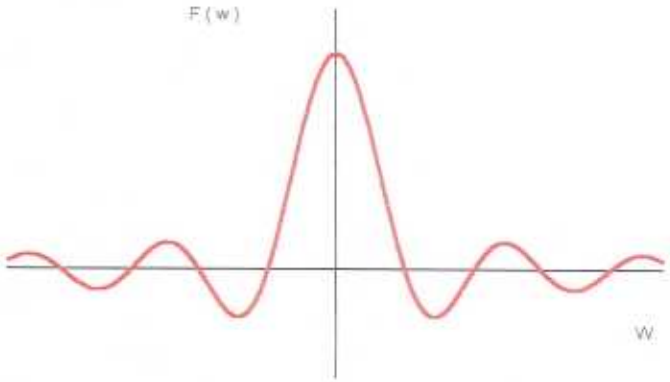
UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE
TELECOMUNICACIONES

MATEMÀTICAS SUPERIORES PARA INGENIERÍA



Trabajo de ascenso presentado ante la ilustre Universidad Católica Andrés Bello por el ingeniero Luis Barroso Alfaro para optar por la categoría de Profesor Agregado

PRÓLOGO

Este trabajo se realizó pensando hacer de él un libro de texto, adaptado a la asignatura Cálculo IV que se dicta en la Escuela de Ingeniería de Telecomunicaciones, como parte integrante del *pensum* vigente para optar al título de Ingeniero en Telecomunicaciones que otorga la Escuela de Ingeniería de Telecomunicaciones, Facultad de Ingeniería de la Universidad Católica Andrés Bello (UCAB).

Los contenidos presuponen que el lector está familiarizado tanto con el cálculo de funciones de variable real, previsto en nuestra Facultad en la asignaturas Cálculo I, Cálculo II y Cálculo III, como con el cálculo de funciones de una variable compleja, cuyo contenido se contempla en la asignatura Matemáticas para Telecomunicaciones, todas ellas incluidas en los semestres previos al Cálculo IV. Conceptos tales como límite, continuidad, derivada e integral, deben ser en consecuencia familiares al lector.

Se presentan los contenidos no sólo desde el punto de vista matemático, pues consideramos que la técnica es importante, sino también desde el punto de vista de las ideas, pues el autor está convencido que sólo el análisis crítico de éstas y las interrelaciones entre ellas, hacen interesante, inteligible y útil las matemáticas.

El texto está dividido en catorce (14) capítulos. En los capítulos I a IV se desarrolla la teoría de Cauchy para el cálculo de Integrales de Línea en variable compleja. En los Capítulos V y VI se tratan las sucesiones y series infinitas de variable compleja, como conceptos previos a las series de Taylor y de Laurent. en el plano complejo, que se estudian en los Capítulos VII y VIII, respectivamente. En el Capítulo IX se toma de nuevo el tema de la integración en el plano complejo, como una consecuencia de la serie de Laurent (Método de los Residuos). Los Capítulos X y XI están dedicados al estudio de la Transformada Z, caso particular de una serie de Laurent y base fundamental del análisis digital de señales, de uso generalizado en el estudio de los sistemas modernos de telecomunicaciones. El texto concluye con los capítulos XII a XIV, dedicados al estudio de las Series y de la Transformada de Fourier, conceptos éstos fundamentales para el análisis del comportamiento de las señales, tanto en el

dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia, esencia de todo sistema de telecomunicaciones.

La mayoría de los conceptos aquí expuestos se enuncian como teoremas y van seguidos por ejemplos que los ilustran. En todos loa capítulos se han incluido además apartados con ejemplos resueltos y se proponen ejercicios relacionados a ser resueltos por el estudiante interesado.

El autor quiere expresar su profundo agradecimiento en especial a las autoridades de la Facultad de Ingeniería de la UCAB, por el apoyo y confianza con que siempre me han distinguido y a mis ex alumnos por sus acertados comentarios y aportes significativos para la mejor estructuración del presente trabajo.

Agradezco al lector me haga llegar todos aquellos comentarios, sugerencias y correcciones que estime oportunos y que contribuyan a mejorar el texto. De merecer tal consideración, tales sugerencias serían recogidas en una segunda edición.

CONTENIDO

		Página
PRÓLOGO		v
CAPÍTULO I		
LA INTEGRAL DE LÍNEA EN EL PLANO COMPLEJO		
1.1)	INTRODUCCIÓN	1
1.2	DEFINICIÓN	1
1.3)	COMPRENSIÓN INTUITIVA DE LA DEFINICIÓN	2
1.4	CÁLCULO DE LA INTEGRAL DE LÍNEA	4
1.5)	EJEMPLOS RESUELTOS	5
1.6)	EJERCICIOS PROPUESTOS I	10
1.7)	PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE LÍNEA	11
1.8)	LA INTEGRAL DE LÍNEA Y EL TEOREMA DE GREEN	19
	1.8.1) Definiciones	19
	1.8.2) Forma Compleja del Teorema de Green	20
1.9)	CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE GREEN	21
1.10)	EJERCICIOS PROPUESTOS II	27
CAPÍTULO II		
TEOREMA DE CAUCHY - GOURSAT		
2.1)	INTRODUCCIÓN	29
	2.1.1) Dominio Simplemente Conexo	29
	2.1.2) Dominio Múltiplemente Conexo	29
2.2)	TEOREMA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY	29
	2.2.1) Consecuencia	31
	2.2.2) Ejemplos Resueltos	32
	2.2.3) Ejercicios Propuestos I	43
2.3)	INTEGRACIÓN EN DOMINIOS MULTIPLEMENTE CONEXOS	43
2.4)	PRINCIPIO DE DEFORMACIÓN DE CONTORNOS	46
2.5)	GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE DEFORMACIÓN DE CONTORNOS	47
2.6)	INTEGRACIÓN DE FUNCIONES QUE SON DERIVADAS DE FUNCIONES ANALÍTICAS	52
2.7)	EJERCICIOS PROPUESTOS II	54

Página

CAPÍTULO III
LA FÓRMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY

3.1) INTRODUCCIÓN 55
3.2) TEOREMA: LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY 55
3.3) EJEMPLOS RESUELTOS 57

3.4) EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY: Las Derivadas de orden superior 73
3.5) EJERCICIOS PROPUESTOS I 79
3.6) LA FÓRMULA DE CAUCHY EN DOMINIOS DOBLEMENTE CONEXOS 81
3.7) GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY A DOMINIOS MULTIPLEMENTE CONEXOS 82
3.8) EJERCICIOS PROPUESTOS II

CAPÍTULO IV
CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

4.1) DOMINIOS SIMPLEMENTE CONEXOS 87
4.1.1) Integrando con sólo una singularidad en el interior de la Curva de integración. 87
4.1.2) Integrando con dos singularidades simples en el interior De la curva de integración. 88
4.1.3) Integrando con tres o más singularidades simples en el Interior de la curva de integración. 91
4.2) EJEMPLOS RESUELTOS I 91
4.3) DOMINIOS MULTIPLEMENTE CONEXOS 95
4.3.1) La Fórmula Integral de Cauchy en Dominios Doblemente Conexos. 95
4.3.2) La Fórmula Integral de Cauchy en Dominios Multiplemente Conexos. 96
4.4) TEOREMA DE MORERA 99
4.4.1) Ejemplos Resueltos II 101
4.4.2) Ejercicios Propuestos I 102
4.5) DESIGUALDAD DE CAUCHY 102
4.6) TEOREMA DE LIOUVILLE 103
4.7) TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE GAUSS 104
4.7.1) Aplicación del Teorema del Valor Medio de Gauss 105
4.7.2) Ejemplos Resueltos III 106
4.8) TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO 111

Página

4.9) TEOREMA DEL MÓDULO MÍNIMO 113
4.10) EJERCICIOS PROPUESTOS II 115

CAPÍTULO V
SUCESIONES Y SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS COMPLEJOS

5.1) INTRODUCCIÓN 121
5.2) SUCESIONES
5.2.1) Límite de una sucesión 121
5.2.2) Sucesión Convergente 122
5.2.3) Sucesión Divergente 122
5.2.4) Ejemplos Resueltos I 122
5.2.5) Definición: Punto Límite 125
5.2.6) Sucesión Acotada 127
5.3) TEOREMA DE BOLZANO Y WEIERSTRASS 127
5.4) PRINCIPIO DE CONVERGENCIA DE CAUCHY 131
5.5) PROPIEDAD DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES 133
5.5.1) Sucesión Monótona Creciente 133
5.5.2) Teorema : Convergencia de una Sucesión 134
5.6) EJERCICIOS PROPUESTOS 135

CAPÍTULO VI
SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS COMPLEJOS

6.1) INTRODUCCIÓN 137
6.2) SERIE DE POTENCIAS (Serie de Taylor) 138
6.2.1) Observaciones a la Serie de Taylor 138
6.3) SERIE DE TÉRMINOS COMPLEJOS 139
6.3.1) Serie Infinita de Términos Complejos 139
6.3.2) Sumas Parciales 140
6.3.3) Sucesión de funciones 140
6.4) CONVERGENCIA ORDINARIA DE UNA SERIE INFINITA 140
6.4.1) Límite 140
6.4.2) Convergencia Ordinaria 141
6.4.3) Región de Convergencia 141
6.5) LA SERIE GEOMÉTRICA FUNDAMENTAL 142
6.6) CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE INFINITA 144
6.6.1) Teorema 144
6.6.2) Criterio del Término n-ésimo 146
6.6.3) Convergencia Absoluta y Condicional 148

Página

6.6.4) Criterio del Cociente 149
6.6.5) Criterio de Comparación 151
6.6.6) Criterio de la Raíz 152
6.6.7) Criterio de la Serie " p ". 152
6.7) CONVERGENCIA UNIFORME : Criterio M de Weierstrass 157
6.7.1) Propiedades de las Series Uniformemente Convergentes 160
6.8) EJERCICIOS PROPUESTOS 166

CAPÍTULO VII
LA SERIE DE TAYLOR

7.1) INRODUCCIÓN 169
7.2) TEOREMA: Serie de Taylor 169
7.2.1) Ejemplos Resueltos I 173
7.3) OTROS DESARROLLOS EN SERIE DE TAYLOR 180
7.3.1) Desarrollos de Maclaurin 180
7.3.2) Otras series de Taylor 181
7.4) UNICIDAD DEL DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR 184
7.5) OBSERVACIONES ACERCA DE LA ANALITICIDAD 185
7.6) EJEMPLOS RESUELTOS II 186
7.7) MÉTODOS AUXILIARES PARA OBTENER DESARROLLOS EN SERIE DE TAYLOR 193
7.7.1) Derivación e integración término a término 193
7.7.2) Ejemplos Resueltos III 194
7.7.3) Multiplicación y división de series 196
7.7.4) Fracciones simples 198

CAPÍTULO VIII
LA SERIE DE LAURENT

8.1) INTRODUCCIÓN 203
8.2) APLICACIONES 203
8.3) TEOREMA DE LAURENT 204
8.3.1) Observaciones 211
8.3.2) Definición : Punto Singular Aislado 815
8.3.8) Ejemplos Resueltos I 216
8.4) CLASIFICACIÓN DE LAS SINGULARIDADES 231
8.4.1) Entorno Reducido de un punto 231
8.4.2) Punto Singular Aislado 231
8.4.3) Polos 231
8.4.4) Singularidad Evitable 232

Página

8.4.5) Singularidad Esencial 232
8.4.6) Función Entera 233
8.4.7) Ejemplos Resueltos II 234
8.5) CÁLCULO DE SERIES DE LAURENT ALREDEDOR DE PUNTOS SINGULARES 236
8.6) EJERCICIOS PROPUESTOS 241

CAPÍTULO IX
INTEGRACIÓN POR EL MÉTODO DE LOS RESÍDUOS

9.1) INTRODUCCIÓN 243
9.2) RESÍDUOS 243
9.3) TEOREMA DEL RESÍDUO 244
9.3.1) Ejemplos Resueltos I 246
9.3.2) Observaciones 252
9.3.3) Teorema Nº 1 : Polo Simple 253
9.3.4) Ejemplos Resueltos II 255
9.3.5) Teorema Nº 2 : Polo de Orden Superior 257
9.3.6) Ejemplos Resueltos III 258
9.4) CEROS DE UNA FUNCIÓN 267
9.4.1) Ejemplos Resueltos IV 267
8.4.2) Ejercicios Propuestos I 271
9.5) APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESÍDUO A REGIONES MULTIPLEMENTE CONEXAS 273
9.5.1) Teorema 273
9.5.2) Ejemplos Resueltos V 275
9.5.3) Ejercicios Propuestos II 279
9.6) EVALUACIÓN DE INTEGRALES REALES 280
9.6.1) Caso I 280
9.6.1.1) Ejemplos Resueltos VI 282
9.6.1.2) Ejercicios Propuestos III 290
9.6.2) Caso 2: Integrales Impropias 291
9.6.2.1) Cálculo del Valor Principal de Cauchy 293
9.6.2.2) Ejemplos Resueltos VII 296
9.6.2.3) Ejercicios Propuestos IV 301
9.6.3) Caso 3 302
9.6.3.1) Ejemplos Resueltos VIII 304
9.6.3.2) Ejercicios Propuestos V 304
9.6.4) Caso 4 305
9.6.4.1) Ejemplos Resueltos IX 308
9.6.4.2) Ejercicios Propuestos VI 309

Página

CAPÍTULO X
LA TRANSFORMADA Z

10.1) INTRODUCCIÓN 311
10.2) DEFINICIÓN 314
10.2.1) Observaciones 314
10.3) RELACIÓN ENTRE LA TRANSFORMADA Z Y LA TRANSFORMADA DE LAPALCE 325
10.4) CÁLCULO DE TRANSFORMADAS Z 326
10.5) CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA Z INVERSA 330
10.6) PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA Z 330
10.7) EJEMPLOS RESUELTOS I 335

CAPÍTULO XI
LA TRANSFORMADA Z (Continuación)

11.1) TEOREMA DEL VALOR INICIAL 349
11.2) TEOREMA DEL VAOLOR FINAL 351
11.2.1) Ejemplos Resueltos I 352
11.3) FACTOR DE AMPLIFICACIÓN 356
14.4) TRANSFORMADA Z DE LA FUNCIÓN : t f(t) U(t) 356
11.4.1) Ejemplos Resueltos II 357
11.5) TRANSFORMADA Z DEL PRODUCTO DE FUNCIONES 359
11.6) TABLA DE TRANSFORMADAS Z 368
11.7) TRANSFORMADA Z INVERSA: 371
11.7.1) Cálculo de la Transformada Z Inversa 371
11.7.2) Propiedades de la Transformada Z Inversa 377
11.7.3) Condiciones para la Existencia de la Transformada Z 383
11.7.4) Ejemplos Resueltos III 383
11.7.5) Ejercicios Propuestos 389
11.8) TRANSFORMADA Z INVERSA DEL PRODUCTO DE FUNCIONES 389
11.8.1) Definición de Convolución 389
11.8.2) Transformada Z de la Convolución 390
11.8.3) Tabla Resumen 391
11.8.4) Ejemplos Resueltos IV 392
11.9 ECUACIONES EN DIFERENCIA Y TRANSFORMADA Z 398

Página

CAPÍTULO XII
SERIES DE FOURIER

12.1) DEFINICIÓN : SERIE GEOMÉTRICA 403
12.2) CÁLCULO DE LOS CCOEFICIENTES DE LA SERIE DE FOURIER 405
12.2.1) Cálculo de a_0 405
12.2.2) Cálculo de a_n 406
12.2.3) Cálculo de b_n 407
12.2.4) Ejemplos de cálculo de desarrollos en Serie de Fourier 409
12.2.5) Ejercicios Propuestos I 419
12.2.6) Observaciones 419
12.3) EJERCICIOS PROPUESTOS II 430
12.4) DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN NO PERIÓDICA EN SERIE DE FOURIER 432
12.5) FORMAS ALTERNAS DE LA SERIE DE FOURIER 443
12.5.1) Forma Trigonométrica Alterna
12.5.2) Forma Exponencial Compleja 445
12.5.3) Ejercicios Propuestos 449
12.6) TEOREMA DE DERICHCLET 449
12.7) ESPECTRO DE FRECUENCIAS DE FOURIER 451
12.7.1) Características del Espectro de Frecuencias 452
12.7.2) Significado de las Frecuencias Negativas 456
12.8) EFECTO DEL DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO EN EL ESPECTRO DE FRECUENCIAS 457
12.9) EL SPECTRO DE POTENCIA DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA: TEOREMA DE PARSEVAL 458
12.9.1) Espectro de Potencia 460
12.10) EJEMPLOS RESUELTOS 461
12.11) EJECICIOS PROPUESTOS 478

CAPÍTULO XIII
LA INTEGRAL DE FOURIER

13.1) INTRODUCCIÓN 483
13.2 REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN CUALQUIERA SEBRE EL INTERVALO $(-\infty,\infty)$. 483
13.2.1) La Transformada de Fourier 487
13.2.2) Simplificación en el Cálculo de la Transformada de Fouirier 492
13.2.3) Ejemplos Resueltos 493
13.2.3.1) Función Par 493

		Página
	13.2.3.2) Función Impar	495
	13.2.4) Existencia de la Transformada de Fourier	497
13.3)	CÁLCULO DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES SINGULARES	499
13.4)	LA FUNCIÓN IMPULSO DE DIRAC	505
13.5)	DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DISCONTÍNUA EN EL PUNTO DE DISCONTINUIDAD	510
13.6)	PROPIEDAD DE MUESTREO DE LA FUNCIÓN IMPULSO	511
13.7)	TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN IMPULSO	512
	13.7.1) Impulso Unitario Centrado en el Origen	512
	13.7.2) Impulso Unitario desplazado a: $t = t_0$	513
13.8)	TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA CONSTANTE	514
13.9)	TRANSFORMADA DE FOURIER DE LAS FUNCIONES : $\cos(w_0 t)$ y $\text{sen}(w_0 t)$	516
13.10)	TRANSFORMADA DE FOURIER DE LAS FUNCIONES : $\cos(w_0 t)\,U(t)$ y $\text{sen}(w_0 t)\,U(t)$	519
13.11)	TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO : U(t)	520
13.12)	TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL : $e^{iw\,t}$	522
13.13)	TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN PERIÓDICA	523
13.14)	TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER	529
	13.14.1) Transformadas de Fourier y su representación gráfica	529
	13.14.2) Cuadro Resumen de Transformadas de Fourier	539
	13.14.3) Algunas Funciones del Tiempo y su Función Densidad Espectral	542

CAPÍTULO XIV
PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

14.1)	INTRODUCCIÓN	547
14.2)	PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER	547
	14.2.1) Linealidad	547
	14.2.2) Simetría o Dualidad	547
	14.2.3) Escalamiento en tiempo y en frecuencia	553
	14.2.4) Traslación en tiempo y en frecuencia	556
	14.2.5) Modulación	560
	14.2.6) Ejemplos Resueltos I	562
	14.2.7) Derivación e Integración en el tiempo	566
	14.2.8) Ejemplos Resueltos II	572
	14.2.9) Derivación en el dominio de la frecuencia	579

		Página
	14.2.10) Integración en el dominio de la frecuencia	580
	14.2.3)	
	14.2.4) Resumen de Propiedades de la Transformada de Fourier	582
14.3)	EL ESPECTRO DE DENSIDAD DE ENERGÍA : Teorema de Parseval	583
	14.3.1) Ejemplos Resueltos III	587
14.4)	EJERCICIOS PROPUESTOS	611
	BIBLIOGRAFÍA	618

CAPÍTULO I

LA INTEGRAL DE LÍNEA EN EL PLANO COMPLEJO

1.1) INTRODUCCIÓN

Las integrales en el plano complejo son importantes por dos razones. La razón práctica es que existen integrales reales que pueden evaluarse fácilmente en el campo complejo mientras que los métodos usuales en el Cálculo Integral real, no tienen éxito. La otra razón es de naturaleza técnica y proviene del hecho de que, el método de integración compleja proporciona demostraciones de algunas propiedades básicas de las funciones analíticas, en particular, la existencia de las derivadas de orden superior, lo cual sería muy difícil de demostrar sin el uso de estas integrales.

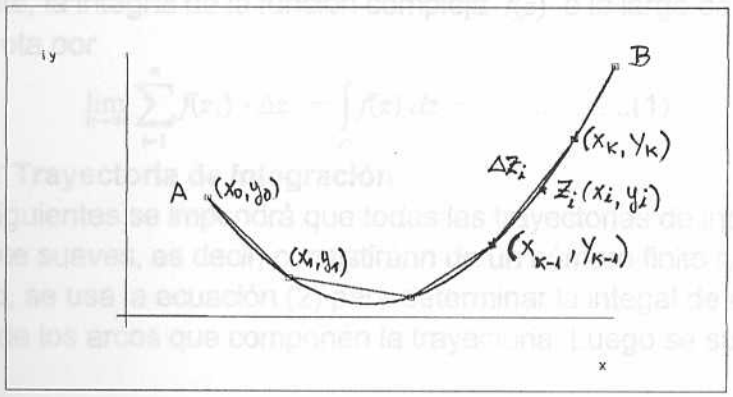
En este capítulo, se definirán primero las integrales complejas y el resultado fundamental será el **Teorema de Cauchy**, a partir del cual se deducirá la importante **Fórmula Integral de Cauchy**. Seguidamente se estudiará la integración por medio del **Teorema del Resíduo** y sus aplicaciones a las integrales reales. Se verá que, al igual que su homóloga en el Cálculo Elemental, la **Integral de Línea** en el campo complejo es también el límite de una suma, lo que evidencia una estrecha relación con las itegrales de línea reales, estudiadas previamente.

1.2) DEFINICIÓN: La Integral de Línea

Introduciremos a continuación el concepto de **Integral de Línea,** o **integral de Contorno**, término que también se utiliza para evaluar integrales de línea en el plano complejo.

A tal efecto, consideremos un arco de curva suave C , en el plano complejo, que se extiende desde un punto A a un punto B.

Dividamos dicho arco en "n" partes, como muestra la siguiente figura:



(Particiones de la curva C)

Los puntos de unión de estos arcos son los puntos:

$$z_0 = x_0 + iy_0 \quad ; \quad z_1 = x_1 + iy_1 \quad ; \quad z_2 = x_2 + iy_2 \ , \cdots, z_n = x_n + iy_n$$

Construyamos ahora un conjunto de vectores que van de un punto a otro, a lo largo de las cuerdas que los unen.

Sea:
Δz_1 = el número complejo que corresponde al vector que va de (x_0, y_0) a (x_1, y_1)
Δz_2 = el número complejo que corresponde al vector que va de (x_1, y_1) a (x_2, y_2)
.
.
.
Δz_k = el número complejo que corresponde al vector que va de (x_{k-1}, y_{k-1}) a (x_k, y_k)

y así sucesivamnete; tenemos así "n" números complejos . En general,

$$\Delta z_k = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})$$

Consideremos ahora una función contínua $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ la cual está definida, al menos, en todo punto de la curva C. Elijamos un punto $Z_i(x_i, y_i)$ sobre cada arco secundario, ubicado entre (x_{k-1}, y_{k-1}) y (x_k, y_k). Seguidamente, se evuluará la función $f(z)$ en dicho punto Z_i y se multiplicará este resultado por la amplitud del intervalo que lo contiene, y que designaremos genéricamente por : $\Delta Z_i = Z_i - Z_{i-1}$.
Dicho producto será:

$$f(z_i) \cdot \Delta z_i$$

Formemos seguidamente la suma : $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot \Delta z_i \quad , \quad n = 2, 3, 4, \cdots$

Obviamente, cada ΔZ_i es completamente independiente, por lo que se elige que el máximo $|\Delta Z_i|$ tienda a cero cuando "n" tiende a infinito.
De esta forma se obtiene una sucesión de números complejos: $S_2, S_3, S_4, \cdots, S_n$. El límite de esta sucesión, cuando $n \to \infty$, es decir, $\lim_{n\to\infty} S_n$, se conoce como **" Integral de Línea "** o simplemente, la integral de la función compleja $f(z)$ a lo largo de la curva orientada C y se denota por

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot \Delta z_i = \int_C f(z)\, dz = \quad \text{.....(1)}$$

La curva C se llama : **Trayectoria de integración**
En los estudios subsiguientes se impondrá que todas las trayectorias de integración sean curvas seccionalmente suaves, es decir, consistiránn de un número finito de curvas suaves. En este caso, se usa la ecuación (2) para determinar la integal de dicha función $f(z)$ sobre cada uno de los arcos que componen la trayectoria. Luego se suman los valores de estas integrales.
En general, tenemos que suponer que el valor de estas integrales no sólo depende de los puntos A y B, las posiciones extremo de la trayectorai de integración, sino también de la propia trayectoria de integración C usada para unir estos puntos.

1.3) COMPRENSIÓN INTUITIVA DE LA DEFINICIÓN

Tratemos de adquirir una comprensión intuitiva de la suma que aparece en el lado izquierdo de la ecuación (1). Se puede suponer que las líneas rectas que forman los n vectores , constituyen una aproximación a la forma del arco de curva C. Conforme n tiende

hacia infinito, el número de vectores aumenta y la longitud de éstos disminuye. La línea poligonal que forman estos n vectores se ciñe cada vez más a la forma de la curva C.

En la sumatoria, los números complejos asociados a cada uno de los n vectores Z_i se suman después de multiplicarse por una función de peso compleja $f(z)$ evaluada en las inmediaciones del vector correspondiente. En consecuencia, el hecho de tomar el límite cuando $n \to \infty$ en el lado
izquierdo de la ecuación (1), genera las siguientes efectos :

$$\begin{cases} a) & \text{Todas los } \Delta z_i \text{ tienden a cero, es decir, } \Delta z_i \to dz \quad , \forall i = 1, 2, \cdots \\ b) & z_i \to z \Leftrightarrow z \in C \\ c) & \sum_{i=1}^{n} \to \int_C \quad \text{(La suma discreta se transforma en una suma contínua)} \end{cases}$$

En consecuencia,

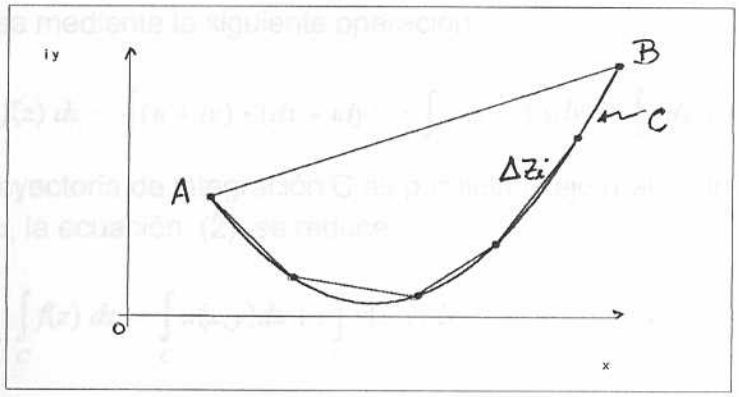
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot \Delta z_i = \int_C f(z)\, dz$$

NOTA:

Si la función de peso $f(z)$ fuese identicamente igual a uno, la sumatoria de la ecuación (1) se convierte en:

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot \Delta z_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i$$

Gráficamente, esta suma está representada por la suma vectorial de los n vectores mostrados en la siguiente figura :



(Particiones de la curva C)

Sumándolos, obtenemos para toda n un sólo vector que va de A a B ; es decir:

$$\int_A^B f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{n} \Delta z_i = \overrightarrow{AB}$$

1.4) CÁLCULO DE LA INTEGRAL DE LÍNEA

Cuando se expresa la función $f(z)$ en la forma: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, las integrales de línea en las que intervienen $f(z)$ pueden expresarse en términos de Integrales de Línea reales.

En efecto, partiendo de que: $$\int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot \Delta z_i$$

y teniendo en cuenta que : $$\begin{cases} z_k = x_k + iy_k \\ \Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k \end{cases},$$

se obtiene : $$\int_A^B f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [u(x_k,y_k) + iv(x_k,y_k)] \cdot (\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

Realizando este producto y separando la parte real de la parte imaginaria, obtenemos:

$$\int_A^B f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[u(x_k,y_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} v(x_k,y_k)\Delta y_k + i \sum_{k=1}^{n} v(x_k,y_k)\Delta x_k + i \sum_{k=1}^{n} u(x_k,y_k)\Delta y_k \right]$$

Comparando estos cuatro sumandos con la definición de Integral de Línea de variable real, se obtiene que:

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \int_C u(x,y)dx - \int_C v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + i\int_C u(x,y)dy} \quad .....(2)$$

donde

* El índice C significa que estas integrales han de evaluarse sobre el contorno C, en una dirección particular.
* La continuidad de $u(x,y)$ y $v(x,y)$ (o bien de $f(z)$), basta para garantizar la existencia de todas las integrales resultantes.
* Obsérvese a modo de método nemotécnico, que la ecuación (2) puede obtenerse mediante la siguiente operación:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)\cdot(dx+idy) = \int_C udx - \int_C vdy + i\int_C vdx + i\int_C udy$$

NOTA: Cuando la trayectoria de integración C es paralela al eje real, entonces: $dy = 0$.

En este caso, la ecuación (2) se reduce a :

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u(x,y)dx + i\int_C v(x,y)dx \qquad , \quad y = constante$$

Se trata en este caso de la Integral convencional del Cálculo Elemental, salvo por el hecho de que el integrando es complejo $(si\ \ v \neq 0)$.

.
.. oo ..
.
.

1.5) EJEMPLOS RESUELTOS

a) Ejemplo 1

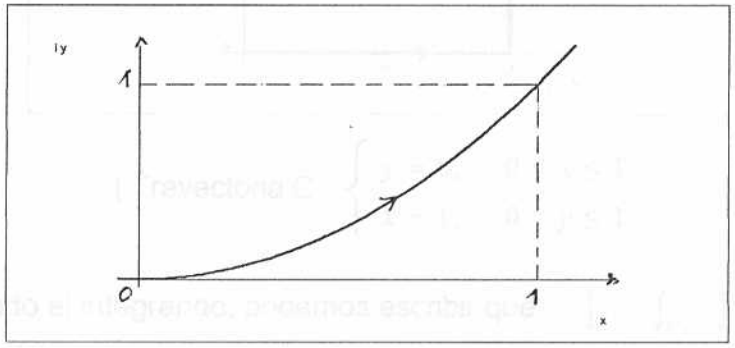
Calcule la integral de la función $f(z) = z + 1$, desde punto $z_0 = 0 + i0$ al punto $z_1 = 1 + i$, a lo largo del arco $y = x^2$.

Solución:

Aplicando la definición de Integral de Línea

$$f(z) = z + 1 = x + iy + 1 = (x + 1) + iy \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x + 1 \\ v(x,y) = y \end{cases}$$

La trayectoria de integración dada $y = x^2$ se muestra a continuación:



(Trayectoria C : $y = x^2,\ 0 \le x \le 1$)

Luego:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u dx - \int_C v dy + i\int_C v dx + i\int_C u dy \quad \Rightarrow$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^1 (x+1)dx - \int_0^1 y dy + i\int_0^1 y dx + i\int_0^1 (x+1)dy$$

Pero, sobre la trayectoria de integración, se tiene que : $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx$ por lo que, sistituyendo en la expresión anterior, se obtiene:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^1 (x+1)dx - \int_0^1 y dy + i\int_0^1 x^2 dx + i\int_0^1 (x+1)2xdx\ ,$$

de donde:

$$\int_C f(z)\,dz = \frac{x^2}{2+x}\Big|_0^1 - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 + i\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + i\left(\frac{2x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^1 \quad \Rightarrow$$

$$\int_C f(z)\,dz = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + i(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} + 1) = 1 + i2$$

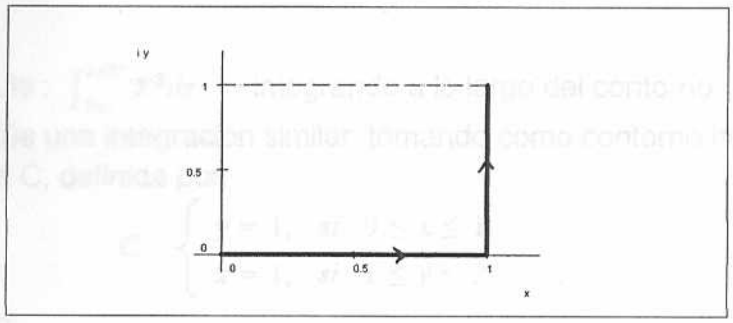
$$\int_C (z+1)dz = 1 + i2$$

b) Ejemplo 2

Calcule la integral de de la función $f(z) = z + 1$, desde punto $z_0 = 0 + i0$ al punto $z_1 = 1 + i$, a lo largo de los segmentos de recta definidos secuencialmente por los puntos : $O(0,0), A(1,0)$ y $B(1,1)$.

Solución:

La trayectoria de integración dada se ilustra a continuación:



$$\left(\text{Trayectoria C} : \begin{cases} y = 0, & 0 \le x \le 1 \\ x = 1, & 0 \le y \le 1 \end{cases} \right)$$

Obviando el integrando, podemos escribir que : $\int_C = \int_{C_1} + \int_{C2} = I_1 + I_2$

donde: $\begin{cases} C_1 \text{ es el segmento definido por : } y = 0, \quad 0 \le x \le 1 \\ C_2 \text{ es el segmento definido por : } y = 0, \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$

* **Cálculo de** $I_1 = \int_{C_1}$

Sobre el segmento C_1 se tiene: $\left\{ \begin{array}{rcl} x = x & \Rightarrow & dx = dx \\ y = 0 & \Rightarrow & dy = 0 \end{array} \right\}, 0 \le x \le 1$

Luego:

$$I_1 = \int_{C_1} = \int_0^1 (x+1)dx + 0 = \left[\tfrac{x^2}{2} + x \right]_0^1 = \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}$$

* **Cálculo de** $I_2 = \int_{C_2}$

Sobre el segmento C_2 se tiene: $\left\{ \begin{array}{rcl} y = y & \Rightarrow & dy = dy \\ x = 1 & \Rightarrow & dx = 0 \end{array} \right\}, 0 \le y \le 1$

Luego:

$$I_2 = \int_{C_2} = -\int_0^1 y dy + i2 \int_0^1 dy = -\left[\tfrac{y^2}{2} \right]_0^1 + i2[y]_0^1 = -\tfrac{1}{2} + i2$$

Por lo tanto:

$$I = I_1 + I_2 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} + i2 = 1 + i2$$

Obsérvese que, en este caso, la integral entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ arroja el mismo resultado que el obtenido en el ejemplo 1, a pesar de que la trayectoria que une dichos puntos no ha sido la misma. Ello hace suponer, como se verá más adelante en el Capítulo II que , bajo ciertas condiciones, la Integral de Línea entre dos puntos A y B es independiente de la trayectoria que los une.

$$= \text{oo} =$$

c) Ejemplo 3

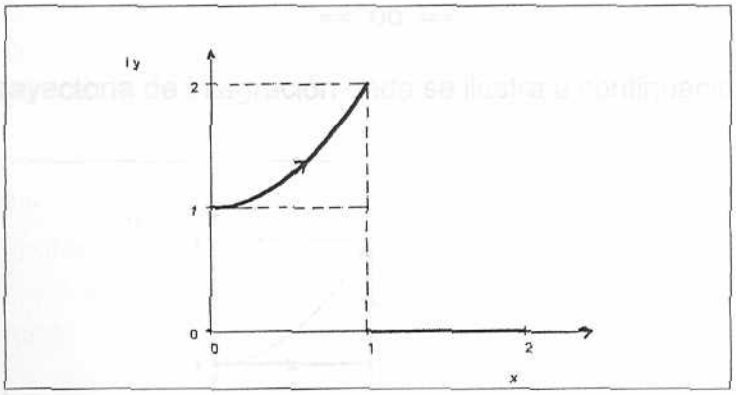
a) *Calcule :* $\int_{0+i}^{1+2i} \overline{z}^2 dz$, *integrando a lo largo del contorno :* $y = x^2 + 1$.

b) Efectúe una integración similar, tomando como contorno la curva suave a *trozos C, definida por:*

$$C : \begin{cases} y = 1, & si \quad 0 \le x \le 1 \\ x = 1, & si \quad 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

Solución:

a) La trayectoria de integración dada se ilustra a continuación:



$$\left(\text{Trayectoria C} : \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \right)$$

Como $f(z) = (\overline{z})^2 \Rightarrow f(z) = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - i2xy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = -i2xy \end{cases}$

Por lo tanto, aplicando la definición de Integral de Línea,

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C u dx - \int_C v dy + i \int_C v dx + i \int_C u dy$$

se obtiene:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{0+i}^{1+i2} (\overline{z})^2 dz = \int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y^2) dx + 2 \int_{(0,1)}^{(1,2)} xy dy + i \int_{(0,1)}^{(1,2)} (-2xy) dx + i \int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y^2) dy$$

Parametrizando la trayectoria de integración, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{lll} x = t & \Rightarrow & dx = dt \\ y = t^2 + 1 & \Rightarrow & dy = 2tdt \end{array}\right\} \quad 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le t \le 1 \ ,$$ por lo que al sustituir en la expresión anterior se obtienen las siguientes integrales ordinarias:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^1 \left[t^2 - \left(t^2+1\right)\right]dt + 2\int_0^1 t\left(t^2+1\right)(2t)dt -$$

$$- i2\int_0^1 t\left(t^2+1\right)dt + i\int_0^1 \left[t^2 - \left(t^2+1\right)\right](2t)dt$$

Los valores numéricos de cada una de las integrales del segundo miembro , son :

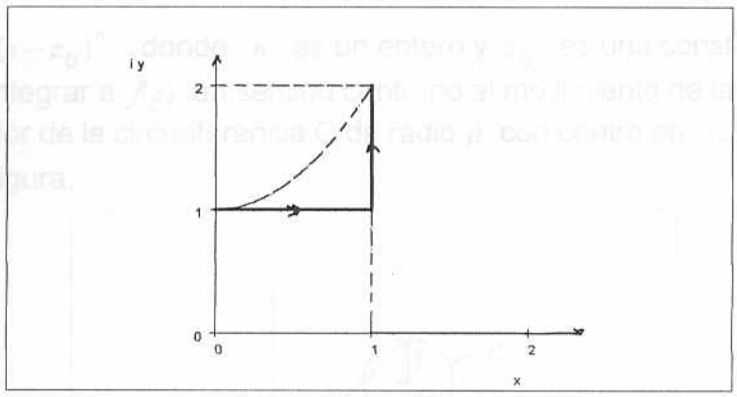
$$I_1 = -\tfrac{23}{15}\ ; \qquad I_2 = 15\ ; \qquad I_3 = -\tfrac{3}{2}\ ; \qquad I_4 = -\tfrac{11}{6}\ ;$$

En consecuencia:

$$\int_{0+i}^{1+2i} \overline{z}^2 dz = \tfrac{3}{5} - i\tfrac{10}{3}$$

$$= \text{oo} =$$

b) La trayectoria de integración dada se ilustra a continuación:



(Trayectoria C : $\left\{\begin{array}{l} y = x^2 + 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{array}\right.$)

Dividamos la trayectoria de integración en dos trayectorias: C_1 y C_2 , con lo cual : $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$

* **Cálculo de** $I_1 = \int_{C_1}$

Sobre el segmento C_1 se tiene: $\left.\begin{array}{lll} y = 1 & \Rightarrow & dy = 0 \\ x = x & \Rightarrow & dx = dx \end{array}\right\}$, $0 \le x \le 1$

$$I_1 = \int_{C_1} = \int_0^1 [(x^2 - 1) - i2x]dx = -\tfrac{2}{3} - i$$

* **Cálculo de** $I_2 = \int_{C_2}$

Sobre el segmento C_2 se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow dx = 0 \\ y = y \Rightarrow dy = dy \end{array} \right\}$, $0 \le y \le 1$

por lo que: $f(z) = (\overline{z})^2 = (x^2 - y^2) - i2xy = (1 - y^2) - i2y$

Por lo tanto :

$$I_2 = \int_{C_2} = \int_1^2 2ydy + i\int_1^2 (1 - y^2)dy = 3 - i\tfrac{4}{3}$$

El valor de la integral a lo largo de la trayectoria dada C, se obtiene sumando las contribuciones de C_1 y C_2 . Es decir :

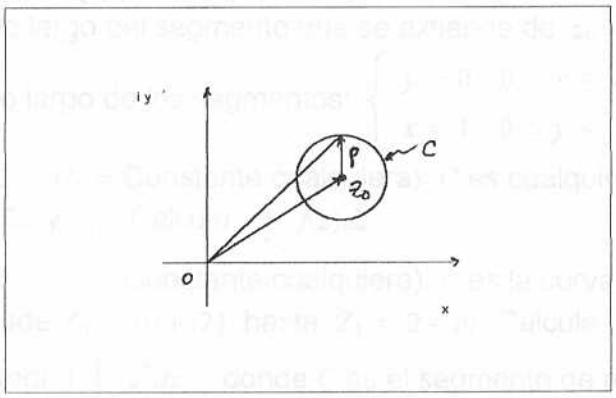
$$\int_{0+i}^{1+2i} \overline{z}^2 dz = I_1 + I_2 = (-\tfrac{2}{3} - i) + (3 - i\tfrac{4}{3}) = \tfrac{7}{3} - i\tfrac{7}{3} = \tfrac{7(1-i)}{3}$$

Observación: Este resultado difiere del obtenido en el apartado a) y constituye un ejemplo del hecho de que, el valor de una integral de línea entre dos puntos, depende en general de la trayectoria de integración C que los une.

$$= \text{oo} =$$

d) Ejemplo 4

Sea $f(z) = (z - z_0)^n$ donde n es un entero y z_0 es una constante compleja cualquiera. Integrar a $f(z)$ en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, alrededor de la circunferencia C de radio ρ con centro en z_0, como ilustra la siguiente figura:



Solución:

a) La trayectoria de integración C puede representarse de la siguiente manera: $z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \operatorname{sen} t) = z_0 + \rho e^{it}$, con : $0 \le t \le 2\pi$

manera: $z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \text{ sen t}) = z_0 + \rho e^{it}$, con : $0 \le t \le 2\pi$

Por lo tanto: $\left.\begin{array}{l} f(z) = (z - z_0)^n = (z_0 + \rho e^{it} - z_0)^n = \rho^n e^{\text{int}} \\ dz = i\rho e^{it}\, dt \end{array}\right\}$, por lo que:

$$\int_C (z - z_0)^n\, dz = \int_0^{2\pi} \rho^n e^{\text{int}}\, (i\rho e^{it}) dt = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{\text{i(n+1)t}} dt \quad .....(1)$$

En el cálculo de esta integral se presentan dos casos:

Caso a): $n = -1$

En este caso, la expresión (1) se reduce a : $\int_C (z - z_0)^n\, dz = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$

Caso b): $n \neq -1$

En este caso, la expresión (1) se reduce a :

$$\int_C (z - z_0)^n\, dz = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{\text{i(n+1)t}} dt = \frac{i\rho^{n+1}}{i(n+1)} \cdot \left[e^{\text{i(n+1)t}} \right]_0^{2\pi} \quad , \text{ de donde:}$$

$$\int_C (z - z_0)^n\, dz = \frac{i\rho^{n+1}}{i(n+1)} \cdot \{\cos[(n+1)2\pi] + i \text{ sen}[(n+1)2\pi] - 1\} \Rightarrow$$

$$\int_C (z - z_0)^n\, dz = \frac{i\rho^{n+1}}{i(n+1)} \cdot (1 + i(0) - 1) = 0 \quad , \quad \text{por ser } n = \text{ entero.}$$

En conclusión:

$$\boxed{\int_C (z - z_0)^n\, dz = \begin{cases} 2\pi i & si \quad n = -1 \\ 0 & si \quad n \neq -1 \text{ y entero} \end{cases}}$$

.

== oo ==

.

1.6) EJERCICIOS PROPUESTOS I

a) Integre la función $f(z) = \frac{1}{z}$ alrededor de la circunferencia unitaria C, en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, partiendo de $z = 1$

b) Integre la función $f(z) = \text{Re}(z)$,

b.1) A lo largo del segmento que se extiende de $z_0 = o$ a $z_1 = 1 + i$

b.2 A lo largo de los segmentos: $\begin{cases} y = 0, & 0 \le x \le x1 \\ x = 1, & 0 \le y \le 1 \end{cases}$

c) Sea $f(z) = K$ (K = Constante cualquiera). C es cualquier curva que une dos puntos Z_0 y Z_1. Calcule : $\int_C f(z)dz$.

d) Sea $f(z) = K$ (K = Constante cualquiera). C es la curva: $x^3 + y^3 = 2^3$, recorrida desde $Z_0 = (0 + i2)$ hasta $Z_1 = 2 + i0$. Calcule : $\int_C f(z)dz$.

e) Calcule la integral $\int_C z^2 dz$, donde C es el segmento de recta OB que va desde $z = 0$ hasta $z = 2 + i$.

f) Evalúe la integral $\int_C \overline{z}\, dz$, donde C es la semicircunferencia superior $|z| = 1$, desde $z = -1$ hasta $z = 1$.

g) Evalúe la integral $\int_C z^2 dz$, donde C es el arco de parábola $y = x^2, 1 \le x \le 2$.

La Dirección de integración es de $(1,1)$ a $(2,4)$.

h) Evalúe la integral $\oint_C (z-3)^{-1}dz$, donde C es la curva $|z-3| = 2$, recorrida una vez en sentido contrario al de las agujas del reloj.

i) Evalúe la integral $\int_C |z|dz$, de $-i$ a i

$i.1)$ A lo largo del segmento rectilíneo definido por estos dos puntos.

$i.2)$ A lo largo de la semicircunferencia unitaria en el semiplano izquierdo.

$i.3)$ A lo largo de la semicircunferencia unitaria en el semiplano derecho.

j) En los siguientes ejercicios, el sentido de recorrido es siempre el sentido positivo. Evalúe las siguientes integrales:

$j.1)$ $\oint_C \frac{1}{z}dz \quad C: |z| = 3$ $\quad j.2)$ $\oint_C \frac{1}{z}dz \quad C: |z| = 5$

$j.3)$ $\oint_C z^3 dz \quad C: |z| = 4$ $\quad j.4)$ $\oint_C (z^5+1)dz \quad C: x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$

== oo ==

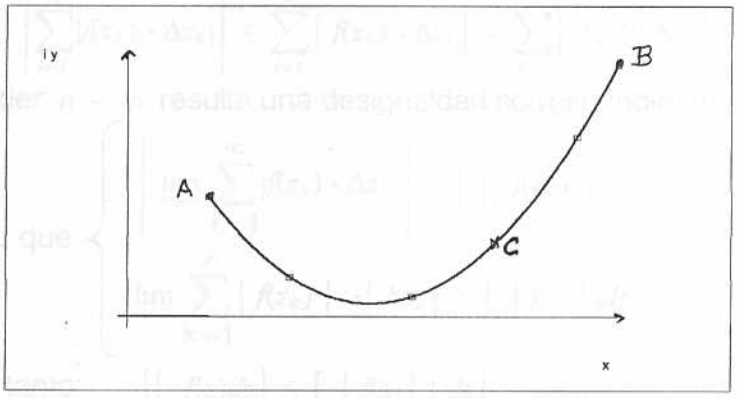
1.7) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE LÍNEA

La ecuación : $\int_C f(z)dz = \int_C udx - \int_C vdy + i\int_C udy + \int_C vdx$ antes deducida, expresa la Integral de Línea compleja en términos de integrales de línea reales. En consecuencia, las propiedades de éstas también son válidas para la integral de línea compleja.

Por lo tanto, la Integral de Línea a lo largo de una curva C suave a trozos, que va desde el punto A al punto B, satisface las siguientes ralaciones:

a) $\int_A^B f(z)dz = -\int_B^A f(z)dz$

b) $\int_A^B f(z)dz = \int_A^C f(z)dz + \int_C^B f(z)dz$; el punto C pertenece a la trayectoria de integración que una A con B.



(Particiones de la curva C)

La demostración de estas propiedades es evidente a partir de la expresión:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u(x,y)dx - \int_C v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + i\int_C u(x,y)dy$$

antes deducida.

c) **Linealidad:**

la expresión que definie la Integral de Línea (Suma de Riemann) es evidentemente una función lineal, por lo tanto, si a y b son constantes cualesquiera :

c.1) $\int_C a\,f(z)dz = a\int_C f(z)dz$

c.2) $\int_C \left[a\,f(z) + b\,g(z)\right]dz = a\int_C f(z)dz + b\int_C g(z)dz$

d) **Desigualdad ML:** Cota para las Integrales de Línea

Con frecuencia, al calcular integrales de línea es necesario establecer cotas sobre sus valores absolutos.

Esta importante propiedad estableceque el valor absoluto de la integral de $f(z)$ a lo largo de la curva C, es menor o igual que el producto : $M \cdot L$

donde: $\begin{cases} |f(z)| \le M \text{, es decir, } M \text{ es la cota superior de } |f(z)| \text{ sobre } C \\ L = \text{longitud del trayecto de integración } (\text{del arco } C) \end{cases}$

Lo dicho se puede resumir escribiendo:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$$

Demostración:

Consideremos la definición:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(z_k) \cdot \Delta z_k$$

Apliquemos ahora el hecho fundamental de que el valor absoluto de la suma de números complejos es menor o igual que la suma de sus valores absolutos. Entonces:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} |f(z_k) \cdot \Delta z_k|\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f(z_k) \cdot \Delta z_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |f(z_k)| \cdot |\Delta z_k|$$

Al tender $n \to \infty$ resulta una desigualdad correspondiente para las integrales,

puesto que $\begin{cases} \left| \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f(z_k) \cdot \Delta z_k| \right| = \left| \int_C f(z)dz \right| \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f(z_k)| \cdot |\Delta z_k| = \int_C |f(z)|\,|dz| \end{cases}$

Por lo tanto: $\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz|$

La integral de la derecha es la integral de línea real dada por:

* $\int_C |f(z)|\,|dz| = \int_C \sqrt{u^2+v^2} \cdot \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \int_C \sqrt{u^2+v^2}\,ds$

donde ds es el diferencial de la longitud de arco sobre C, el cual existe naturalmente ya que C se ha supuesto seccionalmente suave.

