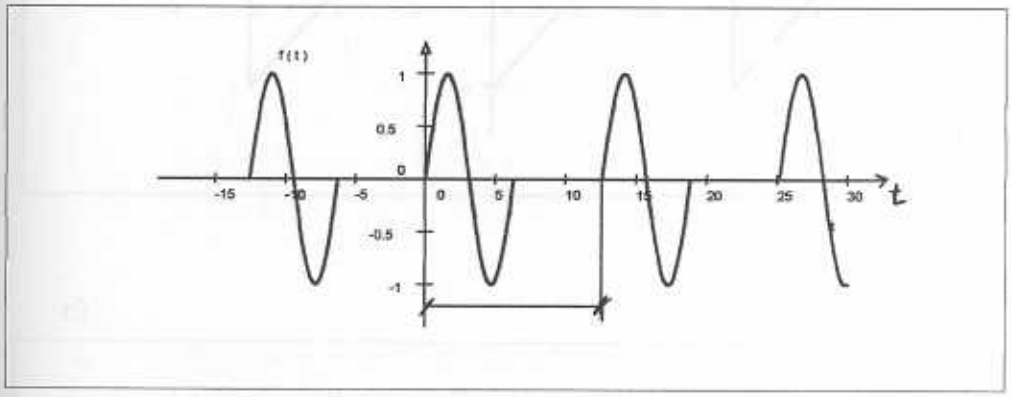
a) Cuando la rectificación es de media onda
b) Cuando la rectificación es de onda completa

2) Represente la función $f(t) = e^{t}$ en el intervalo $(0 < t < 1)$, por
a) La forma Exponencial Compleja de Fourier
b) La forma Trigonomérica Real de Fourier
c) La forma Trgonométrica Alterna de Fourier.

3) Represente la onda triangular definida por: $\begin{cases} t+\pi, & -\pi < t < 0 \\ -t+\pi, & 0 < t < \pi \end{cases}$

a) Por la forma Exponencial Compleja de Fourier
b) Por la forma Trigonomérica Real de Fourier
c) Por la forma Trgonométrica Alterna de Fourier.

4°) *a)* Encuentre la serie de Fourier (Trigonométrica y Exponencial) de la señal periódica formada por eliminación alternada de un ciclo en una onda sinusoidal, según se muestra en la siguiente figura :



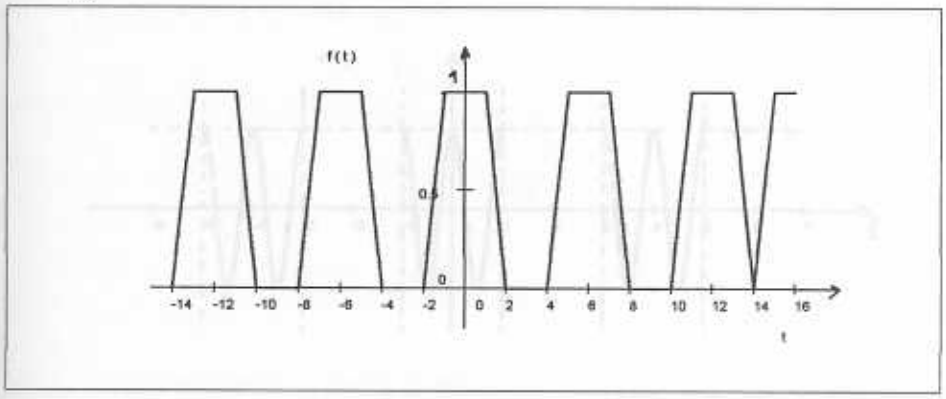
($f(t)$)

b) Si la onda $f(t)$ dada se desplaza hacia la izquierda en π segundos, la nueva señal $f(t+\pi)$ es una función impar del tiempo cuya serie de Fourier contendrá en consecuecia, sólamente términos seno. Encuentre la serie de Fourier de $f(t+\pi)$. Deduzca a partir de esta serie, la serie de Fourier de $f(t)$.

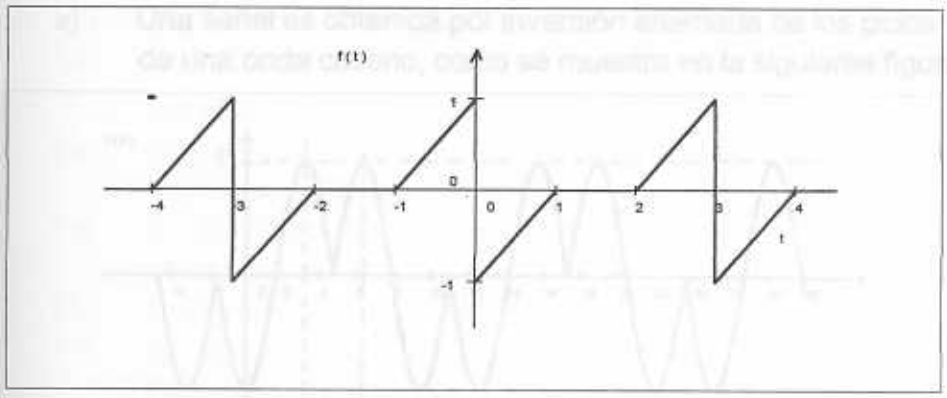
c) Repita *b)* para el desplazamiento de $f(t)$ en π segundos hacia la derecha.

5°) Para cada una de las señales periódicas que se muestran a continuación, calcule la serie de Fourier y grafique el espectro de frecuencias :

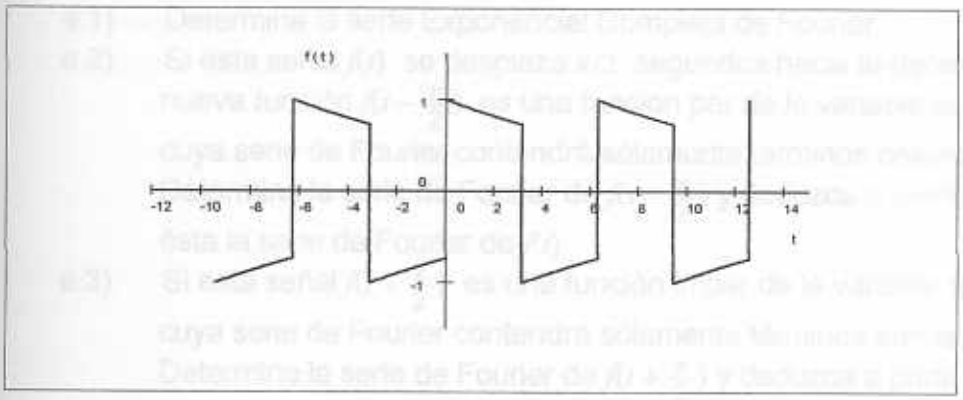
a)



b)

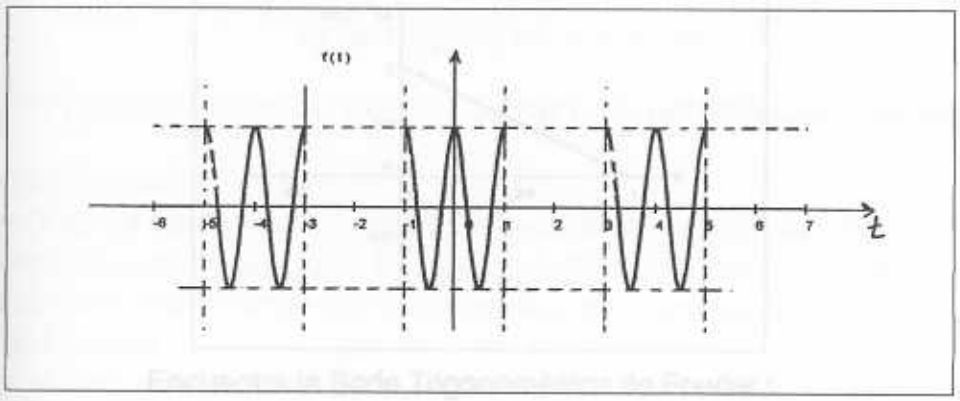


c)



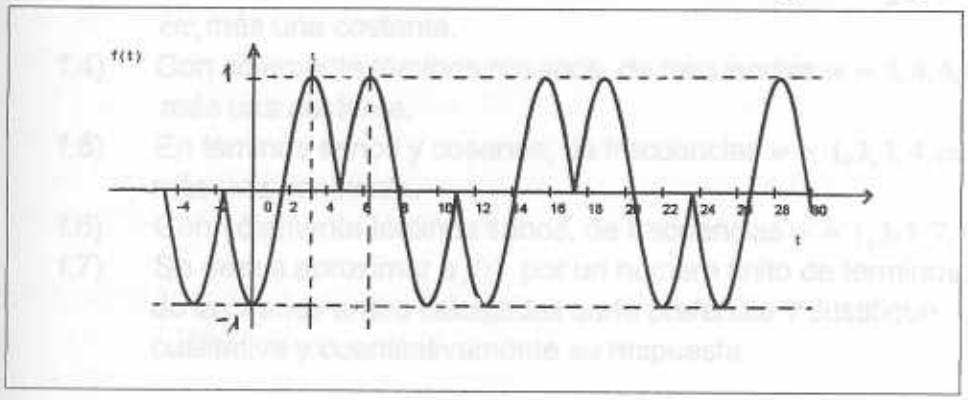
$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/10}, & 0 < t < \pi \\ -e^{-(t-\pi)/10}, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

d)



$$f(t) = \begin{cases} \cos 2\pi t, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 3 \end{cases}$$

e) Una señal es obtenida por inversión alternada de los ciclos de una onda coseno, como se muestra en la siguiente figura:

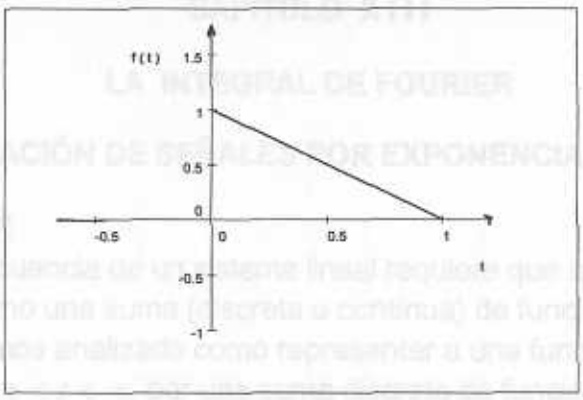


e.1) Determine la serie Exponencial Compleja de Fourier.

e.2) Si esta señal $f(t)$ se desplaza $\pi/2$ segundos hacia la derecha, la nueva función $f(t - \frac{\pi}{2})$ es una función par de la variable tiempo (t), cuya serie de Fourier contendrá sólamente términos cosenos. Determine la serie de Fourier de $f(t - \frac{\pi}{2})$ y deduzca a partir de ésta la serie de Fourier de $f(t)$.

e.3) Si esta señal $f(t + \frac{\pi}{2})$ es una función impar de la variable tiempo (t), cuya serie de Fourier contendrá sólamente términos senos. Determine la serie de Fourier de $f(t + \frac{\pi}{2})$ y deduzca a partir de ésta la serie de Fourier de $f(t)$.

f) Dada la función $f(t)$ que se muestra en la siguiente figura :



Encuentre la Serie Trigonométrica de Fourier :

f.1) En téminos senos y cosenos, de frecuencias $w = 4, 8, 12, 16, etc.$, más una constante.

f.2) Con sólamente téminos senos, de frecuencias $w = 2, 6, 10, 14, etc.$

f.3) Con sólamente téminos cosenos de frecuencias $w = \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, 8, \frac{32}{3}, etc.$, más una costante.

f.4) Con sólamente téminos cosenos, de frecuencias $w = 2, 4, 6, 8, etc.$, más una costante.

f.5) En téminos senos y cosenos, de frecuencias $w = 1, 2, 3, 4, etc.$, más una constante.

f.6) Con sólamente téminos senos, de frecuencias $w = 1, 3, 5, 7, etc.$

f.7) Se desea aproximar a $f(t)$ por un número finito de términos, ¿cuál de las series arriba calculadas sería preferible ? Justifique cualitativa y cuantitativamente su respuesta.

g) Demuestre que en toda función periódica par, los coeficientes de la Serie Exponecial Compleja de Fourier son reales. Demuestre también que, para toda función periódica impar, dichos coeficientes son imaginarios.

== oo ==

CAPÍTULO XIII

LA INTEGRAL DE FOURIER

REPRESENTACIÓN DE SEÑALES POR EXPONENCIALES CONTÍNUAS

13.1) INTRODUCCIÓN

El análisis de frecuencia de un sistema lineal requiere que una función $f(t)$ sea representada como una suma (discreta o contínua) de funciones exponenciales. Hasta ahora, hemos analizado como representar a una función periódica $f(t)$ en un intervalo $-\infty < t < \infty$, por una suma discreta de funciones exponenciales. También podemos representar cualquier función no periódica en términos de funciones exponenciales en un intervalo finito $t_0 < t < t_0 + T$. (Recuérdense las expansiones de pleno rango y de medio rango antes expuestas).

Para el análisis de frecuencia en que estamos interesados, sin embargo, necesitamos representar todo tipo de funciones $f(t)$ en términos de funciones exponenciales, no sobre un intervalo finito como lo es: $t_0 < t < t_0 + T$, sino en todo el dominio $(-\infty, \infty)$.

En este capítulo se desarrollarán las técnicas apropiadas para tal representación. Veremos que una señal no periódica, en general, puede ser expreasada como una suma contínua, es decir, como una integral de señales exponenciales, en contraste con las señales periódicas, las cuales, como ya se estudió, sólo pueden ser representadas por una suma discreta de funciones exponenciales.

13.2) REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN CUALQUIERA SOBRE EL INTERVALO $(-\infty, \infty)$. LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Este asunto puede ser abordado por dos vías diferentes:

a) Primero, podemos expresar la función $f(t)$ en términos de funciones exponenciales sobre un intervalo finito $\left(-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}\right)$ y entonces hacer que $T \to \infty$.

b) Alternativamente, podemos construir una función periódica de período T, de tal manera que $f(t)$ represente el primer ciclo de esta función periódica. Luego, hacemos que el período $T \to \infty$, con lo que la función periódica así definida tiene solamente un ciclo en el intervalo $(-\infty < t < \infty)$ y es representada por $f(t)$.

Realmente, no hay diferencias entre ambas aproximaciones, sin embargo, la última aproximación presenta ciertas ventajas porque nos permite visualizar el proceso del límite $(T \to \infty)$, sin alterar el diagrama del espectro de frecuencias.

Recuérdese el ejemplo de la función Compuerta (*Gate Function*), para diferentes valores de T y que de nuevo se muestra a continuación en la figura 13.1 :

$$f(t) = \begin{cases} A, & si \quad -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2} \\ 0, & si \quad \frac{\delta}{2} < t < T - \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

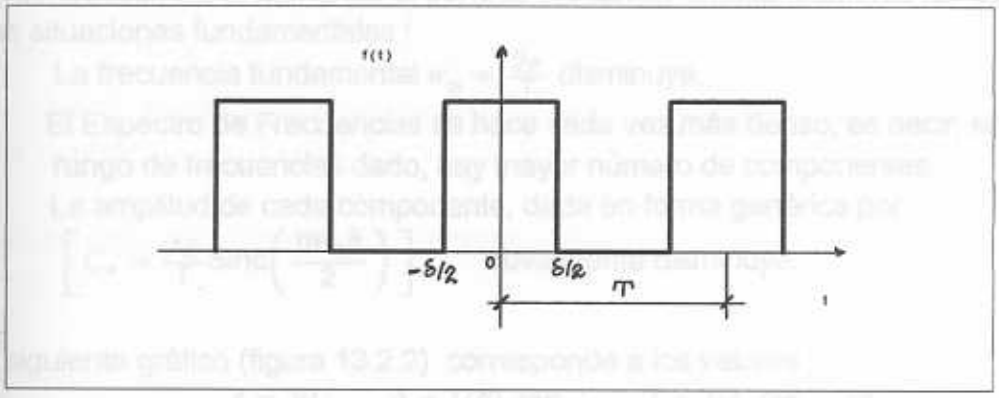


Fig.13.1 : Función Compuerta

Según se obtuvo en el capítulo precedente:

$$C_n = \frac{A\delta}{T}\frac{\text{sen}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)}{\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_n = \frac{A\delta}{T}\text{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)} \quad ...(1)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \frac{nw_0\delta}{2} = \frac{n\,(2\pi)\delta}{2T} = \frac{n\pi}{T}\delta$$. Sustituyendo en (1):

$$\boxed{C_n = \frac{A\delta}{T}\text{Sinc}\left(\frac{n\pi}{T}\delta\right)} \qquad \boxed{f(t) = \frac{A\delta}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\text{Sinc}\left(\frac{n\pi}{T}\delta\right)e^{inw_0t}}$$

Las siguientes gráficas (figuras 13.2 .1 a 13.2.4) muestran la envolvente del Espectro de Frecuencia correspondiente a la función compuerta dada, para distintos valores de los parámetros : A, δ, T.

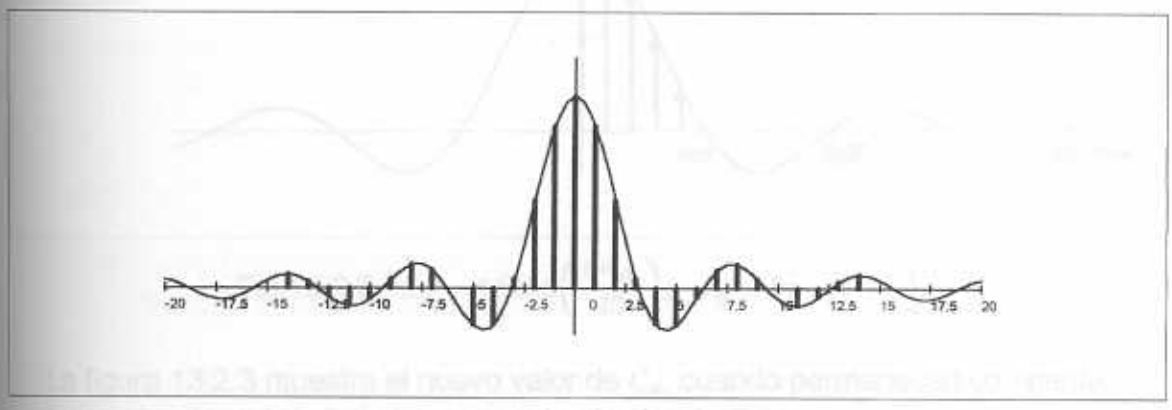


Fig.13.2.1 : Espectro de Frecuencias (C_n $vs.$ nw_0)

Obsérvese que los valores discretos de la frecuencia $w = mw_0$, correspondiente a cada componente de frecuencia, ocurren en $w = mw_0 = \frac{2\pi n}{T}$.

En consecuencia, al aumentar el período T, ocurren simultáneamente las siguientes tres situaciones fundamentales :

a) La frecuencia fundamental $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ disminuye.

b) El Espectro de Frecuencias se hace cada vez más denso, es decir, en un rango de frecuencias dado, hay mayor número de componentes.

c) La amplitud de cada componente, dada en forma genérica por :

$\left[C_n = \frac{A\delta}{T}\text{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right)\right]$, obviamente disminuye.

La siguiente gráfica (figura 13.2.2) corresponde a los valores :

$$A = 20\,; \quad \delta = 1/20 \ \ seg.\,; \quad T = 1/4 \ \ seg. \quad \Rightarrow$$

por lo que:

$$C_n = \frac{20 \cdot (\frac{1}{20})}{(\frac{1}{4})}\,\text{Sinc}\left(\frac{n\,w_0 \cdot \frac{1}{20}}{2}\right) = 4\,\text{Sinc}\left(\frac{n\,w_0}{40}\right) = 4\,\text{Sinc}\left(\frac{w}{40}\right)$$

siendo : $w = n\,w_0 = n\left(\frac{2\pi}{T}\right) = n\left(\frac{2\pi}{\frac{1}{4}}\right) = n(8\pi)$

Obviamente, la primera frecuencia de corte w_c ocurre para : $\frac{w_c}{40} = \pi \Rightarrow$

$$w_c = 40\pi$$

El número de componentes de frecuencia en el intervalo $(0, 40\pi)$ será :

$$\frac{40\pi}{8\pi} = 5$$

Dicha gráfica muestra la envolvente del Espectro de Frecuencia correspondiente a la señal rectangular especificada y las cinco componentes de frecuencia existentes en el intervalo $(0, 40\pi)$:

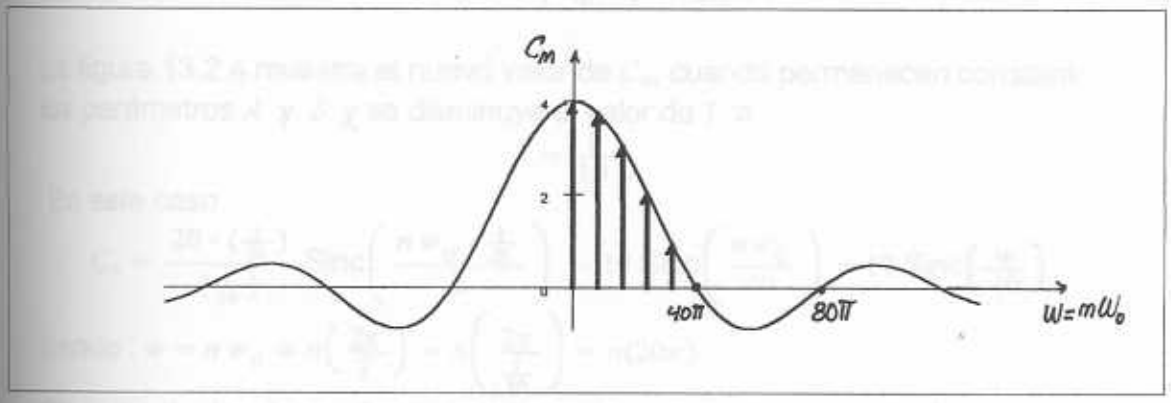


Fig.13.2.2 : $C_n = 4\,\text{Sinc}\left(\frac{mw_0}{40}\right)$; $w_0 = 8\pi$, $T = \frac{1}{4}$

La figura 13.2.3 muestra el nuevo valor de C_n, cuando permanecen constante los parámetros A y δ y se incrementa el valor de T a :

$$T = \frac{1}{2}$$

En este caso :

$$C_n = \frac{20 \cdot (\frac{1}{20})}{(\frac{1}{2})} \text{Sinc}\left(\frac{n\, w_0 \cdot \frac{1}{20}}{2}\right) = 2\,\text{Sinc}\left(\frac{n\, w_0}{40}\right) = 2\,\text{Sinc}\left(\frac{w}{40}\right)$$

siendo : $w = n\, w_0 = n\left(\frac{2\pi}{T}\right) = n\left(\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}\right) = n(4\pi)$

Obviamente, la primera frecuencia de corte w_c permanece igual al caso anterior, pues también ocurre para : $\frac{w_c}{40} = \pi \Rightarrow$

$$w_c = 40\pi$$

Sin embargo, el número de componentes de frecuencia en el intervalo $(0, 40\pi)$ es ahora :

$$\frac{40\pi}{4\pi} = 10$$

La figura 13.2.3 muestra la envolvente del Espectro de Frecuencia correspondiente a la nueva señal rectangular especificada y las diez componentes de frecuencia existentes en este caso, en el intervalo $(0, 40\pi)$:

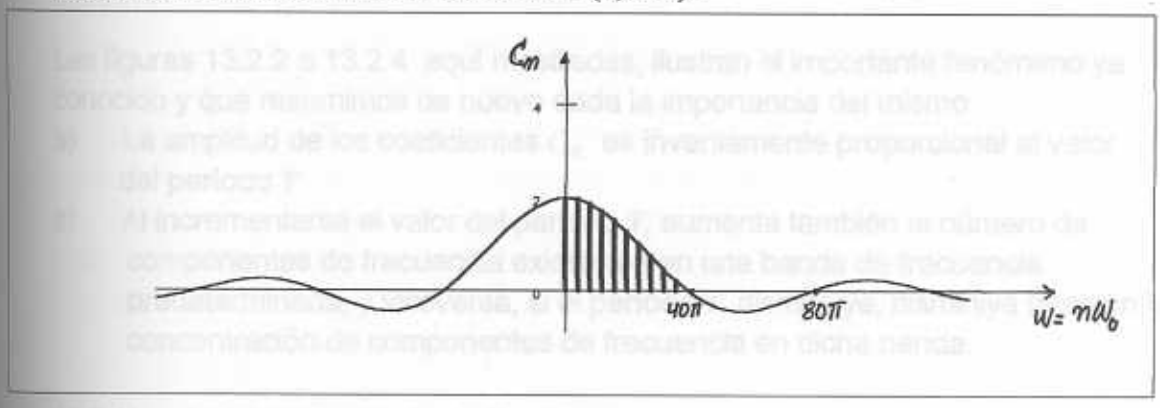


Fig.13.2.3 : $C_n = 2\,\text{Sinc}\left(\frac{nw_0}{40}\right)$; $w_0 = 4\pi$, $T = \frac{1}{2}$

La figura 13.2.4 muestra el nuevo valor de C_n, cuando permanecen constante los parámetros A y δ y se disminuye el valor de T a :

$$T = \frac{1}{10}$$

En este caso :

$$C_n = \frac{20 \cdot (\frac{1}{20})}{(\frac{1}{10})} \text{Sinc}\left(\frac{n\, w_0 \cdot \frac{1}{20}}{2}\right) = 10\,\text{Sinc}\left(\frac{n\, w_0}{40}\right) = 10\,\text{Sinc}\left(\frac{w}{40}\right)$$

siendo : $w = n\, w_0 = n\left(\frac{2\pi}{T}\right) = n\left(\frac{2\pi}{\frac{1}{10}}\right) = n(20\pi)$

Obviamente, la primera frecuencia de corte w_c permanece igual a los casos anteriores, pues también ocurre para : $\frac{w_c}{40} = \pi \Rightarrow$

$$w_c = 40\pi$$

Sin embargo, el número de componentes de frecuencia en el intervalo $(0, 40\pi)$ es ahora :

$$\frac{40\pi}{20\pi} = 2$$

La figura 13.2.4 muestra la envolvente del Espectro de Frecuencia correspondiente a la nueva señal rectangular especificada y las dos componentes de frecuencia existentes en este caso, en el intervalo $(0, 40\pi)$:

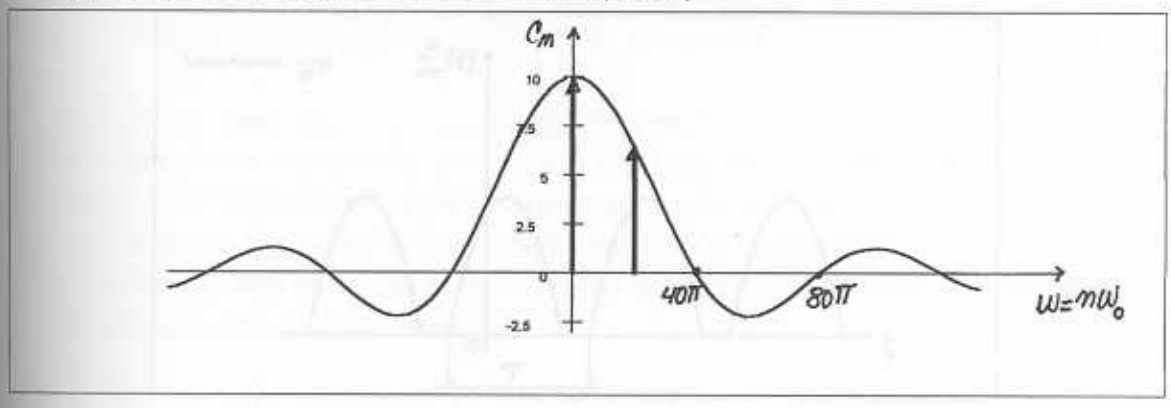


Fig.13.2.4 : $C_n = 10\ \text{Sinc}\left(\frac{nw_0}{40}\right);\ w_0 = 20\pi,\ T = \frac{1}{10}$

Las figuras 13.2.2 a 13.2.4 aquí mostradas, ilustran el importante fenómeno ya conocido y que resumimos de nuevo dada la importancia del mismo:

a) La amplitud de los coeficientes C_n es inversamente proporcional al valor del período T.

b) Al incrementarse el valor del período T, aumenta también el número de componentes de frecuencia existentes en una banda de frecuencia predeterminada, y viceversa, si el período T disminuye, disminiye también la concentración de componentes de frecuencia en dicha banda.

13.2.1) La Transformada de Fourier

Consideremos una función aperiódica $f(t)$ definida en un intervalo (a, b) como se muestra en la figura 13.3

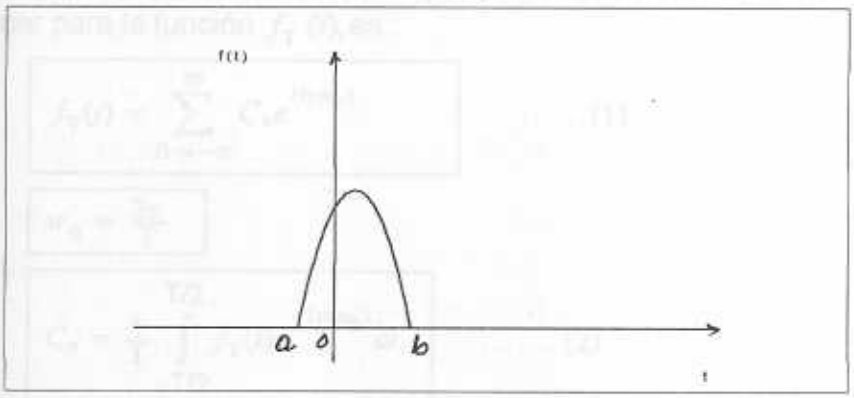


Fig. 13.3 : $f(t)$ = Señal no periódica

Se desea representar dicha función como una suma de funciones exponenciales en todo el intervalo $(-\infty < t < \infty)$.

Para este propósito, construyamos una nueva función periódica $f_T(t)$, con período arbitrario T, donde la función $f(t)$ se repite a si misma cada T segundos, como se muestra a continuación :

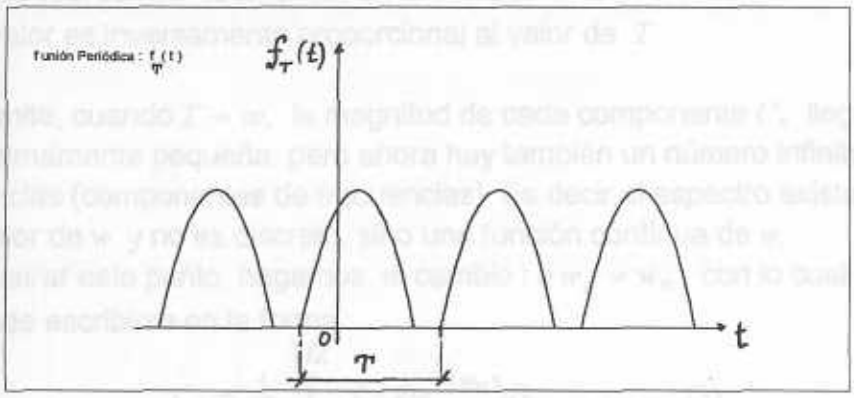


Fig. 13.4 : Señal periódica $f_T(t)$

El período T se toma lo suficientemente largo para que no haya solapamiento entre los pulsos $f(t)$, es decir, $T > |b-a.|$

La nueva función $f_T(t)$ es una función periódica y, por lo tanto, puede ser representada como una Serie Exponencial de Fourier. En el límite, si tomamos $T \to \infty$, entonces el pulso en la función periódica se va a repetir después de un intervalo infinito. De aquí que :si $T \to \infty$, entonces, $f_T(t)$ y $f(t)$ son idénticas. Es decir :

$$\lim_{T\to\infty} f_T(t) = f(t)$$

Así, la serie de Fourier que representa a $f_T(t)$, representará también a $f(t)$ si $T = \infty$ en dicha serie.

Tal como ya se expuso en el Capítulo precedente, la serie Exponencial Compleja de Fourier para la función $f_T(t)$, es :

$$\boxed{f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inw_0 t}} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-inw_0 t}\, dt} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

Hagamos ahora que T se incremente; cuando T se incrementa ocurre que:

a) La frecuencia fundamental $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ disminuye.

b) Aumenta el número de componentes en un rango de frecuencias dado, por lo

que el espectro se hace más denso : $w = n\,w_0 = n\frac{2\pi}{T}$.

c) La amplitud de cada componente disminuye también. El término C_n sabemos que representa la amplitud de la componente de frecuencia $w = mw_0$ y su valor es inversamente proporcional al valor de T.

En el límite, cuando $T \to \infty$, la magnitud de cada componente C_n llega a ser infinitésimamente pequeña, pero ahora hay también un número infinito de frecuencias (componentes de frecuencias). Es decir,el espectro existe ahora para todo valor de w y no es discreto, sino una función contínua de w.
Para ilustrar este punto, hagamos el cambio : $n\,w_0 = w_n$, con lo cual la expresión (2) puede escribirse en la forma :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau)e^{-iw_n t}d\tau \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

Sustituyendo esta expresión (3) en la ecuación (1), obtenemos :

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau)e^{-iw_n t}d\tau\right]e^{iw_n t} \quad \ldots(4)$$

Multiplicando y dividiendo el segundo miembro de esta ecuación, por 2π, se obtiene:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(\tau)e^{-iw_n t}d\tau\right]e^{iw_n t}\,\frac{2\pi}{T} \quad \ldots(5)$$

Pero:

$$\Delta w_n = (n+1)w_0 - mw_0 = w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Por lo que, sustituyendo en (5), obtenemos :

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T-2} f_T(\tau)e^{-iw_n t}d\tau\right]e^{iwt}\,\Delta w_n \quad \ldots(6)$$

Además:

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t)$$

Al tomar el límite cuando $T \to \infty$, se producen los siguientes efectos en la integral dada por la expresión (6) :

a) $\Delta w_n = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \Delta w_n \to 0$ cuando $T \to \infty$. En consecuencia, Δw_n puede ser representado por dw.

b) La variable discreta w_n se transforma en la variable contínua : w

c) La sumatoria $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ se transforma en la integral : $\int_{-\infty}^{\infty}$

d) La integral : $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$ se transforma en : $\int_{-\infty}^{\infty}$

Bajo estos efectos, la expresión (6) se puede escribir en la forma :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iwt}d\tau\right]e^{iwt}\,dw} \qquad \ldots(7)$$

Esta ecuación, conocida como : **" Integral de Fourier "** , es una representación válida de la función aperiódica ($T \to \infty$), siempre que :

a) En todo intervalo finito satisfaga las condiciones de Dirichclet.

b) Exista la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} |\, f(t)\,|\, dt$, es decir, si $f(t)$ es una función **" Absolutamente Integrable "**.

c) Bajo estas condiciones, la llamada " Integral de Fourier " proporciona el valor de $f(t)$ en todos los puntos en los que $f(t)$ es contínua, y da el promedio de los límites por la derecha y por la izquierda de $f(t)$, en todos aquellos puntos en los que esta función es discontínua.

La " Integral de Fourier ", dada por la ecuación (7), puede escribirse en la forma:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(w)\right]e^{iwt}\,dw} \qquad \ldots.\ (8)$$

$$\boxed{F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt} \qquad \ldots\ldots\ (9)$$

Estas dos ecuaciones (8) y (9) , ponen de manifiesto una inconfundible simetría entre $f(t)$ y $F(w)$, y constituyen lo que se conoce como :

" PAR DE TRANSFORMADAS DE FOURIER "

Tenemos así dos representaciones diferentes de la función $f(t)$ que estamos considerando:

a) En el dominio del tiempo : $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(w)\right]e^{iwt}\,dw$

b) En el dominio de la frecuencia : $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

0.2.1.1) Espectro de Frecuencias

La función $F(w)$ es, en general, una función compleja y necesita por lo tanto

dos gráficas para su representación : una para la magnitud $|F(w)|$ y otra para la fase $\theta(w)$, en función de w.

En efecto, $F(w) = |F(w)|\, e^{i\theta(w)}$, donde : $\theta(w) = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im}F(w)}{\operatorname{Re}F(w)}\right)$,

Por lo tanto, $F(w)$ puede ser representada por una gráfica que exprese a $|F(w)|$ y otra que muestre a $\theta(w)$; obviamente ambas curvas como una función de w.

Ocurre que, en muchos casos, $F(w)$ es real puro o imaginario puro y, en estos casos, sólamente una gráfica será necesaria.

Además, si $f(t)$ es una función real, entonces :

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \quad y \quad F(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iwt}dt$$

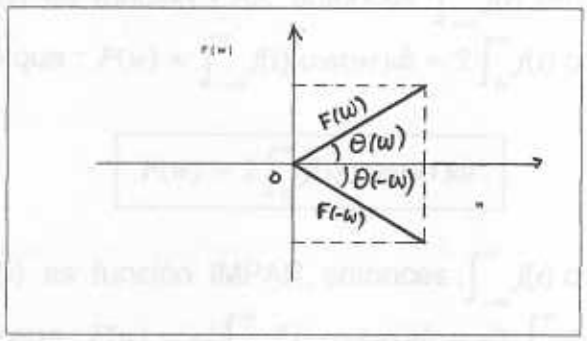
Por lo que : $\begin{cases} F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt \\ F(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt + i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt \end{cases}$

Es decir, $F(w)$ y $F(-w)$ son complejos conjugados : $F(w) = F^*(-w)$, por lo que podemos escribir:

$$\left.\begin{cases} F(w) = |F(w)|e^{-i\theta(w)} \\ F(-w) = |F(w)|e^{i\theta(w)} \end{cases}\right\} \Rightarrow |F(w)| = |F(-w)|$$

Luego es evidente que:

- El Espectro de Frecuencia (o de Magninudes) de $F(w)$, es decir, $|F(w)|$ $vs.$ w, es una función Par de w.
- El Espectro de Fases $\theta(w)$ $vs.$ w, es una función Impar de w, es decir, $\theta(w) = -\theta(-w)$. Esta última característica se ilustra a acontinuación.



($\theta(w) = -\theta(-w)$)

- En la ecuación (9), $F(w)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$ y representa el Espectro de Frecuencias de $f(t)$, es decir, las amplitudes relativas de cada componete de frecuencia, con frecuencias pertenecientes a $(-\infty < w < \infty)$. Dicha función es también llamada : **" Función Densidad Espectral ".** Nótese que dicho espectro es en este caso una función contínua y existe para todo valor de w.
- La ecuación (8) representa a la transformada inversa de Fourier de $F(w)$ y representa la función $f(t)$ no periódica , en el dominio del tiempo, como una suma contínua de funciones exponenciales, válidas para $\forall t \in (-\infty < t < \infty)$.
- Las ecuaciones (8) y (9) se conocen tambiém como :" **Transformada Directa** y **Transformada Inversa de Fourier** ", respectivamente, por lo que puede escribirse :

$$\boxed{F(w) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-wt} dt}$$

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{wt} dw}$$

13.2.2) SIMPLIFICACIÓN EN EL CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER (Condiciones de Simetría)

Resumiendo las fórmulas obtenidas anteriormente, tenemos:

a) Integral de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-iw\tau} d\tau\right] e^{iwt}\, dw$$

b) Par deTransformadas de Fourier :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt} dw \quad y \quad F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt} dt$$

Desarrollando por Euler esta última ecuacion, se obtiene:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt} dt = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(wt)dt$$

CASO 1 : Si $f(t)$ es función PAR, entonces : $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(wt)dt = 0$

por lo que : $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$

$$\boxed{F(w) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt}$$

CASO 2 : Si $f(t)$ es función IMPAR, entonces : $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt = 0$

por lo que : $F(w) = -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt = -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$

$$\boxed{F(w) = -2i\int_0^{\infty} f(t)\ \text{sen}(wt)dt}$$

En forma análoga se obtiene:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt} dw = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\cos(wt)dw + i\int_{-\infty}^{\infty} F(w) sen(wt)dw\right]$$

CASO 1 : Si $F(w)$ es función PAR, entonces : $\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\ \text{sen}(wt)dw = 0$

por lo que : $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\ \cos(wt)dw = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(w)\ \cos(wt)dw$

$$\boxed{F(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(w)\ \cos(wt)dw}$$

CASO 2 : Si $F(w)$ es función IMPAR, entonces : $\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\ \cos(wt)dw = 0$

por lo que : $f(t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \cos(wt)dw = \frac{i}{\pi}\int_0^{\infty} F(w)\ \cos(wt)dw$

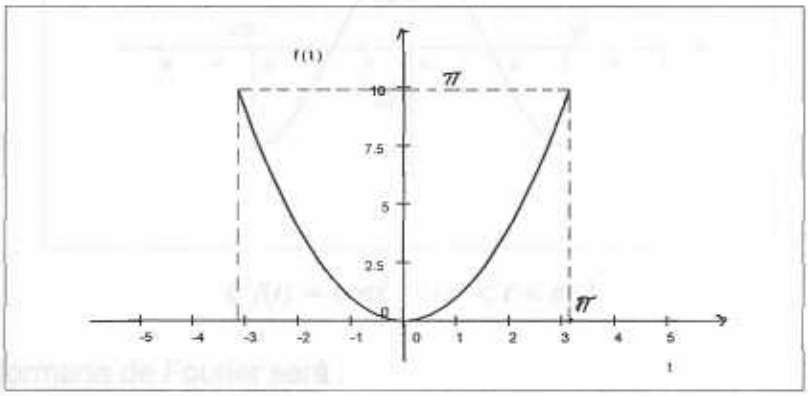
$$\boxed{F(w) = 2i\int_0^{\infty} f(t)\ \cos(wt)dw}$$

== oo ==

13.2.3) Ejemplos resueltos

13.2.3.1) Función PAR:

Ejemplo 1: $f(t) = t^2, \qquad -\pi < t < \pi$



($f(t) = t^2$)

La Transformada de Fourier correspondiente será :

$$F(w) = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{iwt} dt$$

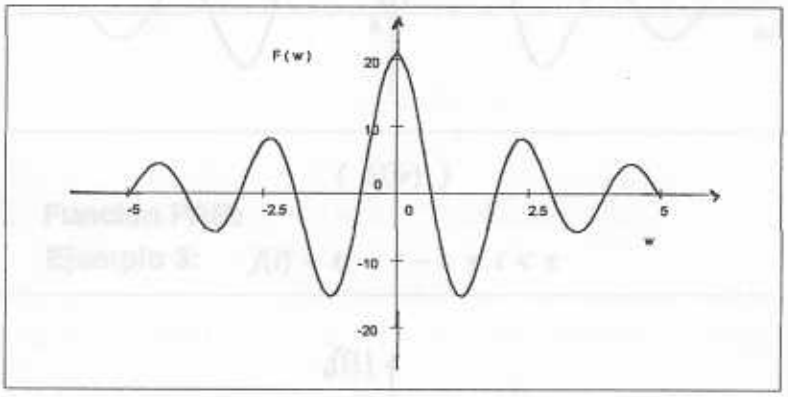
Aplicando integración por partes, se obtiene :

$$F(w) = \frac{1}{w^3}\left[\, 2\pi^2 w^2 sen(\pi w) + 4\pi w\cos(\pi w) - 4sen(\pi w)\,\right]$$

Aplicando simetría :

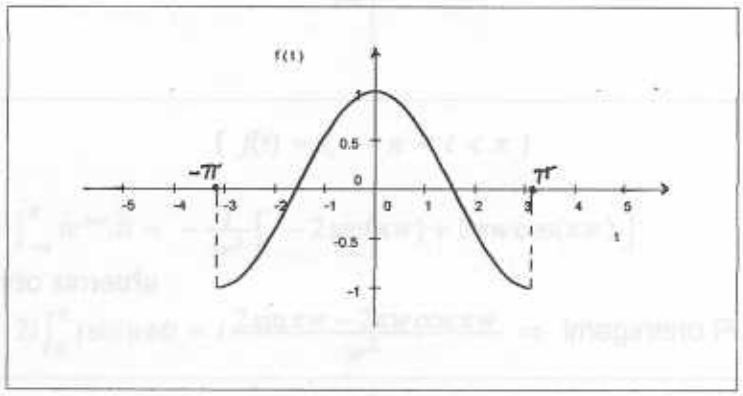
$$F(w) = 2\int_0^{\pi} t^2 \cos wt dt = 2\frac{\pi^2 w^2 \text{sen}(\pi w) + 2\pi w\cos(\pi w) - 2\text{sen}(\pi w)}{w^3}$$

lo que confirma el resultado.



($F(w)$)

Ejemplo 2: $f(t) = \cos t, \qquad -\pi < t < \pi$



($f(t) = \cos t\ ,\ -\pi < t < \pi$)

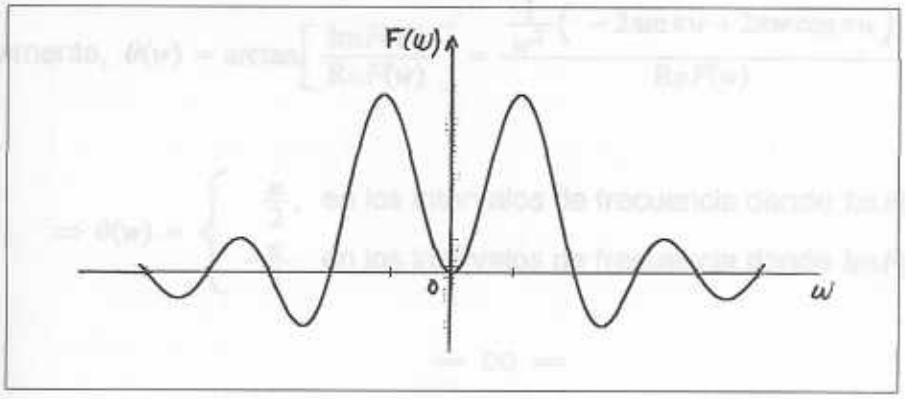
La transformada de Fourier será :

$$F(w) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t e^{iwt} dt = -2w\frac{\sin \pi w}{w^2 - 1}$$

Aplicando simetría :

$$F(w) = 2\int_0^{\pi} \cos t \cos wt dt = -2w\frac{\text{sen}(\pi w)}{w^2 - 1}$$, lo que confirma el resultado

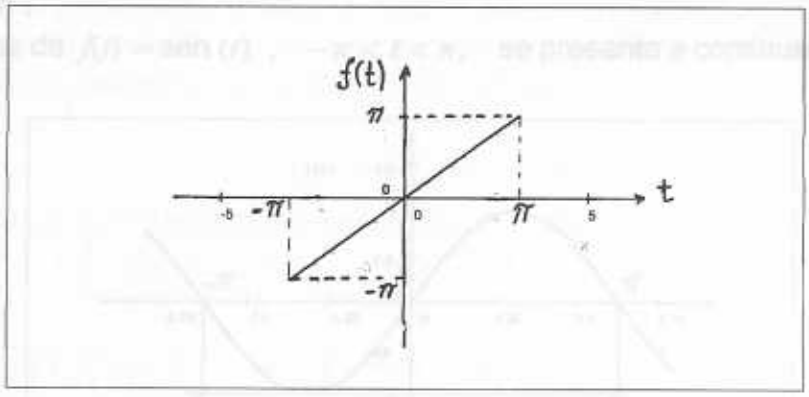
Se muestra a continuación la gráfica de $F(w)$:



($F(w)$)

13.2.3.2) Función PAR:

Ejemplo 3: $f(t) = t, \quad -\pi < t < \pi$

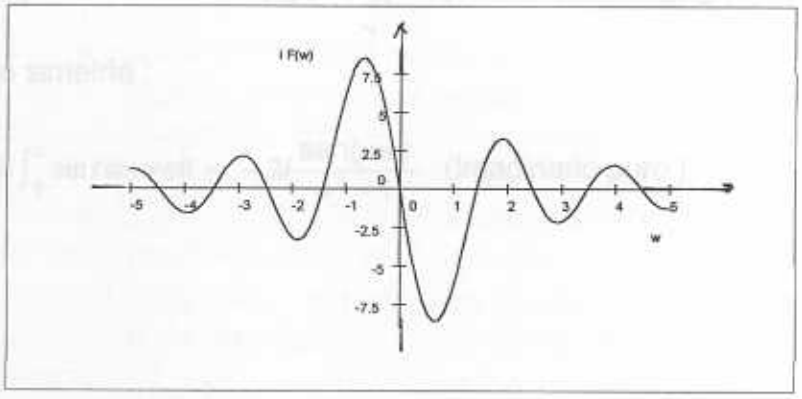


($f(t) = t, \ -\pi < t < \pi$)

$$F(w) = \int_{-\pi}^{\pi} te^{iwt}dt = -\frac{i}{w^2}\left[\ -2\sin(\pi w) + 2\pi w\cos(\pi w)\right]$$

Aplicando simetría :

$$F(w) = 2i\int_0^{\pi} t\sin wtdt = i\frac{2\sin\pi w - 2\pi w\cos\pi w}{w^2} \Rightarrow \text{ Imaginario Puro } \Rightarrow$$



($iF(w)$ $vs.w$)

Obviamente, $\theta(w) = \arctan\left[\dfrac{\operatorname{Im}F(w)}{\operatorname{Re}F(w)}\right] = \dfrac{\frac{1}{w^2}\left(-2\sin\pi w + 2\pi w\cos\pi w\right)}{\operatorname{Re}F(w)}$

$$\operatorname{Re}F(w) = 0 \qquad \Rightarrow \theta(w) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{en los intervalos de frecuencia donde } \operatorname{Im}F(w) > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{en los intervalos de frecuencia donde } \operatorname{Im}F(w) < 0 \end{cases}$$

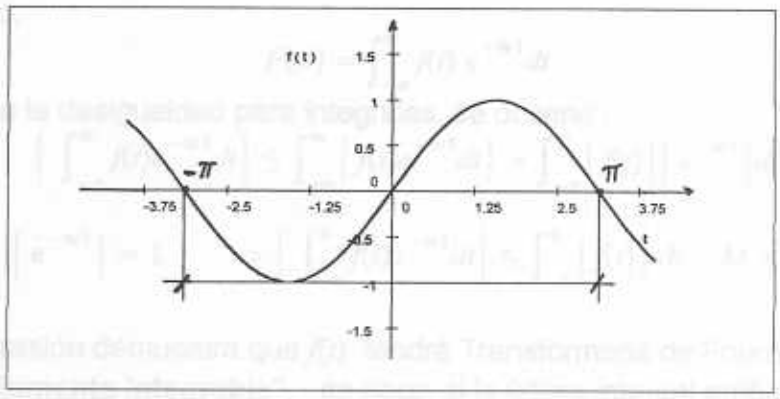
= oo =

Ejemplo 4:

Dado: $f(t) = \text{sen}\,(t), \quad -\pi < t < \pi,$ calcular : $F(w)$

Solución :

La gráfica de $f(t) = \text{sen}\,(t)$, $-\pi < t < \pi,$ se presenta a continuación :

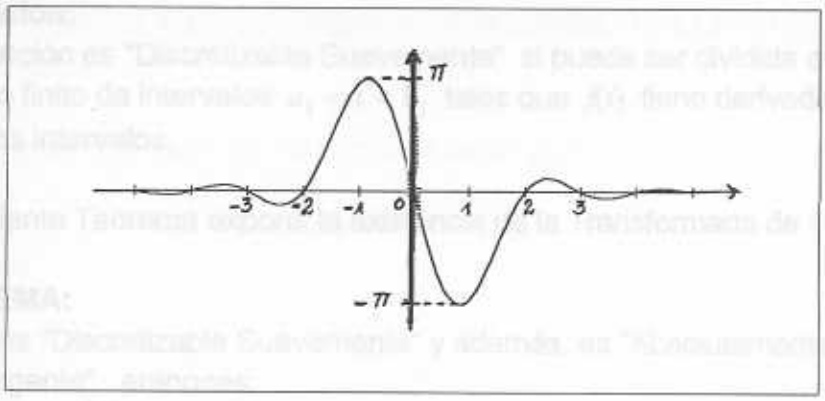


$f(t) = \text{sen}\,(t)$, $-\pi < t < \pi$

$$F(w) = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(t)\, e^{i\,\text{wt}}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) e^{i\,\text{wt}}\, dt = -2i\frac{\text{sen}(\pi w)}{w^2 - 1}$$

Aplicando simetría :

$$F(w) = 2i\int_0^{\pi} \sin t \sin wt\, dt = -2i\frac{\text{sen}(\pi w)}{w^2 - 1} \quad \text{(Imaginario puro)}$$



($i\,F(w)$)

13.2.4) Existencia de la Transformada de Fourier

El cálculo de la Transformada de Fourier se apoya en la existencia de integrales impropias, por lo tanto, antes de utilizar la ecuación de síntesis de dicha transformada, deberíamos verificar que las integrales impropias involucradas en su definición, existen para las señales $f(t)$ consideradas.