En particular, si $f(z) = 1$, tenemos el sencillo pero importante resultado:

$$\int_C |dz| = \int_C ds = L = \text{longitud de la trayectoria de integración.}$$

* Además, como $f(z)$ es contínua por hipóteis sobre la trayectoria de integración, incluso en los puntos extremos A y B, se concluye que $f(z)$ es una función acotada de z sobre dicha trayectoria; por lo tanto, existe una constante M tal que: $|f(z)| \leq M$ para todo valor de $z \in C$.

En consecuencia, se tiene que:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,|dz| \leq \int_C M|dz| = M\int_C dz = ML$$

Obteniéndose así la importante desigualdad:

$$\boxed{\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML}$$

Recuérdese que M es la cota superior para $|f(z)|$ sobre la trayectoria de integración C y L es la longitud de tal trayectoria.

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 5:

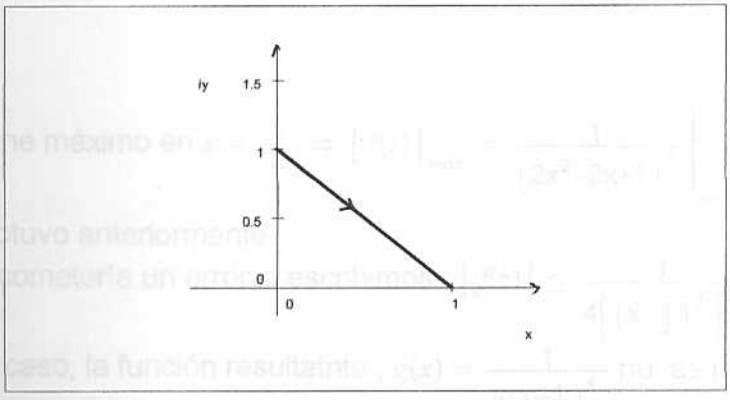
Determine, sin evaluar la integral, una cota superior del valor absoluto de $\int_C \frac{dz}{z^4}$, siendo C el segmento de recta definido desde $z_0 = i$ hasta $z_1 = 1$.

Solución:

Obsérvese la gran dificultad que representa el tratar de evaluar esta integral a partir de las cuatro integrales reales: $\int_C f(z)dz = \int_C udx - \int_C vdy + i\int_C udy + \int_C vdx$

Por esta razón, calcularemos en su defecto la cota superior del valor obsoluto de dicha integral, dada por la **Desigualdad ML.**

La trayectoria de integración se muestra continuación:



$$(C: y + x = 1,\ 0 \leq x \leq 1)$$

Dicha trayectoria de integración es un segmento de la recta $y = 1 - x$; por lo tanto, si z es un punto en C, se tiene:

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^4|} = \frac{1}{|z^2 z^2|} = \frac{1}{|z|^2 \cdot |z|^2} = \frac{1}{(x^2+y^2)(x^2+y^2)} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$$

Pero:

$$y = 1 - x \Rightarrow |f(z)| = \frac{1}{|z^4|} = \frac{1}{\left[x^2+(1-x)^2\right]^2} = \frac{1}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$$, de donde,

completando cuadrados en el denominador :

$$|f(z)| = \frac{1}{\left[2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)\right]^2} = \frac{1}{4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]^2} .$$

Además : $(x-\frac{1}{2})^2 \geq 0$, por lo tanto: $|f(z)| \leq \frac{1}{4\left[\frac{1}{4}\right]^2} = 4$

Luego, para todo $z \in C$, se verifica que : $|f(z)| = \frac{1}{|z^4|} \leq 4 \Rightarrow \boxed{M = 4}$

Adicionalmente, las longitud de la trayectoria de integración es

$L = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, por lo que, de acuerdo con lo previsto por la desigualdad ML, podemos escribir :

$$\boxed{\int_C \frac{dz}{z^4} \leq 4\sqrt{2}}$$

NOTA 1: Este resultado también puede obtenerse optimizando la función : $g(x) = \frac{1}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}$, mediante los conceptos del Cálculo Elemental.

En efecto, obsérvese que el máximo de $g(x)$ ocurre en el mismo punto donde ocurre el mínimo de la función $h(x) = 2x^2 - 2x + 1$, por lo que :

$$\frac{dh}{dx} = (4x-2)$$

$$\frac{dh}{dx} = 0 \Rightarrow (4x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Además: $\frac{d^2h}{dx^2} = 4 > 0 \quad \Rightarrow Mínimo\ en\ x = \frac{1}{2}$

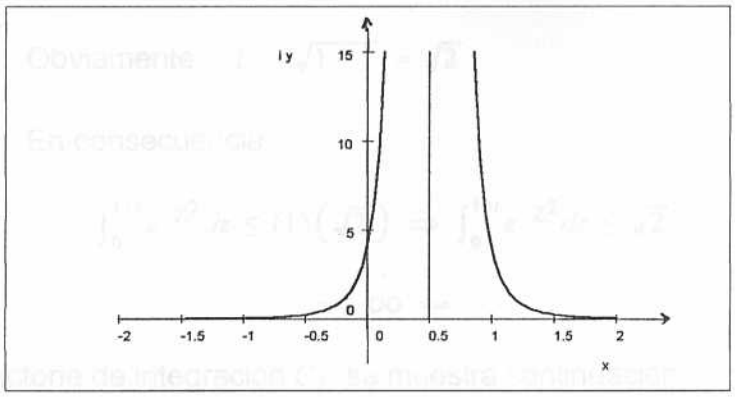
Por lo tanto:

$$\left\{ g(x) \text{ tiene máximo en } x = \frac{1}{2} \Rightarrow |f(z)|_{máx.} = \frac{1}{\left(2x^2-2x+1\right)^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}} = 4 = M \right.$$

tal como se obtuvo anteriormente.

NOTA 2 : Se cometería un error si escribimos : $|f(z)| \leq \frac{1}{4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]^2}$.

pues, en este caso, la función resultatnte , $g(x) = \frac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)^4}$ no es una función acotada en el intervalo de integración $[0,1]$ tal como lo ilustra la siguiente gráfica:



($g(x)$)

.

$=$ oo $=$

.

Ejemplo 6:

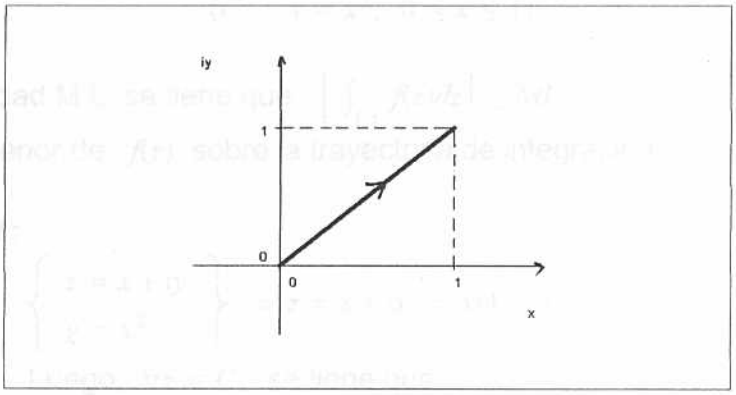
Determine, sin evaluar la integral, una cota superior del valor absoluto de $\int_0^{1+i} e^{-z^2} dz$

a) A lo largo de $y = x$

b) A lo largo de $y = x^2$

Solución:

a) La trayectoria de integración C_1 se muestra continuación:



$(C_1 : y = x, \ 0 \le x \le 1)$

Por la propiedad ML se tiene que: $\left|\int_{C_1} f(z)dz\right| \le ML$

M = cota superior de $f(z)$ sobre la trayectoria de interación C_1 ,

Cálculo de M:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = x + iy \\ y = x \end{array} \right\} \Rightarrow z = x + ix = x(1+i)$$

Luego, $\forall z \in C_1$ se tiene que :

$$f(z) = e^{-z^2} = e^{-[x(1+i)]^2} = e^{-x^2(1+i)^2} \Rightarrow$$

$$f(z) = e^{-x^2(1+2i-1)} = e^{-i2x^2} = \cos(2x^2) - i\,\text{sen}(2x^2)$$

Por lo tanto, sobre toda la trayectoria C_1 se tiene que: $\left|f(z)\right| = 1$

Cálculo de L:

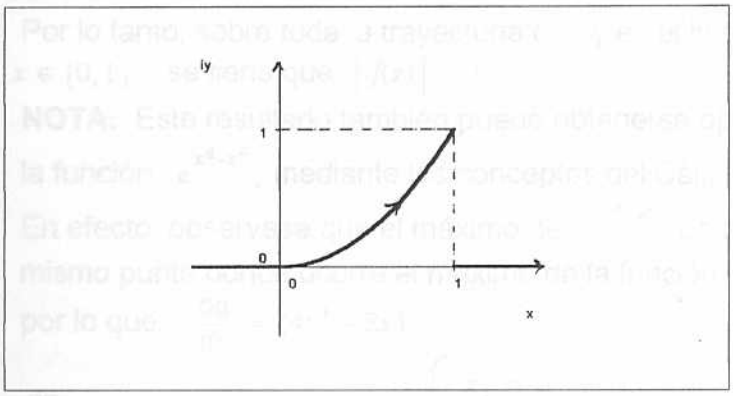
Obviamente, $L = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

En consecuencia,

$$\int_0^{1+i} e^{-z^2} dz \le (1)\left(\sqrt{2}\right) \Rightarrow \int_0^{1+i} e^{-z^2} dz \le \sqrt{2}$$

$$= \text{oo} =$$

b) La trayectoria de integración C_2 se muestra continuación:



$$(C_2 : y = x^2,\ 0 \le x \le 1)$$

Por la propiedad M L se tiene que: $\left| \int_{C_2} f(z)dz \right| \le ML$

M = cota superior de $f(z)$ sobre la trayectoria de integración C_2.

Cálculo de M:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = x + iy \\ y = x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow z = x + ix^2 = x(1+ix)$$

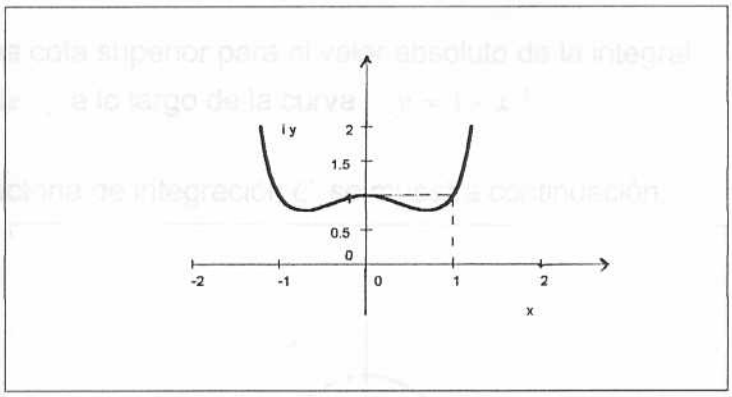
Luego, $\forall z \in C_1$ se tiene que :

$$f(z) = e^{-z^2} = e^{-[x(1+ix)]^2} = e^{-x^2(1+ix)^2} \Rightarrow$$

$$f(z) = e^{-x^2\left(1+i2x-x^2\right)} = e^{x^4-x^2-i2x} = e^{x^4-x^2} \cdot e^{-i2x^3} \Rightarrow$$

$$f(z) = e^{x^4-x^2}\left[\cos(2x^3) - i\,\text{sen}(2x^3)\right] \Rightarrow \left| f(z) \right| = e^{x^4-x^2}$$

Para evaluar $e^{x^4-x^2}$ en el intervalo $[0,1]$ podemos graficar la curva $y = e^{x^4-x^2}$, obteniéndose:



Por lo tanto, sobre toda la trayectoria C_2 y en el intervalo $x \in [0,1]$, se tiene que: $|f(z)| \leq 1$.

NOTA: Este resultado también puede obtenerse optimizando la función $e^{x^4-x^2}$, mediante los conceptos del Cálculo Elemental. En efecto, obsérvese que el máximo de $e^{x^4-x^2}$ ocurre en el mismo punto donde ocurre el máximo de la función $g(x) = x^4 - x^2$, por lo que : $\frac{dg}{dx} = (4x^3 - 2x)$;

$$\frac{dg}{dx} = 0 \Rightarrow x(4x^2-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

Además: $\frac{d^2g}{dx^2} = 12x^2 - 2 \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} \left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=0} = -2 < 0 \Rightarrow \textit{Máximo en } x = 0 \\ \left.\frac{d^2g}{dx^2}\right|_{x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12\left(\frac{2}{4}\right) = 6 > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo en } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

de donde:

$$\begin{cases} f(z) \text{ tiene máximo en } x = 0 \Rightarrow |f(z)|_{máx.\pi} \leq e^0 = 1 = M \\ f(z) \text{ tiene mínimo en } x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{y su valor es: } f(z)|_{min.} = e^{-2/9} = 0.80074 \end{cases}$$

Cálculo de L: Obviamente, $L = \int_{C_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

$$\left\{ \begin{matrix} x = t \\ y = t^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \frac{dx}{dt} = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2t \end{matrix} \right\} \Rightarrow L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2}\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}\ln\left(\sqrt{5} + 2\right)$$

de donde: $L = 1.4789$ unidades de longitud.

Por lo tanto, de acuerdo con lo establecido por la Desigualdad ML, se obtiene que: $\left| \int_{C_2} f(z)dz \right| \leq (1)(1.4789) \Rightarrow \left| \int_{C_2} f(z)dz \right| \leq 1.4789$

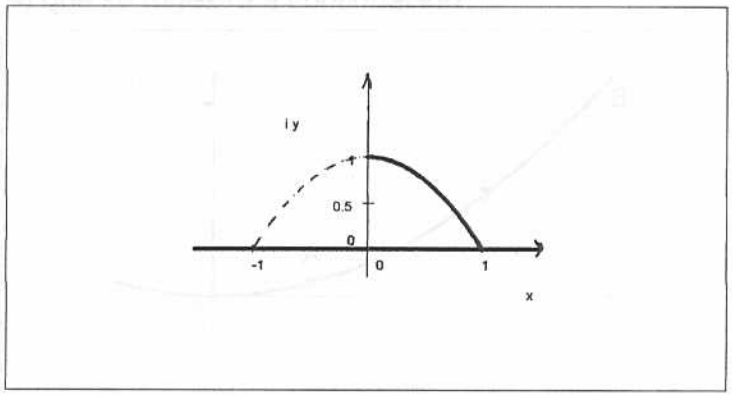
Ejemplo 7:

Determine una cota superior para el valor absoluto de la integral :

$I = \int_1^{0+i} e^{i \ln \bar{z}} dz$, a lo largo de la curva : $y = 1 - x^2$.

Solución:

a) La trayectoria de integración C se muestra continuación:



$$(C : y = 1 - x^2,\ 0 \le x \le 1)$$

Por la propiedad ML se tiene que: $\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \le ML$, donde

$M =$ cota superior de $|f(z)|$ sobre la trayectoria de integración C.

Cálculo de M:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = x + iy \\ y = 1 - x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dz = dx + idy \\ \bar{z} = x - iy \end{array} \right.$$

Luego, $\ln \bar{z} = \ln |\bar{z}| + i \arg \bar{z} \quad \Rightarrow \ln \bar{z} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Por lo tanto, $\forall z \in C$ se tiene que : $|f(z)| = \left| e^{i \ln \bar{z}} \right| = \left| e^{i\left[\ln \sqrt{x^2+y^2} - i \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]} \right| \Rightarrow$

$$|f(z)| = \left| e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} e^{i \ln \sqrt{x^2+y^2}} \right| = e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} = e^{\theta}$$

Por lo tanto, sobre toda la trayectoria C, se tiene que: $\theta_{máx.} = \frac{\pi}{2}$,

por lo que

$$M = |f(z)|_{máx.} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Cálculo de L:

$$L = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2}\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4} \ln\left(\sqrt{5} + 2\right) = 1.4789$$

En consecuencia,

$$\int_0^{1+i} e^{i \ln \bar{z}} dz \le 1.4789 \left(e^{\frac{\pi}{2}}\right) = 7.1142$$

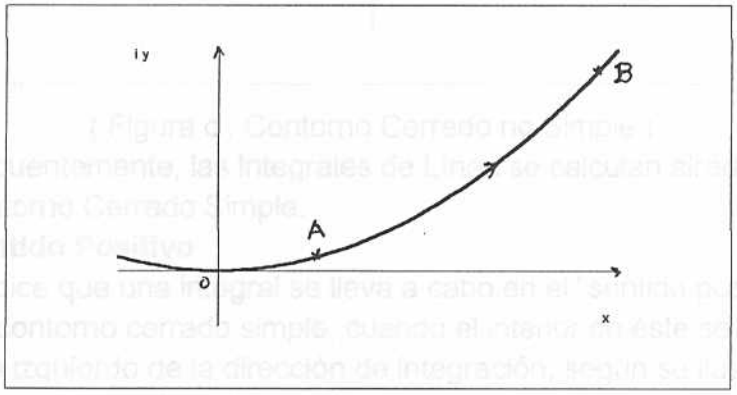
$$== \text{oo} ==$$

1.8) LA INTEGRAL DE LÍNEA Y EL TEOREMA DE GREEN

1.8.1) Definiciones

a) Contorno Cerrado:

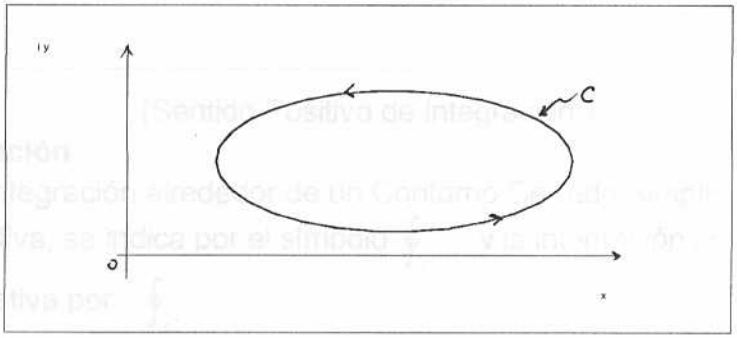
En la sección anterior se examinaron las curvas suaves a trozos, llamadas "contornos", que van de un punto A a un punto B, como lo ilustra la figura a) que se muestra a continuación :



(Fig. a : curva suave)

b) Contorno Cerrado Simple

Es un contorno que genera dos dominios: uno acotado y otro no acotado; ambos dominios tienen el mismo contorno C como frontera, tal como se ilustra a continuación (Figura b):

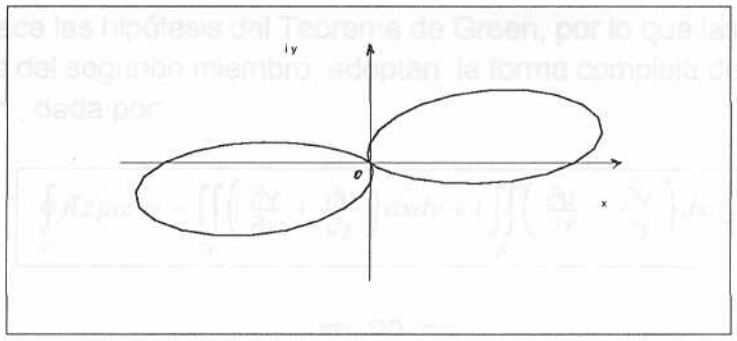


(Fig. b)

El dominio acotado es el interior del contorno C.

c) Contorno Cerrado no Simple

Es un contorno que genera tres (o más) dominios: dos acotados y otro no acotado; ambos dominios comparten el mismo contorno C como frontera, tal como se ilustra a continuación (Figura c):

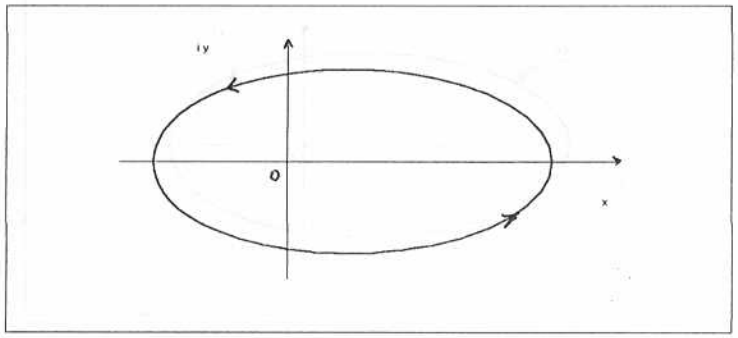


(Figura c : Contorno Cerrado no Simple)

Frecuentemente, las Integrales de Línea se calculan alrededor de un Contorno Cerrado Simple.

d) Sentido Positivo

Se dice que una integral se lleva a cabo en el "sentido positivo" alrededor del contorno cerrado simple, cuando el interior de éste se encuentra del lado izquierdo de la dirección de integración, según se ilustra a continuación:



(Sentido Positivo de Integración)

e) Notación

La integración alrededor de un Contorno Cerrado Simple, en la dirección positiva, se indica por el símbolo $\oint_C$, y la integración en la dirección negativa por : $\oint_C$

Obsérvese que:

$$\oint_C f(z)dz = -\oint_C f(z)dz \ , \text{ es decir: } \begin{cases} \oint_C f(x,y)dx = -\oint_C f(x,y)dx \\ \oint_C f(x,y)dy = -\oint_C f(x,y)dy \end{cases}$$

1.8.2) Forma Compleja del Teorema de Green

Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función compleja, contínua y con derivadas parciales contínuas en una región R y sobre su frontera C.

En tal caso, la integral de línea:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy) = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy$$

satisface las hipótesis del Teorema de Green, por lo que las integrales reales del segundo miembro, adoptan la forma compleja del Teorema de Green , dada por:

$$\oint_C f(z)dz = -\iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

= oo =

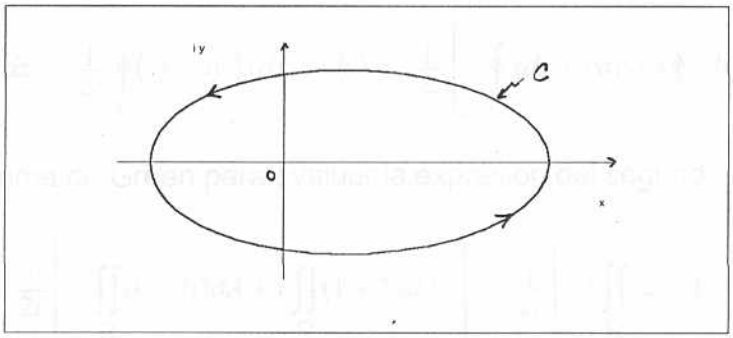
1.9) CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE GREEN

Consecuencia a): Área de la región R encerrada por la curva C, en el plano real.

Sea C una curva cerrada que limita una región R que tiene área A.

En este caso: $A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$

Demostración:



(Curca C cerrada)

Aplicando el Teorema de Green, a la expresión: $\oint_C xdy - ydx$,obtenemos:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right]dA = \frac{1}{2}\iint_R (1+1)dA \Rightarrow$$

$A = \frac{2}{2}\oint_C dA = \oint_C dA =$ área de la región R.

En conclusión, el área de la región R encerrada por la curva C , es:

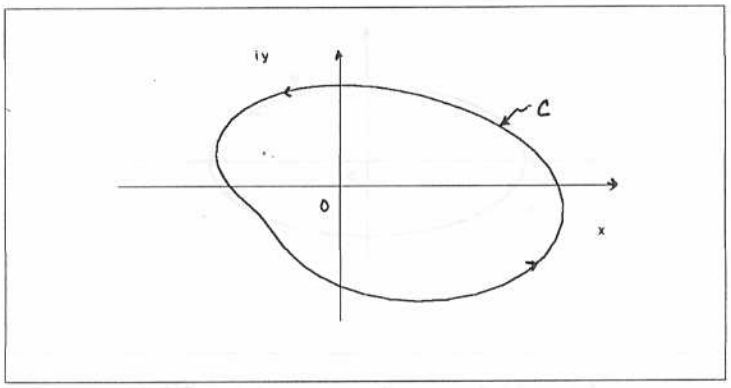
$$\boxed{A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx}$$ tal como se quería demostrar.

Esta expresión permite calcular, en el plano real, el área de la región R encerada por la curva C.

= oo =

Consecuencia b: Área de la región R encerrada por la curva C, en el plano complejo.

Sea C una curva cerrada que limita una región R que tiene área A.



(Curva C Cerrada)

Entonces: $A = \frac{1}{2i}\oint_C \bar{z}\, dz$

Demostración:

$$\frac{1}{2i}\oint_C \bar{z}\, dz = \frac{1}{2i}\oint_C (x - iy)(dx + idy) = \frac{1}{2i}\left[\oint_C x dx + y dy + i\oint_C x dy - y dx \right]$$

Usando el Teorema de Green para evaluar la expresión del segundo miembro, obtenemos:

$$\frac{1}{2i}\oint_C \bar{z}\, dz = \frac{1}{2i}\left[\iint_R (0+0)dA + i\iint_R (1+1)dA \right] = \frac{1}{2i}\left[i\iint_R (2)dA \right] = \iint_R dA = A$$

En resumen,

$$\boxed{A = \frac{1}{2i}\oint_C \bar{z}\, dz}$$ tal como se quería demostrar.

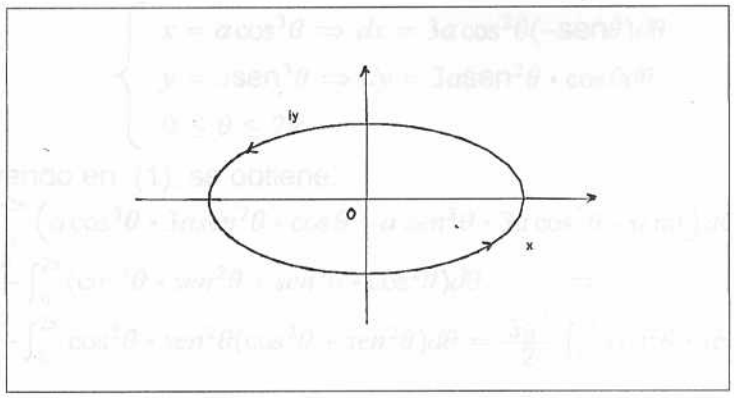
Esta expresión calcula también el área de la región R encerrada por la curva C, en el plano complejo.

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 8:

Encuentre el área acotada por la elipse: $\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos\theta \\ y = b\ \text{sen}\theta \end{array} \right\}$ $0 \le \theta \le 2\pi$

Solución:



(Elipse: $x = a\cos\theta,\ y = b\ \text{sen}\,\theta$)

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos\theta \Rightarrow dx = -a\text{sen}\theta\, d\theta \\ y = b\ \text{sen}\theta \Rightarrow dy = b\cos\theta\, d\theta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos\theta\cdot b\cos\theta + b\ \text{sen}\theta\cdot a\text{sen}\theta\right) = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)d\theta$$

De donde:

$$A = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{ab}{2}(2\pi) = \pi ab$$

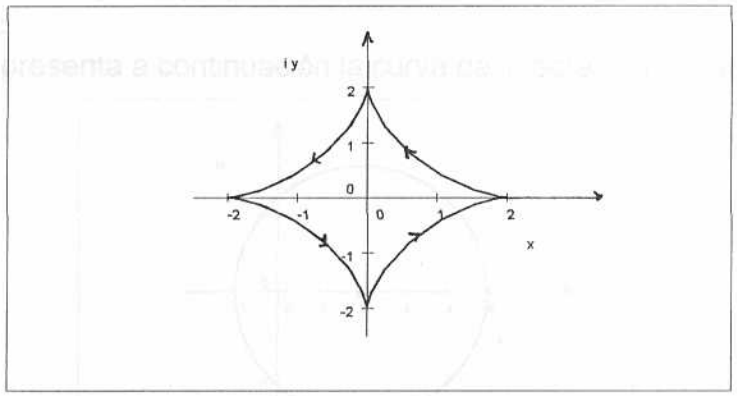
$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 9:

Hallar el área limitada por la hipocicloide (astroide) : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

Solución:

Se presenta a continuación la curva dada (para $a = 2$)



$$(C:\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}})$$

De acuerdo con lo antes expuesto, se tiene que:

$$A = \tfrac{1}{2}\oint_C x dy - y dx \qquad \ldots\ldots (1)$$

Luego, parametrizando la curva dada, obtenemos:

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \Rightarrow dx = 3a\cos^2\theta(-\text{sen}\theta)d\theta \\ y = a\text{sen}^3\theta \Rightarrow dy = 3a\text{sen}^2\theta \cdot \cos\theta d\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Sustituyendo en (1), se obtiene:

$$A = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(a\cos^3\theta \cdot 3asen^2\theta \cdot \cos\theta + a\, sen^3\theta \cdot 3a\cos^2\theta \cdot sen\theta\right)d\theta \Rightarrow$$

$$A = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^4\theta \cdot sen^2\theta + sen^4\theta \cdot \cos^2\theta)d\theta \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot sen^2\theta(\cos^2\theta + sen^2\theta)d\theta = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \cdot sen^2\theta d\theta \Rightarrow$$

$$A = \frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta = \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(4\theta)}{2}\right)d\theta \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{3a^2}{16}\left[\theta - \frac{\text{sen}(4\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{3a^2}{16}\left[2\pi - \frac{\text{sen}(8\theta)}{4}\right] = \frac{3\pi a^2}{8}$$

Luego :

$$A = \frac{3\pi a^2}{8}$$

.

== oo==

.

Ejemplo 10:

Hallar el valor numérico de la integral: $I = \oint_C \overline{z}\, dz$ alrededor de:

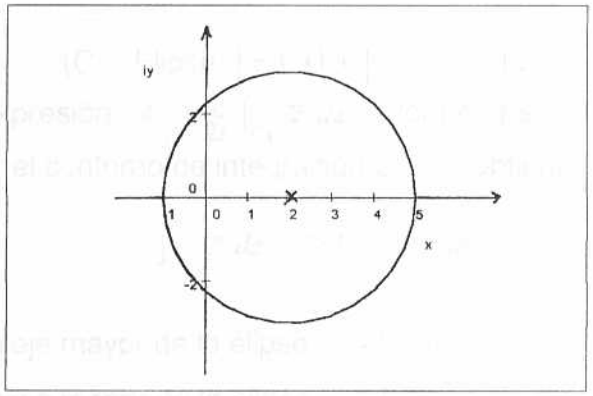
a) La circunferencia $|z-2| = 3$

b) El cuadrado con vértices en $z = 0,\ 2,\ i2,\ 2+i2$

c) La elipse $|z+3| + |z-5| = 12$

Solución:

a) Se presenta a continuación la curva de integración C_1 dada



(Curva C_1 : $|z-2| = 3$)

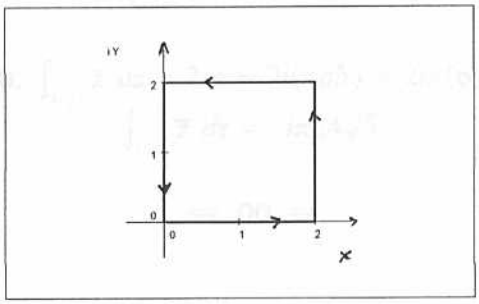
Aplicando el resultado antes obtenido : $A = \frac{1}{2i}\int_{C_1} \overline{z}\, dz$ donde A

es el área encerrada por la curva C_1, se obtiene: $\int_{C_1} \overline{z}\, dz = 2iA = 2i(\pi 3^2) \Rightarrow$

$$\int_{C_1} \overline{z}\, dz = i18\pi$$

== oo ==

b) Se presenta a continuación la curva de integración C_2 dada:



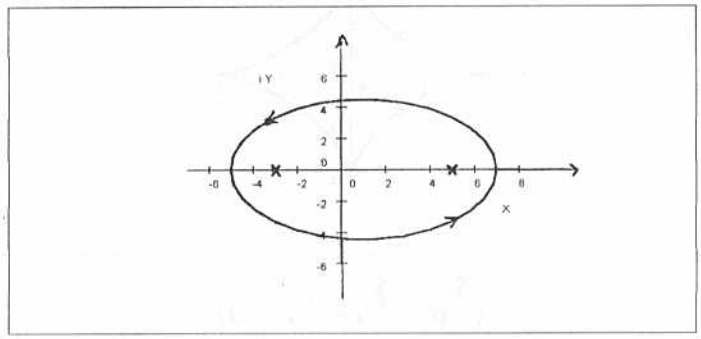
(C_2 :Cuadrado)

Aplicando de nuevo la expresión : $A = \frac{1}{2i}\int_{C_2} \overline{z}\, dz$ donde A es ahora el área encerrada por la curva C_2, se obtiene: $\int_{C_2} \overline{z}\, dz = 2iA = 2i(2)^2 \Rightarrow$

$$\int_{C_1} \overline{z}\, dz = i8$$

== oo ==

c) Se presenta a continuación la curva de integración C_3 dada:



(C_3: Elipse $|z+3| + |z-5| = 12$)

Aplicando la expresión : $A = \frac{1}{2i}\int_{C_3} \overline{z}\, dz$, donde A es ahora el área encerrada por el contorno de integración C_3, se obtiene:

$$\int_{C_3} \overline{z}\, dz = 2iA = 2i(\pi ab)$$

siendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \text{semieje mayor de la elipse } = \frac{12}{2} = 6 \\ b = \text{semieje menor de la elipse } = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} \end{array} \right\}$$

La elipse dada tiene: $\left\{\begin{array}{c} Foco\ F_1(-3,0) \\ Foco\ F_2(5,0) \\ Centro\ C(1,0) \\ 2a = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 6 \\ c = 5-1 = 4 \\ b = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} \end{array}\right.$

Por lo tanto: $\int_{C_3} \overline{z}\, dz = 2iA = 2i(\pi ab) = 2i\pi(6)\sqrt{20}$, de donde:

$$\int_{C_3} \overline{z}\, dz == i\pi 24\sqrt{5}$$

.

$$== \text{oo} ==$$

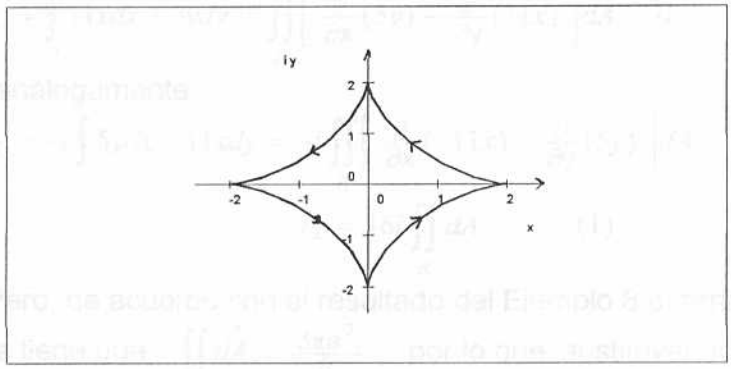
.

Ejemplo 11:

Verificar el cumplimiento del Teorema de Green en el campo complejo, cuando $f(z) = 8\,\overline{z} + 3z$ y la trayectoria de integración es la hipocicloide: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Solución:

La gráfica de la trayectoria de integración (para $a = 2$) es:



$$(C:\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}})$$

El integrando es : $f(z) = 8\,\overline{z} + 3z = 8(x - iy) + 3(x + iy) = 11x - i5y$

Luego:

$$I = \oint_C (11x - i5y)(dx + idy) = \oint_C 11xdx + 5ydy - i\oint_C 5ydx - 11xdy = I_1 + I_2$$

Para resolver estas integrales, podemos:

a) Parametrizar la curva C y calcular la Integral de línea correspondiente

A tales efectos, hagámos: $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3\theta \Rightarrow dx = -3a\cos^2\theta\ \text{sen}\theta d\theta \\ y = a\ \text{sen}^3\theta \Rightarrow dy = 3a\ \text{sen}^2\theta\ \cos\theta d\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}\right.$

con lo cual:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left[(-11a\cos^3\theta)3a\cos^2\theta sen\theta + 5\left(a\ sen^3\theta\right)3a\ sen^2\theta\ cos\theta\right]d\theta \Rightarrow$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \left[-33a^2 \cos^5\theta \, sen\theta + 15a^2 \, sen^5\theta \, \cos\theta \right] d\theta \Rightarrow$$

$$I_1 = 33a^2 \int_0^{2\pi} \cos^5\theta (d\cos\theta) + 15a^2 \int_0^{2\pi} sen^5\theta (d\,sen\theta) \Rightarrow$$

$$I_1 = \left[33a^2 \frac{\cos^6\theta}{6} \right]_0^{2\pi} + \left[15a^2 \frac{sen^6\theta}{6} \right]_0^{2\pi} = 0 \qquad \Rightarrow I_1 = 0$$

Además:

$$I_2 = -i \oint_C 5ydx - 11xdy \Rightarrow$$

$$I_2 = -i \oint_C \left[5\left(a\, sen^3\theta\right)\left(-3a\cos^2\theta \, sen\theta\right) - 11(a\cos^3\theta)3a \, sen^2\theta cos\theta \right] d\theta \Rightarrow$$

$$I_2 = -i \oint_C \left[-15a^2 \, sen^4\theta \cos^2\theta \; - 33a^2 \cos^4\theta \, sen^2\theta \right] d\theta = i6a^2\pi$$

Por lo tanto:

$$I = I_1 + I_2 = i6a^2\pi$$

b) Aplicando el Teorema de Green:

$$f(z) = 11x - i5y \Rightarrow I = \oint_C 11xdx + 5ydy - i \oint_C 5ydx - 11xdy = I_2 + I_2$$

Por el Teorema de Green , se tiene:

$$I_1 = \oint_C 11xdx + 5ydy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(5y) - \frac{\partial}{\partial y}(11x) \right] dA = 0$$

y análogamente:

$$I_2 = -i \oint_C 5ydx - 11xdy = -i \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(-11x) - \frac{\partial}{\partial y}(5y) \right] dA = -i \iint_R (-11 - 5) dA \Rightarrow$$

$$I_2 = 16i \iint_R dA \; \ldots\ldots (1)$$

. Pero, de acuerdo con el resultado del Ejemplo 8.c) arriba expuesto, se tiene que. $\iint_R dA = \frac{3\pi a^2}{8}$, por lo que, sustituyendo en (1),

$$I_2 = 16i \iint_R dA = 16i\left(\frac{3\pi a^2}{8} \right) = i6a^2\pi$$

resultado este que confirma la verificación del Teorema de Green.

== oo ==

1.10) EJERCICIOS PROPUESTOS II

a) Determine, sin evaluar la integral, una cota superior del valor absoluto de $I = \int_0^{2+i} e^{z^2} dz$, a lo lago de la trayectoria : $x = 2y$.

b) Determine el valor numérico de : $\int_C (\overline{z})^2 dz + (z)^2 d\,\overline{z}$ a lo largo de la curva definida por : $(z)^2 + 2z\,\overline{z} + (\overline{z})^2 = (2 - i2)\,z + (2 + i2)\,\overline{z}$, desde el punto $z = 1$ a $z = 2 + i2$.

CAPÍTULO II

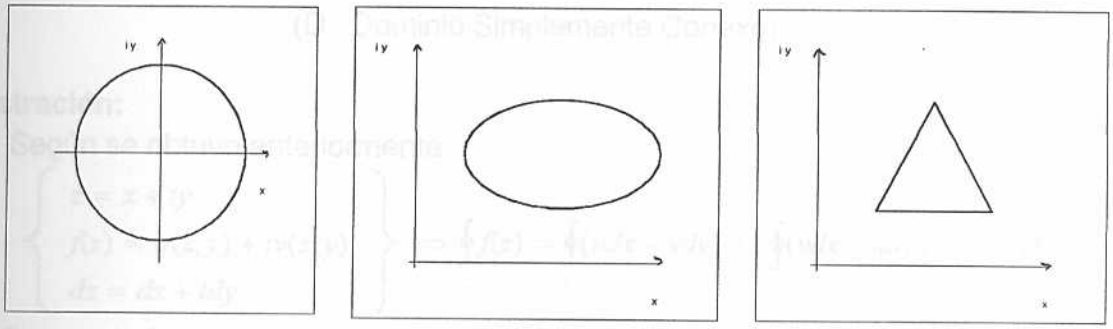
TEOREMA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY
o
TEOREMA DE CAUCHY - GOURSAT

2.1) INTRODUCCIÓN

EL teorema de la integral de Cauchy, también conocido como Teorema de Cauchy - Goursat, es muy importante en el análisis complejo y tiene varias consecuencias teóricas y prácticas. Antes de enunciar este teorema, necesitamos los siguientes conceptos :

2.1.1) Dominio Simplemente Conexo

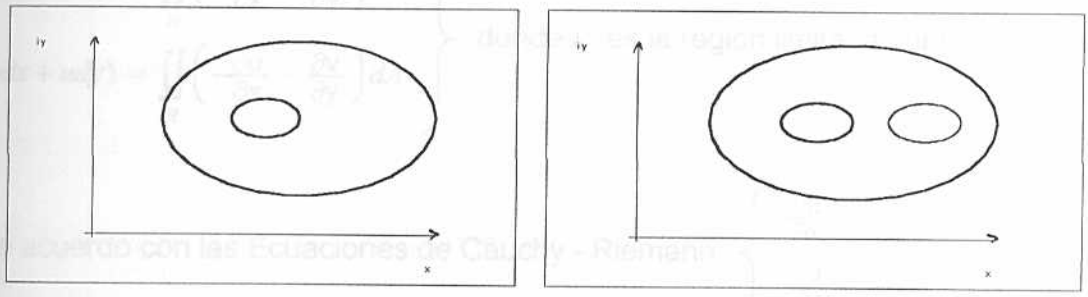
El interior de una Curva Cerrada Simple (es decir, una curva que es cerrada y no tiene auto-intersecciónes), se llama Dominio Simplemente Conexo. Por ejemplo, el interior de un círculo, de una elipse, de un cuadrado, etc., son dominios simplemente conexos.



(Ejemplos de " Dominios Simplemente Conexos")

2.1.2) Dominio Multiplemente Conexo

Un dominio que no es "simplemente conexo" se dice que es Multiplemente Conexo. Por ejemplo, un anillo circular es multiplemente conexo y más cocretamente, doblemente conexo, tal como se ilustra a continuación:



(Dominio Doblemente Conexo) (Dominio Triplemente Conexo)

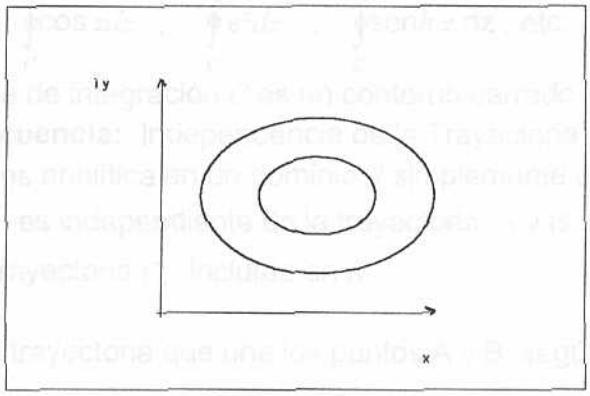
Se dice que un dominio es "n" veces conexo si su frontera consiste de "n" conjuntos cerrados, sin puntos comunes.

2.2) TEOREMA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY: (o Teorema de Cauchy-Goursat)

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D acotado, simplemente conexo.

Entonces, para toda trayectoria cerrada simple C contenida en D, se verifica que:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$



(D : Dominio Simplemente Conexo)

Demostración:

Según se obtuvo anteriormente:

$$\left\{\begin{array}{l} z = x + iy \\ f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \\ dz = dx + idy \end{array}\right\} \Rightarrow \oint_C f(z) = \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy) \qquad \ldots(1)$$

Como $f(z)$ es por hipótesis analítica en D su primera derivada existe. Cauchy estableció la hipótesis adicional de que $f'(z)$ es contínua, por lo que $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tienen primeras derivadas parciales contínuas. En consecuencia, se puede aplicar el Teorema de Green a cada una de las integrales de línea del segundo miembbro de la ecuación (1), obteniéndose:

$$\left\{\begin{array}{l} \oint_C (udx - vdy) = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA \\ \oint_C (vdx + udy) = \iint_R \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA \end{array}\right\}$$ donde R es la región limitada por C.... (2)

Pero, de acuerdo con las Ecuaciones de Cauchy - Riemann: $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array}\right.$

por lo que el integrando de la derecha de las ecuaciones (2) es identicamente nulo.

En consecuencia: $\oint_C (udx - vdy) = 0$ y $\oint_C (vdx + udy) = 0.$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (1), se obtiene: $\oint_C f(z)\,dz = 0$, tal como se quería demostrar.

El Teoerema de Cauchy-Goursat es de los más importantes en la teoría de variable compleja; una de las razones de esta importancia es que puede ahorrarnos una gran cantidad de trabajo al realizar cierto tipo de integraciones. En efecto, integrales de la forma:

$$\oint_C \cos z dz \quad , \quad \oint_C e^z dz \quad , \quad \oint_C \operatorname{sen} h\, z \, dz \text{ , etc.}$$

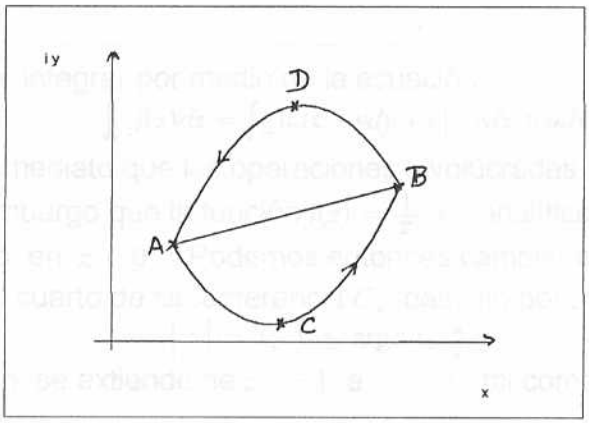
son nulas si la trayectoria de integración C es un contorno cerrado simple cualquiera.

2.2.1) Consecuencia: Independencia de la Trayectoria

Si $f(z)$ es analítica en un dominio R simplemente conexo, entonces: $\int_A^B f(z)dz$ es independiente de la trayectoria. A y B son los puntos extremos de la Trayectoria C, incluída en R.

Demostración:

Consideremos la trayectoria que une los puntos A y B, según se muestra en la siguiente figura:



De acuerdo con lo previsto por el teorema de Cauchy - Goursat, se tiene que:

$$\oint_{ACBDA} f(z)\, zdz = 0$$

Pero, obviando el integrando, podemos escribir: $\oint_{ACBDA} f(z)\, zdz = \int_{ACB} + \int_{BDA} = 0$

de donde:

$$\int_{ACB} = -\int_{BDA} = \int_{ADB}$$

Como este resultado se puede generalizar para cualquier otra trayectoria, se concluye que $\int_{AB} f(z)dz$ no depende de la trayectoria de integración, sino del punto final B y del punto inicial A. La trayectoria que une A con B puede entonces elegirse de tal manera que simplifique el cálculo de la integral, como lo ilustra los siguientes ejemplos.

== oo ==

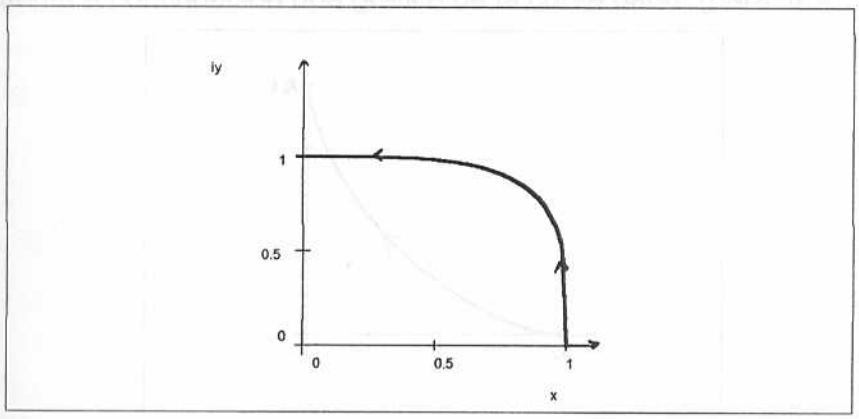
2.2.2) Ejemplos Resueltos

Ejemplo 1

Calcule $\int_1^i \frac{1}{z}dz$, integrando a lo largo del arco C que es la porción de la curva $x^4+y^4=1$ que se encuentra en el primer cuadrante.

Solución:

Se presenta a continuació la gráfica de la curva dada:



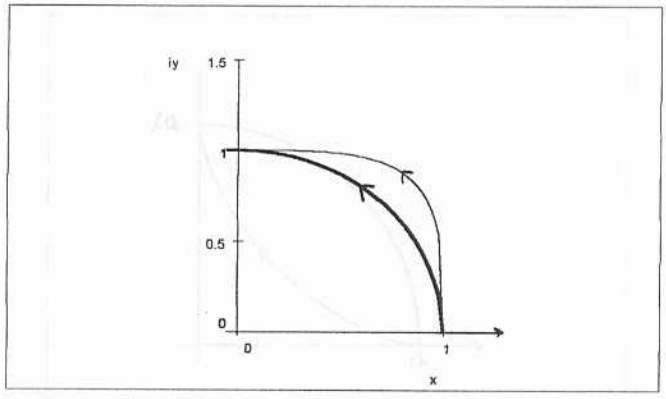
Podemos intentar integrar por medio de la ecuación:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

Se observa de inmediato que las operaciones involucradas se hecen tediosas. Obsérvese sin embargo que la función $f(z)=\frac{1}{z}$ es analítica en todo el plano complejo excepto en $z=0$. Podemos entonces cambiar el contorno de integración por el cuarto de circunferencia C_2 descrito por :

$$|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \tfrac{\pi}{2}$$

Este arco también se extiende de $z_1 = 1$ a $z_2 = i$, tal como se ilustra a continuación:



Contorrno C_2 :

Para integrar sobre C_2 introducimos el cambio de variable: $z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta}d\theta$

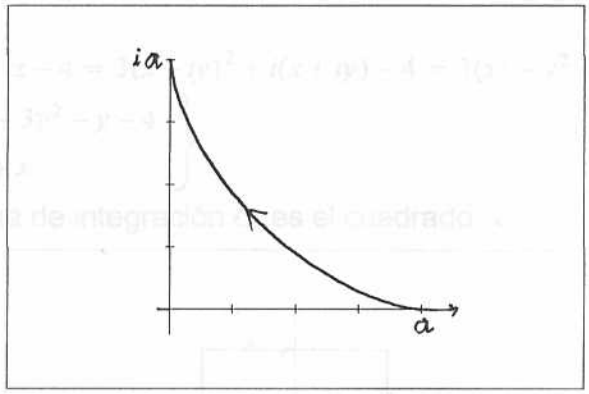
por lo que : $\int_1^i \frac{1}{z}dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = i\frac{\pi}{2}$

Ejemplo 2

Calcule $\int_a^{ia} \frac{1}{z} dz$, integrando a lo largo del arco C que es la porción de la hipocicloide : $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ que se encuentra en el primer cuadrante.

Solución:

Se presenta a continuación una gráfica de la curva dada, (para $a = 2$)



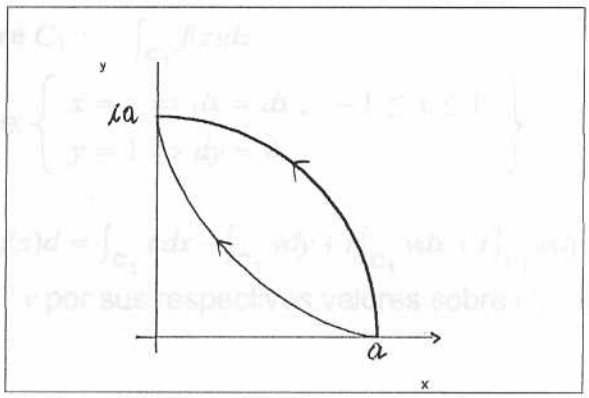
(C: Arco de Hipocicloide)

Podemos intentar integrar por medio de la ecuación:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$$

Se observa de inmediato que las operaciones involucradas se hacen tediosas.

Como la función $f(z) = \frac{1}{z}$ es analítica en todo el plano complejo excepto en $z = 0$, podemos cambiar el contorno de integración por el cuarto de circunferencia C_2 descrito por $|z| = a, \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$. Este arco también se extiende de $z_1 = a$ a $z_2 = ia$, tal como se ilustra a continuación:



(Contorno C_2)

Para integrar sobre C_2 introducimos el cambio de variable: $z = ae^{i\theta} \Rightarrow dz = iae^{i\theta}d\theta$

por lo que : $\int_1^i \frac{1}{z}dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{iae^{i\theta}}{ae^{i\theta}}d\theta = i\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = i\frac{\pi}{2}$

Ejemplo 3

Verifique el cumplimiento del Teorema de Cauchy - Goursat para las funciones.

a) $f(z) = 3z^2 + iz - 4$ *b)* $f(z) = \text{sen}2z$ *c)* $f(z) = \cosh(z+2)$.

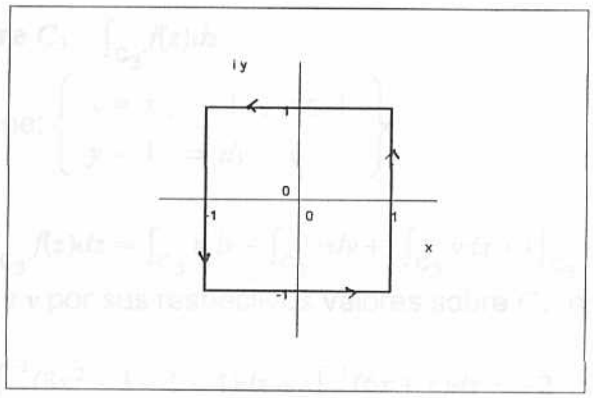
La trayectoria de integración es el cuadrado con vérices: $1 \pm i,\ -1i \pm i$

Solución:

a) $f(z) = 3z^2 + iz - 4 = 3(x+iy)^2 + i(x+iy) - 4 = 3(x^2 - y^2 + i2xy) + ix - y - 4 \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 3x^2 - 3y^2 - y - 4 \\ v = 6xy + x \end{array} \right\}$$

La trayectoria de integración C es el cuadrado



(C : Trayectoria de integración)

Luego, el integrando $f(z)$ es analítico en todo punto sobre C y dentro de ella, por lo tanto, puede aplicarse el teorema de Cauchy - Goursat, obteniédose:

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \int_{C_4} f(z)dz \quad \ldots\ldots (1)$$

Integración sobre C_1 : $\int_{C_1} f(z)dz$

Sobre C_1 se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} x = x \Rightarrow dx = dx\,; \quad -1 \le x \le 1 \\ y = 1 \Rightarrow dy = 0 \end{array} \right\}$

Por lo tanto: $\int_{C_1} f(z)d = \int_{C_1} udx - \int_{C_1} vdy + i\int_{C_1} vdx + i\int_{C_1} udy = \int_{C_1} udx + i\int_{C_1} vdx$

Sustituyendo u y v por sus respectivos valores sobre C_1, obtenemos:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_1} (3x^2 - 3y^2 - y - 4)dx + i\int_{C_1} (6xy + x)dx = \int_{-1}^{1} (3x^2 - 3y^2 - 6xy - y + x - 4)dx \Rightarrow$$

Sobre C_1 $y = -1$ por lo tanto:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} (3x^2 - 3 - 6x + 1 + x - 4)dx = -10 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Integración sobre C_2 : $\int_{C_2} f(z)dz$

Sobre C_1 se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow dx = 0\ ; \\ y = y\ ;\ -1 \le y \le 1 \end{array} \right\}$

Por lo tanto: $\int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_2} udx - \int_{C_2} vdy + i\int_{C_2} vdx + i\int_{C_2} udy = -\int_{C_2} vdy + i\int_{C_2} udy$

Sustituyendo u y v por sus respectivos valores sobre C_2, obtenemos:

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_{-1}^{1} (6y+1)dy + i\int_{-1}^{1} (3-3y^2-y-4)dy = -2-i4 \qquad \text{.....(3)}$$

.

$$= \text{oo} =$$

.

Integración sobre C_3 : $\int_{C_3} f(z)dz$

Sobre C_3 se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} x = x\ ;\ -1 \le x \le 1 \\ y = 1 \Rightarrow dy = 0 \end{array} \right\}$

Por lo tanto: $\int_{C_3} f(z)dz = \int_{C_3} udx - \int_{C_3} vdy + i\int_{C_3} vdx + i\int_{C_3} udy = \int_{C_3} udx + i\int_{C_3} vdx$

Sustituyendo u y v por sus respectivos valores sobre C_3, obtenemos:

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_{1}^{-1} (3x^2-3-1-4)dx + i\int_{1}^{-1} (6x+x)dx = -2-i4 \qquad \text{.....(4)}$$

.

$$= \text{oo} =$$

.

Integración sobre C_4 : $\int_{C_4} f(z)dz$

Sobre C_4 se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow dx = 0\ ;\ -1 \le x \le 1 \\ y = y\ \ \ ;\ -1 \le y \le 1 \end{array} \right\}$

Por lo tanto: $\int_{C_4} f(z)dz = \int_{C_4} udx - \int_{C_4} vdy + i\int_{C_4} vdx + i\int_{C_4} udy = -\int_{C_4} vdy + i\int_{C_4} udx$

Sustituyendo u y v por sus respectivos valores sobre C_4, obtenemos:

$$\int_{C_4} f(z)dz = \int_{1}^{-1} (-6y-1)dy + i\int_{1}^{-1} (3-3y^2-y-4)dy = -2+i4 \qquad \text{.....(5)}$$

Sustituyendo los resultados (2), (3), (4) y (5) en la ecuación (1), obtenemos:

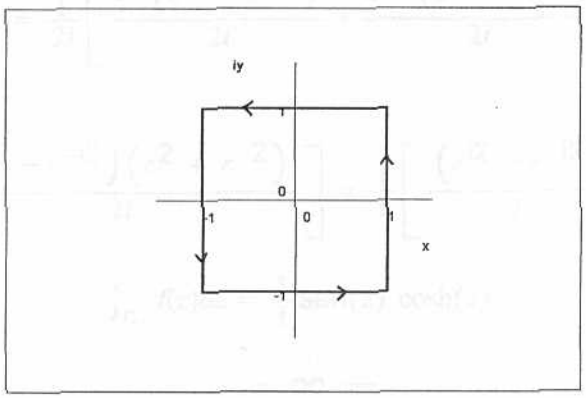
$$\oint_C f(z)dz = -10 + (-2-i4) + (14) + (-2+i4) = 0$$

tal como lo establece el Teorema de Cauchy - Gourast

.

$$= \text{oo} =$$

b) Se desea evaluar la Integral: $\oint_C \operatorname{sen}(2z)\,dz$, donde C es el mismo cuadrado del caso a).



(C : Trayectoria de integración)

Solución:

Aplicando la fórmula de Euler, se tiene que: $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Sustituyendo en la integral dada, se obtiene :

$$\oint_C \operatorname{sen}(2z)\,dz = \oint_C \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i}dz = \frac{1}{2i}\oint_C \left(e^{i2z} - e^{-i2z}\right)dz$$

Además, prescindiendo del integrando, podemos escribir que:

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} \quad \ldots\ldots (1)$$

Cálculo de $\int_{C_1}$:

Sobre C_1 se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} x = x \Rightarrow dx = dx\,; \quad -1 \le x \le 1 \\ y = -1 \Rightarrow dy = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = x - i \\ dz = dx \end{array} \right.$

El integrando queda entonces: $e^{i2z} - e^{-i2z} = e^{i2(x-i)} - e^{-i2(x-1)}$

Por lo tanto:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \frac{1}{2i}\int_{-1}^{1}\left[e^{i2(x-i)} - e^{-i2(x-i)}\right]dx = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i2(x-i)}}{i2} - \frac{e^{-i2(x-i)}}{-i2}\right]_{-1}^{1}$$

De donde :

$$\int_{C_1} f(z)dz = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i2(1-i)} - e^{i2(-1-i)}}{i2} - \frac{e^{-i2(1-i)} - e^{-i2(-1-i)}}{-i2}\right] \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \frac{1}{2i}\left[\left(\frac{e^{i2(1-i)}}{i2} + \frac{e^{-i2(1-i)}}{i2}\right) - \left(\frac{e^{-i2(1+i)}}{i2} + \frac{e^{i2(1+i)}}{i2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{2}e^{i2} + e^{-2}e^{-i2}}{2i} - \frac{e^{2}e^{-i2} + e^{-2}e^{i2}}{2i} \right] \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{2}\left(e^{i2} - e^{-i2}\right)}{2i} + \frac{e^{-2}\left(e^{-i2} - e^{i2}\right)}{2i} \right] \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \frac{1}{2i}\left[\frac{\left(e^{i2} - e^{-i2}\right)\left(e^{2} + e^{-2}\right)}{2i} \right] = \frac{1}{i}\left[\frac{\left(e^{i2} - e^{-i2}\right)}{2i} \right]\frac{\left(e^{2} + e^{-2}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \frac{1}{i}\operatorname{sen}(2)\cosh(2)$$

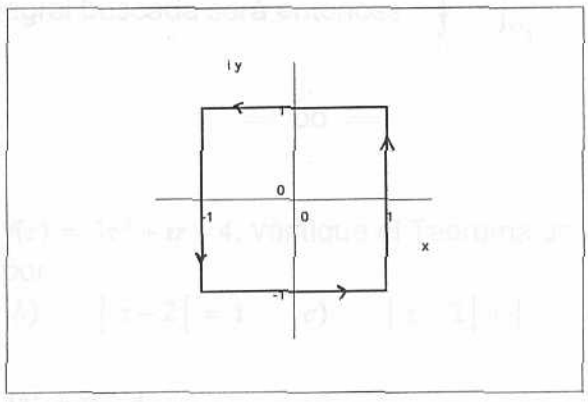
$$= \text{oo} =$$

En forma análoga se obtiene: $\int_{C_2}$, $\int_{C_3}$, e $\int_{C_4}$. El cálculo correspondiente se deja a la curiosidad matemática del interesado.

El valor de la integral buscada será entonces : $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$.

$$= \text{oo} =$$

c) Se desea evaluar la Integral: $\oint_C \cosh(z+2)\,dz$, donde C es el mismo cuadrado del caso a), que se reproduce a continuación :



(C : Trayectoria de integración)

Solución:

Aplicando la fórmula de Euler, se tiene que: $\cosh z = \dfrac{e^{z+2} - e^{-(z+2)}}{2}$

Sustituyendo en la integral dada: $\oint_C \operatorname{sen}(2z)\,dz = \oint_C \dfrac{e^{z+2} - e^{-(z+2)}}{2} dz$;

Además, prescindendo del integrando podemos escribir de nuevo que:

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} . \quad \ldots\ldots (1)$$

Cálculo de $\int_{C_1}$:

Sobre C_1 se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} x = x \Rightarrow dx = dx\,; \quad -1 \le x \le 1 \\ y = -1 \Rightarrow dy = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = x - i \\ dz = dx \end{array} \right.$

Por lo tanto:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(e^{x+2-i} - e^{-(x+2-i)} \right) dx = \tfrac{1}{2}\left[e^{z+2-i} - e^{-(z+2-i)} \right]_{-1}^{1} \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \tfrac{1}{2}\left[e^{3-i} - e^{-(3-i)} - \left(e^{1-i} - e^{-(1-i)} \right) \right] = \frac{e^{3-i} - e^{-(3-i)}}{2} - \frac{e^{1-i} - e^{-(1-i)}}{2} \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = senh(3-i) - senh(1-i) = senh(3)\cosh(i) - \cosh(3)\, senh(i) -$$

$$-[senh(1)\cosh(i) - \cosh(1) senh(i)] \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = senh(3)\cos(1) - i\cosh(3)\, sen(1) - \left[senh(1)\cos(1) - i\cosh(1)\, i\, sen(1) \right] \Rightarrow$$

$$\int_{C_1} f(z)dz = \cos(1)[senh(3) - senh(1)] - i\, sen(1)[\cosh(3) - \cosh(1)]$$

De donde:

$$\int_{C_1} f(z)dz = 4.7777 - 0.78345i$$

En forma análoga se obtiene: $\int_{C_2}$, $\int_{C_3}$, e $\int_{C_4}$. El cálculo correspondiente se deja a la curiosidad matemática del interesado.

El valor de la integral buscada será entonces : $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$

$$== \text{oo} ==$$

Ejemplo 4

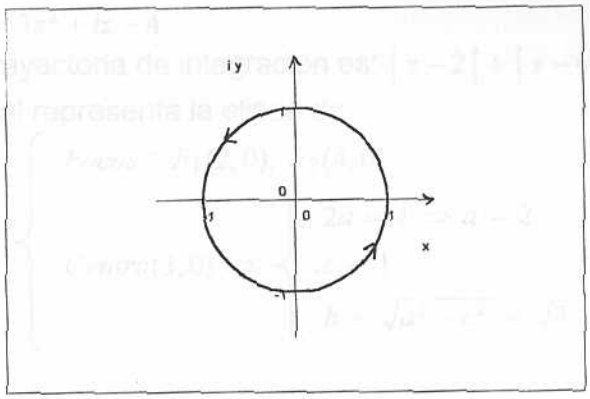
Para la función $f(z) = 3z^2 + iz - 4$, verifique el Teorema de Cauchy - Goursat, si C es la curva dada por :

a) $|z| = 1$ *b)* $|z-2| = 1$ *c)* $|z-2| + |z-4| = 4$

Solución:

a) $f(z) = 3z^2 + iz - 4$

La trayectoria de integración es: $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $dz = ie^{i\theta}$



Luego:

$$\oint_C (3z^2 + iz - 4)dz = \oint_C \left[3(e^{i\theta})^2 + i(e^{i\theta}) - 4\right] ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (3e^{i2\theta} + ie^{i\theta} - 4)ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$\oint_C (3z^2 + iz - 4)dz) = i\int_0^{2\pi} (3e^{i3\theta} + ie^{i2\theta} - 4e^{i\theta})d\theta = 0$$

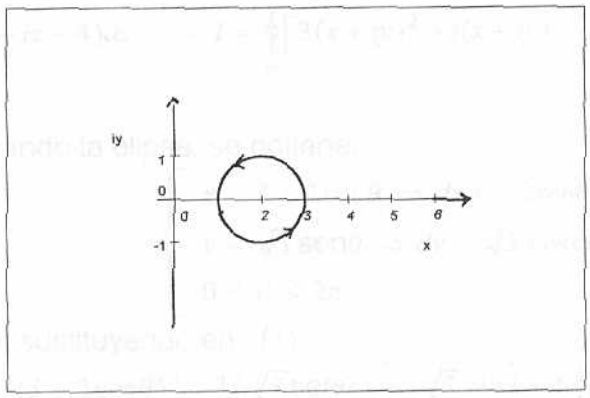
lo que comprueba lo previsto por el Teorema de Cauchy-Goursat.

oo

b) $f(z) = 3z^2 + iz - 4$

La trayectoria de integración es: $|z - 2| = 1 \Rightarrow$

Es decir : $z = 2 + e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} dz = ie^{i\theta} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$



Luego:

$$I = \oint_C (3z^2 + iz - 4)dz = \oint_C \left[3(2 + e^{i\theta})^2 + i(2 + e^{i\theta}) - 4\right] i\, e^{i\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{2\pi} [(12 + i)e^{i\theta} + 3e^{2(i\theta)} + (8 + 2i)]ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$I = i\int_0^{2\pi} \left[(12 + i)e^{2(i\theta)} + 3e^{3(i\theta)} + (8 + 2i)e^{i\theta}\right] d\theta \Rightarrow$$

$$I = i\left[(12 + i)\frac{e^{2(i\theta)}}{2i} + 3\frac{e^{3(i\theta)}}{3i} + (8 + 2i)\frac{e^{i\theta}}{i}\right]_0^{2\pi} = 0$$

lo que comprueba lo previsto por el Teorema de Cauchy-Goursat.

c) $f(z) = 3z^2 + iz - 4$

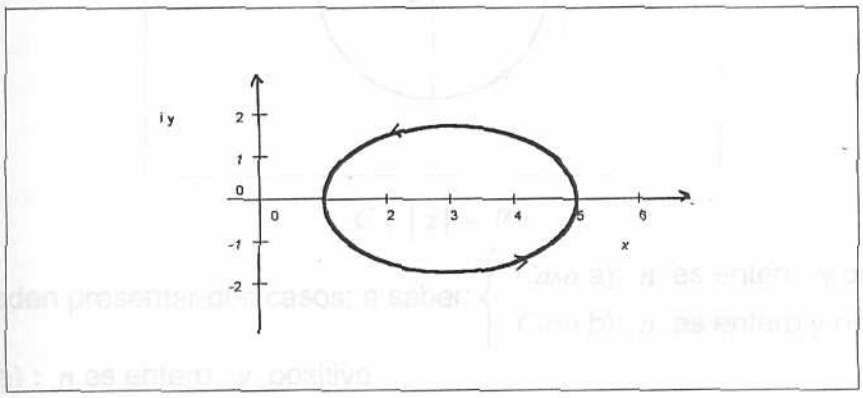
La trayectoria de integración es: $|z-2| + |z-4| = 4$

lo cual representa la elipse de:

$$\begin{cases} Focos: F_1(2,0),\ F_2(4,0) \\ Centro(3,0) \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \\ c = 1 \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

por lo que la ecuación cartesiana correspondiente será: $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

cuya gráfica se muestra a continuación:



Luego:

$$I = \oint_C (3z^2 + iz - 4)dz \quad \Rightarrow I = \oint_C \left[3(x+iy)^2 + i(x+iy) - 4\right](dx + idy)\ldots(1)$$

Parametrizando la elipse, se obtiene:

$$\left.\begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta \Rightarrow dx = -2sen\theta d\theta \\ y = \sqrt{3}\,\text{sen}\theta \Rightarrow dy = \sqrt{3}\cos\theta d\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}\right\}$$

Por lo tanto, sustituyendo en (1) :

$$I = \int_0^{2\pi}\left[3(3+2\cos\theta)^2 - 3\left(\sqrt{3}\,\text{sen}\theta\right)^2 - \sqrt{3}\,sen\theta - 4\right]\left(-2sen\theta + i\sqrt{3}\cos\theta\right)d\theta +$$
$$+ i\int_0^{2\pi}(3+2\cos\theta)\left(1 + 6\sqrt{3}\,\text{sen}\theta\right)\left(-2sen\theta + i\sqrt{3}\cos\theta\right)d\theta$$

De donde:

$$I = (2+36i)\pi\sqrt{3} - (2+36i)\pi\sqrt{3} = 0$$

lo que comprueba lo previsto por el Teorema de Cauchy-Goursat.

$$= \text{oo} =$$

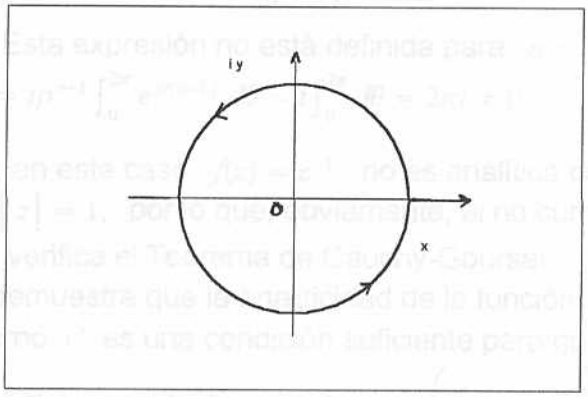
Ejemplo 5:

Verifique el Teorema de Cauchy - Goursat para la función $f(z) = z^n$, si C es la circunferencia de radio ρ, centrada en el origen de coordenadas y n es entero.

Solución:

Se desa evaluar : $\oint_C z^n \, dz$

La curva de integración $C : |z| = R$ se muestra a continuación:



$$C : |z| = R$$

Se pueden presentar dos casos; a saber: $\begin{cases} Caso\ \text{a}): \ n \text{ es entero y positivo} \\ Caso\ \text{b}): \ n \text{ es entero y negativo} \end{cases}$

Caso a) : n es entero y positivo

Evidentemente, $f(z)$ no es analítica en el interior de C pues $z = 0$ se encuentra en el interior de $|z| = 1$. No obstante, el origen no peretenece al trayecto de integración C por lo que podemos evaluar la integral de línea sobre dicho trayecto.

Sobre el trayecto de integración se tiene: $\begin{cases} z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow dz = i\rho e^{i\theta} \, d\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

Luego:

$$\oint_C z^n \, dz = \int_0^{2\pi} (\rho e^{i\theta}) i\rho e^{i\theta} \, d\theta = i\rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n+1)} \, d\theta = \frac{i\,\rho^{n+1}}{i(n+1)} [e^{i\theta(n+1)}]_0^{2\pi} \quad \Rightarrow$$

$$\oint_C z^n \, dz = \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)} [e^{i2\pi(n+1)} - 1] = \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)} \left[\cos 2\pi(n+1) + i \operatorname{sen} 2\pi(n+1) - 1 \right]$$

Pero n es entero y positivo por hipótesis, por lo tanto:

$$\oint_C z^n \, dz = \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)} \left[1 + i\,(0) - 1 \right] = 0$$

Por lo tanto: $\oint_C z^n \, dz = 0$ para : $n = 0, 1, 2, \ldots$

Obsérvese que, en este caso $f(z) = z^n$ es analítica tanto sobre la trayectoria de integración $|z| = 1$, como en todo punto interior a ella,

por lo que, obviamente, se verifica el Teorema de Cauchy-Goursat.

$$== \text{oo} ==$$

Caso b) : n es entero y negativo

Tal como se obtuvo en el caso a)

$$\oint_C z^n\,dz = \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)}\left[\, e^{i2\pi(n+1)} - 1 \,\right] = \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)}\left[\cos 2\pi(n+1) + i\,\text{sen}2\pi(n+1) - 1\,\right]$$

Evidentemente, Esta expresión no está definida para $n = -1$, en cuyo caso

$$\oint_C z^n\,dz = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i\theta(n+1)}\,d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \neq 0$$

Obsérvese que, en este caso $f(z) = z^{-1}$ no es analítica dentro de la trayectoria de integración $|z| = 1$, por lo que, obviamente, al no cumplirse las respectivas hipótesis, no se verifica el Teorema de Cauchy-Goursat.

Este resultado demuestra que la analiticidad de la función $f(z)$ sobre y en el interior del contorno C, es una condición suficiente para que se cumpla lo establecido por el Teorema de Cauchy-Goursat $\left(\oint_C f(z) = 0\right)$, mas no es necesaria.

Para cualquier otro valor de $n = -2, -3, -4, -\cdots$, se obtiene, al igual que en el caso anterior, que

$$\oint_C z^n\,dz = \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)}\left[\cos 2\pi(n+1) + i\,\text{sen}2\pi(n+1) - 1\,\right]$$

Pero n es entero y negativo por hipótesis, por lo que:

$$\oint_C z^n\,dz = \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)}\left[\,1 + i\,(0) - 1\,\right] = 0$$

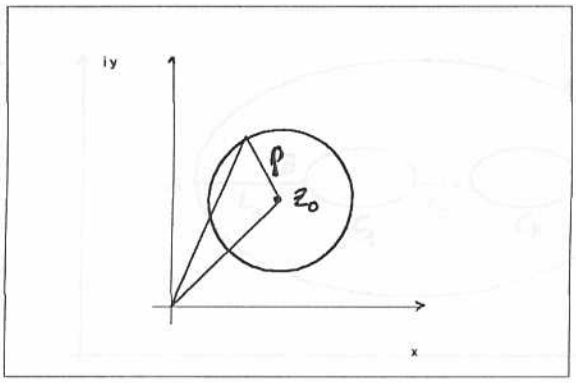
En resumen: $$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 0\,, & \text{si } n \neq -1 \text{ y entero} \\ 2\pi i\,, & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

NOTA:

Una importante generalización de este resultado ,es la siguiente..

Si n es un entero cualquiera, ρ un número real positivo y Z_0 una constante compleja cualquiera, entonces:

$$\oint_{|z-z_0|=\rho} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0\,, & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i\,, & \text{si } n = -1 \end{cases}$$



2.2.3) Ejercicios Propuestos I

Compruebe el Teorema de Cauchy-Goursat cuando :

a) $f(z) = z$ y C es el contorno triangular de la figura de vértices : $(0+i0),\ (1+i0),\ (1+i)$.

b) $f(z) = e^{z}$ y C es cualquier trayectoria simple cerrada.

c) $f(z) = \frac{1}{z^3}$ y C es la trayectoria $|z-3-i3| = 2$

$$== oo ==$$

2.3) INTEGRACIÓN EN DOMINIOS MULTIPLEMENTE CONEXOS

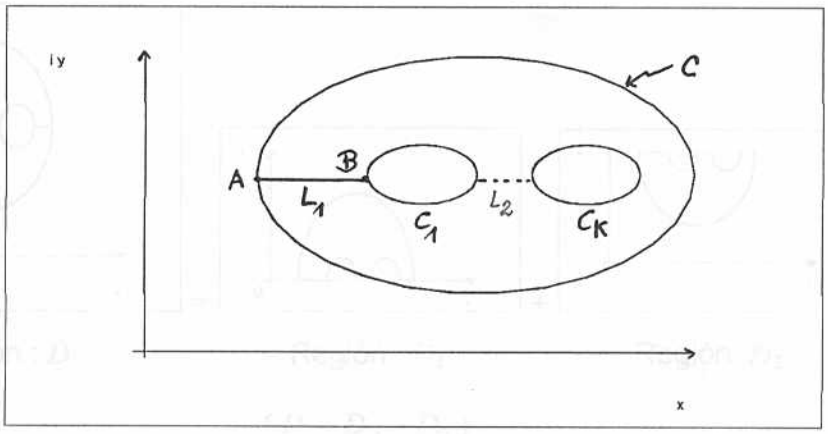
* Sea C un contorno cerrado simple y C_j $(j = 1,2,3,\ldots k)$ un número finito de contornos cerrados simples, interiores a C, que no tienen puntos en comun, es decir, $C_i \cap C_j = \Phi,\ \forall i \neq j$
* Sea D la región cerrada que consta de todos los puntos dentro y sobre C, excepto de los puntos interiores a cada C_j.
* Sea D_j la región cerrada que consta de todos los puntos dentro y sobre C_j.

En este caso, si $f(z)$ es analítica en R, entonces:

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_K} f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \oint_{C_j} f(z)\,dz$$

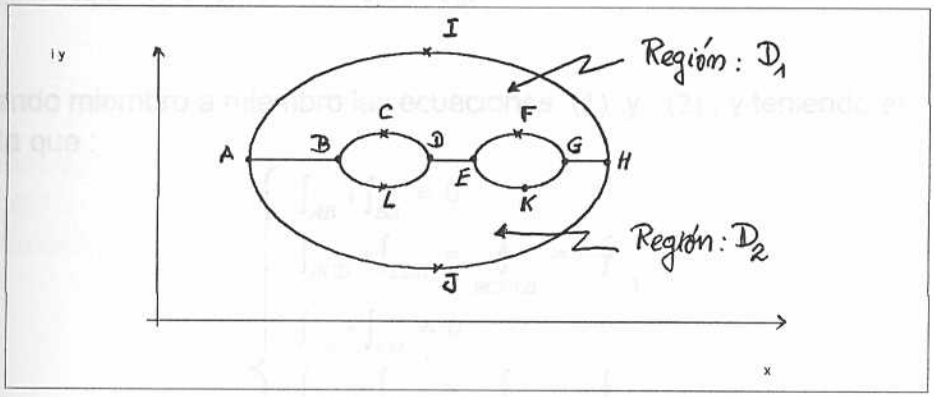
Demostración:

Para establecer este resultado, se introduce una trayectoria rectilínea , que consta del segmento de recta L_1 que conecta el contorno C al contorno C_1, como ilustra la siguiente figura:



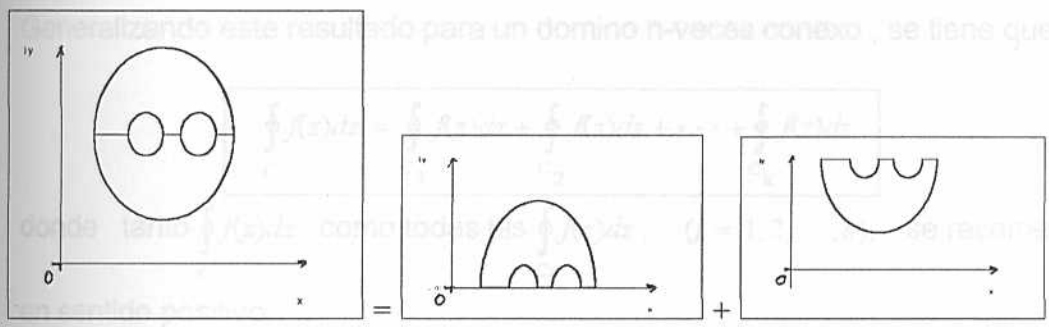
(Dominio supuesto Triplemente Conexo)

Se introduce otra trayectoria rectilínea L_2 que conecte C_1 con C_2 y se continúa de este modo con L_{n+1} que conecta a C_{k-1} con C_k.
Se forman así dos contornos simples cerrados D_1 y D_2 que constan de trayectorias poligonales descritas en una dirección tal que, los puntos encerrados por cada una de ellas se encuentran a la izquierda, como se muestra a continuación:



(Contornos R_1 y R_2)

La región D, obviando la escala, tambien puede ser considerada como la suma de las regiones D_1 más D_2, como se ilustra a continuaciòn :



Región : D Región : D_1 Región: D_2

$$(D = D_1 + D_2)$$

El Teorema de Cauchy-Goursat puede ahora aplicarse a la función $f(z)$ en las regiones D_1 y D_2, y las sumas de las integrales sobre sus respectivos contornos, identificados por R_1 y R_2, respectivamente. resulta ser cero, es decir:

$$\oint_{R_1} f(z)dz = 0 \quad \text{y} \quad \oint_{R_2} f(z)dz = 0 .$$

Además, obviando el integrando e integrando sobre ambos contornos en sentido positivo, podemos escrfibir :

$$\oint_{R_1} f(z)dz = \int_{AB} + \int_{BCD} + \int_{DE} + \int_{EFG} + \int_{GH} + \int_{HIA} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\oint_{R_2} f(z)dz = \int_{AJH} + \int_{HG} + \int_{GKE} + \int_{ED} + \int_{DLB} + \int_{BA} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2), y teniendo en cuenta que :

$$\begin{cases} \int_{AB} + \int_{BA} = 0 \\ \int_{BCD} + \int_{DLB} = \oint_{BCDLB} = -\oint_{C_1} \\ \int_{DE} + \int_{ED} = 0 \\ \int_{EFG} + \int_{GKE} = \oint_{EFGKE} = -\oint_{C_2} \\ \int_{GH} + \int_{HG} = 0 \\ \int_{HIA} + \int_{AJH} = \oint_{AJHIA} = \oint_{C} \end{cases}$$

Por lo que queda en consecuencia :

$$\oint_C - \oint_{C_1} - \oint_{C_2} = 0$$

Es decir : $\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$

Generalizando este resultado para un domino n-veces conexo , se tiene que:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_k} f(z)dz$$

donde tanto $\oint_C f(z)dz$ como todas las $\oint_{C_j} f(z)dz$, $(j = 1,2,\ldots,k)$, se recorren en sentido positivo.

== oo ==

2.4) PRINCÍPIO DE DEFORMACIÓN DE CONTORNOS

Este Princípio es una consecuencia del teorema de Cauchy-Goursat enunciado anteriormente. El mismo permite establecer que, en determinadas circunstancias, dos integrales de contorno son iguales, sin necesariamente conocer el valor de cualquiera de ellas.

Esta extensión del teorema de Cauchy-Goursat se conoce como : **"Principio de Deformación de Contornos"** y el mismo se enuncia con el siguiente teorema:

TEOREMA:

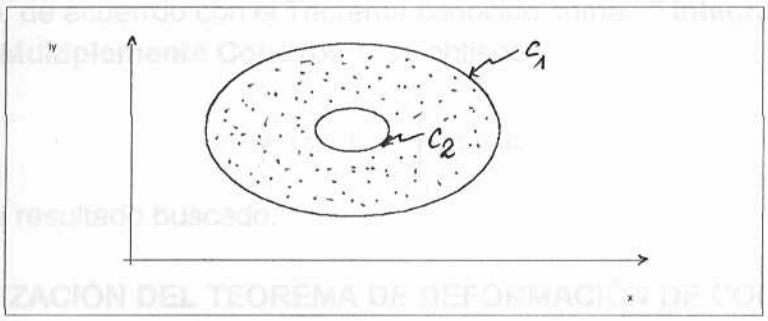
Consideremos dos contornos cerrados simples C_1 y C_2 , tales que todos los puntos de C_2 quedan en el interior de C_1 .

Si una función $f(z)$ es analítica en C_1 , en C_2 y en todos los puntos del dominio doblemente conexo D definido por C_1 y C_2 , entonces:

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

Demostración:

Los contornos C_1 y C_2 se muestran en la siguiente figura. El dominio Doblemente Conexo es el área sombreada, encerrrada por los contornos C_1 y C_2.

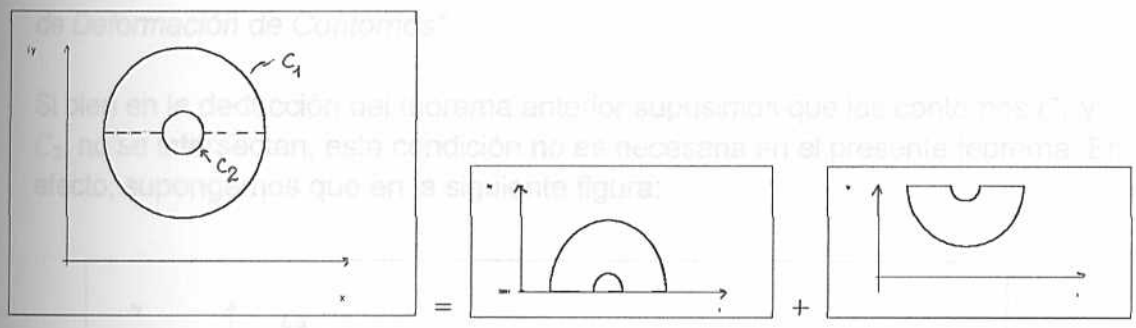


(Figura 1: Dominio Doblemente Conexo)

Demostración:

Usando líneas punteadas se indican dos cortes rectos que conectan los contornos C_1 y C_2. Mediante estos cortes, hemos creado dos contornos cerrados simple

C_n y Cm que se muestran ligeramente separados en las siguientes figuras:



(Contorno C) (Contorno C_n) (Contorno C_m)

Tomando la integral de $f(z)$ alrededor de C_n y C_m , en ambos casos es válido el Teorema de Cauchy-Goursat ya que $f(z)$ es nalítica tanto sobre C_n y C_m como en todo punto interior a ambos contornos.

Así pues:

$$\oint_{Cn} f(z)\ dz = 0 \quad \text{y} \quad \oint_{Cm} f(z)\ dz = 0$$

Sumando estos resultados, obtenemos:

$$\oint_{Cn} f(z)\ dz + \oint_{Cm} f(z)\ dz = 0 \qquad .....(1)$$

Observemos ahora las figuras y notemos que la integral a lo largo del segmento de recta que va de "A" a "B" sobre C_n es igual a la integral a lo largo del segmento de recta se extiende de "B" a "A" sobre C_m , cambiada de signo.

Lo mismo puede decirse de la integral de "D" a "E" sobre C_n y la integral que va de "E" a "D" sobre C_m.

Si escribimos de forma explícita las integrales de la expresión (1) y combinamos las porciones integradas sobre los segmentos que se anulan, nos queda únicamente las integrales a lo largo de C_1 y C_2 de la Figura 1.

Por lo tanto, de acuerrdo con el Teorema conocido como : **" Integración en Dominios Multiplemente Conexos ",** se obtiene :

$$\oint_{C_1} f(z)\ dz = \oint_{C_2} f(z)\ dz$$

lo cual es el resultado buscado.

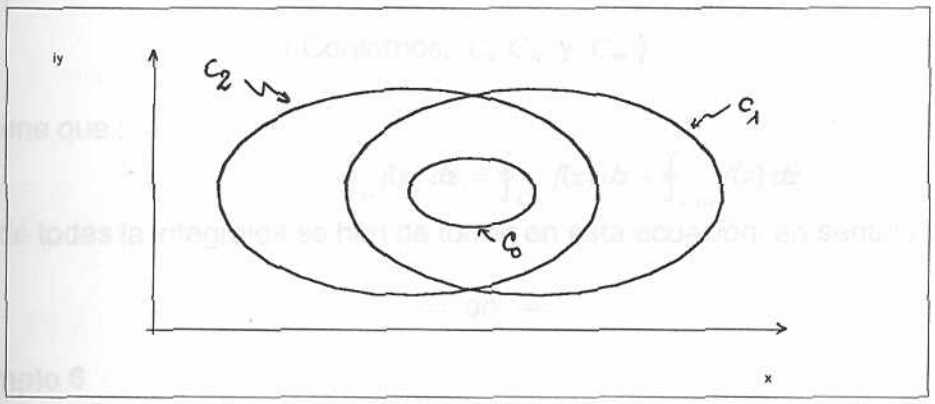
2.5) GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE DEFORMACIÓN DE CONTORNOS

Teorema: El teorema anterior se puede enunciar en forma más general, así:

" *La Integrales de Línea de una función analítica $f(z)$ alrededor de dos contornos cerrados simples serán identicas, si una de los contornos puede transformarse en el otro por medio de una deformación contínua y sin pasar por ninguna singularidad de $f(z)$ ".*

En la figura antes mostrada podemos considerar que el contorno C_2 es una deformación de C_1, o viceversa. Este método se conocecomo ." *Principio de Deformación de Contornos".*

Si bien en la deducción del teorema anterior supusimos que los contornos C_1 y C_2 no se intersectan, esta condición no es necesaria en el presente teorema. En efecto, supongamos que en la siguiente figura:



* $f(z)$ es analítica sobre C_2 y en su interior, salvo quizás en algún punto del interior de C_0 .

* Supongamos además que $f(z)$ es analítica sobre C_1 y en su interior, salvo quizás en algún punto del interior de C_0 .

* C_0 está dentro de C_1 y de C_2 y no corta a ninguno de estos contornos.

* Obsérvese que C_1 y C_2 pueden cortarse.

Por el teorema anterior podemos escribir:

$$\oint_{C_1} f(z)\ dz = \oint_{C_0} f(z)\ dz \qquad \text{y por la misma razón :} \quad \oint_{C_2} f(z)\ dz = \oint_{C_0} f(z)\ dz$$

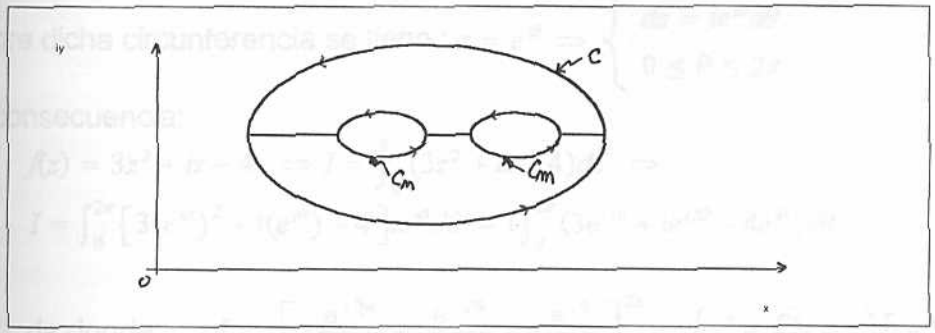
Por lo tanto:

$$\oint_{C_1} f(z)\ dz = \oint_{C_2} f(z)\ dz$$

$$= \text{oo} =$$

NOTA:

Para dominios más complicados es posible que se necesiten más de un corte, pero la idea básica sigue siendo la misma del caso anterior. Por ejemplo, para el dominio triplemente conexo de la siguiente figura:



(Contornos: C, C_n y C_m)

se tiene que :

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_n} f(z)\,dz + \oint_{C_m} f(z)\,dz$$

donde todas la integrales se han de tomar en esta ecuación, en sentido positivo.

$$= \text{oo} =$$

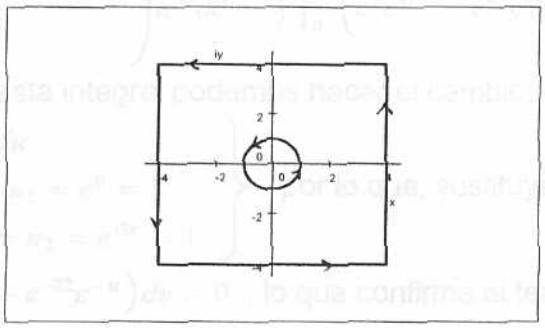
Ejemplo 6

Verifique el Teorema de Cauchy-Goursat para las funciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} a)\ f(z) = 3z^2 + iz - 4 \\ b)\ f(z) = sen(2z) \\ c)\ f(z) = \cosh(z+2) \end{array} \right\}$$, siendo C el cuadrado con vértices en: $4 \pm 4i$, $-4 \pm 4i$

Solución:

Se muestra a continuación la curva C de integración y la deformación de este contorno en la circunferencia $|z| = 1$.



Como $f)z)$ es analítica sobre C y en su interior, podemos aplicar el **Principio de Deformación de Contornos** y cambiar el contorno de integración C por la circunferencia unitaria : $|z| = 1$

Así se tiene que: $\oint_C f(z)dz = \oint_{|z|=1} f(z)dz$

Sobre dicha circunferencia se tiene : $z = e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} dz = ie^{i\theta}d\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

En consecuencia:

a) $f(z) = 3z^2 + iz - 4 \Rightarrow I = \oint_C (3z^2 + iz - 4)dz \Rightarrow$

$I = \int_0^{2\pi} \left[3(e^{i\theta})^2 + i(e^{i\theta}) - 4\right] ie^{i\theta}d\theta = i\int_0^{2\pi} (3e^{i3\theta} + ie^{i2\theta} - 4e^{i\theta})d\theta$

de donde: $I = i\left[3\frac{e^{i3\theta}}{i3} + i\frac{e^{i2\theta}}{i2} - 4\frac{e^{i\theta}}{i}\right]_0^{2\pi} = \left(e^3 + \frac{e^2}{2} - 4\right)\left[e^{i\theta}\right]_0^{2\pi} = 0$

lo que confirma el teorema.

b) $f(z) = \text{sen}(2z) \Rightarrow f(z) = \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i} \Rightarrow I = \oint_{|z|=1} \left(\frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i}\right)dz$

De donde: $I = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \left(e^{i2e^{i\theta}} - e^{-i2e^{i\theta}}\right) i\,e^{i\theta}d\theta$ ..... (i)

Para calcular esta integral podemos hacer el cambio: $e^{i\theta} = u$, de donde:

$\left\{\begin{array}{l} ie^{i\theta}d\theta = du \\ \theta = 0 \Rightarrow u_1 = e^0 = 1 \\ \theta = 2\pi \Rightarrow u_2 = e^{i2\pi} = 1 \end{array}\right\}$ por lo que, sustituyendo en (i), se obtiene:

$I = \frac{1}{2i}\int_1^1 (e^{i2u} - e^{-i2u})du = 0$, lo que confirma el teorema.

c) $f(z) = \cosh(z+2) \Rightarrow f(z) = \frac{e^{(z+2)} + e^{-(z+2)}}{2} \Rightarrow I = \oint_{|z|=1} \left(\frac{e^{z+2} + e^{-(z+2)}}{2}\right)dz = 0$

De donde:

$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{\left(e^{i\theta}+2\right)} - e^{-\left(e^{i\theta}+2\right)}}{2}\right) ie^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(e^2 e^{e^{i\theta}} - e^{-2}e^{-e^{i\theta}}\right) ie^{i\theta}d\theta; \ldots\ldots (1)$

Para calcular esta integral podemos hacer el cambio: $e^{i\theta} = u$, de donde:

$\left\{\begin{array}{l} ie^{i\theta}d\theta = du \\ \theta = 0 \Rightarrow u_1 = e^0 = 1 \\ \theta = 2\pi \Rightarrow u_2 = e^{i2\pi} = 1 \end{array}\right\}$ por lo que, sustituyendo en (1), se obtiene:

$I = \frac{i}{2}\int_1^1 \left(e^2 e^u - e^{-22}e^{-u}\right)du = 0$, lo que confirma el teorema.

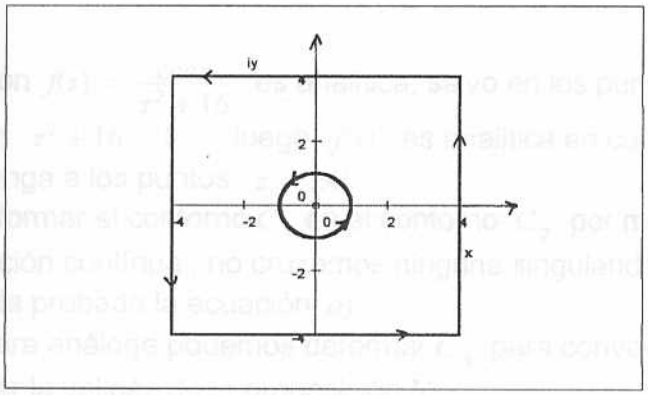
$= oo =$

Ejemplo 7

Calcule la integral $\oint_C f(z)dz$, donde $f(z) = \frac{1}{z}$. C es el contorno del cuadrado cuyos vértices son los puntos : $1 \pm 1i, -1 \pm 1i$.

Solución:

Obsérvese que no se puede usar el Teorema de Cauchy-Goursat pues $z_0 = 0$ es un punto singular de $f(z)$, interior a la curva de integración. Pero, $\frac{1}{z}$ es analítica sobre el cuadrado, sobre la circunferencia $|z| = 1$ y en todos los puntos que se encuentran entre estos dos contornos. En consecuencia, podemos aplicar el **Principio de Deformación de Contornos** y efectuar la integración usando la circunferencia $|z| = 1$ que se muestra en la figura, en lugar del cuadrado.



Así se obtiene: $\oint_C f(z)dz = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$

.

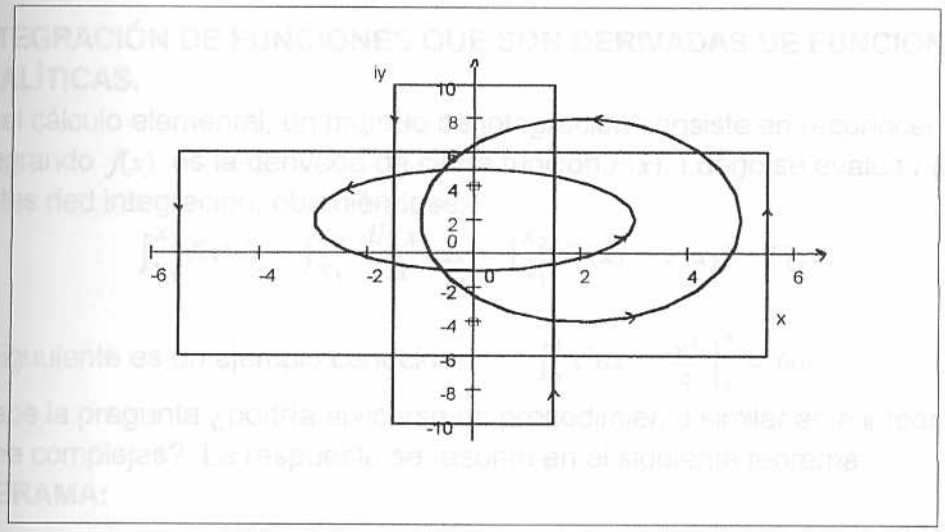
== oo ==

.