En efecto,

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-wt} dt$$

Aplicando la desigualdad para integrales, se obtiene :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-wt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) e^{-wt} dt \right| = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| \left| e^{-wt} \right| dt$$

Pero: $\left| e^{-wt} \right| = 1 \quad \Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-wt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt \leq M \neq \infty$

Esta expresión demuestra que $f(t)$ tendrá Transformada de Fourier si es **"Absolutamente Integrable"**, es decir, si la última integral arriba mostrada es finita; en otras palabras, $f(t)$ tiene Transformada de Fourier si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt \leq M \neq \infty$$

donde M es una constante finita no negativa.

No obstante lo expuesto, veremos que existen funciones que no son "Absolutamente Integrables" pero que, sin embargo, tienen Transformada de Fourier. Ello demuestra que la Integrabilidad Absoluta es condición suficiente mas no necesaria para la existencia de la Transformada de Fourier de $f(t)$.

En efecto, funciones tales como : $\text{sen}(wt), \cos(wt), U(t), etc.$, no son "Absolutamente Integrables" , sin embargo, poseen Transformada de Fourier en el límite, es decir,cuando $T \to \infty$. Estos cálculos se realizarán posteriormente.

Definición:
Una función es "Discretizable Suavemente" si puede ser dividida en un número finito de intervalos $a_i < t < b_i$ tales que $f(t)$ tiene derivada contínua en estos intervalos.

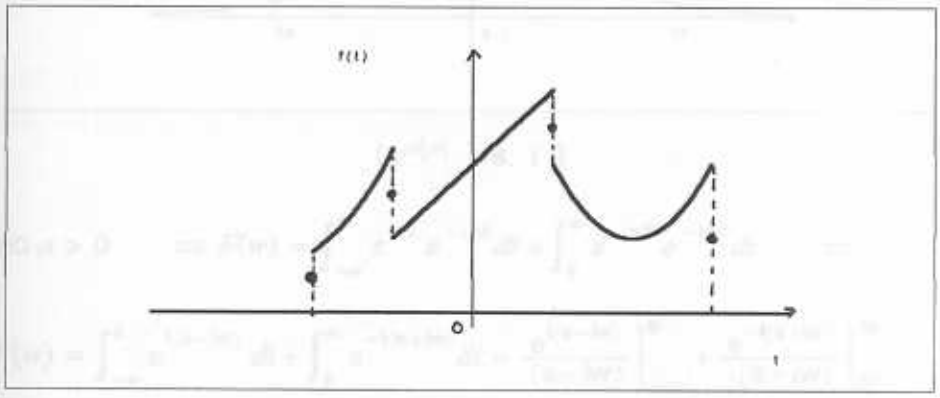
El siguiente Teorema expone la existencia de la Transformada de Fourier:

TEOREMA:
Si $f(t)$ es "Discretizable Suavemente" y además, es "Absolutamente Convergente" , entonces:

a) $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt} dt$ existe y es una función contínua de w

b) $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt}\, dw$

Estas igualdades se mantienen en cada punto donde $f(t)$ es contínua. Si $f(t)$ es discontínua en el punto t_0, entonces la integral converge al promedio de los límites laterales alrededor de dicho punto, tal como se ilustra a continuación :



($f(t)$: *discontínua*)

$$f(t_o) = \frac{\lim_{t \to t_0^-} f(t) + \lim_{t \to t_0^+} f(t)}{2}$$

La convergencia de $f(t)$ en estos puntos de discontinuidad, se identifica con un punto (∘) en la gráfica. Este Teorema identifica explícitamente, aquellas señales que tienen Transformada de Fourier en el sentido de la definición que se deriva de la Integral de Fourier.

13.3) CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES SINGULARES

Ejemplo 5:

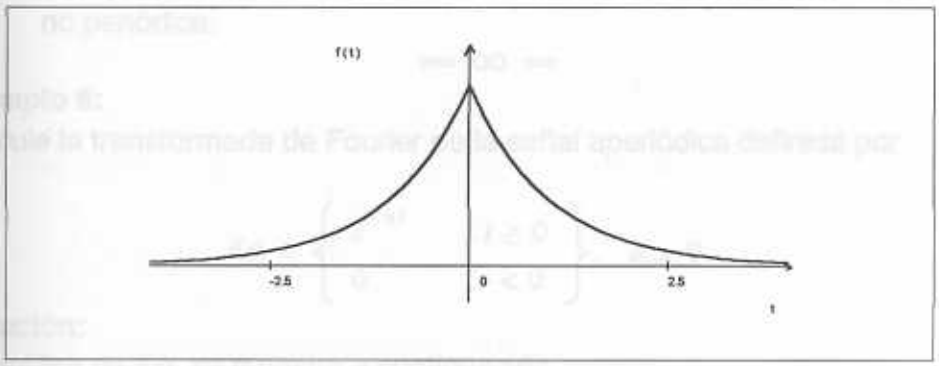
Calcule la transformada de Fourier de la señal aperiódica definida por :

$$f(t) = e^{-a|t|} \quad , \; a > 0$$

Solución:

La función dada es : $f(t) = \begin{cases} e^{at}, & \text{si } t \le 0 \\ e^{-at}, & \text{si } t < 0 \end{cases}$

cuya gráfica se muestra a continuación:



($e^{a|t|}$ vs. t)

Como $a > 0$ $\quad \Rightarrow F(w) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-iwt} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-iwt} dt \quad \Rightarrow$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{0} e^{t(a-iw)} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+iw)} dt = \frac{e^{t(a-iw)}}{(a-iw)}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-t(a+iw)}}{-(a+iw)}\Bigg|_{0}^{\infty} \quad \Rightarrow$$

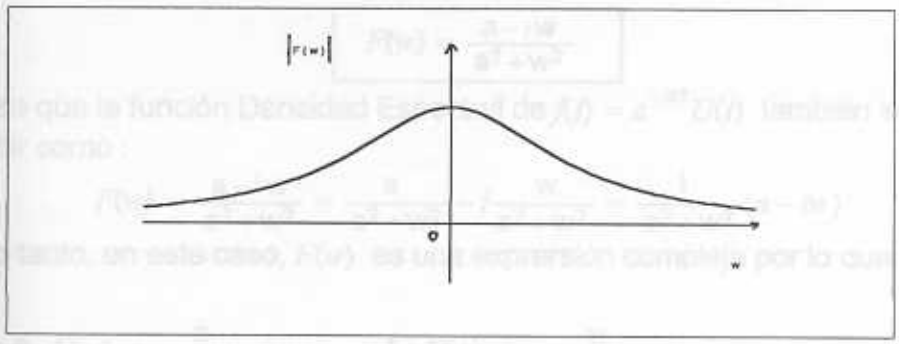
$$F(w) = \frac{1}{(a-iw)} + \frac{1}{(a+iw)} \Rightarrow \quad \boxed{F(w) = \frac{2a}{a^2+w^2}}$$

En este caso, $F(w)$ es real puro, por lo que :

a) $\left| F(w) \right| = F(w) = \dfrac{2a}{a^2+w^2}$, pues $a > 0$ por hipótesis.

b) $\theta(w) = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im} F(w)}{\operatorname{Re} F(w)}\right) = 0, \; \forall w \in (-\infty, \infty) \quad ; \; (\operatorname{Im} F(w) = 0)$

c) La representación gráfica de $F(w)$ será:



($|F(w)|$ vs. w)

$\theta(w) = 0, \quad \forall w \in (-\infty, \infty)$

d) Nótese que $F(w)$ es una función contínua de w, por ser $f(t)$ una función no periódica.

= oo =

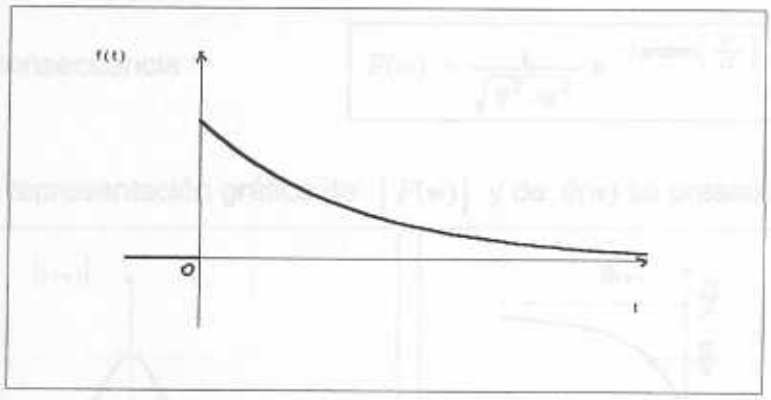
Ejemplo 6:

Calcule la transformada de Fourier de la señal aperiódica definida por :

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-at} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{array} \right\}, \quad a > 0$$

Solución:

La gráfica de $f(t)$ se muestra a continuación:



$f(t)$

Obviamente, la función dada también puede ser definida por : $f(t) = e^{-at}U(t)$

La transformada de Fourier de esta señal será:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} U(t)\, e^{-iwt} dt$$

Como $e^{-at}U(t) = 0$, para $t \in (-\infty, 0)$, la transformada de Fourier se reduce a :

$$F(w) = \int_0^{\infty} e^{-at}\, e^{-iwt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(a+iw)} dt = \left. \frac{e^{-t(a+iw)}}{-(a+iw)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{(a+iw)} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{F(w) = \frac{a - iw}{a^2 + w^2}}$$

Nótese que la función Densidad Espectral de $f(t) = e^{-at}U(t)$ también se puede escribir como :

$$F(w) = \frac{a - iw}{a^2 + w^2} = \frac{a}{a^2 + w^2} - i\frac{w}{a^2 + w^2} = \frac{1}{a^2 + w^2}(a - iw)$$

Por lo tanto, en este caso, $F(w)$ es una exprersión compleja por lo que :

a) $\operatorname{Re}F(w) = \dfrac{a}{a^2 + w^2}$; $\operatorname{Im}F(w) = -\dfrac{w}{a^2 + w^2}$

Por lo tanto :

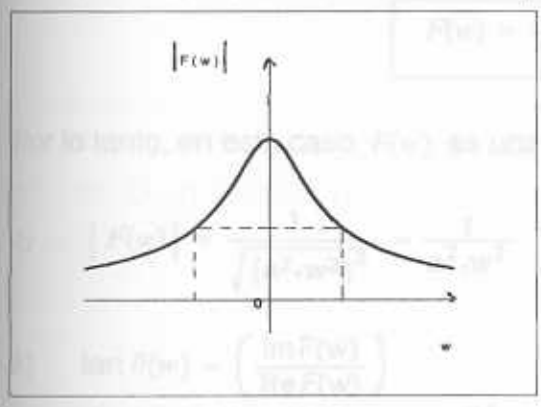
$$|F(w)| = \frac{1}{a^2 + w^2}\sqrt{a^2 + w^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + w^2}}$$

b) $\tan\theta(w) = \left(\dfrac{\operatorname{Im}F(w)}{\operatorname{Re}F(w)}\right) \Rightarrow \theta(w) = \arctan\dfrac{\left(-\dfrac{w}{a^2 + w^2}\right)}{\left(\dfrac{a}{a^2 + w^2}\right)} = -\arctan\left(\dfrac{w}{a}\right)$

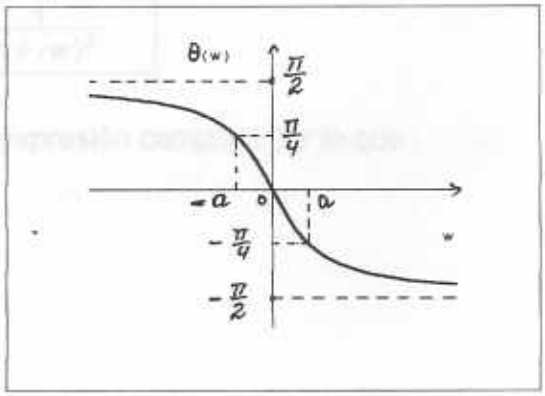
c) $F(w)$ puede expresarse como : $F(w) = |F(w)|\, e^{i\theta(w)}$

En consecuencia : $\boxed{F(w) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + w^2}}\, e^{-i\arctan\left(\frac{w}{a}\right)}}$

d) La representación gráfica de $|F(w)|$ y de $\theta(w)$ se presenta a continuación :



($|F(w)|$ vs. w)



($\theta(w)$ *vs.* w)

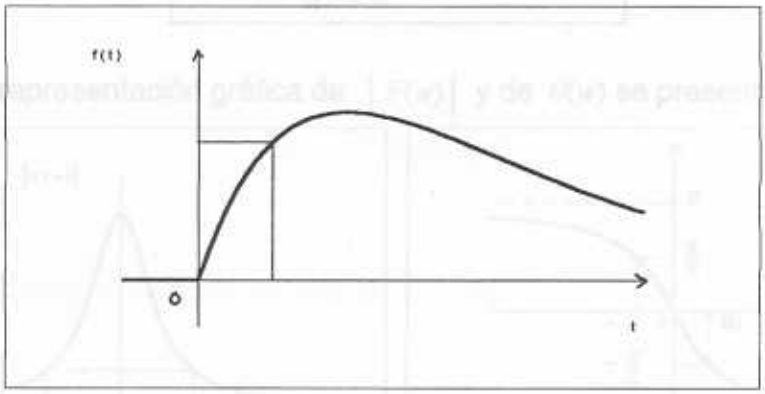
e) Nótese de nuevo la paridad de la función $|F(w)|$ y la Imparidad de la función $\theta(w)$. Es decir,

$$|F(w)| = |F(-w)| \quad ; \quad \theta(w) = -\theta(-w)$$

Ejemplo 7:
Calcule la transformada de Fourier de la señal aperiódica definida por :

$$f(t) = t\,e^{-at}U(t) \quad , \quad a > 0$$

Solución:
Su gráfica se muestra a continuación:



$$f(t) = t\,e^{-at}U(t) \quad , \quad a > 0$$

La transformada de Fourier de esta señal será:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} t\,e^{-at}U(t)\,e^{-iwt}dt$$

Como: $t\,e^{-at}U(t) = 0$, para $t \in (-\infty, 0)$, la transformada de Fourier se reduce a :

$$F(w) = \int_{0}^{\infty} t\,e^{-at}\,e^{-iwt}dt = \int_{0}^{\infty} te^{-t(a+iw)}dt$$

Integrando por partes, se obtiene:

$$\boxed{F(w) = \frac{1}{(a+iw)^2}}$$

Por lo tanto, en este caso, $F(w)$ es una expresión compleja por lo que :

a) $\left|F(w)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{(a^2+w^2)^2}} = \dfrac{1}{a^2+w^2}$

b) $\tan\theta(w) = \left(\dfrac{\operatorname{Im}F(w)}{\operatorname{Re}F(w)}\right)$

Pero también : $\theta(w) = \dfrac{0^\circ}{2\arctan\left(\frac{w}{a}\right)} = -2\arctan\left(\frac{w}{a}\right)$

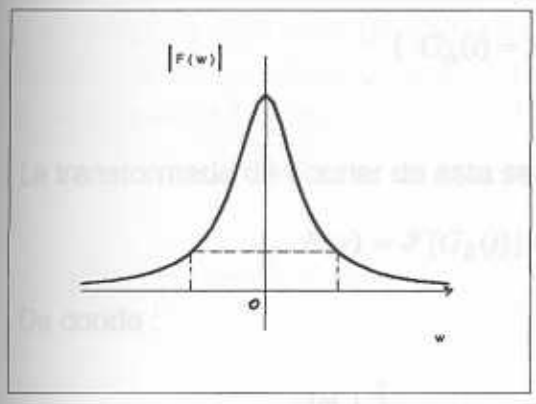
Luego : $\begin{cases} w = a \Rightarrow \theta(w) = -2\arctan(1) = -2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} \\ w = -a \Rightarrow \theta(w) = -2\arctan(-1) = -2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

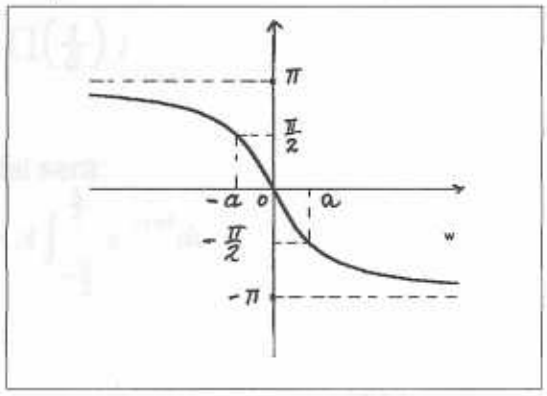
c) La función Densidad Espectral $F(w)$ puede expresarse como :

$F(w) = \left| F(w) \right| e^{i\theta(w)}$. En consecuencia :

$$\boxed{F(w) = \frac{1}{a^2 + w^2}\, e^{-i2\arctan\left(\frac{w}{a}\right)}}$$

d) La representación gráfica de $\left| F(w) \right|$ y de $\theta(w)$ se presenta a continuación :





($|F(w)| = \frac{1}{a^2+w^2}$) ($\theta(w) = -2\arctan\frac{w}{a}$)

e) Nótese de nuevo la paridad de la función $\left| F(w) \right|$ y la Imparidad de la función $\theta(w)$. Es decir,

$$\left| F(w) \right| = \left| F(-w) \right| \quad ; \quad \theta(w) = -\theta(-w)$$

= oo =

Ejemplo 8:

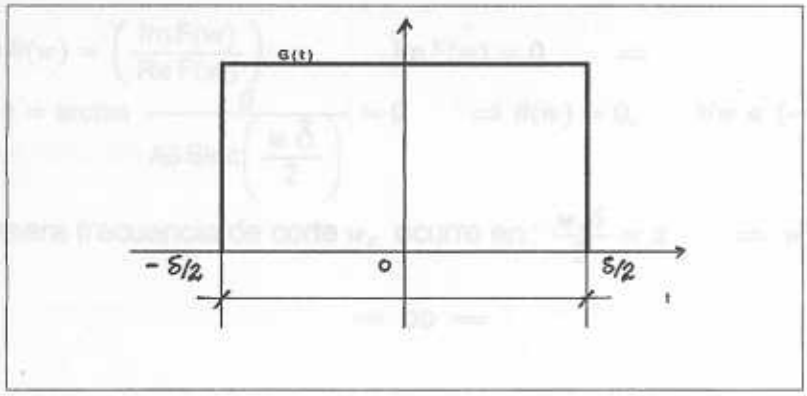
Calcule la transformada de Fourier de la función "Pulso Rectangular", o " *Gate function* $G_\delta(t)$", también identificada por : $G_\delta(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)$

y definida por :

$$G_\delta(t) = \begin{cases} A\,, & \text{si } \left| t \right| < \frac{\delta}{2} \\ 0\,, & \text{si } \left| t \right| > \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

Solución:

La gráfica de $G_\delta(t)$ se muestra a continuación:



$$\left(G_\delta(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right) \right)$$

La transformada de Fourier de esta señal será:

$$F(w) = \mathcal{F}[G_\delta(t)] = A\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} e^{-iwt}dt$$

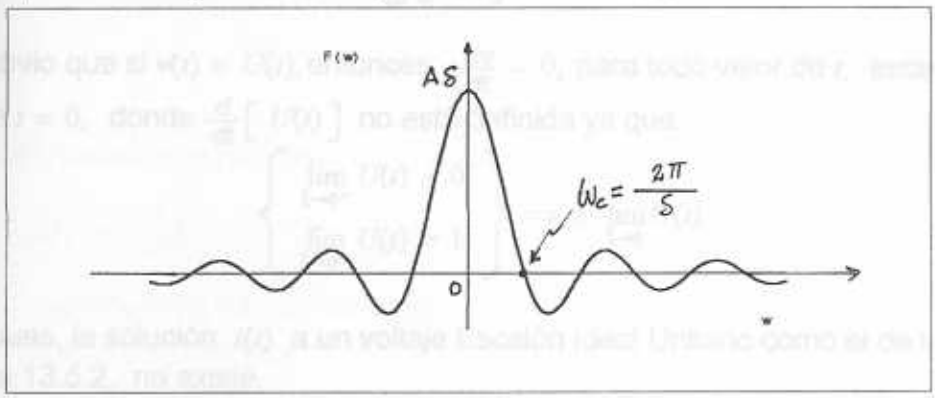
De donde :

$$F(w) = A\frac{e^{-iwt}}{-iw}\Bigg|_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} = \frac{A}{-iw}\left[e^{-iw\frac{\delta}{2}} - e^{iw\frac{\delta}{2}}\right] = A\,\delta\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{w\delta}{2}\right)}{\left(\frac{w\delta}{2}\right)}$$

Por lo tanto :

$$\boxed{F(w) = A\,\delta\,\operatorname{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)}$$

Obsérvese que, en este caso, $F(w)$ es una expresión real, por lo que puede ser representada gráficamente por una sóla curva, como se ilustra a continuación:



$F(w)$ =Transformada de Fourier de la función Pulso Rectangular

a) $F(w) = A\,\delta\,\operatorname{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$

$b)$ $\tan\theta(w) = \left(\dfrac{\text{Im F(w)}}{\text{Re F(w)}}\right)$; $\quad \text{Im}F(w) = 0 \Rightarrow$

$$\theta(w) = \arctan \frac{0}{A\delta\,\text{Sinc}\left(\dfrac{w\,\delta}{2}\right)} = 0 \quad \Rightarrow \theta(w) = 0, \quad \forall w \in (-\infty, \infty)$$

$c)$ Primera frecuencia de corte w_c ocurre en : $\dfrac{w_c\delta}{2} = \pi \quad \Rightarrow w_c = \dfrac{2\pi}{\delta}$

= oo =

13.4) LA FUNCIÓN IMPULSO DE DIRAC: $\delta(t)$

Consideremos un voltaje Escalón Unitario $U(t)$ aplicado a un condensador C como muestran las figuras 13.5.1 y 13.5 .2

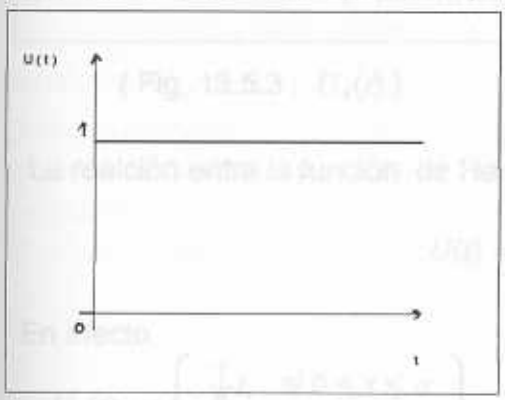


Fig. 13.5.1) : Heaviside$(t) = U(t)$

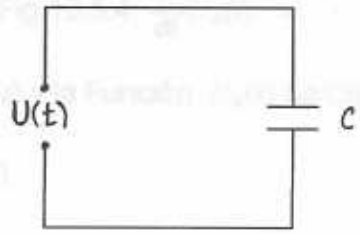


Fig. 13.5.2

La corriente a través del condenador C está dada por :

$$i(t) = C\frac{d}{dt}\left[\, v(t)\,\right] \qquad \ldots\ldots(1)$$

Es obvio que si $v(t) = U(t)$, entonces: $\dfrac{dv}{dt} = 0$, para todo valor de t, excepto para $t = 0$, donde $\dfrac{d}{dt}\left[\, U(t)\,\right]$ no está definida ya que:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 0^-} U(t) = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^+} U(t) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{t\to 0} U(t)$$

Así pues, la solución $i(t)$ a un voltaje Escalón Ideal Unitario como el de la figura 13.5.2, no existe.

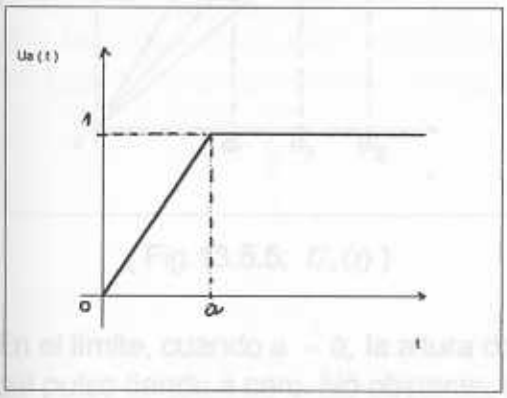
Estamos por lo tanto ante una seria dificultad matemática, la cual se deriva tanto de la fuente de voltaje ideal aplicada $U(t)$, como de los elementos presentes en el circuito (capacitrivo puro).

A efectos de resolver esta dificultad matemática, consideremos, una fuente no

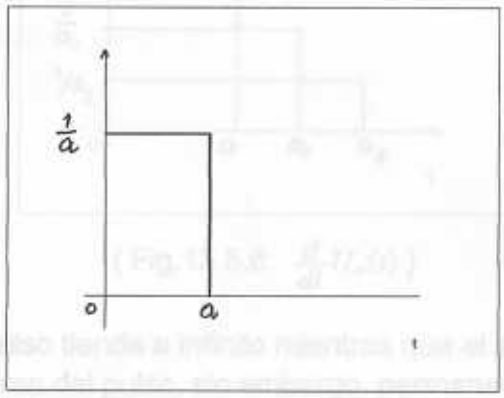
ideal $U_a(t)$ como la mostrada en la figura 13.5.3), definida por :

$$U_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}t, & \text{si } 0 \le t \le a \\ 1, & \text{si } t \ge a \end{cases}$$

y tomemos el límite cuando $a \to 0$.



(Fig. 13.5.3 : $U_a(t)$)



(Fig.13.5.4: $\frac{d}{dt}U_a(t)$ *vs.* t)

La realción entre la función de Heaviside $U(t)$ y la Función $U_a(t)$ de Dirac, es:

$$U(t) = \lim_{a \to 0} U_a(t)$$

En efecto,

$$U_a(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{a}t, & \text{si } 0 \le t \le a \\ 1, & \text{si } t \ge a \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}U_a(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{a}, & \text{si } 0 < t < a \\ 0, & \text{si } t > a \end{array} \right.$$

Luego,

$$U(t) = \lim_{a \to 0} U_a(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}[U(t)] = \lim_{a \to 0}\left[\frac{d}{dt}U_a(t)\right] \Rightarrow$$

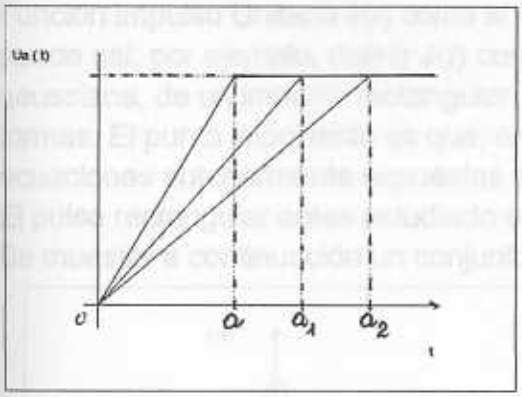
$$\frac{d}{dt}[U(t)] = \lim_{a \to 0}\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{a}, & \text{si } 0 < t < a \\ 0, & \text{si } t > a \end{array} \right.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1) , se obtiene :

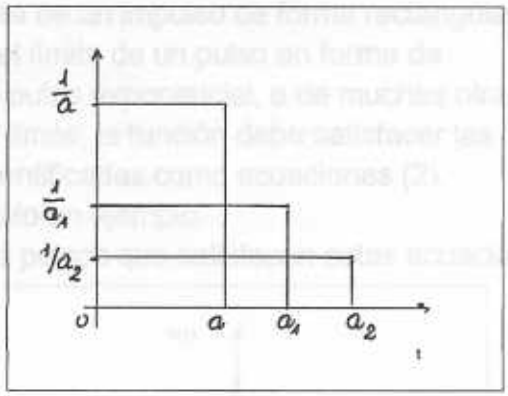
$$i(t) = C\frac{d}{dt}[U(t)] = \lim_{a \to 0}\left[\frac{d}{dt}U_a(t)\right] = C\lim_{a \to 0}\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{a}, & \text{si } 0 < t < a \\ 0, & \text{si } t > a \end{array} \right\}$$

a) La corriente a través del capacitor será un impulso de corriente como se muestra en la figura 13.5.4): pulso rectangular de altura $\frac{1}{a}$ y ancho a.

b) Como el parámetro "a" varía, la gráfica del pulso rectangular varía también, pero el área bajo la curva permanece constante. Las figuras 13.5.5 y 13.5.6 ilustran lo aquí expuesto.



(Fig.13.5.5: $U_a(t)$)



(Fig.13.5.6: $\frac{d}{dt}U_a(t)$)

En el límite, cuando $a \to 0$, la altura del pulso tiende a infinito mientras que el ancho del pulso tiende a cero. No obstante, el área del pulso, sin embargo, permanece constante e igual a: $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = 1$.

Como la derivada de un Escalón Unitario Ideal no existe, definamos la función **Impulso Unitario** com el límite de la derivada de la función **Escalón Unitario no Ideal** $U_a(t)$, cuando $a \to 0$.

Si dicha función Impulso Unitario se designa por $\delta(t)$, entonces :

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{a \to 0} \frac{d}{dt}[U_a(t)]}$$

Pero, $\frac{d}{dt}[U_a(t)]$ es un Pulso Rectangular de altura $\frac{1}{a}$ y ancho a, por lo que:

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \frac{d}{dt}\left[\ U_a(t)\ \right] = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a}\left[\ U(t) - U(t-a)\ \right]$$

En el límite, cuando $a \to 0$, la función $\delta(t)$ asume la forma de un pulso de altura infinita y ancho cero. El área de dicho pulso, sin embargo, permanece unitaria.

En consecuencia, la función $\delta(t)$ existe sólamente en $t = 0$ y es nula para $t \neq 0$.

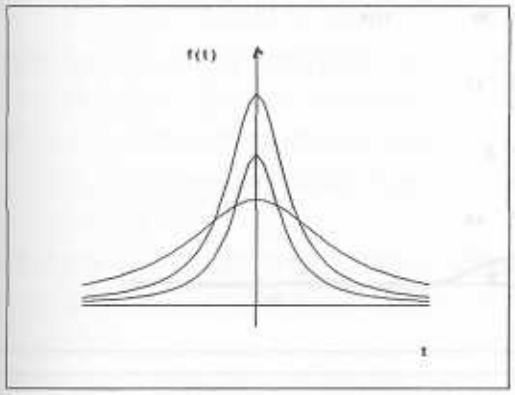
Así, $\delta(t)$ puede expresarse por el siguiente par de ecuaciones :

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta(t) = \begin{cases} \infty, & si \quad t = 0 \\ 0\ , & si \quad t \neq 0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \end{array}} \quad \cdots\cdot(2)$$

Estas dos últimas ecuaciones pueden tomarse como una definición de la **Función Impulso Unitario** $\delta(t)$ (o Delta de Dirac).

Esta definición es general, y representa al impuilso unitario como el resultado de un límite, sin importar la forma real del impulso; es decir, no es necesario definir la

Función Impulso Unitario $\delta(t)$ como el límite de un impulso de forma rectangular. Se puede así, por ejemplo, definir $\delta(t)$ como el límite de un pulso en forma de gaussiana, de un impulso rectangular, un pulso exponencial, o de muchas otras formas. El punto importante es que, en el límite, la función debe satisfacer las dos ecuaciones anteriormente expuestas e identificadas como ecuaciones (2).
El pulso rectangular antes estudiado es sólo un ejemplo.
Se muestra a continuación un conjunto de pulsos que satisfacen estas ecuaciones :



(Figura a)

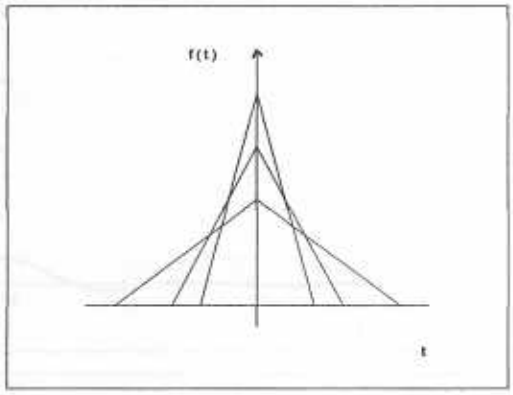
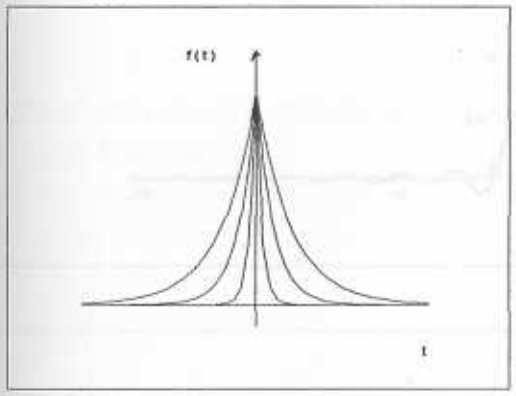
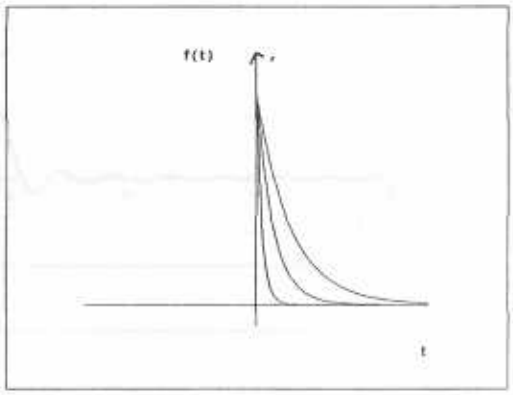


Figura b)



(Figura c)



(Figura d)

Figura a : Secuencia de pulsos gaussianos : $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0}(\frac{1}{\tau})e^{-\pi t^2/\tau^2}$

Figura b : Secuencia de pulsos triangulares : $\begin{cases} \delta(t) = \lim_{\tau \to 0} A\left[1 - \frac{|t|}{\tau}\right], & |t| < \tau \\ 0 \ , & |t| > \tau \end{cases}$

Figura c : Secuencia de pulsos exponenciales (ambos lados): $\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{2\tau} e^{(-|t|/\tau)}$

Figura d : Secuencia de pulsos exponenciales (un sólo lado):

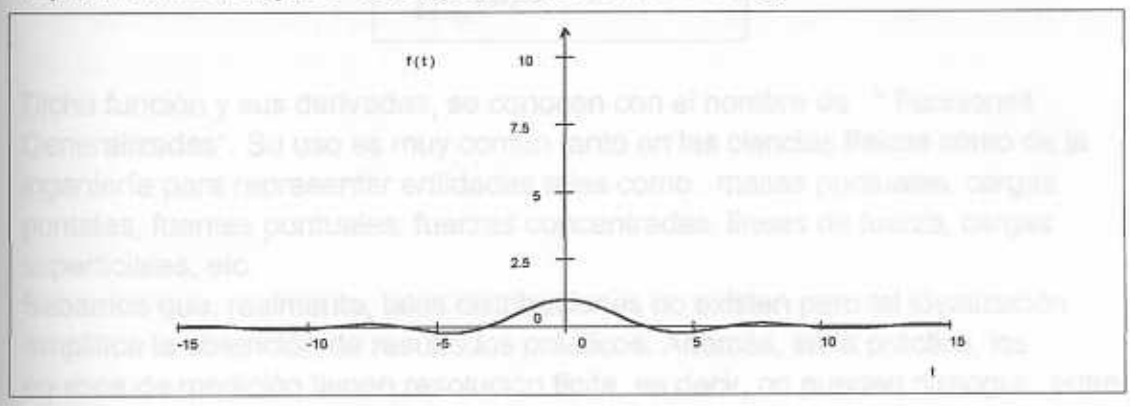
$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} e^{-|t|/\tau} U(t)$$

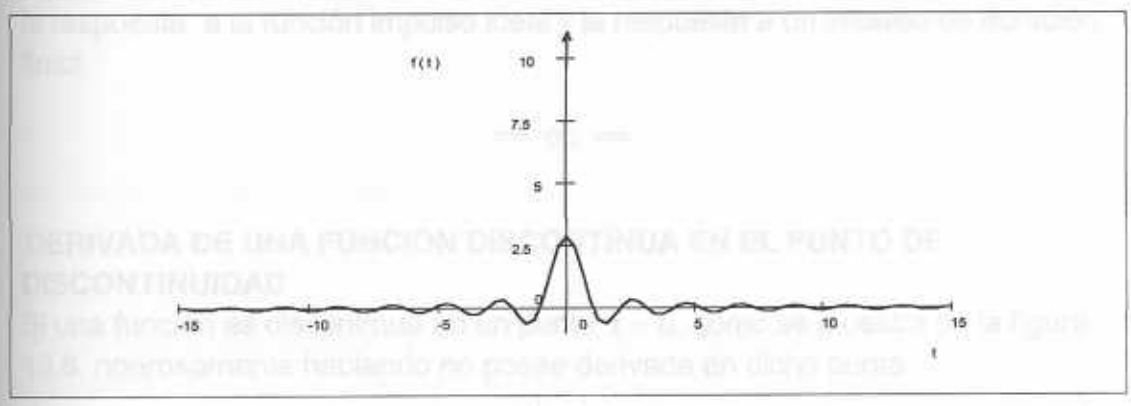
A continuación se presenta la generación de la función Impulso $\delta(t)$ como el límite

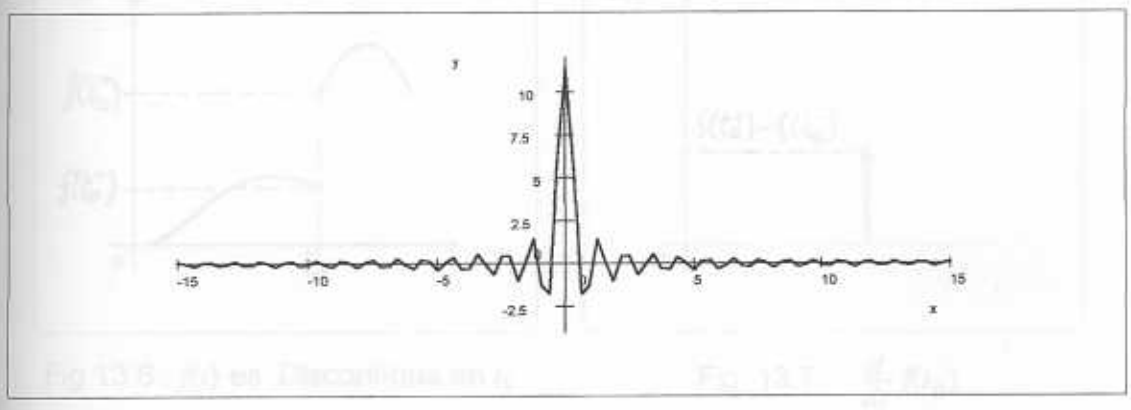
de la secuencia de una función de Muestreo $\left[\textit{Función Sinc}(kt)\right]$:

En efecto, se puede demostrar que $\frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\text{Sinc}(kt)dt = 1$

Como k crece indefinidamente, la amplitud de la función $\left(\frac{k}{\pi}\right)\text{Sinc}(kt)$ se hace cada vez mayor. La función oscila cada vez más rápido y decrece muy rápidamente al alejarse del origen, como lo ilustra la siguiente secuencia :







OBSERVACIÓN:

Recuérdese que la Función Impulso no es una función en el estricto sentido matemático, donde se requiere que toda función sea definida para todo valor de t. Sin embargo, su uso formal permite interpretar fenómenos físicos.

La función impulso de Dirac $\delta(t)$, es sin duda un nuevo concepto de función, definida por el par de ecuaciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta(t) = \begin{cases} \infty, & si \quad t = 0 \\ 0\,, & si \quad t \neq 0 \end{cases} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \end{array}}$$

Dicha función y sus derivadas, se conocen con el nombre de . " Funciones Generalizadas". Su uso es muy común tanto en las ciencias físicas como de la ingeniería para representar entidades tales como : masas puntuales, cargas puntales, fuentes puntuales, fuerzas concentradas, líneas de fuerza, cargas superficiales, etc.

Sabemos que, realmente, tales distribuciones no existen pero tal idealización simplifica la obtención de resultados prácticos. Además, en la práctica, los equipos de medición tienen resolución finita, es decir, no pueden distinguir entre la respuesta a la función impulso ideal y la respuesta a un impulso de duración finita.

= oo =

13.5) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DISCONTÍNUA EN EL PUNTO DE DISCONTINUIDAD

Si una función es discontínua en un punto $t = t_0$, como se muestra en la figura 13.6, rigurosamente hablando no posee derivada en dicho punto.

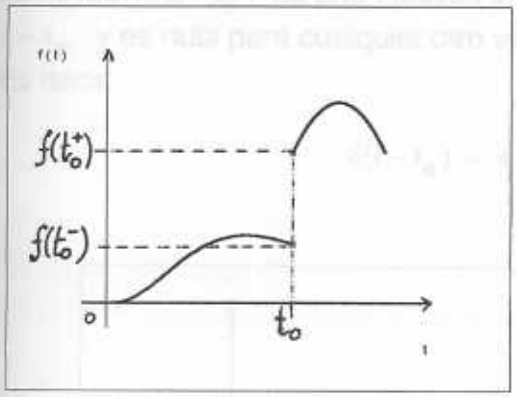


Fig.13.6 : $f(t)$ es Discontínua en t_0

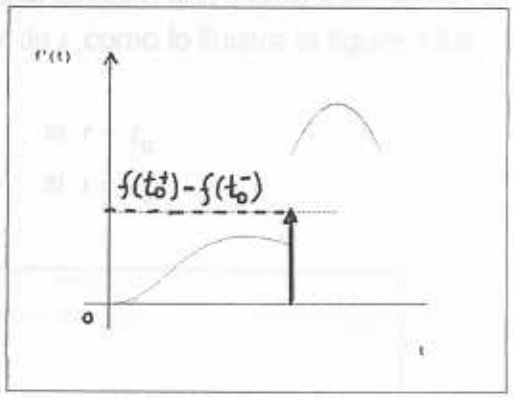


Fig. 13.7 : $\frac{d}{dt} f(t_0)$

Recuerdese que la función escalón $U(t)$, es discontínua en $t = 0$, por lo que no es derivable en el origen, en el estricto sentido matemático. No obstante, tal como ya se demostró, si consideramos la función escalón como el límite de una secuencia de funciones contínuas, se obtiene que:

$$\delta(t) = \lim_{a\to 0} \frac{d}{dt}\left[\, U_a(t) \,\right] = \lim_{a\to 0} \left[\, U(t) - U(t-a) \,\right]$$

Se encontró así que la derivada de una función escalón es un pulso de longitud unitaria. En consecuencia, podemos generalizar este concepto diciendo que toda función posée derivada en un punto de discontínuidad y que dicha derivada es una función Impulso de magnitud igual al valor del salto de la función en el punto de discontinuidad t_0.

Así, para una función Escalón, el valor del salto en el punto de discintinuidad es 1, por lo que la derivada de $U(t)$ es un Impulso Unitario en $t = 0$. Es decir :

$$\frac{d}{dt} U(t)\Big|_{t=0} = (1-0)\,\delta(t) = \delta(t)$$

De donde se obtiene: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = U(t)$

En el caso de la función $f(t)$ arriba mostrada, la misma tiene un salto en $t = t_0$ La amplitud de dicho salto está dada por : $f(t_0^+) - f(t_0^-)$. En consecuencia, la derivada de $f(t)$ en $t = t_0$ será :

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(t)\Big|_{t=t_0} = \left[\, f(t_0^+) - f(t_0^-) \,\right] \delta(t - t_0)}$$

tal como se ilustra en la figura 13.7 arriba mostrada.

== oo ==

13.6) PROPIEDAD DE MUESTREO DE LA FUNCIÓN IMPULSO

La función $\delta(t - t_0)$ es una Función Impulso Unitario que existe sólamente para $t = t_0$ y es nula para cualquier otro valor de t ,como lo iluistra la figura 13.8 Es decir :

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 1 \ , \ \text{si } t = t_0 \\ 0 \ , \ \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$$

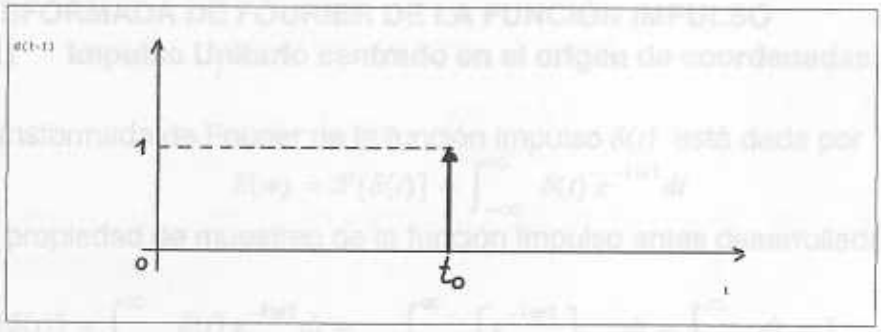


Fig. 13.8 : $\delta(t - t_0)$

En consecuencia, $g(t) = f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)\,\delta(t-t_0)$

Es decir, el producto de una función $f(t)$ por un impulso $\delta(t-t_0)$, es también un impulso de longitud $f(t_0)$, ubicado en $t = t_0$. (Ver figura 13.9)

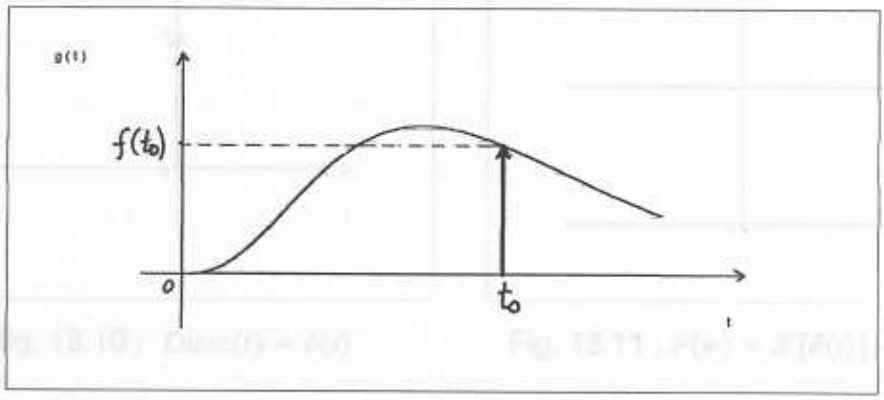


Fig.13.9 : $g(t) = f(t)\,\delta(t-t_0) = f(t_0)$

Luego :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0) \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)}$$

Otras propiedades de $\delta(t-t_0)$ son:

$$a)\ \boxed{\int_{t_0^-}^{t_0^+} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)} \qquad b)\ \boxed{\int_{0^-}^{0^+} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(0)}$$

$$c)\ \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\,\delta(t)\,dt = f(-t_0)}$$

= oo =

13.7) TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN IMPULSO

13.7.1) Impulso Unitario centrado en el origen de coordenadas: $\delta(t)$

La Transformada de Fourier de la función Impulso $\delta(t)$ está dada por :

$$F(w) = \mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,e^{-iwt}\,dt$$

Por la propiedad de muestreo de la función Impulso antes desarrollada, es evidente que:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,e^{-iwt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-iwt}\right]_{t=0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt = 1, \qquad \forall w$$

Las gráficas correspondientes se muestran a continuación (Ver figuras 13.10 y 3.11)

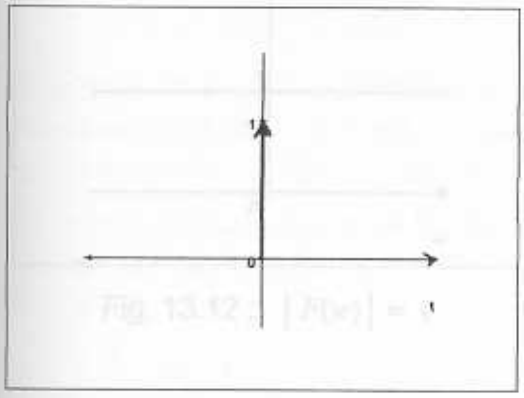


fig. 13.10 : $\text{Dirac}(t) = \delta(t)$

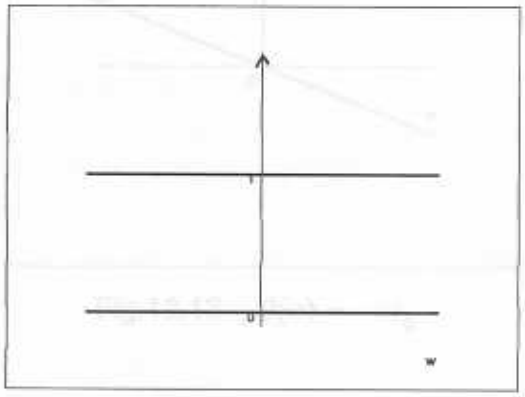


Fig. 13.11 : $F(w) = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \forall w$

Obsérvese que la Función Impulso tiene una Densidad Espectral $F(w)$ uniforme sobre todo el dominio de la frecuancia. En otras palabras, la Función Impulso contiene componentes de frecuencia, todas con la misma amplitud para todo $w \in (-\infty, \infty)$.

13.7.2) Impulso Unitario desplazado a $t = t_0$: $f(t) = \delta(t - t_0)$

En este caso :

$$F(w) = \mathcal{F}\left[\, \delta(t - t_0) \,\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, e^{-iwt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw(t_0)} dt \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\left[\, \delta(t - t_0) \,\right] = e^{-iw(t_0)} \int_{-\infty}^{\infty} (1) dt = e^{-iw(t_0)} \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-iwt_0}}$$

En este caso, $F(w)$ es una función compleja tal que :

$$\left| F(w) \right| = \left| \cos wt_0 - i \operatorname{sen} wt_0 \right| = 1$$

$$\theta(w) = \arctan \frac{[-\operatorname{sen}(w\, t_0)]}{\cos(w\, t_0)} = -wt_0$$

Las figuras 13.12 y 13.13 muestran las gráficas de $\left| F(w) \right|$ y de $\theta(w)$, respectivamente.

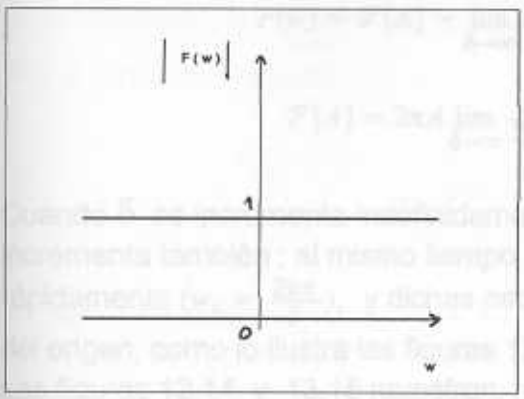


Fig. 13.12 : $|F(w)| = 1$

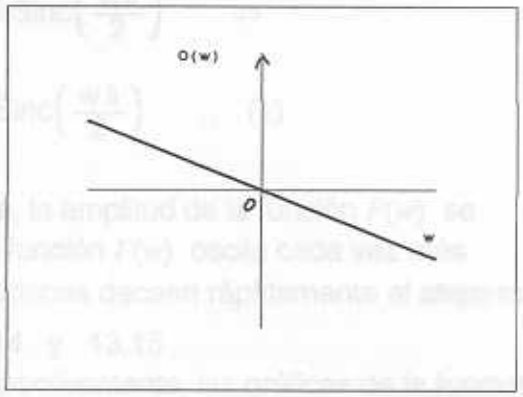


Fig.13.13 : $\theta(w) = -wt_0$

13.8) TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA CONSTANTE

La función $f(t) = A$, con $A = constante$, (Figura 13.11), no satisface la condición de Integrabilidad Absoluta de Dirchclet, sin embargo tiene transformada de Fourier en el límite.

A tal efecto, consideremos la transformada de Fourier de la función Compuerta *(Gate Function):* Pulso de altura A y de δ segundos de duración (Figura 13.12), representada en matemáticas por cualquiera de las siguientes expresiones:

$$A\,G_\delta(t) = \prod\left(\frac{A}{\delta}\right) = \begin{cases} A, & \text{si } t < \left|\frac{\delta}{2}\right| \\ 0, & \text{si } t > \left|\frac{\delta}{2}\right| \end{cases}$$

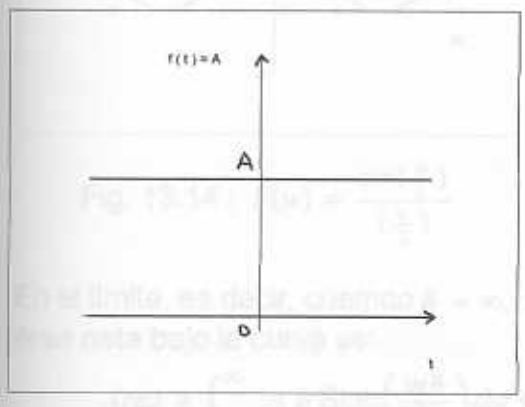


Fig.13.12 : $f(t) = A$

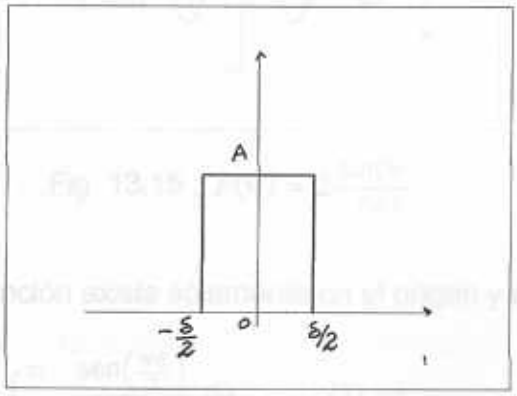


Fig. 13.13 : $A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)$

En el límite, cuando $\delta \to \infty$, la función Compuerta tiende a una Función Constante de magnitu A, es decir, $A = \lim\limits_{\delta\to\infty} \prod\left(\frac{A}{\delta}\right)$

La transformada de Fuorier de una constante A, es entonces, la transformada de la función $\prod\left(\frac{A}{\delta}\right)$, cuando $\delta \to \infty$.