Ejemplo 8

Sea $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+16}$

Los contornos C_1, C_2, C_3, y C_4 se ilustran en la siguiente figura:



(Contornos C_1, C_2, C_3 y C_4)

Explique a qué se debe que son válidas las siguientes ecuaciones:

a) $\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$ *b)* $\oint_{C_3} f(z)dz = \oint_{C_4} f(z)dz$

c) $\oint_{C_1} f(z)dz \neq \oint_{C_3} f(z)dz$ *d)* $\oint_{C_1} f(z)dz \neq \oint_{C_4} f(z)dz$ *e)* $\oint_{C_2} f(z)dz \neq \oint_{C_3} f(z)dz$

f) $\oint_{C_2} f(z)dz \neq \oint_{C_4} f(z)dz$

Solución:

a) La función $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 16}$ es analitica, salvo en los puntos que satisfacen la ecuación $z^2 + 16 = 0$; luego $f(z)$ es analítica en cualquier región que no contenga a los puntos $z = \pm 4i$.
Al transformar el contorno C_1 en el contorno C_2 por medio de una deformación contínua , no cruzamos ninguna singularidad de $f(z)$.
Así queda probada la ecuación a).

b) De manera análoga podemos deformar C_3 para convertirlo en C_4 y demostrar la validéz de la proposición b).

c) Nótese que no podemos concluir que $\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_3} f(z)dz$, pues el dominio delimitado por C_1 contiene el punto singular $z_1 = 4i$, mientras que el dominio delimitado por C_3 contiene tanto a $z_1 = 4i$ como a $z_2 = -4i$, ambos puntos singulares de $f(z)$, por lo que queda demostrada la validéz de la proposición c).

Por razonamiento análogo se demuestra la validéz de las proposiciones d) y e).

$$= oo =$$

2.6) INTEGRACIÓN DE FUNCIONES QUE SON DERIVADAS DE FUNCIONES ANALÍTICAS.

En el cálculo elemental, un método de integración consiste en reconocer que el integrando $f(x)$ es la derivada de cierta función $F(x)$. Luego se evalúa $F(x)$ en los límites ded integración, obteniéndose:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF(x)}{dx}dx = \int_{x_1}^{x_2} dF(x) = F(x_2) - F(x_1)$$

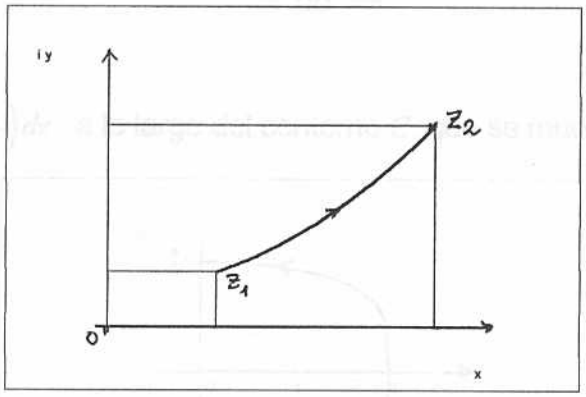
El siguuiente es un ejemplo conocido: $\int_2^4 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^4 = 60$

Caabe la pregunta ¿podría aplicarse un procedimiento similar ante integrales de línea complejas?. La respuesta se resume en el siguiente teorema:

TOERAMA:

* Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D, tal que $f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$ en D.

Entonces, si z_1 y z_2 son puntos de D, se verifica que: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$.
La integración puede efectuarse a lo largo de cualquier contorno C, que se extiende de z_1 a z_2.



(C: Trayectoria de Integración)

Demostración:
Sea $F(z)$ una función analítica en cierto dominio D y supongamos que $\frac{dF}{dz} = f(z)$ en D. Supongamos también que C es suceptible de ser parametrizada en la forma:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad \text{donde} \quad t_1 \le t \le t_2$$

y que $\frac{dz}{dt}$ existe en dicho intervalo.

Luego: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f\left[z(t) \right] \frac{dz}{dt} dt$ .....(1)

En el lado derecho de la ecuación (1) puede sustituirse : $f\left[z(t) \right]$ por $\frac{dF}{dz}$,

luego: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} dt$

Aplicando la Regla de la Cadena de la diferenciación. se observa que:

$$\frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

por lo tanto, $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} dF = F[z(t_2)] - F[z(t_1)] = F(z_2) - F(z_1)$

En conclusión: $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$

$$== \text{oo} ==$$

Ejemplo 9
Evaluar: $\int_{1+i}^{2+i2} z^3 dz$

Solución:
Como la primitiva $\frac{z^4}{4}$ es una función Entera (recuérdese que una función $f(z)$ es Entera cuando es analítica en todo punto del pano finito), no hace falta especificar

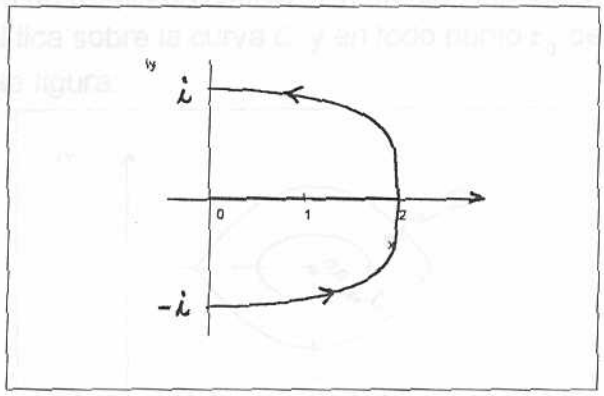
la trayectoria de integración en virtud delteorema anterior. Por lo tanto:

$$\int_{1+i}^{2+i2} z^3 dz = \int_{1+i}^{2+i2} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^4}{4}\right) = \frac{z^4}{4}\Big|_{1+i}^{2+i2} = \frac{1}{4}\left[(2+i2)^4 - (1+i)^4\right] = -15$$

$$== oo ==$$

Ejemplo 10

Evaluar: $\int_{-i}^{i} \left(\frac{1}{z}\right) dz$ a lo largo del contorno C que se muestra en la figura



Solución:

El contorno C forma parte del dominio de analiticidad de $F(z) = \frac{d}{dz}(\ln z)$,

por lo tanto: $\int_{-i}^{i} (\frac{1}{z}) dz = \ln z|_{-i}^{i} = [\ln|z| + i\arg z]_{-i}^{i}$

Pero: $\ln|i| = \ln|-i| = \ln(1) = 0$

por lo tanto: $\int_{-i}^{i} (\frac{1}{z}) dz = i\left[\ \arg(i) - \arg(-i)\ \right] = i[\frac{\pi}{2} + 2k\pi - (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)] = \pi i$

$$== oo ==$$

2.7) EJERCICIOS PROPUESTOS II

Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_0^{1+i} z^2 dz$ b) $\int_{2i}^{3i} (z+4)^2 dz$ c) $\int_i^{2i} (z^2-1) dz$ d) $\int_0^{1+i} (z^2+z^3) dz$

e) $\int_0^{\pi i} e^z dz$ f) $\int_{-2\pi i}^{2\pi i} e^{-\frac{z}{2}} dz$ g) $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz$ h) $\int_1^i z e^{z^2} dz$

i) $\int_{-i}^{i} sen\, z dz$ j) $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z dz$ k) $\int_{\pi}^{\pi i} sen\, 2z dz$ l) $\int_0^i senh(\pi z) dz$

m) $\int_{\pi i}^{0} \cosh 4z dz$ n) $\int_{-1}^{1} z\cosh z^2\, dz$ o) $\int_{\frac{\pi i}{6}}^{0} \cosh 3z\, dz$ p) $\int_{\pi i}^{0} z\cos z\, dz$

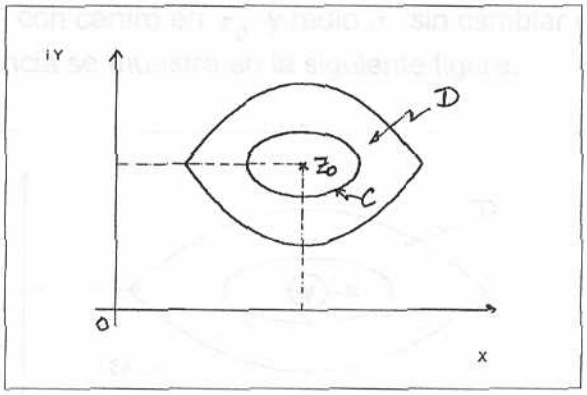
q) $\int_{-\pi i}^{\pi i} sen^2 z dz$ r) $\int_{-i}^{i} z\cosh z\, dz$ s) $\int_0^{\pi i} z\cosh z^2\, dz$ t) $\int_{1+i}^{1} z^3 e^{z^4}\, dz$

CAPÍTULO III

LA FÓRMULA DE LA INTEGRAL DE CUACHY

3.1) INTRODUCCIÓN

La consecuencia más importante del Teorema de la Integral de Cauchy, también conocido como Teorema de Cauchy - Goursat, es la **Fórmula de la Integral de Cauchy**. A partir de dicha fórmula, que enunciaremos en el siguiente teorema, se tiene un resultado curioso. En efecto, supongamos que $f(z)$ es una función analítica sobre la curva C y en todo punto z_0 del interior de C, como ilustra la siguiente figura:



(Dominio D y curva C / $C \subset D$)

Entonces, basta conocer los valores que toma $f(z)$ sobre C, para determinar $f(z)$ en cualquier punto z_0 del interior de C, es decir, $f(z_0)$. La Fórmula de la Integral de Cauchy que a continuación deduciremos, permite encontar $f(z_0)$. Esta fórmula y sus condiciones de validéz, se enuncian en el siguiente teorema:

3.2) TEOREMA: LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Teorema:

Sea $f(z)$ una función analitica en un Domino Simplemente Conexo D.
Entonces, para cualquier punto z_0 perteneciente a D y cualquier trayectória C en D que encierre a z_0, se tiene que:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0) \qquad \text{..... (1)}$$

Demostración:

Obviamente $f(z) = f(z_0) + \left[f(z) - f(z_0) \right]$, por lo tanto, para $z \neq z_0$, se tiene que:

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)} = \frac{f(z_0)}{(z-z_0)} + \frac{[f(z) - f(z_0)]}{(z-z_0)}, \qquad z \neq z_0$$

De donde,

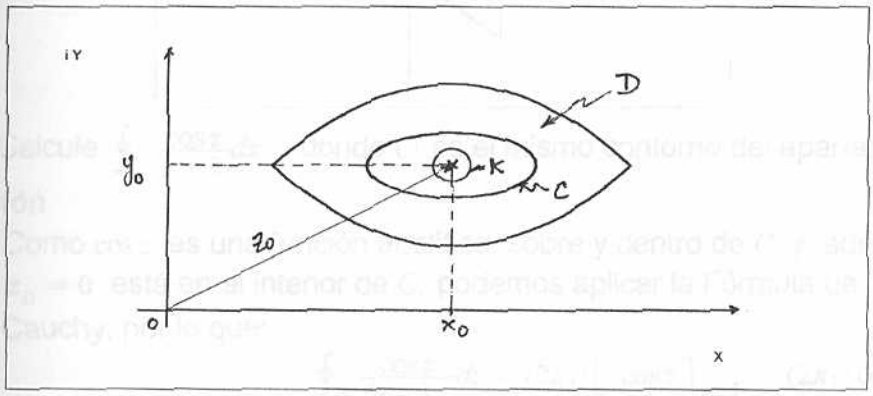
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = \oint_C \frac{f(z_0)}{(z-z_0)}dz + \oint_C \frac{[f(z) - f(z_0)]}{(z-z_0)}dz \qquad \text{..... (2)}$$

Pero, tal como ya se dedmostró en ejemplo precedente: $\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)} = 2\pi i$

por lo tanto: $f(z_0)\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)} = 2\pi i \cdot f(z_0)$

De aquí que la fórmula (1) se cumple siempre que la última integral en la expresión (2) sea nula, es decir, siempre que $\oint_C \frac{[f(z)-f(z_0)]}{(z-z_0)}dz = 0$

Para demostrar esta última igualdad recordemos que el integrando de esta integral es analítico en D , excepto en el punto z_0, por lo que, en virtud del Principio de Deformación de Contornos, puede reemplazarse C por una pequeña circunferencia K con centro en z_0 y radio ρ , sin cambiar el valor de la integral. Dicha circunferencia se muestra en la siguiente figura:



(Contorno C y circunferencia K)

Como $f(z)$ es nalítica en D, también es contínua, de aquí que dado un $\xi > 0$, puede hallarse un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(z)-f(z_0)| < \xi \ , \ \forall z \in |z-z_0| < \delta$$

Eligiendo el radio ρ de la circunferencia K menor que δ se tiene la igualdad:

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| < \frac{\xi}{\rho} \ , \text{ en cada punto de } K$$

Aplicando ahora el teorema que acota el valor absoluta de las integrales de línea complejas, conocido como *" Desigualdad ML"* , se obtiene:

$$\left|\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \le ML \ ; \left\{\begin{array}{l} M = \frac{\xi}{\rho} \\ L = 2\pi\rho \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\oint_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| < \frac{\xi}{\rho}(2\pi\rho) = 2\pi\xi$$

Como ξ se puede hacer arbitrariamente pequeño, se concluye que la última integral de la derecha de la expresión (2) tiende a cero, y queda demostrado así que:

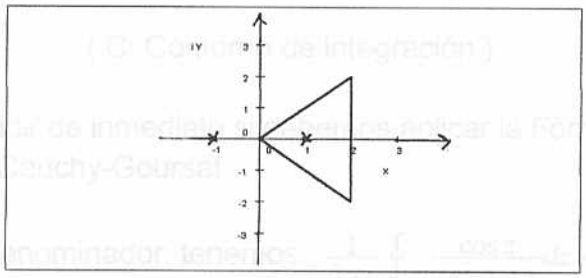
$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0)}$$

== oo ==

3.3) EJEMPLOS RESUELTOS

Ejemplo 1:

a) Calcule $\oint_C \frac{\cos z}{z-1}dz$, donde C es el contorno triangular mostrado a continuación, recorrido en sentido positivo:



b) Calcule $\oint_C \frac{\cos z}{z+1}dz$, donde C es el mismo contorno del apartado a)

Solución

a) Como $\cos z$ es una función analítica sobre y dentro de C y además, el punto $z_0 = 0$ está en el interior de C, podemos aplicar la Fórmula de la Integral de Cauchy, por lo que:

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)}dz = (2\pi i)\left[\ \cos z\ \right]_{z=1} = (2\pi i)\cos(1)$$

o también: $$\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)}dz = 3.3948i$$

b) El integrando puede expresarse en la forma : $\frac{\cos z}{z+1} = \frac{\cos z}{z-(-1)}$. Se observa ahora que el punto $z_0 = -1$ **no pertenece** al interior del contorno de integración, por lo tanto, **no podemos** usar la "Fórmula de la Integral de Cauchy ". Sin embargo, ya que $\frac{\cos z}{z+1}$ es analítica tanto sobre C como en todo punto de su interior, podemos aplicar el Teorema de Cauchy - Goursat y escribir en consecuencia :

será:

$$\oint_C \frac{\cos z}{z+1}dz = 0$$

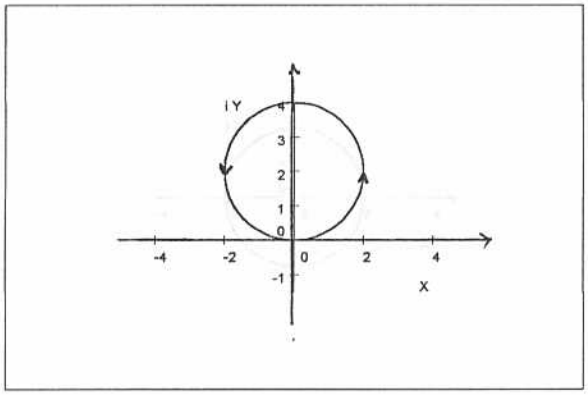
== oo ==

Ejemplo 2:

Calcule : $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{(z^2+1)}dz$, donde C es la circunferencia $\left|\, z-2i \,\right| = 2$

Solución:

El contorno de integracióin dado se muestra a continuación :



(C: Contorno de integración)

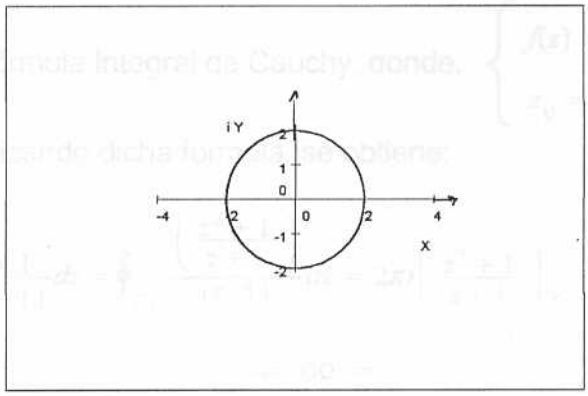
No podemos decidir de inmediato si debemos aplicar la Fórmula Integral de Cauchy o el Teorema de Cauchy-Goursat.

Factorizando el denominador, tenemos: $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{(z^2+1)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{(z+i)(z-i)}dz$

Observemos que el factor $(z-i)$ se anula dentro del contorno de integración (en $z=i$) y que $(z+i)$ no se anula ni sobre dicho contorno ni en su interior, es decir, la expresión $\frac{\cos z}{(z+i)}$ es analítica sobre y dentro de C, por lo que, escribiendo la integral anterior en la forma: $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\left(\frac{\cos z}{z+i}\right)}{(z-1)}dz$ se observa que podemos usar la Fórmula Integral de Cauchy $\left[\oint_C f(z)dz = 2\pi i f(z_0)\right]$ y escribir :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\left(\frac{\cos z}{z+i}\right)}{(z-1)}dz = \left(\frac{\cos z}{z+i}\right)_{z=i} = \frac{\cos(i)}{2i} = \frac{\cosh(1)}{2i} = -\frac{i}{2}\cosh(1) = -0.77154i$$

NOTA: Obsérvese que la Fórmula Integal de Cauchy no permite evaluar directamente integrales como $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^2+1}dz = \oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z+i)(z-i)}dz$ ya que, en este caso, el integrando tiene dos puntos singulares $(z=\pm i)$, ambos interiores al contorno de integración propuesto, como lo ilustra la siguiente figura:



(Contorno: $|z| = 2$)

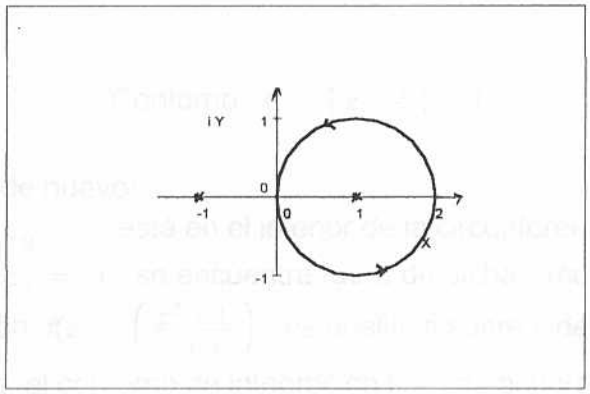
$$== oo ==$$

Ejemplo 3:

Calcule : $\oint_C \frac{z^2+1}{(z^2-1)}dz$, donde C es la circunferencia de radio unitario, con centro en: *a)* $z = 1$; *b)* $z = \frac{1}{2}$; *c)* $z = -1$; *d)* $z = i$; *e)* $z = 1 + i$

Solución:

a) El contorno de integración $C_1 : |z-1| = 1$ se muestra a continuación:



Contorno : $C_1 : |z-1| = 1$

Obsérvese que:

* El punto $z_0 = 1$ está en el interior de la circunferencia $C_1 : |z-1| = 1$
* El punto $z_1 = -1$ se encuentra fuera de la cirecunferencia $C_1 : |z-1| = 1$
* La función $f(z) = \left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)$ es analítica sobre y dentro de C_1.

En consecuencia, la integral bajo estudio, escrita en la forma:

$\oint_C \frac{z^2+1}{(z^2-1)}dz = \oint_C \frac{z^2+1}{(z+1)(z-1)}dz = \oint_C \frac{\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)}{(z-1)}dz$, es de la forma típica

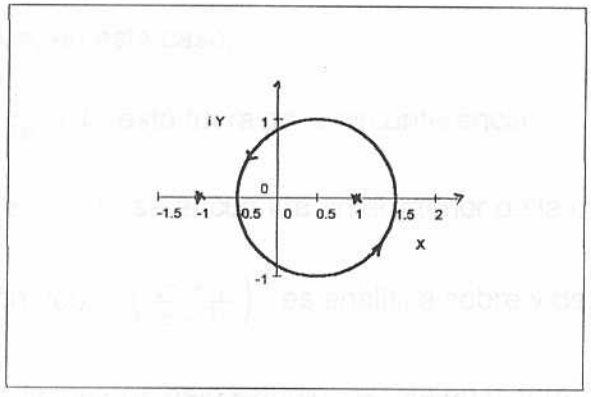
prevista en la Fórmula Integral de Cauchy, donde: $\begin{cases} f(z) = \left(\frac{z^2+1}{z+1}\right) \\ z_0 = 1 \end{cases}$

De aquí que, aplicando dicha fórmula, se obtiene:

$$\oint_C \frac{z^2+1}{(z^2-1)}dz = \oint_{C_1} \frac{\left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)}{(z-1)}dz = 2\pi i\left[\frac{z^2+1}{z+1}\right]_{z=1} = 2\pi i$$

$$= oo =$$

b) El contorno de integración $C_2 : \left|z-\frac{1}{2}\right| = 1$ se muestra a continuación:



Contorno : $C_2 : \left|z-\frac{1}{2}\right| = 1$

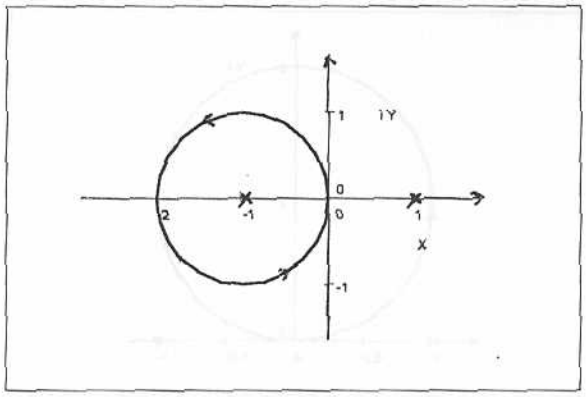
Obsérvese que, de nuevo:

* El punto $z_0 = 1$ está en el interior de la circunferencia $C_2 : \left|z-\frac{1}{2}\right| = 1$
* El punto $z_1 = -1$ se encuentra fuera de dicha circunferencia.
* La función $f(z) = \left(\frac{z^2+1}{z+1}\right)$ es analítica sobre y dentro de C_2.

En consecuencia, el contorno de integración C_2 , de acuerdo con el Principio de Deformación de Contornos antes enunciado, se puede transformar en forma contínua en el contorno C_1 del caso anterior, sin atravesar ningún punto singular de $f(z) = \frac{z^2+1}{z+1}$. En consecuencia, el resultado de la integral sobre C_2 es el mismo del del caso a) antes calculado; es decir: $\oint_{C_2} \frac{z^2+1}{(z^2-1)}dz = \oint_{C_1} \frac{z^2+1}{(z^2-1)}dz = 2\pi i$

$$= oo =$$

c) El contorno de integración $C_3 : \left|z+1\right| = 1$ se muestra a continuación:



Contorno $C_3 : \left| z+1 \right| = 1$

Obsérvese que, en este caso:

* El punto $z_0 = 1$ está fuera de la circunferencia $C_3 : \left| z+1 \right| = 1$
* El punto $z_1 = -1$ se encuentra en el interior de la circunferencia C_3
* La función $f(z) = \left(\frac{z^2+1}{z-1} \right)$ es analítica sobre y dentro de C_3.

En consecuencia, la integral bajo estudio, escrita en la forma:

$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = \oint_C \frac{z^2+1}{(z+1)(z-1)} dz = \oint_C \frac{\left(\frac{z^2+1}{z-1}\right)}{(z+1)} dz$, es de la forma típica prevista

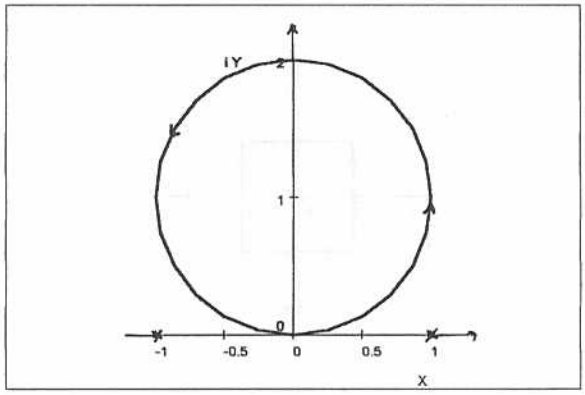
en la Formula Integral de Cauchy, donde: $\begin{cases} f(z) = \left(\frac{z^2+1}{z-1} \right) \\ z_0 = 1 \end{cases}$

De aquí que, aplicando dicha fórmula, se obtiene:

$$\oint_{C_1} \frac{z^2+1}{z^2-1} dz = d \oint_{C_1} \frac{\left(\frac{z^2+1}{z-1}\right)}{(z+1)} z = 2\pi i \left[\frac{z^2+1}{z-1} \right]_{z=-1} = -2\pi i$$

$$= \text{oo} =$$

d) El contorno de integración $C_4 : \left| z-i \right| = 1$ se muestra a continuación:



Contorno $C_4 : \left| z-i \right| = 1$

Obsérvese que, en este caso

* Los puntos $z = \pm 1$ están fuera de la circunferencia $C_4 : \left| z-i \right| = 1$
* La función $f(z) = \left(\frac{z^2+1}{z^2-1} \right)$ es analítica sobre y dentro de C_4.

En consecuencia, la función dada es analítica en todo punto en el interior de la circunferencia de integración (C_4) y sobre ella. De aquí que, por el Teorema de Cauchy - Gourast, la integral dada tiene el valor cero,es decir:

$$\oint_{C_4} \frac{z^2+1}{(z^2-1)} dz = 0$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 4

Evalúe las siguientes integrales: $\begin{cases} I_1 = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz \\ I_2 = \oint_C \frac{1}{z(z^2+4)} dz \end{cases}$

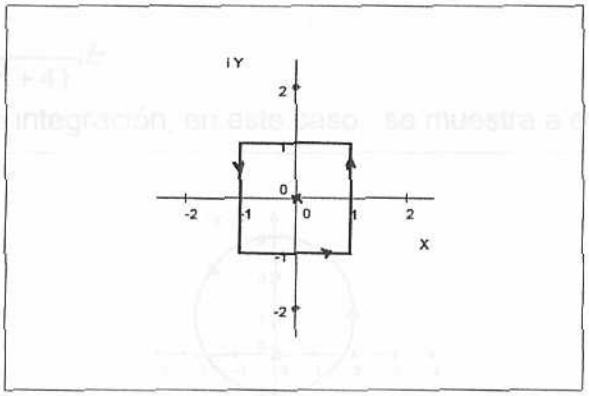
donde C es:

a) El cuadrado de vértices : $1 \pm i, -1 \pm i$.
b) La circunferencia: $\left| z-i \right| = 2$
c) La circunferencia: $\left| z-i \right| = \frac{1}{2}$
d) La circunferencia: $\left| z+1 \right| = \frac{1}{2}$
e) La circunferencia: $\left| z+3i \right| = 2$

Solución Caso I:

$$I_1 = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz$$

a) La curva de integración se muestra a continuación:



(Contorno de Integración C)

El integrando $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2+4)}$ tiene los siguientes puntos singulares:

$z_1 = 0$ (Punto singular de orden $n = 2$) ; $z_2 = 2i$; $z_3 = -2i$

Luego:
- $z_1 = 0$ es interior a la curva C, por lo tanto, no se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat. Además,
- $z_1 = 0$ es un polo de orden 2 , por lo que tampoco se puede aplicar la Fórmula Integral de Cauchy.

En consecuencia, tenemos dos (2) vías de solución:

1ª) Calculando la Integral de Línea : $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$

donde $\int_{C_1}, \int_{C_2}, \int_{C_3}$ y $\int_{C_4}$ son las respectivas integrales de línea sobre cada uno de los correspondientes lados de cuadrado dado.

Este cálculo se omite por haberse ya realizado previamente, uno similar.

2ª) Aplicando el Principio de Deformación de Contornos, podemos transformar el cuadrado dado en la circunferencia $|z| = 1$,

obteniéndose: $\left\{ \begin{array}{l} z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = ie^{i\theta} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \dfrac{ie^{i\theta}}{e^{i2\theta}(e^{i2\theta}+4)} d\theta$

Para resolver esta integral, hagamos el cambio ya conocido:

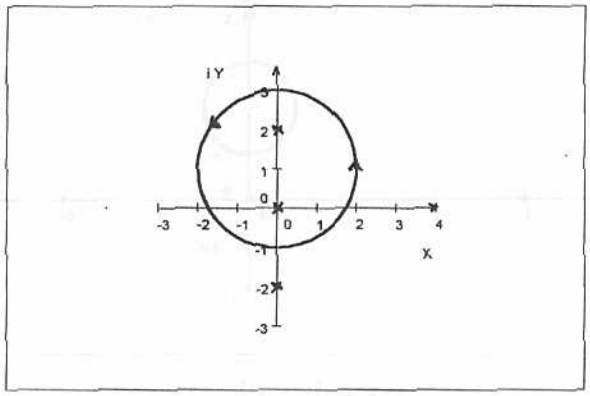
$\left\{ \begin{array}{l} e^{i\theta} = u \Rightarrow ie^{i\theta} d\theta = du \\ \theta = 0 \Rightarrow u_1 = 1 \\ \theta = 2\pi \Rightarrow u_2 = e^{i2\pi} = 1 \end{array} \right\}$, por lo tanto: $I = \int_1^1 f(u)du = 0$

NOTA: De nuevo, este resulatdo comprueba que la analiticidad de una función sobre una curva C y en todo punto interior a la misma, es condición suficiente para que $\oint_C f(z)dz = 0$, mas no es necesaria.

== oo ==

b) $I = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz$

La curva de integración, en este caso, se muestra a continuación:



$$C : |z - i| = 2$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & \text{es un Polo de Orden 2, interior a } C \\ z = 2i & \text{es un Polo de Orden 1, interior a } C \\ z = -2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \end{cases}$$

Por lo tanto

* No se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat, pues $f(z)$ no es analítica en el interior de C.
* Tampoco se puede aplicar la Fórmula Integral de Cauchy, por ser $z = 0$ un polo de orden 2.

En consecuencia, es necesario calcular la integral de línea $I = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz$ para lo cual podemos descomponer a $f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)}$ en fracciones simples,

obteniéndose: $f(z) = \frac{A}{z^2} + \frac{B}{z} + \frac{C}{(z+2i)} + \frac{D}{(z-2i)} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = 0 \\ C = -\frac{i}{16} \\ D = \frac{i}{16} \end{cases}$

Por lo tanto $I = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz = \frac{1}{4} \oint_C \frac{1}{z^2} dz - \frac{i}{16} \oint_C \frac{1}{(z+2i)} dz + \frac{i}{16} \oint_C \frac{1}{(z-2i)} dz$

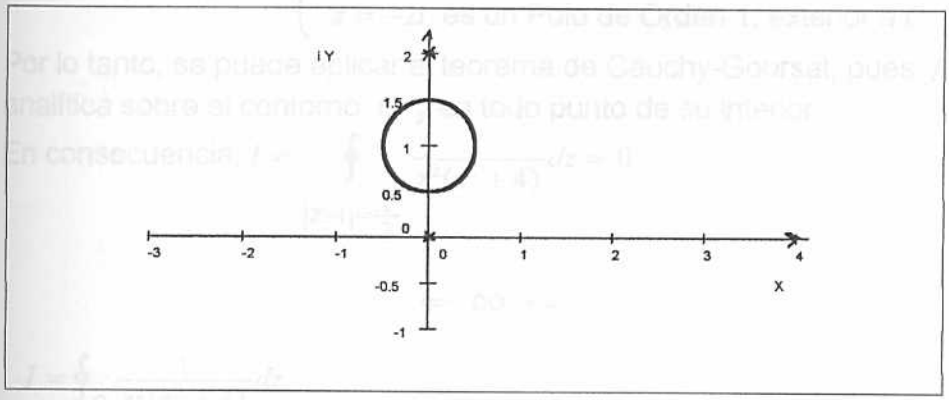
Evidentemente $I = I_1 + I_2 + I_3$,

en donde : $\left\{ \begin{array}{l} I_1 = 0, \text{ por ser } n = 2 \neq 1 \\ I_2 = -\frac{i}{16}(2\pi i) \\ I_3 = \frac{i}{16}(2\pi i) \end{array} \right\}$, por lo que :

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz = 0$$

c) $I = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz$

La curva de integración se muestra a continuación:



$$C : \left| z - i \right| = 1/2$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & \text{es un Polo de Orden 2, exterior a } C \\ z = 2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \\ z = -2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \end{cases}$$

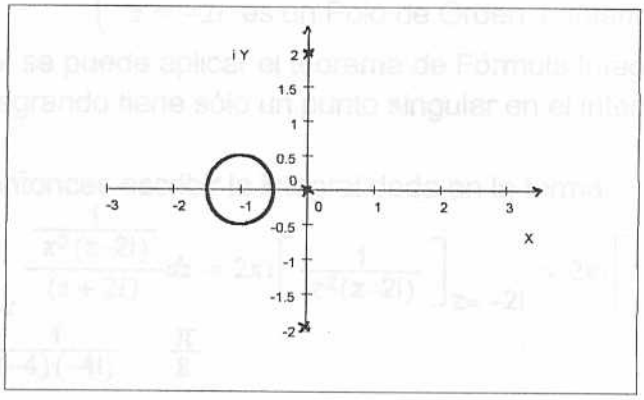
Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat, pues $f(z)$ es analítica sobre el contorno C y en todo punto de su interior.

En consecuencia, $I = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz = 0$

== oo ==

d) $I = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz$

La curva de integración se muestra a continuación:



$$C : \left| z + 1 \right| = 1/2$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & \text{es un Polo de Orden 2, exterior a } C \\ z = 2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \\ z = -2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \end{cases}$$

Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat, pues $f(z)$ es analítica sobre el contorno C y en todo punto de su interior.

En consecuencia, $I = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz = 0$

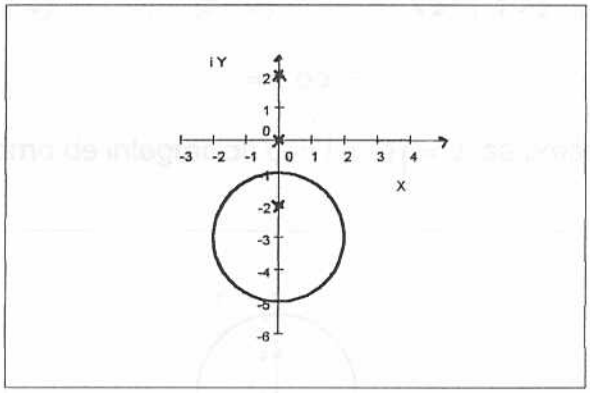
$$\therefore$$

$$== \text{oo} ==$$

$$\therefore$$

e) $I = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+4)} dz$

La curva de integración se muestra a continuación:



$$C : \left| z+3i \right| = 2$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & \text{es un Polo de Orden 2, exterior a } C \\ z = 2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \\ z = -2i & \text{es un Polo de Orden 1, interior a } C \end{cases}$$

Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Fórmula Integral deCauchy, pues el integrando tiene sólo un punto singular en el interior de C, de orden 1.

Podemos entonces escribir la integral dada en la forma:

$$I = \oint_{|z+3i|=2} \frac{\frac{1}{z^2(z-2i)}}{(z+2i)} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{z^2(z-2i)} \right]_{z=-2i} = 2\pi i \left[\frac{1}{(-2i)^2(-2i-2i)} \right] \Rightarrow$$

$$I = 2\pi i \frac{1}{(-4)(-4i)} = \frac{\pi}{8}$$

$$\therefore$$

$$== \text{oo} ==$$

$$\therefore$$

Solución Caso II: $I = \oint_C \frac{1}{z(z^2+4)} dz$

a) C es el cuadrado de vèrtices : $1 \pm i, \ -1 \pm i$ antes mostrado.

El integrando $f(z) = \frac{1}{z(z^2+4)}$ tiene los siguientes puntos singulares:

$z_1 = 0$ (Punto singular simple o de orden $n = 1$) ; $z_2 = 2i$ y $z_3 = -2i$

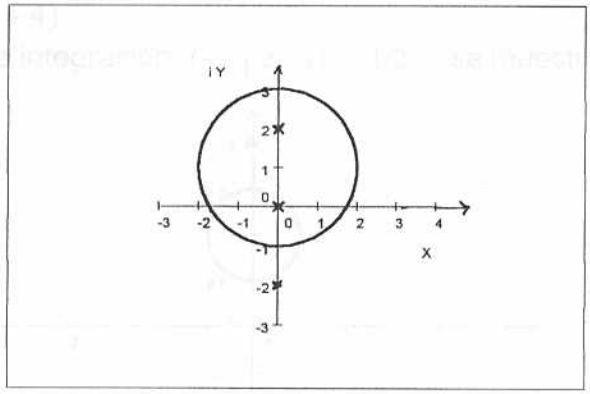
Luego:
- $z_1 = 0$ es interior a la curva C, por lo tanto, no se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat.
- $z_2 = 2i$ y $z_3 = -2i$ son exteriores a la curva C de integración, por lo que puede aplicarse la Fórmula Integral de Cauchy.

Por lo tanto:

$$I = \oint_C \frac{1}{z(z^2+4)} dz = \oint_C \frac{\left(\frac{1}{z^2+4}\right)}{(z-0)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z^2+4}\right)_{z=0} = \frac{\pi i}{2}$$

$$= \text{oo} =$$

b) El contorno de integración $C : \left| z - i \right| = 2$ se presenta a continuación:



$$C : \left| z - i \right| = 2$$

$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)} \Rightarrow$
- $z = 0$ es un Polo de Orden 1, interior a C
- $z = 2i$ es un Polo de Orden 1, interior a C
- $z = -2i$ es un Polo de Orden 1, exterior a C

Por lo tanto

* No se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat, pues $f(z)$ no es analítica en el interior a C.

* Tampoco se puede aplicar la Fórmula Integral de Cauchy, pues en el interior de C existen dos (2) puntos singulares

En consecuencia, es necesario calcular la integral de línea $I = \oint_C \frac{1}{z(z^2+4)} dz$

para lo cual podemos descomponer a $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)}$ en fracciones simples,

obteniéndose: $f(z) = \frac{A}{Z} + \frac{B}{Z+2i} + \frac{C}{Z-2i} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{16} \\ B = -\frac{1}{32} \\ C = -\frac{1}{32} \end{cases}$

Por lo tanto:

$$I = \oint_C \frac{1}{z(z^2+4)}dz = \frac{1}{16}\oint_C \frac{1}{Z}dz - \frac{1}{32}\oint_C \frac{1}{Z+2i}dz - \frac{1}{32}\oint_C \frac{1}{Z-2i}dz \quad \ldots\ldots (1)$$

Evidentemente $I = I_1 + I_2 + I_3$,

en donde : $\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{1}{16}2\pi i = \frac{\pi i}{8}, \text{ por ser } n = 1 \\ I_2 = -\frac{1}{32}(2\pi i) \\ I_3 = -\frac{1}{16}(2\pi i) \end{array} \right\}$,

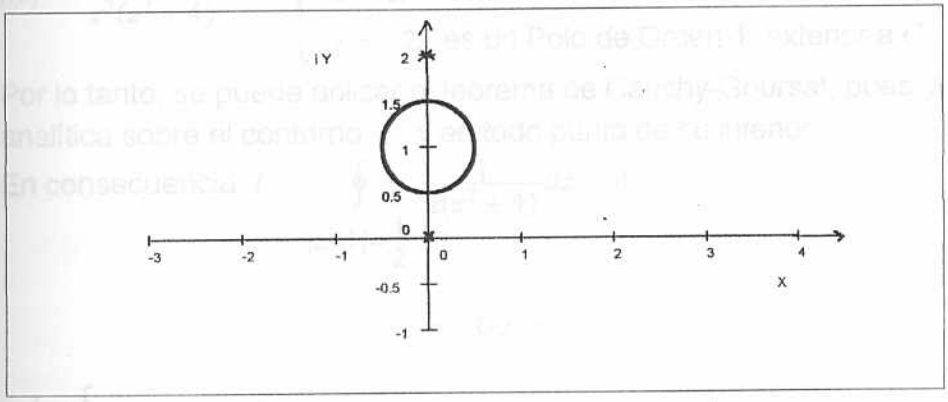
por lo que, sustituyendo en (1) se obtiene:

$$\oint_{|Z-i|=2} \frac{1}{z(z^2+4)}dz = \frac{\pi i}{8} - 2\left(-\frac{1}{16}(2\pi i)\right) = \frac{3}{8}i\pi$$

== oo ==

c) $I = \oint_C \dfrac{1}{z(z^2+4)}dz$

La curva de integración $C : |z-i| = 1/2$, se muestra a continuación:



$$C : |z-i| = 1/2$$

$f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \\ z = 2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \\ z = -2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \end{cases}$

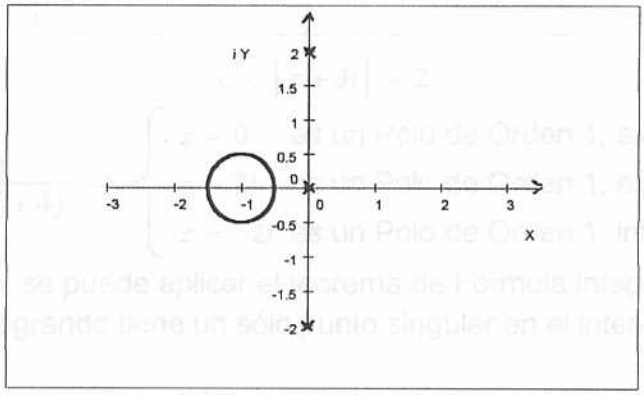
Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat, pues $f(z)$ es analítica sobre el contorno C y en todo punto de su interior.

En consecuencia, $I = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^2(z^2+4)}dz = 0$

== oo ==

d) $I = \oint_C \frac{1}{z(z^2+4)}dz$

La curva de integración $C : |z+1| = 1/2$, se grafica a continuación:



$$C : |z+1| = 1/2$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \\ z = 2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \\ z = -2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \end{cases}$$

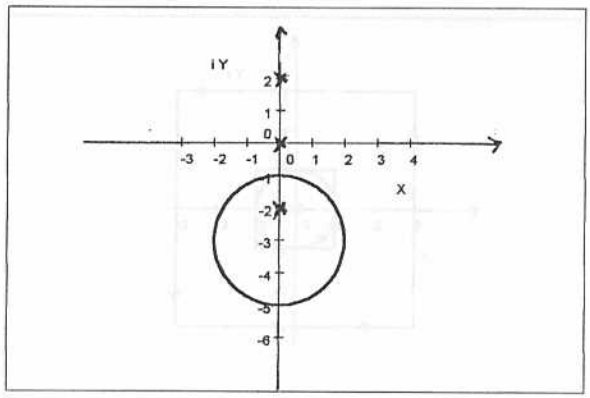
Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Cauchy-Goursat, pues $f(z)$ es analítica sobre el contorno C y en todo punto de su interior.

En consecuencia, $I = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+4)}dz = 0$

== oo ==

e) $I = \oint_C \frac{1}{z(z^2+4)}dz$

La curva de integración $C : |z+3i| = 2$, se muestra a continuación:



$$C: \left| z+3i \right| = 2$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \\ z = 2i & \text{es un Polo de Orden 1, exterior a } C \\ z = -2i & \text{es un Polo de Orden 1, interior a } C \end{cases}$$

Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de Fórmula Integral deCauchy, pues el integrando tiene un sólo punto singular en el interior de C, de orden 1.

Podemos entonces escribir la integral dada en la forma:

$$I = \oint_{|z+3i|=2} \frac{\frac{1}{z(z-2i)}}{(z+2i)} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{z(z-2i)} \right]_{Z=-2i} = 2\pi i \left[\frac{1}{(-2i)(-2i-2i)} \right] \Rightarrow$$

$$I = 2\pi i \frac{1}{(-2i)(-4i)} = -i\frac{\pi}{4}$$

.

== oo ==

.

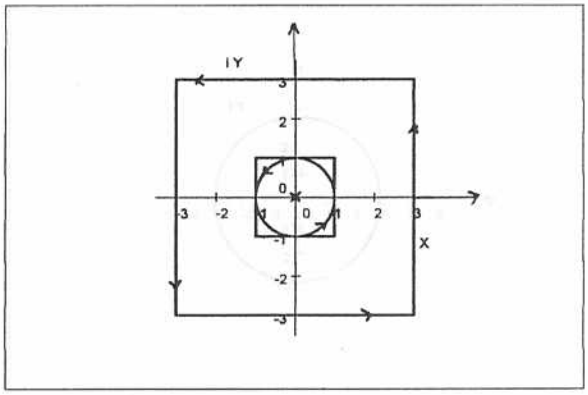
Ejemplo 5

Calcule el valor de la siguiente integral: $I = \oint_C \frac{2\text{senh}^2(z) + 3\cosh(3z)}{z} dz$

donde C es una curva cerrada y simple que contiene al punto $z = 0$ en su interior. La integral a lo largo de C se lleva a efecto en el sentido positivo.

Solución:

Se muestran a continuación, en virtud del Principio de Deformación de Contornos, varias opciones para el contorno de integración C especificado:



(Contorno de Integración C_j)

La función $F(z) = 2senh^2(z) + 3\cosh(3z)$ es analítica **sobre** cualquier C_j. Además, el integrando tiene un polo simple en $z = 0$, por lo tanto, aplicando la Fórmula Integral de Cauchy se obtiene:

$$I = \oint_C \frac{2senh^2(z) + 3\cosh(3z)}{z} dz = 2\pi i\left[\, 2senh^2(z) + 3\cosh(3z) \,\right]_{z=0} = 2\pi i[0 + 3(1)] = 6\pi i$$

.

== oo ==

.

Ejemplo 6

Hállese el valor de : $I = \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)} dz$, si C es la curva recorrida en sentido positivo, definida por : a) $|z - i| = 1$ b) $|z + i| = 1$ c) $|z| = 2$ d) $|z - 2| = 2$

e) Cuadrado de vértices en : $\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$, $-\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}$

f) Calcule una cota superior para el valor absoluto de la integral sobre el cuadrado de vértices en : $3 \pm 3i$, $-3 \pm 3i$

Nota: La solución de este ejemplo se deja al interesado.

.

== oo ==

.

Ejemplo 7

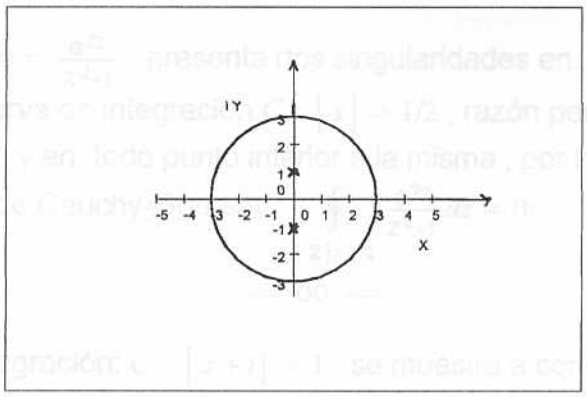
a) Obtenga una cota superior para el valor absoluto de la integral: $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz$, tomada alrededor de la circunferencia: $|z| = 3$

b) ¿Cuál es el valor de esta ontegral si la trayectoria de integración es la circunferencia $|z| = 1/2$?

c) ¿Cuál es el valor de esta ontegral si la trayectoria de integración es la circunferencia $|z + i| = 1$?

Solución:

a) El contorno de integración se muestra a continuación:



(Contorno $C : |z| = 3$)

El integrando $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2+1}$ presenta dos singularidades en $z = \pm i$, ambas interiores a la curva de integración $C : |z| = 3$, razón por la cual no se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat ni tampoco la Fórmula Integral de Cauchy. Dado este inconveniente, hallaremos una cota superior del valor absoluto de da la integral planteada, usando para ello la Desigualdad ML.

A tal efecto, $C : |z| = 3 \Rightarrow z = 3e^{i\theta}$ de donde: $\begin{cases} e^{2z} = e^{2\left(3e^{i\theta}\right)} = e^{6e^{i\theta}} \\ z^2 + 1 = (3e^{i\theta})^2 + 1 = 9e^{i2\theta} + 1 \end{cases}$

Por lo tanto:

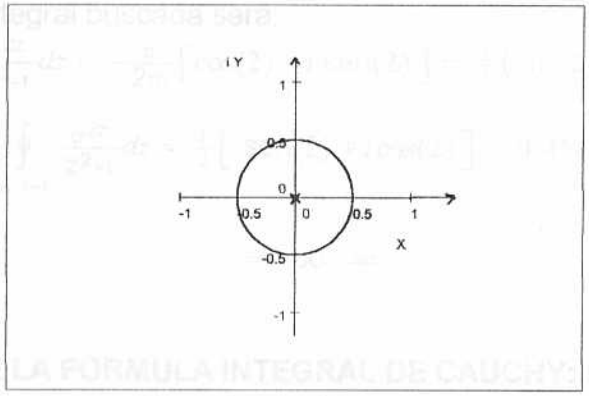
$$|f(z)| = \left|\frac{e^{2z}}{z^2+1}\right| = \frac{|e^{2z}|}{|z^2+1|} = \frac{\left|e^{6e^{i\theta}}\right|}{\left|9e^{i2\theta}+1\right|} \leq \frac{\left|e^{6e^{i\theta}}\right|}{\left|9e^{i2\theta}\right|} = \frac{e^6}{9}$$

Es decir : $M = \frac{e^6}{9}$

Además, $L = 2\pi R = 2\pi(3) = 6\pi$

En consecuencia: $\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{2z}}{z^2+1}dz\right| \leq \frac{ML}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^6}{9} \cdot 6\pi = \frac{1}{3}e^6$

b) El contorno de integración se muestra a continuación:

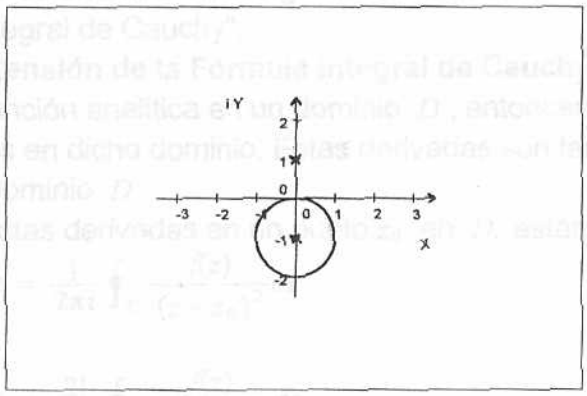


Contorno $C : |z| = 1/2$

El integrando $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2+1}$ presenta dos singularidades en $z = \pm i$, ambas exteriores a la curva de integración $C : |z| = 1/2$, razón por la cual $f(z)$ es analítica sobre C y en todo punto interior a la misma, por lo que, de acuerdo con el Teorema de Cauchy-Goursat, $\oint_{|z|=1/2} \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz = 0$

$$= \text{oo} =$$

c) El contorno de integración: $C : |z+i| = 1$, se muestra a continuación:



(Contorno $C : |z+i| = 1$)

El integrando $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^2+1}$ presenta dos singularidades; una en $z = i$, exterior a la curva de integración C dada y otra en $z = -i$, interior a C, por lo tanto, de acuerdo con la Fórmula Integral de Cauchy

$$\oint_{|z+i|=1} \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz = \oint_{|z+i|=1} \frac{e^{2z}}{(z+i)(z-i)} dz = \oint_{|z+i|=1} \frac{\left(\frac{e^{2z}}{z-i}\right)}{(z+i)} dz = 2\pi i \left(\frac{e^{2z}}{z-i}\right)_{z=-i} = 2\pi i \left(\frac{e^{-2i}}{-2i}\right) \Rightarrow$$

$$\oint_{|z+i|=1} \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz = -\pi e^{-2i}$$

Por lo tanto, la integral buscada será:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+i|=1} \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz = -\frac{\pi}{2\pi i}\left[\cos(2) - i\,\text{sen}(2)\right] = \frac{i}{2}\left(\cos(2) - i\,\text{sen}(2)\right)$$

Es decir : $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+i|=1} \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(2) + i\cos(2)\right] = 0.45465 - 0.20807i$

$$= \text{oo} =$$

3.4) EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY: Las derivadas de de orden superior de una función analítica.

A partir de la hipótesis de que una función real de variable real es derivable una

vez, nada se concluye acerca de la existencia de derivadas de orden superior para dicha función.

Por ejemplo , la función $f(x) = x^{7/3}$ tiene primera y segunda derivada contínua en el punto $x = 0$, sin embargo, no tiene derivada de tercer orden en dicho punto.

Ahora se verá que, a partir de la hipótesis de que una función de variable compleja tiene una primera derivada en un dominio D , se concluye la existencia de las derivadas de todos los órdenes en D, en dicho punto. Esto significa que, sobre este particular, las funciones analíticas complejas se comportan mucho más simplemente que las funciones reales que son diferenciables una vez.

Lo aquí expuesto se enuncia en el siguiente teorema, conocido como: "Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy".

TEOREMA: "Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy".

Si $f(z)$ es una función analítica en un dominio D , entonces posee derivadas de todos los órdenes en dicho dominio. Estas derivadas son también funciones analíticas en el dominio D .

Los valores de estas derivadas en un punto z_0 en D, están dadas por la fórmulas:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

$$\vdots$$

$$f^{(n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad \text{.....(1)}$$

donde: $\begin{cases} n = 0, 1, 2, 3..... \\ C = \text{ Contorno Cerrado Simple en } D, \text{recorrido en sentido positivo} \\ z_0 = \text{ punto interior a } C \end{cases}$

Osérvese que si interpretamos $f^{(0}(z_0)$ como $f(z_0)$ y $0! = 1$, la ecuación (1) se reduce a la Fórmula Integral de Cauchy para $f(z_0)$.

Demostración:

Partiendo de la Fórmula Integral de Cauchy, se tiene que:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0)..... (1)$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (1), se obtiene:

$$\oint_C \frac{f'(z)(z-z_0) - f(z)}{(z-z_0)^2}dz = 0 \ ,$$

de donde : $\oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)}dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)}dz$ ...(2)

Pero, aplicando de nuevo la Fórmula Integral de Cauchy al lado derecho de la

ecuación (2), obtenemos:

$\oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)} dz = 2\pi i f'(z_0)$; sustituyendo en (2) se obtiene: $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = 2\pi i f'(z_0)$

Obsérvese que este resultado puede escribirse en la forma convencional:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{d}{dz} f(z)\right]_{z=z_0} \quad \text{.....(3)}$$

Análogamente, si derivamos ambos miembros de la igualdad (3) obtenemos:

$$\oint_C \frac{f'(z)(z-z_0)^2 - 2(z-z_0) f(z)}{(z-z_0)^4} dz = 0 \ ,$$

de donde :

$$\oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)^2} dz - 2\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz = \frac{1}{2}\oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)^2} dz \quad \text{...(4)}$$

Pero, aplicando al lado derecho de la ecuación (4), el resultado expresado por la ecuación (3) arriba obtenido, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\oint_C \frac{f'(z)}{(z-z_0)^2} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{d}{dz} f'(z)\right]_{z=z_0} ;$$

sustituyendo en (4) se obtiene : $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz = \frac{\pi i}{2!}\left[\frac{d}{dz} f'(z_0)\right]$

Obsérvese que este resultado puede escribirse en la forma convencional:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2} f(z)\right]_{z=z_0} \quad \text{.....(5)}$$

En forma análoga se obtiene:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!}\left[\frac{d^3}{dz^3} f(z)\right]_{z=z_0} \quad \text{.....(6)}$$

y en general, para todo n entero y positivo:

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left[\frac{d^{(n-1}}{dz^{n-1}} f(z)\right]_{z=z_0}} \quad \text{.....(7)}$$

Nótese que si interpretamos $f^{(0)}(z_0)$ como $f(z)$ y $0! = 1$, la ecuación (7) aquí deducida contiene la Fórmula Integral de Cauchy(es el caso $n = 1$).

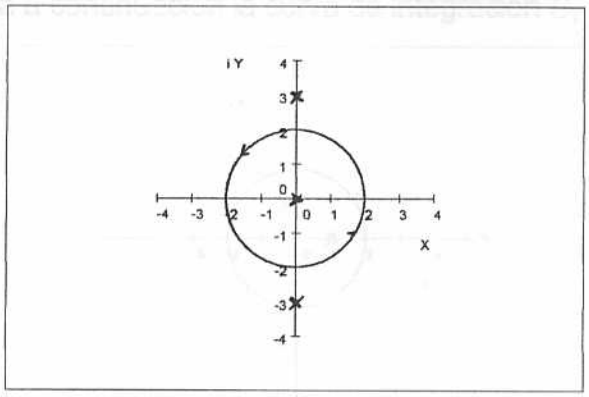
== oo ==

Ejemplo 8:

Determine el valor de $I = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+9)} dz$, donde $C : |z = 2|$.

Solución

Se muestra a continuación la curva de integración C



(Contorno de Integración : $|z| = 2$)

$$g(z) = \frac{1}{z^2(z^2+9)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{(z^2+9)} \text{ es analítica sobre } C \text{ y en todo punto nterior a } C. \\ z_0 = 0 \text{ es una singularida de } g(z) \text{ de orden } 2 \end{cases}$$

Luego, aplicando la Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy, se obtiene:

$$I = \oint_C \frac{\frac{1}{(z^2+9)}}{z^2} dz \Rightarrow \begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{(z^2+9)} \\ n+1 = 2 \Rightarrow n = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto: $\frac{1!}{2\pi i} \oint_C \frac{\frac{1}{(z^2+9)}}{z^2} dz = f'(z_0) \Rightarrow \oint_C \frac{\frac{1}{(z^2+9)}}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(z_0)$; .... (1)

Además, $f(z) = \frac{1}{(z^2+9)} \Rightarrow f'(z) = -\frac{2z}{(z^2+9)^2} \Rightarrow f'(0) = 0$

En consecuencia, sustituyendo este resultado en (1), se obtiene:

$$I = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+9)} dz = \frac{2\pi i}{1!}(0) = 0$$

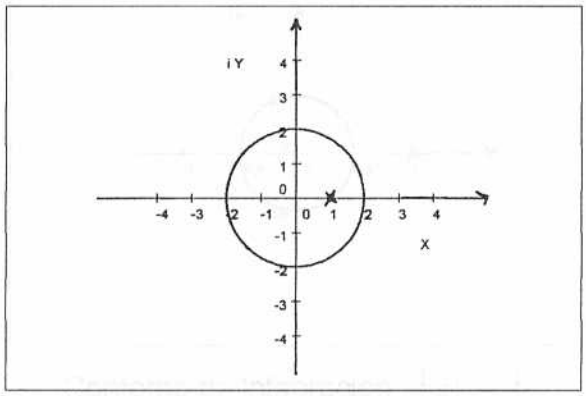
== oo ==

Ejemplo 9:

Determine el valor de $I = \oint_C \frac{(z^3+2z+1)}{(z-1)^3} dz$, donde C es el contorno definido por : $\begin{cases} a) \ |z| = 2 \\ b) \ |z| = \frac{1}{2} \end{cases}$

Solución

a) Se muestrta a continuación la curva de integración $C_1 : |z| = 2$



(Contorno de Integración : $|z| = 2$)

$$g(z) = \frac{(z^3 + 2z + 1)}{(z-1)^3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(z) = z^3 + 2z + 1 \text{ es analítica sobre } C \text{ y en todo punto nterior a } C. \\ z_0 = 1 \text{ es una singularida de } g(z) \text{ de orden } 3 \end{cases}$$

Luego, aplicando la Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy, se obtiene:

$$I = \oint_C \frac{(z^3 + 2z + 1)}{(z-1)^3} dz \Rightarrow \begin{cases} f(z) = z^3 + 2z + 1 \\ n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2 \\ z_0 = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^3 + 2z + 1)}{(z-1)^3} dz = f''(z_0) \Rightarrow \oint_C \frac{(z^3 + 2z + 1)}{(z-1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(z_0) = \pi i f''(z_0) \; ; \ldots . (1)$$

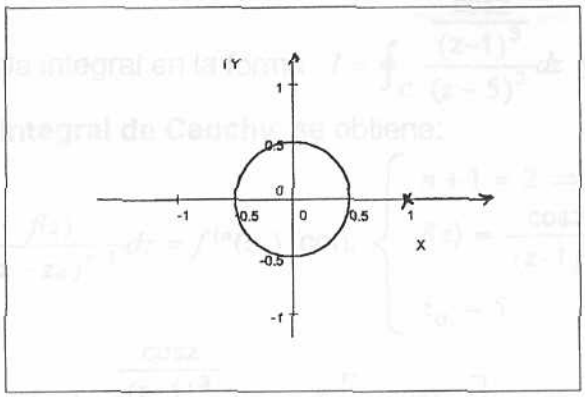
Además, $f(z) = (z^3 + 2z + 1) \Rightarrow f'(z) = 3z^2 + 2 \Rightarrow f''(z) = 6z \Rightarrow f''(1) = 6$

En consecuencia, sustituyendo este resultado en (1), se obtiene:

$$I = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2 + 9)} dz = \pi i(6) = 6\pi i$$

$$== \text{oo} ==$$

b) Se muestra a continuación la curva de integración $C_2 : |z| = 1/2$



Contorno de Integración : $\left| z \right| = \frac{1}{2}$

En este caso, el integrando $g(z) = \dfrac{(z^3 + 2z + 1)}{(z-1)^3}$ es analítico tanto a lo largo del contorno $\left| z \right| = \frac{1}{2}$ como en todo puto interior al mismo; en consecuencia, podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat y escribir: $I = \oint_{|z|=1/2} \dfrac{(z^3 + 2z + 1)}{(z-1)^3} dz = 0$

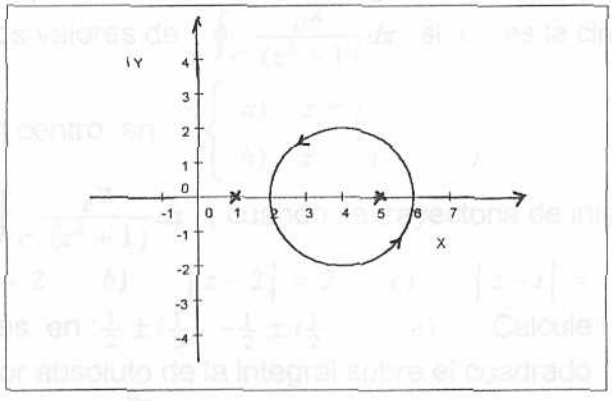
$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 10:

Determine el valor de $I = \oint_C \dfrac{\cos z}{(z-1)^3 (z-5)^2} dz$, donde C es el contorno defjnido por : $\left| z - 4 \right| = 2$.

Solución:

Se muestra a continuación la curva de integración C



(Contorno de Integración : $\left| z - 4 \right| = 2$)

Examinemos los factores del denominador. El término $(z-1)^3$ es distinto de cero tanto en el interior del contorno de integración como en su circunferencia. Sin embargo, $(z-5)^2$ se anula en el punto $z = 5$ del interior de C. Por lo tanto,

podemos escribir la integral en la forma: $I = \oint_C \frac{\frac{\cos z}{(z-1)^3}}{(z-5)^2} dz$ y aplicando la

Extensión de la Integral de Cauchy, se obtiene:

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = f^{(n}(z_0) \text{ con: } \begin{cases} n+1=2 \Rightarrow n=1 \\ f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-1)^3} \\ z_0 = 5 \end{cases}$$

Por lo tanto: $I = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\frac{\cos z}{(z-1)^3}}{(z-5)^2} dz = \frac{d}{dz}\left[\frac{\cos z}{(z-1)^3}\right]_{z=5} = \frac{-(z-1)\operatorname{sen}(z) - 3\cos(z)}{(z-1)^4}$

De donde:

$$\oint_C \frac{\frac{\cos z}{(z-1)^3}}{(z-5)^2} dz = 2\pi i\left(\frac{-4\operatorname{sen}(5) - 3\cos(5)}{4^4}\right) = -0.02607\pi i$$

== oo ==

3.5) EJERCICIOS PROPUESTOS I

En todos los ejercicios propuestos, salvo indicación en contrario, se asumirá que el sentido de recorrido es el positivo.

1) Evalúe la Integral $I = \oint_C \frac{9z^2 - iz + 4}{z(z^2+1)} dz$, donde C es la curva $|z| = 2$

2) Evalúe las integrales : $a)$ $I = \oint_C \frac{1}{z^2(z^2+9)} dz$ $b)$ $I = \oint_C \frac{1}{z(z^2+9)} dz$

cuando la trayectoria de integración C, es :

$a)$ $|z-i| = 2$ $b)$ $|z-i| = \frac{1}{2}$ $c)$ $|z+1| = \frac{1}{2}$

3) Hállense los valores de $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)} dz$ si C es la circunferencia de radio unidad con centro en : $\begin{cases} a) & z = i \\ b) & z = -i \end{cases}$

4) Evalúe : $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)} dz$, cuando la trayectoria de integración C es :

$a)$ $|z| = 2$ $b)$ $|z-2| = 2$ $c)$ $|z-i| = 1$ $d)$ Cuadrado con vértices en : $\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}$, $e)$ Calcule una cota superior para el valor absoluto de la integral sobre el cuadrado $3 \pm i3$, $-3 \pm i3$.

5) Evalúe : $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z}}{(z^2+1)} dz$

6) Haga un comentario oportuno sobre la integral: $\oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz$

7) Obtenga una cota superior para el valor absoluto de la integral :

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz$$

8) ¿ Cuál es el valor de la integral $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z+i|=1} \frac{e^{2z}}{z^2+1} dz$?

9) Obtenga una cota superior para el valor absoluto de la integral :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=4} \frac{e^{nz}}{z^2+2} dz, \qquad n \text{ es entero y positivo.}$$

10) Integre la función : $\frac{z^2-1}{z^2+1}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj, alrededor de la circunferencia:

a) $|z| = 1$ *b)* $|z+i| = 1$ *c)* $|z-i| = 1$ *d)* $|z-2i| = 2$

11) Integre la función : $\frac{1}{z^4-1}$, en sentido contrario al de las agujas del reloj, alrededor de la circunferencia:

a) $|z+1| = 1$ *b)* $|z+3| = 1$ *c)* $|z-i| = 1$ *d)* $|z-1| = 1$

12) Integre las siguientes funciones en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, alrededor de la circunferencia unitaria.

a) $\frac{e^z}{z}$ *b)* $\frac{e^z-1}{z}$ *c)* $\frac{\cos z}{z}$ *d)* $\frac{(z+2)}{z-2}$ *e)* $\frac{\text{sen}z}{2z}$

f) $\frac{\text{sen}z}{(z-2)^2}$ *g)* $\frac{\cos z}{(z-\pi)}$ *h)* $\frac{z^3}{(2z-1)}$ *i)* $e^z \cos z$

j) $\tanh z$ *k)* $\frac{e^{3z}}{(3z-1)}$ *l)* $\frac{\cosh z}{z}$

13) Evalúe cada una de las siguientes integrales sobre la curva cerrada simple C dada :

a) $\oint_C \frac{2e^z+2\cos z-4}{z} dz$, $C : |z| = 1$ *b)* $\oint_C \frac{\cosh z+\text{sen}2z}{z-\frac{i\pi}{2}} dz$, $C : |z| = 3$

c) $\oint_C \frac{z^3+2z^2+z+2}{z-i} dz$, $C : |z| = 2$ *d)* $\oint_C \left(\frac{2}{z+2} + \frac{5}{z-2}\right) dz$, $C. |z| = 3$

e) $\oint_C \frac{dz}{z(z-2)}$, $C : |z| = 3$ *f)* $\oint_C \frac{z^3+z+4}{z^4+z^3-z^2+z-2} dz$, $C : |z| = 3$

g) $\oint_C \frac{z^3}{z^4-1} dz$, $C : |z| = 2$ *h)* $\oint_C \frac{2e^z \cosh^2 z}{(z-i\pi)(z+3i\pi)} dz$, $C : |z| = 2\pi$

i) $\oint_C \frac{z^2-6}{z^4-z^2-20} dz$, $C : |z| = 2$

14) *a)* Obtenga una cota superior para el valor absoluto del valor de la integeral: $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{nz}}{z^2+2} dz$,donde $C : |z| = 4$.

b) ¿Cuál es el valor de esta integral si la trayectoria de integración es la circunferencia $|z| = 1$?

c) ¿Cuál es el valor de esta ontegral si la trayectoria de integración es

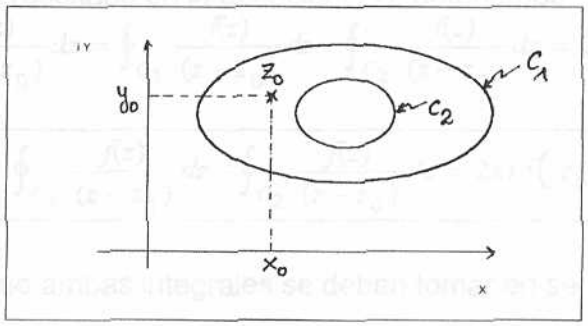
la circunferencia $|z| = 2$?

d) ¿Cuál es el valor de esta ontegral si la trayectoria de integración es el triángulo de vértices : $\pm 3, 3 + 3i$?

== oo ==

3.6) LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY EN DOMINIOS DOBLEMENTE CONEXOS

Sea D un dominio doblemente conexo, limitado por los contornos cerrados simples C_1 y C_2 ,tales que C_2 es interior a C_1 como muestra la siguiente figura, donde $(C_1 \cap C_2 = \Phi)$:



(D : Dominio Doblemente Conexo)

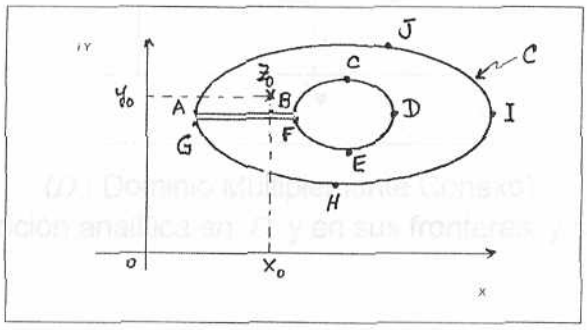
Sea $f(z)$ una función analítica en D y en sus fronteras C_1 y C_2 y sea z_0 un punto de D. Nótese que $f(z)$ no es necesariamente analítica en el interior de C_2. Bajo tales hipótesis, se verifica que:

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

con ambas integrales tomadas en sentido positivo

Demostración:

Consideremos el Contorno Cerrado Simple C que se muestra en la siguiente figura :



(C: Contorno Cerrado Simple)

Evaluemos la integral $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ alrededor del contorno cerrado simple C arriba mostrado. Como $f(z)$ es analítica dentro y sobre la frontera C, podemos aplicar el Teorema de la Fórmula Integral de Cauchy y escribir :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) \quad \text{..... (1)}$$

Pero, obviando el integrando podemos escribir que:

$$\oint_C = \int_{AB} + \int_{BCDEF} + \int_{FG} + \int_{GHIJA}$$

Pero: $\int_{AB} = -\int_{FG}$ por lo que la expresión anterior se reduce a:

$$\oint_C = \int_{BCDEF} + \int_{GHIJA} = -\oint_{C_2} + \oint_{C_1}$$

Sistituyendo este resultado en la ecuación (1), obtenemos:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0)$$

Es decir:

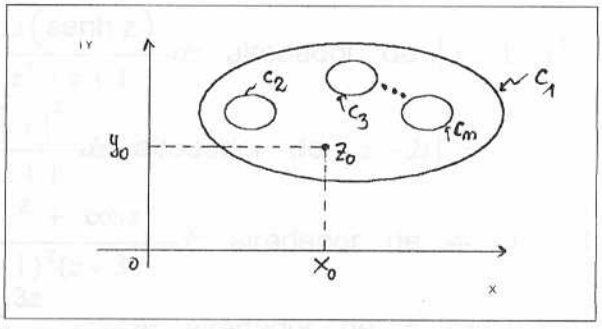
$$\boxed{\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0)}$$

NOTA: Nótese que ambas integrales se deben tomar en sentido positivo.

== oo ==

3.7) GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CUACHY A DOMINIOS MULTIPLEMENTE CONEXOS

* Consideremos ahora el dominio n veces conexo limitado por los contornos cerrados simples $C_1, C_2, \ldots, Cn$, como se muestra en la siguiente figura:



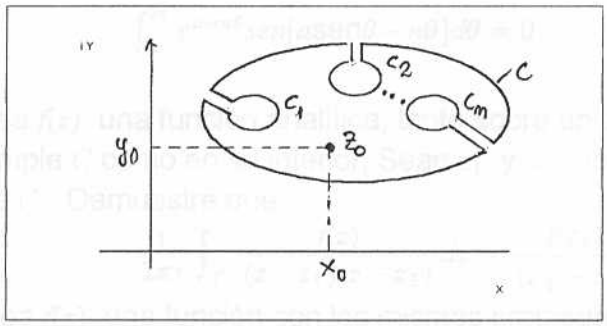
(D : Dominio Multiplemente Conexo)

* Sea $f(z)$ una función analítica en D y en sus fronteras, y sea z_0 un punto en D. Entonces:

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \cdots - \oint_{Cn} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0)$$

Demostración:

Para obtener el resultado deseado, basta integrar alrededor del contorno cerrado simple C que se muestra a continuación y generalizar el resultado obtenido en el numeral 3.6) arriba expuesto.



(C : Contorno Simple Cerrado)

$$= oo =$$

3.8) EJERCICIOS PROPUESTOS II

Use el Teorema de Cauchy - Goursat, la Fórmula Integral de Cauchy o su Extensión según corresponda, para evaluar las siguientes integrales:

1°) $\oint_C \frac{dz}{e^z(z-2)}$ alrededor de $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

2°) $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(\cos z + \operatorname{sen} z)}{(z^2+25)(z+1)}dz$ alrededor de $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

3°) $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2+z+1}dz$ alrededor de $(x-1)^2(y-1)^2=1$

4°) $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\operatorname{senh} z}{z^2+z+1}dz$ alrededor de $|z-2i|=2$

5°) $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos(\operatorname{senh} z)}{z^2+z+1}dz$ alrededor de $|z-1-i|=\frac{3}{2}$

6°) $\oint_C \frac{\left[\ln(\frac{z}{e})\right]^2}{z^2+z+1}dz$ alrededor de $|z-2i|=2$

7°) $\oint_C \frac{\operatorname{sen}(e^z+\cos z)}{(z-1)^2(z+3)}dz$ alrededor de $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

8°) $\oint_C \frac{e^{3z}}{(z-2i)(z-1)^2}dz$ alrededor de $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

9°) $\oint_C \frac{\cos(2z)}{z^{20}}dz$ alrededor de $|z|=1$

9°) $\oint_C \frac{\cos(2z)}{z^{21}}dz$ alrededor de $|z|=1$

10°) *a)* Demuestre que: $\oint_C \frac{e^{az}}{z^{n+1}}dz = 2\pi i\frac{a^n}{n!}$, siendo $C: |z|=1$

b) Demuestre que, si a es real, entonces de la integral anterior se

deduce que:

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cos[a\operatorname{sen}\theta - n\theta]d\theta = 2\pi\frac{a^n}{n!} \quad \text{y además:}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} sen[a\operatorname{sen}\theta - n\theta]d\theta = 0$$

11°) *a)* Sea $f(z)$ una función analítica, tanto sobre un contorno cerrado simple C como en su interior, Sean z_1 y z_2 dos puntos del interior de C. Demuestre que:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = \frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)} + \frac{f(z_1)}{(z_2-z_1)}$$

b) Sea $f(z)$ una función con las mismas propiedades que en el apartado *a)* y sean $z_1,\ z_2,\ldots,z_n$ puntos del interior de C. Suponga que $z_1,\ z_2,\ldots,z_n$ trienen valores numéricos distintos. Generalice el método del apartado a) para rpobar que:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}dz = \frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\cdots(z_1-z_n)} +$$

$$+\frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\cdots(z_2-z_n)} + \cdots + \frac{f(z_n)}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)\cdots(z_n-z_{n-1})}$$

12°) Evalúe las siguientes integrales, alrededor del contorno cerrado simple C que se indica, recorrido en sentido positivo

a) $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos(z-1)}{(z+1)(z-2)}dz$, $C: |z| = 3$

b) $\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)}dz$, C : cuadrado de vertices $\begin{cases} z = \pm 2 \\ z = \pm 2i \end{cases}$

c) $\oint_C \frac{\ln z}{z^2 - z + 1/2}dz$,..... $C: |z-1| = \frac{8}{9}$

d) $\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)^2}dz$,..... $C: |z| = 3$

e) $\oint_C \frac{2e^z + 2\cos z - 4}{z}dz$,.....$C: |z| = 1$

f) $\oint_C \frac{\cosh z + \operatorname{sen} 2z}{z - \frac{i\pi}{2}}dz$,.....$C: |z| = 3$

g) $\oint_C \frac{z^3 + 2z^2 + z + 2}{z-i}dz$,.....$C: |z| = 2$

h) $\oint_C \left(\frac{2}{z+2} + \frac{5}{z-2}\right)dz$,.....$C: |z| = 3$

i) $\oint_C \frac{dz}{z(z+2)}$,.....$C: |z| = 3$

j) $\oint_C \frac{z^2+z+4}{z^4+z^3-z^2+z-2}\,dz$,.....$C: |z| = 3$

k) $\oint_C \frac{z^3}{z^4-1}\,dz$,.....$C: |z| = 2$

l) $\oint_C \frac{2e^{2z}\cosh^2 z}{(z-i\pi)(z+3i\pi)}\,dz$,.....$C: |z| = 2\pi$

m) $\oint_C \frac{z^2-6}{z^4-z^2-20}\,dz$,.....$C: |z| = 2.1$

13°) Integre las siguientes funciones en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, alrededor de la circunferencia $|z| = 2$. (Donde proceda, n es un entero positivo y a es cualquier número)

a) $\frac{z^2}{(z-i)^2}$ *b)* $\frac{z^4}{(z-3i)^2}$

c) $\frac{e^{\pi z}}{z^2}$ *d)* $\frac{(\cos z)}{z^2}$

e) $\frac{(\cos z)}{z^3}$ *f)* $\frac{z^3}{(z+1)^3}$

g) $\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z^3}$ *h)* $\frac{e^z \operatorname{sen} z}{z^2}$

i) $\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$ *j)* $\frac{e^{z^2}}{z^3}$

k) $\frac{e^z}{z^n}$ *l)* $\frac{e^{az}}{z^{n+1}}$

m) $\frac{e^z \operatorname{sen} z}{z^2}$ *n)* $\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$

ñ) $\frac{e^{z^2}}{z^3}$ *o)* $\frac{e^z}{z^n}$

p) $\frac{e^{az}}{z^{n+1}}$ *q)* $\frac{\operatorname{sen} z}{z^{2n}}$

r) $\frac{\cos z}{z^{2n}}$ s) $\frac{z^n}{(z+1)^{n+1}}$

s) $\frac{z^n}{(z+1)^{n+1}}$ t) $\frac{\operatorname{senh}(az)}{z^4}$

14°) Sea C la circunferencia unitaria descrita desde $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$,

a) Demuestre que $\oint_C \frac{e^{kz}}{z} dz = 2\pi i \qquad (k \in R)$

b) Use el resultado anterior para probar que :

$$\oint_C e^{k\cos\theta} \cos\left(k\operatorname{sen}\theta\right) d\theta = \pi$$

.

== oo ==

.

CAPÍTULO IV

CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

4.1) DOMINIOS SIMPLEMENTE CONEXOS

Sea D un dominio simplemente conexo y C una curva Cerrada Simple, contenida en D, como ilustra la Figura 4.1.

Sea $f(z)$ una función analítica en D.

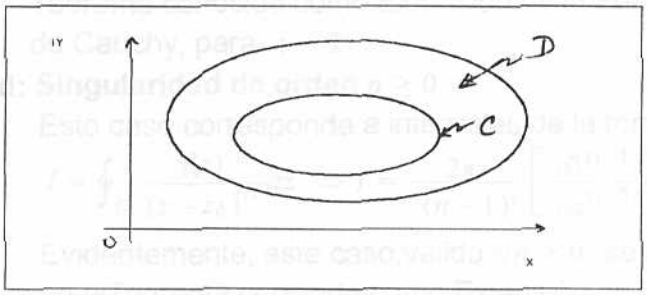
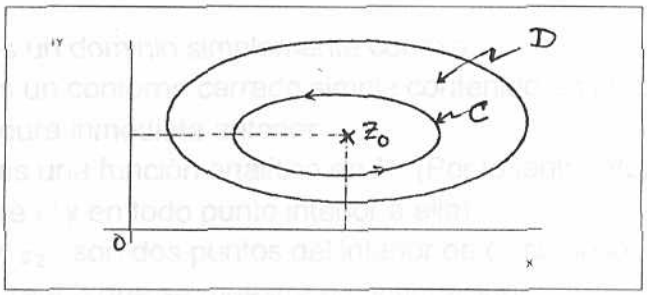


Fig.4.1 Dominio Simplemente Conexo: D

De la Fórmula Integral de Cauchy antes obtenida se deducen las siguientes consecuencias:

4.1.1) Integrando con sólo una singularidad z_0 en el interior de C :

Se trata deintegrales de la forma : $I = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz$



(Fig. 4.2: z_0 es interior a C)

Esta singularidad puede ser de orden $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, lo que. obviamente, da origen a los siguientes casos :

Caso a: Singularidad de orden cero (n=0)

Este caso corresponde a integrales de la forma :

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^0} dz \Rightarrow I = \oint_C f(z)dz = 0$$

Evidentemente, este caso se reduce al previsto por el Teorema de Cauchy-Goursat.

Caso b: Singularidad de orden uno (n=1)

Este caso corresponde a integrales de la forma :

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^1} dz \Rightarrow I = 2\pi i f(z_0)$$

Evidentemente, este caso se reduce al previsto en el Teorema de la Fórmula Integral de Cauchy.

Caso c: Singularidad de orden dos (n=2)

Este caso corresponde a integrales de la forma :

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \Rightarrow I = \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{d}{dz} f(z)\right]_{z=z_0}$$

Evidentemente, este caso se reduce al previsto por el Teorema conocido como Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy, para $n = 2$).

Caso d: Singularidad de orden $n \geq 0$

Este caso corresponde a integrales de la forma :

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz \Rightarrow I = \frac{2\pi i}{(n-1)!}\left[\frac{d^{(n-1}}{dz^{n-1}} f(z)\right]_{z=z_0}$$

Evidentemente, este caso,válido $\forall n \geq 0$. se reduce al previsto en elTeorema conocido como Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy,desarrollado en el Capítulo III.

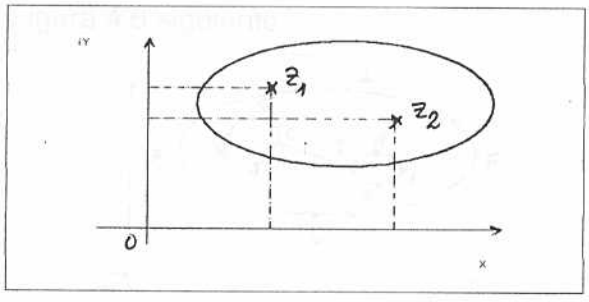
4.1.2) Integrando con dos singularidades simples z_1 y z_2 en el interior de C,

Evidentemente, se trata de calcular integrales de la forma :

$$I = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} dz$$

donde:

* D es un dominio simplemente conexo.
* C es un contorno cerrado simple contenido en D, como lo ilustra la Figura inmediata anterior.
* $f(z)$ es una función analítica en D. (Por lo tanto, $f(z)$ es analítica sobre C y en todo punto interior a ella).
* z_1 y z_2 son dos puntos del interior de C, como lo ilustra la Figura 4.3 que se muestra a continuación :



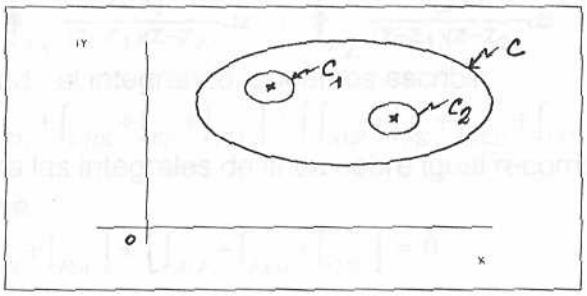
(Fig.4.3 : $\{z_1, z_2\}$ son interiores a C)

Entonces, bajo estas hipótesis, se verifica que :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = \frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)} + \frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)}$$

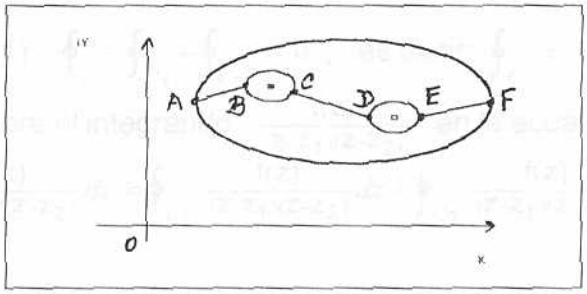
Demostración:

Tracemos las curvas cerradas simple C_1 y C_2 , ambas alrededor de z_1 y z_2 ,respectivamente, sin intersecciones entre ellas $(C_1 \cap C_2 = \Phi)$, como lo ilustra la Figura 4.4 :



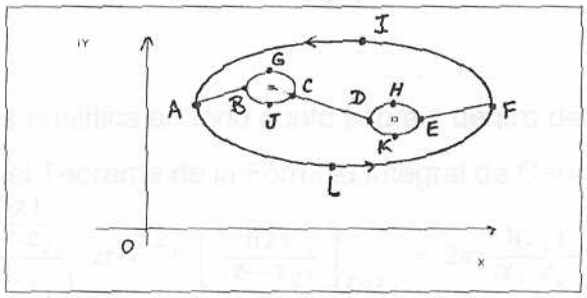
(Fig. 4.4 : $(C_1 \cap C_2 = \Phi)$)

Unamos los contornos C_1 y C_2 entre ellos y con C, mediante segmentos de rectas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$, como lo ilustra la Figura 4.5 que semuestra a continuación :



(Fig. 4.5)

Estos segmentos , conjuntamente con las curvas C, C_1 y C_2 definen los contornos cerrados simple $K_1 = ABGCDHEFIA$ y $K_2 = ALFEKDCJBA$ que se muestran en la Figura 4.6 siguiente :



(Fig. 4.6)

sobre y dentro de los cuales el integrando $\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$ es analítico.

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema de Cauchy - Goursat podemos escribir que :

$$\oint_{K_1} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = 0 \quad , \quad \oint_{K_2} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = 0 \qquad .....(1)$$

donde todos los contornos K_1 y K_2 se recorren en sentido positivo.

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1), se tiene que:

$$\oint_{K_1} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz + \oint_{K_2} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = 0$$

De donde, obviando el integrando, podemos escribir:

$$\left[\int_{AB}+\int_{BGC}+\int_{CD}+\int_{DHE}+\int_{EF}+\int_{FIA}\right]+\left[\int_{ALF}+\int_{FE}+\int_{EKD}+\int_{DC}+\int_{CJB}+\int_{BA}\right]=0$$

Cancelando ahora las integrales de linea sobre igual recorrido pero en sentido inverso, se obtiene:

$$\left[\int_{BGC}+\int_{DHE}+\int_{FIA}\right]+\left[\int_{ALF}+\int_{EKD}+\int_{CJB}\right]=0 \qquad .....(1)$$

Pero $\left\{ \begin{array}{l} \int_{BGC}+\int_{CJB} = -\oint_{C_1} \ ; \quad \left(\oint_{C_1} \text{ recorrida en sentido negativo}\right) \\ \int_{DHE}+\int_{EKD} = -\oint_{C_2} \ ; \quad \left(\oint_{C_2} \text{ recorrida en sentido negativo}\right) \\ \int_{ALF}+\int_{FIA} = \oint_{C} \text{ recorrida en sentido positivo} \end{array} \right\} \Rightarrow$

Sustityendo en (1) : $\oint_C - \oint_{C_1} - \oint_{C_2} = 0$, es decir: $\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$ ...(2)

Introduciendo ahora el integrando $\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$ en la ecuación (2), se obtiene:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz + \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz \ldots\ldots (3)$$

Pero, $\frac{f(z)}{(z-z_1)}$ es analítica en todo punto sobre y dentro de C_2, por lo tanto aplicando ahora el Teorema de la Fórmula Integral de Cauchy, se obtiene:

$$\oint_{C_2} \frac{\frac{f(z)}{(z-z_1)}}{(z-z_2)}dz = 2\pi i\left[\frac{f(z)}{(z-z_1)}\right]_{z=z_2} = 2\pi i\frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)} \qquad .....(4)$$

Análogamente:

$\frac{f(z)}{(z-z_2)}$ es analítica en todo punto sobre y dentro de C_1, por lo tanto aplicando ahora el Teorema de la Fórmula Integral de Cauchy, se obtiene:

$$\oint_{C_2} \frac{\frac{f(z)}{(z-z_2)}}{(z-z_1)}dz = 2\pi i\left[\frac{f(z)}{(z-z_2)}\right]_{z=z_1} = 2\pi i\frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)} \qquad .....(5)$$

Sustituyendo los resultados (4) y (5) en la ecuación (3), se obtiene.

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = 2\pi i\left[\frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)} + \frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)}\right]}$$

lo que demuestra el teorema.

== oo ==

4.1.3) Integrando con n ≥ 3 singularidades simples $z_1, z_2, \ldots, z_n$ en el interior de C.

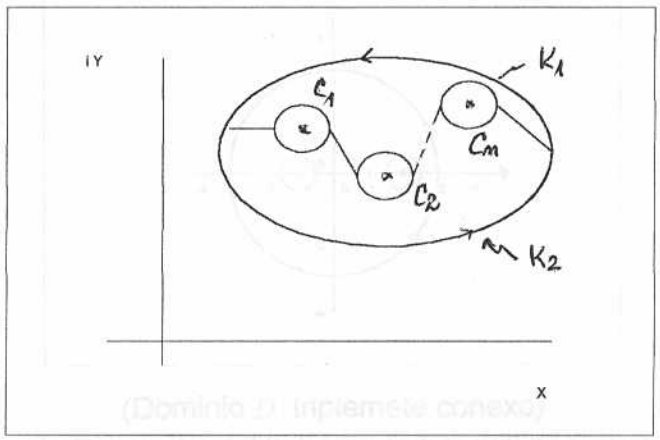
Generalizando el resultado anterior, se puede probar que, si $f(z)$ es analítica tanto sobre el contorno cerrado simple C como en su interior, y además, $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ son puntos del interior de C y distintos, entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}dz = \frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\cdots(z_1-z_n)} +$$

$$+ \frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\cdots(z_2-z_n)} +$$

$$+ \cdots + \frac{f(z_n)}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)\cdots(z_n-z_{n-1})}$$

Para probar este resultado, bastaria con integrar sobre los contornos K_1 y K_2 que se muestran en la Figura 4.7 y proceder en forma análoga al caso anterior.



(Fig.4.7 : $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ interiores a C)

== oo ==

4.2) EJEMPLOS RESUELTOS I

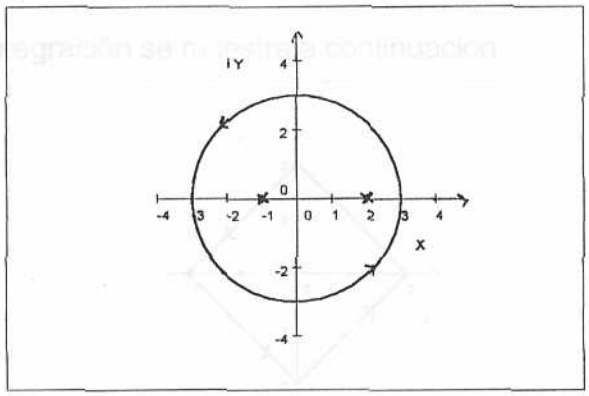
En todos los casos, salvo indicación en contrario, el contorno de integración se supone recorrido en sentido positivo.

Ejemplo 1:

Evalúe la integral : $I = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos(z-1)}{(z-1)(z-2)}dz$, alrededor de $|z| = 3$

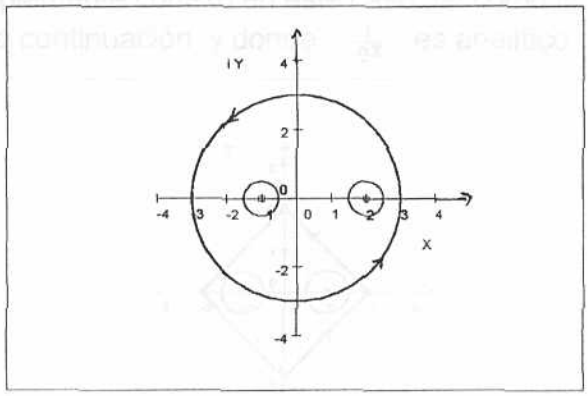
Solución:

El contorno de integración se muestra a continuación:



(Contorno C: $|z| = 3$)

Los Puntos singulares $\left\{\begin{matrix} z_1 = -1 \\ z_2 = 2 \end{matrix}\right\}$ son ambos interiores al contorno de integración dado por $|z| = 3$, luego, es necesario trazar dos circunferencias $|z+1| = \rho$ y $|z-2| = \rho$ para convertir el dominio simplemente conexo dado, en un diminio triplemente conexo en este caso, tal como lo ilustra la figura que se muestra a continuación y donde $\cos(z-1)$ es analítico:



(Dominio D triplemete conexo)

Aplicando ahora la Extensión del la Fórmula Integral de Cauchy para regiones triplemente conexas, se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos(z-1)}{(z-1)(z-2)}dz = \frac{\cos(z-1)}{(z-2)}\bigg|_{z=-1} + \frac{\cos(z-1)}{(z-1)}\bigg|_{z=2} = \frac{\cos(-2)}{-3} + \frac{\cos(1)}{3}$$

De donde,

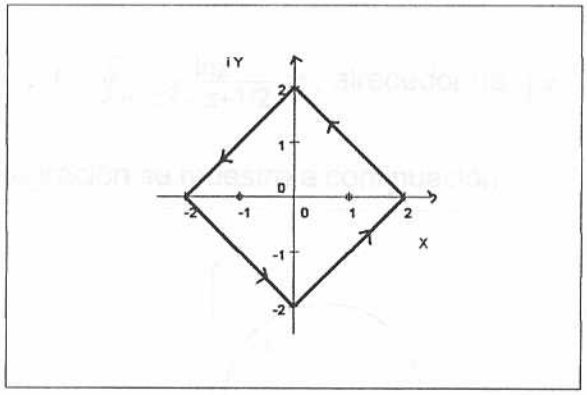
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos(z-1)}{(z-1)(z-2)}dz = \frac{\cos(1) - \cos(3)}{3} = 0.51010$$

Ejemplo 2:

Evalúe la integral : $I = \oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)}dz$, alrededor del cuadrado cuyos vértices están en : $z = \pm 2$ y $z = \pm 2i$

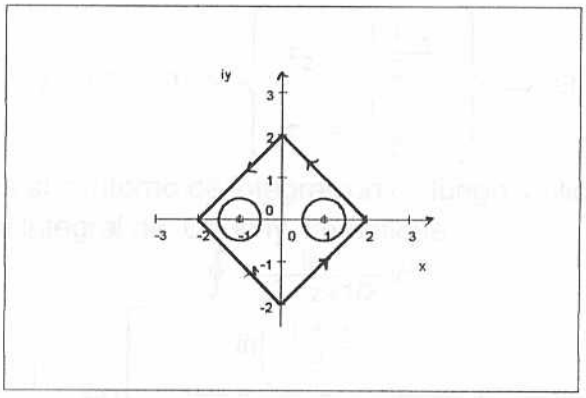
Solución:

El contorno de integración se muestra a continuación:



(Contorno de integración C)

Los Puntos singulares $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = -1 \\ z_2 = 1 \end{array} \right\}$ son ambos interiores al contorno de integración C, luego, es necesario trazar dos circunferencias $|z+1| = \rho$ y $|z-1| = \rho$ para convertir el dominio simplemente conexo dado, en un dominio triplemente conexo en este caso, tal como lo ilustra la figura que se muestra a continuación y donde $\frac{1}{e^z}$ es analítico:



(Dominio D triplemete conexo)

Aplicando ahora la Extensión del la Fórmula Integral de Cauchy para regiones triplemente conexas, se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\frac{1}{e^z}}{(z-1)(z+1)}dz = \left[\frac{\frac{1}{e^z}}{(z-1)}\right]_{z=-1} + \left[\frac{\frac{1}{e^z}}{(z+1)}\right]_{z=1}$$

De donde,

$$\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)}dz = 2\pi i\left[\frac{\frac{1}{e^{-1}}}{-2}+\frac{\frac{1}{e}}{2}\right] = 2\pi i\left[\frac{-e+e^{-1}}{2}\right] = -2\pi i\left[\frac{e-e^{-1}}{2}\right] = 2\pi i \text{ senh}(1)$$

Es decir :

$$\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)}dz = 2\pi i \text{ senh}(1)$$

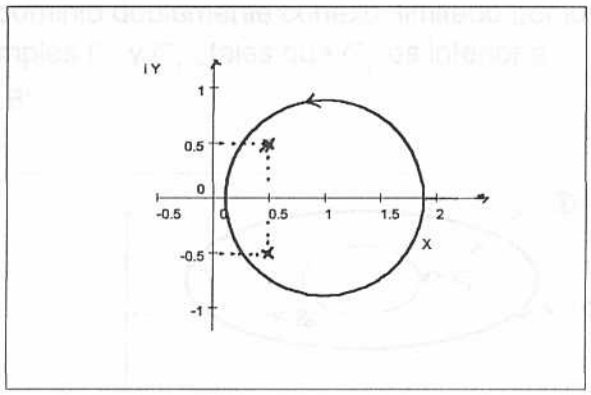
$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 3:

Evalúe la integral : $I = \oint_C \frac{\ln z}{z^2-z+1/2}dz$, alrededor de $|z-1| = \frac{8}{9}$

Solución:

El contorno de integración se muestra a continuación:



(Contorno C : $|z-1| = 8/9$)

* El punto singular $z_1 = 0$ es exterior a la curva de integración.