Esta transformada ya fue calculada y su valor es :

$$F(w) = \mathcal{F}[A] = \lim_{\delta\to\infty} A\,\delta\,\text{Sinc}\left(\frac{w\,\delta}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}[A] = 2\pi A \lim_{\delta\to\infty} \frac{\delta}{2\pi}\text{Sinc}\left(\frac{w\,\delta}{2}\right) \quad \ldots.(1)$$

Cuando δ se incrementa indefinidamente, la amplitud de la función $F(w)$ se incrementa también ; al mismo tiempo, la función $F(w)$ oscila cada vez más rápidamente ($w_c = \frac{2k\pi}{\delta}$), y dichas oscilaciones decaen rápidamente al alejarse del origen, como lo ilustra las figuras 13.14 y 13.15 .

Las figuras 13.14 y 13.15 muestran, respectivamente, las gráficas de la funcion $F(w)$ para :

$$\begin{cases} Fig.\,13.14: \quad A = 1,\ \delta = 1 \Rightarrow F(w) = \text{Sinc}\left(\frac{w}{2}\right) = 2\dfrac{\text{sen}(\frac{w}{2})}{(\frac{w}{2})} \\ Fig.\,13.15: \quad A = 1,\ \delta = 2 \Rightarrow F(w) = 2\,\text{Sinc}(w) = 2\dfrac{\text{sen}w}{w} \end{cases}$$

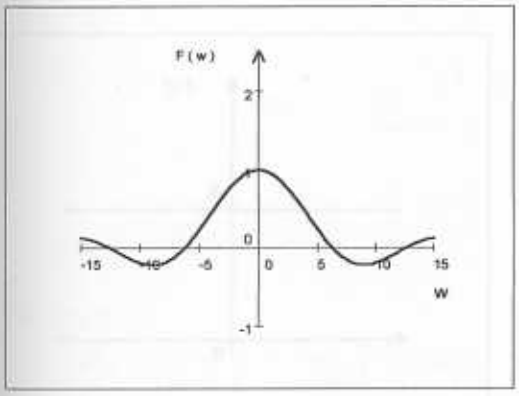


Fig. 13.14 : $F(w) = \dfrac{\sin(\frac{w}{2})}{(\frac{w}{2})}$

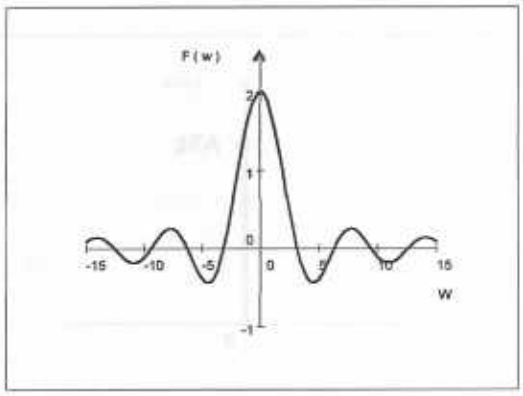


Fig. 13.15 : $F(w) = 2\dfrac{\sin(w)}{(w)}$

En el límite, es decir, cuamdo $\delta \to \infty$, la función existe sólamente en el origen y el área neta bajo la curva es:

$$Área = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\delta\,\text{Sinc}\left(\frac{w\,\delta}{2}\right)dw = A\,\delta\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{w\,\delta}{2}\right)}{\left(\frac{w\,\delta}{2}\right)}\,dw \quad \ldots(2) \Rightarrow$$

Para cacular esta integral, hagamos el cambio de variable : $\left(\frac{w\,\delta}{2}\right) = x$,

con lo cual : $w = \frac{2x}{\delta} \quad \Rightarrow \quad dw = \frac{2}{\delta}dx \quad \Rightarrow$ sustituyendo en (2)

$$Área = A\,\delta\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{(x)}\,\frac{2}{\delta}dx = 2A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{(x)}\,dx = 2\pi A$$

En consecuencia, $\lim\limits_{\delta\to\infty} (A\delta)\ \text{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right) = 2\pi A$

Por lo tanto, sustituyendo en (1) :

$$F(w) = \mathcal{F}[A] = \lim_{\delta\to\infty} A\,\delta\ \text{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right) = 2\pi A\ \delta(w)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\,A\,\right] = 2\pi A\ \delta(w)}$$

En resumen, cuando $f(t)$ es igual a una constante, su contenido en frecuencia tiene una sola componente en $w = 0$. Este es un resultado lógico ya que una función constante es una señal d-c $(w = 0)$ y no tiene ninguna otra componente.

NOTA:

Nótese que, si $A = 1$, entonces : $\boxed{\mathcal{F}\left[\,1\,\right] = 2\pi\ \delta(w)}$

A continuación se muestra la gráfica de una función constante (figura 13.16) y su respectivaTransformada de Fourier (figura 13.17)

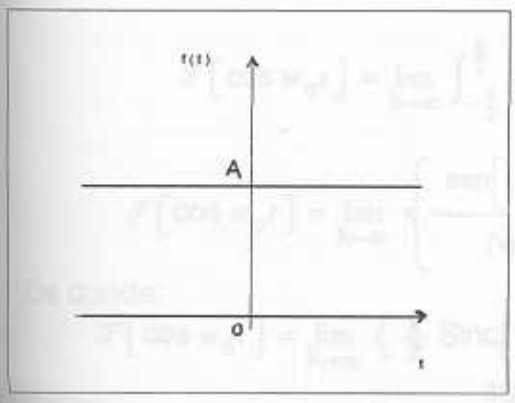


Fig.13.16 : $f(t) = A$

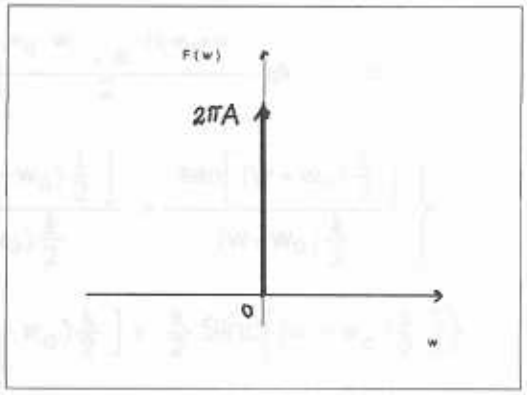


Fig.13.17 : $F(w) = 2\pi A\ \delta(w)$

== oo ==

13.9) TRANSFORMADA DE FOURIER DE LAS FUNCIONES : cos $w_0 t$ y sen $w_0 t$

Las fuciones cos $w_0 t$ y sen $w_0 t$ no satisfacen las condiciones de Integrabilidad Absoluta, por lo que no tiene Transformada de Fourier en el sentido de la definición de ésta. Sin embargo, se puede encontrar una transformada de Fourier para estas funciones en el límite, exactamente de la misma manera en que se hizo para la transformada de una función constante.

Caso $f(t) = \cos w_0 t$:

En efecto, supongamos que esta función està definida en el intervalo $\left(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$;

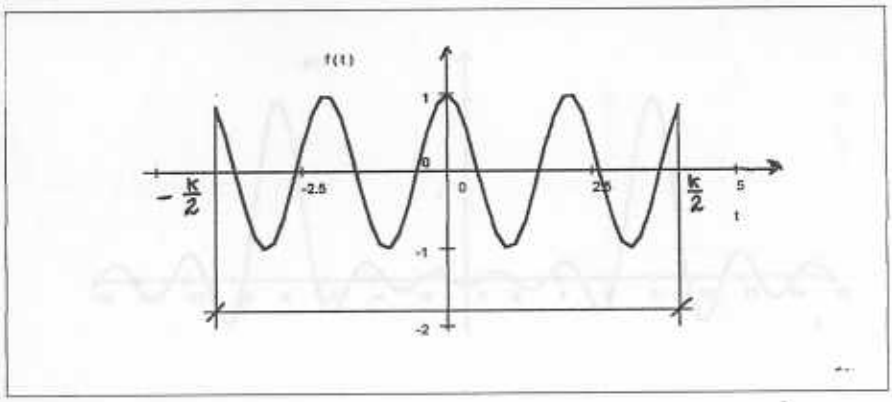


Fig.13.22 : $f(t) = \cos w_0 t \ , \ t \in \left[-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right]$

entonces :

$$\mathcal{F}\left[\cos w_0 t\right] = F(w) = \lim_{k\to\infty} \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} \cos(w_0 t)\, e^{-iwt}\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\left[\cos w_0 t\right] = \lim_{k\to\infty} \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} \frac{e^{iw_0 t} + e^{-iw_0 t}}{2}\, e^{-iwt}\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\left[\cos w_0 t\right] = \lim_{k\to\infty} \int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} \frac{e^{it(w_0 - w)} + e^{-it(w_0 + w)}}{2}\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\left[\cos w_0 t\right] = \lim_{k\to\infty} \left\{ \frac{\operatorname{sen}\left[(w - w_0)\frac{k}{2}\right]}{(w - w_0)\frac{k}{2}} + \frac{\operatorname{sen}\left[(w + w_0)\frac{k}{2}\right]}{(w + w_0)\frac{k}{2}} \right\}$$

De donde:

$$\mathcal{F}\left[\cos w_0 t\right] = \lim_{k\to\infty} \left\{ \frac{k}{2} \operatorname{Sinc}\left[(w - w_0)\frac{k}{2}\right] + \frac{k}{2} \operatorname{Sinc}\left[(w + w_0)\frac{k}{2}\right] \right\}$$

aquí

Como se demostró en el caso de la Transformada de Fourier de una constante, la función de muestreo $\operatorname{Sinc}(x)$ se transforma en una función Impulso de acuerdo con la ecuación:

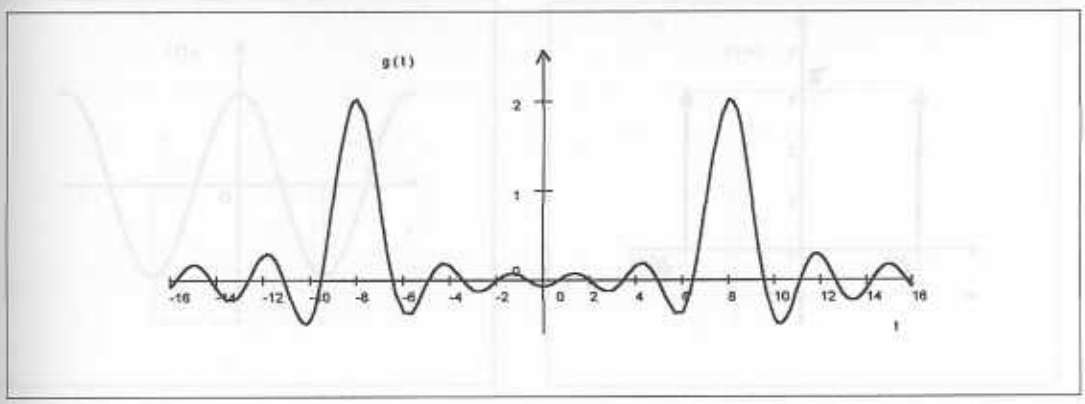
$$\lim_{k\to\infty} \left[\frac{k}{\pi} \operatorname{Sinc}(kt) \right] = \delta(t)$$

Es interesante observar como se comporta el espectro durante el proceso del límite, es decir, cuando $k \to \infty$.

Para un valor finito de k, la función Densidad Espectral está dada por la ecuación:

$$\mathcal{F}\left[\cos w_0 t\right] = \lim_{k\to\infty} \left\{ \frac{k}{2} \operatorname{Sinc}\left[(w - w_0)\frac{k}{2}\right] + \frac{k}{2} \operatorname{Sinc}\left[(w + w_0)\frac{k}{2}\right] \right\}$$

cuya gráfica se muestra a continuación para el caso particular: $\begin{cases} \frac{k}{2} = 2 \\ w_0 = 8 \end{cases}$



$$\left(\text{ Gráfica de : } g(t) = \frac{\text{sen}2(t+8)}{t+8} + \frac{\text{sen}2(t-8)}{t-8} \right)$$

Nótese que existe una gran concentración de energía en las cercanías de las frercuencias $\pm w_0$. Cuando se incrementa el intervalo k, la Densidad Espectral incrementa su concentración alrededor de $\pm w_0$. En el límite, cuando $k \to \infty$, la Densidad Espectral $F(w)$ es cero en todo valor de w, excepto para las frecuencias $\pm w_0$ donde es infinita y tal que el área bajo la curva Sinc correpondiente, es π. En efecto, el valor de dicha área es :

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{2} \text{Sinc}\left[\left(w_0 - w\right) \frac{k}{2} \right] dw \text{ ; hagamos : } \left\{ \left(w_0 - w\right) \frac{k}{2} = x \Rightarrow dw = \frac{2}{k} dx \right\}$$

con lo que : $A = \frac{k}{2} \frac{2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} .dx = \pi$

Por lo tanto:

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\cos w_0 t\right] = \pi\left[\delta(w - w_0) + \delta\left(w + w_0\right)\right]}$$

En forma análoga se obtiene:

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\text{ sen } w_0 t\right] = i\pi\left[\delta\left(w + w_0\right) - \delta\left(w - w_0\right)\right]}$$

En resumen, la transformada de Fourier de las funciones cos $w_0 t$ y sen $w_0 t$ consiste, en cada caso, de dos impulsos de magnitud π, localizados en w_0 y en $-w_0$, como se ilustra en las figuras 13.23 y 13.24, respectivamente :

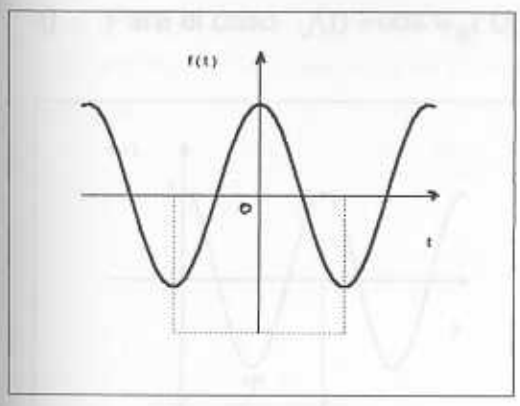


Fig.13.23.1 : $f(t) = \cos w_0 t$

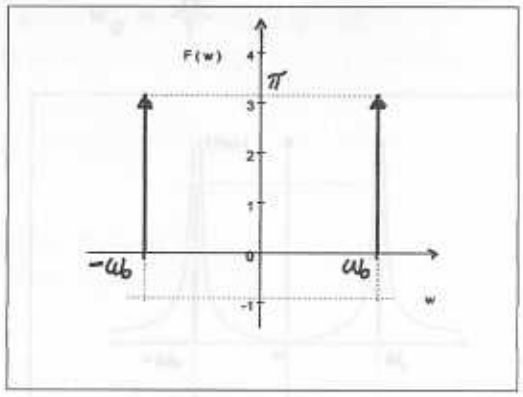


Fig.13.23.2 : $\mathcal{F}\left[\cos w_0 t\right]$

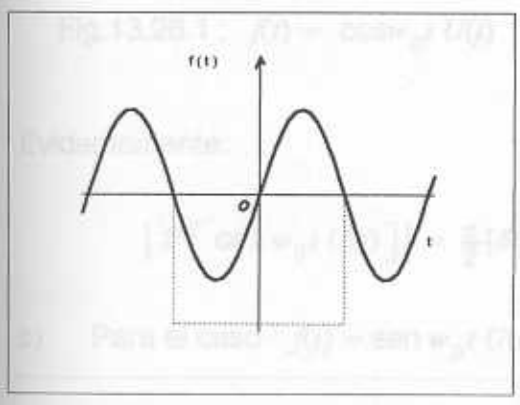


Fig. 13.24.1 : $f(t) =$ sen $w_0 t$

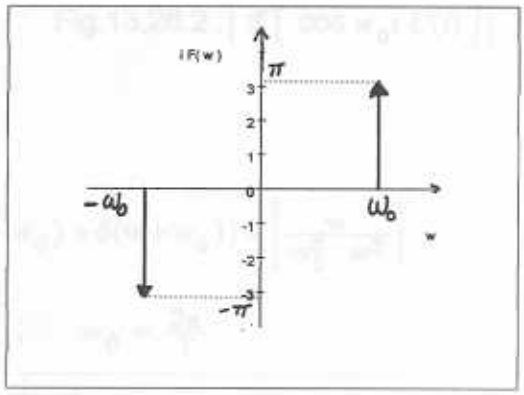


Fig.13.24.2 : $i\,\mathcal{F}\left[\text{ sen } w_0 t\right]$

Nótese que, en el caso de $\mathcal{F}\left[\text{ sen } w_0 t\right]$, se tiene que :

$$iF(w) = -\pi[\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)] = \pi\left[\delta\left(w_0 - w\right) - \delta\left(w_0 + w\right)\right]$$

$$= \text{oo} =$$

13.10) TRANSFORMADA DE FOURIER DE : $\cos w_0 t\, U(t)$ y $\text{sen } w_0 t\, U(t)$

Mediante la propiedad de Convolución, que desarrollaremos posteriormente, se puede demostrar que:

a) $\mathcal{F}\left[\cos w_0 t\, U(t)\right] = \frac{\pi}{2}\left[\delta(w-w_0) + \delta(w+w_0)\right] + \frac{iw}{w_0^2 - w^2}$

b) $\mathcal{F}\left[\text{ sen } w_0 t\, U(t)\right] = \frac{\pi}{2i}\left[\delta(w-w_0) - \delta(w+w_0)\right] + \frac{w_0}{w_0^2 - w^2}$

Las gráficas correspondientes se presentan a continuación (Figuras 13.25 y 13.26)

a) Para el caso $f(t) = \cos w_0 t\, U(t)$; $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

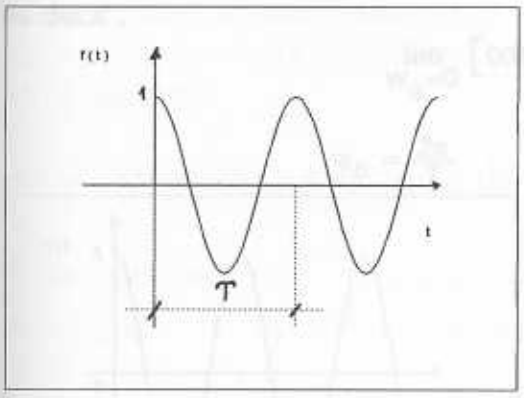


Fig.13.26.1 : $f(t) = \cos w_0 t\, U(t)$

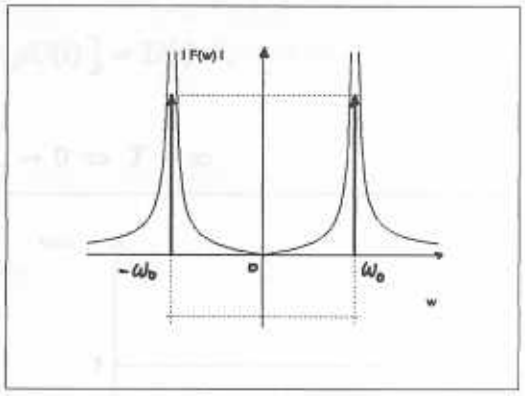


Fig.13.26.2 : $\left| \mathcal{F}\left[\cos w_0 t\, U(t) \right] \right|$

Evidentemente:

$$\left| \mathcal{F}\left[\cos w_0 t\, U(t) \right] \right| = \frac{\pi}{2}[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] + \left| \frac{w}{w_0^2 - w^2} \right|$$

b) Para el caso $f(t) = \text{sen}\, w_0 t\, U(t)$; $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

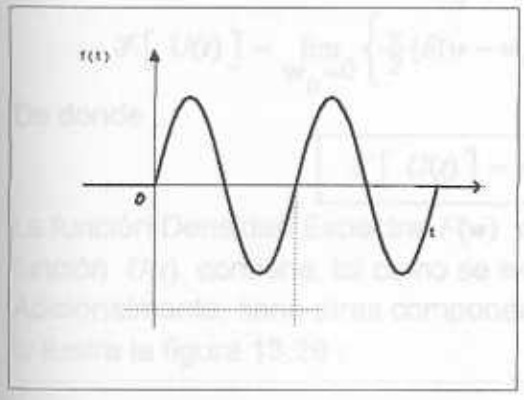


Fig.13.27.1: $f(t) = \text{sen}\, w_0 t\, U(t)$

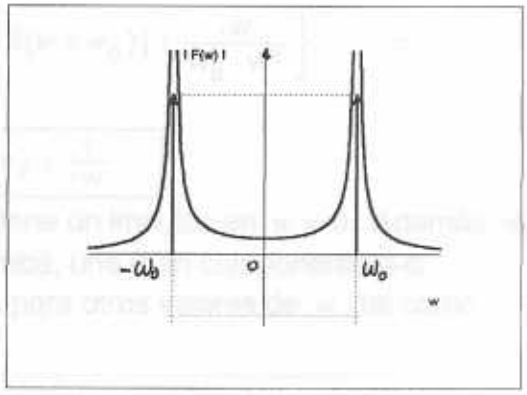


Fig.13.27.2 : $\left| \mathcal{F}\left[\text{sen}\, w_0 t\, U(t) \right] \right|$

Evidentemente:

$$\left| \mathcal{F}\left[\text{sen}\, w_0 t\, U(t) \right] \right| = \frac{\pi}{2}[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] + \left| \frac{w_0}{w_0^2 - w^2} \right|$$

Obsérvese como estas funciones tienen un alto componente de frecuencia en $w = w_0$. También contienen componentes para otras frecuencias.

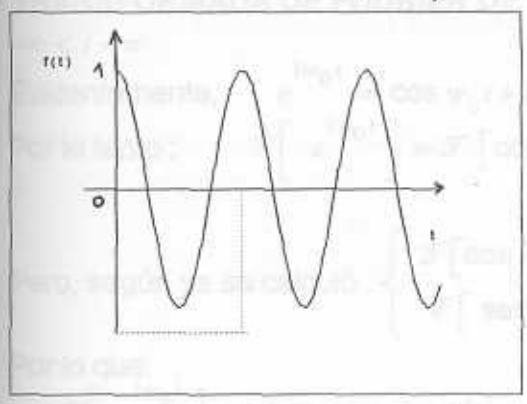
13.11) TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO: $U(t)$

La función Escalón Unitario no satisface la condición de Integrabilidad Absoluta, de

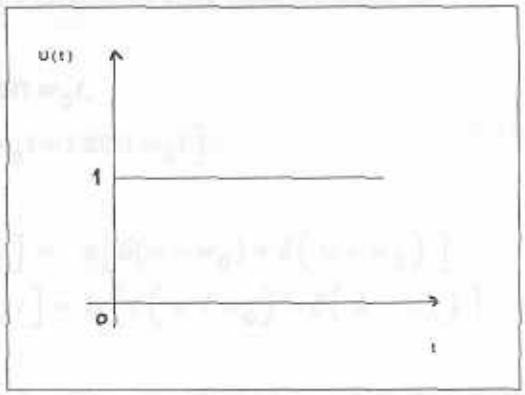
aquí que la transformada de Fourier existe sólamente en el límite.
A tal efecto, obsérvese que la función $\cos w_0 t\, U(t)$ tiende a $U(t)$ cuando $w_0 \to 0$, es decir :

$$\lim_{w_0 \to 0} \left[\cos w_0 t U(t) \right] = U(t) \quad ;$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad w_0 \to 0 \Rightarrow T \to \infty$$



$f(t) = \cos w_0 t\, U(t)$



$(U(t))$

Luego,

$$\mathcal{F}\left[U(t) \right] = \lim_{w_0 \to 0} \mathcal{F}\left[\cos w_0 t U(t) \right] \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}\left[U(t) \right] = \lim_{w_0 \to 0} \left\{ \frac{\pi}{2} [\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] + \frac{iw}{w_0^2 - w^2} \right\} \quad \Rightarrow$$

De donde :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[U(t) \right] = \pi\, \delta(w) + \frac{1}{iw}}$$

La función Densidad Espectral $F(w)$ contiene un impulso en $w = 0$. Además, la función $U(t)$ contiene, tal como se esperaba, una gran componente d-c. Adicionalmente, tiene otras componentes para otros valores de w , tal como lo ilustra la figura 13.28 :

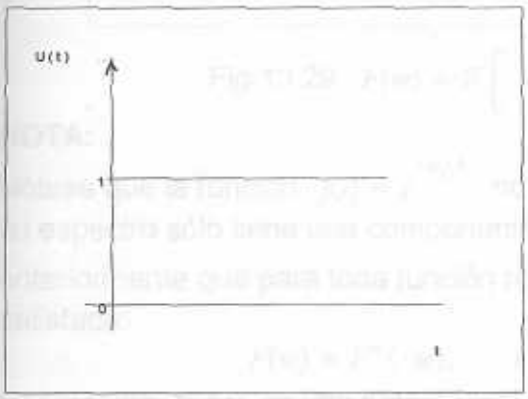


Fig. 13.28.1 : $U(t)$)

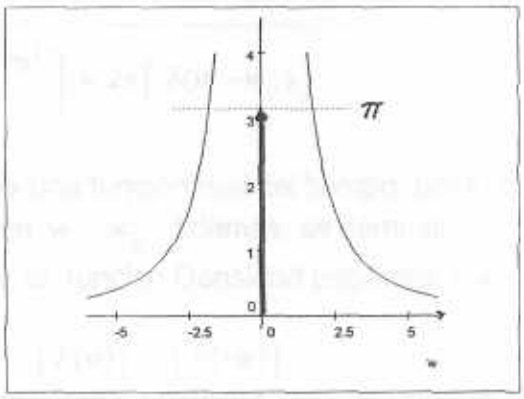


Fig.13.28.2 : $\left| \mathcal{F}\left[U(t) \right] \right|$:

NOTA:

La función $U(t)$ no es una función constante $\left[f(t) = A \right]$, ya que tiene una abrupta discontinuidad en $t = 0$, pues $U(t) = 0$ para $t < 0$. Una función constante es $f(t) = A, \ \forall t \in (-\infty, \infty)$, y sólo tiene una componente de frecuencia en $w = 0$, como ya se demostró.

13.12) TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL: $e^{iw_0 t}$, $-\infty < t - \infty$

Evidentemente, $e^{iw_0 t} = \cos w_0 t + i \operatorname{sen} w_0 t$,

Por lo tanto : $\mathcal{F}\left[e^{iw_0 t} \right] = \mathcal{F}\left[\cos w_0 t + i \operatorname{sen} w_0 t \right]$

Pero, según ya se calculó : $\begin{cases} \mathcal{F}\left[\cos w_0 t \right] = \pi\left[\delta(w - w_0) + \delta\left(w + w_0 \right) \right] \\ \mathcal{F}\left[\operatorname{sen} w_0 t \right] = i\pi\left[\delta\left(w + w_0 \right) - \delta\left(w - w_0 \right) \right] \end{cases}$

Por lo que:

$$\mathcal{F}\left[e^{iw_0 t} \right] = \pi\left[\delta(w - w_0) + \delta\left(w + w_0 \right) - \delta\left(w + w_0 \right) + \delta\left(w - w_0 \right) \right]$$

De donde: $$\boxed{\mathcal{F}\left[e^{iw_0 t} \right] = 2\pi\left[\delta(w - w_0) \right]}$$

La transformada de Fourier de $e^{iw_0 t}$ es entonces un único impulso de longitud 2π, ubicado en $w = w_0$, como lo ilustra la figura 13.29 :

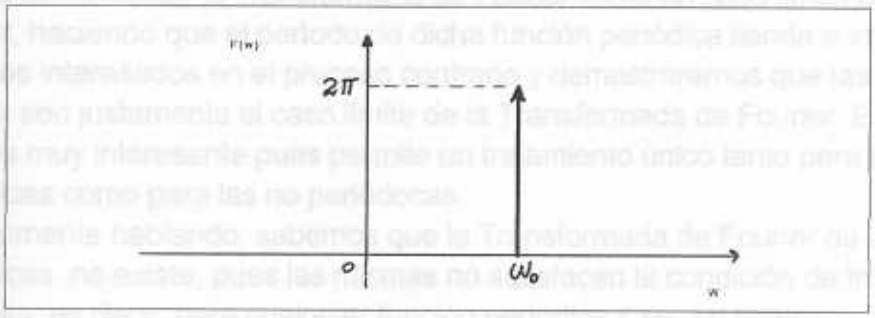


Fig.13.29 : $F(w) = \mathcal{F}\left[e^{iw_0 t} \right] = 2\pi\left[\delta(w - w_0) \right]$

NOTA:

Nótese que la función $f(t) = e^{iw_0 t}$ no es una función real del tiempo, por lo que su espectro sólo tiene una componente en $w = w_0$. Además, se demostró anteriormente que para toda función real, la función Densidad Espectral $F(w)$ satisface:

$$F(w) = F^*(-w), \qquad y \qquad \left| F(w) \right| = \left| F(-w) \right|$$

Por lo tanto, si $f(t)$ es una función real del tiempo, entonces $F(w)$ es una función par de w, de tal manera que si existe un impulso en $w = w_0$, debe existir otro

impulsdo en $w = -w_0$. Este es el caso de la señales $\cos w_0 t$ y $\operatorname{sen} w_0 t$.

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 9 :

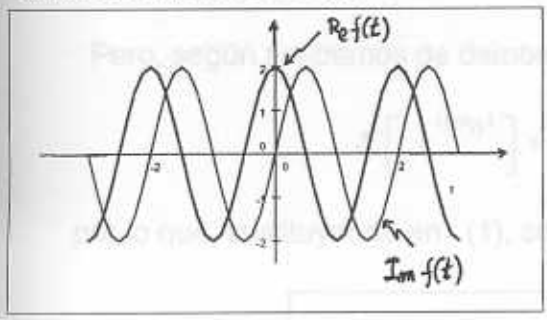
Calcular la transformada de Fourier de la finción : $f(t) = 2e^{i3t}$

Solución:

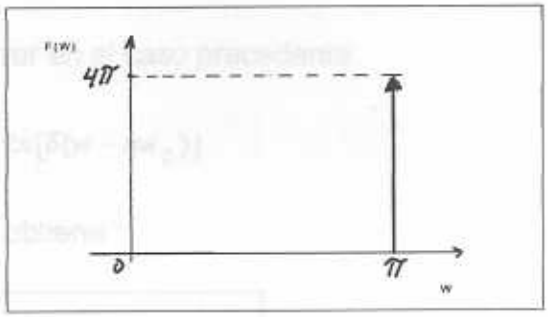
Aplicando el resultado arriba expuesto, se obtiene :

$$\mathcal{F}\left[\ 2e^{i\pi t}\ \right] = (2)2\pi\left[\ \delta(w-\pi)\ \right] = 4\pi\left[\ \delta(w-\pi)\ \right]$$

Las siguientes gráficas muestran la parte real y la parte imaginaria de $f(t)$, así como también la gráfica de $F(w)$:



$Ref(t)$, $Imf(t)$



$F(w) = 4\pi(w-\pi)$

13.13) TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA

Hemos desarrollado la Transformada de Fourier como un caso límite de la Serie de Fourier, haciendo que el período de dicha función periódica tienda a infinito. Ahora estamos interesados en el proceso contrario y demostraremos que las Series de Fourier son justamente el caso límite de la Transformada de Fourier. Este punto de vista es muy interesante pues permite un tratamiento único tanto para las señales periódicas como para las no periódocas.

Estrictamente hablando, sabemos que la Transformada de Fourier de las funciones periódicas no existe, pues las mismas no satisfacen la condición de Integrabilidad Absoluta; es decir, para cualquier función periódica $f_T(t)$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f_T(t) \right| dt = \infty$$

razón por la cual la Transformad de Fourier no existe sino en el límite.

En consecuecia, para hallar la Transformada de Fourier de una función periódica $f_T(t)$, utilizaremos lel mismo procedimiento empleado anteriormente para el caso de las funciones $\cos w_0 t$ y $\operatorname{sen} w_0 t$. Es decir, asumiremos que la función periódoca existe sólamente en el intervalo finito $\left(-\frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right)$ y haremos que, en el límite, $k \to \infty$.

Alternativamente, también podemos expresar dicha función periódica $f_T(t)$ por su Serie de Fourier. En consecuencia, la Transformada de Fourier de una función

periódica es entonces la suma de las Transformadas de Fourier de cada una de sus componentes individuales. Así se tiene lo siguiente :

a) Expresando la función periódica $f_T(t)$ por su Serie de Fourier, tenemos:

$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{i n w_0 t} \quad ; \quad \left(w_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

b) Aplicando Transformada de Fourier a ambos lados lados de la ecuación anterior, obtenemos :

$$\mathcal{F}\left[f_T(t)\right] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n w_0 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, \mathcal{F}\left(e^{i n w_0 t}\right) \quad \ldots(1)$$

Pero, según acabamos de demostrar en el caso precedente:

$$\mathcal{F}\left[e^{i n w_0 t}\right] = 2\pi[\delta(w - n w_0)]$$

por lo que, sustituyendo en (1), se obtiene :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f_T(t)\right] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, \delta(w - n w_0)}$$

Este es un resultado muy significativo. El mismo establece que la Densidad Espectral o Transformada de Fourier $F(w)$ de una función periódica, consiste de impulsos localizados en los valores de frecuencia correspondientes a los armónicos de la señal, es decir, en : $w = n w_0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, etc.$ y que la longitud de cada impulso es 2π veces el valor del coeficiente correspondiente en las serie Exponencial Compleja de Fourier.

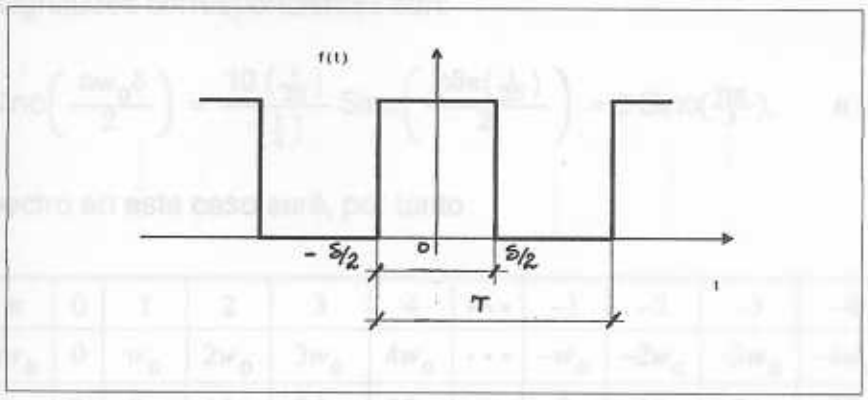
Ilustraremos este importante resultado, con los siguientes ejemplos :

Ejemplo 10:

Encuentre la transformada de Fourier de la función periódica (pulso rectangular), definida en un período por : $f(t) = \begin{cases} A, & \text{si } t < \left|\frac{\delta}{2}\right| \\ 0, & \text{si } t > \left|\frac{\delta}{2}\right| \end{cases}$

Solución:

La gráfica de la señal dada, es :



(Onda periódica rectangular)

Tal como ya se caculó en el Capítulo XII, aparte 12.10, ejemplo 2, el coeficiente de la serie Exponencial Compleja correspondiente a la señal dada es:

$$C_n = \frac{A\delta}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right) \;;\; \left(\text{recuérdese que : } w_0 = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \Rightarrow \left(\frac{\pi}{T}\right) = \frac{w_0}{2}\right)$$

Por lo tanto , la Transformada de Fourier de la función dada es :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\,f(t)\,\right] = \frac{2\pi A\delta}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sinc}\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right)\delta(w - nw_0)}$$

En resumen, la transformada de $f(t)$ consiste de impulsos localizados en :

$$w = nw_0 = 0,\ \pm w_0,\ \pm 2w_0, \cdots, \pm nw_0\ , \cdots, etc.$$

La magnitud de cada impulso localizado en $w = nw_0$ está dada por :

$$\frac{2\pi A\delta}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{n\pi\delta}{T}\right)$$

El Espectro de Frecuencias de esta señal, para el caso particular :
$A = 10$; $T = \frac{1}{4} seg$ y $\delta = \frac{1}{20}\ seg.$ fue calculado en el ejemplo citado, en donde se obtuvo:

En este caso particular, $w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1/4} = 8\pi \quad rad./seg$
por lo tanto, la primera frecuencia de corte ocurre en:
$\frac{w_c\delta}{2} = \pi$, por lo que : $w_c = \frac{2\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{1/20} = 40\pi$
En consecuencia, en el intervalo $(0, 40\pi)$ la frecuencia $w_0 = 8\pi$
cabe: $\frac{40\pi}{8\pi} = 5\ veces$; es decir : $nw_0 = 40\pi \Rightarrow n = 0, 1, 2, 3, 4$

Las componentes de frecuencia en ese intervalo son:

$$w = 0,\ \pm 8\pi,\ \pm 16\pi,\ \pm 24\pi, \pm 32\pi,\ \cdots$$

Las magnitudes correspondientes son:

$$C_n = \frac{A\delta}{T}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{nw_0\delta}{2}\right) = \frac{10\left(\frac{1}{20}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{n8\pi\left(\frac{1}{20}\right)}{2}\right) = 2\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{n\pi}{5}\right), \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

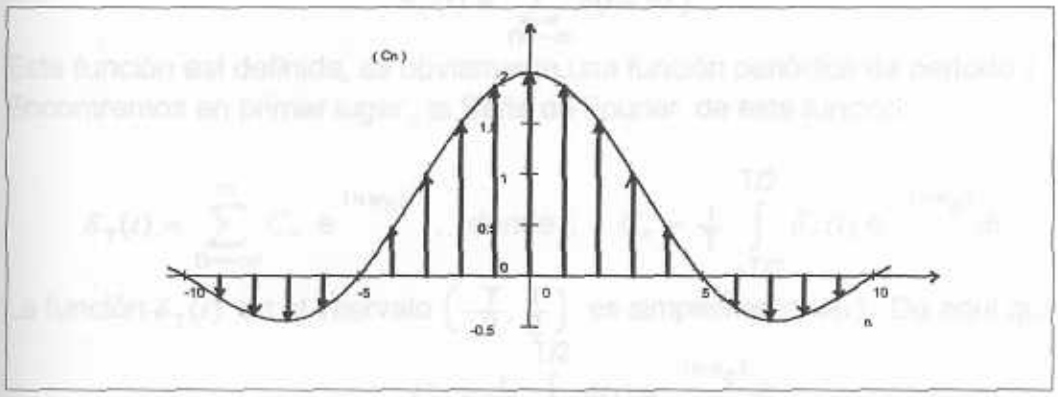
El espectro en este caso será, por tanto

:

n	0	1	2	3	4	$\cdots$	-1	-2	-3	-4	$\cdots$
nw_0	0	w_0	$2w_0$	$3w_0$	$4w_0$	$\cdots$	$-w_0$	$-2w_0$	$-3w_0$	$-4w_0$	$\cdots$
w	0	8π	16π	24π	32π	$\cdots$	-8π	-16π	-24π	-32π	$\cdots$
C_n	2	1.87	1.51	1.009	0.47		1.87	1.51	1.009	0.47	$\cdots$

NOTA:
Por razones del graficador utilizado, la siguiente gráfica muestra Cn vs. n y no Cn vs. w. como fue definido. Nótese sin embargo que, en este caso,

$$w = nw_0 = n(8\pi)$$

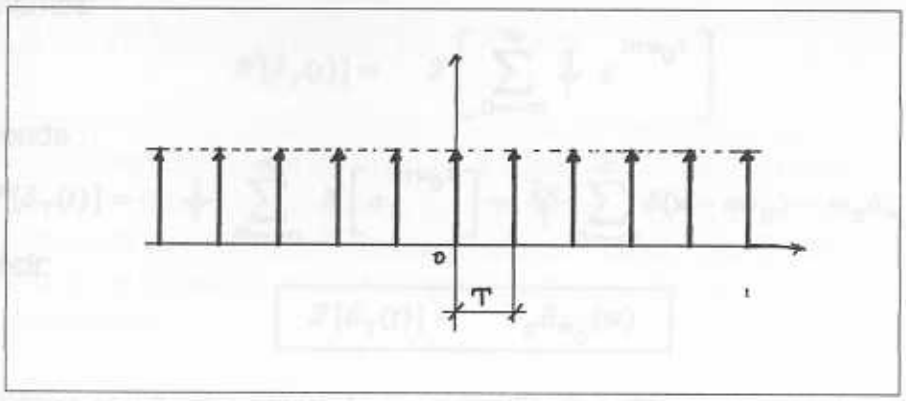


(Espectro de Frecuencias: Cn $vs.$ n)

== oo ==

Ejemplo 11:

Encuentre la transformada de Fourier de la función periódica definida por una secuencia de pulsos equidistantes, de magnitud unitaria y separados por T segundos, como se muestra a continuación:



($\delta_T(t)$)

Solución:

Esta función es muy importante en la teoría de muestreo, por lo que es conveniente denotar dicha función por un símbolo especial : $\delta_T(t)$. Luego,

$$\delta_T(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \delta(t-3T) + \delta(t-4T) + \cdots + \delta(t-nT) + \cdots + \delta(t+T) + \delta(t+2T) + \delta(t+3T) + \delta(t+4T) + \cdots + \delta(t+nT) + \cdots \quad \Rightarrow$$

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

Esta función así definida, es obviamente una función periódica de período T. Encontremos en primer lugar , la Serie de Fourier de esta función:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{inw_0 t} \quad , \text{ donde : } \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) \, e^{-inw_0 t} \, dt$$

La función $\delta_T(t)$ en el intervalo $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ es simplemente $\delta(t)$. De aquí que :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \, e^{-inw_0 t} \, dt$$

Aplicando ahora la Propiedad de Muestreo de la función $\delta(t)$, la ecuación anterior se reduce a:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{0^-}^{0^+} e^{-inw_0 (0)} \, dt = \frac{1}{T}$$

Por lo tanto, C_n es una constante $\frac{1}{T}$. En conseuencia, la función tren de impulsos unitarios bajo estudio, con períod T, contiene componentes de frecuencia en $w = 0, \pm w_0, \pm 2w_0, \cdots, \pm nw_0, \cdots, etc.$, con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$.

En resumen:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{inw_0 t} \Rightarrow \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \, e^{inw_0 t}$$

Aplicando Transformada de Fourier a ambos lados de esta última igualdad,

obtenemos:

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\, e^{\,in w_0 t}\right]$$

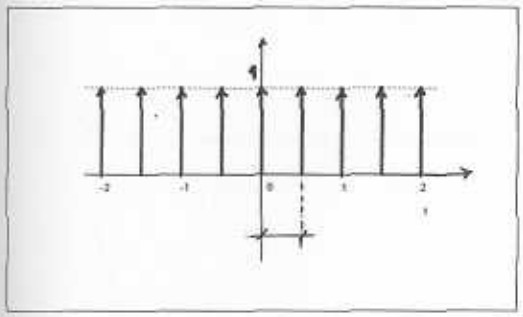
De donde :

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[e^{\,in w_0 t}\right] = \frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - n w_0) = w_0 \delta_{w_0}(w)$$

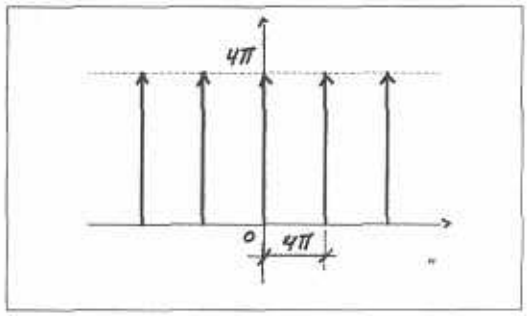
Es decir:

$$\boxed{\mathcal{F}[\delta_T(t)] = w_0 \delta_{w_0}(w)}$$

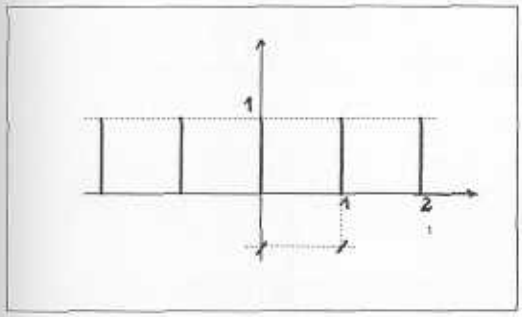
Este último resultado es también muy significativo. El mismo establece que la Transformada de Fourier de un tren de pulsos unitarios de período T, es también un tren de pulsos de amplitud w_0, separados por w_0 radianes $\left(w_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$. En otras palabras, la función tren de pulsos es su propia transformada.
Se muestra a continuación la secuencia de impulsos con $T = \frac{1}{2}$ segundos y $T = 1$ segundo, así como también sus respectivas transformadas:



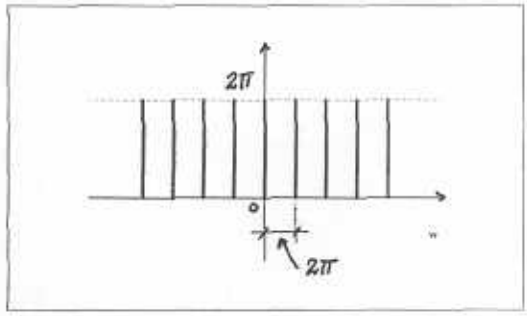
($\delta_{0.5}(t)$)



($\mathcal{F}[\delta_{0.5}(t)] = 4\pi\delta(w - 4\pi n)$)



($\delta_1(t)$)



($\mathcal{F}[\delta_1(t)] = 2\pi\delta(w - 2\pi n)$)

Nótese que, si aumenta el período T de la función $\delta_T(t)$, entonces el Espectro de Frecuencias se hace cada vez más denso, es decir, disminuye $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ y, en consecuencia, tambien disminuye $w = \pm n w_0$.

= oo =

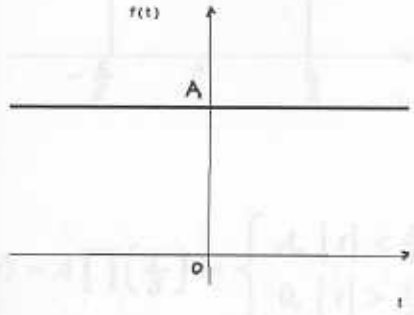
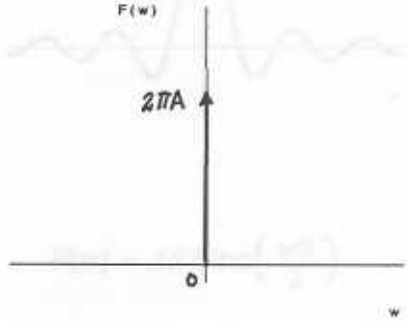
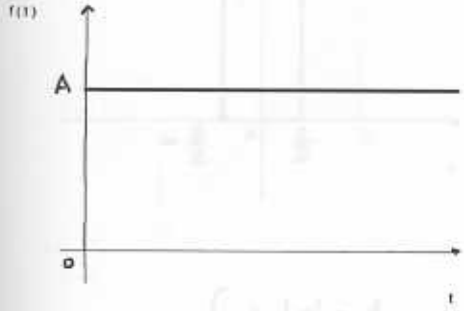
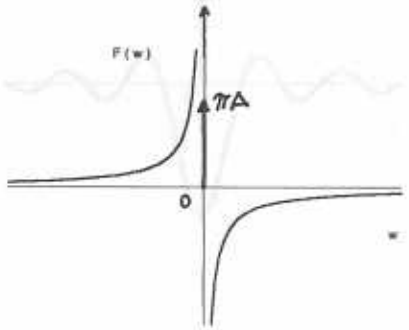
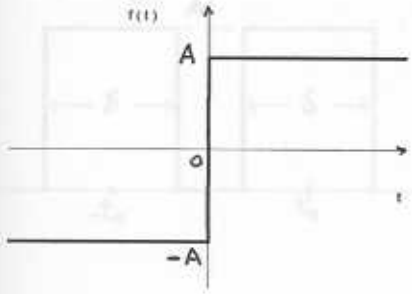
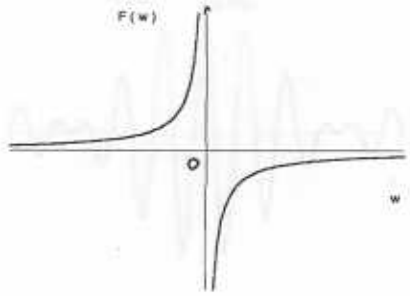
13.14) TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

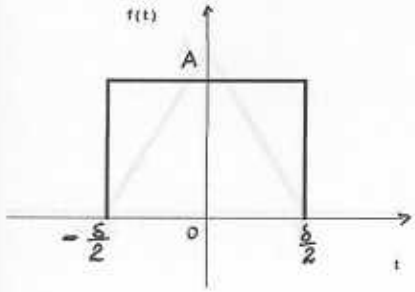
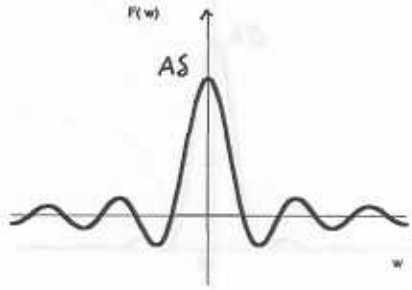
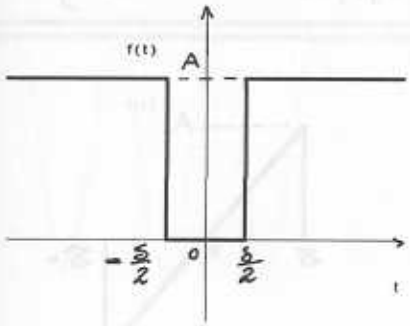
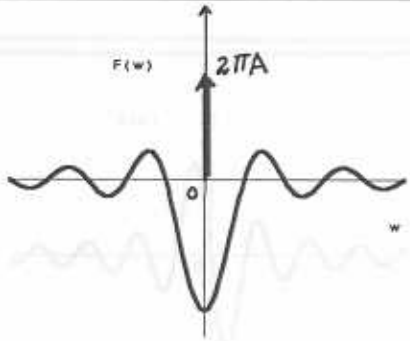
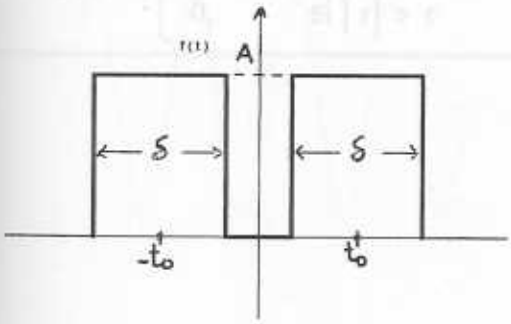
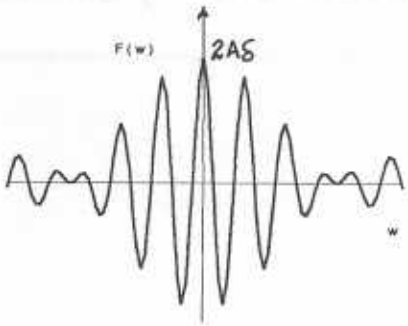
Se presentan a continuación varias funciones del tiempo $f(t)$ así como sus respectivasTransformadas de Fourier (o Función Densidad). Nótese como para un gran número de funciones de esta Tabla, $F(w)$ es real , por lo que será suficiente una sóla gráfica para su representación. En el caso en que $F(w)$ no sea real, se presenta en color negro la parte real de $F(w)$ y en color rojo su parte imaginaria.