* Pero $z^2 - z + 1/2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_2 = \frac{1+i}{2} \\ z_3 = \frac{1-i}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$ ambas singularidades son interiores al contorno de integración C; luego, aplicando la Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy, se obtiene :

$$\oint_C \frac{\ln z}{z^2-z+1/2}dz$$

$$= 2\pi i\left[\frac{\ln z_2}{z_2-z_3}+\frac{\ln z_3}{z_3-z_2}\right] = 2\pi i\left[\frac{\ln\left(\frac{1+i}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1+i}{2}\right)-\ln\left(\frac{1-i}{2}\right)}+\frac{\ln\left(\frac{1-i}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1-i}{2}\right)-\ln\left(\frac{1+i}{2}\right)}\right] \Rightarrow$$

$$\oint_C \frac{\ln z}{z^2-z+1/2}dz = 2\pi i\left[\frac{\ln\left(\frac{1+i}{2}\right)}{i}+\frac{\ln\left(\frac{1-i}{2}\right)}{-i}\right] = 2\pi\left[\ln\left(\frac{1+i}{2}\right)-\ln\left(\frac{1-i}{2}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\oint_C \frac{\ln z}{z^2 - z + 1/2} dz = 2\pi \ln\left[\frac{1+i}{1-i}\right] = 2\pi\{\ln(1) + i[\arg(1+i) - \arg(1-i)]\} \Rightarrow$$

$$\oint_C \frac{\ln z}{z^2 - z + 1/2} dz = 2\pi\left\{0 + i\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} = 2\pi\left[i\pi\right] = 2\pi^2 i$$

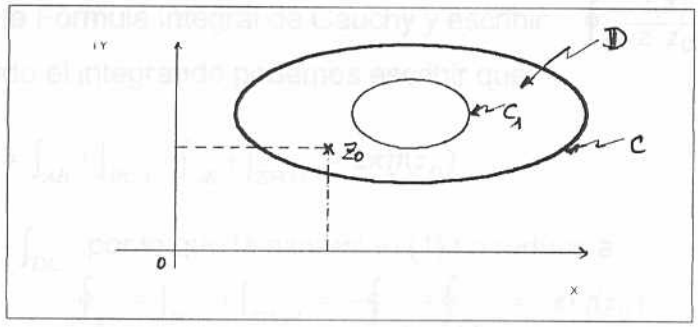
$$= oo =$$

4.3) DOMINIOS MULTIPLEMENTE CONEXOS

4.3.1) LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY EN DOMINIOS DOBLEMENTE CONEXOS

Teorema:

* Sea D un dominio doblemente conexo, limitado por los contornos cerrados simples C y C_1, tales que C_1 es interior a C como muestra la Figura 4.8:



(Fig. 4.8 D : Dominio Doblemente Conexo)

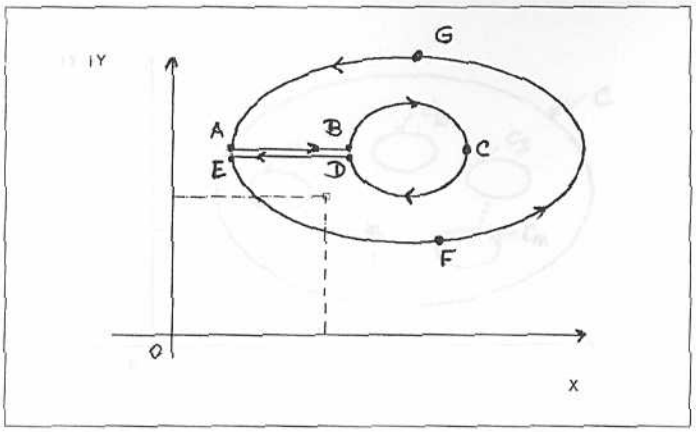
* Sea $f(z)$ una función analítica en D y en sus fronteras C y C_1.
* Sea z_0 un punto de D.

Nótese que $f(z)$ no es necesariamente analítica en el interior de C_1.
Bajo tales hipótesis, se verifica que:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz - \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz = 2\pi i f(z_0)$$

con ambas integrales tomadas en sentido positivo

Demostración:
Unamos C con C_1 mediante el segmento $\overline{AB}$ y consideremos el contorno cerrado simple $K = ABCBADA$ que se muestra en la figura (Figura 4.9):



(Fig.4. 9 K : Contorno Cerrado Simple)

Evaluemos la integral $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$ alrededor del contorno cerrado simple K .

Como $f(z)$ es analítica dentro y sobre la frontera K, podemos aplicar el Teorema de la Fórmula Integral de Cauchy y escribir: $\oint_K \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0)$.

Pero, obviando el integrando podemos escribir que:

$$\oint_K = \int_{AB} + \int_{BCD} + \int_{DE} + \int_{EFGA} = 2\pi i f(z_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Pero: $\int_{AB} = -\int_{DE}$ por lo que la expresión (1) se reduce a:

$$\oint_K = \int_{BCD} + \int_{EFGA} = -\oint_{C_1} + \oint_{C_2} = 2\pi i f(z_0).$$

De donde:

$$\boxed{\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0)}$$

lo que confirma el teorema.

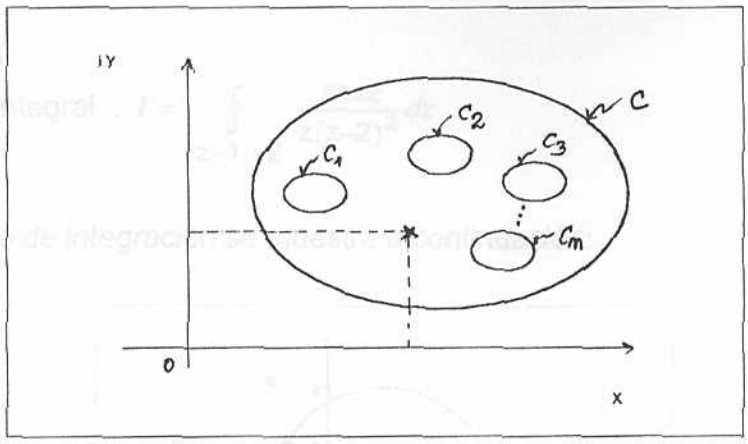
NOTA 1: Osérvese que ambas integrales se deben tomar en sentido positivo.
NOTA 2 : $f(z)$ no es necesariamente analítica en el interior de C_1.

== oo ==

4.3.2) LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY EN DOMINIOS MULTIPLEMENTE CONEXOS

Teorema:

* Consideremos ahora el dominio n veces conexo limitado por los contornos cerrados simples C , $C_1, C_2, \ldots, C_n$, como se muestra en la Figura 4.10:



(Fig. 4.10 D : Dominio Multiplemente Conexo)

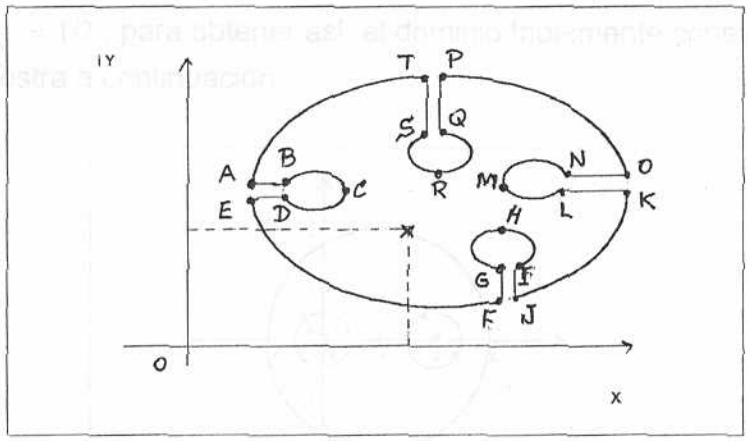
* Sea $f(z)$ una función analítica en D y en sus fronteras.
* Sea z_0 un punto en D.

Entonces:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz - \cdots - \oint_{Cn} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0)$$

Demostración:

Para obtener el resultado deseado, basta integrar alrededor del contorno cerrado simple $K = ABCCDEFGHIJKLMNOPQRST\cdots A$ que se muestra en la Figura 4.11 y generalizar el resultado obtenido en el numeral 4.3.1) arriba expuesto.



(Fig. 4.11 K : Contorno Cerrado Simple)

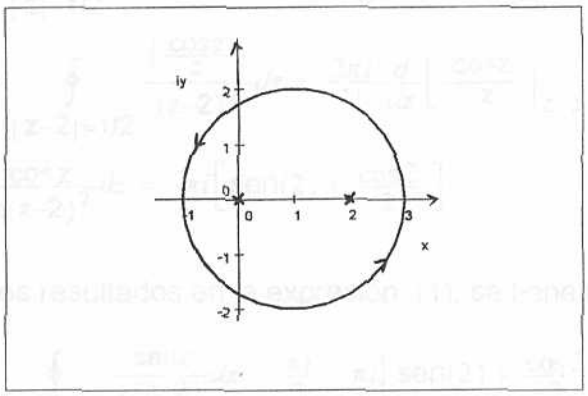
NOTA: Obsérvese que $f(z)$ no es necesariamente analítica en el interior de C_j. $(j = 1,2,\cdots,n)$. Obviamente, si lo es $\forall j$, entonces las integrales presentes en la expresión (1) se reducen a las previstas por la Fórmula Integral de Cauchy.

Ejemplo 4:

Evalúe la integral : $I = \oint_{|z-1|=2} \frac{\cos z}{z(z-2)^2} dz$

Solución:

El contorno de integración se muestra a continuación:



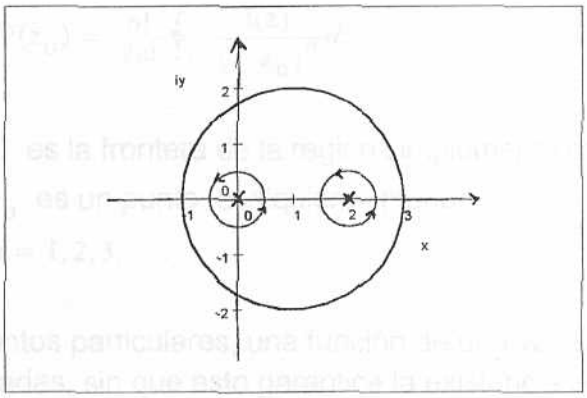
(Contorno: $|z-1| = 2$)

El Dominio limitado por $|z-1| = 2$ es Simplemente Conexo, pero existen en su interior dos puntos singulares del integrando, a saber:

$z_1 = 0$, Polo Simple

$z_2 = 2$, Polo de orden 2

lo que hace necesario trazar las circunferencias : $C_1 : |z| = 1/2$ y $C_2 : |z-2| = 1/2$, para obtener así el dominio triplemente conexo de la Figura que se muestra a continuación:



(Contorno: $|z-1| = 2$)

Aplicando ahora la extensión del la Fórmula Integral de Cauchy para dominios multiplemente conexos, se obtiene:

$$I = \oint_C \frac{\cos z}{z(z-2)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{\cos z}{z(z-2)}dz + \oint_{C_2} \frac{\cos z}{z(z-2)^2}dz \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Pero:

$$\begin{cases} \oint_{C_1} \dfrac{\cos z}{z(z-2)^2}dz = \displaystyle\oint_{|z|=1/2} \dfrac{\dfrac{\cos z}{(z-2)^2}}{z}dz = 2\pi i\left[\dfrac{\cos z}{(z-2)^2}\right]_{z=0} = 2\pi i\left[\dfrac{1}{(-2)^2}\right] = \dfrac{\pi i}{2} \\ \oint_{C_2} \dfrac{\cos z}{z(z-2)^2}dz = \displaystyle\oint_{|z-2|=1/2} \dfrac{\left(\dfrac{\cos z}{z}\right)}{(z-2)^2}dz = \dfrac{2\pi i}{1!}\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{\cos z}{z}\right]_{z=2} = 2\pi i\left[\dfrac{-z\,\text{sen}\,z - \cos z}{z^2}\right]_{z=2} \\ \text{De donde}: \oint_{C_2} \dfrac{\cos z}{z(z-2)^2}dz = -\pi i\left[\text{sen}(2) + \dfrac{\cos 2}{2}\right] \end{cases}$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión (1), se tiene finalmente :

$$I = \oint_{|z-1|=2} \frac{\text{sen}z}{z(z-2)}dz = \frac{\pi i}{2} - \pi i\left[\text{sen}(2) + \frac{\cos 2}{2}\right]$$

Es decir: $$I = \pi i\left[\frac{1}{2} - \text{sen}\,2 - \frac{\cos 2}{2}\right] = -0.63216\,i$$

$$= \text{oo} =$$

4.4) TEOREMA DE MORERA

Introducción: Es interesante notar que las funciones de una variable real no poseen en general, las propiedades de las derivadas de una función de variable compleja $f(z)$, descritas por el Teorema anterior y expresadas por la fórmula genérica:

$$f^{(n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Donde:

$$\begin{cases} C \text{ es la frontera de la región simplemente conexa } D \\ z_0 \text{ es un punto cualquiera interior a } C \\ n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

En efecto, en puntos particulares, una función de una variable real puede poseer una o más derivadas, sin que esto garantice la existencia de las derivadas de todos los órdenes. Por ejemplo, en el origen, la función $y = x^{7/3}$ posee primera y segunda derivada,
pero no tiene derivadas de orden superior a éstos. Osérvese como, en efecto,

$$y = x^{\frac{7}{3}} \Rightarrow$$

$$y'|_{x=0} = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{x=0} = 0$$

$$y''|_{x=0} = \frac{7}{3}\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\Big|_{x=0} = 0$$

$$y'''|_{x=0} = \frac{7}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\left(\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)}{\left(x^{2/3}\right)} \Rightarrow y'''|_{x=0}$$ No existe

Mediante el Teorema de Green en el plano complejo, podemos ahora demostrar que el recíproco del Teorema de Casuchy-Goursat conocido como Teorema de Morera y que enunciaremos a continuación:

Teorema de Morera:

Hipótesis 1:

* Sea C una curva cerrada simple que encierra un dominio simplemente conexo D.

Hipótesis 2:

* Sea $f(z)$ una función contínua, con derivada también contínua en el dominio D.

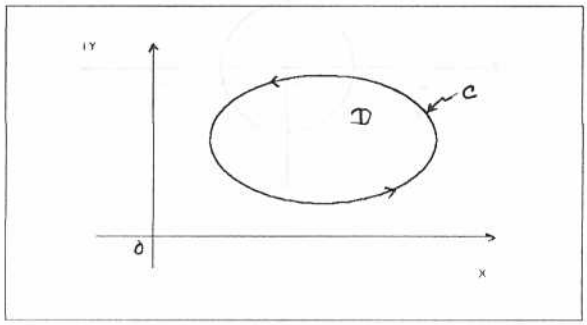
Hipótesis 3:

* Sea $\oint_C f(z) = 0$

Entonces: $f(z)$ es una función analítica.

Demostración:

La curva C y el dominio D se mustran a continuación:



(Fig.4.12 C : Curva Cerrada Simple)

Si $f(z)$ tiene una derivada contínua en D, entonces podemos aplicar el Teorema de Green a la expresión: $\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy$

para obtener: $\oint_C f(z)dz = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$

Pero, por hipótesis, $\oint_C f(z) = 0$ por lo que:

$$-\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

de donde: $\begin{cases} \iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0 \\ \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0 \end{cases}$

De estas ecuaciones se deduce de inmediato que: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\}$,

derivadas estas que son continuas por hipótesis. Por lo tanto, las funciones u y v satisfacen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, lo que es suficiente para determinar la analiticidad de la función $f(z) = u + iv$ en la región D, lo que demuestra el teorema.

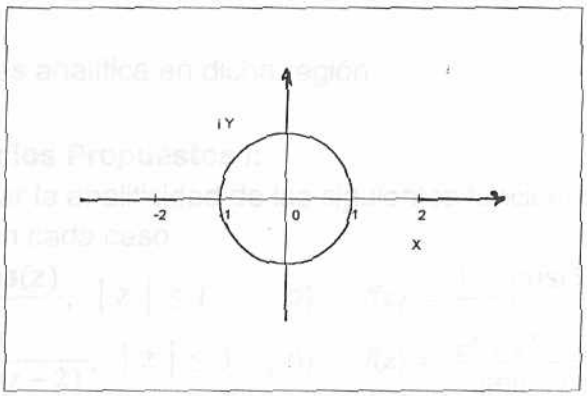
4.4.1) Ejemplos Resueltos II:

Ejemplo 5 : Analice la analiticidad de la función $f(z)$ en la región D definida por : $|z| \leq 1$

$a)$ $f(z) = \frac{1}{z}$ $b)$ $f(z) = \frac{1}{z^2}$ $c)$ $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z}$

Solución:

a) La región D se muestra a continuación:



Además:

$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0 \Rightarrow$ no se cumple la hipótesis 3 de Teorema de Morera, en consecuencia $f(z) = \frac{1}{z}$ no es analítica en todo punto de la región definida por C, es decir, en : $|z| \leq 1$.

b) $f(z) = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$, por ser $n >= 2 \neq 1$, por lo tanto, se cumplen las hipótesis 1 y 3 del teorema de Morera.

Sin embargo,

$f(z) = \frac{1}{z^2}$ no es contínua en todo z perteneciente a la región $|z| \leq 1$ pues tiene una discontinuidad en $z = 0 \in D$. En consecuencia, no se cumple la Hipótesis 2 2 de Teorema de Morera, por lo que la función dada no es analítica en D.

c) $$f(z) = \frac{\text{sen z}}{z} \Rightarrow \oint_C \frac{\text{sen z}}{z} dz = 2\pi i \left[\text{sen z} \right]_{z=0} = 0$$

por lo tanto, se cumplen las hipótesis 1 y 3 del teorema de Morera.

Además, $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\text{sen z}}{z} = 1$ por lo que: $f(z) = \begin{cases} \frac{\text{sen z}}{z}, & \text{si } z \neq 0 \\ 1, & \text{si } z = 0 \end{cases}$

Es decir, la discontinuidad en $z = 0$ es evitable, por lo que la función $f(z)$ es contínua en D. Estudiemos ahora la continuidad de $\frac{d}{dz} f(z)$.

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{z\cos z - \text{sen z}}{z^2} \Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} f(z) \to \frac{0}{0}$$

Aplicando la Regla de L´Hopital,obtenemos :

$$\lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos(z) - z\text{sen}(z) - \cos(z)}{2z} = \lim_{z\to 0} \frac{\text{sen}(z)}{2} = 0$$

Por lo tanto , $f(z)$ y $\frac{d}{dz} f(z)$ son contínuas en D. En consecuencia, también se cumple la segunda hipóteis prevista en el Teorema de Morera, por lo que la función

$f(z) = \frac{\text{sen z}}{z}$ es analítica en dicha región.

4.4.2) Ejercicios Propuestos I:

Estudiar la analiticidad de las siguientes funciones, en la región D que se especifica en cada caso :

a) $f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^2}$, $|z| \leq 1$; b) $f(z) = \frac{1 + \cos(3z)}{z^3}$, $|z| \leq 1$

c) $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)(z-2)}$, $|z| \leq 3$; d) $f(z) = \frac{z^3 + z^2 - 3}{\text{sen}(z)}$, $|z| \leq \frac{1}{2}$

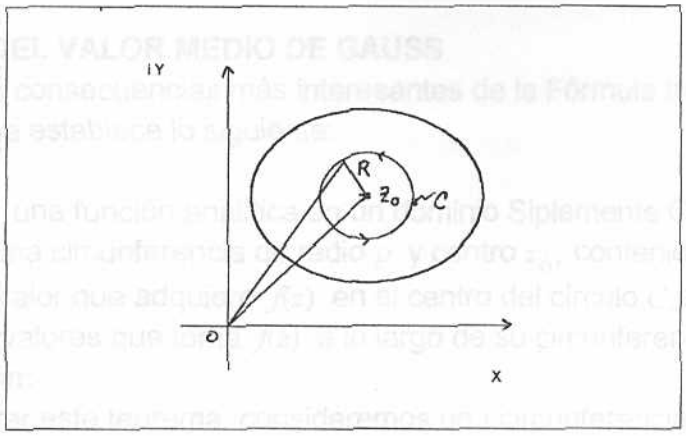
$$= \text{oo} =$$

4.5) DESIGUALDAD DE CAUCHY

Ahora deduciremos una importante desigualdad conocida como : " Desigualdad de Cauchy", la cual establece que: $\left| f^{(n}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{R^n} M$, donde:

$\begin{cases} R = \text{radio de una circunferencia } C \text{ con centro en } z_0 \\ M = \text{máximo valor de } \left| f(z) \right| \text{ sobre la circunferencia } C \end{cases}$

Demostración:



(Fig.4.13 C : Curva Cerrada Simple)

Por la Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy, se tiene que:

$$f^{(n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \ , \ n = 1,2,3,\ldots.$$

Pero, aplicando a esta expresión la Desigualdad ML, la cual establece que:

$$\left|\oint_C f(z)dz\right| \le ML \ , \text{ con } : \begin{cases} M = \text{ cota superior de } |f(z)|, \text{ es decir, } |f(z)| \le M, \forall z \in C \\ L = \text{ longitud de la trayectoria de integración } = 2\pi R \end{cases}$$

se encuentra que: $\left|f^{(n}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot M \cdot \frac{1}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R = \frac{n!}{R^n}\cdot M$

Es decir: $\left|f^{(n}(z_0)\right| \le \frac{n!}{R^n}\cdot M$, según se quería demostrar

$$= \text{oo} =$$

4.6) TEOREMA DE LIOUVILLE

Si $f(z)$ es analítica y acotada en valor absoluto para toda z finita, entonces : $f(z)$ es constante.

Demostración:

Por hipóteis, $\left|f(z)\right|$ es acotado, por lo tanto : $\left|f(z)\right| \le M$, para todo z finita.

Además, usando el teorema de la Desigualdad de Cauchy, podemos escribir que: $\left|f^{(n}(z_0)\right| \le \frac{n!}{R^n}\cdot M.$

Como R es tan grande como se desée (en virtud del Principio de Deformación de Contornos), y $n = 0,1,2,\ldots,$ se deduce que: $\left|f^{(n}(z_0)\right| \le \frac{M}{R}.$

Como esta igualdad es cierta para todo R , puede tomarse R tan grande como se desée, y concluir que $\left|f^{(n}(z_0)\right| = 0.$

Además, z_0 es arbitrario, por lo que puede escribirse que $\left|f^{(n}(z)\right| = 0,$ para toda z finita. En consecuencia, $f(z)$ es constante bajo las hipótesis enunciadas, lo que comprueba el teorema.

4.7) TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE GAUSS

Es una de las consecuencias más interesantes de la Fórmula Integral de Cauchy. Dicho teorema establece lo siguiente:

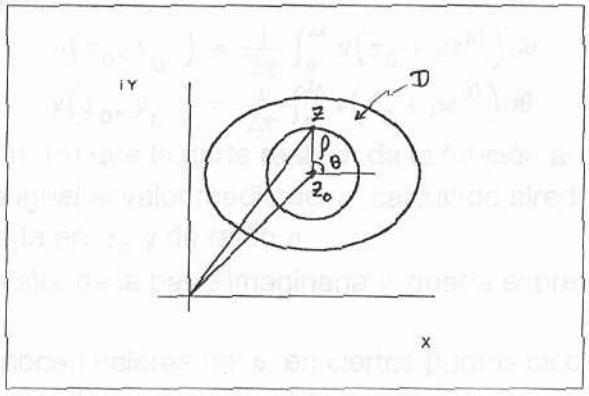
Teorema:

* Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio Siplemente Conexo D.
* Sea C una circunferencia de radio ρ y centro z_0, contenida en D.

Entonces, el valor que adquiere $f(z)$ en el centro del círculo C, es igual a la media de los valores que toma $f(z)$ a lo largo de su circunferencia.

Demostración:

Para demostrar este teorema, consideremos una circunferencia de radio ρ y centro en z_0, como ilustra la Figura 4.14:



(Fig. 4.14)

Por simple aplicación del teorema de la Fórmula Integral de Cauchy, se tiene que:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i\, f(z_0) \quad \text{.....(1)}$$

Se observa que cualquier punto de la circunferencia C puede expresarse por la forma : $z = z_0 + \rho\, e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} dz = i\rho\, e^{i\theta}d\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

Sustituyendo estas expresiones para z, dz y θ en la ecuación (1), se obtiene:

$\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho\, e^{i\theta})}{(z_0+\rho\, e^{i\theta}-z_0)} i\rho\, e^{i\theta}d\theta = 2\pi i\, f(z_0)$, de donde, efectuando algunas simplificaciones evidentes, se obtiene :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+\rho\, e^{i\theta}\right)d\theta = f(z_0)} \quad \text{.....(2)}$$

Otras formas de la expresión (2) son:

a) $f(z_0) = \dfrac{\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta}{2\pi}$ = valor de la integral de línea sobre C dividido por la amplitud del intervalo (2π). .....(3)

b) $f(z_0) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} f(z_j)\Delta z_j}{2\pi}$ .....(4)

Cualquiera de las expresiones (2), (3) y (4), representa por lo tanto el valor medio de $f(z)$ a lo largo de la circunferencia, por lo que cualquiera de ella es conocida como la expresión matemática del Teorema del Valor Medio de Gauss.

Si la función $f(z)$ se expresa por su parte real y su parte imaginaria, es decir, si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, podemos volver a escribir esta expresión de la siguiente manera: $u(z_0) + iv(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)d\theta$

Tomando $z_0 = x_0 + i\,y_0$ e igualando partes correspondientes a cada lado de la ecuación anterior, tenemos:

$$u\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)d\theta \qquad .....(5)$$

$$v\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)d\theta \qquad .....(6)$$

Vemos de la ecuación (5) que la parte real u de la función analítica $f(z)$ en el centro del círculo, es igual al valor medio de u calculado alrededor de la circunferencia centrada en z_0 y de radio ρ.

De igual manera, el valor de la parte imaginaria v queda expresado por la ecuación (6).

Por lo tanto, si se conocen valores de u en ciertos puntos discretos de la circunferencia de un círculo, podemos usarlos para determinar en forma aproximada, el valor de la integral de la ecuación $u\left(x_0, y_0\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(z_0 + \rho e^{i\theta}\right)d\theta$.

De esta manera es posible encontrar un valor aproximado de u en el centro del círculo.

En el caso típico, se usan cuatro puntos de la circunferencia uniformemente separados. Este método es el fundamento de un procedimiento numèrico llamado "Método de las Diferencias Finitas", y sirve para evaluar funciones armónicas en los puntos interiores de un dominio, cuando se conocen los valores de la función sobre las fronteras de dicho dominio. Dicho método se usa en la resolución de problemas físicos que surgen en electrostática, transferencia de calor y mecánica de fluidos.

4.7.1) Aplicación del Teorema del Valor Medio de Gauss

En la práctica, el Teorema del valor Medio de Gauss se usa para calcular integrales cuyo integrando es una función de la variable θ, obviamente cuando el intervalo e integración de dicha variable es 2π.

En efecto, la ecuación (2) puede ser escrita de la forma :

$$\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + \rho\, e^{i\theta}\right)d\theta = 2\pi f(z_0)$$

pero : $f\left(z_0 + \rho\, e^{i\theta}\right) = f(\theta)$, por lo que sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene :

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 2\pi f(z_0)$$

Aplicando el teorema de la Fórmula Integral de Cauchy a esta última expresión, obtenemos :

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = \frac{1}{i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz, \qquad \text{es decir :}$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \frac{1}{i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz} \qquad (7)$$

La expresión (7) constituye una forma práctica para el cálculo de aquellas integrales que satisfacen la condiciones previstas por el Teorema del Valor Medio de Gauss. Los siguientes ejemplos ilustran lo aquí expuesto

== oo ==

4.7.2) Ejemplos Resueltos III

Ejemplo 6: Emplée cualquier versión del teorema del Valor Medio de Gauss para evaluar las siguientes integrales:

a) $I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta$ *b)* $I = \int_0^{2\pi} \cos\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right)d\theta$

c) $I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cdot\cosh(sen\theta)d\theta$

d) $I = \int_0^{2\pi} \cos(2+\cos\theta)\cdot\cosh(sen\theta)d\theta$

e) $I = \int_0^{2\pi} \cos(3+2\cos\theta)\cdot\cosh(4+2sen\theta)d\theta$

f) $I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a+\cos(n\theta)}{a^2+1+2a\cos(n\theta)}d\theta$, con: $\begin{cases} a > 1 \\ n = entero \end{cases}$

g) $I = \int_0^{2\pi} \ln\left(a^2+1+2a\cos(n\theta)\right)d\theta$, con: $\begin{cases} a > 1 \\ n = entero \end{cases}$

Soluciones:

a) Sea $f(z) = e^z$; como : $z = z_0 + \rho e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 0 + i\,0 \\ \rho = 1 \end{cases}$

Luego: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{i}\oint_C \frac{e^z}{(z-0)}dz \Leftrightarrow z = e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} dz = ie^{i\theta}d\theta \\ z_0 = 0 + i0 \\ C : \left|z-0\right| = 1 \end{cases}$

y por la Fórmula Integral de Cauchy, obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{i}\oint_C \frac{e^z}{(z-0)}dz = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{i}(2\pi i)\,e^z|_{z=0} = e^0 = 1$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta = 1$$

b) Se desea calcular $I = \int_0^{2\pi} \cos\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right) d\theta$

Se puede considerar que esta integral proviene de : $I = \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz$ si y sólo si : $f(z) = \cos z$, con

$$\left.\begin{array}{l} z = z_0 + \rho e^{i\theta} \\ z_0 = 0 + i\,0 \\ \rho = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta \\ dz = ie^{i\theta} d\theta \\ C : \left| z - 0 \right| = 1 \end{array}\right.$$

Por lo tanto:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right) d\theta = \frac{1}{i}\oint_C \frac{\cos z}{(z-0)} dz$$

Aplicando la Fórmula Integral de Cauchy a ésta última integral, se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right) d\theta = \frac{1}{i}(2\pi i)[\cos z]_{z=0} = 2\pi\cos(0) = 2\pi$$

En consecuencia: $I = \int_0^{2\pi} \cos\left(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\right) d\theta = 2\pi$

$$== \text{oo} ==$$

c) Se desea evaluar $I =: \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta) d\theta$

Evidentemente, la integral dada $I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta) d\theta$

proviene de la integral : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\text{Re}z) \cdot \cosh(\text{Im}z) d\theta$ si y sólo si:

$$\left.\begin{array}{l} z = z_0 + \rho e^{i\theta} \\ z_0 = 0 + i\,0 \\ \rho = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \\ dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta \end{array}\right.$$

Así se tiene que:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \cos(\text{Re}z) \cdot \cosh(\text{Im}z) dz \,, \ldots (1)$$

Luego, por aplicación de la Fórmula Intgegral de Cauchy al lado derecho de la ecución (1), se obtiene:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i}(2\pi i)[\cos(\text{Re}z) \cdot \cosh(\text{Im}z)]_{z=o} = 1$$

Por lo tanto:

$$I =: \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta) d\theta = 1$$

$$== \text{oo} ==$$

d) Evalúe la integral : $I = \int_0^{2\pi} \cos(2 + \cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta) d\theta$

Solución:

Hagamos : $z = \cos\theta + i\ \text{sen}\,\theta \Rightarrow \begin{cases} z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta \\ dz = ie^{i\theta}d\theta \\ z_0 = 0 + i0 \\ C : |z - 0| = 1 \end{cases}$

Aplicando el teorema del Valor Medio de Gauss, obtenemos:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(2 + \cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta)d\theta = \frac{1}{i}\oint_C \frac{\cos[2+\text{Re}(z)]\cdot\cosh[\text{Im}(z)]}{(z-0)}dz \quad ...(1)$$

Luego, por aplicación de la Fórmula Intgegral de Cauchy al lado derecho de la ecución (1), se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(2 + \cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta)d\theta = \frac{1}{i}(2\pi i)\left\{\cos\left[2 + \text{Re}(z)\right] \cdot cosh[\text{Im}(z)]\right\}_{z=0+i0}$$

de donde:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(2 + \cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta)d\theta = 2\pi\cos\left[2 + 0\right] \cdot cosh[0] = 2\pi\cos(2)$$

$$= \text{oo} =$$

e) Evalúe la integral : $I = \int_0^{2\pi} \cos(3 + 2\cos\theta) \cdot \cosh(4 + 2sen\theta)d\theta$

Solución:

Hagamos : $z = (\cos\theta + isen\theta) \Rightarrow \begin{cases} z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta \\ dz = ie^{i\theta}d\theta \\ z_0 = 0 + i0 \\ C : |z - 0| = 1 \end{cases}$

Aplicando el teorema del Valor Medio de Gauss, obtenemos:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(2 + \cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta)d\theta = \frac{1}{i}\oint_C \frac{\cos[2+2\text{Re}(z)]\cdot\cosh[2\,\text{Im}(z)]}{(z-0)}dz \quad ...(1)$$

Luego, por aplicación de la Fórmula Intgegral de Cauchy al lado derecho de la ecución (1), se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(2 + \cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta)d\theta = \frac{1}{i}(2\pi i)\left\{\cos\left[2 + 2\text{Re}(z)\right] \cdot cosh[2\,\text{Im}(z)]\right\}_{z=0+i0}$$

de donde:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(2 + \cos\theta) \cdot \cosh(sen\theta)d\theta = 2\pi\cos\left[2 + 2(0)\right] \cdot cosh[2(0)] = 2\pi\cos(2)$$

$$= \text{oo} =$$

f) Se desea evaluar: $I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a + \cos(n\theta)}{a^2+1+2a\cos(n\theta)}d\theta, \quad \begin{cases} a > 1 \\ n = entero \end{cases}$

Solución:

Considerando que : $1 = \cos^2(n\theta) + \text{sen}^2(n\theta)$, el integrando dado puede escribirse en la forma:

$$\frac{a+\cos(n\theta)}{a^2+1+2a\cos(n\theta)} = \frac{a+\cos(n\theta)}{a^2+\cos^2(n\theta)+\text{sen}^2(n\theta)+2a\cos(n\theta)} = \frac{a+\cos(n\theta)}{[a+\cos(n\theta)]^2+\text{sen}^2(n\theta)}$$

De donde:

$$\frac{a+\cos(n\theta)}{a^2+1+2a\cos(n\theta)} = \frac{a+\cos(n\theta)}{\{[a+\cos(n\theta)]+i\,\text{sen}(n\theta)\}\{[a+\cos(n\theta)]-i\,\text{sen}(n\theta)\}} \quad .....(1)$$

Por lo tanto, se observa que:

$$\frac{a+\cos(n\theta)}{a^2+1+2a\cos(n\theta)} = \text{Re}\left\{\frac{1}{[a+\cos(n\theta)]+i\,\text{sen}(n\theta)}\right\} = \text{Re}\left[\frac{1}{a+z^n}\right]$$

en donde : $z = (0+i0)+e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 0+i0 \\ dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta \\ C : |z-0| = 1 \end{cases}$

por lo que:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a+\cos(n\theta)}{a^2+1+2a\cos(n\theta)}d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{i}\oint_{|z-0|=1} \frac{\text{Re}\left[\frac{1}{a+z^n}\right]}{(z-0)}dz$$

Por aplicación de la Fórmula Integral de Cauchy a esta última integral, se obtiene:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a+\cos(n\theta)}{a^2+1+2a\cos(n\theta)}d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{i}(2\pi i)\,\text{Re}\left[\frac{1}{a+z^n}\right]_{z=z_0=0} = \text{Re}\left[\frac{1}{a}\right]$$

Es decir, $I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a+\cos(n\theta)}{a^2+1+2a\cos(n\theta)}d\theta = \frac{1}{a}$

$$== oo ==$$

g) Se desea evaluar: $I = \int_0^{2\pi} \ln\left(a^2+1+2a\cos(n\theta)\right)d\theta$, con: $\begin{cases} a > 1 \\ n = entero \end{cases}$

Nótese que :

$$a^2+1+2a\cos(n\theta) = a^2+\cos^2 n\theta+\text{sen}^2 n\theta+2a\cos(n\theta) \quad \Rightarrow$$

$$a^2+1+2a\cos(n\theta) = (a+\cos n\theta)^2+\text{sen}^2 n\theta \quad \Rightarrow$$

$$a^2+1+2a\cos(n\theta) = |a+\cos n\theta+i\,sen(n\theta)|^2 \quad \Rightarrow$$

$$a^2+1+2a\cos(n\theta) = |a+e^{in\theta}|^2 = |a+z^n|^2$$

donde : $z = (0+i0) + e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 0+i0 \\ dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta \\ C : |z-0| = 1 \end{cases}$

En consecuencia, aplicando el Teorema del Valor Medio de Gauss, se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi} \ln[a^2+1+2a\cos n\theta]d\theta = \frac{1}{i}\oint_{|z-0|=1} \frac{\ln|a+z^n|^2}{(z-0)}dz \qquad \ldots.(1)$$

Aplicando la Fórmula Integral de Cauchy al lado derecho de la ecuaciòn (1) , se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi} \ln[a^2+1+2a\cos n\theta]d\theta = \frac{1}{i}(2\pi i)\ln|a+z^n|^2 = 4\pi \ln|a+z^n|_{z=0}$$

$$I = \frac{2}{in}(2\pi i)[\ln z^n]_{z_0=a+i0} = 4\pi \ln a$$

En consecuencia :

$$I = \int_0^{2\pi} \ln\left(a^2+1+2a\cos(n\theta)\right)d\theta = 4\pi \ln a$$

== oo ==

Ejemplo 7: Emplee cualquier versión del teorema del Valor Medio de Gauss para evaluar las siguientes integrales :

a) $I = \int_0^{2\pi} \cos\left(2+3\cos 2\theta + i3\ \text{sen}2\theta\right)d\theta$

b) $I = \int_0^{2\pi} \cos(4+3\cos\theta)\cdot\cosh\left(-2+3\ \text{sen}\,\theta\right)d\theta$

Soluciones:

a) Se desea evaluar: $I = \int_0^{2\pi} \cos\left(2+3\cos 2\theta + i3\ \text{sen}2\theta\right)d\theta$

Hagamos : $z = e^{i\theta} = (\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 0+i0 \\ dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta \\ 3\cos 2\theta + i3\ \text{sen}2\theta = 3z^2 \\ C : |z| = 1 \end{cases}$

En consecuencia, aplicando el Teorema del Valor Medio de Gauss, se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos\left(2+3\cos 2\theta + i3\ \text{sen}2\theta\right)d\theta = \frac{1}{i}\oint_{|z-0|=1} \frac{\cos\left(2+3z^2\right)}{(z-0)}dz \qquad \ldots.(1)$$

Y por el Toerma de la Fórmula Integral de Cauchy, se tiene:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos\left(2+3\cos 2\theta + i3\ \text{sen}2\,\theta\right)d\theta = \frac{1}{i}(2\pi i)\left[\cos\left(2+3z^2\right)\right]_{z=2+i0} \Rightarrow$$

$$I = 2\pi\cos(2) = -2.6147$$

b) Se desea evaluar: $I = \int_0^{2\pi} \cos(4 + 3\cos\theta) \cdot \cosh\left(-2 + 3\ \text{sen}\ \theta\right) d\theta$

Hagámos : $z = e^{i\theta} = (\cos\theta + i\ \text{sen}\theta) \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 0 + i0 \\ dz = i\, e^{i\theta}\, d\theta \\ 3\cos\theta + i3\ \text{sen}\theta = 3\, z \\ C : |z| = 1 \end{cases}$

De donde: $\begin{cases} 4 + 3\cos\theta = 4 + 3\,\text{Re}[z] \\ -2 + 3\ \text{sen}\ \theta = -2 + 3\text{Im}[z] \end{cases}$

Luego, por el Toerma del Valor Mediio de Gauss, se tiene:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(4 + 3\cos\theta) \cdot \cosh\left(-2 + 3\ \text{sen}\ \theta\right) d\theta \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{i} \cdot \oint_{|z|=1} \frac{\cos[4+3\,\text{Re}(z)]\cdot\cosh[-2+3\,\text{Im}(z)]}{(z-0)} dz \quad \Rightarrow$$

Y por el Toerma de la Fórmula Integral de Cauchy, se obtiene:

$$I = \frac{1}{i}(2\pi i)\{\cos[4 + 3\text{Re}(z)] \cdot \cosh[-2 + 3\text{Im}(z)]\}_{z=0} \quad \Rightarrow$$

$$I = 2\pi\left\{\cos\left[4 + 3\ (0)\right] \cdot \cosh[-2 + 3(0)]\right\} = 2\pi\cos(4)\cosh(2) = -15.451$$

Por lo tanto:

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(4 + 3\cos\theta) \cdot \cosh(-2 + 3sen\theta) d\theta = 2\pi\cos(4)\cosh(2) = -15.451$$

== oo ==

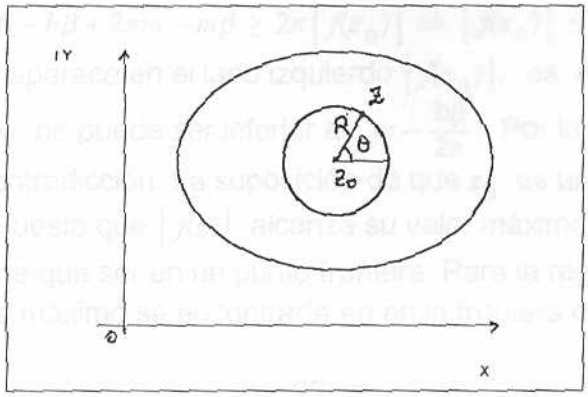
4.8) TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO

* Sea $f(z)$ una función que no es constante y que es contínua en todo punto de una región cerrada y acotada R.
* La función $f(z)$ es además analítica en todo punto interior de R.

Entonces, el valor máximo de $|f(z)|$ en R debe corresponder a un punto de la frontera de R.

Demostración:

Sea R el conjunto de puntos del contorno C mostrado en la Figura 4.10, y de su interior:



(Fig.4.15: Región R)

Supongámos que el valor máximo que adquiere $|f(z)|$ en R corresponde a un punto z_0 de esta región y llamemos m a dicho valor; es decir :

$$|f(z)|_{máximo} = |f(z_0)| = m$$

Consideremos una circunferencia C de radio R y centrada en z_0 contenida totalmente dentro de R. Como $|f(z)|$ no es constante en ninguna vecindad de z_0 podemos elegir R de tal manera que C pase por un punto z tal que . $|f(z)| < m$. Describiendo a C por medio de la ecuación : $z = z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$ tenemos que, en este punto: $|f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})| < m$.

Como $f(z)$ es una función contínua, debe existir un arco sobre C, definido entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, a lo largo del cual $|f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})| < m - b$, donde b es una contante positiva tal que $b < m$. Tenemos entonces que , a lo largo del resto del arco, $\beta \le \theta \le 2\pi$, se verifica que $|f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})| \le m$, pues $|f(z_0)| = m$ es el valor máximo de $|f(z)|$.

Por el Teorema del Valor Medio de Gauss, podemos escribir que:

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})d\theta = 2\pi f(z_0)$$

Pero:

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})d\theta = \int_0^{\beta} f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})d\theta + \int_{\beta}^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})d\theta = 2\pi f(z_0)$$

Tomando valor absoluto a ambos lados de la igualdad anterior y aplicando la desigualdad triangular, podemos escribir:

$$\left| \int_0^{\beta} f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})d\theta \right| + \left| \int_{\beta}^{2\pi} f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})d\theta \right| \ge 2\pi |f(z_0)|$$

Aplicando ahora la desigualdad ML a cada una de estas integrales,tenemos

- Para la primera integral de la izquierda: $|f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})| \le m - b$
- Para la segunda integral de la izquierda: $|f(z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta})| \le m$

En ambos casos, la cantidad L es el intervalo de integración, β y $2\pi - \beta$, respectivamente. Así, hemos obtenido que:

$$(m - b)\beta + m(2\pi - \beta) \ge 2\pi |f(z_0)|$$

De donde:

$$m\beta - b\beta + 2\pi m - m\beta \geq 2\pi \left| f(z_0) \right| \Rightarrow \left| f(z_0) \right| \leq m - \frac{b\beta}{2\pi}$$

La cantidad que aparece en el lado izquierdo $\left| f(z_0) \right|$, es m, el valor máximo de $\left| f(z) \right|$. Pero m no puede ser inferior a $m - \frac{b\beta}{2\pi}$. Por lo tanto, hemos llegado a una contradicción. La suposición de que z_0 es un punto interior a R debe ser falsa. Puesto que $\left| f(z) \right|$ alcanza su valor máximo en *algún* punto de R, este máximo tiene que ser en un punto frontera. Para la región R dada en la Figura 4.15, este máximo se encontraría en en la frontera de R.

$$= oo =$$

4.9) TEOREMA DEL MÓDULO MÍNIMO

* Sea $f(z)$ una función contínua y distinta de cero en todo punto de una región cerrada y acotada R.
* Supongámos además que la función $f(z)$ no es constante y que es analítica en todo punto interior de R.

Entonces, el valor mínimo que alcanza $\left| f(z) \right|$ en R debe corresponder a un punto de la frontera de R.

Demostración:

Obsérvese que se ha impuesto el requisito adicional de que $f(z) \neq 0, \forall z \in R$

Para ddemostrar este teorema, basta con aplicar el Teorema del Módulo Máximo a la función: $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

En efecto, como $f(z) \neq 0, \forall z \in R$, la función $\varphi(z)$ asume la continuidad y analiticidad inherentes a $f(z)$; por lo tanto, podemos aplicar el Teorema del Módulo Máximo a la función $\varphi(z)$ y establecer en consecuencia que el máximo de $\left| \varphi(z) \right|$ ocurre en un punto z_0 perteneciente a la frontera de la región R. Pero el máximo de $\varphi(z)$ es necesariamente el mínimo de $\left| f(z) \right|$, en z_0, lo que demuestra el teorema.

Ejemplo 8

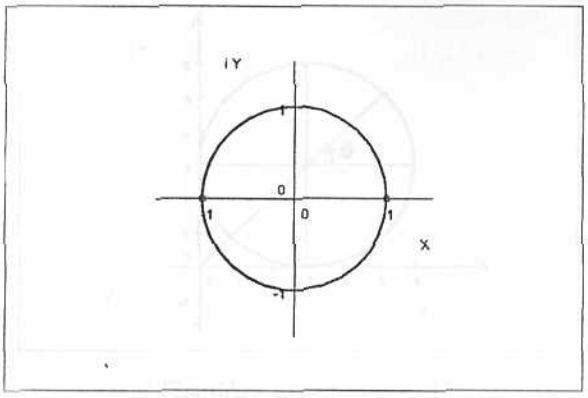
Considere la función $f(z) = e^z$ en la región $\left| z \right| \leq 1$. Determine en qué puntos de esta región alcanza $\left| f(z) \right|$ sus valores máximos y mínimos.

Solución:

Puesto que e^z es una función entera (analítica) y nunca se anula en la región considerada, el resultado debe confirmar tanto el Teorema del Módulo Máximo como el del Módulo Mínimio.

En efecto,

$$\left| f(z) \right| = \left| e^z \right| = \left| e^{x+iy} \right| = \left| e^x \right| \cdot \left| e^{iy} \right| = \left| e^x \right| = e^x$$



(Fig.4.16: Región : $|z| \leq 1$)

Ahora bien, $|f(z)|$ es máximo en el punto de la región en que e^x alcanza su valor máximo, esto es, en $x = 1,\ y = 0$.
Por otra parte, $|f(z)|$ es mínimo en el punto de la región en que e^x alcanza su valor mínimo, esto es, en $x = -1,\ y = 0$. Dichos puntos se encuentran en la frontera de la región $R : |z| = 1$, como se ilustra en la Figura 4.16.

$==$ oo $==$

Ejemplo 9
En cuentre los valores de z en R que corresponden a los valores máximos y mínimos de $|f(z)|$, para las siguientes regiones cerradas y funciones $f(z)$. Escriba los valores máximos y mínimos de $|f(z)|$ en R. Proporcione una explicación en caso de que los valores determinados no pertenezcan a la frontera de R.

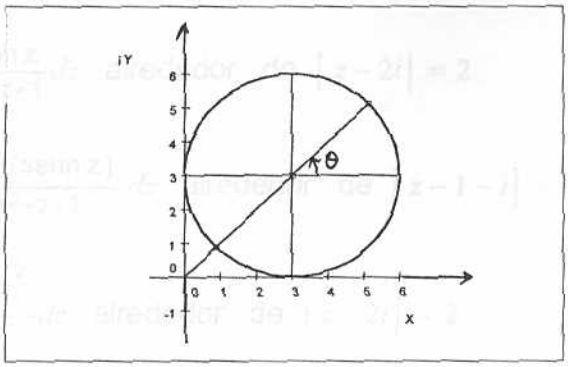
a) $f(z) = z$, $R : |z - 3 - i3| \leq 3$

b) $f(z) = z^2$, $R : |z - 1 - i| \leq 2$

c) $f(z) = e^z$, $R : |z - 1 - i| \leq 1$

d) $f(z) = \frac{1}{z+1}$, $R : |z - 1 - i| \leq 1$

Solución:
a) $f(z) = z$, $R : |z - 3 - i3| \leq 3$
Se presenta a continuación la gráfica de la región dada



(Región: $|z-1-i| \leq 1$)

$f(z) = z \Rightarrow f(\theta) = (1+i) + 3e^{i\theta} = (1+3\cos\theta) + i(1+3\text{sen}\theta)$

Luego: $|f(\theta)| = \sqrt{(1+3\cos\theta)^2 + (1+3\text{sen}\theta)^2} = \sqrt{11+6\cos\theta+6\text{sen}\theta}$

Para optimizar a esta función, hagámos : $g(\theta) = 11+6\cos\theta+6\text{sen}\theta$

Con lo cual: $\frac{d}{d\theta}g(\theta) = -6\text{sen}\theta + 6\cos\theta$; $\frac{d}{dz}g(z) = 0 \Rightarrow \text{sen}\theta = \cos\theta$

de donde: $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

Además, $\left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A(3+\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3+\frac{3\sqrt{2}}{2}) \\ \theta = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow B(3-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3-\frac{3\sqrt{2}}{2}) \end{array} \right\}$. Nótese que ambos

puntos pertenecen a la frontera de la región R : $\left| z-3-i3 \right| \leq 3$

== oo ==

4.10) EJERCICIOS PROPUESTOS II

Use el Teorema de Cauchy - Goursat, la Fórmula Integral de Cauchy o su Extensión, según corresponda, para evaluar las siguientes integrales:

1°) $\oint_C \frac{dz}{e^z(z-2)}$ alrededor de $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

2°) $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{(\cos z + \text{sen}z)}{(z^2+25)(z+1)}dz$ alrededor de $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

3°) $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2+z+1}dz$ alrededor de $(x-1)^2(y-1)^2 = 1$

4°) $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\operatorname{senh} z}{z^2+z+1}dz$ alrededor de $|z-2i|=2$

5°) $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos(\operatorname{senh} z)}{z^2+z+1}dz$ alrededor de $|z-1-i|=\frac{3}{2}$

6°) $\oint_C \frac{\left[\ln\left(\frac{z}{e}\right)\right]^2}{z^2+z+1}dz$ alrededor de $|z-2i|=2$

7°) $\oint_C \frac{\operatorname{sen}\left(e^z+\cos z\right)}{(z-1)^2(z+3)}dz$ alrededor de $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

8°) $\oint_C \frac{e^{3z}}{(z-2i)(z-1)^2}dz$ alrededor de $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

9°) $\oint_C \frac{\cos(2z)}{z^{20}}dz$ alrededor de $|z|=1$

10°) $\oint_C \frac{\cos(2z)}{z^{21}}dz$ alrededor de $|z|=1$

11°) *a)* Demuestre que: $\oint_C \frac{e^{az}}{z^{n+1}}dz = 2\pi i\frac{a^n}{n!}$, siendo $C: |z|=1$

b) Demuestre que, si a es real, entonces de la integral anterior se deduce que:

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cos[a\operatorname{sen}\theta - n\theta]d\theta = 2\pi\frac{a^n}{n!}$$ y además:

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\operatorname{sen}\left[a\operatorname{sen}\theta - n\theta\right]d\theta = 0$$

12°) *a)* Sea $f(z)$ una función analítica, tanto sobre un contorno cerrado simple C como en su interior. Sean z_1 y z_2 dos puntos del interior de C. Demuestre que:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz = \frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)} + \frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)}$$

b) Sea $f(z)$ una función con las mismas propiedades que en el apartado *a)* y sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ puntos del interior de C. Suponga que $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tienen valores numéricos distintos. Generalice el método del apartado a) para probar que:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}dz = \frac{f(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\cdots(z_1-z_n)} +$$

$$+\frac{f(z_2)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)\cdots(z_2-z_n)} +$$

$$+\cdots+\frac{f(z_n)}{(z_n-z_1)(z_n-z_2)\cdots(z_n-z_{n-1})}$$

13°) Evalúe las siguientes integrales, alrededor del contorno cerrado simple C que se indica, recorrido en sentido positivo:

a) $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos(z-1)}{(z+1)(z-2)}dz \quad , \quad C : |z| = 3$

b) $\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)}dz$, C : cuadrado de vertices $\begin{cases} z = \pm 2 \\ z = \pm 2i \end{cases}$

c) $\oint_C \frac{\ln z}{z^2-z+1/2}dz \quad , \quad C : |z-1| = \frac{8}{9}$

d) $\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)^2}dz \quad , \quad C : |z| = 3$

e) $\oint_C \frac{2e^z+2\cos z-4}{z}dz$,.....$C : |z| = 1$

f) $\oint_C \frac{\cosh z + \operatorname{sen} 2z}{z-\frac{i\pi}{2}}dz$,...$C : |z| = 3$

g) $\oint_C \frac{z^3+2z^2+z+2}{z-i}dz$,....$C : |z| = 2$

h) $\oint_C \left(\frac{2}{z+2} + \frac{5}{z-2}\right)dz$,.....$C : |z| = 3$

i) $\oint_C \frac{dz}{z(z+2)}$,.....$C : |z| = 3$

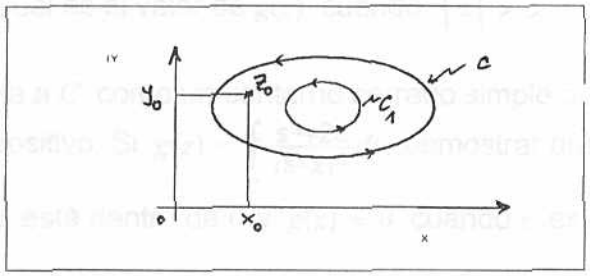
j) $\oint_C \frac{z^2+z+4}{z^4+z^3-z^2+z-2}dz$,.....$C : |z| = 3$

k) $\oint_C \frac{z^3}{z^4-1}dz$,.....$C : |z| = 2$

l) $\oint_C \frac{2e^{2z}\cosh^2 z}{(z-i\pi)(z+3i\pi)}\,dz \quad ,\ldots\ldots\ldots C: |z| = 2\pi$

m) $\oint_C \frac{z^2-6}{z^4-z^2-20}\,dz \quad ,\ldots\ldots\ldots C: |z| = 2.1$

14°) Sea D un dominio doblemente conexo limitado por los contornos cerrados simples C y C_1 como ilustra la siguiente figura:



(D : Dominio doblemente conexo)

Sea $f(z)$ una función analítica en D así como en sus fronteras, y sea z_0 un punto de D. Obsérvese que $f(z)$ no es necesariamente analítica en el interior de C_1. Demuestre que:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = f(z_0) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$$

15°) Integre las siguientes funciones en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, alrededor de la circunferencia $|z| = 2$. (Donde proceda, n es un entero positivo y a es cualquier número)

a) $\frac{z^2}{(z-i)^2}$ *b)* $\frac{z^4}{(z-3i)^2}$ *c)* $\frac{e^{\pi z}}{z^2}$ *d)* $\frac{(\cos z)}{z^2}$ *e)* $\frac{(\cos z)}{z^3}$

f) $\frac{z^3}{(z+1)^3}$ *g)* $\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z^3}$ *h)* $\frac{e^z \operatorname{sen} z}{z^2}$ *i)* $\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$ *j)* $\frac{e^{z^2}}{z^3}$

k) $\frac{e^z}{z^n}$ *l)* $\frac{e^{az}}{z^{n+1}}$ *m)* $\frac{\operatorname{sen} z}{z^{2n}}$ *n)* $\frac{\cos z}{z^{2n}}$ *o)* $\frac{z^n}{(z+1)^{n+1}}$

p) $\frac{\operatorname{senh}(az)}{z^4}$

16°) Sea C la circunferencia unitaria descrita desde $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$,

a) Demuestre que $\oint_C \frac{e^{kz}}{z}dz = 2\pi i \quad (k \in R)$

b) Use el resultado anterior para probar que :

$$\oint_C e^{k\cos\theta}\cos\left(k\operatorname{sen}\theta\right)d\theta = \pi$$

17°) Si C es la circunferencia $|z| = 3$ descrita en sentido positivo y

$$g(z) = \oint_C \frac{2s^2-s-2}{s-2}ds \quad , |z| \neq 3,$$

a) Demuestre que: $g(z) = 6\pi iz$

b) ¿Cuál es el valor de $g(z)$ cuando $|z| > 3$?

18°) Se denota a C como un contorno cerrado simple descrito en el sentido positivo. Si $g(z) = \oint_C \frac{s^3+2s}{(s-z)^3}ds$, demostrar que $g(z) = 6\pi iz$ cuando z está dentro de C y $g(z) = 0$ cuando z está fuera de C.

19°) Sea C la frontera del cuadrado cuyos lados se encuentran a lo largo de las rectas $x = \pm 2$ y $y = \pm 2$, donde C está descrita en sentido positivo. Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales:

a) $\oint_C \frac{e^{-z}}{z-\frac{\pi i}{2}}dz$; *b*) $\oint_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}dz$; *c*) $\oint_C \frac{z}{2z+1}dz$

d) $\oint_C \frac{\tan\left(\frac{z}{2}\right)}{z-x_0}dz$, $(-2 > x_0 < 2)$; *e*) $\oint_C \frac{\cosh z}{z^4}dz$

20°) Encontrar el valor de la integral de $g(z)$ alrededor del contorno simple $|z-i| = 2$ en el sentido positivo, cuando:

a) $g(z) = \frac{1}{z^2+1}$; *b*) $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$

21°) Si dispone de las herramientas matemáticas para evaluar las siguientes integrales, hágalo; en caso contrario, calcule una cota superior del valor absoluto de las mismas:

a) $I = \oint_{|z-1|=2} \frac{\ln z^{-1}}{(z-2)}dz$ *b*) $I = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z-1)\operatorname{sen}z}dz$

22°) En cuentre los valores de z en R que corresponden a los valores máximos y mínimos de $|f(z)|$, para las siguientes regiones cerradas y funciones $f(z)$. Escriba los valores máximos y mínimos de $|f(z)|$ en R. Proporcione una explicación en caso de que los valores determinados

no pertenezcan a la frontera de R.

a) $f(z) = z \quad , \; R : |z-1-i| \leq 1$

b) $f(z) = z^2 \quad , \; R : |z-1-i| \leq 2$

c) $f(z) = e^z \quad , \; R : |z-1-i| \leq 1$

d) $f(z) = \frac{1}{z+1} \quad , \; R : |z-1-i| \leq 1$

$$= \text{oo} =$$

CAPÍTULO V

SUCESIONES Y SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS COMPLEJOS

5.1) INTRODUCIÓN

Las sucesiones y series infinitas son básicas en el análisis complejo y sus aplicaciones. En el presente capítulo se definirán las sucesiones, series y nociones relacionadas ; se estudiarán los criterios para la convergencia y divergencia de dichas series y se demostrará que, en particular, las series de potencias representan funciones analíticas.

El hecho de que, recíprocamente, las funciones analíticas siempre pueden representarse mediante series de potencias, se demostrará en el capítulo VI, donde se desarrollarán las Series de Taylor y de Laurent.

Los conceptos del presente capítulo son semejantes a los del análisis real, no obstante, el mismo se ha concebido autocontenido e independiente.

5.2) SUCESIONES

Si a cada entero positivo n se le asigna un número Z_n , entonces se dice que estos números forman una "Sucesión Infinita" o, brevemente, una sucesión.

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, \cdots, & N, & \cdots, & n, & \cdots \\ Z_1, & Z_2, & Z_3, \cdots, & Z_N, & \cdots, & Z_n, & \cdots \end{array} \right\}$$

A los números Z_n se les llama **"términos"** de la sucesión. Una sucesión cuyos términos son reales, se llama **" sucesión real " .**

5.2.1) Límite de una sucesión

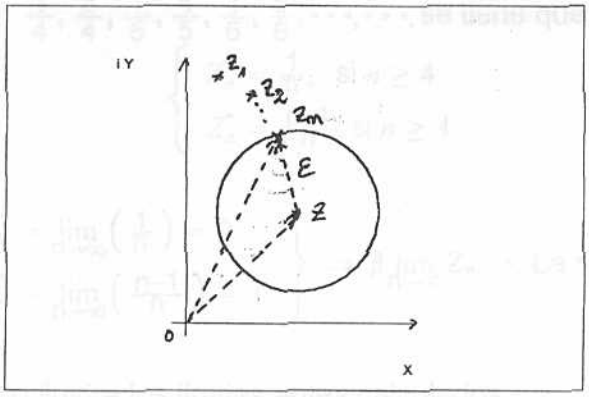
Una sucesión infinita : $Z_1, Z_2, Z_3 \cdots, Zn, \cdots$ tiene límite Z, si para todo número positivo ε existe un número entero positino N tal que :

$$|Z_n - Z| < \varepsilon \text{ , siempre que } n > N$$

y se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} Z_n = Z$$

Geométricamente, esto significa que para valores suficientemente grandes de n , los puntos Z_n están situados de manera arbitraria próximos al punto Z, como se esquematiza en la Figura 5.1



(Fig. 5.1)

5.2.2) Sucesión Convergente

Una sucesión es convergente, si tiene límite y se dice que converge al número $Z = \lim_{n\to\infty} Z_n$.

5.2.3) Sucesión Divergente

Una sucesión que no es convergente, es divergente.

5.2.4) Ejemplos Resueltos I

Ejemplo 1

La sucesión cuyos términos son: $Z_n = 1 + \frac{2}{n}$, $(n = 1,2,3,\cdots)$, es decir:

$$3,\ 2,\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{7}{5},\ \cdots$$

es convergente pues tiene límite cuando $n \to \infty$, tal que $Z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$.

En efecto,

$$|Z_n - Z| = \left|1 + \frac{2}{n} - 1\right| = \left|\frac{2}{n}\right| < \varepsilon\ ;\ \frac{2}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Por lo que: $n > \frac{1}{\varepsilon}$

Por ejemplo, si se elige $\varepsilon = 0.01$, entoces $n > 200$.

Es decir, $\left|1 + \frac{2}{201} - 1\right| = \frac{2}{201} < 0.01$

$$== oo ==$$

Ejemplo 2

Demuestre que las sucesiónes cuyos términos son:

$1,2,3,\cdots$, y $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \cdots$, son divergentes.

Solución:

En efecto, para la sucesión $Z_n = n$, se tiene que: $\lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty}(n) = \infty \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} Z_n$ no existe.

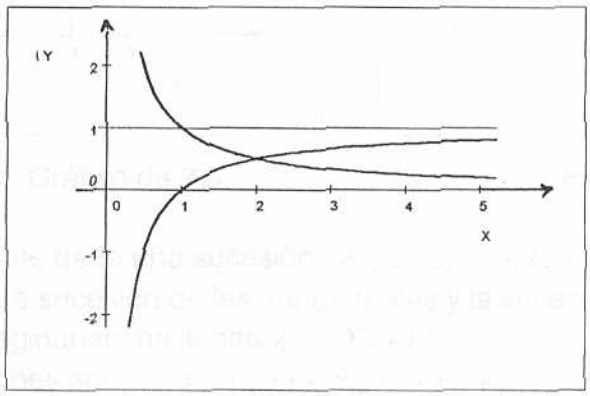
Para la sucesión : $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \cdots, \cdots,$ se tiene que :

$$\begin{cases} Z_n' = \frac{1}{n}, & \text{si } n \geq 4 \\ Z_n'' = \frac{n-1}{n}, & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$$

Luego,

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} Z_n' = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} Z_n'' = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} Z_n \Rightarrow \text{ La sucesión es divergente.}$$

El siguiente gráfico ilustra los límites antes calculados



(Fig.5.2: Gráficas de $\frac{1}{n}$ y de $\frac{n-1}{n}$)

== oo ==

Ejemplo 3

Estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión: $Z_n = \frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n}$

Solución :

La sucesión dada es : $1+i3,\ \frac{3}{2}+i2,\ \frac{5}{3}+i\frac{5}{3},\ \frac{7}{4}+i\frac{3}{2}, \cdots,$

Para dicha sucesión, se tiene que: $\begin{cases} \text{Re}(Z_n) = 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \cdots \Rightarrow Z_n' = \frac{2n+1}{n+1} \\ \text{Im}(Z_n) = 3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \cdots \Rightarrow Z_n'' = \frac{n+2}{n} \end{cases}$

Por lo tanto : $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} Z_n' = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = 2 \\ \\ \lim\limits_{n\to\infty} Z_n'' = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Z_n = Z = 2+i \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} Z_n,$

por lo que la sucesión es convergente.

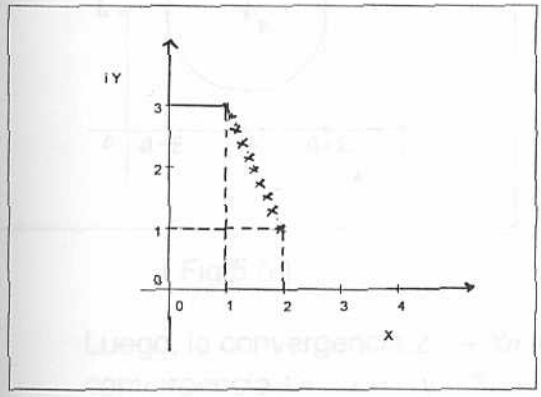
En efecto, $|Z_n - Z| = \left| \frac{2n-1}{n} + i\frac{n+2}{n} - (2+i) \right| = \left| -\frac{1}{n} + i\frac{2}{n} \right| = \frac{\sqrt{5}}{n} < \varepsilon$

De donde:

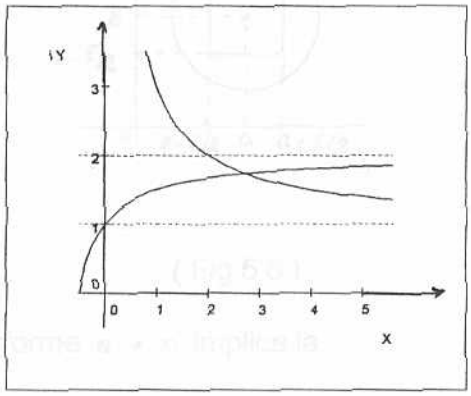
$$n > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} = \frac{2.236\cdots}{\varepsilon}$$

Por ejemplo, si $\varepsilon = 0.01$, entonces $|Z_n - Z| < \varepsilon$ cuando $n \geq 224$

Los siguientes gráficos ilustran el comportamiento de Z_n al incrementarse el valor de n (Fig.5.3) y los límites antes calculados (Fig.5.4)



(Fig.5.3: Gráfico de Z_n)



(Fig. 5.4)

NOTA: Obsérvese que, dada una sucesión : $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_n, \cdots$, puede considerarse la sucesión de las partes reales y la sucesión de las partes imaginarias, haciendo $Z_n = X_n + iY_n$.

Estas sucesiones son: $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ y $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots$

Por ejemplo, en el ejemplo 3, las dos sucesiones son:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \cdots \quad \text{y} \quad 3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \cdots$$

Se demostró que la parte real tiende a 2 y la parte imaginaria a 1.

Lo aquí expuesto se enuncia en el siguiente teorema:

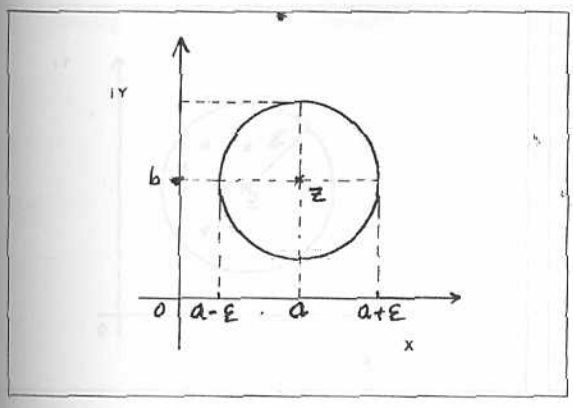
TEOREMA:

Una sucesión $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_n, \cdots$ de números complejos con $Z_n = X_n + iY_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ converge al límite $Z = a + ib$, si y sólo si, la sucesión de las partes reales $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ converge a "a" y la sucesión de las partes imaginarias $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, \cdots$ converge a "y".

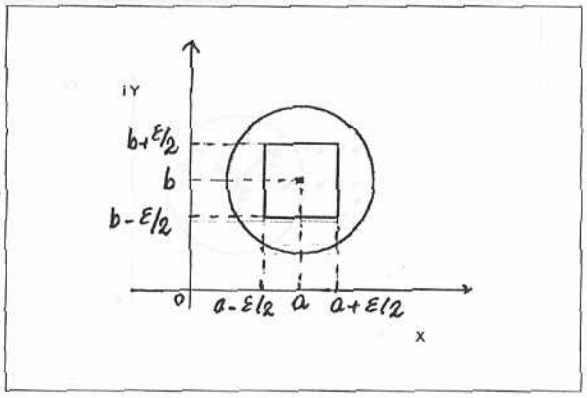
Demostración:

Si $|Z_n - Z| < \varepsilon$, entonces $Z_n = Xn + iY_n$ está dentro de la circunferencia de radio ε alrededor de $z = a + ib$, de modo que, necesariamente (ver Fig 5.5) :

$$|X_n - a| < \varepsilon \ , \ |Y_n - b| < \varepsilon$$



(Fig.5.5)



(Fig.5.6)

Luego, la convergencia $Z_n \to Xn$ conforme $n \to \infty$ implica la convergencia $Xn \to a$ y $Y_n \to b$.
Inversamente, si $Xn \to a$ y $Y_n \to b$ conforme $n \to \infty$, entonces, para $\varepsilon > 0$ dado, puede elegirse N tan grande que, para todo $n > N$,

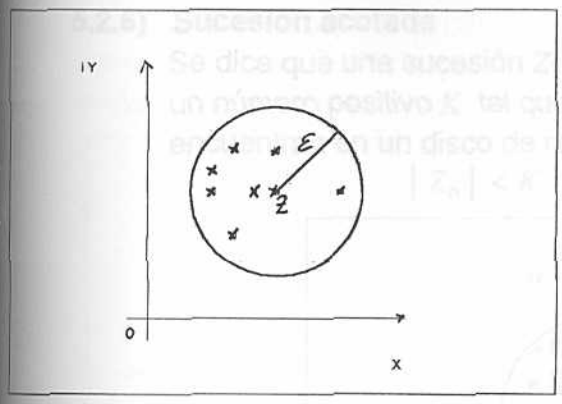
$$|X_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |Y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Estas dos desigualdades implican que $Z_n = X_n + iY_n$ se encuentran en un cuadrado con centro en Z y lado ε, como muestra la Fig.5.6. De aquí que Z_n debe concentrarse dentro de un círculo de radio ε alrededor de Z, lo que completa el teorema.

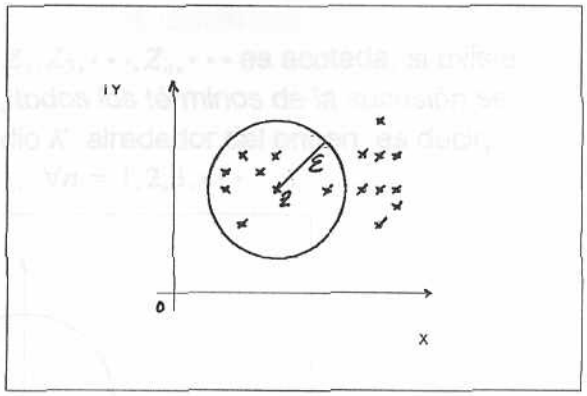
Este teorema demuetra que, estudiando la parte real e imaginaria, la convergencia de las sucesiones complejas puede referirse a la de sucesiones reales.

5.2.5) Definición : Punto Límite

El punto $Z = \lim_{n\to\infty} Z_n = a + ib$, recibe el nombre de **"Punto Límite"** de la sucesión $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_n, \cdots$, si, dado $\varepsilon > 0$ (no importa que tan pequeño sea), se cumple que $|Z_n - Z| < \varepsilon$, para un número infinito de sub-índices n.
Geométricamente hablando, esto significa que un número infinito de términos de la sucesión se encuentran dentro de la circunferencia de radio ε, aldedor de Z, sin importar que tan pequeño se elija el radio ε (Figura 5.7).



(Fig. 5.7)



(Fig. 5.8)

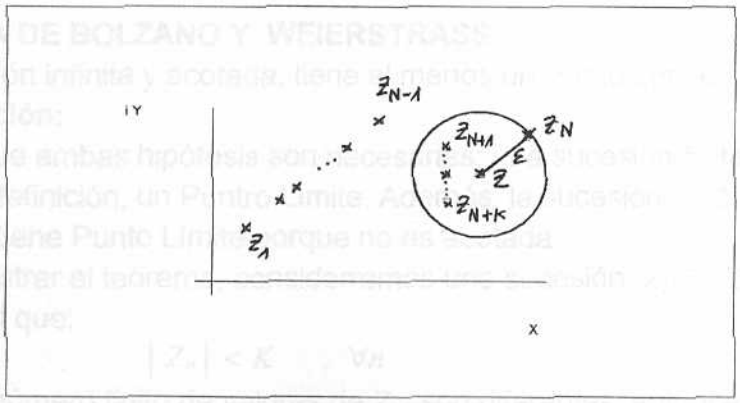
Nótese que si se cumple la desigualdad anterior, todavía puede haber un número infinito de términos que se encuentran fuera de la circunferencia, (Fig.5.8), por lo que la sucesión puede no ser convergente. De hecho, si una sucesión tiene más de un Punto Límite, diverge. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

Ejemplo 4:

SUCESIÓN	**Puntos Límites en:**	**CONVERGE O DIVERGE**
$1,2,3,$	Ninguno	Divergente
$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\ldots$	$Z=1$	Convergente
$\frac{1}{2},2,\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},4,\ldots$	$Z=0, Ninguno$	Divergente
$\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\ldots$	$Z=0,1$	Divergente (Tiene más de un P.L.)

Por lo tanto, una sucesión puede tener uno o más puntos límites y no ser convergente.

La Figura 5.9 ilustra el concepto de Punto Límite:

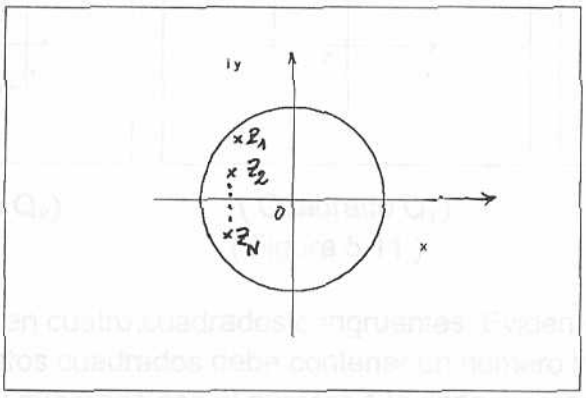


(Fig. 5.9)

5.2.6) Sucesión acotada

Se dice que una sucesión $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_n, \cdots$ es acotada, si existe un número positivo K tal que, todos los términos de la sucesión se encuentran en un disco de radio K alrededor del origen, es decir,

$$|Z_n| < K \quad , \forall n = 1,2,3,\cdots$$



(Fig. 5.10)

Por ejemplo, la segunda y la última sucesiones del ejemplo anterior, son acotadas, mientras que la primera y la tercera no lo son.

Se observa también que las dos sucesiones acotadas tienen puntos límites. En efecto:

a) La sucesión: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \Rightarrow Z_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Z_n = 1$

b) La sucesión:
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots \Rightarrow Z_n = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Z_n = 0 \\ \\ \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots \Rightarrow Z_n = \frac{n+2}{n+3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Z_n = 1 \end{array} \right\}$$

En este caso, a medida que n crece, los términos se agrupan alrededor de los puntos 0 y 1. Esto ilustra el importante *teorema siguiente:*

5.3) TEOREMA DE BOLZANO Y WEIERSTRASS

Una sucesión infinita y acotada, tiene al menos un Punto Límite.

Demostración:

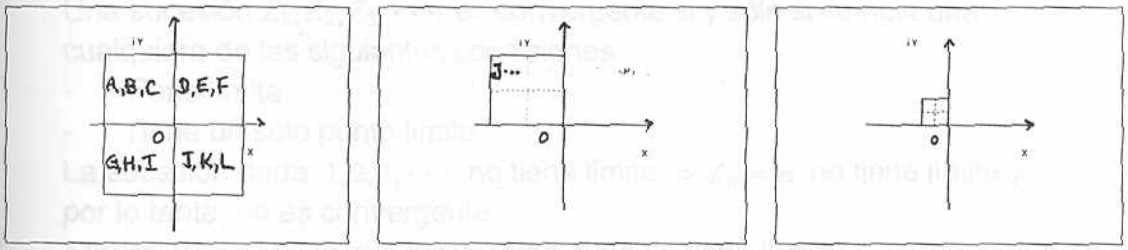
Es obvio que ambas hipótesis son necesarias: una sucesión finita no puede tener, por definición, un Puntro Límite. Además, la sucesión : $1,2,3,\ldots$ aunque infinita, no tiene Punto Límite porque no es acotada.

Para demostrar el teorema, considerremos una sucesión: $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_n, \cdots$ y sea K tal que:

$$|Z_n| < K \quad , \forall n$$

Si sólo un número finito de valores de Z_n son diferentes, entonces, como la sucesión es infinita, algún número Z debe ocurrir un número infinito de veces en la sucesión y, por definición, este número es un Punto Límite de la sucesión .

Ahora puede estudiarse el caso en el que la sucesión contiene un número infinito de términos diferentes. Trácese el cuadrado grande Q_0 de la Figura 5.11 el cual contiene todos los Z_n.



(Cuadrado Q_0) (Cuadrado Q_1) (Cuadrado Q_2)

(Figura 5.11)

Subdivídase Q_0 en cuatro cuadrados congruentes. Evidentemente, por lo menos uno de estos cuadrados debe contener un número infinito de términos de la sucesión. El cuadrado con el número 1 lo denominaremos Q_1. Este es el primer paso.

En el segundo paso, subdivídase Q_1 en cuatro cuadrados congruentes y selecciónese un cuadrado Q_2, de acuerdo con las mismas reglas y así sucesivamente. Esto proprciona una sucesión infinita de cuadrados : $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots, Q_n, \ldots$,con la propiedad de que el lado de Q_n tiende a cero, conforme n tiende a infinito y Q_m contiene a todos los Q_n, pues $n > m$.

No es difícil ver que el número que pertenece a todos estos cuadrados, llamémosle $z = a$, es un Punto Límite de la sucesión.

En efecto, dado un $\varepsilon > 0$, puede elegirse un N tan grande, que el lado del cuadrado Q_N es menor que ε, y como Q_N contiene un número infinito de terminos Z_n , se tiene que: $|Z_n - a| < \varepsilon$, para un número infinito de valores de n. Esto completa la demostración.

$= oo =$

Ejemplo 5

Para las siguientes sucesiones, estudiar si son o no acotadas, convergentes, existencia de límite y de puntos límite.

a) $1, 2, 3, \cdots$ b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

Solución :

a) La sucesión dada es: $Z_n = 1, 2, 3, \cdots$

* Es acotada ?

* Una sucesión $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$, se dice que es acotada, si existe un número positivo K tal que, todos los términos de ella se encuentran en un disco radio K , centrado en el origen de coordenadas; es decir, $|Z_n| < K, \forall n$ (Ver Fig.5.10).

Obviamente, la sucesión :$1, 2, 3, \cdots$, no es acotada pues por grande que

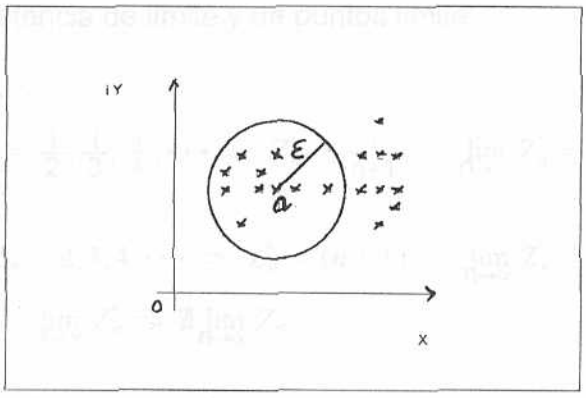
sea K, siempre existirán $Z_n = n > K$ que estarán fuera del círculo descrito.

* **Convergencia:**
Una sucesión $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$, es convergente si y sólo si cumple una cualquiera de las siguientes condiciones:
- Tiene límite
- Tiene un sólo punto límite

La sucesión dada: $1, 2, 3, \cdots$, no tiene límite $\Rightarrow Z_n = n$ no tiene límite y por lo tanto, no es convergente

* **Límite**: ya se indicó que la sucesión dada no tiene límite

* **Puntos límite:** Un punto $z = a$ recibe el nombre de Punto Límite de una sucesión, si dado $\varepsilon > 0$ se verifica que: $|Z_n - a| < \varepsilon$, para un número infinito de sub-índices n. Geométricamente hablando, esto significa que un número infinito de términos Z_n se encuentran dentro de la circunferencia de radio ε centrada en a, sin importar que tan pequeño se elija el radio ε. (Ver Fig. 5.7 y 5.8).
Nótese que si se cumple la desigualdad $|Z_n - a| < \varepsilon$, todavía puede haber un núnero infinito de términos que se encuentran fuera del círculo antes descrito y la sucesión puede entonces no ser convergente.
En consecuencia, una sucesión puede tener punto límite (o puntos límite) y no ser convergente.
Evidentemente, la sucesión $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$, dado $Z = a$ y un $\varepsilon > 0$, el número de términos dentro del círculo no es infinito (es necesariamente finito), por lo tanto, dicha sucesión no tiene Punto Límite.



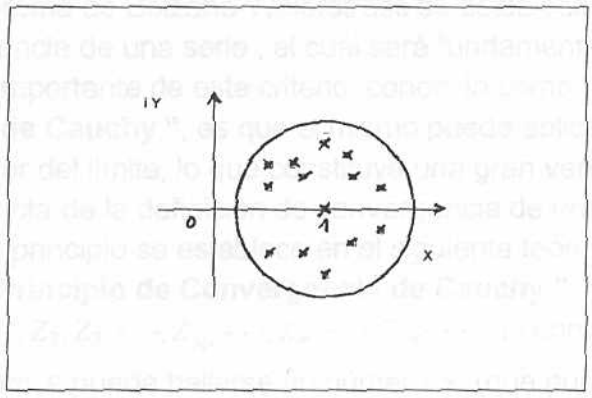
(Fig. 5.12)

$=$ oo $=$

b) La sucesión dada es : $Z_n = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$

* $Z_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, luego, tomando $K = 1$, se tiene que $|Z_n| < K = 1$, por lo tanto, la sucesión es acotada.

* **Convergencia:**
  La sucesión dada: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$, tiene límite y por lo tanto, es convergente
* **Límite**: ya se indicó que la sucesión dada tiene $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$
* **Puntos límite:**
  Evidentemente, para la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$, dado $Z = 1$ y un $\varepsilon > 0$, el número de términos dentro del círculo de radio 1 es infinito y no existen términos fuera de dicho círculo (Ver Fig.5.14), por lo tanto, dicha sucesión tiene un sólo punto límite en $a = 1$.



(Fig.5.14)

== oo ==

Ejemplo 6

Para la siguiente sucesion: $\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \cdots$ estudiar si es o no acotada, convergente, existencia de límite y de puntos límite.

Solución :

* Es acotada ?

$$\begin{cases} Z'_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \Rightarrow Z'_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Z'_n = 0 \\ Z''_n = 2, 3, 4, \cdots \Rightarrow Z''_n = (n+1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} Z''_n = \infty \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} Z'_n \neq \lim_{n\to\infty} Z''_n \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} Z_n$$

Evidentemente, por grande que sea K , siempre existirán términos $Z''_n = (n+1)$ fuera del círculo (Ver Fig.5.12). Por lo tanto, la sucesión no es acotada.

* **Convergencia:**
  Como ya se indicó, la sucesión no tiene límite, por lo tanto, no es convergente.
* **Límite**: Ya se indicó que la sucesión no tiene límite.
* **Puntos Límite:**

$$\begin{cases} Z'_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \Rightarrow \text{ tiene un punto límite en : } a = 0 \\ Z''_n = 2, 3, 4, \cdots \Rightarrow Z''_n \text{ no tiene punto limite} \end{cases}$$

En consecuencia, la sucesión tiene un sólo punto límite y es divergente, ya que $Z''_n = 2, 3, 4, \cdots$ no tiene límite.

$$= \infty =$$

5.4) PRINCIPIO DE CONVERGENCIA DE CAUCHY

Mediante el Teorema de Bolzano-Weierstrass se establece un criterio general para la convergencia de una serie , el cual será fundamental en nuestros estudios posteriores. Lo importante de este criterio, conocido como **" Principio de Convergencia de Cauchy "**, es que el mismo puede aplicarse sin conocer de antemano el valor del límite, lo que constituye una gran ventaja si se compara con la aplicación directa de la definición de convergencia de una sucesión, antes expuesta. Dicho principio se establece en el siguiente teorema :

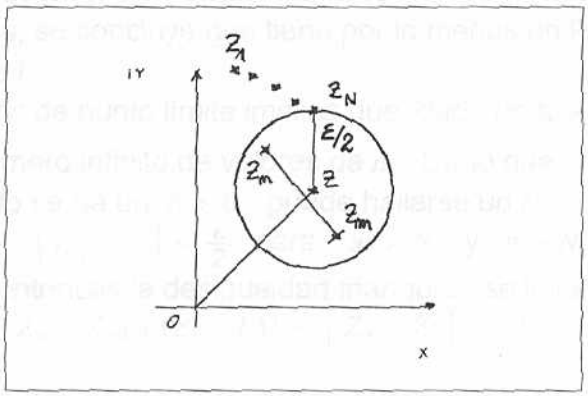
TEOREMA : " Principio de Convergencia de Cauchy "

Una sucesión: $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_N, \cdots, Z_m, \cdots, Z_n, \cdots$ es convergente si, y sólo si, para cada número ε puede hallarse un número N (que puede depender de ε) tal que:

$$|Z_m - Z_n| < \varepsilon, \text{ cuando } m > N \quad \text{y} \quad n > N$$

es decir, dos términos cualesquiera Z_m y Z_n, con $m > N$ y $n > N$, deben tener una distancia entre si menor que ε.

La Figura 5.15 ilustra esta condición.



(Fig. 5.15)

Demostración :

a) Sea una sucesión $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_N, \cdots, Z_m, \cdots, Z_n, \cdots$ convergente con límite Z. Entonces, para $\varepsilon > 0$ puede hallarse un N tal que:

$$\left\{ \begin{array}{l} |Z_m - Z| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |Z_n - Z| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right\} \quad \text{para todo } n > N$$

De aquí que, cuando $m > N$ y $n > N$, entonces por la desigualdad del

triángulo, podemos escribir:

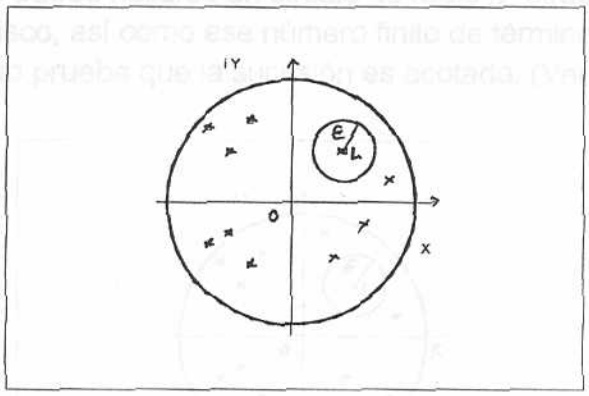
$$|Z_m - Z_n| < |(Z_m - Z) - (Z_n - Z)| \leq |Z_m - Z| + |Z_n - Z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo cual demuestra que, si la sucesión converge, se cumple que :

$$|Z_m - Z_n| < \varepsilon$$

b) Inversamente, sea una sucesión $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots, Z_N, \cdots, Z_m, \cdots, Z_n, \cdots$, para la cual se cumple que $|Z_m - Z_n| < \varepsilon$ cuando $m > N$ y $n > N$. Esta inecuación implica que todo Z_m, con $m > N$, se encuentra en un disco de radio ε alrededor de Z_n y sólo un número finito de términos de la sucesión no se encuentran en ese disco.

Es evidente que puede hallarse un círculo alrededor del origen tan grande que tanto el círculo de radio ε como ese número infinito de términos de Z_n se encuentren dentro de él, como muestra la Figura 5.16



(Fig.5.16)

Esto demuestra que la sucesión es acotada y, por el Teorema de Bolazno-Weierstrass, se concluye que tiene por lo menos un Punto Límite, llamémosle L.

La definición de punto límite implica que, dado un $\varepsilon > 0 \Rightarrow |Z_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ para un número infinito de valores de n . Dado que $|Z_n - Z_n| < \varepsilon$, se cumple que, cuando se da un $\varepsilon > 0$, puede hallarse un N^* tal que:

$$|Z_n - Z_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para } m > N^* \text{ y } n > N^*$$

Aplicando entonces la desigualdad triangular, se tiene:

$$|Z_m - L| = |(Z_m - Z_n) + (Z_n - L)| \leq |Z_m - Z_n| + |Z_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

es decir,

$$|Z_m - L| < \varepsilon \ , \ \forall m > N^*$$

Por definición, esto significa que la sucesión es convergente, con límite L, lo que completa el teorema.

== oo ==

5.5) PROPIEDAD DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES

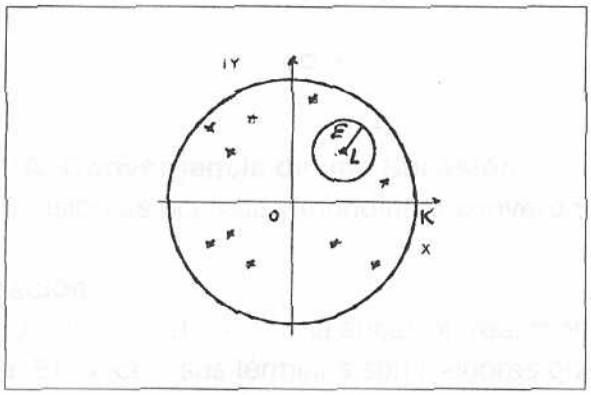
La propiedad que sigue, relativa a las sucesiones convergentes,es casi obvia. La enunciaremos en el siguiente teorema:

Teorema:

Una sucesión convergente es acotada. Consecuentemente, si no es acotada, diverge.

Demostración:

Sea la sucesión : $Z_1, Z_2, \cdots$ convergente con límite L. Entonces puede elegirse un $\varepsilon > 0$ y hallarse un N correspondiente, tal que todo Z_n con $n > N$ se encuentre en el disco de radio ε con centro en L; cuando más, un número finito de términos pueden no estar en ese disco, como se ilustra a continuación en la Figura 5.17 Es evidente que puede hallarse un círculo de radio K alrdedor del origen, tan grande que el disco, así como ese número finito de términos, se encuentren dentro de él. Ésto prueba que la sucesión es acotada. (Ver Figura 5.17).



(Fig.5.17)

Obsérvese con cuidado que la condición de este teorema (existencia del límite L) es sólo necesaria para la convergencia, pero no suficiente para ésta. Esto queda ilustrado por la última sucesión del Ejemplo 1, la cual es acotada pero tiene dos puntos límite y, por lo tanto, al no tener límite, es divergente. La primera y tercera de las sucesiones del ejemplo citado, no son acotadas y, por este teorema, se concluye que son divergentes.

Lo aquí expuesto, hace obligante el encontrar una condición que sea suficiente para la convergencia de una sucesión. Con este fín, se requiere definir previamente los siguientes conceptos:

5.5.1) Sucesión Monótona Creciente

Una sucesión real : $X_1, X_2, X_3, \cdots\cdots X_n, \cdots$ es monótona creciente si:

$$X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \cdots\cdots \leq X_n \leq \cdots$$

De modo semejante, se dice que una sucesión es Monótona Decreciente si:

$$X_1 \geq X_2 \geq X_3 \geq \cdots \geq X_n \geq \cdots$$

Una sucesión es Monótona cuando es monótona creciente o monótona decreciente.

Por ejemplo, las sucesiones: $\left\{ \begin{array}{l} 1, 2, 3, \cdots \\ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots \end{array} \right\}$ son monótonas

mientras que las sucesiones: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \cdots \\ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \cdots \end{array} \right\}$ no son monótonas.

Se observa que la sucesión: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$ es acotada y monótona, y se demostrará a continuación que estas dos propiedades juntas, son suficientes para garantizar la convergencia de la sucesión.

$$= \text{oo} =$$

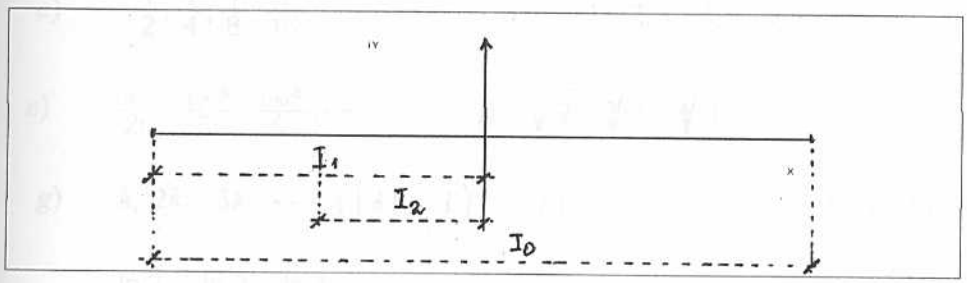
5.5.2) TEOREMA: Convergencia de una Sucesión

Si una sucesión es acotada y monótona, converge

Demostración:

Sean $X_1, X_2, X_3, \cdots X_n, \cdots$ una sucesión real monótona creciente y acotada. Entonces, sus términos son menores que algún número B y, ya que $X_1 \leq X_n, \forall n$, estos términos se encuentran en el intervalo $X_1 \leq X_n \leq B$, el cual se denotará por I_0.

Biséquese I_0, es decir, subdivídase en dos partes de igual longitud, como muestra la Figura 5.18



(Fig.5.18 : Intervalo $I_0 = [X_1, B]$)

Si la mitad derecha de I_0 junto con sus puntos extremos), contiene términos de la sucesión, denótese por I_1.

Si no contiene términos de la sucesión, entonces, la mitad izquierda de I_0 (junto con sus extremos), es I_1. Este es el primer paso.
En el segundo paso, biséquese I_1 , selecciónese una de las mitades mediante la misma regla y nómbrese I_2 , y así sucesivamnete.
De esta forma se obtienen más y más cortes de $I_0, I_1, I_2, \cdots$ con las propiedades siguientes:

- Cada I_m contiene todos los I_n , para $n > m$.
- Ningún término de la sucesión se encuentra a la derecha de I_m.
- Como la sucesión es monótona creciente, todos los X_n con $n > N$ se encuentran en I_m.
- Las longitudes de los intervalos I_m tienden a cero conforme $m \to \infty$.

De aquí que existe un número, llamémosle L, que se encuentra en todos estos intervalos; ahora puede demostrarse que la sucesión es convergente con límite L.
En efecto, dado $\varepsilon > 0$, se elige un m tal que la longitud de I_m sea menor que ε. Entonces, L y todos los X_n con $n < m$ se encuentran en I_m y, por lo tanto, $|X_n - L| < \varepsilon$, $\forall n$.
Esto completa la demostración para una sucesión creciente. Para una sucesión decreciente. la demostración es la misma, excepto por un intercambio apropiado de "izquierda" y "derecha" en la construcción de esos intervalos.

5.6) EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Para las siguientes sucesiones reales, estudiar si son o no acotadas, su convergencia y monotonia:

a) $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \cdots$ b) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{5}, \cdots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ d) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \cdots$

e) $\frac{100^2}{2!}, \frac{100^3}{3!}, \frac{100^4}{4!}, \cdots$ f) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \cdots$

g) $k, 2k^2, 3k^3, \cdots, (|k| < 1)$ h) $c, 2^2c^2, 3^2c^3, 4^2c^4, \cdots, (|c| < 1)$

i) $\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}, \frac{\ln 4}{4}, \cdots$

2) ¿Son acotadas las sucesiones siguientes $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$? ¿Son convergentes? Encuentre sus puntos límite.

a) $Z_n = (2i)^n$ b) $Z_n = 1 + i^n$

c) $Z_n = (-1)^n + \frac{i}{n}$ d) $Z_n = e^{in\pi/2}$

d) $Z_n = e^{in\pi/2}$ e) $Z_n = i^n \cos n\pi$

f) $Z_n = i^n \cosh n\pi$ g) $Z_n = (1-i)^n$

h) $Z_n = \frac{(1+i)^{2n}}{2}$ i) $Z_n = \frac{(3+4i)^n}{n!}$

= oo =

CAPÍTULO VI

SERIES INFINITAS DE TÉRMINOS COMPLEJOS

6.1) INTRODUCCIÓN

Sin duda, el alumno ya está familiarizado con las series infinitas de funciones de variable real. Como ejemplos típicos podemos citar .

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

y

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{(x+1)}{4} + \frac{(x+1)^2}{8} + \cdots$$

Las sumas infinitas que aquí aparecen se conocen como: **" Series de Potencias"** debido a que todos los términos son de la forma $(x - x_0)^n$, donde x_0 es una constante real, y $n \geq 0$ es un entero.

En el presente capítulo se obtendrán representaciones en serie para funciones de una variable compleja $z = x + iy$. Dichas series contendrán términos complejos de la forma $(z - z_0)^n$, donde z_0 es una constante compleja cualquiera.

Esta clase de series es interesante por varias razones:

a) En primer lugar, existe un estrecho vínculo entre la analiticidad de una función y la posibilidad de que dicha función sea representada por medio de una serie de potencias.

b) En segundo lugar,como ocurre en las series reales, las series complejas son útiles para efectuar aproximaciones numéricas. Por ejemplo, tomando sólo tres términos del desarrollo de e^x, se obtiene:

$$e^{0.2} = 1 + 0.2 + \frac{0.02}{2} = 1.22$$

resultado que difiere del valor exacto ($e = 1.221402\ldots$) en menos de un 0.15%. La exactitud mejora aún más si se toma un mayor número de términos.

c) En tercer lugar, las series de potencias también sirven para obtener aproximaciones numéricas del valor de integrales que no pueden calcularse en términos de funciones comunes. Por ejemplo, ante el problema de calcular: $I = \int_0^{0.2} \frac{(e^x - 1)}{x} dx$, se puede optar por alcular la primitiva de $\frac{(e^x - 1)}{x}$ en una tabla de integrales. Pero no la encontraríamos. Sin embargo, se puede obtener un valor aproximado de esta integral si sustituímos la expresión e^x del integrando, por, digamos, los tres primeros términos del desarrollo en serie antes

señalado. Una vez hecho esto, el problema consiste en determinar el valor de integrales inmediatas, lo que se lleva a cabo fácilmente:

$$I = \int_0^{0.2} \frac{(e^x - 1)}{x} dx = \int_0^{0.2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 0.22133$$

Luego, dado el desarrollo en serie de e^z podríamos proceder en manera análoga para calcular: $I = \int_0^{0.2+0.3i} \frac{(e^z - 1)}{z} dz$ a lo largo de cualquier trayectoria que contenga lo límites señalados.

d) Por último, podemos decir que el desarrollo en serie de potencias es muy utilizado en la resolución de ecuaciones diferenciales.