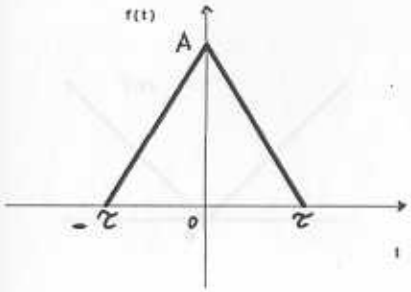
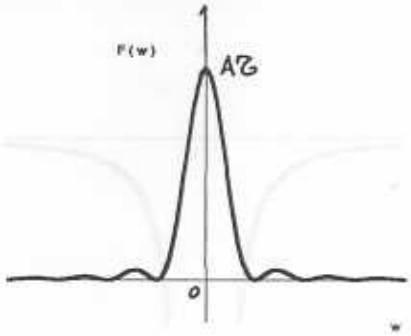
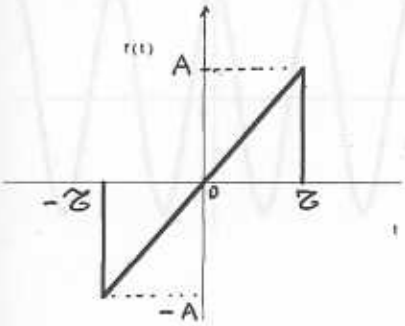
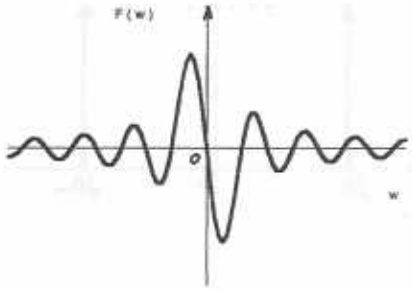
13.14.1) Transformadas de Fourier y su representación gráfica

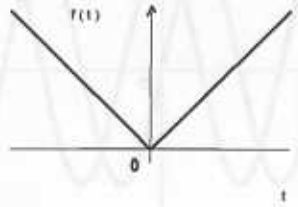
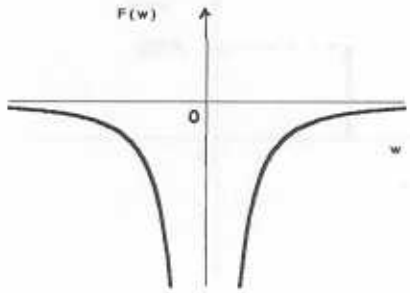
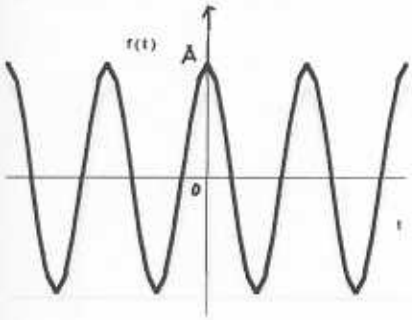
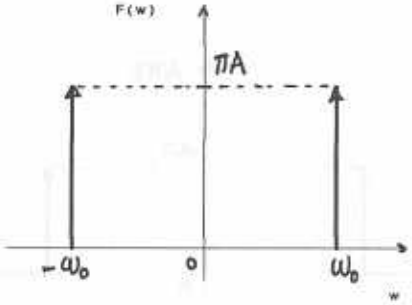
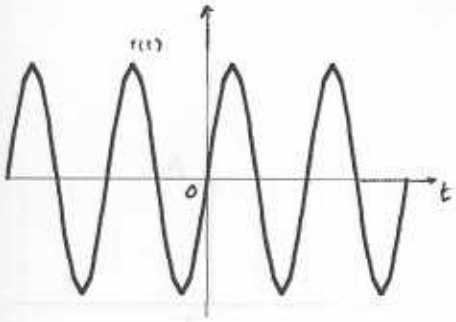
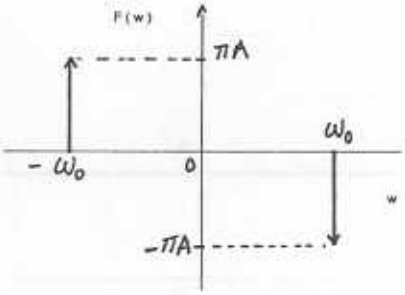
Se presenta a continuación una Tabla de Transformadas de Fourier con su respectiva representación gráfica, en cada caso :

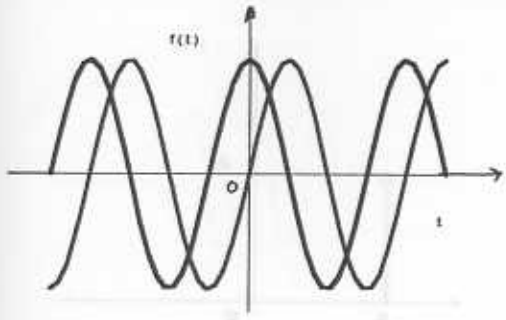
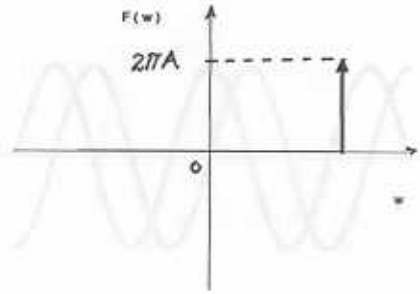
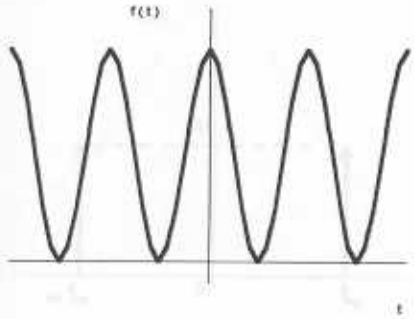
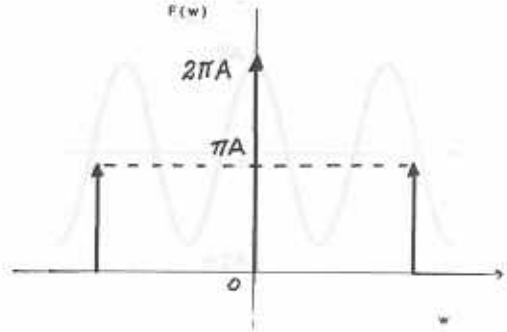
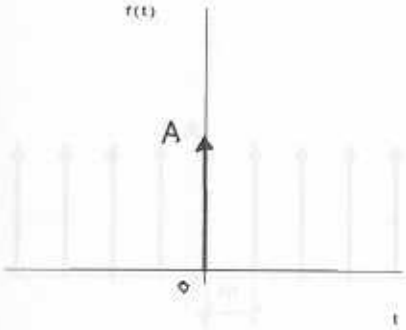
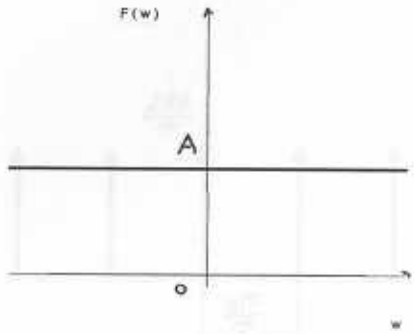
TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

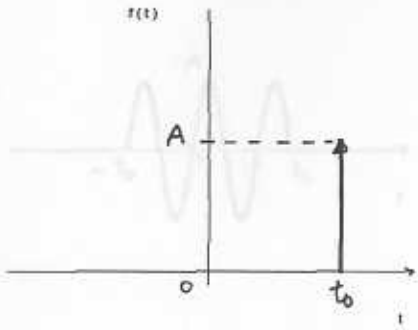
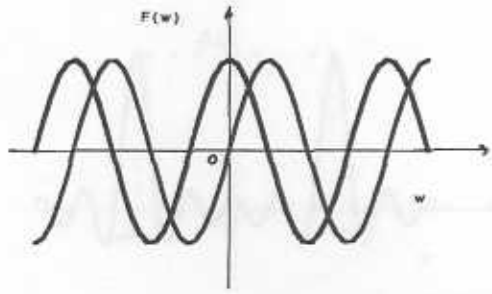
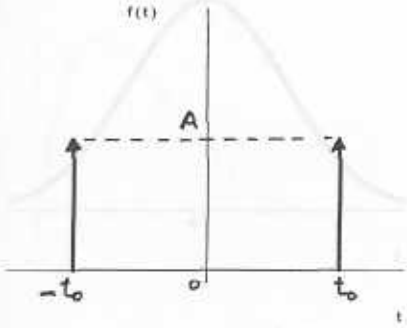
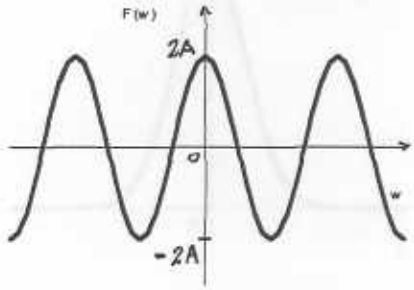
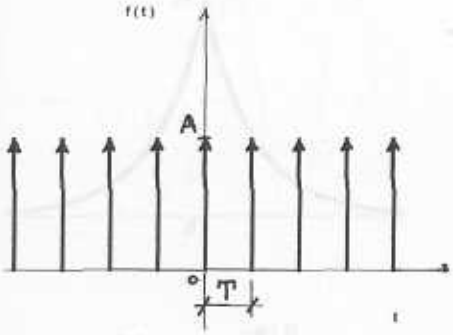
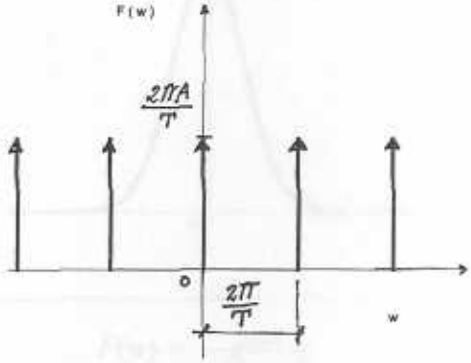
	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt} dw$	$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt} dt$
1	 $f(t) = A$	 $F(w) = 2\pi A\, \delta(w)$
2	 $f(t) = AU(t)$	 $F(w) = A\left[\pi\delta(w) - i\frac{1}{w}\right]$
3	 $f(t) = \begin{cases} A, & t > 0 \\ -A, & t < 0 \end{cases}$	 $F(w) = -i\frac{2A}{w}$

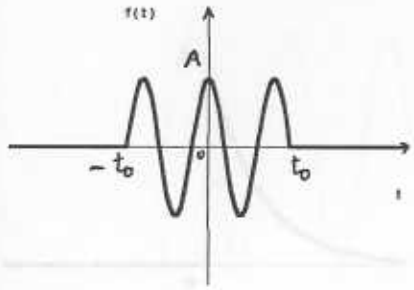
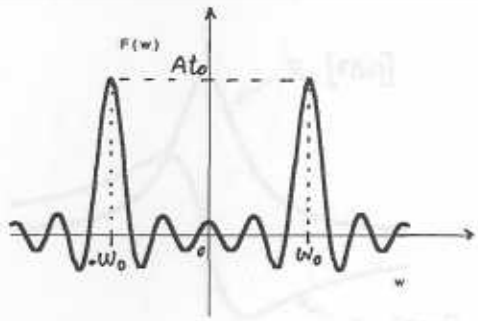
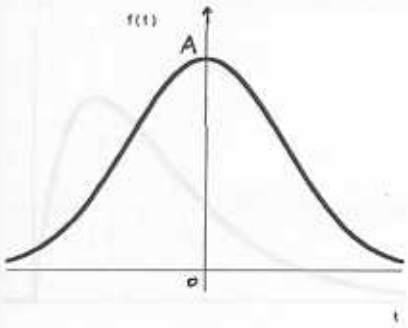
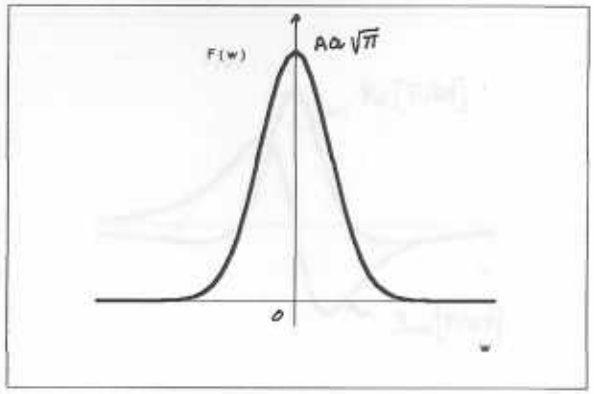
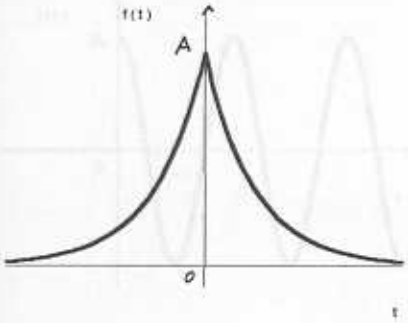
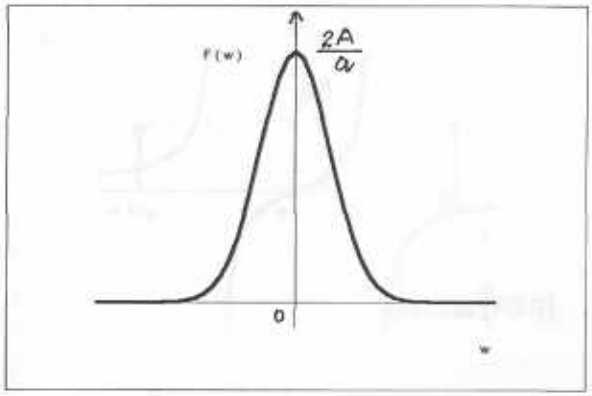
4	 $f(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right) = \begin{cases} A, & \lvert t\rvert < \frac{\delta}{2} \\ 0, & \lvert t\rvert > \frac{\delta}{2} \end{cases}$	 $F(w) = A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$
5	 $f(t) = \begin{cases} A, & \lvert t\rvert > \frac{\delta}{2} \\ 0, & \lvert t\rvert < \frac{\delta}{2} \end{cases}$	 $F(w) = 2\pi A\delta(w) - A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$
6	 $f(t) = \begin{cases} A, & (t_0 - \frac{\delta}{2}) < \lvert t\rvert < (t_0 + \frac{\delta}{2}) \\ 0, & resto \end{cases}$	 $F(w) = 2A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)\cos(t_0 w)$

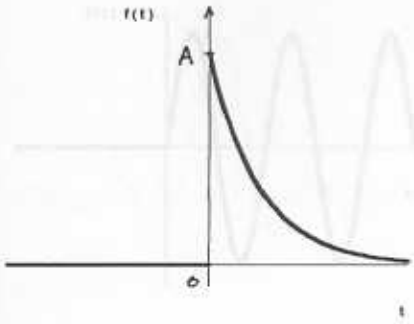
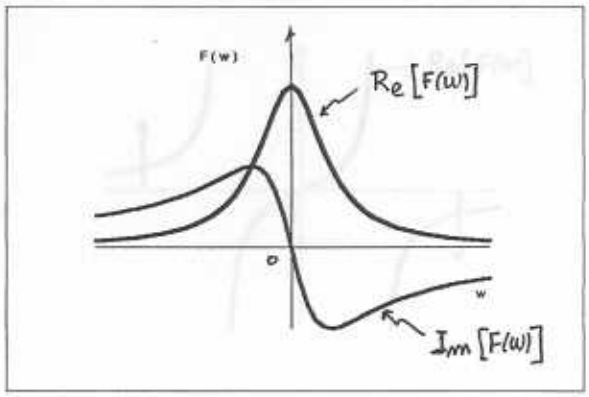
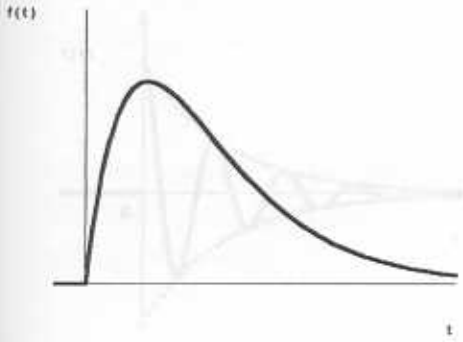
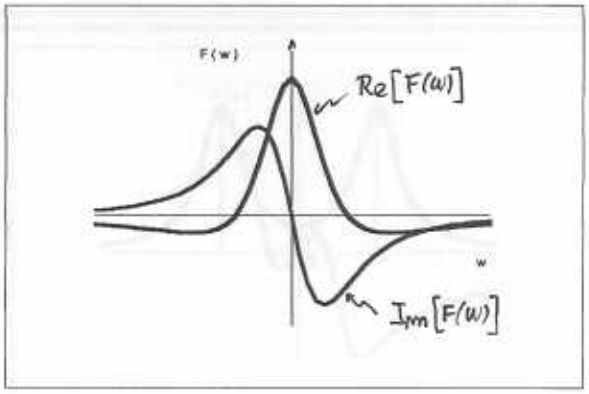
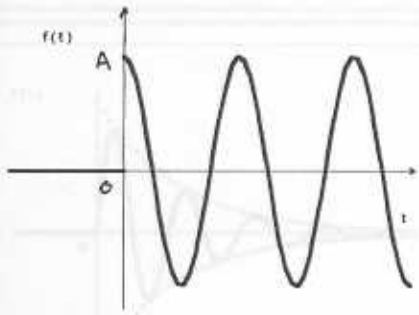
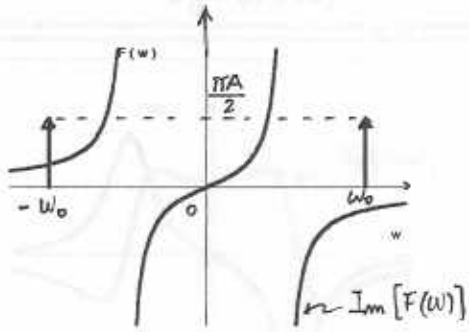
7	 $f(t) = \begin{cases} A\left[1 - \frac{\lvert t \rvert}{\tau}\right], & \text{si } \lvert t \rvert < \tau \\ 0, & \text{si } \lvert t \rvert > \tau \end{cases}$	 $F(w) = A\tau\ \text{Sinc}^2\left(\frac{w\tau}{2}\right)$
8	 $f(t) = \begin{cases} \left(\frac{A}{\tau} t\right), & \text{si } \lvert t \rvert < \tau \\ 0, & \text{si } \lvert t \rvert > \tau \end{cases}$	 $F(w) = i\frac{2A}{w}\left[\ \cos(w\tau) - \text{Sinc}(w\tau)\ \right]$

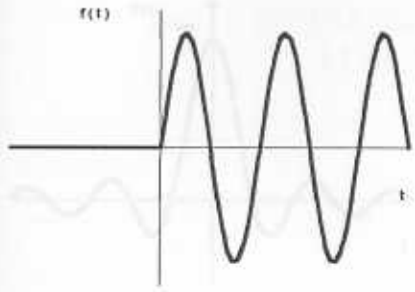
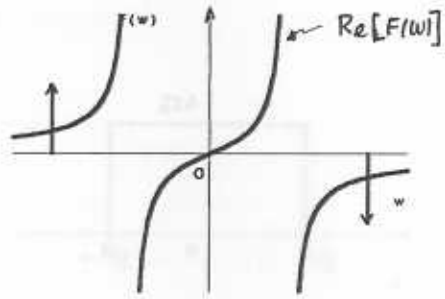
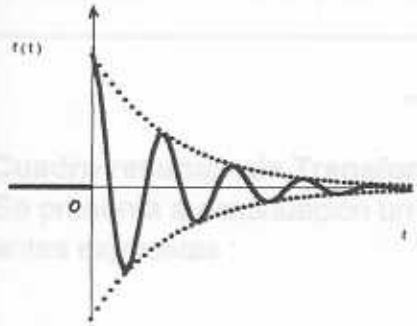
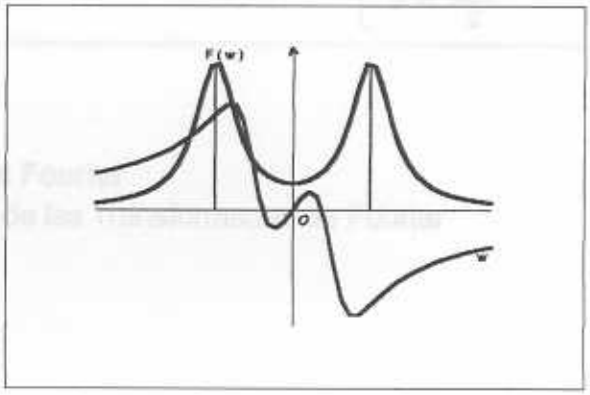
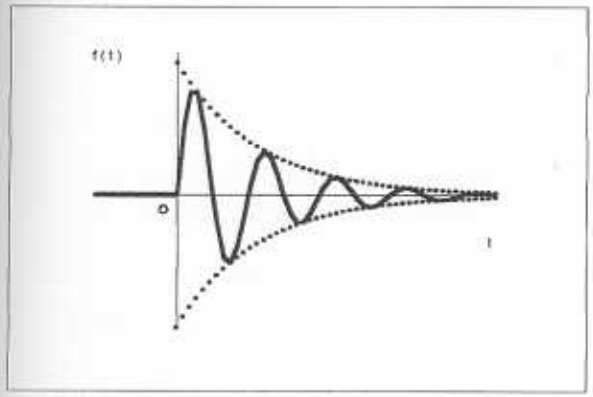
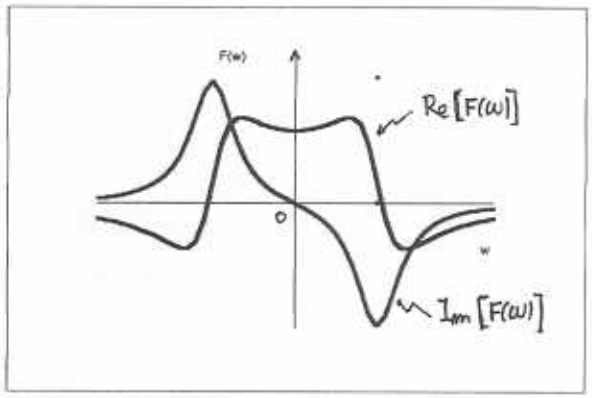
9	 $f(t) = \lvert t \rvert$	 $F(w) = -\dfrac{2}{w^2}$
10	 $f(t) = A\cos w_0 t$	 $F(w) = \pi A\left[\,\delta(w+w_0) + \delta(w-w_0)\,\right]$
11	 $f(t) = A\,\mathrm{sen}\,w_0 t$	 $\mathrm{Im}[F(w)]$; $\mathrm{Re}[F(w)] = 0$ $F(w) = i\pi A\left[\,\delta(w+w_0) - \delta(w-w_0)\,\right]$

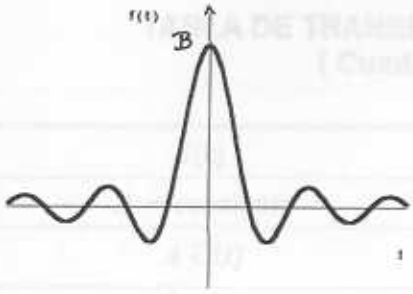
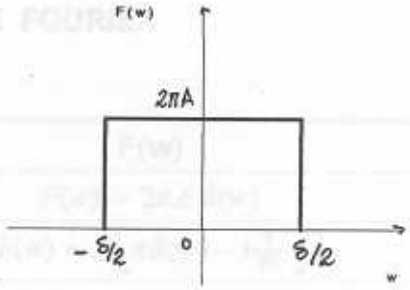
12	 $\mathrm{Re}[f(t)] = A\cos w_0 t;\ \mathrm{Im}[f(t)] = A\,\mathrm{sen}\, w_0 t$ $f(t) = Ae^{i w_0 t}$	 $F(w) = 2\pi A\ \delta(w - w_0)$
13	 $f(t) = A\cos^2 w_0 t$	 $F(w) = \pi A\,[\delta(w + 2w_0) + \delta(w - 2w_0)] + 2\pi A\delta(w)$
14	 $f(t) = A\ \delta(t)$	 $F(w) = A$

15	 $f(t) = A\,\delta(t - t_0)$	 $\mathrm{Re}[F(w)] = A\cos t_0 w,\ \mathrm{Im}[F(w)] = A\,\mathrm{sen}\, t_0 w$ $F(w) = A\,e^{-i t_0 w}$
16	 $f(t) = A\,[\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)]$	 $F(w) = 2A\cos t_0 w$
17	 $f(t) = A \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT) = A\,\delta_T(t)$	 $F(w) = \frac{2\pi A}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta\left(w - \frac{2\pi n}{T}\right)$

18	 $f(t) = A\cos w_0 t\left[\,U(t+t_0) - U(t-t_0)\,\right]$	 $F(w) = At_0\,\{\mathrm{Sinc}[t_0(w+w_0)] + \mathrm{Sinc}[t_0(w-w_0)]\}$
19	 $f(t) = A\ e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^2}$	 $F(w) = Aa\sqrt{\pi}\ e^{\left(\frac{aw}{2}\right)^2}$
20	 $f(t) = A\ e^{-a\lvert t\rvert}$	 $F(w) = \dfrac{2Aa}{w^2 + a^2}$

21	 $f(t) = A\ e^{-a\,t}U(t)$	 $F(w) = \dfrac{A}{a+iw}$
22	 $f(t) = A\,t\,e^{-a\,t}U(t)$	 $F(w) = \dfrac{A}{(a+iw)^2}$
23	 $f(t) = A\cos(w_0 t)\ U(t)$	 $F(w) = \frac{\pi}{2}A[\delta(w+w_0)+\delta(w-w_0)] + i\dfrac{Aw}{(w_0^2-w^2)}$

24		
	$f(t) = A\ \mathrm{sen}(w_0 t)\ U(t)$	$F(w) = i\frac{\pi}{2}A[\delta(w+w_0)-\delta(w-w_0)]+\dfrac{Aw}{(w_0^2-w^2)}$
25		
	$f(t) = A\ e^{-at}\cos(w_0 t)\ U(t)$	$F(w) = \dfrac{A(a+iw)}{w_0^2+(a+iw)^2}$
26		
	$f(t) = A\ e^{-at}\ \mathrm{sen}(w_0 t)\ U(t)$	$F(w) = \dfrac{Aw_0}{(a+iw)^2+w_0^2}$

27		
	$f(t) = B\ \mathrm{Sinc}(w_0 t)$	$F(w) = 2\pi A \prod\left(\frac{w}{\delta}\right), \begin{cases} A = \frac{2B}{w_0} \\ \delta = \frac{w_0}{2} \end{cases}$

= oo =

13.14.2 Cuadro resumen de Transformadas de Fourier

Se presenta a continuación un resumen de las Transformadas de Fourier antes expuestas :

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER
(Cuadro Resumen)

	f(t)	F(w)
1	$A = constante$	$F(w) = 2\pi A\ \delta(w)$
2	$A\ U(t)$	$F(w) = A\left[\pi\delta(w) - i\frac{1}{w}\right]$
3	$f(t) = \begin{cases} A, & t > 0 \\ -A, & t < 0 \end{cases}$	$F(w) = -i\frac{2A}{w}$
4	$f(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right) = \begin{cases} A, \lvert t\rvert < \frac{\delta}{2} \\ 0, \lvert t\rvert > \frac{\delta}{2} \end{cases}$	$F(w) = A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$
5	$f(t) = \begin{cases} A, \lvert t\rvert > \frac{\delta}{2} \\ 0, \lvert t\rvert < \frac{\delta}{2} \end{cases}$	$F(w) = 2\pi A\ \delta(w) - A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$
6	$f(t) = \begin{cases} A, \left(t_0 - \frac{\delta}{2}\right) < \lvert t\rvert < \left(t_0 + \frac{\delta}{2}\right) \\ 0,\ resto \end{cases}$	$F(w) = 2A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)\cos(t_0 w)$
7	$\begin{cases} A\left[1 - \frac{\lvert t\rvert}{\tau}\right], & \text{si } \lvert t\rvert < \tau \\ 0, & \text{si } \lvert t\rvert > \tau \end{cases}$	$F(w) = A\tau\ \mathrm{Sinc}^2\left(\frac{w\delta}{2}\right)$
8	$(t) = \begin{cases} \frac{A}{\tau}t, & \lvert t\rvert < \tau \\ 0, & \lvert t\rvert > \tau \end{cases}$	$F(w) = i\frac{2A}{w}\left[\cos(\tau w) - \mathrm{Sinc}(\tau w)\right]$
9	$\lvert t\rvert$	$-\frac{2}{w^2}$
10	$A\cos(w_0 t)$	$A\pi[\delta(w + w_0) + \delta(w - w_0)]$
11	$A\,\mathrm{sen}\,(w_0 t)$	$i\,A\pi[\delta(w + w_0) - \delta(w - w_0)]$
12	$Ae^{i w_0 t} = A\left[\cos(w_0 t) + i\,\mathrm{sen}(w_0 t)\right]$	$2\pi A\ \delta(w - w_0)$
13	$A\cos^2(w_0 t)$	$A\pi\left[\delta(w + w_0) + \delta(w - w_0)\right] + 2\pi A\ \delta(w)$
14	$A\ \delta(t)$	$F(w) = A$
15	$A\ \delta(t - t_0)$	$A\,e^{-i t_0 w} = A\left[\cos t_0 w + i\,\mathrm{sen}\ t_0 w\right]$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER
(Cuadro Resumen)
(Continuación)

	$f(t)$	$F(w)$
16	$A\left[\,\delta(w+t_0)-\delta(w-t_0)\,\right]$	$2A\cos\left(t_0 w\right)$
17	$A\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=A\,\delta_T(t)$	$A\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{2\pi}{T}n\right)=Aw_0\left[\delta_{w_0}(w)\right]\ ,\ \ w_0=\frac{2\pi}{T}$
18	$A\cos w_0 t\left[\,U\left(t+t_0\right)-U\left(t-t_0\right)\,\right]$	$At_0\left\{\,\mathrm{Sinc}\left[t_0\left(w+w_0\right)\right]+\mathrm{Sinc}\left[t_0\left(w-w_0\right)\right]\right\}$
19	$Ae^{-\left(\frac{t}{a}\right)^2}$	$2A\sqrt{\pi}\ \mathrm{e}^{\left(\frac{aw}{2}\right)^2}$
20	$A\,e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2aA}{a^2+w^2}$
21	$A\,e^{-at}\,U(t)$	$\frac{A}{a+iw}=\frac{Aa}{a^2+w^2}-i\frac{Aw}{a^2+w^2}$
22	$A\,t\,e^{-at}U(t)$	$\frac{A}{\left(a+iw\right)^2}$
23	$A\cos\left(w_0 t\right)\,U\left(t\right)$	$\frac{\pi}{2}A\left[\,\delta\left(w+w_0\right)+\delta\left(w-w_0\right)\,\right]+i\frac{Aw}{\left(w_0^2-w^2\right)}$
24	$A\mathrm{sen}\left(w_0 t\right)\,U\left(t\right)$	$\frac{Aw}{\left(w_0^2-w^2\right)}+i\frac{\pi}{2}A\left[\,\delta\left(w+w_0\right)-\delta\left(w-w_0\right)\,\right]$
25	$w_0 Ae^{-at}\cos\left(w_0 t\right)\,U\left(t\right)$	
26	$Ae^{-at}\,\mathrm{sen}\left(w_0 t\right)\,U\left(t\right)$	$\frac{Aw_0}{\left(a+iw\right)^2+w_0^2}$
27	$B\ \mathrm{Sinc}\left(w_0 t\right)$	$2\pi A\prod\left(\frac{w}{\delta}\right),\ \begin{cases} A=\frac{2B}{w_0} \\ \delta=\frac{w_0}{2}\end{cases}$

.

== oo ==

.

.

.

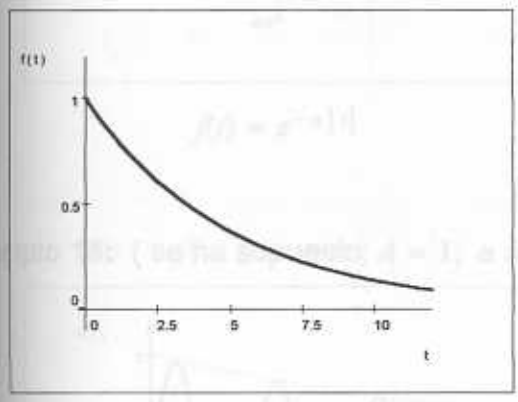
.

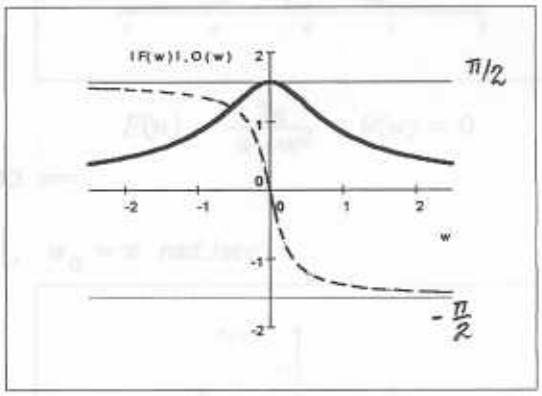
.

13.14.3) Algunas funciones del tiempo y su función Densidad Espectral

En los ejemplos subsiguientes, en el caso en que $F(w)$ sea complejo, se ha graficado $\left| F(w) \right|$ en línea contínua y $\theta(w) = \arctan \dfrac{\mathrm{Im}[F(w)]}{\mathrm{Re}[F(w)]}$ en línea punteada.

Ejemplo 12: (se ha supuesto: $A = 1,\ a = 0.2$)



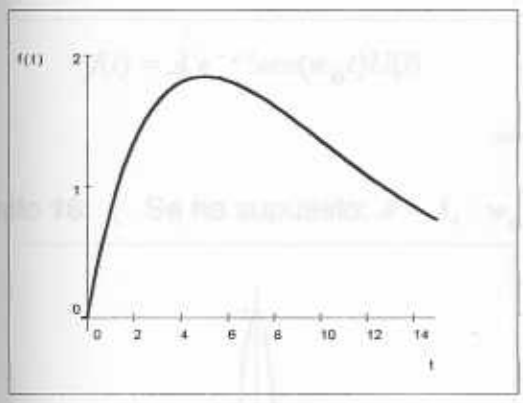


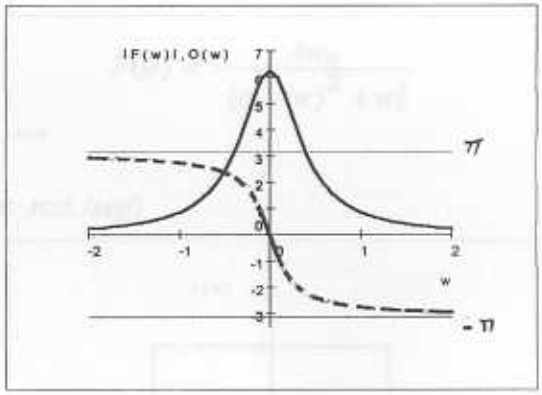
$f(t) = Ae^{-at}U(t)$

$F(w) = \dfrac{A}{a + iw}$

= oo =

Ejemplo 13: (se ha supuesto: $A = 1,\ a = 0.2$)



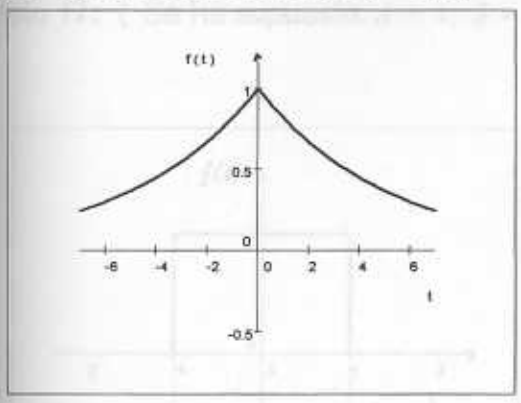


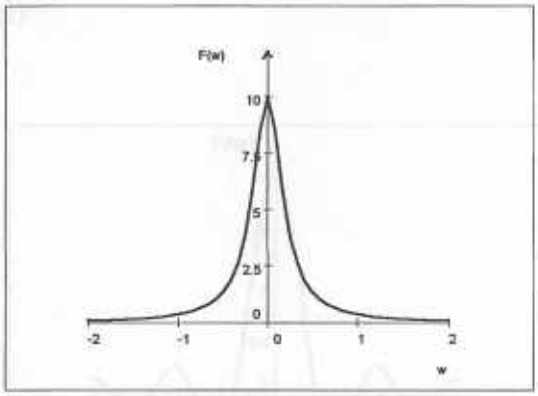
$f(t) = te^{-at}U(t)$

$F(w) = \dfrac{A}{(a + iw)^2}$

= oo =

Ejemplo 14: (se ha supuesto $a = 0.2$)



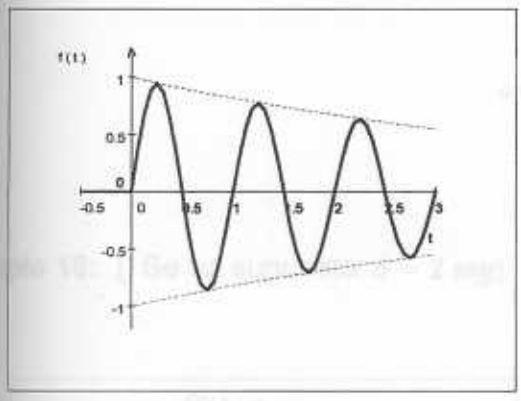


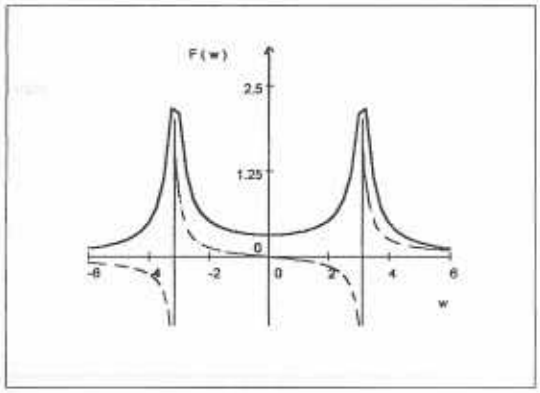
$f(t) = e^{-a|t|}$

$F(w) = \dfrac{2a}{a^2+w^2}$; $\theta(w) = 0$

= oo =

Ejemplo 15: (se ha supuesto: $A = 1,\ a = 0.2$, $w_0 = \pi$ *rad./seg*)



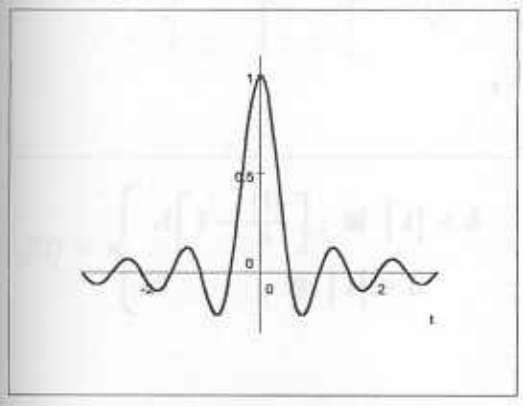


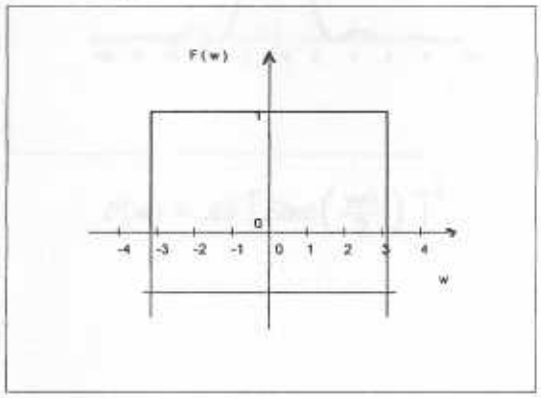
$f(t) = A\, e^{-at} sen(w_0 t) U(t)$

$F(w) = \dfrac{A w_0}{(a + iw)^2 + w_0^2}$

= oo =

Ejemplo 16: (Se ha supuesto: $A = 1,\ w_0 = 2\pi$ *rad./seg*)

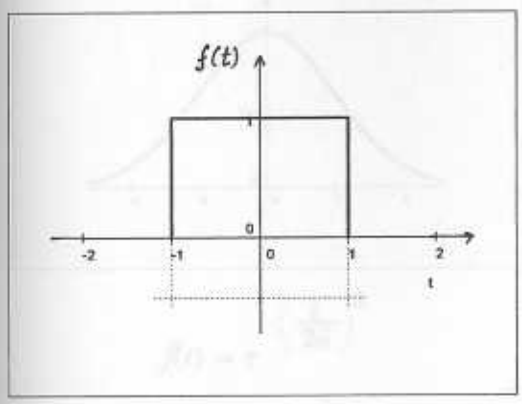


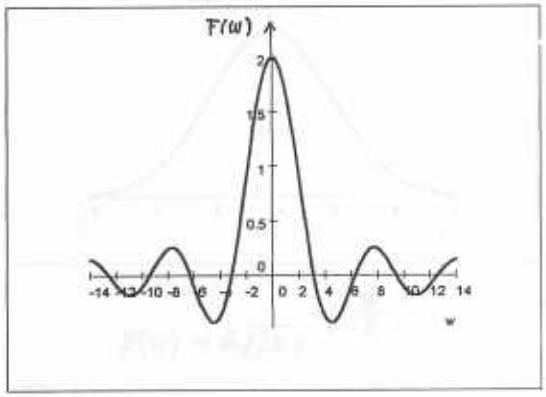


$f(t) = A\ \mathrm{Sinc}(w_0 t)$

$F(w) = A\, G_{w_0}(w)$; $\theta(w) = 0$

Ejemplo 17: (Se ha supuesto: $A = 1;\ \delta = 2\ seg$))



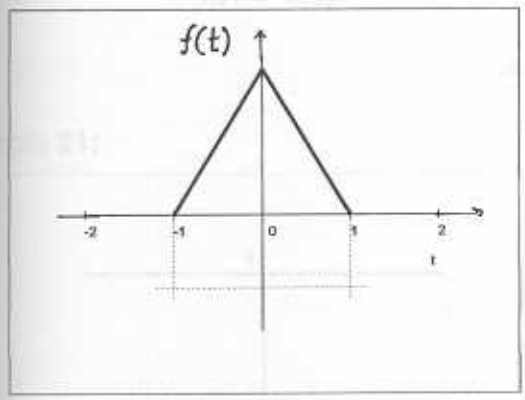


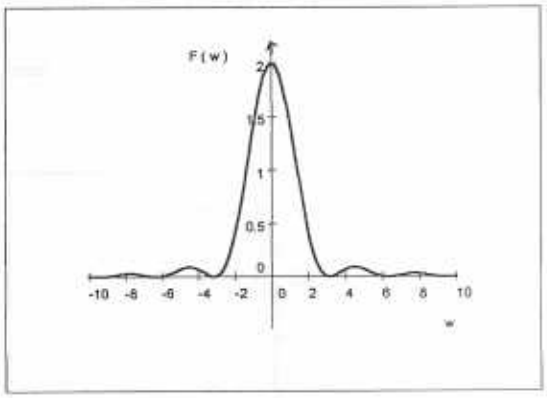
$$f(t) = A \cdot G_{\delta}(t) = A \prod\left(\frac{t}{\delta}\right)$$

$$F(w) = A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$$

= oo =

Ejemplo 18: (Se ha supuesto: $\delta = 2\ seg$)

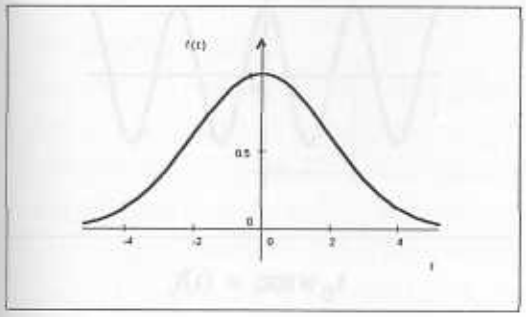


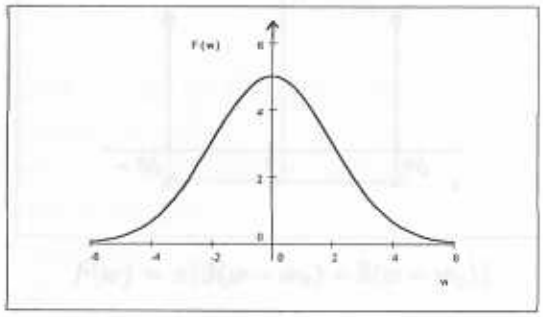


$$f(t) = \begin{cases} A\left[1 - \frac{|t|}{\delta}\right], & \text{si } |t| < \delta \\ 0 & \text{, si } |t| > \delta \end{cases}$$

$$F(w) = A\delta\left[Sinc\left(\frac{w\delta}{2}\right)\right]^2$$

Ejemplo 19: (Se ha supuesto: $\delta = 2\ seg$))

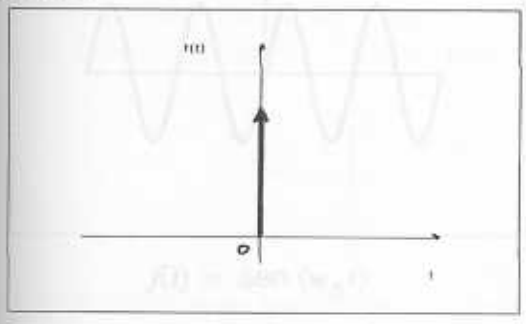


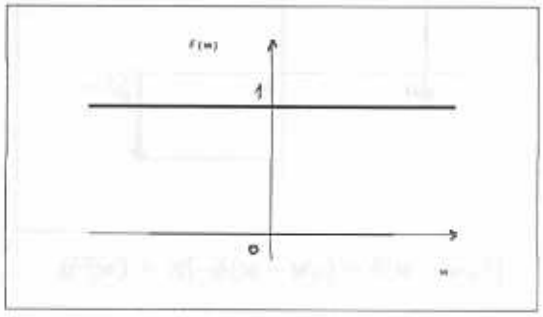


$$f(t) = e^{-\left(\frac{t}{2\delta}\right)^2} \qquad F(w) = \delta\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w}{\delta}\right)^2}$$

= oo =

Ejemplo 20:

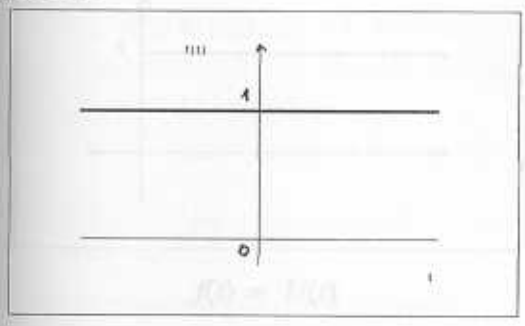


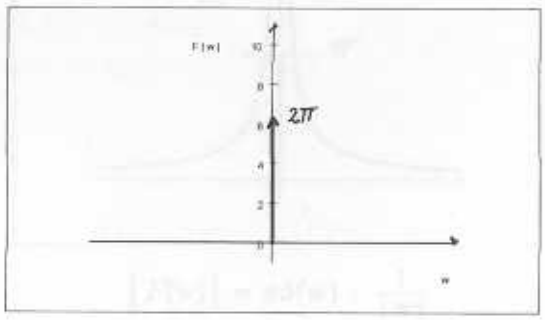


$$f(t) = \delta(t) \qquad F(w) = 1$$

= oo =

Ejemplo 21:

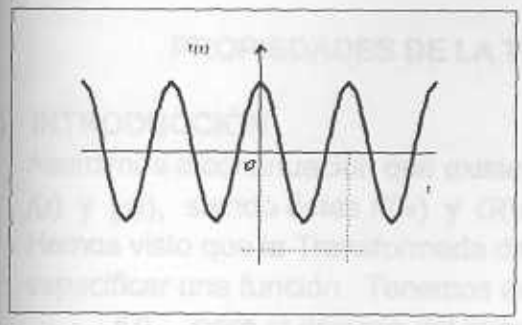


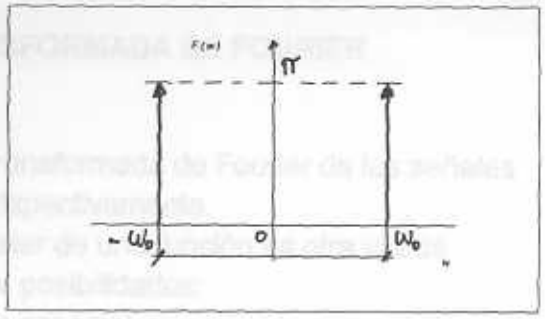


$$f(t) = 1 \qquad F(w) = 2\pi\delta(w)$$

= oo =

Ejemplo 22:

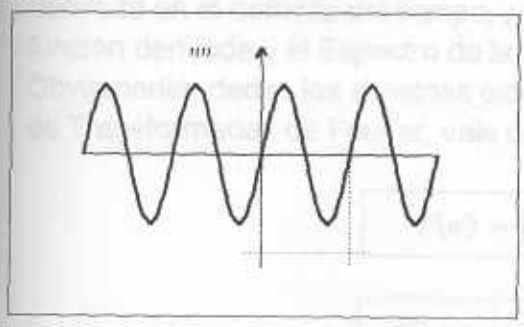


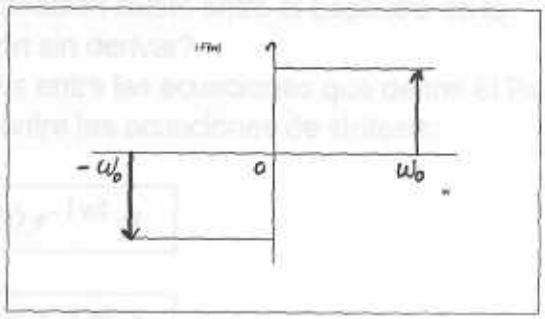


$f(t) = \cos w_0 t$ $\qquad$ $F(w) = \pi[\delta(w - w_0) + \delta(w - w_0)]$

== oo ==

Ejemplo 23:

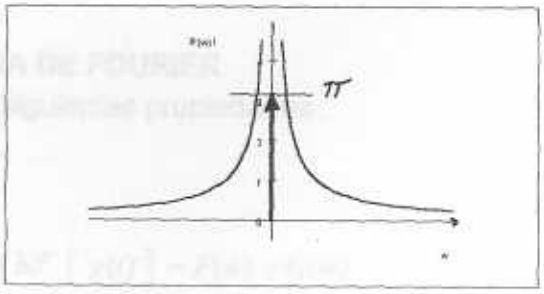




$f(t) = \text{sen}\,(w_0 t)$ $\qquad$ $iF(w) = \pi[-\delta(w - w_0) + \delta(w - w_0)]$

== oo ==

Ejemplo 24:



$f(t) = U(t)$ $\qquad$ $|F(w)| = \pi\delta(w) + \dfrac{1}{|w|}$

== oo ==

CAPÍTULO XIV

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

14.1) INTRODUCCIÓN

Asumimos a continuación que existe la Transformada de Fourier de las señales $f(t)$ y $g(t)$, siendo éstas $F(w)$ y $G(w)$, respectivamente.
Hemos visto que la Transformada de Fourier de una función es otra vía de especificar una función . Tenemos así dos posibilidades:

- $f(t)$ para el dominio del tiempo (o espacio), y
- $F(w)$ para el dominio de la frecuencia.

Resulta así muy interesante estudiar el efecto en uno cualquiera de estos dominios (tiempo (t) o frecuencia (w)), causado por ciertas operaciones sobre la función en el otro dominio. Nos podemos preguntar, por ejemplo, si una función es derivada en el dominio del tiempo, ¿ qué relación existe entre el Espectro de la función derivada y el Espectro de la función sin derivar?
Obviamente, dadas las simetrias existentes entre las ecuaciones que define el Par de Transformadas de Fourier, vale decir, entre las ecuaciones de síntesis:

$$\boxed{F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,wt}\, dt}$$

y

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{i\,wt}\, dw}$$

es de esperarse que dichas simetrías se reflejen también en las propiedades que estudiaremos a continuación. Por ejemplo, es de esperarse que el efecto en el dominio de la frecuencia debido a una derivación en el dominio del tiempo, sea similar al efecto en el dominio del tiempo de una derivación en el dominio de la frecuencia.

14.2) PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La Transformada de Fourier satisface las siguientes propiedades :

14.2.1) Linealidad

Esta propiedad expresa que :

$$\mathcal{F}\left[a\,f(t) + b\,g(t)\right] = a\mathcal{F}\left[f(t)\right] + b\mathcal{F}\left[g(t)\right] = F(w) + G(w)$$

Se dice entonces que la Transformada de Fourier es lineal.
La prueba de esta propiedad se apoya en la linealidad de la integral que define a la propia Transformada de Fourier, por lo que la demostración de la misma es trivial.

14.2.2) Simetría o Dualidad

Al comparar las relaciones entre la Transformada directa de Fourier

$F(w)$ y su transformada inversa correspondiente $f(t)$, arriba mostradas, observamos que estas ecuaciones son similares pero no idénticas. Esta simetría conduce a una propiedad de la Transformada de Fourier conocida como : **" Dualidad "** o **" Simetría "** .
Dicha propiedad establece lo siguiente :

$$\begin{cases} Si: & \mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(w) \\ Entonces: & F(t) = 2\pi f(-w) \end{cases}$$

Demostración:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{i\,wt}\, dw \qquad \Rightarrow \qquad 2\pi\, f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{i\,wt}\, dw$$

de donde:

$$2\pi\, f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{-i\,wt}\, dw$$

Como "w" es una variable" muda" en la integral de la derecha, puede ser reemplazada por la variable "x", obteniéndose:

$$2\pi\, f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{-i\,xt}\, dx$$

De aquí que: $\quad 2\pi\, f(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{-i\,xw}\, dx$

y reemplazando ahora la variable "x" por la variable "t" se obtiene :

$$2\pi\, f(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-i\,wt}\, dt = \mathcal{F}[F(t)]$$

lo que podemos simbolizar escribiendo: $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-w)$
En resumen , podemos escribir :

$f(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$F(w)$
$F(t)$	$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$	$2\pi f(-w)$

Así, con el uso de esta propiedad, puede obviarse en muchas oportunidades el cálculo directo de la Transformada de Fourier a través de su ecuación de síntesis, pues la misma involucra frecuentemente mucho trabajo. De este modo, se pueden obtener muchas transformaciones complejas a partir de unas pocas transformadas conocidas.

A continuación se ilustra con un ejemplo lo aquí expuesto:
Ejemplo 1 :
a) Aplicando la propiedad conocida como " Dualidad ", calcule la Transformada

de Fourier de la señal: $g(t) = B\,\text{Sinc}(w_0 t)$.

Solución:

Las figuras a) y b) muestran las gráficas de un pulso rectangular convencional, es decir, pulso de amplitud A, duración δ y centrado en el origen, expresado por: $f(t) = AG_\delta(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)$, y de su correspondiente Transformada de Fourier $F(w)$:

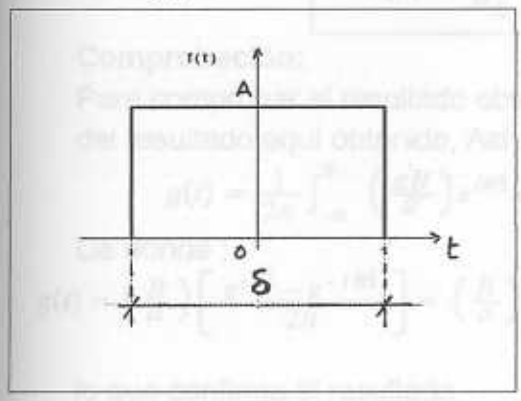


Fig.a: $f(t) = AG_\delta(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)$

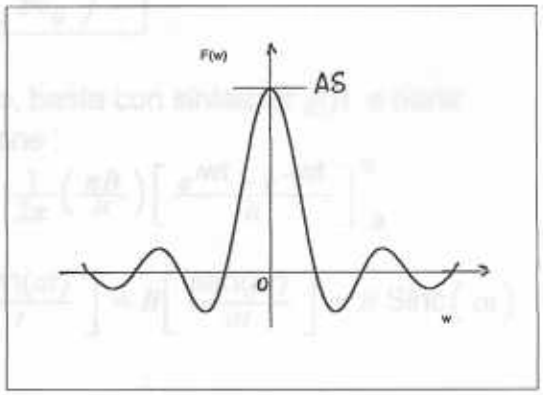
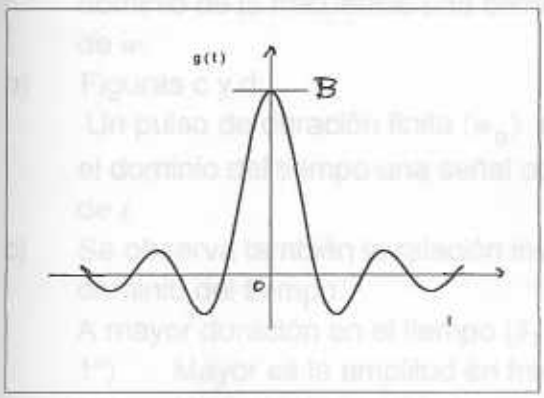
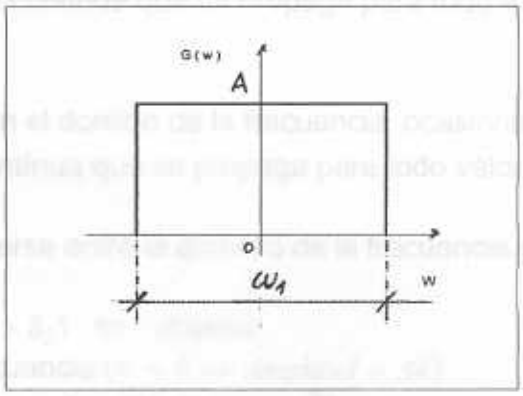


Fig b: $F(w) = A\delta\,\text{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$

Las figuras c) y d) muestran a la función $g(t) = B\,\text{Sinc}(w_0 t)$ y su correspondiente Transformada de Fourier $G(w)$, respectivamente.



(Fig c: $g(t) = B\,\text{Sinc}(w_0 t)$)



(Fig.d: $G(w) = A\prod\left(\frac{w}{w_1}\right)$)

La propiedad denominada " Dualidad " establece que:

Por lo que: $\begin{cases} \dfrac{Aw_1}{2\pi} = B \\ w_0 = \dfrac{w_1}{2} \end{cases}$

De donde, resolviendo por A y w_0 , se obtiene : $\begin{cases} A = \dfrac{2\pi B}{w_1} \\ w_1 = 2\,w_0 \end{cases}$

Es decir, $\begin{cases} A = \dfrac{2\pi B}{2w_0} = \dfrac{\pi B}{w_0} \\ w_1 = 2\,w_0 \end{cases}$

Por lo que :

$$\boxed{G(w) = \frac{\pi B}{w_0}\prod\left(\frac{w}{2w_0}\right)}$$

Comprobación:

Para comprobar el resultado obtenido, basta con sintetizar $g(t)$ a partir del resultado aquí obtenido, Así se tiene :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\pi B}{a}\right)e^{iwt}\,dw = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi B}{a}\right)\left[\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{it}\right]_{-a}^{a}$$

De donde :

$$g(t) = \left(\frac{B}{a}\right)\left[\frac{e^{i\,at}-e^{-i\,at}}{2it}\right] = \left(\frac{B}{a}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}(at)}{t}\right] = B\left[\frac{\operatorname{sen}(at)}{at}\right] = B\,\operatorname{Sinc}(at)$$

lo que confirma el resultado.

Obsérvese lo siguiente:

a) Figuras a y b:
Un pulso de duración finita (δ) en el domino del tiempo, ocasiona en el dominio de la frecuencia una señal contínua que se propaga para todo valor de w.

b) Figuras c y d:
Un pulso de duración finita (w_0) en el domino de la frecuencia, ocasiona en el dominio del tiempo una señal contínua que se propaga para todo valor de t.

c) Se observa también la ralación inversa entre el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo.
A mayor duración en el tiempo $(\delta_1 > \delta_2)$ se obtiene:
1°) Mayor es la amplitud en frecuencia:$(w = 0 \Rightarrow Amplitud = A\delta)$
2°) Más angosta es la respuesta en frecuencia: $w_c = \dfrac{2\pi}{\delta}$

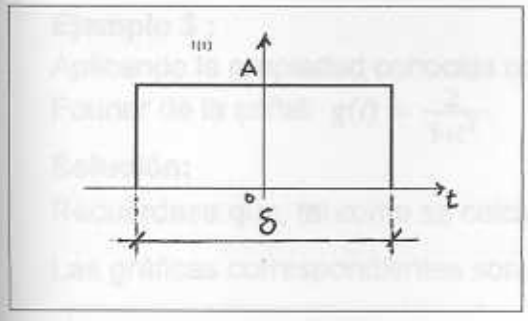
== oo ==

Ejemplo 2 :

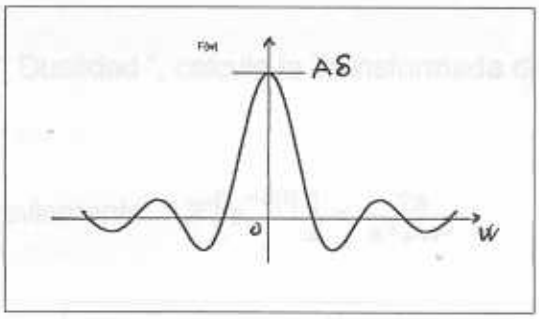
a) Aplicando la propiedad conocida como " Dualidad ", calcule la Transformada de Fourier de la señal: $g(t) = 4\,\operatorname{Sinc}(8t)$.

Solución:

Las figuras e) y f) muestran las gráficas de un pulso rectangular convencional : $f(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)$, y de su correspondiente Transformada de Fourier $F(w)$.

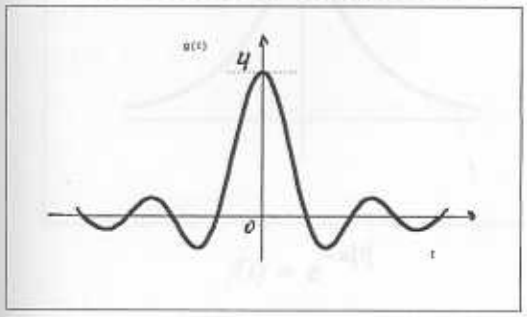


(Fig.e : $f(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)$)

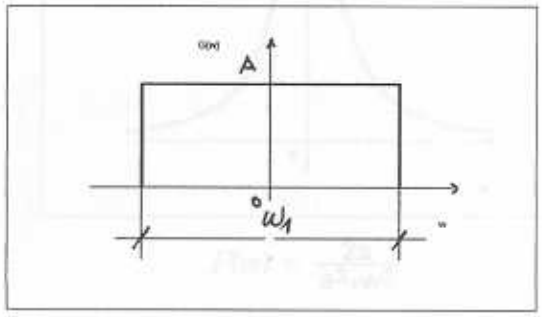


(Fig f : $F(w) = A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$)

Por "Dualidad " tenemos que :



(Fig g : $g(t) = 4\ \mathrm{Sinc}(8t)$)

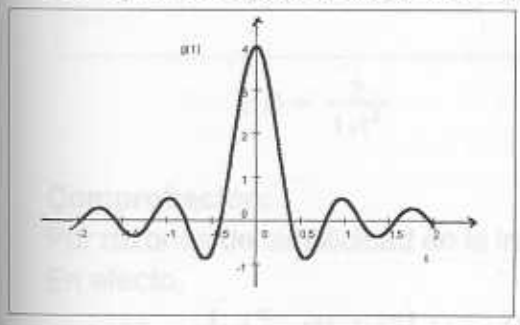


(Fig. h : $G(w) = A\prod\left(\frac{w}{w_0}\right)$)

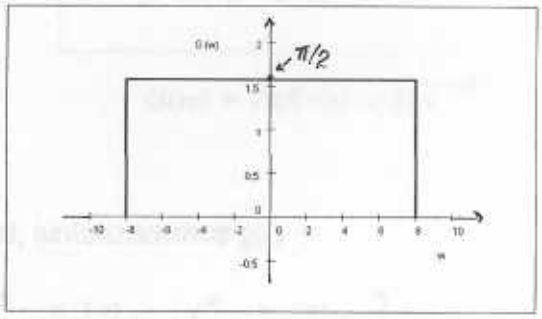
En este caso : $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{Aw_1}{2\pi} = 4 \\ 8 = \dfrac{w_1}{2}. \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{8\pi}{w_1} \\ w_1 = 16\ rad./seg. \end{array}\right.$

Por lo tanto : $G(w) = \frac{8\pi}{16}\prod\left(\frac{w}{16}\right) = \frac{\pi}{2}\prod\left(\frac{w}{16}\right)$

Las siguientes figuras ilustran lo aquí expuesto:



$g(t) = 4\mathrm{Sinc}(8t)$



$G(w) = \frac{\pi}{2}\prod\left(\frac{w}{16}\right)$

= oo =

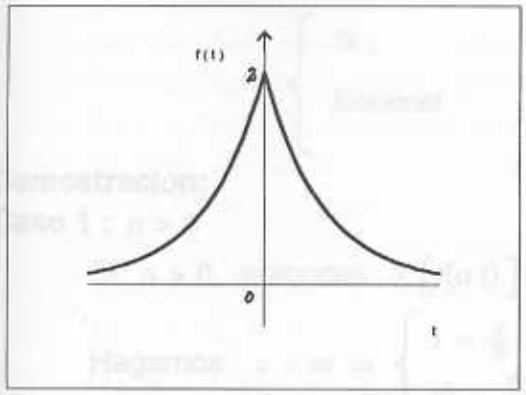
Ejemplo 3 :

Aplicando la propiedad conocida como " Dualidad ", calcule la Transformada de Fourier de la señal: $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$.

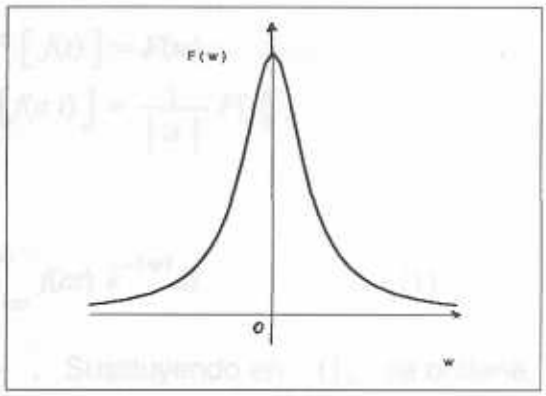
Solución:

Recuérdese que, tal como se calculó previamente: $\mathcal{F}\left[e^{-a|t|}\right] = \frac{2a}{a^2+w^2}$

Las gráficas correspondientes son:

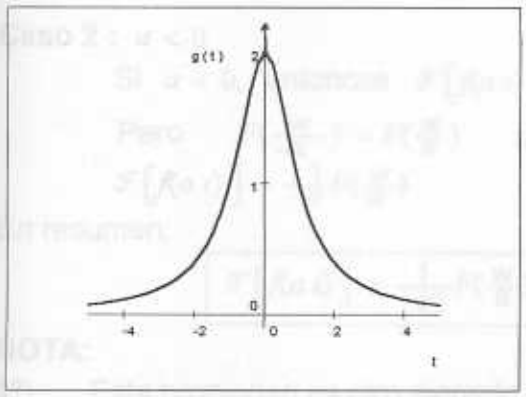


$f(t) = e^{-a|t|}$

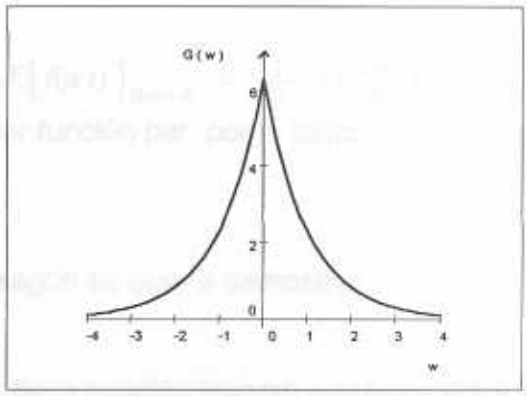


$F(w) = \frac{2a}{a^2+w^2}$

Luego, por "Dualidad " se obtiene: $G(w) = 2\pi f(-w)\big|_{a=1} = 2\pi e^{-|-w|} = 2\pi e^{-|w|}$



$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$



$G(w) = 2\pi f(-w) = 2\pi e^{-|w|}$

Comprobación:

Por razones de simplicidad en la integral, sintetizaremos $g(t)$:

En efecto,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(w)e^{iwt}dw = \frac{2\pi}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{w}e^{iwt}dw + \int_{0}^{\infty} e^{-w}e^{iwt}dw\right] \quad \Rightarrow$$

$$g(t) = \left[\int_{-\infty}^{0} e^{w(1+it)}dw + \int_{0}^{\infty} e^{-w(1-it)}dw\right] = \frac{1}{1+it} + \frac{1}{1-it} \quad \Rightarrow$$

$g(t) = \dfrac{1 - i\,t + 1 + i\,t}{1 + t^2} = \dfrac{2}{1+t^2}$ lo que confirma el resultado antes obtenido.

$$= \text{oo} =$$

14.2.3) Escalamiento en tiempo y en frecuencia

Esta propiedad establece lo siguiente:

$$\begin{cases} Si: & \mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(w) \\ Entonces: & \mathcal{F}\left[f(a\,t)\right] = \dfrac{1}{|a|} F(\frac{w}{a}) \end{cases}$$

Demostración:

Caso 1 : $a > 0$

Si $a > 0$, entonces $\mathcal{F}\left[f(a\,t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\, e^{-iwt} dt$ ...(1)

Hagamos : $x = at \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{a} \\ dt = \frac{dx}{a} \end{array} \right\}$. Sustituyendo en (1), se obtiene:

$$\mathcal{F}\left[f(a\,t)\right] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\left(\frac{iw}{a}\right)x} dx = \frac{1}{a}F(\frac{w}{a})$$

Caso 2 : $a < 0$

Si $a < 0$, entonces $\mathcal{F}\left[f(a\,t)\right] = \mathcal{F}\left[f(a\,t)\right]_{a=-a} = \frac{1}{-a} F(\frac{w}{-a}) \Rightarrow$

Pero $F(\frac{w}{-a}) = F(\frac{w}{a})$ por ser función par, por lo tanto:

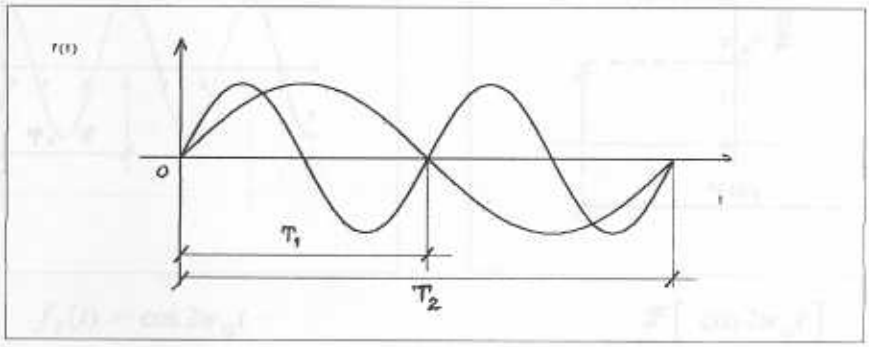
$\mathcal{F}\left[f(a\,t)\right] = -\frac{1}{a}F(\frac{w}{a})$

En resumen:

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f(a\,t)\right] = \frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})}$$ según se quería demostrar

NOTA:

1°) Esta propiedad es otro ejemplo más de la relación inversa existente entre el tiempo y la frecuencia. Conforme el período T se incrementa en una señal, disminuye su Densidad Espectral : $w_0 = \frac{2\pi}{T}$. Luego, $T_2 > T_1 \Rightarrow w_2 < w_1$.



2°) Un escalamiento lineal en el tiempo $(t \to at)$, produce, además de un escalamiento en amplitud de $\frac{1}{|a|}$, un escalamiento lineal en frecuencia también por un factor $\frac{1}{a}$, y viceversa.

3°) Obviamente, si $a = -1$, entonces : $\boxed{\mathcal{F}\left[f(-t)\right] = F(-w)}$

4° La función $f(at)$ representa que la función $f(t)$ ha sido comprimida en la escala del tiempo por un factor "a". Análogamente, una función $F(\frac{w}{a})$ representa que la función $F(w)$ ha sido expandida en la escala de frecuencias por el mismo factor "a".

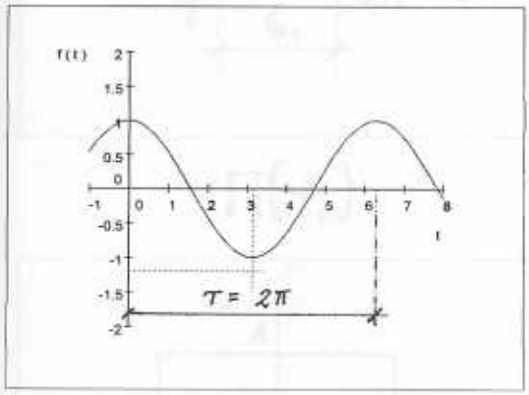
La propiedad de escalamiento establece por lo tanto que la compresión en el dominio del tiempo es equivalente a una expansión en el dominio de la frecuencia, y viceversa.

Como otro ejemplo, consideremos la señal : $f_1(t) = \cos w_0 t$. Esta señal tiene componentes de frecuencia en $\pm w_0$.

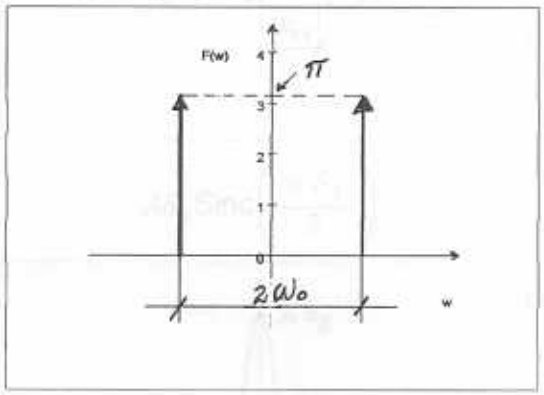
Así mismo, la señal $f_2(t) = \cos 2w_0 t$ representa una compresión de $\cos w_0 t$ por un factor 2 y sus componentes de frecuencia se ubican en $\pm 2w_0$.

Las siguientes gráficas ilustran lo aquí expuesto:

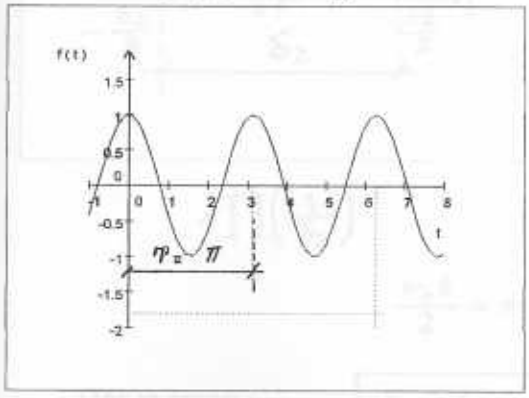
(Se ha supuesto en todas ellas que : $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T = 1 \Rightarrow w_0 = 2\pi$)



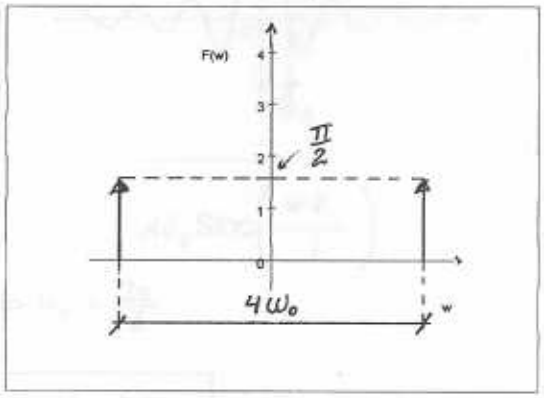
$f_1(t) = \cos w_0 t.$



$\mathcal{F}[\cos w_0 t]$



$f_2(t) = \cos 2w_0 t$



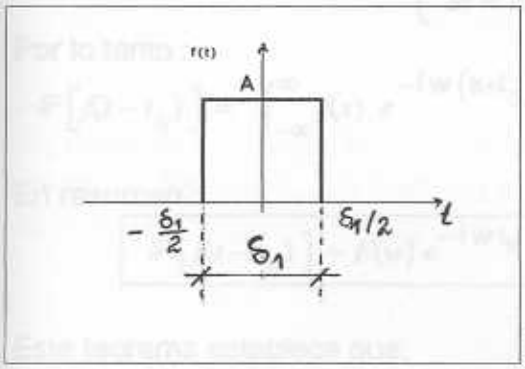
$\mathcal{F}\left[\cos 2w_0 t\right]$

$$\left(w = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{w}{2\pi} = \frac{1}{T},\ \text{luego},\ T_1 > T_2 \Rightarrow f_1 < f_2\right)$$

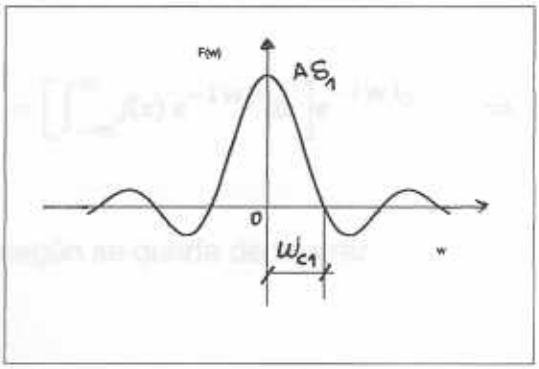
Un caso común de lo aquí expuesto lo constituye el de una cinta de audio cuando ésta se graba a una velocidad y se reproduce a una velocidad difererente. Si la velocidad de reproducción es mayor que la velocodad de grabación, de manera que corresponde a una compresión en el tiempo $(a > 1)$, entonces el espectro se expande en frecuencia, es decir, el efecto audible consiste en que las frecuencias de la reproducción son más altas.

De manera inversa, si la velocidad de reproducción es más baja que la de grabación, $(0 < a < 1)$, la señal de la reproducción contendrá frecuencias más bajas.

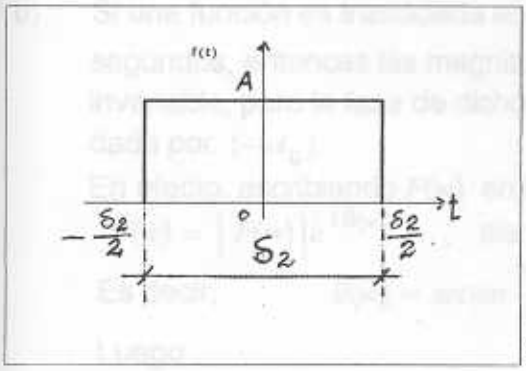
Otro ejemplo de la expansión en frecuencia como consecuencia de una compresión en el tiempo, se ilustra en las siguientes figuras, anteriormente estudiadas:



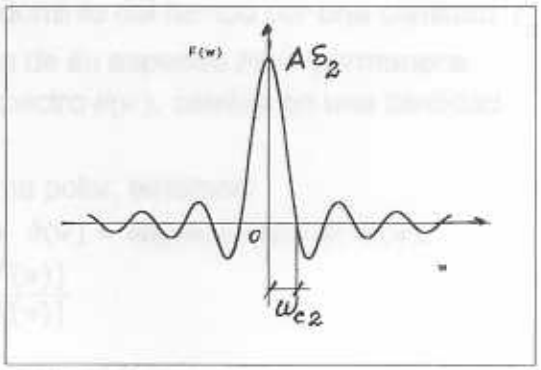
$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$



$$A\prod\left(\frac{t}{\delta_1}\right) \qquad\qquad A\delta_1 \operatorname{Sinc}\left(\frac{w\,\delta_1}{2}\right)$$



$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$



$$A\prod\left(\frac{t}{\delta_2}\right) \qquad\qquad A\delta_2 \operatorname{Sinc}\left(\frac{w\,\delta_2}{2}\right)$$

$$\frac{w_c\delta}{2} = \pi \qquad \Rightarrow w_c = \frac{2\pi}{\delta}$$

Por lo tanto : $\boxed{\delta_1 < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad w_{c_1} > w_{c_2}}$

14.2.4) Traslación en tiempo y en frecuencia

Caso 1 : Traslación en el dominio del tiempo

$$\begin{cases} Si & \mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(w) \quad y \quad t_0 \text{ es una constante real} \\ Entonces: & \mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right] = F(w)\, e^{-i w t_0} \end{cases}$$

Demostración:

Consideremos la expresión que define la ecuación de síntesis de $F(w)$:

$$\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\; e^{-i w t} dt$$

Hagamos: $\quad t - t_0 = x \Rightarrow \begin{cases} t = x + t_0 \\ dt = dx \end{cases}$

Por lo tanto :

$$\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\; e^{-i w (x+t_0)} dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i w x} dx\right] e^{-i w t_0} \quad \Rightarrow$$

En resumen :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right] = F(w)\, e^{-i w t_0}}$$, según se quería demostrar

Este teorema establece que:

a) Una traslación en t_0 en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar por la exponencial compleja: $e^{-i w t_0}$ en el dominio de la frecuencia.

b) Si una función es trasladada en el dominio del tiempo por una cantidad t_0 segundos, entonces las magnitudes de su espectro $F(w)$ permanece invariable, pero la fase de dicho espectro $\theta(w)$, cambia en una cantidad dada por $(-wt_0)$.

En efecto, escribiendo $F(w)$ en forma polar, tenemos:

$F(w) = |F(w)|\, e^{i\theta(w)}$, siendo $\theta(w) = \textit{ángulo de fase de } F(w)$,

Es decir, $\quad \theta(w) = \arctan \dfrac{\mathrm{Im}[F(w)]}{Re[F(w)]}$

Luego :

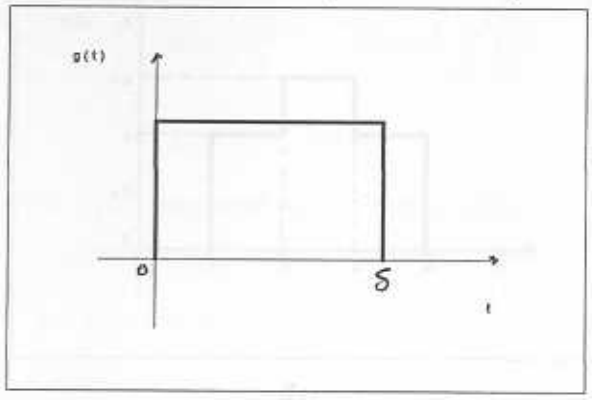
$$\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right] = \left[|F(w)|\, e^{i\theta}\right] e^{-i w t_0} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f(t-t_0)\right] = |F(w)|\, e^{i[\theta(w) - w t_0]}}$$

== oo ==

Ejemplo 4:

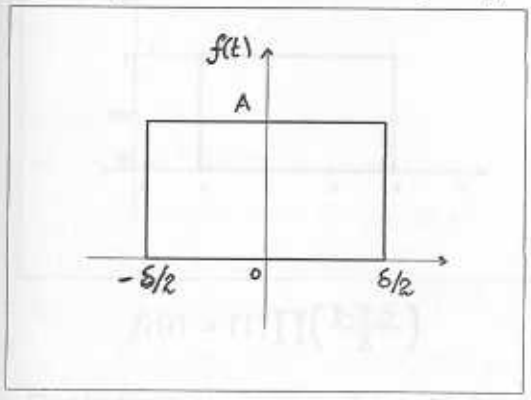
Aplicando la propiedad conocida como " Dualidad " encuentre la Transformada de Fourier del pulso rectangular de altura A y duración δ que se muestra en la figura :



$$g(t) = A\prod\left(\frac{t-\frac{\delta}{2}}{\delta}\right)$$

Solución:

Tal como ya se calculó, la transformada de Fourier de un pulso rectangular de altura A y duración δ, centrado en el origen, como el mostrado en la figura i), es la que se muestra en la figura j):



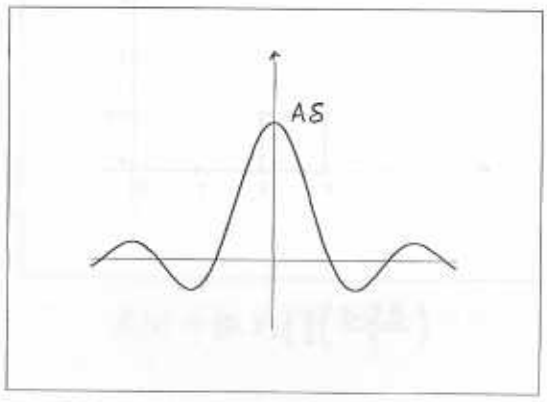


Fig i) : $f(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)$ Fig. j) : $F(w) = A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$

$$\mathcal{F}\left[A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)\right] = A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$$

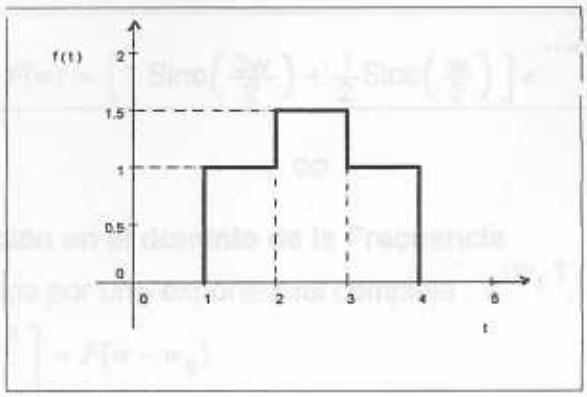
Evidentemente, $g(t) = f(t-\frac{\delta}{2})$

por lo que, aplicando la propiedad de Traslación en Tiempo, obtenemos:

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\,g(t)\,\right] = \mathcal{F}\left[f(t-\tfrac{\delta}{2})\,\right] = A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)e^{-iw\frac{\delta}{2}}}$$

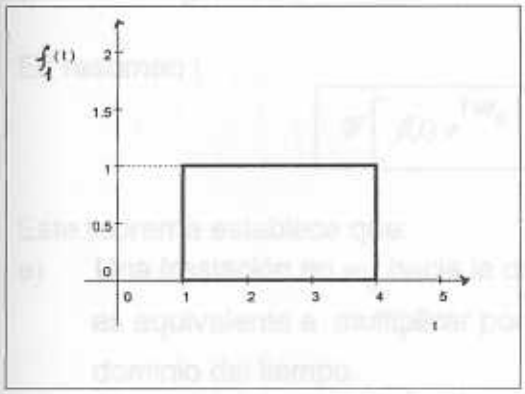
== oo ==

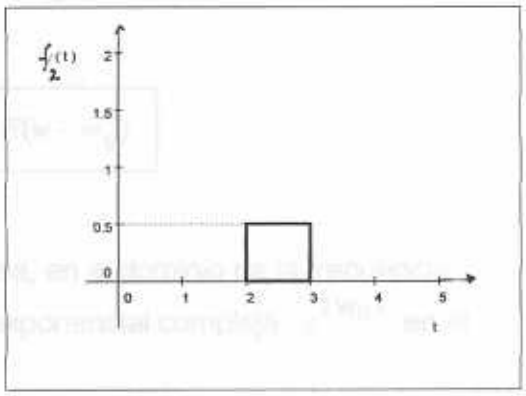
Ejemplo 5:
Calcule la Transformada de Fourier de la señal $f(t)$ que se muestra en la figura :



$f(t)$

Solución:
Obsérvese que $f(t)$ puede expresarse como la combinación lineal de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, siendo $f_1(t)$ y $f_2(t)$ los pulsos rectangulares mostrados a continuación:





$$f_1(t) = (1)\prod\left(\frac{t-2.5}{3}\right) \qquad f_2(t) = (0.5)\prod\left(\frac{t-2.5}{1}\right)$$

Por lo tanto : $f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad \Rightarrow$

$$f(t) = (1)\prod\left(\frac{t-2.5}{3}\right) + (0.5)\prod\left(\frac{t-2.5}{1}\right)$$

Luego :

$$\text{Para } f_1(t) : \left\{\begin{array}{l} A = 1 \\ \delta = 3 \\ t_0 = 2.5 \end{array}\right\} ; \quad \text{Para } f_2(t) : \left\{\begin{array}{l} A = 0.5 \\ \delta = 1 \\ t_0 = 2.5 \end{array}\right\}$$

por lo que, aplicando el teorema conocido como " Desplazamiento en el dominio del Tiempo", obtenemos :

$$F(w) = \mathcal{F}[f_1(t)] + \mathcal{F}[f_2(t)] = (1)(3)\,\text{Sinc}\left(\frac{w3}{2}\right)e^{-iw\frac{5}{2}} + (0.5)(1)\text{Sinc}\left(\frac{w1}{2}\right)e^{-iw\frac{5}{2}}$$

De donde :

$$\boxed{F(w) = \left[3\,\text{Sinc}\left(\frac{3w}{2}\right) + \frac{1}{2}\text{Sinc}\left(\frac{w}{2}\right)\right]e^{-iw\frac{5}{2}}}$$

= oo =

Caso 2 : Traslación en el dominio de la Frecuencia

Si $f(t)$ se multiplica por una exponencial compleja : $e^{iw_0 t}$, entonces

$$\mathcal{F}\left[f(t)\,e^{iw_0 t}\right] = F(w - w_0)$$

donde : $F(w) = \mathcal{F}f(t)$

Demostración:

La demostración de esta propiedad es consecuencia inmediata de la ecuación de síntesis de laTransformada de Fourier. En efecto :

$$\mathcal{F}\left[f(t)\,e^{iw_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{iw_0 t}\,e^{-iwt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-it(w-w_0)}\,dt = F(w - w_0)$$

En resumen :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f(t)\,e^{iw_0 t}\right] = F(w - w_0)}$$

Este teorema establece que:

a) Una traslación en w_0 hacia la derecha, en el dominio de la frecuencia, es equivalente a multiplicar por la exponencial compleja: $e^{iw_0 t}$ en el dominio del tiempo.

b) La multiplicación por $e^{iw_0 t}$ en el dominio del tiempo, traslada a todo el Espectro de Frecuencia $F(w)$ en una cantidad w_0 hacia la derecha, en el dominio de la frecuencia.

Por esta razón, este teorema se conoce también como : **" Teorema de Traslación en Frecuencia "**.

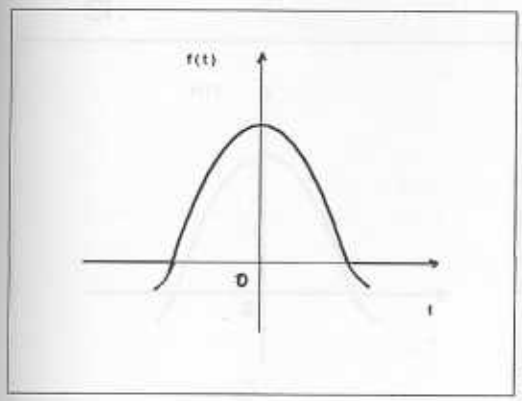
OBSERVACIÓN:

En los Sistemas de Telecomunicaciones, es muy necesario trasladar el Espectro de Frecuencia. Esto se logra, como ha quedado establecido, multiplicando la señal $f(t)$ por una señal exponencial compleja $e^{iw_0 t}$.

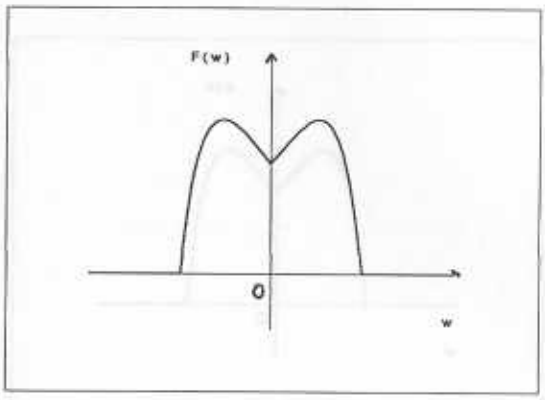
Este proceso se conoce como : " Modulación " y será desarrollado con más detalles en la siguiente propiedad.

Las siguientes gráficas ilustran en forma genérica lo aquí expuesto :

Si:

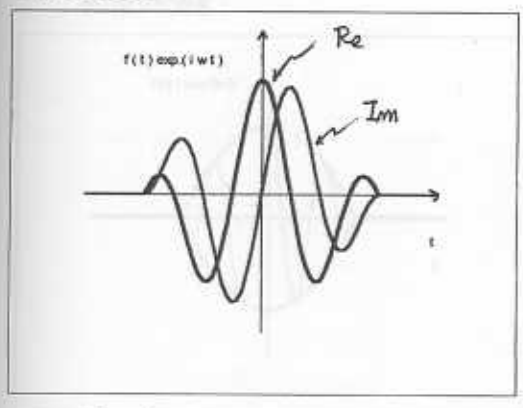


$\mathcal{F}$ $\leftrightarrow$

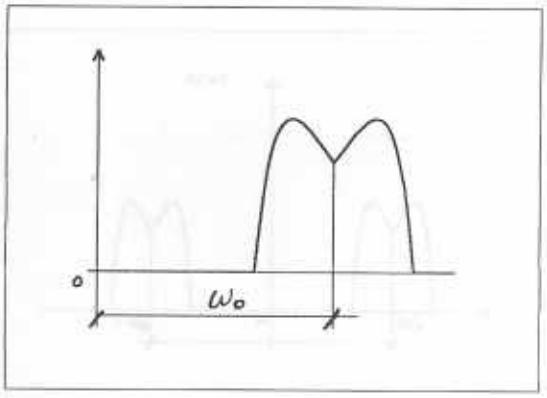


$f(t)$ $\qquad\qquad$ $F(w)$

Entonces:



$\mathcal{F}$ $\leftrightarrow$



$f(t)\, e^{i w_0 t} = f(t)\left[\cos w_0 t + i\, sen w_0 t\right]$ $\qquad\qquad$ $F(w - w_0)$

= oo =

14.2.5) Modulación

La siguiente propiedad juega, como ya se dijo, un papel central en el análisis de señales utilizadas en los Sistemas de Telecomunicaciones. Podemos distinguir los siguientes casos:

Caso 1) Multiplicación por un coseno:

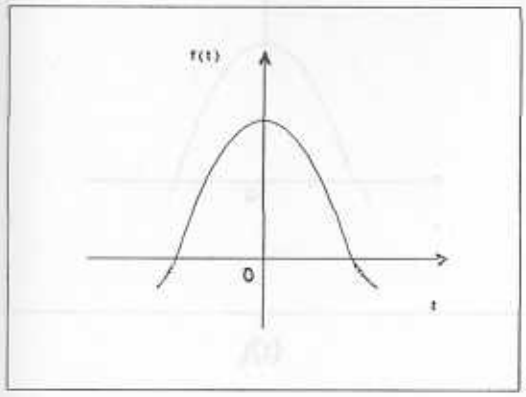
Usando el Teorema de Traslación en Frecuencia antes desarrollado, se obtiene que, si $f(t)$ es multiplicada por $\cos w_0 t$, entonces :

$$\mathcal{F}\left[f(t)\cos w_0 t\right] = \mathcal{F}\left[f(t)\,\frac{e^{i w_0 t} + e^{-i w_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[F(w + w_0) + F(w + w_0)\right]$$

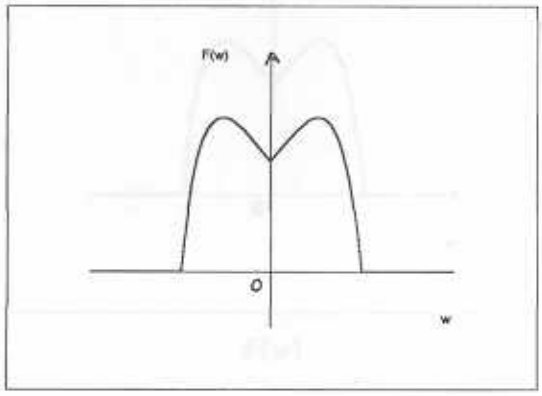
Es decir :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f(t)\cos w_0 t\right] = \frac{1}{2}\left[F(w + w_0) + F(w - w_0)\right]}$$

Las siguientes gráficas ilustran la modulación coseno, para un caso hipotético:
Si :

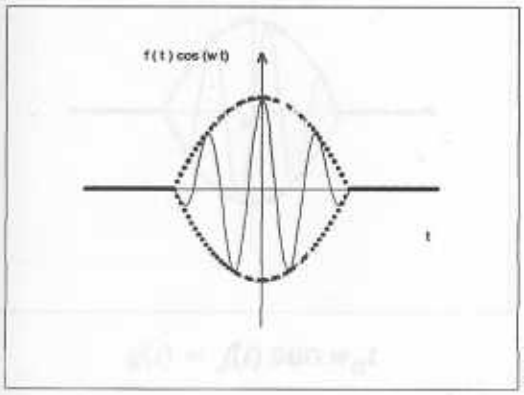


$\mathcal{F}$ $\leftrightarrow$

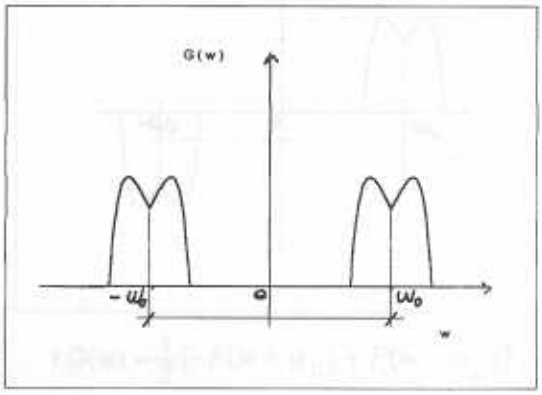


$f(t)$ $\qquad\qquad$ $F(w)$

Entonces :



$\mathcal{F}$ $\leftrightarrow$



$g(t) = f(t)\cos w_0 t$ $\qquad\qquad$ $G(w) = \frac{1}{2}[F(w+w_0) + F(w-w_0)]$

En este caso: $\begin{cases} \operatorname{Re} G(w) = \frac{1}{2}\left[\, F(w+w_0) - F(w-w_0)\,\right] \\ \operatorname{Im} G(w) = 0 \\ \theta(w) = \arctan\left(\dfrac{0}{\operatorname{Re} G(w)}\right) = 0, \forall w \in (-\infty, \infty) \end{cases}$

Caso 2) Multiplicación por un seno:

Análogamente, si $f(t)$ es multiplicada por : sen $w_0 t$, entonces :

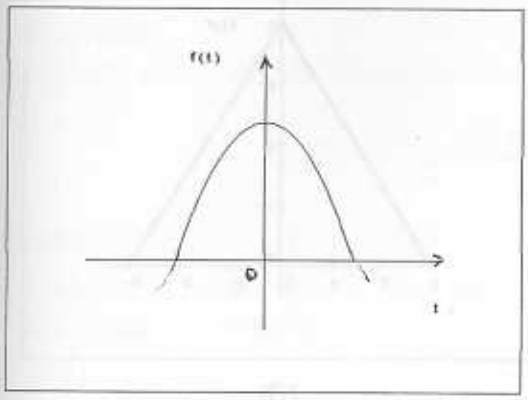
$$\mathcal{F}\left[f(t)\,\text{sen}\, w_0 t\right] = \mathcal{F}\left[f(t)\,\frac{e^{iw_0 t} - e^{-iw_0 t}}{2i}\right] = \frac{i}{2}\left[\, F(w+w_0) - F(w-w_0)\,\right]$$

Es decir :

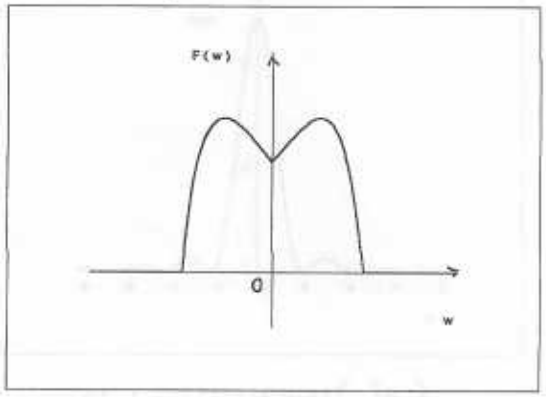
$$\boxed{\mathcal{F}\left[\, f(t)\cos w_0 t\,\right] = \frac{i}{2}\left[\, F(w+w_0) - F(w-w_0)\,\right]}$$

Las siguientes gráficas ilustran la modulación seno, para una señal hipotética:

Si:

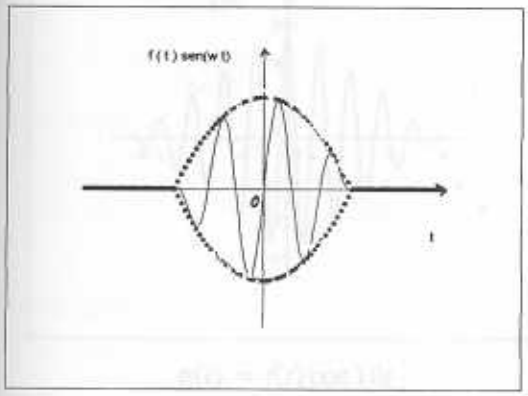


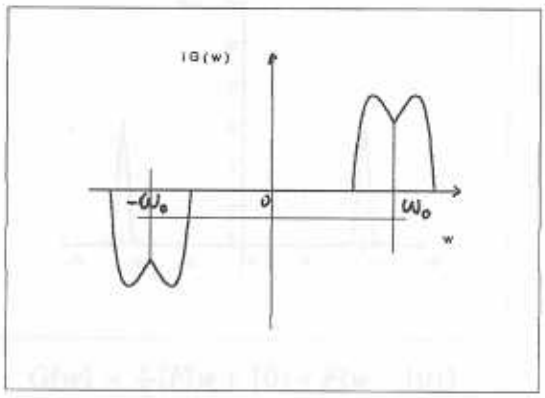
$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$



$f(t)$ $\qquad\qquad$ $F(w)$

Entonces:





$g(t) = f(t)$ sen $w_0 t$ $\qquad\qquad$ $i\,G(w) = \frac{1}{2}[-F(w+w_0) + F(w-w_0)]$

Obviamente, en este caso: $\begin{cases} \operatorname{Re} G(w) = 0 \\ \operatorname{Im} G(w) = \frac{1}{2}\left[\, F(w+w_0) - F(w-w_0)\,\right] \end{cases}$

= oo =

14.2.6) Ejemplos Resueltos I:

Los siguientes ejemplos ilustran la propiedad de Modulación

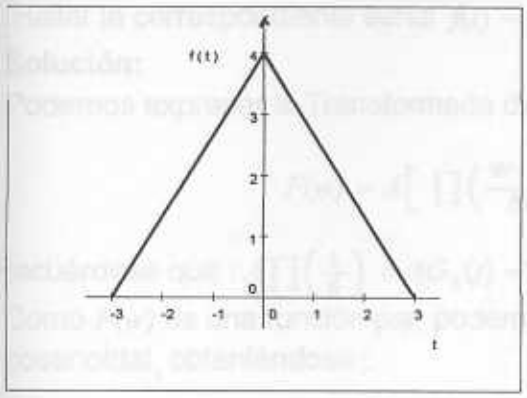
Ejemplo 6:

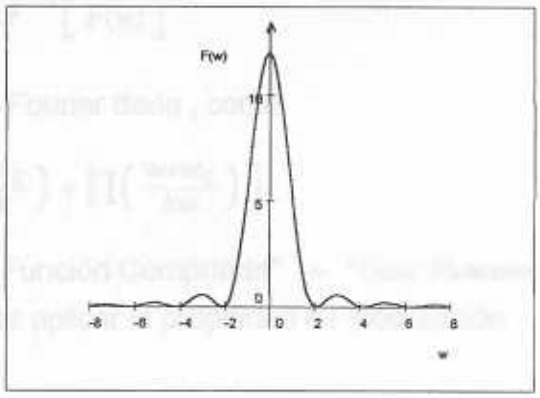
Encuentre la Transformada de Fourier de la función $g(t) = f(t)\cos 10t$, siendo

$$f(t) = \begin{cases} 4\left(1 - \frac{t}{3}\right), & \text{si } |t| < 3 \\ 0 & \text{, si } |t| > 3 \end{cases}$$

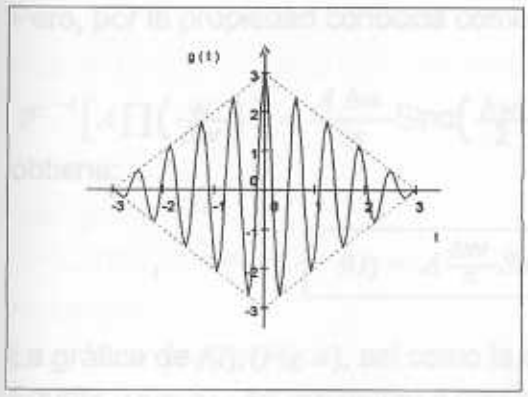
Solución:

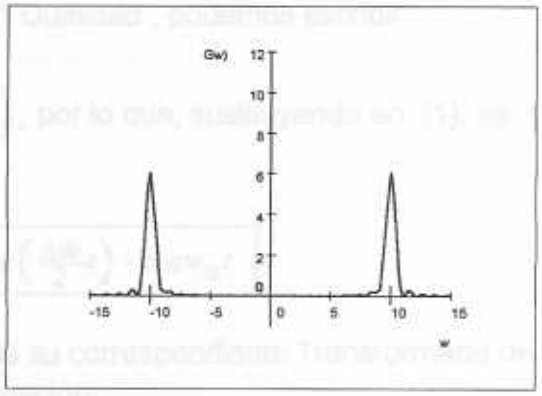
La gráfica de $f(t)$ así como la de su correspondiente Transformada de Fourier, obtenida previamente, se presentan de nuevo a continuación:





$f(t)$ $\qquad$ $F(w) = (4)(3)\text{Sinc}^2\left(\dfrac{3w}{2}\right)$





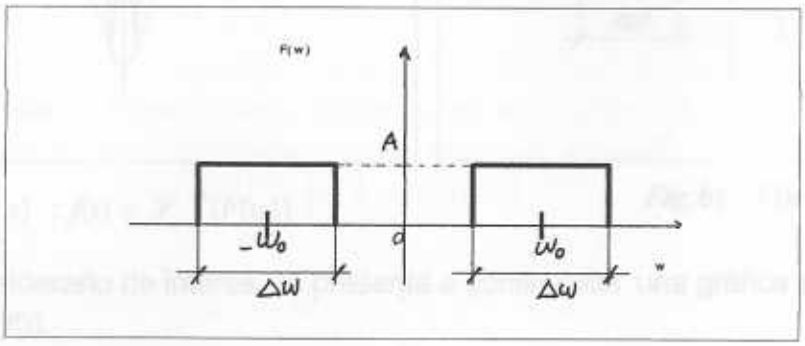
$g(t) = f(t)\cos 10t$ $\qquad$ $G(w) = \frac{1}{2}[F(w+10) + F(w-10)]$

Evidentemente, $G(w) = 6\left[\ \text{Sinc}^2\dfrac{3(w+10)}{2} + \text{Sinc}^2\dfrac{3(w+10)}{2}\ \right]$

= oo =

Ejemplo 7:

Considere la Transformada de Fourier cuya gráfica se presenta en la figura .



$F(w)$

Hallar la correspondiente señal $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\, F(w) \,\right]$

Solución:

Podemos expresar la Transformada de Fourier dada , como:

$$F(w) = A\left[\, \prod\left(\frac{w-w_0}{\Delta w}\right) + \prod\left(\frac{w+w_0}{\Delta w}\right) \,\right]$$

(Recuérdese que : $A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right) = AG_{\delta}(t)$ ="Función Compuerta" = "*Gate Function*")

Como $F(w)$ es una función par, podemos aplicar la propiedad de Modulación cosenoidal, obteniéndose :

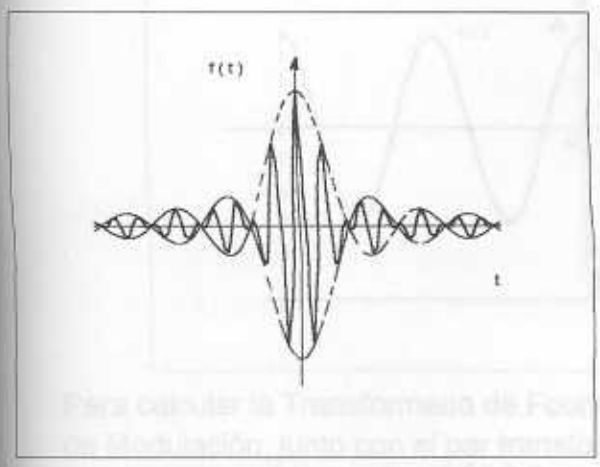
$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(w)] = \mathcal{F}^{-1}\left[A\prod\left(\frac{w}{\Delta w}\right)\right] \cdot 2\cos w_0 t \qquad \ldots(1)$$

Pero, por la propiedad conocida como " Dualidad", podemos escribir :

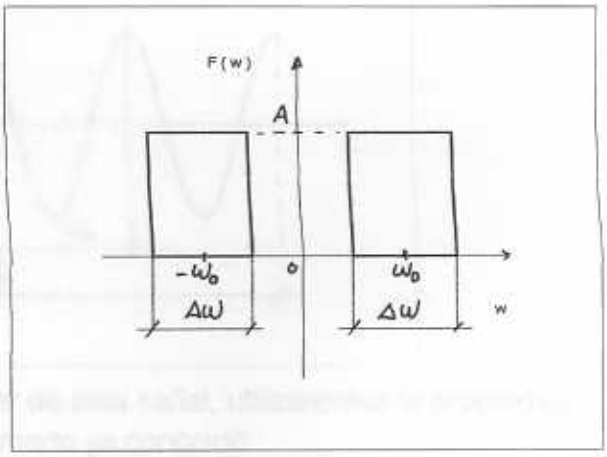
$\mathcal{F}^{-1}\left[A\prod\left(\frac{w}{\Delta w}\right)\right] = \frac{A\,\Delta w}{2\pi}\mathrm{Sinc}\left(\frac{\Delta wt}{2}\right)$, por lo que, sustituyendo en (1), se obtiene:

$$\boxed{f(t) = A\frac{\Delta w}{\pi}Sinc\left(\frac{\Delta w}{2}t\right) \cdot \cos w_0 t}$$

La gráfica de $f(t)$, $(Fig.\,a)$, así como la de su correspondiente Transformada de Fourier $(Fig.\,b)$, se presentan a continuación:



$Fig.\,a)\ : f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(w)]$



$Fig.\,b)\ : F(w)$

Por considerarlo de interés, se presenta a continación una gráfica ampliada de la función $f(t)$.

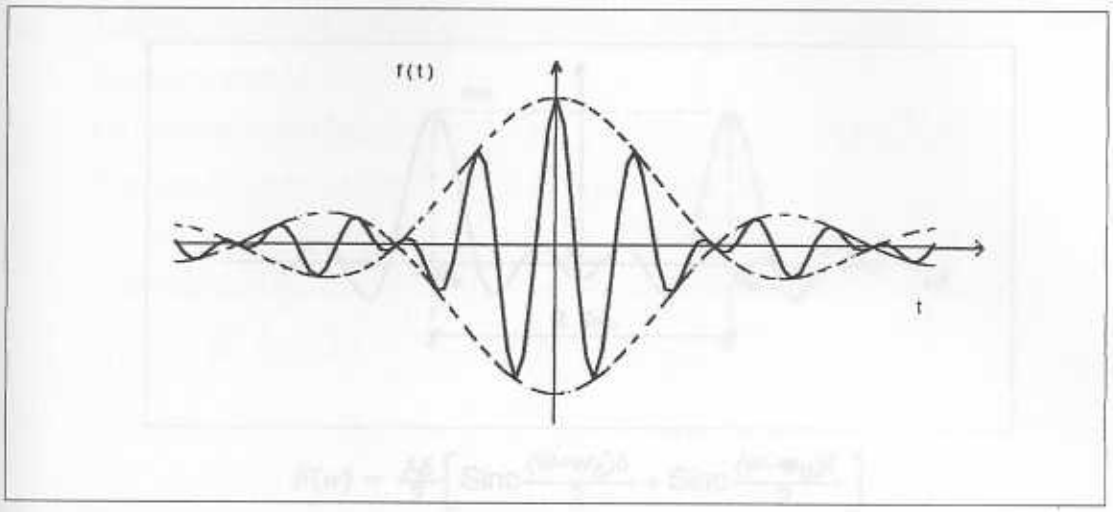


Fig. a) : $f(t)$

Nótese que $\pm f(t)$ es la envolvente de $f(t)\cos w_0 t$.

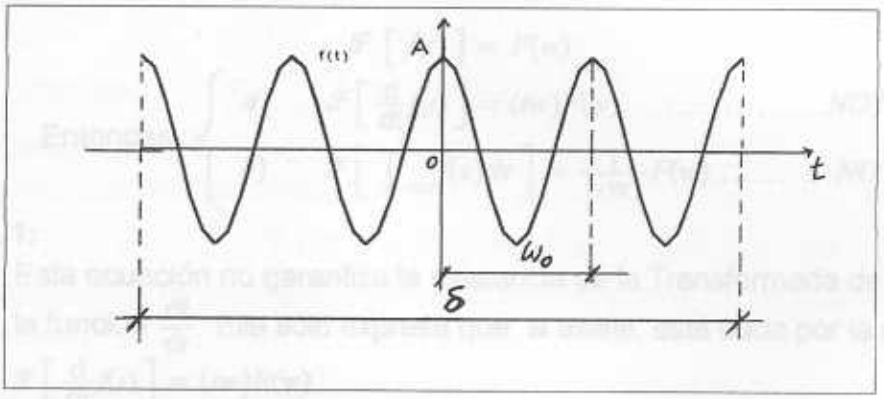
= oo =

Ejemplo 8:

Encuentre la Transformada de Fourier de la señal : $f(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)\cos(w_0 t)$

Solución:

Se trata de un pulso rectangular: $A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)$, de amplitud A, centrado en el origen y duración δ, modulado por $\cos(w_0 t)$, cuya gráfica se muestra a continuación:



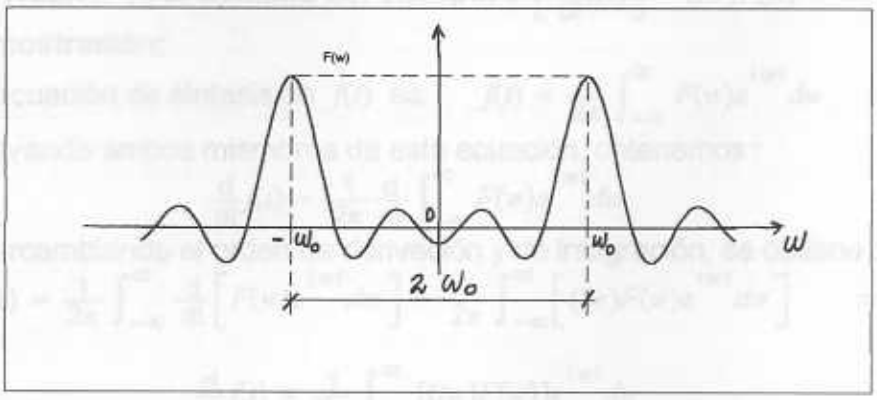
Para calcular la Transformada de Fourier de esta señal, utilizaremos la propiedad de Modulación, junto con el par transformado ya conocido :

$$F(w) = \mathcal{F}\left[A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)\right] = A\delta\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right) \quad , \quad \text{con: } A = 1$$

Luego:

$$F(w) = \mathcal{F}\left[A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)\cos w_0 t\right] = \frac{A\delta}{2}\left[\mathrm{Sinc}\frac{(w+w_0)\delta}{2} + \mathrm{Sinc}\frac{(w-w_0)\delta}{2}\right]$$

La gráfica de $F(w)$ será :



$$F(w) = \frac{A\delta}{2}\left[\text{Sinc}\frac{(w+w_0)\delta}{2} + \text{Sinc}\frac{(w-w_0)\delta}{2}\right]$$

(Transformada de Fourier de un Pulso Rectangular con modulación coseno)

Nótese que la multiplicación de $f(t)$ por $\cos w_0 t$ causa que la Transformada de Fourier de $f(t)$ se "duplique " y se " separe ". El centro de cada copia está desplazado $w = w_0$, siendo w_0 la frecuencia del coseno utilizado. La amplitud se reduce a la mitad.

== oo ==

14.2.7) Derivación e Integración en el tiempo

Sea $f(t)$ una señal con transformada de Fourier $F(w)$. Es decir :

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(w)$$

$$\text{Entonces :}\begin{cases} a) & \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = (iw)F(w) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots NOTA\ 1 \\ b) & \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{(iw)}F(w) \ldots\ldots\ldots\ldots NOTA\ 2 \end{cases}$$

NOTA 1:

Esta ecuación no garantiza la existencia de la Transformada de Fourier de la función $\frac{df}{dt}$. Ella sólo expresa que, si existe, está dada por la expresión : $\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = (iw)F(w)$.

NOTA 2:

Esta ecuación requiere que $\frac{F(w)}{w}$ esté definida en $w = 0$, lo cual es equivalente a decir que : $F(0) = 0$, o lo que es lo mismo :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$$

Si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \neq 0$, entonces : $F(0) \neq 0$, en cuyo caso:

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \pi F(0)\delta(w) + \frac{1}{(iw)}F(w)$$

a) **Derivación en el dominio del Tiempo:** $\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = (iw)F(w)$

Demostración:

La ecuación de síntesis de $f(t)$ es: $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$

Derivando ambos miembros de esta ecuación, obtenemos :

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$$

Intercambiando el orden de derivación y de integración, se obtiene :

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\left[F(w)e^{iwt}dw\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(iw)F(w)e^{iwt}dw\right] \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[(iw)F(w)]e^{iwt}dw$$

Por lo que, si : $\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$

Entonces, por analogía,

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = (iw)F(w)}$$

En forma similar, este resultado puede ser extendido a la derivada de orden "n", obteniéndose :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = (iw)^n F(w)}$$

== oo ==

b) **Integración en el dominio del tiempo:**

Si : $\mathcal{F}[f(t)] = F(w)$

Entonces: $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{(iw)}F(w)$

Demostración:

Consideremos la función :

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau \text{ , entonces : } \frac{d}{dt}g(t) = f(t) \qquad \ldots(1)$$

Aplicando Transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (1), obtenemos :

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}g(t)\right] = \mathcal{F}\left[f(t)\right] = F(w) & \text{por hipótesis} \\ \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}g(t)\right] = (iw)G(w) & \text{por la Propiedad 6.a} \end{cases}$$

De donde, igualando los segundos miebros de ambas expr4siones, se obtiene :

$$G(w) = \frac{1}{(iw)}F(w)$$

Sustituyendo en (1) :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{(iw)}F(w) + \pi F(0)\delta(w)}$$

Nótese que este resultado es válido sólo si : $G(w) = \frac{1}{(iw)}F(w)$ existe, es decir, si $g(t)$ es Absolutamente Integrable, lo cual sólo es posible si :

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Pero: $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$, por lo que la condición (2) es equivalente a escribir : $F(0) = 0$, si : $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = F(w)|_{w=0} = 0$

Concluimos así que :

a) La derivación en el dominio del tiempo es equivalente a la multiplicación por (iw) en el dominio de la frecuencia.

b) La integración en el dominio del tiempo es equivalente a la división por (iw) el dominio de la frecuencia.

c) El término : $\pi F(0)\delta(w)$ refleja el valor promedio (o de d-c) que puede resultar de la integración.

== oo ==

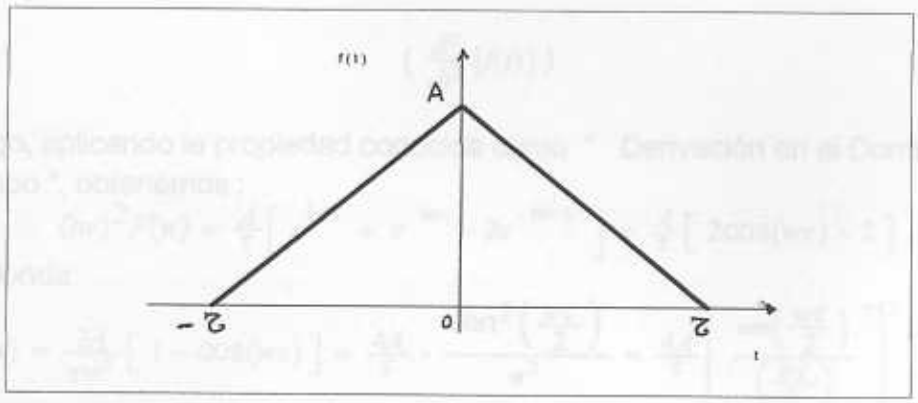
Ejemplo 9 :

Calcule la Transformada de Fourier de la función $f(t)$ dada por:

$$f(t) = \begin{cases} A\left[1 - \frac{|t|}{\tau}\right], & \text{si } |t| \le \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}$$

Solución:

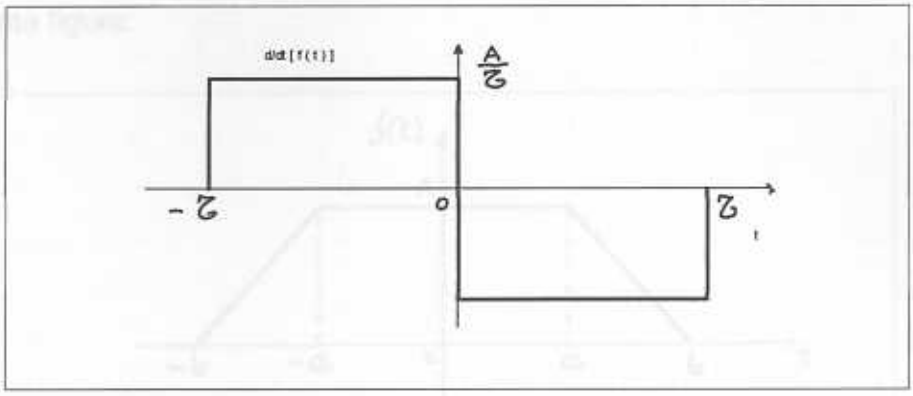
La gráfica de $f(t)$ se muestra en la siguiente figura :



$(f(t))$

La primera derivada de esta función y su respectiva gráfica se muestran a continuación:

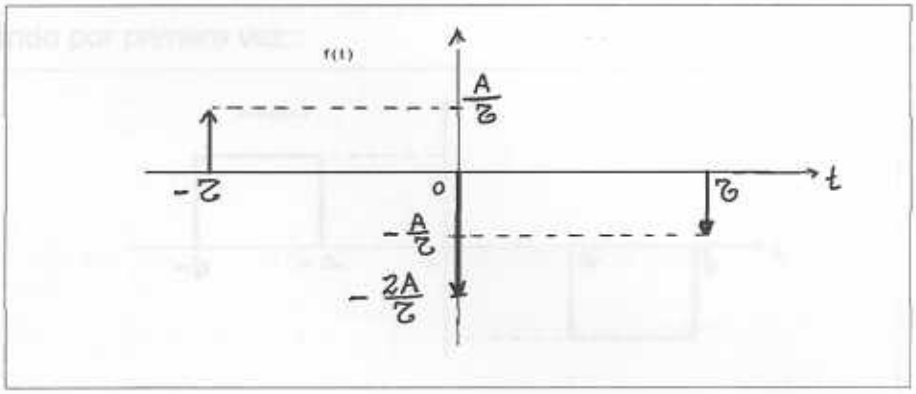
$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{A}{\tau}\left[\ \prod\left(\frac{t+\frac{\tau}{2}}{\tau}\right) + \prod\left(\frac{t-\frac{\tau}{2}}{\tau}\right)\right]$$



$$\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)$$

Derivando por segunda vez y graficando de nuevo, se obtiene:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\ f(t)\right] = \frac{A}{\tau}\left[\ \delta\left(t+\tau\right) + \delta\left(t-\tau\right) - 2\delta\left(t\right)\ \right]$$



$$\left(\frac{d^2}{dt^2}[f(t)]\right)$$

Luego, aplicando la propiedad conocida como " Derivación en el Dominioo del Tiempo ", obtenemos :

$$(iw)^2F(w) = \frac{A}{\tau}\left[\ e^{iw\tau} + e^{-iw\tau} - 2e^{-iw(0)}\ \right] = \frac{A}{\tau}\left[\ 2\cos(w\tau) - 2\ \right]$$

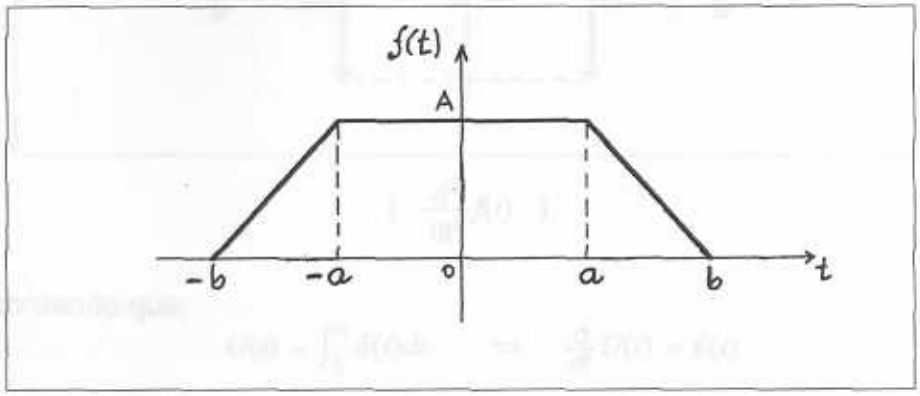
De donde:

$$F(w) = \frac{2A}{\tau w^2}\left[\ 1 - \cos(w\tau)\ \right] = \frac{4A}{\tau}\cdot\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{w\tau}{2}\right)}{w^2} = \frac{4A}{\tau}\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{w\tau}{2}\right)}{\left(\frac{w\tau}{2}\right)}\right]^2\left(\frac{\tau}{2}\right)^2$$

$$F(w) = A\tau\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{w\tau}{2}\right)}{\left(\frac{w\tau}{2}\right)}\right]^2 = A\tau\ \operatorname{Sinc}^2\left(\frac{w\tau}{2}\right)$$

Ejemplo 10 :

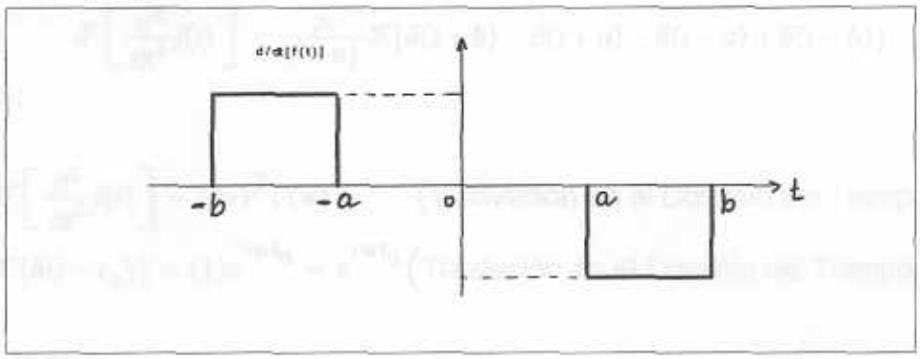
Calcule la Transformada de Fourier de la función trapezoidal $f(t)$ mostrada en la siguiente figura:



Solución:

Obsérvese que, en este caso, la función $f(t)$ tiene límite en los puntos $(-b,0)$ y $(b,0)$, (los límites laterales son iguales), por lo tanto, la función es contínua, por lo que admite al menos hasta la derivada segunda. En efecto,

Derivando por primera vez::



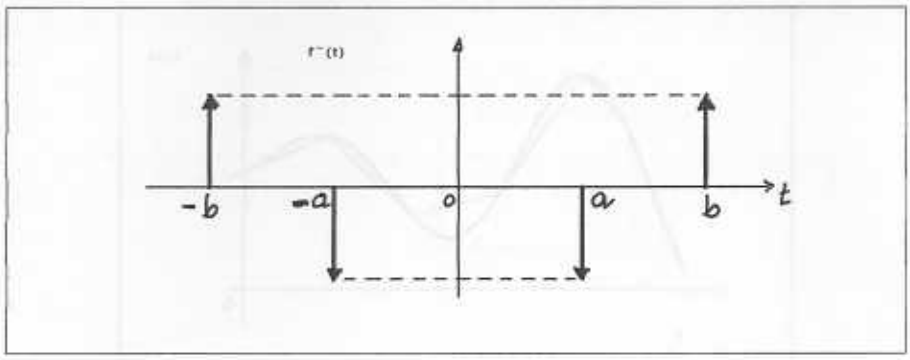
$$\left(\frac{d}{dt} f(t) \right)$$

De donde:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{A}{(b-a)}[U(t+b) - U(t+a)] - \frac{A}{(b-a)}[U(t-a) - U(t-b)] \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(t) = \frac{A}{(b-a)}[U(t+b) - U(t+a) - U(t-a) + U(t-b)]} \ldots (1)$$

Derivando por segunda vez :



$$\left(\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right)$$

Recordando que:

$$U(t) = \int_0^{\infty} \delta(t)dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}U(t) = \delta(t)$$

se obtiene :

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} f(t) = \frac{A}{(b-a)}[\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)]} \ldots (2)$$

Aplicando Transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (2), se obtiene:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = \frac{A}{(b-a)} \mathcal{F}[\delta(t+b) - \delta(t+a) - \delta(t-a) + \delta(t-b)]$$

Pero :

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = (iw)^2 F(w) & \text{(Derivación en el Dominio del Tiempo)} \\ \mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = (1)e^{iwt_0} = e^{iwt_0} & \text{(Traslación en el Dominio del Tiempo)} \end{cases}$$

Por lo que:

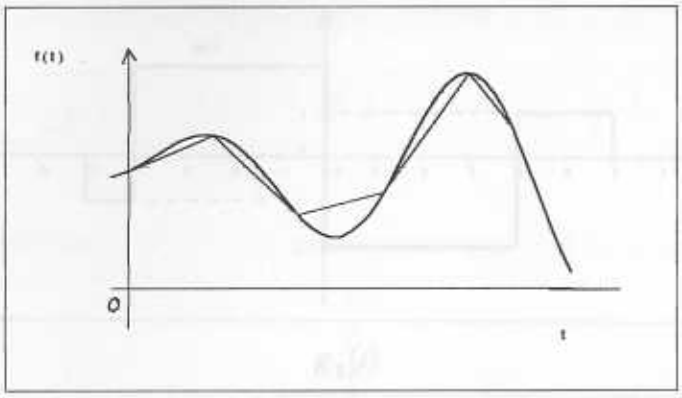
$$(iw)^2 F(w) = \frac{A}{(b-a)}\left[e^{iwb} - e^{iwa} - e^{-iwa} + e^{-iwb} \right]$$

De donde:

$$\boxed{F(w) = \frac{2A}{(b-a)}\left[\frac{\cos(aw) - \operatorname{sen}(bw)}{w^2} \right]}$$

NOTA:

El resultado de este problema sugiere un Método Numérico para obtener la Transformada de Fourier de una función $f(t)$. En efecto, cualquier función $f(t)$ puede ser aproximada por segmentos de rectas, tal como se muestra en la siguiente figura:



$f(t)$

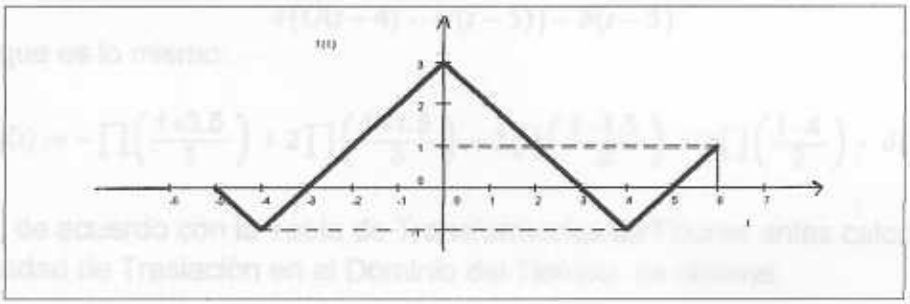
La aproximación puede ser llevada a cabo con tantos segmentos como se desée, para aumentar la precisión de la representación.
Evidentemente, la segunda derivada de la aproximación consistirá en un tren de impulsos cuya Transformada de Fourier puede ser obtenida por la técnica anterior.
Es decir,

$F(w)$ de la función buscada será : $F(w) = \frac{1}{(iw)^2}\mathcal{F}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right]$

14.2.8) Ejemplos Resueltos II:

Ejemplo 11:

Hallar la transformada de Fourier de la función $f(t)$ que se muestra a continuación:

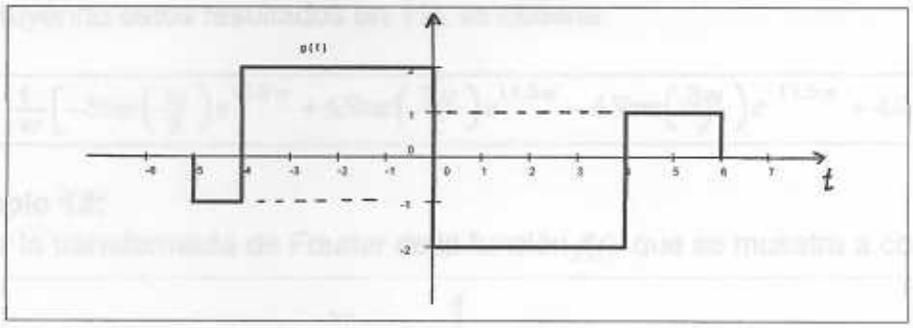


Solución:

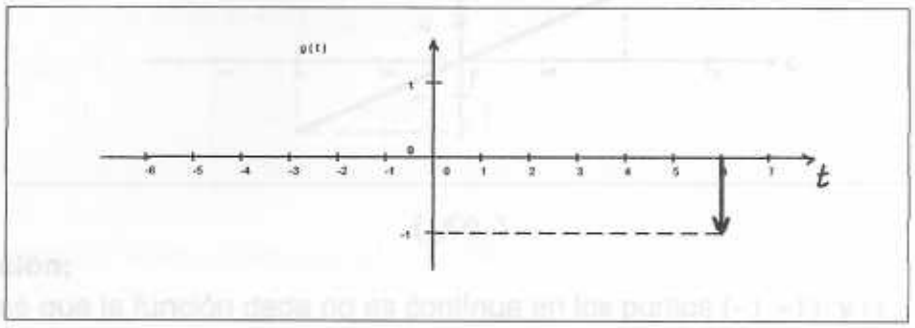
Nótese que la función dada, por ser discontínua en el punto $t = 6$, tiene por primera derivada en dicho punto, a un impulso. En consecuencia, no admite segunda derivada en dicho punto, por lo que sólo derivaremos una vez.
Así se obtiene que la derivada de la función dada, se puede representar por la combinación lineal de los dos gráficos que se muestran a continuación; es decir :

$$g(t) = \frac{d}{dt}f(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

donde :



$g_1(t)$



$g_2(t)$

Luego:

$$\frac{d}{dt}f(t) = -[U(t+5) - U(t+4)] + 2[U(t+4) - U(t)] - 2[U(t) - U(t-4)] +$$

$$+[U(t-4) - U(t-5)] - \delta(t-5)$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{d}{dt}f(t) = -\prod\left(\frac{t+3.5}{1}\right) + 2\prod\left(\frac{t+1.5}{3}\right) - 2\prod\left(\frac{t-1.5}{3}\right) + 2\prod\left(\frac{t-4}{2}\right) - \delta(t-5)$$

Pero, de acuerdo con la Tabla de Transformadas de Fourier antes calculada y a la propiedad de Traslación en el Dominio del Tiempo, se obtiene:

$$\begin{cases} -\prod\left(\frac{t+3.5}{1}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} -(1)(1)Sinc\left[\frac{w(1)}{2}\right]e^{i3.5w} = -Sinc\left[\frac{w}{2}\right]e^{i3.5w} \\ 2\prod\left(\frac{t+1.5}{3}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (2)(3)Sinc\left(\frac{3w}{2}\right)e^{i1.5w} = 6Sinc\left(\frac{3w}{2}\right)e^{i1.5w} \\ -2\prod\left(\frac{t-1.5}{3}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} -(2)(3)Sinc\left(\frac{3w}{2}\right)e^{-i1.5w} = -6Sinc\left(\frac{3w}{2}\right)e^{-i1.5w} \\ 2\prod\left(\frac{t-4}{2}\right) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (2)(2)Sinc\left(\frac{2w}{2}\right)e^{-i4w} = 4Sinc(w)e^{-i4w} \\ -\delta(t-5) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} -e^{-i5w} \end{cases}$$

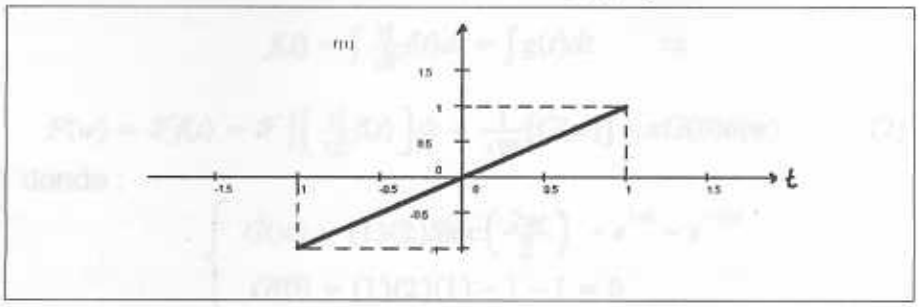
Además: $\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = (iw)F(w)$ .....(1)

Sustituyendo estos resultados en (1), se obtiene:

$$\boxed{F(w) = \frac{1}{iw}\left[-Sinc\left(\frac{w}{2}\right)e^{i3.5w} + 6Sinc\left(\frac{3w}{2}\right)e^{i1.5w} - 6Sinc\left(\frac{3w}{2}\right)e^{-i1.5w} + 4Sinc(w)e^{-i4w} - e^{-i5w}\right]}$$

Ejemplo 12:

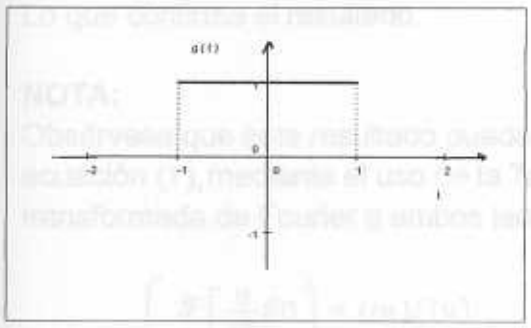
Hallar la transformada de Fourier de la función $f(t)$ que se muestra a continuación:



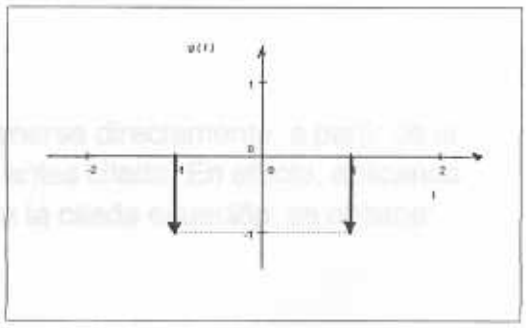
($f(t)$)

Solución:

Nótese que la función dada no es contínua en los puntos $(-1,-1)$ y $(1,1)$, por lo tanto, sólo derivaremos una vez. Así se obtiene que la derivada de la función dada, designada por $g(t) = \frac{d}{dt}f(t)$, se puede representar gráficamente como : $\frac{d}{dt}f(t) = g_1(t) + g_2(t)$, según se detalla a continuación.



$g_1(t)$



$g_2(t)$

Luego:

$$g(t) = Pulso\ Rectangular\ +\ Dos\ Impulsos\ (\text{en}\quad t = \pm 1)$$

Es decir, $\frac{d}{dt}f(t) = g(t) = \prod\left(\frac{t}{2}\right) - \delta(t+1) - \delta(t-1)$

$$\frac{d}{dt}f(t) = g(t) = \prod\left(\frac{t}{2}\right) - \left[\ \delta(t+1) + \delta(t-1)\ \right]$$

Luego ,

a) Usando la Propiedad conocida como :" Derivación en el Dominio del Tiempo ", obtenemos :

$$(iw)F(w) = (1)(2)\ \text{Sinc}\left(\frac{w2}{2}\right) - \left[e^{iw} + e^{-iw}\right] \quad \Rightarrow$$

$$(iw)F(w) = 2\ \text{Sinc}(w) - 2\left[\ \cos w\ \right]$$

De donde : $F(w) = \frac{2}{i\,w}[\text{Sinc}(w) - \cos w]$

O también,

$$\boxed{F(w) = \frac{2i}{w}\left[\ \cos w - \text{Sinc}(w)\ \right]}$$

b) Usando la Propiedad conocida como "Integración en el dominio del Tiempo" obtenemos :

$$f(t) = \int \frac{d}{dt} f(t)dt = \int g(t)dt \qquad \Rightarrow$$

$$F(w) = \mathcal{F}f(t) = \mathcal{F}\int\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]dt = \frac{1}{iw}[G(w)] + \pi G(0)\delta(w) \qquad \ldots(2)$$

donde :

$$\begin{cases} G(w) = (1)(2)Sinc\left(\frac{2w}{2}\right) - e^{iw} - e^{-iw} \\ G(0) = (1)(2)(1) - 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo estos resultados en (2), se obtiene:

$$F(w) = \frac{1}{iw}\left[2\text{Sinc}\left(\frac{2w}{2}\right) - e^{iw} - e^{-iw}\right] - \pi(0)\delta(w) = \frac{1}{iw}\left[2\text{Sinc}(w) - e^{iw} - e^{-iw}\right]$$

de donde : $\boxed{F(w) = \frac{2i}{w}\left[\ \cos w - \text{Sinc}(w)\ \right]}$

Lo que confirma el resultado.

NOTA:

Obsérvese que este resultado puede obtenerse directamente, a partir de la ecuación (1), mediante el uso de la Tabla antes citada. En efecto, aplicando transformada de Fourier a ambos lados de la citada ecuación, se obtiene:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = (iw)F(w) \\ \mathcal{F}\left[\prod\left(\frac{t2}{2}\right) - \delta(t+1) - \delta(t-1)\right] = 2\text{Sinc}\left(\frac{w2}{2}\right) - e^{iw} - e^{-iw} \end{cases}$$

de donde.

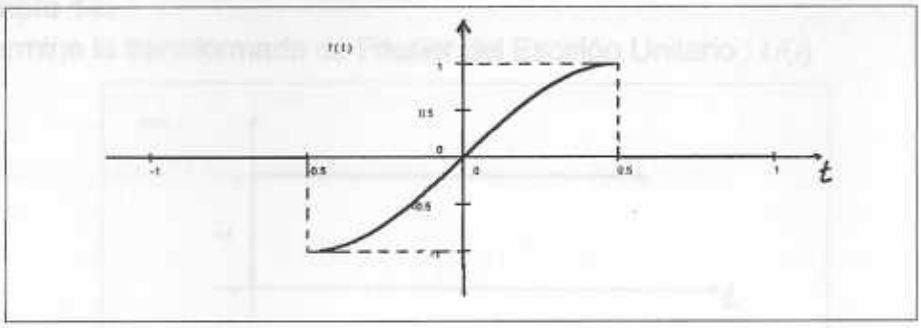
$$F(w) = \frac{1}{(iw)}\left[2\text{Sinc}(w) - 2\cos(w)\right] = \frac{2i}{w}\left[\ \cos w - \text{Sinc}(w)\ \right]$$

tal como se obtuvo anteriormente.

= oo =

Ejemplo 13:

Calcule la transformada de Fourier de la señal $f(t) = sen(\pi t)$ que se muestra a continuación:



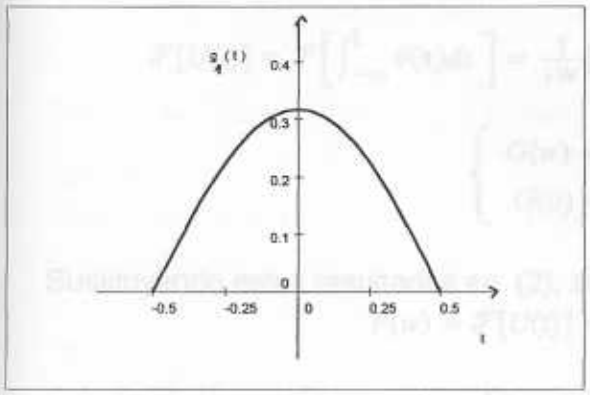
$f(t)$

Solución:

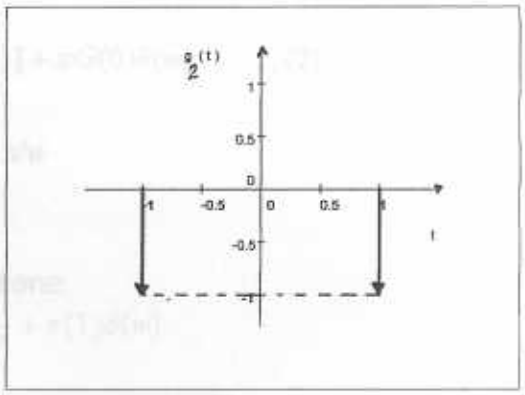
Nótese que la función dada no admite segunda derivada en los puntos $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ y $\left(\frac{1}{2},1\right)$, por ser discontínua en dichos puntos; por lo tanto, sólo derivaremos una vez. Así se obtiene que la derivada de la función dada, designada por $\frac{d}{dt}f(t)$ se puede representar gráficamente como :

$$\frac{d}{dt}f(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

según se detalla a continuación:



$g_1(t)$



$g_2(t)$

Luego:

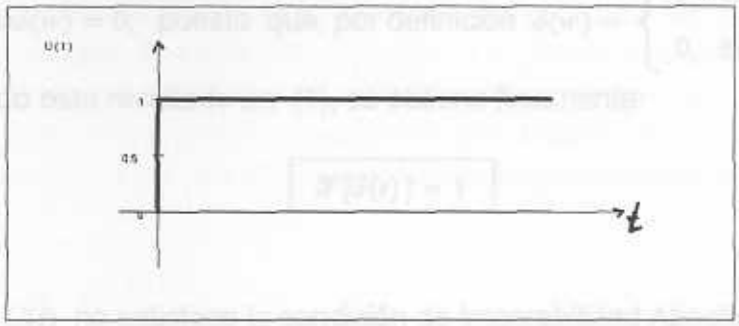
$$\frac{d}{dt}f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\cos\pi t, & \text{si } -0.5 \le t \le 0.5 \\ -\delta\left(t+1\right), & \text{si } t = -1 \\ -\delta\left(t-1\right), & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Es decir, $\quad (iw)F(w) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi}\cos\pi t - \delta(t+1) - \delta(t-1)\right] \quad \Rightarrow$

$$F(w) = \frac{1}{iw}\left[\frac{1}{\pi}(\pi)[\delta(w+\pi)+\delta(w-\pi)] - e^{iw} - e^{-iw}\right]$$

de donde : $\boxed{F(w) = \frac{i}{w}[2\cos w - [\delta(w+\pi)+\delta(w-\pi)]]}$

Ejemplo 14:
Determine la transformada de Fourier del Escalón Unitario : $U(t)$



$U(t)$

Solución:
Método 1.
Haciendo uso de la propiedad de Integración en el dominio del tiempo, obtenemos :

$$U(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \qquad \ldots(1)$$

Sea : $g(t) = \delta(\tau) \qquad \Rightarrow G(w) = 1, \forall w$
Luego, aplicando la Transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (1):

$$\mathcal{F}[U(t)] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{iw}[G(w)] + \pi G(0)\delta(w) \qquad \ldots(2)$$

$$\begin{cases} G(w) = 1, & \forall w \\ G(0) = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo estos resultados en (2), se obtiene:

$$F(w) = \mathcal{F}[U(t)] = \frac{1}{iw} + \pi(1)\delta(w)$$

es decir :

$$\boxed{\mathcal{F}[U(t)] = -i\frac{1}{w} + \pi\,\delta(w)}$$

NOTA:
Obsérvese que podemos aplicar la propiedad de derivación en el dominio del tiempo para recuperar la Transformada de Fourier de la función Impulso $\delta(t)$.
En efecto, sabemos que:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}U(t)$$

Luego, aplicando la Transformada de Fourier a ambos lados de esta igualdad, obtenemos:

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}U(t)\right] \qquad \ldots(1)$$

Pero, por la propiedad mencionada:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}U(t)\right] = (iw)\,\mathcal{F}[U(t)] = (iw)\left[\frac{1}{iw} + \pi\delta(w)\right] = 1 + (iw)\delta(w)$$

Pero : $w\delta(w) = 0$, puesto que, por definición : $\delta(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w = 0 \\ 0, & \text{si } w \neq 0 \end{cases}$

Sustituyendo este resultado en (1), se obtiene finalmente:

$$\boxed{\mathcal{F}[\delta(t)] = 1}$$

Método 2.

La función $U(t)$ no satisface la condición de Integrabilidad Absoluta ya que:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iwt}\right| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\right| e^{iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| U(t)\right| dt = \infty$$

Por lo tanto, la Transformada de Fourier de $U(t)$ existe sólamente en el límite. En efecto, una función $\cos w_0 t$ tiende a $U(t)$ cuando $w_0 \to 0$, es decir :

$$\lim_{w_0 \to 0} \left[\cos w_0 t\, U(t)\right] = U(t)$$

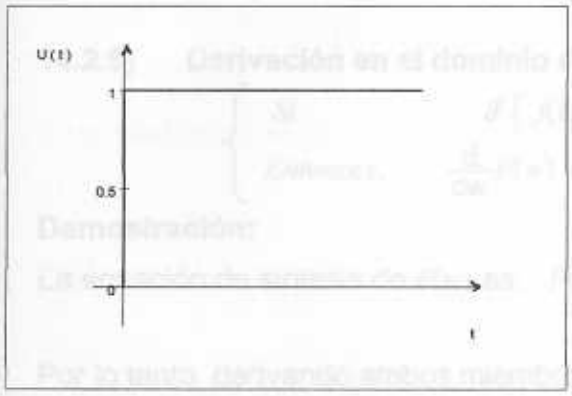
Por lo tanto,

$$\mathcal{F}[U(t)] = \lim_{w_0 \to 0}\left[\cos w_0 t\, U(t)\right] = \lim_{w_0 \to 0}\left[\frac{\pi}{2}[\delta(w+\pi) + \delta(w-\pi)] + \frac{iw}{w_0^2 - w^2}\right]$$

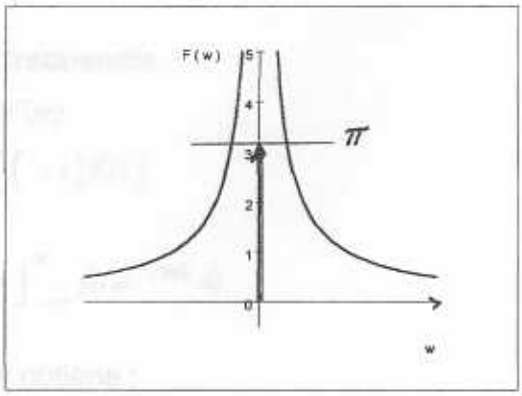
De donde: $\boxed{\mathcal{F}[U(t)] = -i\frac{1}{w} + \pi\,\delta(w)}$, tal como se obtuvo anteriormente.

NOTA:

Obsérvese que, en este caso, el Espectro de Frecuencias $|F(w)|$ $vs.\, w$ contiene un impulso en $w = 0$ de área π.



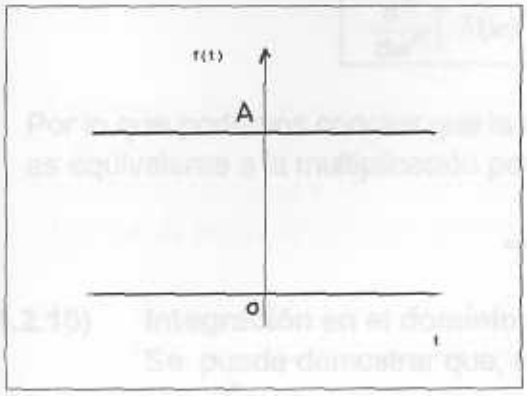
$U(t)$



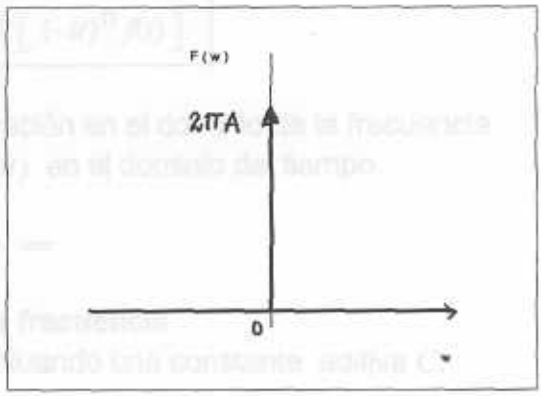
$|F(w)|$

Este resultado confirma que la función $U(t)$, tal como es de esperarse, contiene una componente d-c. Además, tiene también otras componetes de frecuencia, tal como lo ilustra la figura precedente.

Dado que la función $U(t)$ luce como una constante, la presencia de otras componentes de frecuencia puede parecer algo extraño. Sin embargo, tal como se explicó anteriormente y valga la repetición del concepto, la función $U(t)$ no es una constante, pues ella vale cero (0) para $t > 0$ y tiene una abrupta discontinuidad en $t = 0$, dando así origen a otras componentes de frecuencia.
Una verdadera señal d-c, $[f(t) = constante]$, está definida por $f(t) = A, \forall t \in (-\infty, \infty)$ y en este caso, $\mathcal{F}[A] = 2\pi\delta(w)$, tal como también ya fue demostrado y se ilustra a continuación :



$f(t) = \text{constante} = A$



$F(w) = 2\pi A\ \delta(w)$

La Transformad de Fourier de una función constante, sólo tiene una componente de frecuencia en $w = 0$. En otras palabras:

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\ A\ \right] = 2\pi A\ \delta(w)}$$

$$= \text{oo} =$$

14.2.9) Derivación en el dominio de la frecuencia

$$\begin{cases} Si & \mathcal{F}\left[\ f(t)\ \right] = F(w) \\ Entonces, & \frac{d}{dw}F(w) = \mathcal{F}\left[\ (-i\,t)f(t)\ \right] \end{cases}$$

Demostración:

La ecuación de síntesis de $F(w)$ es: $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\,wt}\,dt$

Por lo tanto, derivando ambos miembros, se obtiene :

$$\frac{d}{dw}F(w) = \frac{d}{dw}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\,wt}\,dt$$

Intercambiando el orden de derivación y de integración, obtenemos :

$$\frac{d}{dw}F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dw}\left[f(t)\, e^{-i\,wt}dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)\, f(t)\, e^{-i\,wt}dt$$

De donde:

$$\boxed{\frac{d}{dw}F(w) = \mathcal{F}\left[\ (-it)f(t)\ \right]}$$

Generalizando para la derivada de orden "n", se obtiene:

$$\boxed{\frac{d^{\,n}}{dw^{n}}\left[\ F(w)\ \right] = \mathcal{F}\left[\ (-it)^{n}\, f(t)\ \right]}$$

Por lo que podemos concluir que la derivación en el dominio de la frecuencia es equivalente a la multiplicación por : $-(it)$ en el dominio del tiempo.

= oo =

14.2.10) Integración en el dominio de la frecuencia

Se puede demostrar que, exceptuando una constante aditiva C,

$$\begin{cases} Si & \mathcal{F}[f(t)] = F(w) \\ Entonces, & \int F(w)dw + C = \mathcal{F}\left[\ \frac{1}{(-i\,t)}\, f(t)\ \right] \end{cases}$$

Demostración :

La ecuación de síntesis de $F(w)$ es: $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\,wt}\, dt$

Por lo tanto, integrando ambos miembros, se obtiene :

$$\int F(w)dw + C = \int \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\,wt}dt\right]dw$$

Intercambiando el orden de integración $dtdw$ por $dwdt$, obtenemos :

$$\int F(w)dw + C = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int f(t)e^{-i\,wt}dw\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\ \frac{1}{(-i\,t)}\, f(t)e^{-i\,wt}\ \right]dw$$

De donde:

$$\boxed{\int F(w)dw + C = \mathcal{F}\left[\ \frac{1}{(-i\,t)}\, f(t)\ \right]}$$

Por lo que podemos concluir que la integración en el dominio de la frecuencia es equivalente a la división por : $-\left(\ it\right)$ en el dominio del tiempo.

= oo =

14.2.11) Convolución

a) Definición

Dadas dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, se define como convolución de $f_1(t)$ con $f_2(t)$, y se escribe : $f_1(t) * f_2(t)$, a la siguiente integral :

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau) d\tau$$

El concepto de Convolución es quizás una de las herramientas más poderosas en el análisis de frecuencia. El mismo, permite la fácil derivación de importantes resultados, de difícil y engorrosa obtención por otra vía.
Algunos de estos resultados se desarrollan a continuación :

b) Convolución en el dominio del Tiempo:

Este importante teorema establece lo siguiente:

Si $\mathcal{F}\left[\, f_1(t)\right] = F_1(w)$ y $\mathcal{F}\left[\, f_2(t)\right] = F_2(w)$

Entonces : $\mathcal{F}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(w)\, F_2(w)$

Domostración:

Por definición de convolución se tiene : $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\, f_2(t-\tau) d\tau$

Aplicando Transformada de Fourier a ambos lados de esta igualdad, obtenemos :

$$\mathcal{F}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right]$$

de donde.

$$\mathcal{F}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau\right] e^{-iwt} dt$$

Cambiando ahora el orden de integración $d\tau\, dt$ por $dt\, d\tau$, se obtiene :

$$\mathcal{F}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-iwt} dt\right] f_1(\tau)\, d\tau \qquad \ldots(1)$$

Pero, la Propiedad 4 : " Traslación en el dominio del Tiempo ", antes expuesta, establece que la integral interna en el desarrollo (1), es :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-iwt} dt = F_2(w) e^{-iw\tau}$$

En consecuencia, sustituyendo este resulatado en la expresión (1), obtenemos :

$$\mathcal{F}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[F_2(w)e^{-iw\tau}\right]f_1(\tau)\,d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\,e^{-iw\tau}d\tau\right]F_2(w)$$

Y finalmenete :

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(w)\,F_2(w)}$$

El teorema establece en consecuencia que la convolución de dos funciones en el dominio del tiempo, es equivalente a la multiplicación de sus respectivos espectros en el dominio de frecuencia.

== oo ==

c) Convolución en el dominio de la Frecuencia:

Este importante teorema establece lo siguiente:

Si $\mathcal{F}\left[\,f_1(t)\,\right] = F_1(w)$ y $\mathcal{F}\left[\,f_2(t)\,\right] = F_2(w)$

Entonces : $\mathcal{F}\left[f_1(t)\cdot f_2(t)\right] = \frac{1}{2\pi}[F_1(w) * F_2(w)]$

Dada la simetría existente entre la Transformada directa de Fourier ($F(w)$) y su Transformada Inversa ($f(t)$), la demostración de este teorema se realiza exactamente n la misma forma que la empleada en el caso de la Convolución en el dominio del tiempo, por lo que se deja al intersado.
Nótese que este teorema establece en consecuencia que la multiplicación de dos funciones en el dominio del tiempo, es equivalente a la convolución de sus respectivos espectros el dominio de frecuencia.

== oo ==

14.2.12) Resumen de Propiedades de la Transformada de Fourier

La siguiente Tabla muestra algunas de las más importantes propiedades de la Transformada de Fourier.
En dicha tabla :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\,e^{iwt}dw \quad ; \quad F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-iwt}dw$$

PROPIEDAD	$f(t)$	$F(w)$
Linealidad	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_1(w)+bF_2(w)$
Dualidad (o Simetría)	$F(t)$	$2\pi f(-w)$
Escalamiento	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{w}{a})$
Traslación en el tiempo	$f(t-t_0)$	$F(w)\,e^{-iwt_0}$
Traslación en frecuencia	$f(t)\,e^{-iw_0t}$	$F(w-w_0)$
Derivación en el tiempo	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$	$(iw)^nF(w)$
Derivación en frecuencia	$(-it)^nf(t)$	$\frac{d^n}{dw^n}F(w)$
Teorema de Modulación	$f(t)\cos(w_0t)$	$\frac{1}{2}[F(w+w_0)+F(w-w_0)]$
	$f(t)\mathrm{sen}(w_0t)$	$\frac{i}{2}[F(w+w_0)-F(w-w_0)]$
Integración en el tiempo	$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{(iw)}F(w)$
Integración en Frecuencia	$\frac{1}{(-it)}f(t)$	$\int F(w)dw+C$
Relaciones de Convolución	NOTA 1	NOTA 2
Convolución en el Tiempo	$f_1(w)*f_2(w)$	$F_1(t)\cdot F_2(t)$
Convolución en Frecuencia	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(w)*F_2(w)$

NOTA 1	$f_1(w)*f_2(w)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$
NOTA 2	$F_1(t)*F_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\tau)\cdot F_2(w-\tau)d\tau$

La Tabla aquí presentada muestra algunas de las más importantes propiedades de la Trnasformada de Fourier. Obsérvese la simetría y correspondencia entre los dominios del tiempo y frecuancia.

= oo =

14.3) EL ESPECTRO DENSIDAD DE ENERGÍA : Teorema de Parseval

Para una función periódica, la potencia de la señal $f(t)$ está asociada con la potencia contenida en cada una de sus componentes discretas de frecuencia. Para señales no periódicas, el concepto más usual de energía se define como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) \right]^2 dt \qquad \ldots (1)$$

Luego, si : $\begin{cases} \mathcal{F}\left[f(t) \right] = F(w), & \text{y} \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt}\, dw \end{cases}$

Entonces, sustituyendo en (1), se obtiene :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) \right]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw \right] dt \qquad \ldots (2)$$

Intercambiando el orden de integración en el lado derecho de la expresión (2), encontramos :

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iwt} dt \right] dw \qquad \ldots (3)$$

La integral interna es obviamente : $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iwt} dt = F(-w)$, por lo tanto :

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \left[F(-w) \right] dw$$

Pero, según ya se demostró : $F(w) = F^*(-w) = F(w)\, F(-w) = \left| F(w) \right|^2$

En consecuencia :

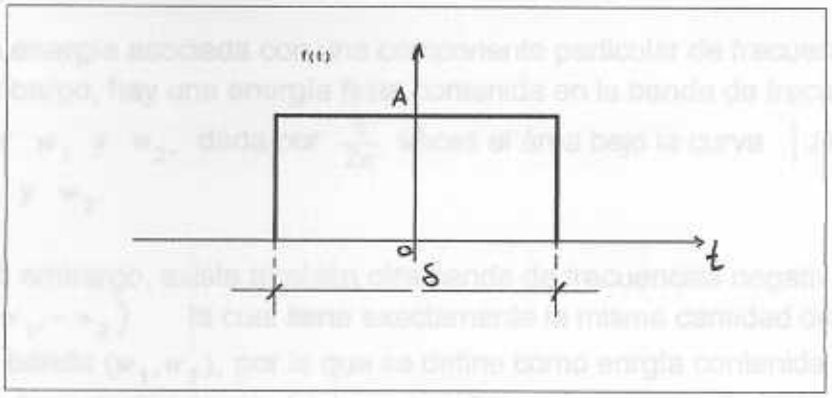
$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(w) \right|^2 dw}$$

Esta ecuación es conocida como: **Teorema de Parseval**.

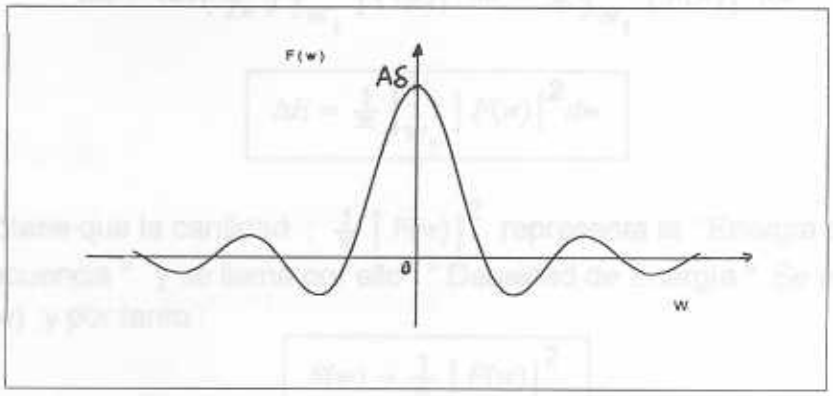
OBSERVACIONES:

a) Es evidente que $\left| F(w) \right|^2$ es una función real de la variable w, por lo tanto, la Energía de una señal $f(t)$ está dada por $\frac{1}{2\pi}$ veces el área bajo la curva $\left| F(w) \right|^2$.

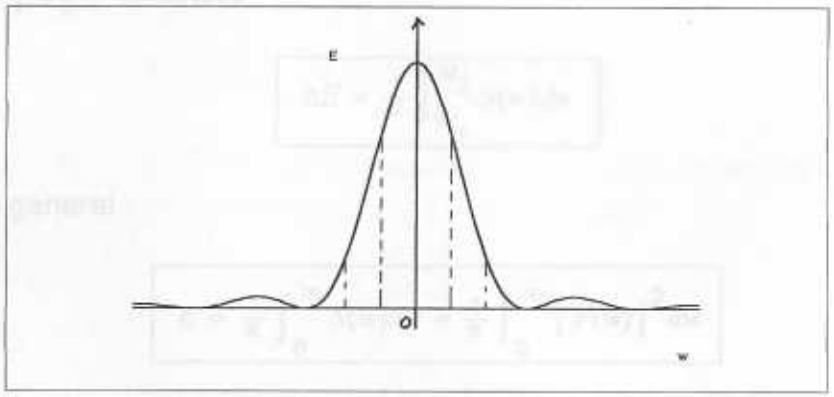
b) Las funciones $F(w)$ y $\left| F(w) \right|^2$, para una " Función Compuerta " o " *Gate Function*", se muestra en la siguiente figura :



$$f(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right)$$



$$F(w) = A\delta\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$$



$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(w)\right|^2 dw = \frac{(w\delta)^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\ \mathrm{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)\right|^2 dw$$

Nótese como la función $\left|F(w)\right|^2$ es una función par. El espectro de Energía, si bién está asociado también con cada componente de frecuencia, es sin embargo una función contínua.

c) La energía asociada con una componente particular de frecuencia es cero, sin embargo, hay una energía finita contenida en la banda de frecuencia definida por w_1 y w_2, dada por $\frac{1}{2\pi}$ veces el área bajo la curva $|F(w)|^2$, entre w_1 y w_2.

Sin embargo, existe también otra banda de frecuencias negativas $(-w_1, -w_2)$ la cual tiene exactamente la misma cantidad de energía que la banda (w_1, w_2), por lo que se define como enrgía contenida en la banda de frecuencias (w_1, w_2) a la expresión :

$$\Delta E = (2)\left(\frac{1}{2\pi}\right)\int_{w_1}^{w_2} |F(w)|^2 dw = \frac{1}{\pi}\int_{w_1}^{w_2} |F(w)|^2 dw$$

$$\boxed{\Delta E = \frac{1}{\pi}\int_{w_1}^{w_2} |F(w)|^2 dw}$$

d) Nótese que la cantidad : $\frac{1}{\pi}|F(w)|^2$ representa la "Energía por unidad de frecuencia " y se llama por ello : " Densidad de Energía ". Se representa por $S(w)$ y por tanto :

$$\boxed{S(w) = \frac{1}{\pi}|F(w)|^2}$$

e) Si representamos por ΔE a la energía asociada con la banda de frecuencias (w_1, w_2), entonces :

$$\boxed{\Delta E = \frac{1}{\pi}\int_{w_1}^{w_2} S(w)dw}$$

f) En general :

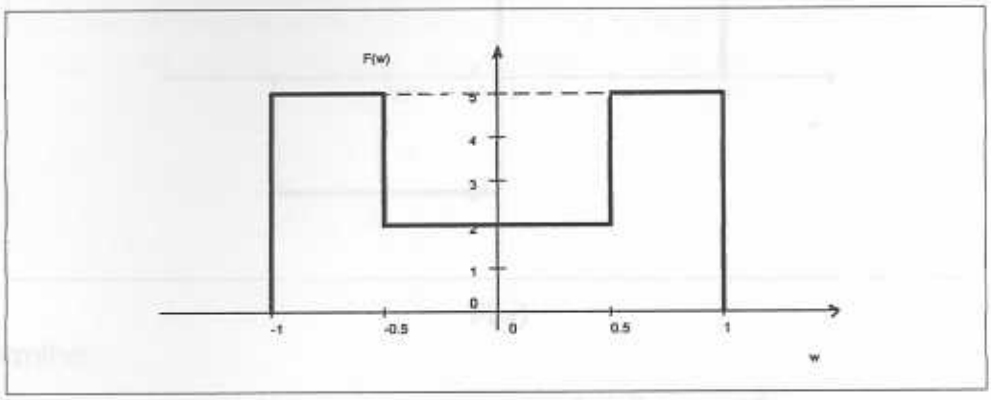
$$\boxed{E = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} S(w)dw = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} |F(w)|^2 dw}$$

= oo =

14.3.1) Ejemplos Resueltos III

Ejemplo 15:

Para la Transformada de Fourier mostrada en la figura,



$F(w)$

Determine:

a) El valor numérico de : $E = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dt$

b) El valor numérico de : $D = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]dt$

Solución :

a) De acuerdo con el Teorema de Parseval :

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(w)|^2 dw \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{0.5}(2)^2 dw + \int_{0.5}^{1}(5)^2 dw\right] = \frac{14.5}{\pi}$$

b) Para evaluar D haremos uso de la propiedad de derivación en el dominio del tiempo, según la cual :

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = (iw)F(w)$$

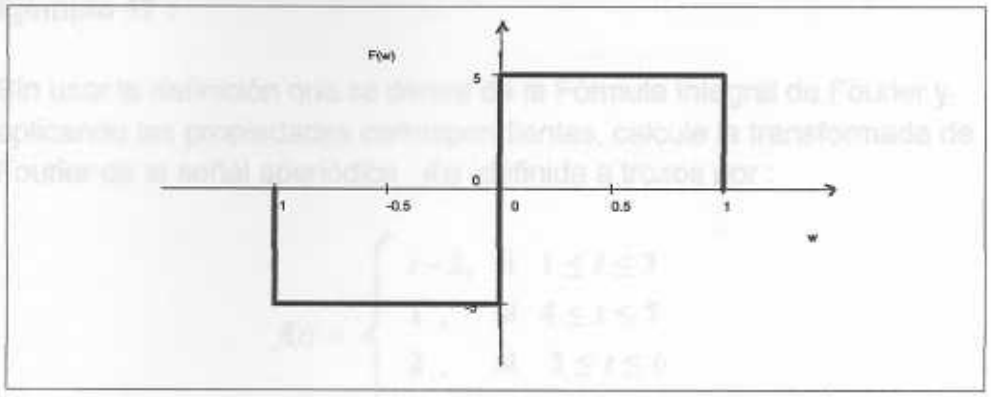
Por lo tanto : $D = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty}(iw)F(w)dw$

De donde:

$$D = \int_{-1}^{-0.5}(iw)\,(5)\,dw + \int_{-0.5}^{0.5}(iw)\,(2)dw + \int_{0.5}^{1}(iw)\,(5)dw = 0$$

= oo =

Para la Transformada de Fourier mostrada en la figura,



$F(w)$

Determine:

a) El valor numérico de : $E = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(w)|^2 dw$

b) El valor numérico de : $D = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]dt$

Solución :

a) De acuerdo con el Teorema de Parseval :

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(w)|^2 dw \quad \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{5} (5)^2 dw = \frac{125}{\pi}$$

b) Para evaluar D haremos uso de la propiedad de derivación en el dominio del tiempo, según la cual :

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = (iw)F(w)$$

Por lo tanto : $D = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty} (iw)F(w)dw$

De donde:

$$D = \int_{-1}^{0} (iw)\,(-5)\,dw + \int_{0}^{1} (iw)\,(5)dw = 5i$$

= oo =

Ejemplo 17 :

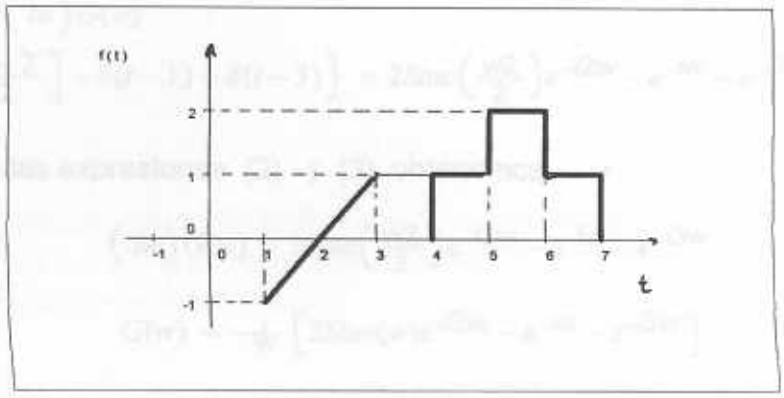
Sin usar la definición que se deriva de la Fórmula Integral de Fourier y aplicando las propiedades correspondientes, calcule la transformada de Fourier de la señal aperiódica $f(t)$ definida a trozos por :

$$f(t) = \begin{cases} t-2, & \text{si } 1 \le t \le 3 \\ 1\ , & \text{si } 4 \le t \le 5 \\ 2\ , & \text{si } 5 \le t \le 6 \\ 1\ , & \text{si } 6 \le t \le 7 \end{cases}$$

Solución:

Método 1: Aplicando la propiedad conocida como " Derivación en el dominio del Tiempo ".

Se muestra a continuación la función aperiódica dada:



$f(t)$

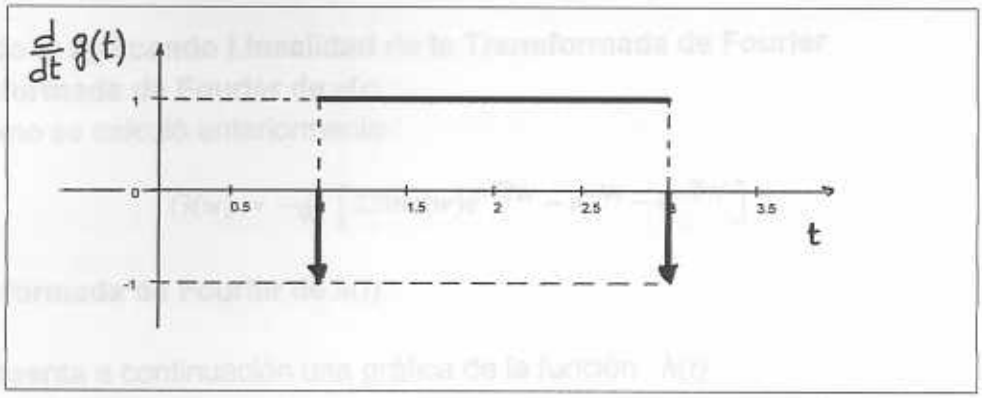
Evidentemente : $f(t) = g(t) + h(t)$, donde : $\begin{cases} g(t) = (t-2)\left[\ U(t-1) - U(t-3)\ \right] \\ h(t) = \prod\left(\frac{t-5.5}{3}\right) + \prod\left(\frac{t-5.5}{1}\right) \end{cases}$

Transformada de Fourier de $g(t)$:

Derivando por primera vez a la función $g(t)$, se obtiene :

$$\frac{d}{dt}g(t) = -\delta(t-1) + \prod\left(\frac{t-2}{2}\right) - \delta(t-3) \quad \text{.....(1)}$$

tal como se ilustra en la siguiente gráfica :



$$\frac{d}{dt}g(t) = \prod\left(\frac{t-2}{2}\right) - \left[\,\delta(t-1) + \delta(t-3)\,\right]$$

Aplicando Transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (1), se obtiene ;

$$\mathcal{F}\left[\,g(t)\,\right] = \mathcal{F}\left\{\,\prod\left[\frac{t-2}{2}\right] - \delta(t-1) - \delta(t-3)\right\}$$

Pero:

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left[\,g(t)\,\right] = \left(\,iw\right)G(w) & \text{.....(2)} \\ \mathcal{F}\left\{\,\prod\left[\frac{t-2}{2}\right] - \delta(t-1) - \delta(t-3)\right\} = 2Sinc\left(\frac{w2}{2}\right)e^{-i2w} - e^{-iw} - e^{-i3w} & \text{.....(3)} \end{cases}$$

Igualando las expresiones (2) y (3), obtenemos .

$$\left(\,iw\right)G(w) = 2Sinc\left(\frac{w2}{2}\right)e^{-i2w} - e^{-iw} - e^{-i3w}$$

De donde :

$$G(w) = -\frac{i}{w}\left[\,2Sinc(w)e^{-i2w} - e^{-iw} - e^{-i3w}\,\right]$$

Transformada de Fourier de $h(t)$:

Derivando la función $h(t)$, obtenemos :

$$\frac{d}{dt}h(t) = \delta(t-4) + \delta(t-5) - \delta(t-6) - \delta(t-7)$$

Usando de nuevo la propiedad de "Derivación en el dominio del tiempo", se tiene :

$$(iw)H(w) = e^{-i4w} + e^{-i5w} - e^{-i6w} - e^{-i7w}$$

De donde :

$$H(w) = \frac{e^{-i4w} + e^{-i5w} - e^{-i6w} - e^{-i7w}}{(iw)} = -\frac{i}{w}\left[\,e^{-i4w} + e^{-i5w} - e^{-i6w} - e^{-i7w}\,\right]$$

En resumen : $F(w) = G(w) + H(w) \quad \Rightarrow$

$$F(w) = -\frac{i}{w}\left[\,2Sinc(w)e^{-i2w} - e^{-iw} - e^{-i3w} + e^{-i4w} + e^{-i5w} - e^{-i6w} - e^{-i7w}\,\right]$$

Método 2: Aplicando Linealidad de la Transformada de Fourier

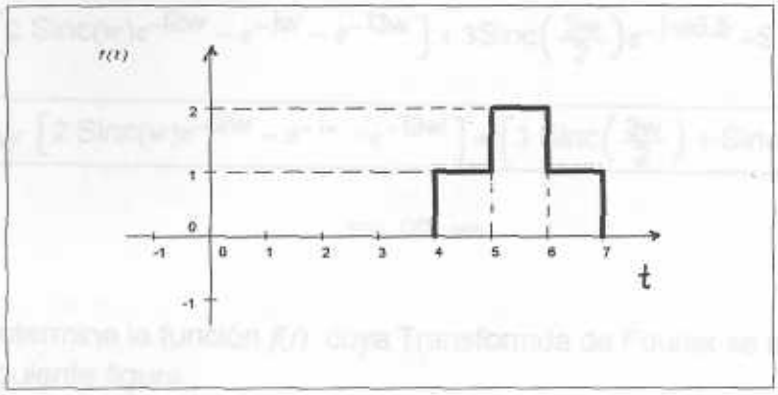
Transformada de Fourier de $g(t)$:

Tal como se calculó anteriormente :

$$G(w) = -\frac{i}{w}\left[2Sinc(w)e^{-i2w} - e^{-iw} - e^{-i3w}\right]$$

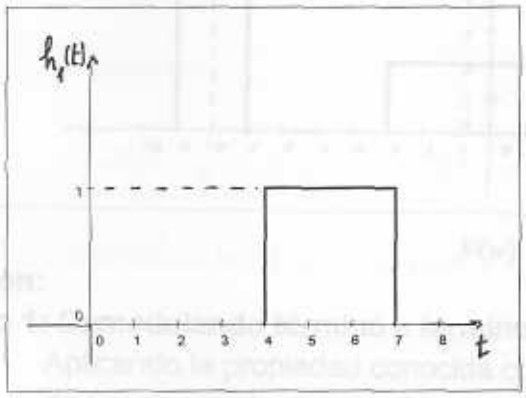
Transformada de Fourier de $h(t)$:

Se presenta a continuación una gráfica de la función $h(t)$:



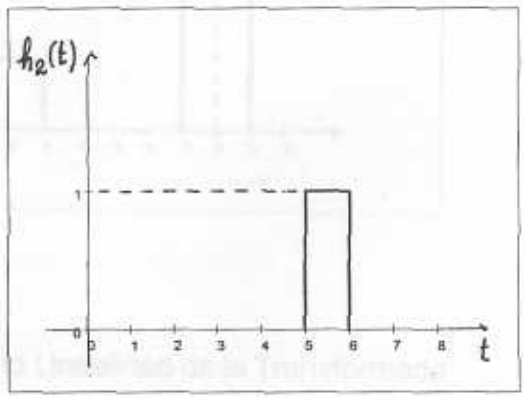
$h(t)$

Dicha función puede considerarse, por la propiedad conocida como " Linealidad de la Transformada de Fouerier " como la suma de las dos señales que se muestran a continuación :



$h_1(t)$

+



$h_2(t)$

Es decir : $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ por lo tanto, se puede escribir que:

$$h(t) = \prod\left(\frac{t-5.5}{3}\right) + \prod\left(\frac{t-5.5}{1}\right)$$

Por lo que, haciendo uso de la Tabla de Transformadas expuesta en el Capítulo XIII, la transformada de Fourier correspondiente será:

$$H(w) = 3\text{Sinc}\left(\frac{3w}{2}\right)e^{-i\,w5.5} + \text{Sinc}\left(\frac{w}{2}\right)e^{-i\,w5.5}$$

Aplicando la propiedad conocida como " Linealidad de la Trasnformada de Fourier ", se obtiene :

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathcal{F}\left[\, g(t)\,\right] + \mathcal{F}\left[\, h(t)\,\right] = G(w) + H(w) \qquad \Rightarrow$$

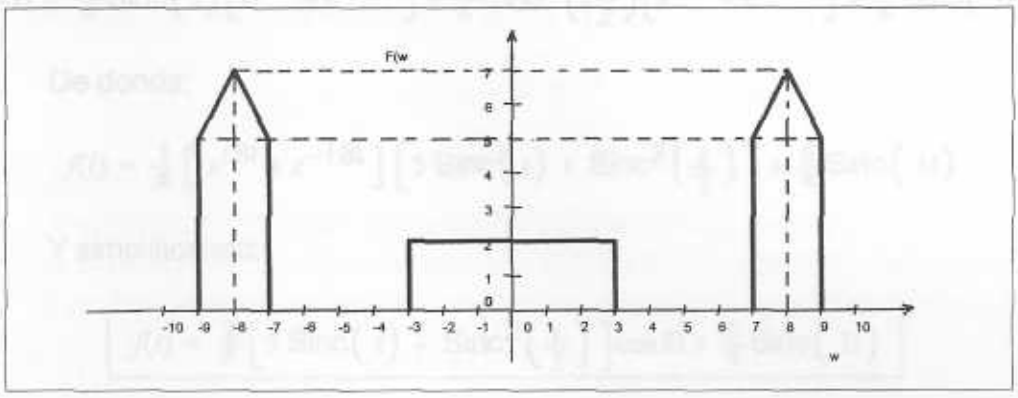
$$\mathcal{F}[f(t)] = -i\frac{1}{w}\left[2\,\text{Sinc}(w)e^{-i2w} - e^{-iw} - e^{-i3w}\right] + 3\text{Sinc}\left(\frac{3w}{2}\right)e^{-i\,w5.5} + \text{Sinc}\left(\frac{w}{2}\right)e^{-i\,w5.5} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{F}[f(t)] = -\frac{i}{w}\left[2\,\text{Sinc}(w)e^{-i2w} - e^{-iw} - e^{-i3w}\right] + \left[3\,\text{Sinc}\left(\frac{3w}{2}\right) + \text{Sinc}\left(\frac{w}{2}\right)\right]e^{-i\,w5.5}}$$

= oo =

Ejemplo 18:

Determine la función $f(t)$ cuya Transformda de Fourier se muestra en la siguiente figura :



$F(w)$

Solución:

Método 1: Demodulando término a término

Aplicando la propiedad conocida como Linealidad de la Transformada de Fourier, podemos escribir :

$$F(w) = 5\prod\left(\frac{w+8}{2}\right) + 2\left[1 - \frac{|w+8|}{1}\right]\left[\,U(t+9) - U(t+7)\,\right] + 2\prod\left(\frac{w}{6}\right) +$$

$$+5\prod\left(\frac{w-8}{2}\right) + 2\left[1 - \frac{|w-8|}{1}\right]\left[\,U(t-7) - U(t-9)\,\right]$$

Pero :

a) Aplicando las propiedades conocidas como Dualidad y Desplazamiento en Frecuencia, se obtiene:

$$5\prod\left(\frac{w+8}{2}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(5)(2)\text{Sinc}\left(\frac{t2}{2}\right)e^{i8w} = \frac{5}{\pi}\text{Sinc}(t)e^{i8t}$$

$$2\left[1-\frac{|w+8|}{1}\right]\left[U(t+9)-U(t+7)\right] \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(2)(1)\text{Sinc}^2\left(\frac{t1}{2}\right)e^{i8t}$$

$$2\prod\left(\frac{w}{6}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(2)(6)\text{Sinc}\left(\frac{t6}{2}\right) = \frac{6}{\pi}\text{Sinc}(3t)$$

$$5\prod\left(\frac{w-8}{2}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(5)(2)\text{Sinc}\left(\frac{t2}{2}\right)e^{-i8w} = \frac{5}{\pi}\text{Sinc}(t)e^{-i8t}$$

$$2\left[1-\frac{|w+8|}{1}\right]\left[U(t+9)-U(t+7)\right] \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(2)(1)\text{Sinc}^2\left(\frac{t1}{2}\right)e^{-i8t}$$

b) Aplicando ahora la propiedad conocida como Linealidad de la Transformada de Fourier, podemos escribir :

$$f(t) = \frac{5}{\pi}\text{Sinc}(t)\left[e^{i8t}+e^{-i8t}\right]+\frac{1}{\pi}\text{Sinc}^2\left(t\frac{1}{2}\right)\left[e^{i8t}+e^{-i8t}\right]+\frac{6}{\pi}\text{Sinc}(3t)$$

De donde:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\left[e^{i8t}+e^{-i8t}\right]\left[5\,\text{Sinc}(t)+\text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]+\frac{6}{\pi}\text{Sinc}(3t)$$

Y simplificando:

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\pi}\left[5\,\text{Sinc}(t)+\text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos 8t+\frac{6}{\pi}\text{Sinc}(3t)}$$

Método 2 : Aplicando la Propiedad conocida como " Dualidad "

Obviamente, la transformada $F(w)$ consiste de un pulso rectangular centrado en el origen, más dos pulsos rectangulares con su respectivo triángulo en la parte superior, situados simétricamente respecto del eje vertical. En consecuencia, podemos representar a $F(w)$ por dos funciones :

$$F(w) = G(w)+H(w)$$

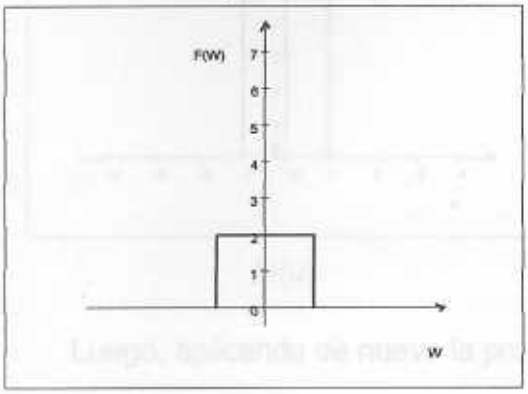
donde :

- $G(w) = \textit{Pulso rectangular centrado en el origen} \Rightarrow 2G_6(w) = 2\prod\left(\frac{w}{6}\right)$

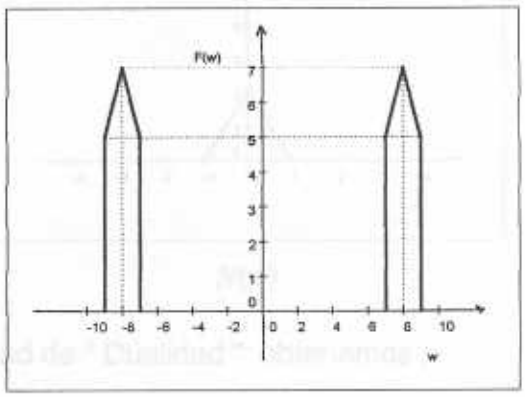
$$- \quad H(w) = 5\prod\left(\frac{w+8}{2}\right) + 2\left[1 - \frac{|w+8|}{1}\right][U(t+9) - U(t+7)] +$$

$$+ 2\left[1 - \frac{|w-8|}{1}\right][U(t-7) - U(t-9)] + 5\prod\left(\frac{w-8}{2}\right)$$

Ambas gráficas se presentan a continuación:



$G_6(w)$



$H(w)$

Cálculo de $g(t)$:

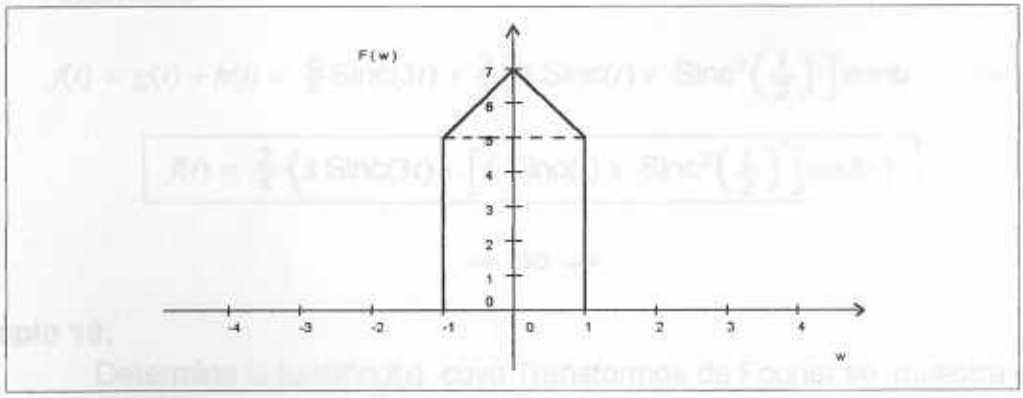
Aplicando la propiedad conocida como " Dualidad ", se obtiene que :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}(2)(6)\text{Sinc}\left(\frac{6t}{2}\right) = \frac{6}{\pi}\text{Sinc}(3t)$$

Cálculo de $h(t)$:

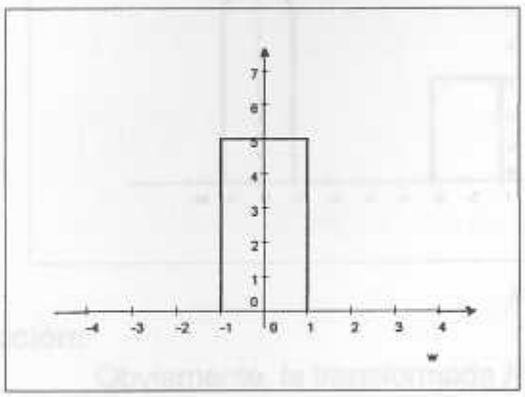
La simetría de esta función respecto del eje vertical, sugiere que proviene de una modulación cosenoidal, concretamente, de una modulación por : $\cos 8t$

Si no existiera tal modulación cosenoidal para $H(w)$, la gráfica de $H_1(w)$, es decir, $H_1(w) = H(w)_{\text{sin modular}}$, sería :



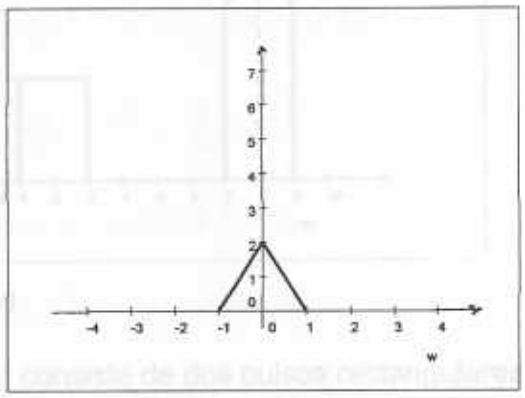
$H_1(w) = H(w)_{\text{sin modular}}$

La cual, obviamente, se puede descomponer a su vez, en las dos gráficas siguientes : $H_1(w) = M(w) + N(w)$



$M(w)$

+



$N(w)$

Luego, aplicando de nuevo la propiedad de " Dualidad ", obtenemos :

$$\begin{cases} m(t) = \frac{1}{2\pi}(6)(2)\text{Sinc}\left(\frac{2t}{2}\right) = \frac{6}{\pi}\text{Sinc}(t) \\ n(t) = \frac{1}{2\pi}(2)(1)\text{Sinc}^2\left(\frac{1t}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

por lo tanto:

$$h_1(t) = m(t) + n(t) = \frac{6}{\pi}\text{Sinc}(t) + \frac{1}{\pi}\text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left[6\ \text{Sinc}(t) + \text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

y en consecuencia :

$$h(t) = h_1(t)(2)\cos 8t \qquad \Rightarrow \qquad h(t) = \frac{1}{\pi}\left[6\ \text{Sinc}(t) + \text{Sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\right] 2\cos 8t$$

Finalmente:

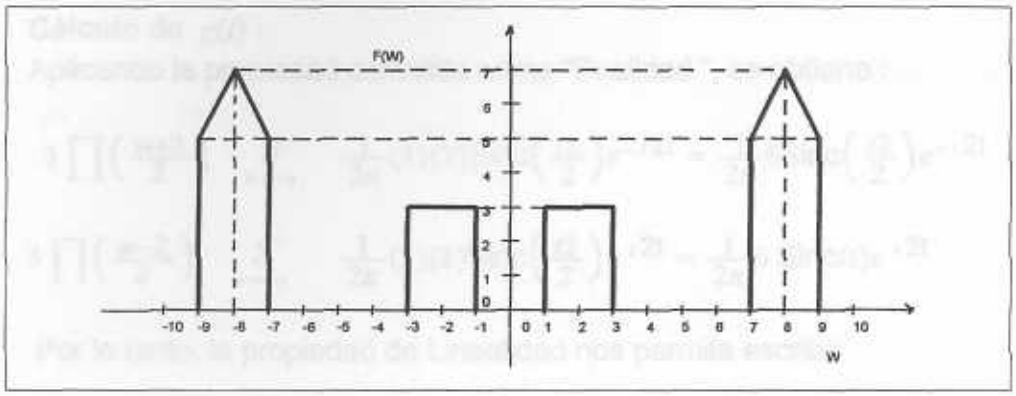
$$f(t) = g(t) + h(t) = \frac{6}{\pi}\text{Sinc}(3t) + \frac{2}{\pi}\left[6\ \text{Sinc}(t) + \text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos 8t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\pi}\left\{3\ \text{Sinc}(3t) + \left[6\ \text{Sinc}(t) + \text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos 8t\right\}}$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 19:

Determine la función $f(t)$ cuya Transformda de Fourier se muestra en la siguiente figura :



$F(w)$

Solución:

Obviamente, la transformada $F(w)$ consiste de dos pulsos rectangulares ubicados simétricamente respecto del eje vertical $[G(w)]$, más dos pulsos rectangulares con su respectivo triángulo en la parte superior, situados también simétricamente respecto del eje vertical $[H(w)]$. En consecuencia, podemos representar a $F(w)$ por dos funciones :

$$F(w) = G(w) + H(w)$$

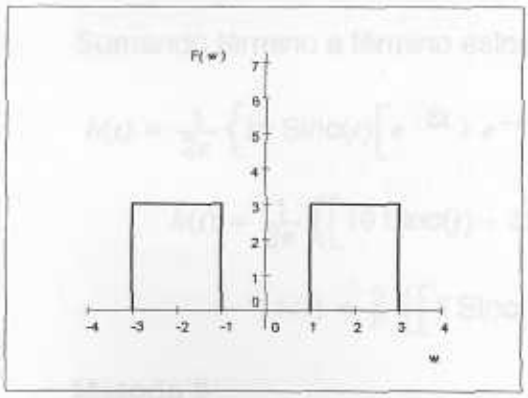
donde :

- $G(w) = 3\prod\left(\frac{w+2}{2}\right) + 3\prod\left(\frac{w-2}{2}\right)$

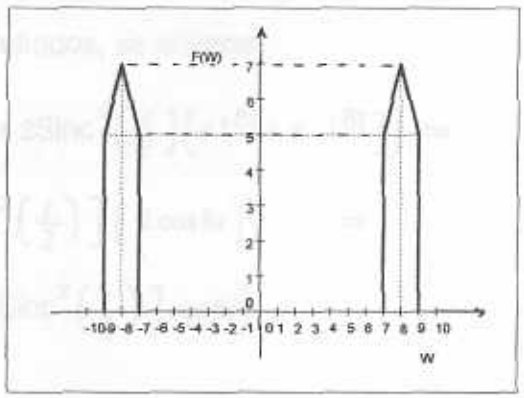
- $H(w) = 5\prod\left(\frac{w+8}{2}\right) + 2\left[1 - \frac{|w+8|}{1}\right]\left[U(t+9) - U(t+7)\right] +$

$$+ 2\left[1 - \frac{|w-8|}{1}\right]\left[U(t-7) - U(t-9)\right] + 5\prod\left(\frac{w-8}{2}\right)$$

Ambas gráficas se presentan a continuación:



$G(w)$



$H(w)$

Cálculo de $g(t)$:

Aplicando la propiedad conocida como "Dualidad ", se obtiene :

$$3\prod\left(\frac{w+2}{2}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(3)(2)\text{Sinc}\left(\frac{t2}{2}\right)e^{-i2t} = \frac{1}{2\pi}6\text{Sinc}\left(\frac{t2}{2}\right)e^{-i2t}$$

$$3\prod\left(\frac{w-2}{2}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(3)(2)\text{Sinc}\left(\frac{t2}{2}\right)e^{i2t} = \frac{1}{2\pi}6\,\text{Sinc}(t)e^{i2t}$$

Por lo tanto, la propiedad de Linealidad nos permite escribir:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}6\text{Sinc}\left(\frac{t2}{2}\right)e^{-i2t} + \frac{1}{2\pi}6\text{Sinc}(t)e^{i2t} = \frac{1}{2\pi}6\,\text{Sinc}(t)\left[e^{i2t} + e^{-i2t}\right]$$

de donde : $\quad g(t) = \frac{1}{2\pi}6\text{Sinc}(t)[2\cos 2t] = \frac{6}{\pi}\text{Sinc}(t)\cos 2t$

Cálculo de $h(t)$:

Método 1:

$$5\prod\left(\frac{w+8}{2}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(5)(2)\text{Sinc}\left(\frac{t2}{2}\right)e^{-i8t} = \frac{1}{2\pi}10\,\text{Sinc}(t)e^{-i8t}$$

$$5\prod\left(\frac{w-8}{2}\right) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(5)(2)\text{Sinc}\left(\frac{t2}{2}\right)e^{i8t} = \frac{1}{2\pi}10\,\text{Sinc}(t)e^{i8t}$$

$$2\left[1 - \frac{|w+8|}{1}\right][U(t+9) - U(t+7)] \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(2)(1)\,\text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)e^{-i8t}$$

$$2\left[1 - \frac{|w-8|}{1}\right][U(t-7) - U(t-9)] \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi}(2)(1)\,\text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)e^{i8t}$$

Sumando término a término estos resultados, se obtiene .

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\left\{10\,\text{Sinc}(t)\left[e^{i8t} + e^{-i8t}\right] + 2\text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\left[e^{i8t} + e^{-i8t}\right]\right\} \Rightarrow$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\left\{\left[10\,\text{Sinc}(t) + 2\text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\left[2\cos 8t\right]\right\} \quad \Rightarrow$$

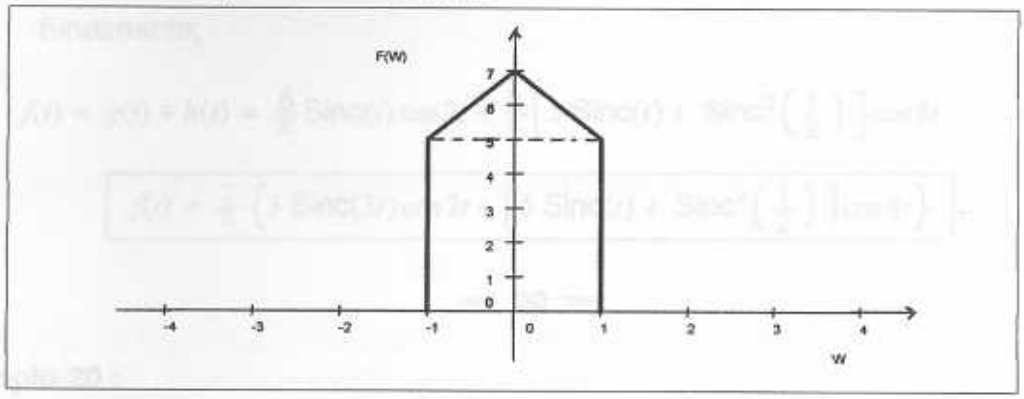
$$h(t) = \frac{2}{\pi}\left\{\left[5\,\text{Sinc}(t) + \text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos 8t\right\}$$

Método 2

La simetría de $h(t)$ respecto del eje vertical, sugiere que proviene de

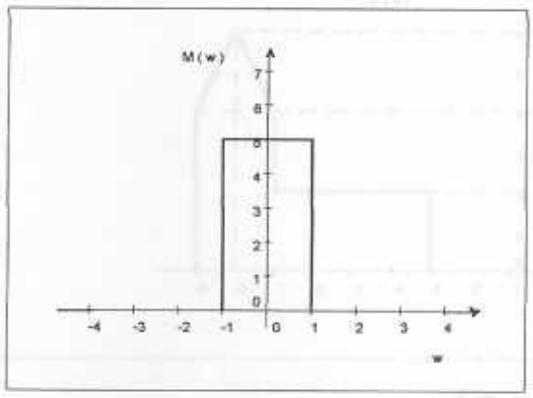
una modulción cosenoidal, concretamente, de una modulación por : $\cos 8t$

Si no existiera tal modulación cosenoidal para $H(w)$, la gráfica de $H_1(w)$, es decir, $H_1(w) = H(w)_{\text{sin modular}}$, sería :

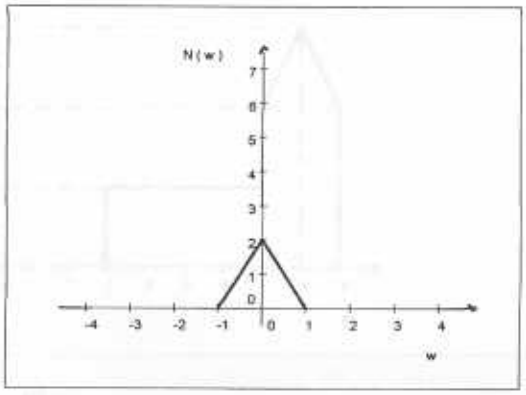


$H_1(w) = H(w)_{\text{sin modular}}$

La cual obviamente, se puede descomponer a su vez, en las dos gráficas siguientes : $H_1(w) = M(w) + N(w)$



+



$M(w)$ $N(w)$

Luego, aplicando de nuevo la propiedad de " Dualidad ", obtenemos :

$$\begin{cases} m(t) = \frac{1}{2\pi}(5)(2)\text{Sinc}\left(\frac{2t}{2}\right) = \frac{5}{\pi}\text{Sinc}(t) \\ n(t) = \frac{1}{2\pi}(2)(1)\text{Sinc}^2\left(\frac{1t}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

por lo tanto:

$$h_1(t) = m(t) + n(t) = \frac{5}{\pi}\text{Sinc}(t) + \frac{1}{\pi}\text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\left[5\,\text{Sinc}(t) + \text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]$$

y en consecuencia :

$$h(t) = h_1(t)(2)\cos 8t \quad \Rightarrow \quad h(t) = \frac{1}{\pi}\left[5\,\text{Sinc}(t) + \text{Sinc}\left(\frac{t}{2}\right)\right]2\cos 8t \;\Rightarrow$$

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\left[5\,\text{Sinc}(t) + \text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos 8t$$, tal como se obtuvo anteriormente.

Finalmente:

$$f(t) = g(t) + h(t) = \frac{6}{\pi}\text{Sinc}(t)\cos 2t + \frac{2}{\pi}\left[5\,\text{Sinc}(t) + \text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos 8t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\pi}\left\{3\,\text{Sinc}(3t)\cos 2t + \left[5\,\text{Sinc}(t) + \text{Sinc}^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\cos 8t\right\}}$$

= oo =

Ejemplo 20 :

La siguiente gráfica representa la Transformad de Fourier $F(w)$ de una determinada función $f(t)$:

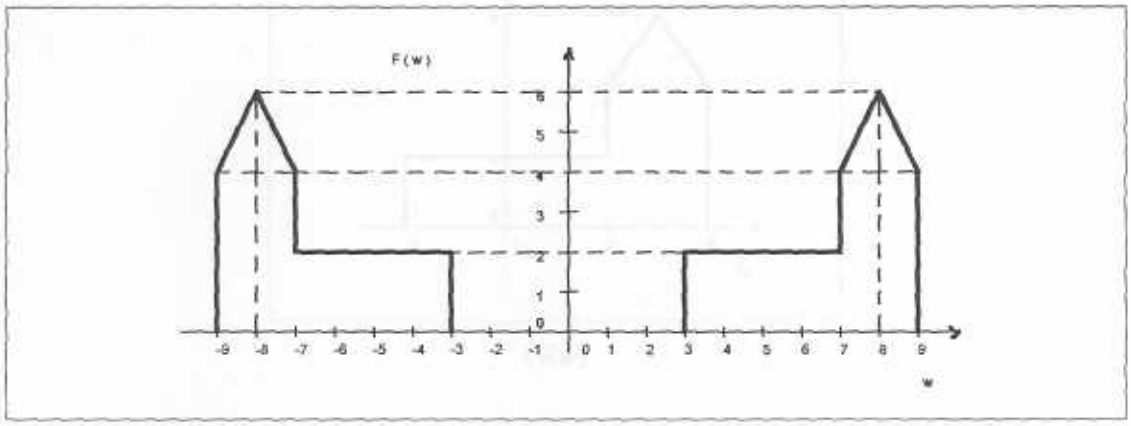


Fig. a : $F(w)$

a) ¿ Procede $F(w)$ de una única modulación cosenoidal ? Razone su respuesta.

b) ¿Cuál es el número mínimo de modulaciones cosenoidales presentes? Ilustre su respuesta con un diagrama de bloques.

c) Calcule la función $f(t)$ cuya Transformada de Fourier es $F(w)$, como una como una consecuencia de modulaciones estrictamente cosenoidales.

d) ¿ Existen otras soluciones para $f(t)$?

Solución:

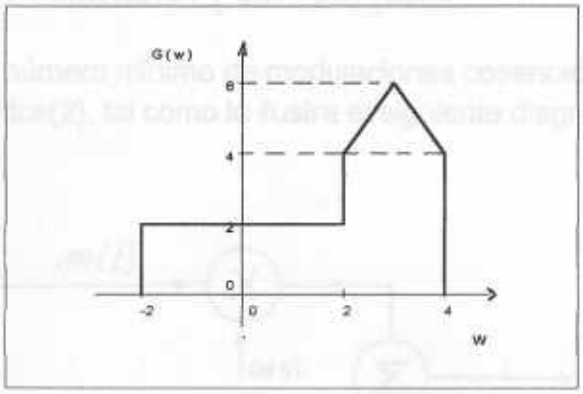
a) La función $F(w)$ dada se puede considerar, por la propiedad conocida como " Linealidad ", como la suma de dos señales $F_1(w)$ y $F_2(w)$, siendo:

$$\begin{cases} F_1(w) = 2\prod\left(\frac{w+5}{4}\right) + 4\prod\left(\frac{w+8}{2}\right) + 2\left[1 - \frac{|w+8|}{1}\right][U(w+9) - U(w+7] \\ F_2(w) = 2\prod\left(\frac{w-5}{4}\right) + 4\prod\left(\frac{w-8}{2}\right) + 2\left[1 - \frac{|w-8|}{1}\right][U(w-7) - U(w-9] \end{cases}$$

Admitamos por un instante que existe una función $g(t)$ tal que :

$$f(t) = g(t) \cdot \cos w_0 t$$

Bajo tal hipótesis, la transformada de Fourier de la función $g(t)$, valga decir, $G(w)$, se presenta a continuación, para un valor arbitrario de la frecuencia w_0 :

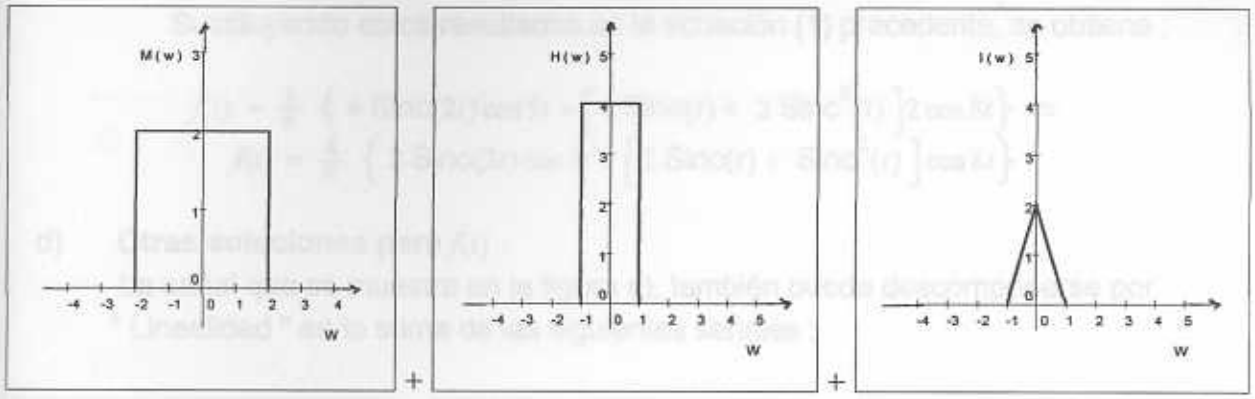


$G(w)$

Obviamente, esta función $G(w)$, desplazada hacia la derecha en un valor w_0 si genera la función $F_2(w)$ pero desplazada hacia la izquierda el mismo valor w_0, no genera a la función $F_1(w)$; en consecuencia, la función $F(w)$ dada no procede de una única modulación cosenoidal.

= oo =

b) La señal $F(w)$ dada se puede considerar procedente de las señales $M(w)$, $N(w)$ y $P(w)$, todas centradas en el origen de coordenadas como lo ilustran las siguientes figuras:



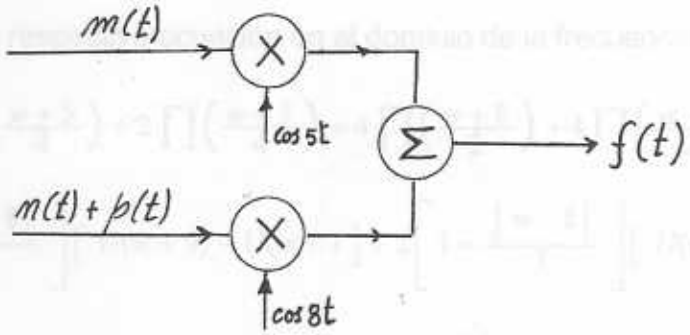
$M(w)$ $\qquad$ $N(w)$ $\qquad$ $P(w)$

Por lo tanto,

$$f(t) = m(t)\cos 5t + n(t)\cos 8t + p(t)\cos 8t \qquad \Rightarrow$$

$$f(t) = m(t)\cos 5t + \left[\, n(t) + p(t) \,\right]\cos 8t \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

En consecuencia, el número mínimo de modulaciones cosenoidales presentes en la función $f(t)$ es dos(2), tal como lo ilustra el siguiente diagrama de bloques :



(Diagrama de Bloques)

c) Cálculo de $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\, F(w) \,\right]$ **:**

Por la propiedad conocida como " Dualidad " podemos escribir que:

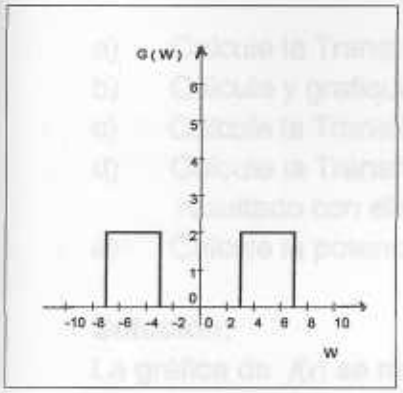
$$\begin{cases} m(t) = \left[\, \frac{1}{2\pi}(4)(2)\text{Sinc}\left(\frac{4}{2}t\right) \,\right]2 = \frac{4}{\pi}\,\text{Sinc}(2t) \\ n(t) = \left[\, \frac{1}{2\pi}(2)(4)\text{Sinc}\left(\frac{2}{2}t\right) \,\right]2 = \frac{4}{\pi}\,\text{Sinc}(t) \\ p(t) = \left[\, \frac{1}{2\pi}(2)(2)\text{Sinc}^2\left(\frac{2}{2}t\right) \,\right]2 = \frac{2}{\pi}\,\text{Sinc}^2(t) \end{cases}$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (1) precedente, se obtiene :

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\left\{ 4\ \text{Sinc}(2t)\cos 5t + \left[4\ \text{Sinc}(t) + 2\ \text{Sinc}^2(t) \right] 2\cos 8t \right\} \Rightarrow$$
$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left\{ 2\ \text{Sinc}(2t)\cos 5t + \left[2\ \text{Sinc}(t) + \text{Sinc}^2(t) \right] \cos 8t \right\}$$

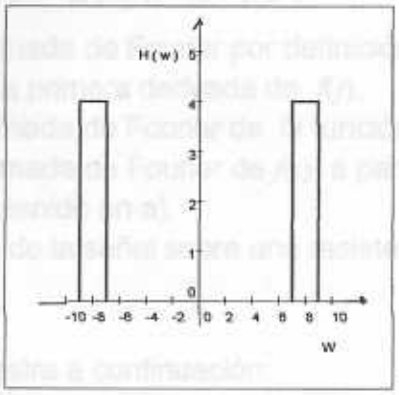
d) Otras soluciones para $f(t)$:

La señal que se muestra en la figura a), también puede descomponerse por " Linealidad " en la suma de las siguientes señales :



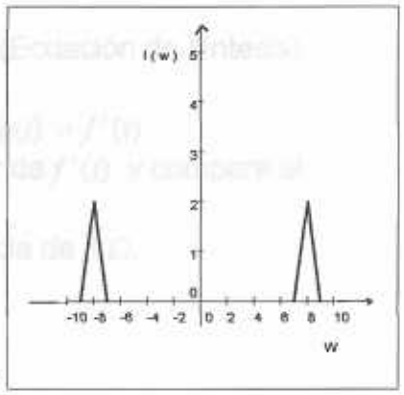
$M(w)$

+



$N(w)$

+



$P(w)$

Por lo que, la respectiva ecuación en el dominio de la frecuencia será:

$$F(w) = 2\prod\left(\frac{w+5}{4}\right) + 2\prod\left(\frac{w-5}{4}\right) + 4\prod\left(\frac{w+8}{2}\right) + 4\prod\left(\frac{w-8}{2}\right) +$$

$$+ 2\left[1 - \frac{|w+8|}{1} \right]\left[U(w+9) - U(w+7) \right] + 2\left[1 - \frac{|w-8|}{1} \right]\left[U(w-7) - U(w-9) \right]$$

La Transformada Inversa de Fourier, $f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[F(w) \right]$, será :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left[(2)(4)\ \text{Sinc}\left(\frac{4t}{2}\right)\left(e^{i5t} + e^{-i5t}\right) + (4)(2)\ \text{Sinc}\left(\frac{2t}{2}\right)\left(e^{i8t} + e^{-i8t}\right) \right] +$$
$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right) 2(2)\ \text{Sinc}^2\left(\frac{2t}{2}\right)\left(e^{i8t} + +e^{-i8t}\right)$$

En consecuencia, la señal $f(t)$ buscada también puede expresarse por :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\left[8\ \text{Sinc}(2t) 2\cos 5t + 8\ \text{Sinc}\ (t) 2\cos 8t + 4\ \text{Sinc}^2(t)\ 2\cos 8t \right]$$

Es decir;

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\left\{ 8\ \text{Sinc}(2t)\cos 5t + \left[\ 8\ \text{Sinc}\ (t) + 4\ \text{Sinc}^2 t\ \right]\cos 8t \right\}$$

lo que confirma la doble modulación cosenoidal antes calculada en los numerales c) y d).

= oo =

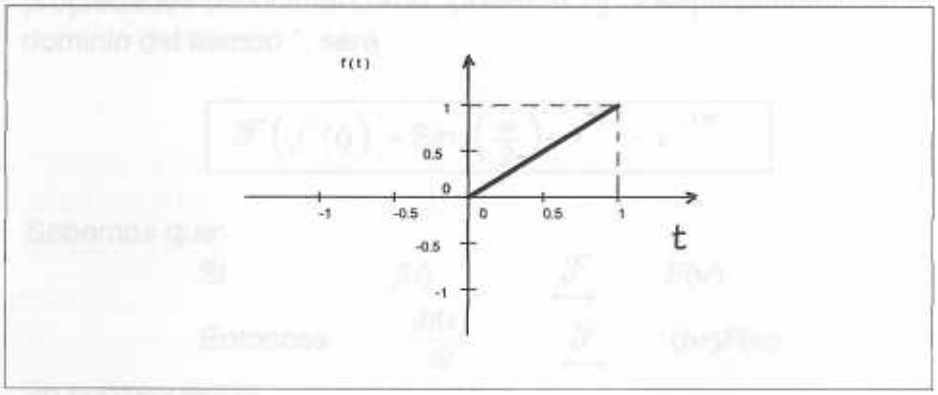
Ejemplo 21:

Dada la señal: $f(t) = \begin{cases} t & , \text{ si } 0 \le t < 1 \\ 0 & , \text{ si } t \le 0 \quad \text{o} \quad t > 1 \end{cases}$

a) Calcule la Transformada de Fourier por definición (Ecuación de síntesis).
b) Calcule y grafique la primera derivada de $f(t)$.
c) Calcule la Transformada de Fourier de la función $g(t) = f'(t)$
d) Calcule la Transformada de Fourier de $f(t)$ a partir de $f'(t)$ y compare el resultado con el obtenido en a).
e) Calcule la potencia de la señal sobre una resistencia de 1 Ω.

Solución:

La gráfica de $f(t)$ se muestra a continuación:



$$f(t) = t, \quad t \in [0,1)$$

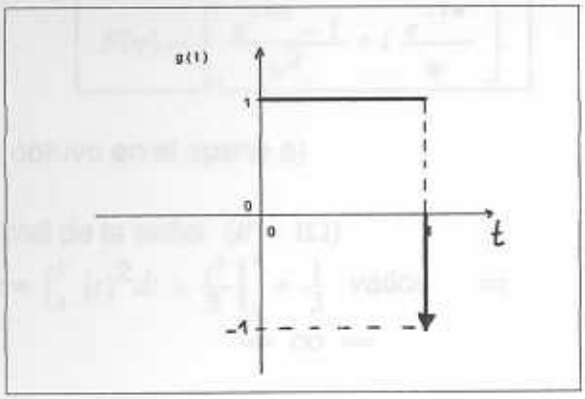
Luego:

a) $Fw) = \int_0^1 te^{-iwt}dt$; Integrando por partes se obtiene :

$$Fw) = \int_0^1 te^{-iwt} = -\frac{e^{-iw}}{(iw)} - \frac{e^{-iw}-1}{(iw)^2} = \frac{-1+iwe^{-iw}+e^{-iw}}{w^2} = \frac{e^{-iw}-1}{w^2} + i\frac{e^{-iw}}{w^2}$$

$$\boxed{Fw) = \frac{e^{-iw}-1}{w^2} + i\frac{e^{-iw}}{w^2}}$$

b) La derivada de la función $f(t)$ dada, será: $g(t) = f'(t)$



$$g(t) = f'(t)$$

Luego, aplicando la propiedad de derivación de una función discontínua, se obtiene:

$$g(t) = f'(t) = [U(t) - U(t-1)] - \delta(t-1)$$

o también :

$$\boxed{f'(t) = \prod\left(\frac{t-1/2}{1}\right) - \delta(t-1)}$$

c) La Transformada de Fouirier de $f'(t)$, calculada aplicando las propiedades conocidas como" Dualidad " y " Desplazamiento en el dominio del tiempo ", será :

$$\boxed{\mathcal{F}\left(f'(t)\right) = \text{Sinc}\left(\frac{w}{2}\right)e^{-iw/2} - e^{-iw}}$$

d) Sabemos que:

Si $\quad f(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad F(w)$

Entonces $\quad \dfrac{df(t)}{dt} \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad (iw)F(w)$

En consecuencia,

$$\text{Sinc}\left(\frac{w}{2}\right)e^{-iw/2} - e^{-iw} = (iw)F(w)$$

De donde,

$$F(w) = \frac{1}{(iw)}\left[\text{Sinc}\left(\frac{w}{2}\right)e^{-iw/2} - e^{-iw}\right] = \frac{1}{(iw)}\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)}{\left(\frac{w}{2}\right)}e^{-iw/2} - e^{-iw}\right]$$

$$F(w) = \frac{1}{(iw)}\left[\frac{e^{iw/2} - e^{-iw/2}}{2i\left(\frac{w}{2}\right)}e^{-iw/2} - e^{-iw}\right] = \frac{1}{(iw)}\left[\frac{1-e^{-iw}}{(iw)} - e^{-iw}\right]$$

$$\boxed{F(w) = \left[\frac{e^{-iw} - 1}{w^2} + i\,\frac{e^{-iw}}{w} \right]}$$

tal como se obtuvo en el aparte a)

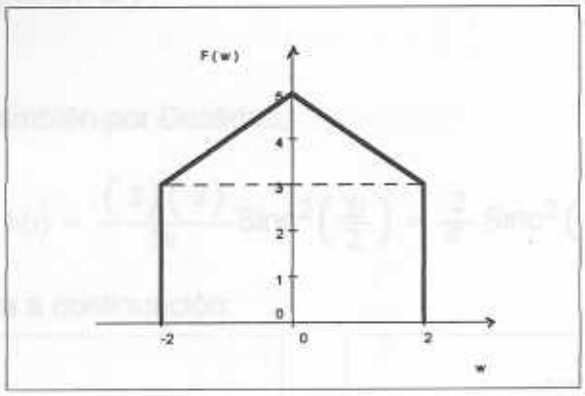
e) Potencia Total de la señal $(R = 1\Omega)$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \int_0^1 [t]^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ vatios} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{1}{3} \text{ vatios}}$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 22:

a) Calcule la función $f(t)$ cuya Transformada de Fourier se muestra en la siguiente figura:



$F(w)$

b) Calcule la potencia de la señal $f(t)$ sobre una resistencia de 1Ω.

c) Grafique y exprese analíticamente la transformada de Fourier de la función $g(t) = f(2t)\text{sen}\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución:

a) Por la propiedad conocida como " Linealidad ", tenemos que:

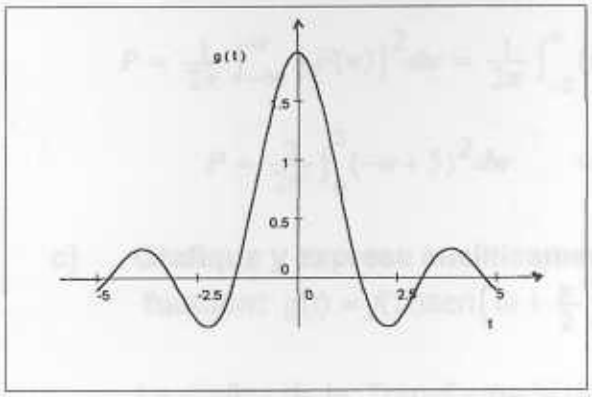
$$F(w) = G(w) + H(w)$$

donde:

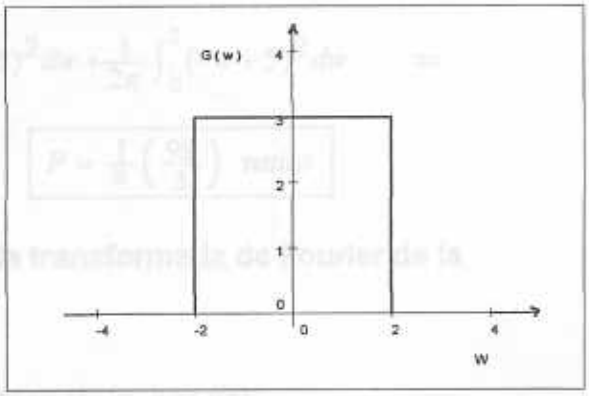
$$G(w) = 3\prod\left(\frac{w}{4}\right)$$

$$H(w) = \begin{cases} 2\left[1 - \dfrac{|w|}{2}\right] & , \text{ si } |w| \le 2 \\ 0 & , \text{ si } |w| > 2 \end{cases}$$

Luego, por Dualidad, $g(t) = \dfrac{(3)(4)}{2\pi}\text{Sinc}\left(\frac{4t}{2}\right) = \frac{6}{\pi}\text{Sinc}(2t)$, tal como se ilustra a continuación,



$\mathcal{F}$

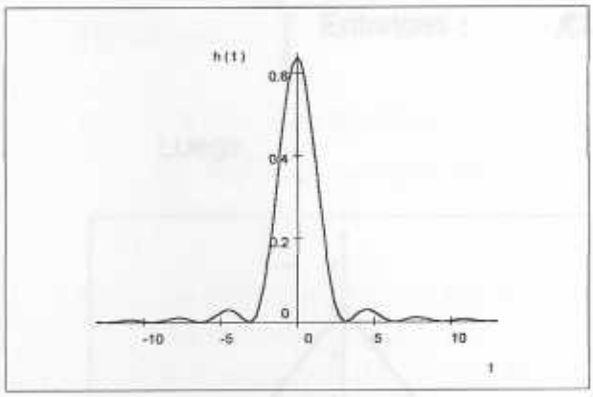


$$g(t) = \frac{6}{\pi}\text{Sinc}\left(2t\right) \qquad G(w) = 3\prod\left(\frac{w}{4}\right)$$

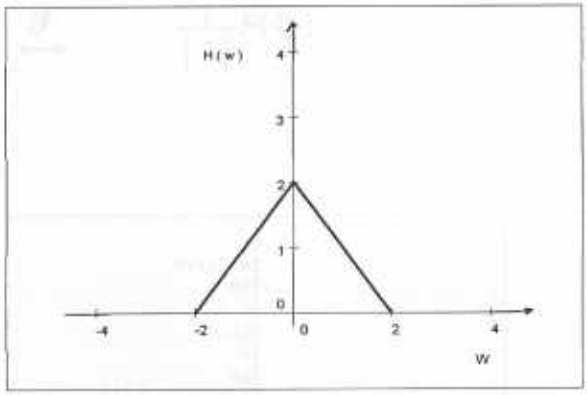
Análogamente, también por Dualidad,

$$h(t) = \frac{(2)(2)}{2\pi}\text{Sinc}^2\left(\frac{2t}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\,\text{Sinc}^2\left(t\right)$$

tal como se ilustra a continuación:



$\mathcal{F}$



$$h(t) = \frac{2}{\pi}\,\text{Sinc}^2\left(t\right) \qquad H(w) = 3\prod\left(\frac{w}{4}\right)$$

En resumen, $f(t) = g(t) + h(t) \quad \Rightarrow$

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\pi}\left[\,3\,\text{Sinc}\left(2t\right) + \text{Sinc}^2\left(t\right)\right]}$$

b) Potencia total de la Señal:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}[f(t)]^2 dt = \frac{4}{\pi^2}\int_{-2}^{2}\left[\,3\,\text{Sinc}\left(2t\right) + \text{Sinc}^2\left(t\right)\right]^2 dt$$

Nótese la dificultad de este cálculo.

Por el Teorema de Parseval, tenemos también que:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{0}(w+5)^2 dw + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2}(-w+5)^2 dw \quad \Rightarrow$$

$$P = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{2}(-w+5)^2 dw \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{1}{\pi}\left(\frac{98}{3}\right) \ vatios}$$

c) Grafique y exprese analíticamente la transformada de Fourier de la función: $g(t) = f(2t)\text{sen}\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$

La grafica de la Transformada de Fourier de la función:

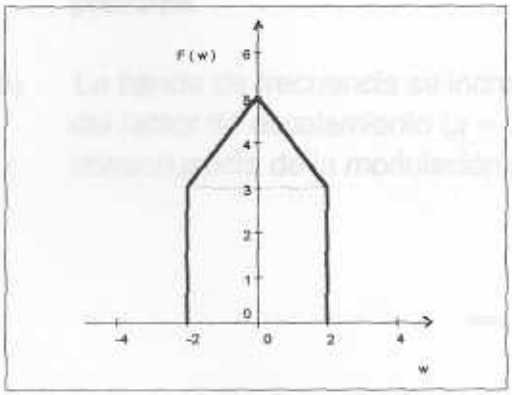
$$g(t) = f(2t)\text{sen}\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$$

la calcularemos de acuerdo con la siguiente secuencia :

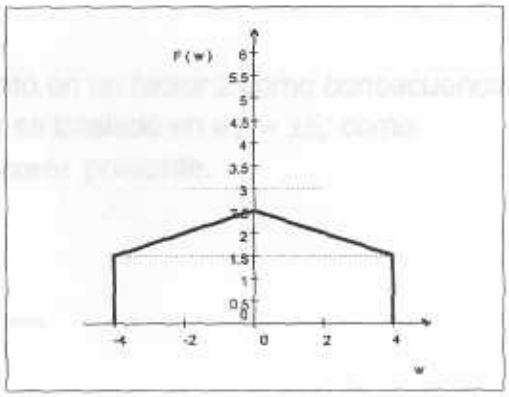
- **Escalando en el tiempo la función $f(t)$:**

$$\begin{cases} \text{Si} & f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(w) \\ \text{Entonces :} & f(2t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|2|}F(\frac{w}{2}) \end{cases}$$

Luego,

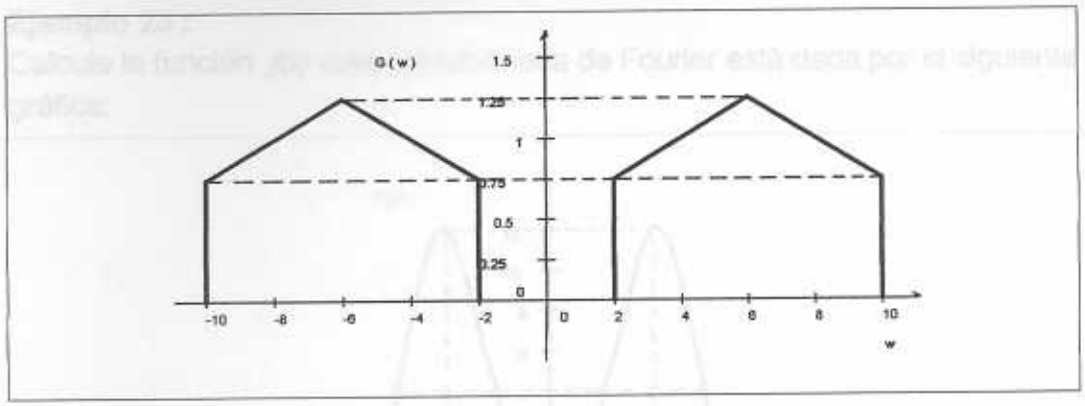


$F(w) = \mathcal{F}\left[f(t)\right]$



$\frac{1}{2}F(\frac{w}{2}) = \mathcal{F}\left[f(2t)\right]$

- **Aplicando a continuación la modulación coseno presente**:
  Así se obtiene que $\mathcal{F}\left[\ f(2t)\ \cos 6t\right]$ será:



$$G(w) = \mathcal{F}\left[\, f(2t)\cos 6t \,\right]$$

cuya expresión analítica es :

$$G(w) = \frac{3}{4}\left[\, \Pi\left(\frac{w+6}{8}\right) + \Pi\left(\frac{w-6}{8}\right) \right] + \frac{1}{2}\left[\, 1 + \frac{|\, w+6 \,|}{4} \right]\left[\, U(w+10) - U(w-2) \,\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\, 1 + \frac{|\, w-6 \,|}{4} \right]\left[\, U(w-2) - U(w-10) \,\right]$$

Obsérvese que:

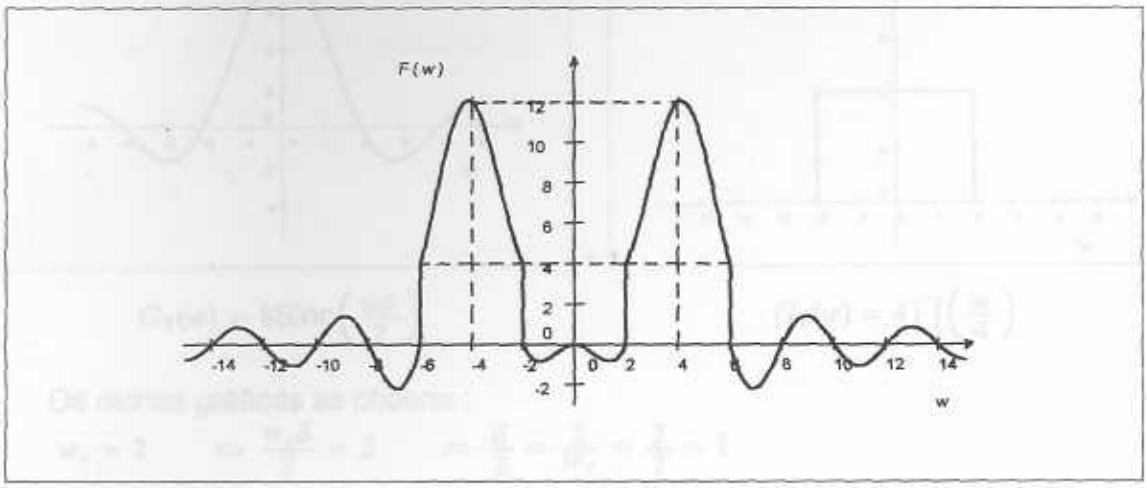
a) La amplitud de $G(w)$ es $\frac{1}{4}$ de la amplitud de $F(w)$ como consecuencia de del factor de escalamiento $(a = 2)$ y de la modulación cosenoidal presente.

b) La banda de frecuencia se incrementó en un factor 2 como consecuencia del factor de escalamiento $(a = 2)$ y se trasladó en $w_o = \pm 6$, como consecuencia de la modulación por $\cos 6t$ presente.

= oo =

Ejemplo 23 :

Calcule la función $f(t)$ cuya transformada de Fourier está dada por la siguiente gráfica:

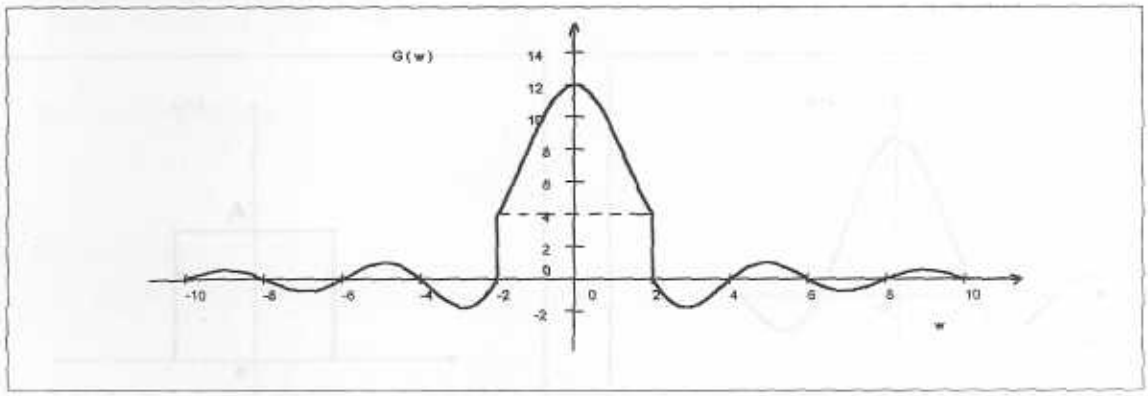


$F(w)$

Solución:

La señal dada, sin la modulación $\cos 4t$ presente , será :

$$G(w) = 8\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{\left(\frac{\pi}{2}w\right)} + 4\prod\left(\frac{w}{4}\right)$$

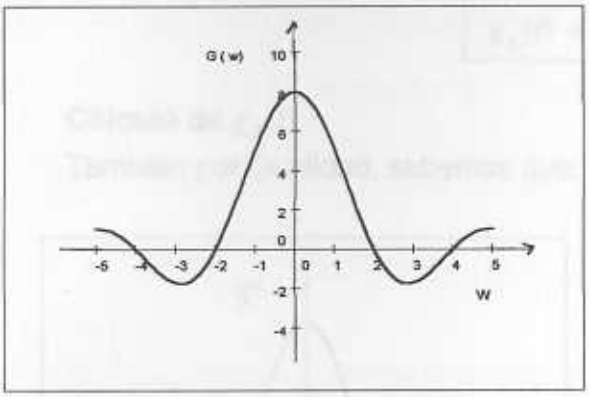


$G(w)$

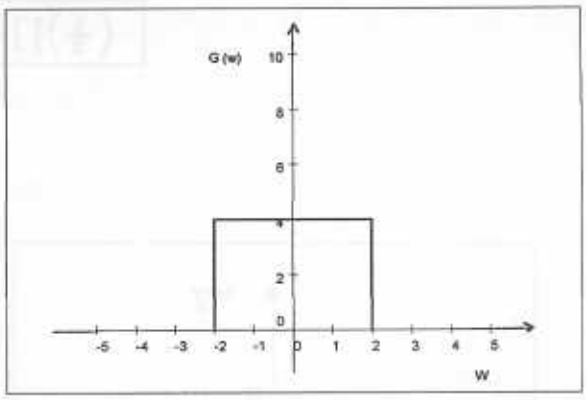
Dicha señal $G(w)$ se puede descomponer, por la Propiedad conocida como "Linealidad", en :

$$G(w) = G_1(w) + G_2(w)$$

donde :



+



$$G_1(w) = 8\text{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right) \qquad\qquad G_2(w) = 4\prod\left(\frac{w}{4}\right)$$

De dichas gráficas se obtiene :

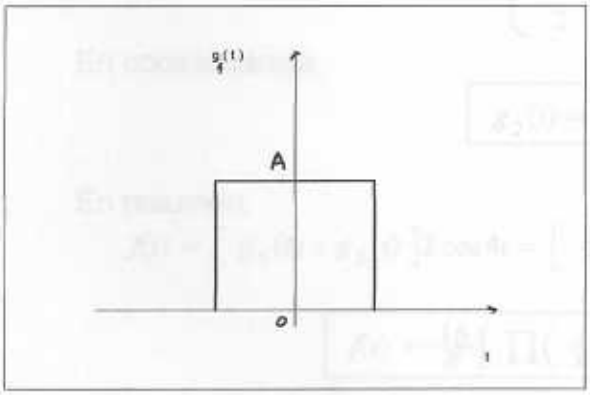
$$w_c = 2 \qquad \Rightarrow \frac{w_c\delta}{2} = 2 \qquad \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{2}{w_c} = \frac{2}{2} = 1$$

En consecuencia:

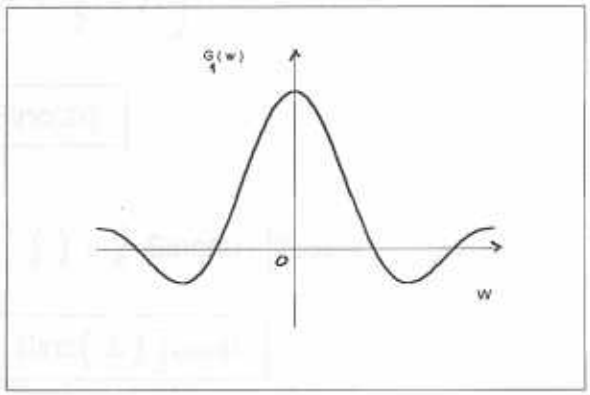
$$\begin{cases} G_1(w) = 8\text{Sinc}\left(\frac{\pi}{2}w\right) \\ G_2(w) = 4\prod\left(\frac{w}{4}\right) = 4\left[\, U(t+2) - U(t-2)\,\right] \end{cases}$$

Cálculo de $g_1(t)$:

Por Dualidad sabemos que



$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$



$$g_1(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right) \qquad\qquad G_1(w) = A\delta\text{Sinc}\left(\frac{w\delta}{2}\right)$$

Luego :

$$G_1(w) = 8\text{Sinc}\left(\frac{\pi}{2}w\right) \quad \Rightarrow$$

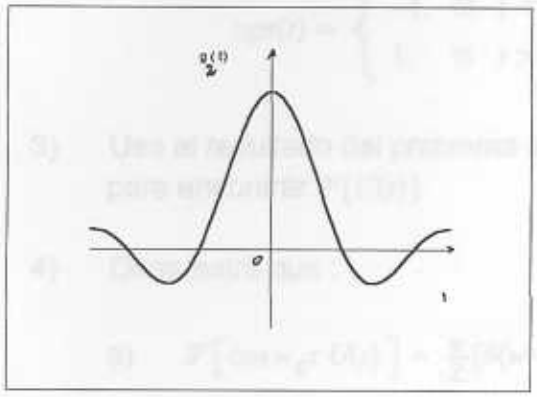
$$g_1(t) = A\prod\left(\frac{t}{\delta}\right), \text{ donde : } \left\{\begin{array}{c} A\delta = 8 \\ \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{(8)}{\delta} = \frac{8}{\pi}$$

En consecuencia,

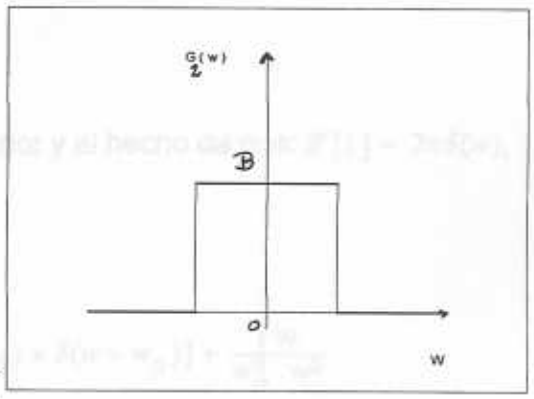
$$\boxed{g_1(t) = \frac{8}{\pi}\prod\left(\frac{t}{\pi}\right)}$$

Cálculo de $g_2(t)$:

También por Dualidad, sabemos que:



$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$



0

$$g_2(t) = \frac{Bw_0}{2\pi}\text{Sinc}\left(\frac{\delta}{2}t\right) \qquad\qquad G_2(w) = B\prod\left(\frac{w}{w_0}\right)$$

Por lo tanto : $G_2(w) = 4\prod\left(\frac{w}{4}\right) \quad \Rightarrow$

$$g_2(t) = B\,\text{Sinc}\left(\frac{\delta}{2}t\right), \text{ donde : } \left\{ \begin{array}{l} B = \dfrac{(4)(4)}{2\pi} = \dfrac{8}{\pi} \\ \dfrac{\delta}{2} = \dfrac{w_0}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{array} \right\}$$

En consecuencia,

$$\boxed{g_2(t) = \frac{8}{\pi}\,\text{Sinc}(2t)}$$

En resumen,

$$f(t) = \left[\, g_1(t) + g_2(t) \,\right]2\cos 4t = \left[\, \frac{8}{\pi}\prod\left(\frac{t}{\pi}\right) + \frac{8}{\pi}\,\text{Sinc}(2t) \,\right]2\cos 4t \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{f(t) = \frac{16}{\pi}\left[\, \prod\left(\frac{t}{\pi}\right) + \text{Sinc}(2t) \,\right]\cos 4t}$$

== oo ==

14.4) EJERCICIOS PROPUESTOS

En todos los ejercicios que a continuación se proponen, se supone que :

$$\mathcal{F}\left[\, f(t) \,\right] = F(w)$$

1) Demuestre que:

a) Si $f(t)$ es una función par de t, entonces: $F(w) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos wt\, dt$

b) Si $f(t)$ es una función impar de t, entonces: $F(w) = -2i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}\, wt\, dt$

2) Encuentre la transformada de Fourier de la función "*signo de t*", definida por:

$$sgn(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

3) Use el resultado del problema anterior y el hecho de que: $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(w)$, para encontrar $\mathcal{F}[U(t)]$.

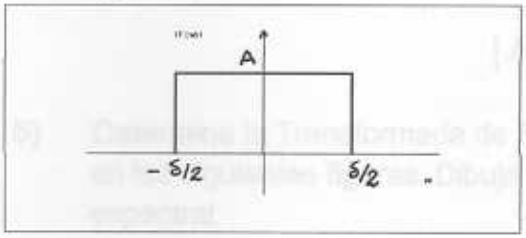
4) Demuestre que :

a) $\mathcal{F}\left[\cos w_0 t\, U(t)\right] = \frac{\pi}{2}[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)] + \frac{i\, w}{w_0^2 - w^2}$

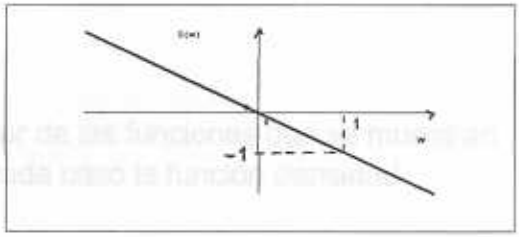
b) $\mathcal{F}\left[\text{sen}\, w_0 t\, U(t)\right] = \frac{\pi}{2i}[\delta(w - w_0) - \delta(w + w_0)] + \frac{w}{w_0^2 - w^2}$

5) Determine la función $f(t)$ cuya Transformada de Fourier se muestra a continuación :

a)

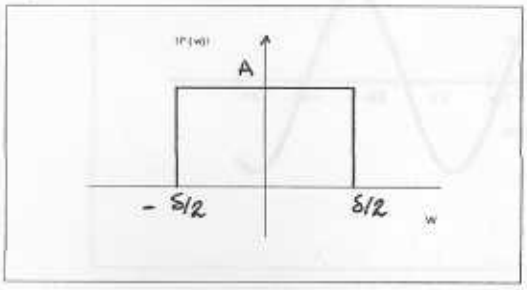


$|F(w)|$

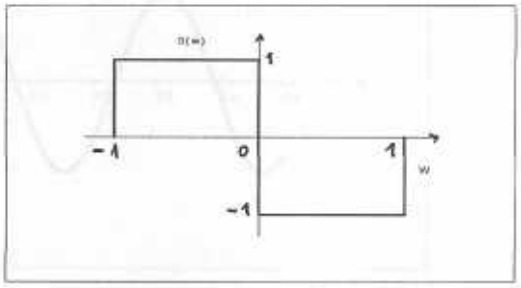


$\theta(w)$

b)

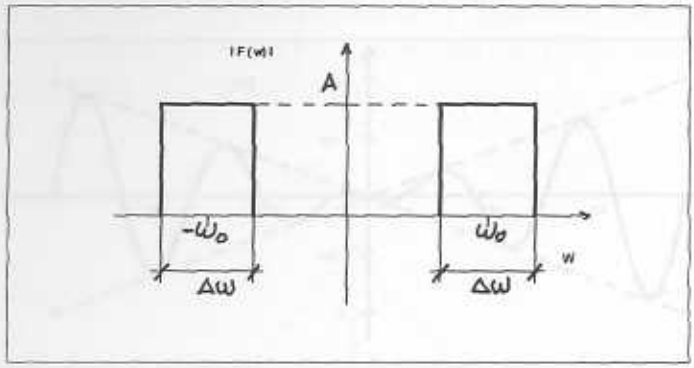


$|F(w)|$



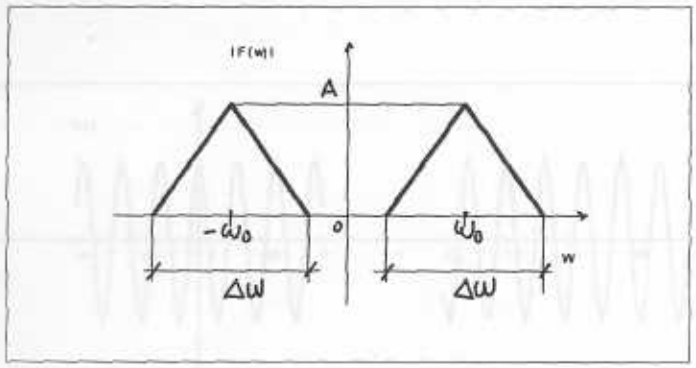
$\theta(w)$

c)



$|F(w)|$

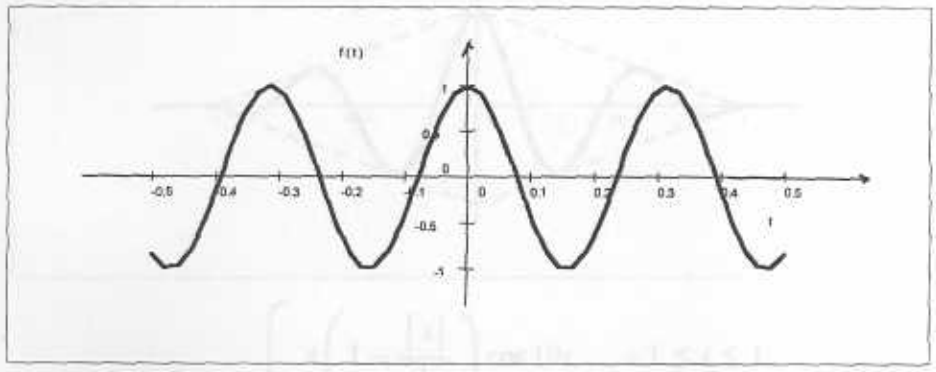
d)



$|F(w)|$

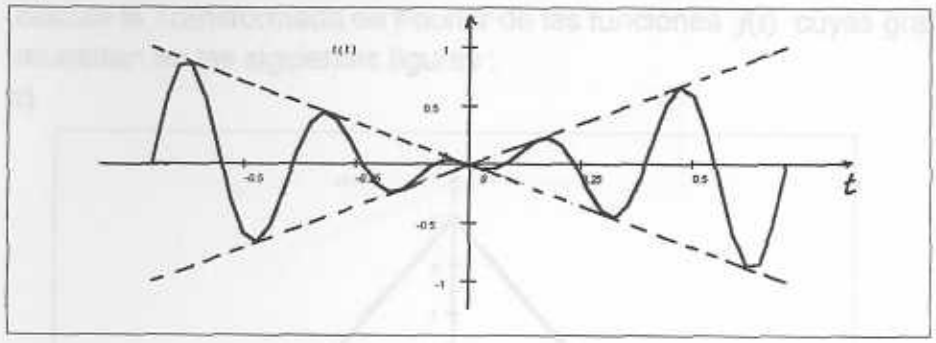
6) Determine la Transformada de Fourier de las funciones que se muestran en las siguientes figuras. Dibuje en cada caso la función densidad espectral.

a)



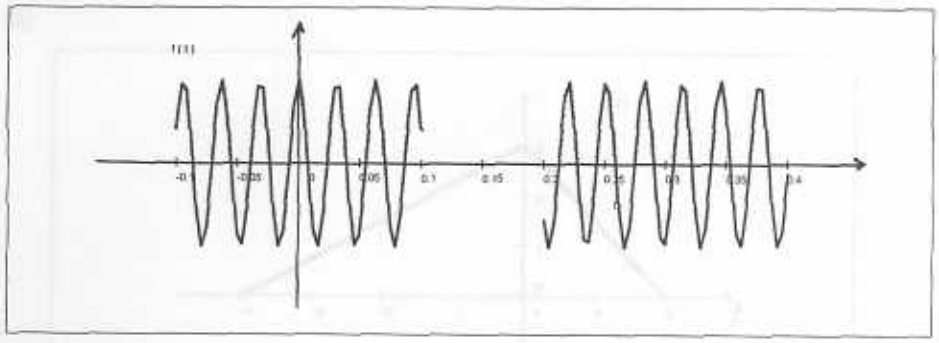
a) $f(t) = \cos 20t$

b)



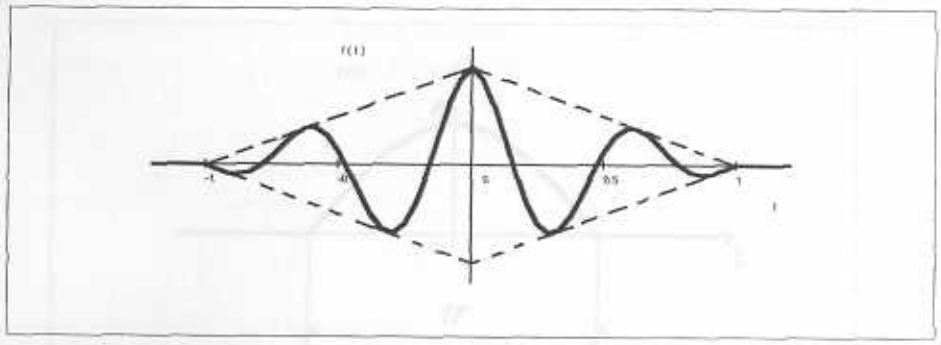
$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{40A}{9\pi} t \cos 20t, & \text{si } -\dfrac{9\pi}{40} < t < \dfrac{9\pi}{40} \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

c)



$$f(t) = \begin{cases} A\cos 200t, & \text{si } -0.1 < t < 0.1 \\ 0, & 0.1 < t < 0.2 \end{cases}$$

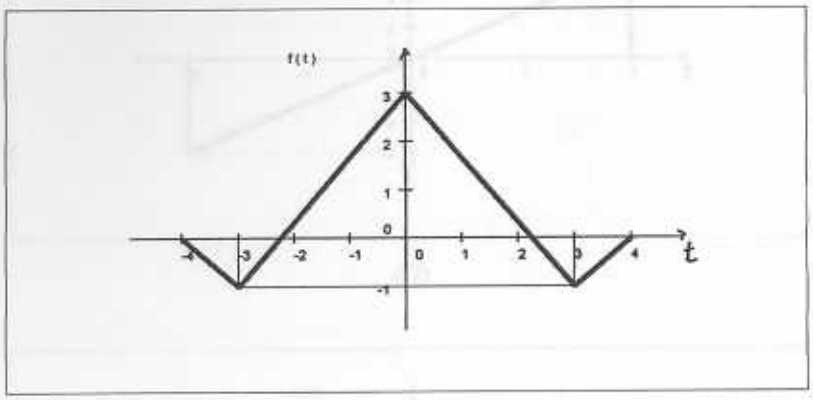
d)



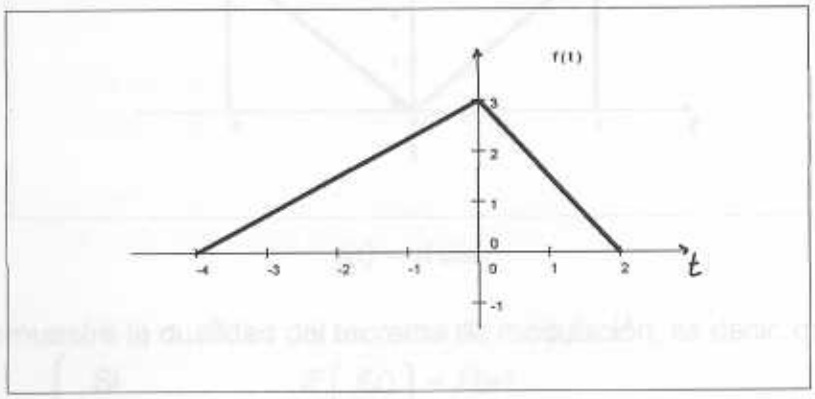
$$f(t) = \begin{cases} A\left(1 - \dfrac{|t|}{1}\right)\cos 10t\ , & -1 \le t \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

7) Usando las propiedades de derivación y traslación en el dominio del tiempo, calcule la Transformada de Fourier de las funciónes $f(t)$ cuyas gráficas se muestran en las siguientes figuras :

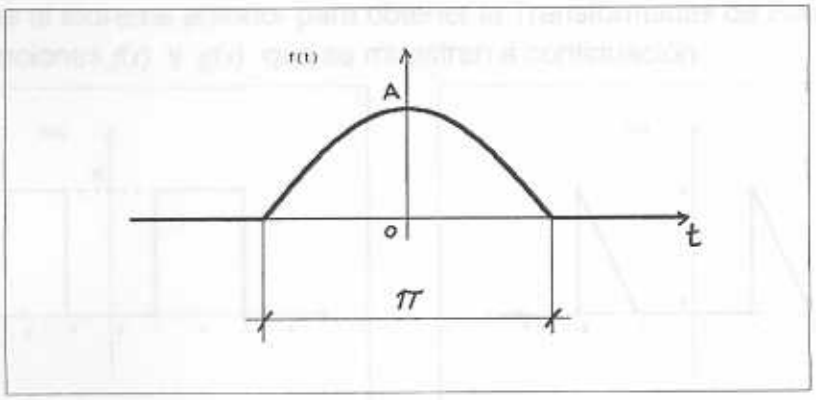
a)



b)

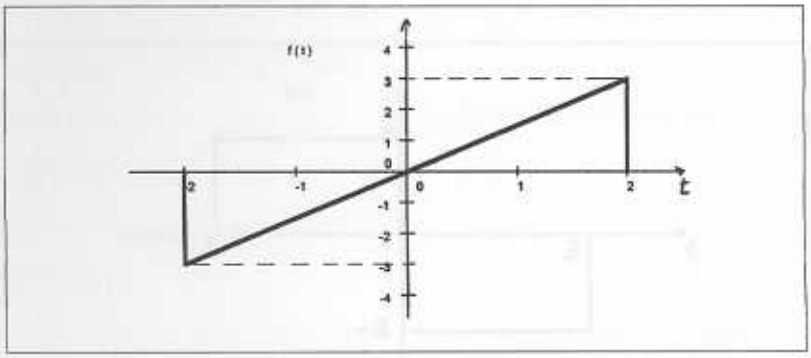


c)



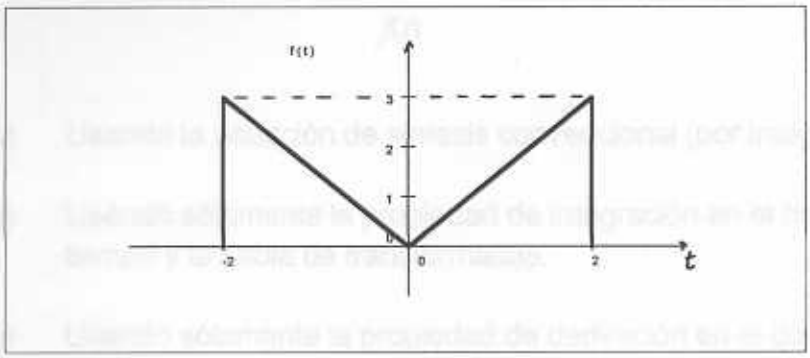
$$f(t) = A\cos t, \qquad |t| < \frac{\pi}{2}$$

d)



$f(t)$

e)

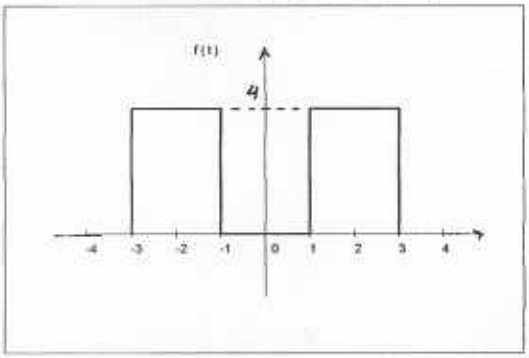


$f(t) = A\cos t$

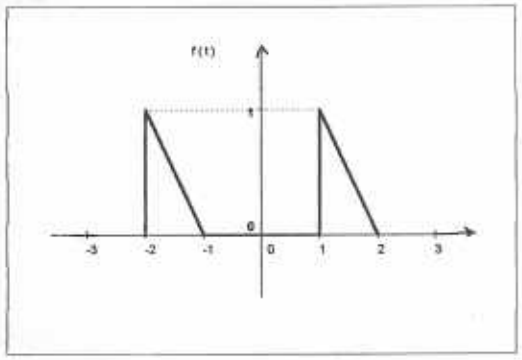
8) Demuestre la dualidad del teorema de modulación, es decir, que :

$$\begin{cases} \text{Si} & \mathcal{F}\left[\, f(t) \,\right] = F(w) \\ \text{Entonces} & \mathcal{F}\left[\, f(t+T) + f(t-T) \,\right] = 2\cos(wT)F(w) \end{cases}$$

9) Use el teorema anterior para obtener la Transformadas de Fourier de las funciones $f(t)$ y $g(t)$ que se muestran a continuación :

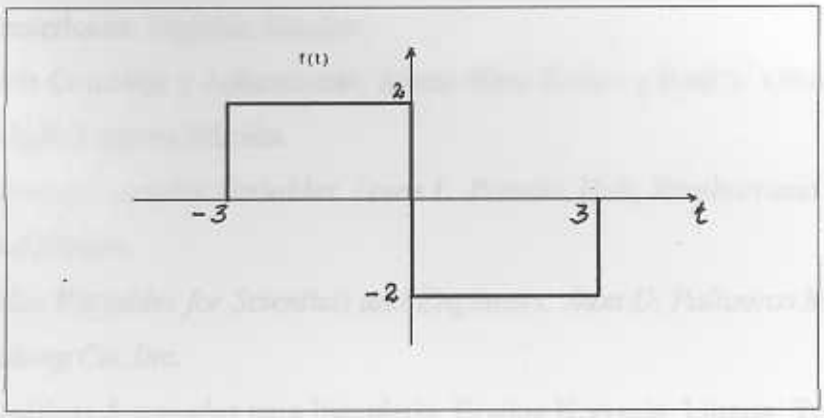


$f(t)$



$g(t)$

10) Encuentre la Transformad de Fourier de la funcion $f(t)$ que se muestran a continuación :



$f(t)$

a) Usando la ecuación de síntesis convencional (por Integración).

b) Usando sólamente la propiedad de integración en el dominio del tiempo y la Tabla de transformadas.

c) Usando sólamente la propiedad de derivación en el dominio del tiempo y la Tabla de transformadas.

d) Usando sólamente la propiedad de Traslación en el dominio del tiempo y la Tabla de Transformadas.

===== oo =====
=== oo ===
== oo ==
= oo =

BIBLIOGRAFÍA

1) Variable Compleja con Aplicaciones. A. Dvid Wunsch. Adison – Wesley Iberoamericana. Segunda Edición.

2) Variable Compleja y Aplicaciones. James Ward Brown y Ruel V. Churchill. Mc Graw Hill. Séptima Edición

3) *Elements of Complex Variables. Louis L. Pennisi. Holt, Rinehart and Winston. Second Edition.*

4) *Complex Variables for Scientists and Engineers. Jhon D. Paliouras Macmillan Publishing Co.,Inc.*

5) Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Erwing Kreyszig. Limusa. Tercera Edición.

6) Cálculo Diferencial e Integral. N. Piskunov. Montaner y Simon S.A.

7) Señales y Sistemas. Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky y S. Hamid Nawas. Prentice Hall. Segunda Edición.

8) Introducción a las Señales y los Sistemas. Douglas K, Lindner. Mc Graw Hill

9) *Signal, Systems and Communication. B.P. Lathi. Jhon Wiley and Son, Inc.*

10) *Analysis of Linear Systems. David K. Cheng. Adison – Wesley Publishing Company, Inc.*

11) *Continuous and Discrete Signals and Systems. Samir S. Soliman and Mandyam D. Srinath. Prentice –Hall International Aditions.*