6.2) SERIE DE POTENCIAS

El desarrollo en serie de potencias de la función real $f(x)$ es de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n = C_0 + C_1 (x - x_0) + C_2 (x - x_0)^2 + \cdots \quad \ldots\ldots(1)$$

donde:

Los números $C_0, C_1, C_2, \cdots$ se llaman "Coeficientes" del desarrollo.

El cálculo de estos coeficientes se realiza a través de la siguiente fórmula: $C_n = \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}$

Cuando los coeficientes así obtenidos se introducen en la ecuación (1), se obtiene el desarrollo conocido como: **Serie de Taylor** de la fución $f(x)$, alrededor del punto x_0, quedando:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \quad \ldots.(2)$$

donde $R_n(x)$ se llama "Resíduo".

Otra forma de escribir la Serie de Taylor es:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

En el caso particular en que $x_0 = 0$, la serie así obtenida recibe también el nombre de: **"Serie de MacLaurin"** de $f(x)$, la cual se puede escribir como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(0)}{n!}(x)^n$$

6.2.1) Observaciones a la Serie de Taylor

a) Si intentamos efectuar el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, obtenemos:

$$x^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x)^n, \qquad \text{con } C_n = \frac{f^{(n}(x_0)}{n!}$$

Pero $x^{\frac{1}{2}}$ no tiene derivadas de ningún orden en $x = 0$. Por lo tanto, no todas las funciones poseen desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto x_0.

b) Otra dificultad que surge en el desarrollo en serie de Taylor se refiere a los valores de la variable para los cuales es válida la serie calculada. Esto se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo:

Sea $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{(x+1)}{4} + \frac{(x+1)^2}{8} + \cdots$

Si sustituímos $x = -\frac{1}{2}$ obtenemos:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \cdots$$

Sumando los cuatro primeros términos de la derecha se obtiene como resultado: 0.664 , por lo que concluimos que la suma infinita tiende a $\frac{2}{3} = 0.666\cdots$

Sin embargo, si tomamos $x = 2$, obtenemos el absurdo :

$$-1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \cdots$$

Es evidente que la suma infinita no arrojará el valor numérico -1, lo que demuestra que existen valores de x para los cuales la serie de Taylor no es válida. Esto ocurre frecuentemente, tanto en series de potencias de variable real como en serie de potencias de funciones de variable compleja.

Nuestro objetivo entonces consiste en determinar cuales son las funciones $f(z)$ que pueden representarse por medio de una serie de potencias, cómo se obtiene dicha serie y para qué valores de la variable z la serie representa efectivamente (converge) a la función $f(z)$. En consecuencia, antes de iniciar el estudio de las series de potencias con variable compleja, es necesario precisar el significado del término "Convergente", conocer las propiedades de las series convergentes y los criterios de convergencia de las mismas.

6.3) SERIES DE TÉRMINOS COMPLEJOS

La mayor parte de las definiciones y teoremas relacionados con las series infinitas de términos reales pueden aplicarse con poco o ningún cambio a series cuyos términos sean complejos.

6.3.1) Serie Infinita de Términos Complejos

Sea : $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \cdots, f_n(z), \cdots$ una sucesión de funciones de

variable compleja z y llamemos a cada $f_n(z)$ "término".
Se llama " Serie Infinita de Términos Complejos" a la suma:

$$f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

Ejemplos de estas series son:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz} = 1+e^{z}+e^{2z}+e^{3z}+\cdots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} = \frac{(z-1)}{1!}+\frac{(z-1)^2}{2!}+\frac{(z-1)^3}{3!}+\cdots$

6.3.2) Sumas Parciales

Se define como suma parcial, a las sumas finitas:

$S_1(z) = f_1(z)$
$S_2(z) = f_1(z)+f_2(z)$
.
.
.
$S_n(z) = f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)+\cdots+f_n(z)$

La suma de los n primeros términos de la serie se conoce como:
" Suma n-ésima Parcial" de la serie infinita y está dada por:

$$Sn(z) = \sum_{j=1}^{n} f_j(z)$$

6.3.3) Sucesión de funciones

Las sumas parciales, $S_1(z), S_2(z), \cdots, S_n(z), \cdots$ constituyen una sucesión de funciones.

Por ejmplo, si la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nz}$, entoces, la sucesión de sumas parciales es : $e^{z}, e^{z}+e^{2z}, e^{z}+e^{2z}+e^{3z}, \cdots$

6.4) CONVERGENCIA ORDINARIA DE UNA SERIE INFINITA

6.4.1) Límite

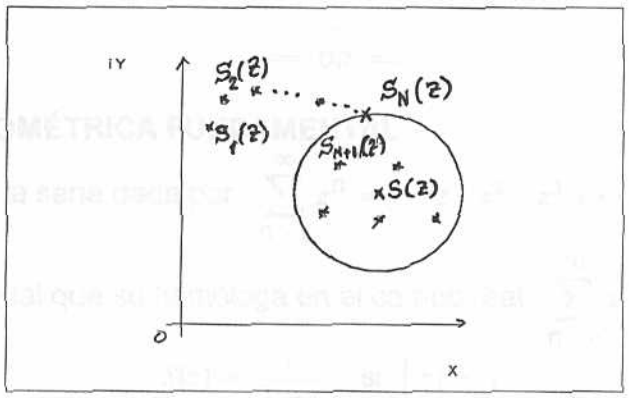
Si la suma n-ésima parcial $S_n(z)$ construída a partir de la serie infinita dada, tiene por límite $S(z)$ cuando $n \to \infty$, se dice que dicha serie infinita tiene limite, y escribimos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$$

En tal supuesto, dado un $\varepsilon > 0$, existe un entero N tal que:

$$\left| S_n(z) - S(z) \right| < \varepsilon \ , \ \forall n > N$$

lo que gráficamente podemos representar por:



(Fig.6.1 :Límite de una serie infinita)

6.4.2) Convergencia Ordinaria

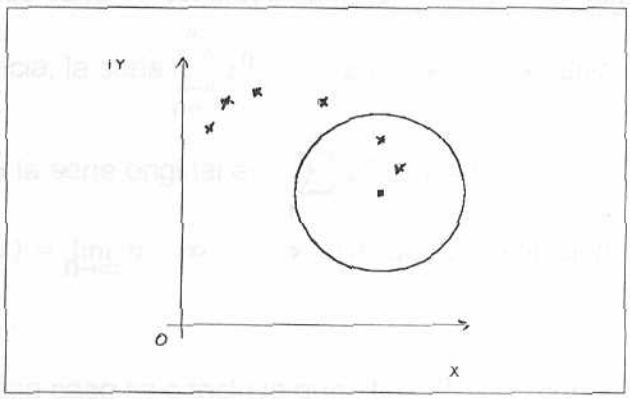
Si $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = S(z) \neq \infty$, entonces se dice que la serie dada converge en forma ordinaria y que su suma es $S(z)$. En este caso, se dice también que la serie dada es Ordinariamente Convergente.

Si la suma n-ésima parcial $S_n(z)$ no tiene límite cuando $n \to \infty$, se dice que la serie simplemente diverge.

6.4.3) Región de Convergencia

El conjunto de valores de z para los cuales la serie converge, se conoce como **" Región de Convergencia "** de la serie.

Si z es un punto de esa región, entonces: $S(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$



(Fig. 6.2 :Región de Convergencia)

Observación

Obsérvese que la diferencia $S(z) - S_n(z)$ no es otra cosa que el resíduo después de los n primeros términos, es decir:

$$R_n(z) = S(z) - S_n(z)$$

Así pues, la definición de convergenia requiere que: $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$

== oo ==

6.5) LA SERIE GEOMÉTRICA FUNDAMENTAL

Se llama así a la serie dada por : $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$

Esta serie, al igual que su homóloga en el campo real : $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, converge a :

$$S(z) = \frac{1}{1-z}, \text{ si } |z| < 1$$

Demostración:

La n-ésima suma parcial es: $S_n(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}$

Luego:

$$S_n(z) - z\,S_n(z) = (1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1}) - (z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n)$$

De donde:

$$S_n(z) - zS_n(z) = 1 - z^n \quad \Rightarrow \quad S_n(z)(1-z) = 1 - z^n$$

De modo que :

$$S_n(z) = \frac{1-z^n}{(1-z)} \Rightarrow S_n(z) = \frac{1}{(1-z)} - \frac{z^n}{(1-z)} \quad \text{por lo tanto :}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(1-z)} - \frac{z^n}{(1-z)}\right] = \frac{1}{(1-z)} - \lim_{n\to\infty}\frac{z^n}{(1-z)}$$

Para evaluar esta expresión, es necesario considerar los siguientes casos:

a) $|z| > 1$

En este caso caso se concluye que: $|z^n| = |z|^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z^n$ no existe, y en consecuencia, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ diverge por definición.

b) $|z| = 1 \Rightarrow$ la serie original es : $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = n \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty} n = \infty \quad \Rightarrow$ diverge por definición.

c) $|z| < 1$

En este caso caso se concluye que : $\lim_{n\to\infty} z^n \to 0$, cundo $n \to \infty$, y en consecuencia $\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \frac{1}{(1-z)}$, por lo que se dice que la serie geométrica:

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$ converge a : $\frac{1}{(1-z)}$, si y sólo si : $|z| < 1$

En consecuencia, la serie geométrica funfamental $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es convergente y tiene por suma al valor $\frac{1}{(1-z)}$, si y sólo si: $|z| < 1$

En resumen, podemos escribir entonces que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{(1-z)}, \quad \Leftrightarrow \quad |z| < 1$$

== oo ==

Ejemplo 1

Obtenga la suma : $\sum_{n=0}^{\infty} e^{inz} = 1 + e^{iz} + e^{i2z} + \cdots$ y determine su región de convergencia.

Solución:

Usando la expresión para la suma de una serie geométrtica que se demostró en el ejemplo anterior, se tiene:

$$1 + e^{iz} + e^{i2z} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{iz}} \quad , \quad \text{si} \quad |e^{iz}| < 1$$

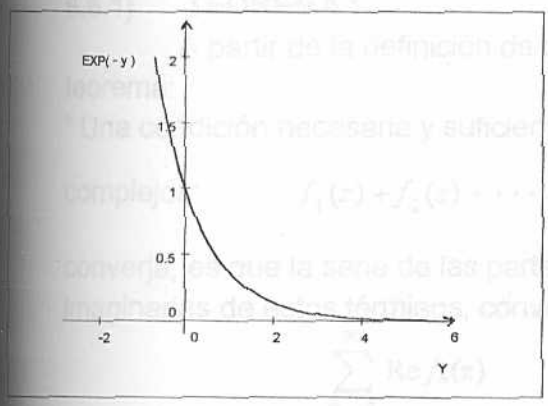
La región de convergencia será: $|e^{iz}| < 1$, ahora bien:

$$|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{ix}e^{-y}| = |e^{ix}| \cdot |e^{-y}| = |e^{-y}| = e^{-y}$$

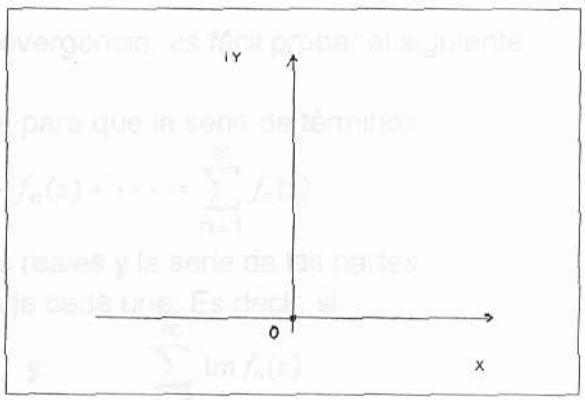
Luego, la región de convergencia dada por : $|e^{iz}| < 1$ se convierte así en

$$e^{-y} < 1$$

La gráfica de e^{-y} contra "y" (Figura 6.4), muestra claramente que esta desigualdad se satisface únicamenete cuando $y > 0$, es decir, cuando: $\text{Im} z > 0$, como muestra la Figura 6.5



(Fig. 6.4): e^{-y} *vs.* y



(Fig. 6.5 : $\text{Im}[z] > 0$)

Ejemplo 2

Obtenga la suma : $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz} = 1 + e^{z} + e^{2z} + \cdots$ y determine su región de convergencia.

Solución:

$1 + e^{z} + e^{2z} + \cdots = \frac{1}{1-e^{z}} \Leftrightarrow |e^{z}| < 1$

La región de convergencia será: $|e^{iz}| < 1$, ahora bien:

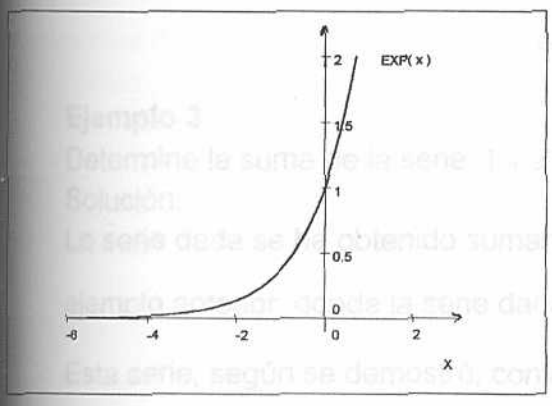
$$|e^{z}| = |e^{(x+iy)}| = |e^{x}e^{iy}| = |e^{x}| \cdot |e^{iy}| = |e^{x}| = e^{x}$$

Luego, la región de convergencia dada por : $|e^{z}| < 1$ se convierte así en

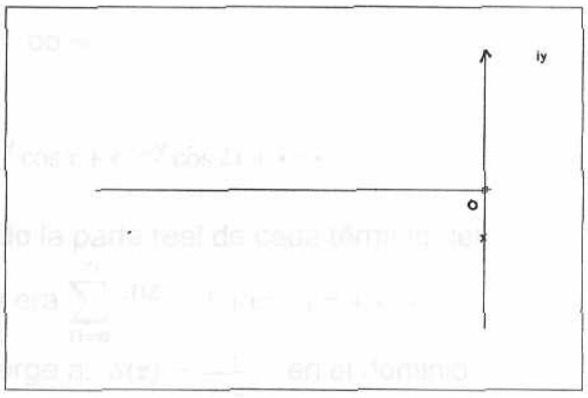
$$e^{x} < 1$$

La gráfica de e^{x} contra "x" (Figura 6.6), muestra claramente que esta desigualdad se satisface únicamenete cuando $x < 0$, es decir, cuando:

$$\mathrm{Re}z < 0 \quad \text{(Ver Fig. 6.7)}$$



(Fig. 6.6): e^{x} *vs.* x



(Fig. 6.7 : $\mathrm{Re}[z] < 0$)

6.6) CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE INFINITA

6.6.1) TEOREMA :

A partir de la definición de covergencia, es fácil probar el siguiente teorema:

" Una condición necesaria y suficiente para que la serie de términos complejos: $f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

converja, es que la serie de las partes reales y la serie de las partes imaginarias de estos términos, converja cada una. Es decir, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, f_n(z) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, f_n(z)$$

convergen hacia las respectivas funciones $R(z)$ e $I(z)$, entonces la serie

dada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, converge a : $R(z) + i\,I(z)$.

El teorema puede entonces enunciarse como sigue:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, f_n(z)$ converge a $R(z)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, f_n(z)$ converge a $I(z)$

entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge a $S(z) = R(z) + i\,I(z)$.

Recíprocamente, si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge a $S(z) = R(z) + i\,I(z)$

entonces : $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, f_n(z)$ converge a $R(z)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, f_n(z)$ converge a $I(z)$.

Demostración: Dada la evidencia del planteamiento, dejamos al interasado la demostración del presente teorema.

$$=\!=\ \text{oo}\ =\!=$$

Ejemplo 3

Determine la suma de la serie: $1 + e^{-y}\cos x + e^{-2y}\cos 2x + \cdots$

Solución:

La serie dada se ha obtenido sumando la parte real de cada término del ejemplo anterior, donde la serie dada era: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz} = 1 + e^{z} + e^{2z} + \cdots$

Esta serie, según se demostró, converge a: $S(z) = \frac{1}{1-e^{iz}}$ en el dominio $\mathrm{Im}\, z > 0$. En consecuencia, de acuerdo con el teorema anterior, la serie de este ejemplo converge a : $\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-e^{iz}}\right]$, en dicho dominio $(\mathrm{Im}\, z > 0)$.

Para determinar la parte real aquí expuesta en términos de las variables independientes x e y, multipliquemos por $e^{-\frac{iz}{2}}$ dicha expresión, con lo cual

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-e^{iz}}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-\frac{iz}{2}}}{e^{-\frac{iz}{2}} - e^{\frac{iz}{2}}}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{\cos\left(\frac{z}{2}\right) - i\,\mathrm{senh}\left(\frac{z}{2}\right)}{-2i\,\mathrm{senh}\left(\frac{z}{2}\right)}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i}{2}\cot\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]$$

Ahora bien,

$\cot\left(\frac{z}{2}\right) = \dfrac{\mathrm{sen}\, x - i\,\mathrm{senh}\, y}{\cosh y - \cos x}$ por lo que sustituyendo en la expresión anterior:

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-e^{iz}}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i}{2}\frac{\mathrm{sen}\, x - i\,\mathrm{senh}\, y}{\cosh y - \cos x} + \frac{1}{2}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{i\,\mathrm{sen}\, x + \mathrm{senh}\, y}{2(\cosh y - \cos x)} + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1-e^{iz}}\right] = \frac{\mathrm{senh}\, y}{2(\cosh y - \cos x)} + \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$1+e^{-y}\cos x+e^{-2y}\cos 2x+\cdots=\frac{\text{senh y}}{2(\cosh y-\cos x)}+\frac{1}{2},\quad \text{para: } y>0$$

$$= oo =$$

6.6.2) TEOREMA: Criterio del Término n-ésimo (Criterio de Divergencia)

El criterio del término n-ésimo que se demuestra en el Cálculo General para el caso de una serie real, es también válido en el caso complejo. Este resultado se expresa en el siguiente teorema:

" La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots$ diverge si: $\lim_{n\to\infty} f_n(z)\neq 0$ o de manera equivalente, si $\lim_{n\to\infty}|f_n(z)|\neq 0$ ".

Dicho informalmente, si los términos de una serie no comienzan a reducirse a cero en algún momento, la serie no puede converger. Obsévese que en este teorema no aparece la expresión "si y sólo si"; esto se debe a que existen series divergentes cuyo n-ésimo término tiende a cero cuando $n\to\infty$. Por tal motivo, este criterio encuentra su mejor aplicación en demostrar , si es el caso, la **divergencia** de ciertas series, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4:

Use el Teorema del término n-ésimo para estudiar la convergencia y divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$.

Solución:

Tenemos que: $f_n(z)=z^{n-1}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|f_n(z)|=\lim_{n\to\infty}|z^{n-1}|=\lim_{n\to\infty}|z|^{n-1}$.

Caso 1:

Si $|z|=1$, entonces, $\lim_{n\to\infty}|f_n(z)|=\lim_{n\to\infty}|z|^{n-1}=1^{\infty}=1\neq 0$

Como este límite es diferente de cero, la serie diverge por el Criterio del término n-ésimo aquí expuesto.

Caso 2:

Si $|z|>1$, entonces, $\lim_{n\to\infty}|f_n(z)|=\lim_{n\to\infty}|z|^{n-1}=\infty\neq 0$

por lo que la serie diverge por el mismo criterio.

Caso 3:

Si $|z|<1$, entonces, $\lim_{n\to\infty}|f_n(z)|=\lim_{n\to\infty}|z|^{n-1}=0$

por lo que, en este caso, el criterio del término n-ésimo no proporciona información acerca de la convergencia o divergencia de la serie dada.

Nótese no obstante que la serie dada es la serie geométrica:

$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$, la cual, según ya se demostró, converge a $S(z) = \frac{1}{1-z}$, si $|z| < 1$.

En resumen, la serie dada : $\begin{cases} \text{Diverge si } |z| \geq 1 \\ \text{Converge si } |z| < 1 \end{cases}$

$= oo =$

Ejemplo 5

Demostrar que la serie armónica : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ diverge.

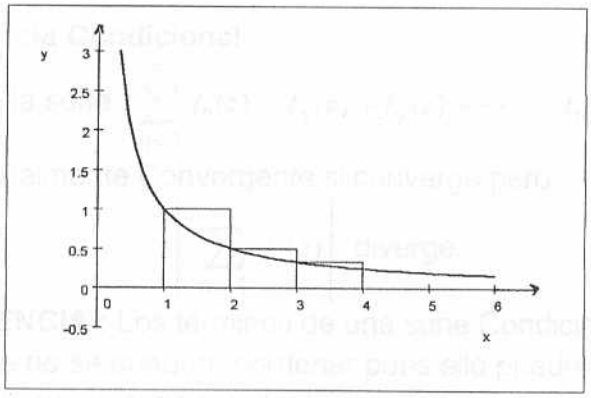
Demostración:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \quad \Rightarrow |f_n(z)| = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

por lo que el criterio del término general no proporciona información sobre la convergencia o divergencia de la serie propuesta.

Sin embargo, $S_n(z) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \Rightarrow S_n(z)$ es igual a la suma de las áreas de los rectángulos de la Figura 6.3. Esta área es mayor que el área A_n bajo la porción correspondiente de la curva : $y = \frac{1}{x}$, siendo:

$$A_n = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \to \infty \text{ cuando } n \to \infty.$$



(Fig.6.8)

Como:

$S_n(z) > A_n$ se concluye que $S_n(z) \to \infty$ conforme $n \to \infty$, lo cual significa que la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ es divergente.

$= oo =$

6.6.3) DEFINICIONES:

a) Convergencia Absoluta

Dada la serie : $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$ ...(1)

si los valores absolutos de los términos de esta serie forman una serie convergente, se dice que la serie dada (1) es Absolutamente Convergente. Es decir, la serie :

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$ es Absolutamente Convergente

si la serie:

$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right| = |f_1(z)| + |f_2(z)| + \cdots + |f_n(z)| + \cdots$, es convergente.

NOTA:

Es posible que la serie de los módulos de los términos diverja, mientras que la serie original converge. La Convergencia Absoluta es entonces importante porque es una condición suficiente para la convergencia de una serie, pero no necesaria.

CONSECUENCIA : Los términos de una serie Absolutamente Convergente se pueden reordenar de cualquier manera sin que se afecte la suma de la serie.

$= oo =$

b) Convergencia Condicional

Se dice que la serie : $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$

es Condicionalmente Convergente si converge pero:

$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right|$ diverge.

CONSECUENCIA : Los términos de una serie Condicionalmente Convergente no se pueden reordenar pues ello puede alterar la suma o incluso hacer que la serie resultante sea divergente.

c) Resumen:

Lo antes expuesto permite concluir en los siguientes tres teoremas:

Teorema 1:

Una serie Absolutamente Convergente también converge en el sentido ordinario.

Teorema 2:

La suma de una serie Absolutamente Convergente, es independiente

del orden en que se sumen los términos.

Teorema 3: Producto de Cauchy

Dos series Absolutamente Convergente pueden multiplicarse una por otra, de la misma manera que se multiplican polinomios, La serie que resulta de esta operación es Absolutamente Convergente. Además, su suma $S(z)$, que no depende del orden de los términos, es también el producto de las sumas de la series originales $[S(z) = S_1(z) \cdot S_2(z)]$.

En efecto:

Sean : $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S_1(z)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) = S_2(z)$

Entonces, el producto de estas series será:

$$[f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots] \cdot [g_1(z) + g_2(z) + \cdots + g_n(z) + \cdots] = S_1(z) \cdot S_2(z)$$

por lo que:

$$f_1 g_1 + (f_1 g_2 + f_2 g_1) + (f_1 g_3 + f_2 g_2 + f_3 g_1) + \cdots = S_1(z) \cdot S_2(z)$$

Si hacemos:

$C_1 = f_1 g_1$ (Suma de sub-índices igual a 2)

$C_2 = f_1 g_2 + f_2 g_1$ (Suma de sub-índices igual a 3)

$C_3 = f_1 g_3 + f_2 g_2 + f_3 g_1$ (Suma de sub-índices igual a 4)

.

.

.

$C_n = \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot g_{n-j+1}$ (Suma de sub-índices igual a : $n+1$)

Entonces podemos escribir que : $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(z) = S_1(z) \cdot S_2(z)$

Es decir, la suma de la serie resultante es igual al producto de las sumas de las series originales.

NOTA: Obsérvese que cada coeficiente C_n está formado por la suma del producto de aquellos términos cuya suma de sub-índices es :

$$j + (n - j + 1) = n + 1$$

6.6.4) Criterio del Cociente (o Prueba de la Razón)

De todos los criterios para estudiar la convergencia de las series infinitas, el más útil probablemente es el conocido como "Criterio del Cociente" o "Pueba de la Razón" y que se aplica tanto a series de términos complejos como a las de términos reales.

Dicho criterio se enuncia a continuación:

Teorema:

Para la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$

consideremos la expresión: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = |R(z)|$

Entonces:

* La serie dada Converge Absolutamente para aquellos valores de z para los cuales : $0 \le |R(z)| < 1$.
* La serie dada Diverge para aquellos valores de z para los cuales $|R(z)| > 1$.
* Los valores de z para los cuales $|R(z)| = 1$, la prueba de la razón no proporciona información alguna acerca de la convergencia o divergencia de dicha serie.

NOTA: En este caso, se puede aplicar cualquier otro de los criterios conocidos y evaluar el resultado, tal como se ilustra en el ejemplo que se presenta a continuación.

.

== oo ==

.

Ejemplo 6

Use el Criterio del Término General y el Criterio de Término n-ésimo para estudiar la convergencia de la serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\,(2)^{n+1} \cdot z^{2n} = -4z^2 + 16z^4 - 48z^6 + \cdots$$

Solución:

$$\begin{cases} f_n(z) = (-1)^n n(2)^{n+1} \cdot z^{2n} \\ f_{n+1}(z) = (-1)^{n+1}(n+1)(2)^{n+2} \cdot z^{2(n+1)} \end{cases}$$

luego:

$$\left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(2)^{n+2} \cdot z^{2(n+1)}}{(-1)^n n(2)^{n+1} \cdot z^{2n}} \right| = \left| \frac{n+1}{n} 2z^2 \right| \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} 2z^2 \right| = |2z^2| = 2|z^2| = 2|z|^2$$

Por lo tanto

a) La serie dada converge absolutamente si : $2|z|^2 < 1$, es decir, si $|z| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Es decir, la serie converge absolutamente cuando z está en el interior de un círculo de radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, centrado en el origen.

b) La serie dada diverge cuando : $2|z|^2 > 1$, es decir, si $|z| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Es decir, la serie diverge cuando z está fuera de dicho círculo.

c) En el caso: $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ se tiene que $R(z) = \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = 1$, por lo que, en este caso, el Criterio del Cociente no aporta información sobre la convergencia o divergencia de la serie.

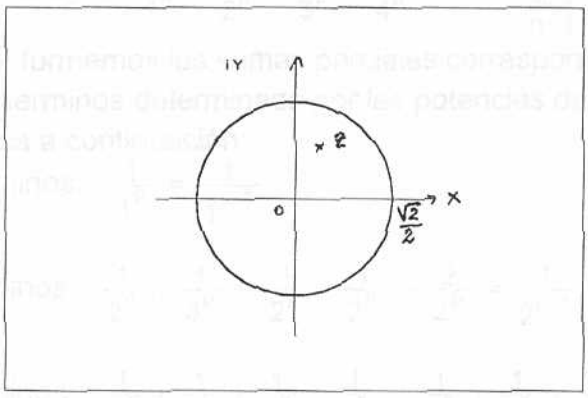
Osérvese sin embargo que, en este caso, $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la serie de los valores absolutos correspondiente a la serie dada , es

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} n(2)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n$$

Luego, es evidente que : $\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = \infty \neq 0$, por lo que, de acuerdo con el Criterio del Término n-ésimo, la serie diverge cuando: $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En resumen:

* La serie dada Converge para $|z| < \frac{\sqrt{2}}{2}$
* La serie dada Diverge para $|z| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
* La gráfica de la región de covergencia (R.C.), se muestra a continuación



(Región de Convergencia: $|z| < \frac{\sqrt{2}}{2}$)

== oo ==

6.6.5) Criterio de Convergencia: Criterio de Comparación

a) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge y $|f_n(z)| \leq |g_n(z)|$, $\forall n$

entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ Converge Absolutamente.

b) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ diverge y $|f_n(z)| \geq |g_n(z)|$, $\forall n$

$$\text{entonces,} \begin{cases} \text{la serie: } \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| \text{ diverge, pero} \\ \text{la serie : } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ puede o no ser convergente} \end{cases}$$

6.6.6) Criterio de la Raiz

Si : $\lim_{n\to\infty} \sqrt{|f_n(z)|} = L$, entonces,

$$\text{la serie: } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \begin{cases} \text{Converge Absolutamente si } L < 1 \\ \text{Diverge si } L > 1 \\ \text{La prueba falla si } L = 1 \end{cases}$$

6.6.7) Criterio de la Serie " p "

Estudiemos la serie : $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

A tal efecto, formemos las sumas parciales correspondientes a un número de terminos determinado por las potencias de 2, en la forma que se indica a continuación:

$2^0 = 1$ términos: $\frac{1}{1^p} = \frac{1}{1^{p-1}}$

$2^1 = 2$ términos: $\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \le \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$

$2^2 = 4$ términos: $\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \le \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}}$

.
.
.

Se deduce así, sumando los miebros de la izquierda y los de la derecha en las desigualdades anteriores que,

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots \le \frac{1}{1^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}} + \cdots \quad \text{.....(1)}$$

Pero el lado derecho de a desigualdad (1) es una serie geométrica que converge a $\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}}$, si $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$, es decir , la serie geométrica converge si : $1 < 2^{p-1} \Rightarrow 2^{p-1} > 1 \Rightarrow (p-1)\ln 2 > 0 \Rightarrow p > 1$.

En consecuencia, la serie dada , llamada **" Serie p"** , converge si $p > 1$.

Ejemplo 7

Halle la región de convergencia de la serie:

$$1+\frac{1}{2^2}\left(\frac{z+4}{z-2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(\frac{z+4}{z-2}\right)^2+\frac{1}{4^2}\left(\frac{z+4}{z-2}\right)^3+\cdots$$

Solución:

Aplicando el Criterio de la Razón, se encuentra que:

$$\left.\begin{array}{l} f_n(z)=\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{z+4}{z-2}\right)^{n-1} \\ f_{n+1}(z)=\dfrac{1}{(n+1)^2}\left(\dfrac{z+4}{z-2}\right)^{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \left|\frac{1}{(n+1)^2}\frac{(z+4)^n}{(z-2)^n}\frac{n^2}{1}\frac{(z-2)^{n-1}}{(z+4)^{n-1}}\right| \Rightarrow$$

$$\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = = \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\left(\frac{z+4}{z-2}\right)\right|$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot\left(\frac{z+4}{z-2}\right)\right| = \left|\frac{z+4}{z-2}\right|$$

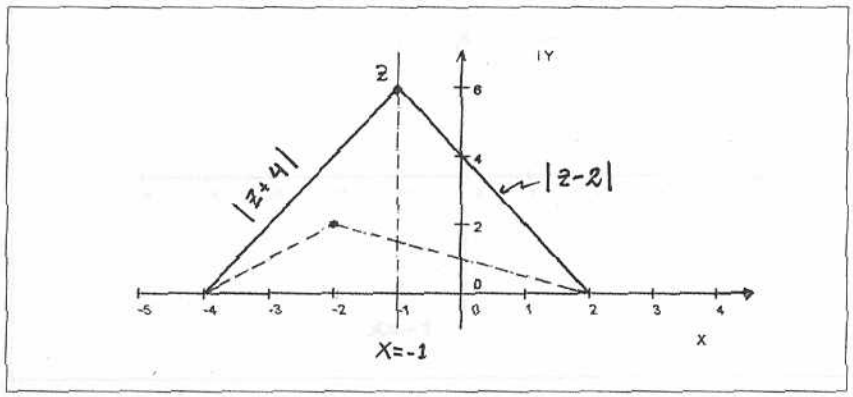
Por lo tanto, aplicando el Criterio del Cociente, se obtiene:

a) La serie Converge Absolutamente si $\left|\frac{z+4}{z-2}\right| < 1$, esto es, si

$$|z+4| < |z-2|$$

Pero: $\left\{\begin{array}{l} |z+4| = \text{distancia del punto } z \text{ al punto } -4. \\ |z-2| = \text{distancia del punto } z \text{ al punto } 2. \end{array}\right\}$

Luego, z está entonces restringida a estar más cerca del punto $z=-4$ que del punto $z=2$. En otras palabras, z debe estar a la izquierda de la mediatriz del segmento que une a -4 con 2; es decir, z debe estar en el semiplano izquierdo definido por la recta $x=-1$, tal como se ilustra en la Figura 6.8, excepto la propia recta $x=-1$.



(Fig. 6.8 : Región de convergencia: $x < -1$)

b) La serie diverge si $\left|\frac{z+4}{z-2}\right| > 1$, ésto es, si $|z+4| < |z-2| \Rightarrow$ z debe estar en semiplano derecho definido por la recta $x=-1$,

excepto la propia recta $x = -1$.

c) Los casos en los cuales falla el Criterio del Cociente, son los valores de z equidistantes de -4 y 2 ; es decir, los valores de z sobre la recta $x = -1$. Pero para estos puntos, la serie de valores absolutos correspondiente a la serie dada, es la serie real:

$$1 + \left|\frac{1}{2^2}\left(\frac{z+4}{z-2}\right)\right|_{x=-1} + \left|\frac{1}{3^2}\left(\frac{z+4}{z-2}\right)^2\right|_{x=-1} + \left|\frac{1}{4^2}\left(\frac{z+4}{z-2}\right)^3\right|_{x=-1} + \cdots \quad \ldots (1)$$

Para estudiar esta serie, calculemos $\left|\frac{z+4}{z-2}\right|_{x=-1}$

Se tiene, $z = x + iy = -1 + iy \Rightarrow \left|\frac{z+4}{z-2}\right|_{x=-1} = \left|\frac{3+iy}{-3+iy}\right| = \frac{\sqrt{9+y^2}}{\sqrt{9+y^2}} = 1$

Por lo tanto, la serie (1) se convierte en la serie real:

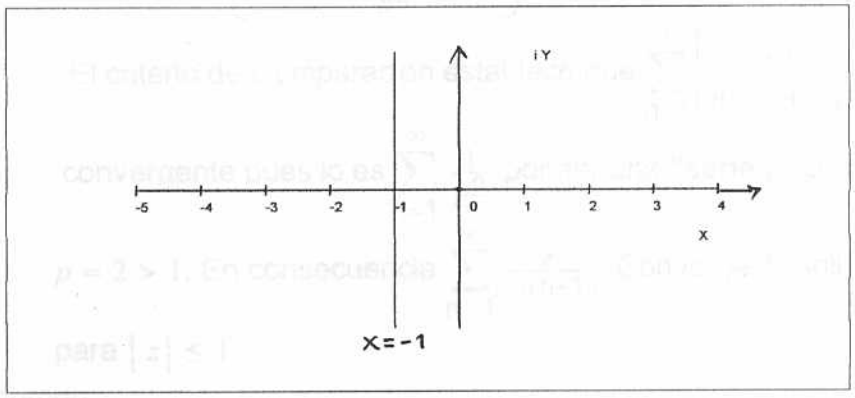
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

la cual es convergente, por ser una serie "p", con $p = 2 > 1$. Por lo tanto, para todos los valores de z sobre la recta $x = -1$, la serie dada es Absolutamente Convergente y, en consecuencia, converge también en el sentido ordinario. En consecuencia los puntos $(x = -1)$, pertenecen también a la región de convergencia buscada.

En resumen, se tiene:

* La serie dada converge si $x \leq -1$, en otras palabras, si $\mathrm{Re}[\,z\,] \leq -1$
* La serie diverge si $x > 1$, en otras palabras, si $\mathrm{Re}[\,z\,] > -1$

La siguiente gráfica muestra la región en estudio:



(Fig. 6.9 : Región de convergencia: $x < -1$)

== oo ==

Ejemplo 8

Halle la región de convergencia de la serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$

Solución:

Aplicando el Criterio de la Razón, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)(n+2)}}{\frac{z^n}{n(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+2)}\cdot\frac{z^{n+1}}{z^n}\right| = |z|$$

Por lo tanto:

a) $|z| < 1 \Rightarrow$ La serie Converge Absolutamente.

b) $|z| > 1 \Rightarrow$ La serie Diverge.

c) $|z| = 1 \Rightarrow$ Falla el Criterio

Pero $|z| = 1 \Rightarrow$ La serie formada por los valores absolutos de la serie dada se convierte en: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots$

Esta serie es , término a término, menor que la serie:

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$, la cual es convergente por ser una **"serie p"** con $p = 2 > 1$. Por lo tanto de acuerdo con el Criterio de Comparación, la serie dada es Absolutamente Convergente cuando $|z| = 1$.

NOTA: Nótese que a este mismo resultado también se llega a través del siguiente análisis:

Si $|z| \le 1$, entonces $\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| = \frac{|z|^n}{n(n+1)} \le \frac{1}{n^2}$

Tomando: $\left\{\begin{array}{l} f_n(z) = \frac{z^n}{n(n+1)} \\ g_n(z) = \frac{1}{n^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

El criterio de Comparación establece que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right|$ es convergente pues lo es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ por ser una **"serie p"** con $p = 2 > 1$. En consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ Converge Absolutamente para $|z| \le 1$.

En resumen:

* La serie Converge Absolutamente si $|z| \le 1$
* La serie Diverge si $|z| > 1$

== oo ==

Ejemplo 9

Halle la región de convergencia de la serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{4^n (n+1)^3}$

Solución:

Aplicando el Criterio de la Razón, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z+2)}{4} \frac{(n+1)^3}{(n+2)^3} \right| = \left| \frac{z+2}{4} \right| = \frac{|z+2|}{4}$$

Por lo tanto:

a) $\frac{|z+2|}{4} < 1 \Rightarrow$ La serie Converge Absolutamente para $|z+2| < 1$

b) $\frac{|z+2|}{4} > 1 \Rightarrow$ La serie Diverge para $|z+2| > 1$

c) $\frac{|z+2|}{4} = 1 \Rightarrow$ Falla el Criterio

Pero $|z+2| = 4 \Rightarrow$ La serie formada por los valores absolutos de la serie dada se convierte en:

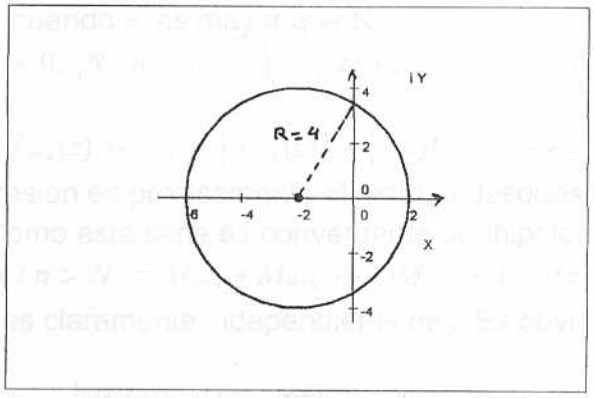
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{4^{n-1}}{4^n (n+1)^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

y puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge por ser una" **serie p"** con $p = 3 > 1$.

la serie dada Converge Absolutamente.

En resumen:

* La serie Converge Absolutamente si $|z+2| \leq 4$
* La serie Diverge si $|z+2| > 4$
* La región de convergencia absoluta $|z+2| \leq 4$, se grafica a continuación:



(Convergencia Absoluta : $|z+2| \leq 4$)

= oo =

6.7) CONVERGENCIA UNIFORME : Criterio M de Weierstrass

Sea: $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = M_1 + M_2 + \cdots + M_n + \cdots$ una serie convergente cuyos términos $M_1, M_2, \cdots,$ son constantes positivas.

La serie: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ Converge Uniformemente en una región R, si:

$$|f_n(z)| \leq M_n \quad , \forall z \in R.$$

Este criterio establece entonces que una serie de funciones complejas $f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$ converge uniformemente en una Región R, si existe una serie convergente de constante positivas:

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_n + \cdots$$

cada uno de cuyos términos es igual o superior al módulo del término correspondiente: $|f_1(z)|, \ |f_2(z)|, \cdots,$

en todo punto de R, es decir, si
$$\begin{cases} |f_1(z)| \leq M_1 \\ |f_2(z)| \leq M_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ |f_n(z)| \leq M_n \end{cases}$$

Demostración:

Para probar este teorema hay que demostrar que , para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un entero N independiente de z, tal que, para todos los valores de z en R, el valor absoluto del residuo después de n términos de la serie de las f es menor que ε, cuando n es mayor que N.

Es decir, dado $\varepsilon > 0, \ {}_{\exists}N / n > N \Rightarrow |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots| < \varepsilon, \forall z \in R$

En efecto:

$$|R_n(z)| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots| \leq |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \cdots \leq M_{n+1} + M_{n+1} + \cdots M_{n+1}$$

Esta última expresión es precisamente el resíduo después de n términos de la serie de las M. Como esta serie es convergente por hipótesis, se sigue que:

$$\forall \varepsilon > 0, \ {}_{\exists}N / n > N \Rightarrow M_{n+1} + M_{n+1} + \cdots M_{n+1} < \varepsilon, \ \ \forall z \in R$$

Este valor de N es claramente independiente de z. Es obvio de la expresión anterior que:

$$|R_n(z)| < \varepsilon \ , \ \text{para} \ \ n > N, \ \ \forall z \in R$$

Por lo tanto, la serie de las f es Uniformemente Convergente, como se quería demostrar.

Además, este teorema es una prueba de comparación que demuestra también que la serie de las f es Absolutamente Convergente.

Ejemplo 10

Pruebe la Convergemcia Uniforme de las siguientes series, en la región indicada:

$$a)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}},\quad |z|\le 1;\qquad b\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+z^2},\quad 1<|z|<2$$

$$c)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nz)}{n^3},\quad \mathrm{Im}[z]=0$$

Solución:

$$a)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}\Rightarrow f_n(z)=\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}\Rightarrow\left|\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}\right|=\frac{|z|^n}{n\sqrt{n+1}},\text{ de donde:}$$

$$|f_n(z)|\le\frac{1}{n\cdot n^{1/2}}=\frac{1}{n^{3/2}},\ si\quad |z|\le 1$$

Llamemos : $M_n=\frac{1}{n^{3/2}}\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}M_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente por ser una " **serie** p " con $p=\frac{3}{2}>1$.

En consecuencia, por el Criterio M de Weierstrass, la serie dada $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$ es Uniformemente Cionvergente en $|z|\le 1$.

$$==\ oo\ ==$$

$$b)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+z^2},\quad 1<|z|<2\quad\Rightarrow f_n(z)=\frac{1}{n^2+z^2}\Rightarrow|f_n(z)|=\left|\frac{1}{n^2+z^2}\right|,$$

por lo que: $|f_n(z)|=\frac{1}{|n^2|+|z^2|}\le\frac{1}{|n^2|-|z^2|}$;

Debemos garantizar que: $|n^2|-|z^2|\neq 0$

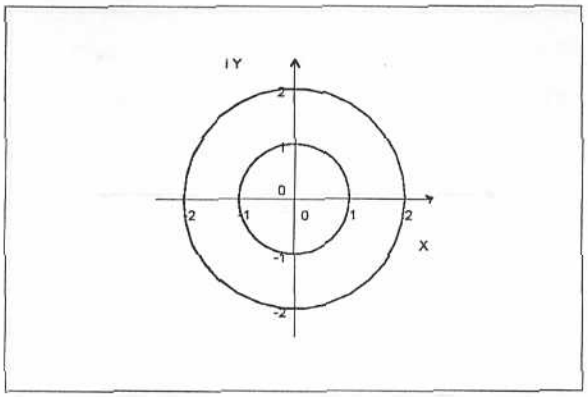
En efecto: $\left\{\begin{array}{l} n=1\Rightarrow z=\pm 1\ \text{o}\ \pm i\\ n=2\Rightarrow z=\pm 2\ \text{o}\ \pm i2\\ etc.\end{array}\right\}$

Por lo tanto, debemos garantizar unos valores de n y de z donde no se anule el denominador, por ejemplo: $n=3$ y $1<|z|<2$.

En este caso: $|f_n(z)|\le\frac{1}{|n^2|-|z^2|}\le\frac{1}{|n^2|}=\frac{1}{n^2}$

Tomando $M_n=\frac{1}{n^2}\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}M_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente por ser una " **serie** p " con $p=2>1$.

En consecuencia, de acuerdo con el Criterio M de Weierstrass, la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+z^2}$ Converge Uniformemente para: $\left\{\begin{array}{l} n\ge 3\\ 1<|z|<2\end{array}\right.$



$$(n \geq 3, \quad 1 < |z| < 2)$$

$$== \text{oo} ==$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^3}, \quad \text{Im}[z] = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_n(z) = \dfrac{\cos(nz)}{n^3} \\ z = x + iy \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$f_n(z) = \frac{\cos(nz)}{n^3} = \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2n^3} = \frac{e^{in(x+iy)} + e^{-in(x+iy)}}{2n^3} \Rightarrow$$

$$f_n(z) = \frac{e^{-ny}\,(\cos nx + i\,\text{sen}\,nx)}{2n^3} + \frac{e^{ny}\,(\cos nx - i\,\text{sen}\,nx)}{2n^3}$$

Luego:

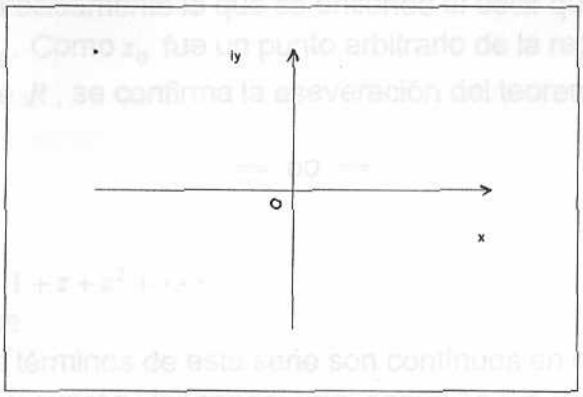
* La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-ny}\,(\cos nx + i\,\text{sen}\,nx)}{2n^3}$ No converge para $y < 0$

* La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ny}\,(\cos nx - i\,\text{sen}\,nx)}{2n^3}$ No converge para $y > 0$

debido a que en estos casos, los términos n-ésimos no se aproximan a cero.Por lo tanto, la serie dada no puede converger para $y < 0$ ni tampoco para $y > 0$.

* En el caso $y = 0$, es decir, si z es real $(z = x)$, la serie dada se convierte en $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$, tal que: $|f_n(z)| = \left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$.

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge por ser una " **serie** p " con $p = 3 > 1$, se concluye por el Criterio M de Weierstrass que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{n^3}$ Converge Uniformemente en cualquier intervalo sobre el eje real, es decir, $\forall z \,/ \left\{ \begin{array}{l} x \in (-\infty, \infty) \\ y = 0 \end{array} \right.$



$\left[x \in (-\infty, \infty),\ y = 0\right]$

$==$ oo $==$

6.7.1) Propiedades de las Series Uniformemente Convergentes

a) Teorema 1

La suma de una serie Uniformemente Convergente de funciones contínuas, es una función contínua.

Demostración:

Sea $f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots = S_n(z) + R_n(z)$ una serie uniformemente convergente en la región R, en la que cada término es una función contínua de z, y sea un infinitesimal arbitrario: $\frac{\varepsilon}{3}$.

Entonces, como la serie converge uniformemente, existe un entero N que depende de ε (no de z), tal que:

$$\left| R_n(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall n > N \ \text{ y } \ \forall z \in R$$

Del mismo modo, si $\Delta_n z$ es un incremento tal que: $(z_0 + \Delta z) \in R$, entonces $\left| \Delta z \right| < \left| \Delta_1 z \right| \Rightarrow \left| R_n(z_0 + \Delta z) \right| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall n > N$.

Es más, como cada término de la serie dada es una función contínua y como cualquier suma finita de funciones contínuas es necesariamente contínua, resulta que $S_n(z)$ es contínua y, por lo tanto, para cualquier z_0 existe un incremento $\Delta_2 z$ tal que:

$\left| S_n(z_0 + \Delta z) - S_n(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todos los Δz tales que $\left| \Delta z \right| < \left| \Delta_2 z \right|$

Ahora bien, eligiendo $n > N$ se puede escribir :

$$\left| f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \right| = \left| \left[S_n(z_0 + \Delta z) + R_n(z_0 + \Delta z) \right] - \left[S_n(z_0) + R_n(z_0) \right] \right| \Rightarrow$$

$$\left| f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \right| \leq \left| S_n(z_0 + \Delta z) - S_n(z_0) \right| + \left| R_n(z_0 + \Delta z) - R_n(z_0) \right|$$

De donde, para todos los valores de Δz cuyos valores absolutos sean menores que el menor de los $\left| \Delta_1 z \right|$ y $\left| \Delta_2 z \right|$, se deduce que.

$$\left| f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

que es precisamente lo que se entiende al decir que $f(z)$ es contínua en $z = z_0$. Como z_0 fue un punto arbitrario de la región de Convergencia Uniforme R, se confirma la aseveración del teorema.

$$== oo ==$$

Ejemplo 11

Dada la serie :$1 + z + z^2 + \cdots$

Obsérvese que:

* Todos los términos de esta serie son contínuos en el plano z.
* La serie Converge Uniformemente, según ya fue demostrado, a la suma $S(z) = \frac{1}{1-z}$, si $|z| < 1$

Puede verse que dicha suma es contínua en la región de convergencia uniforme $|z| < 1$, tal como lo establece el Teorema 1 anterior.

$$== oo ==$$

Ejemplo 12

El teorema anterior nada afirma acerca de la suma de una serie de funciones contínuas si la convergencia no es Uniforme, pues en tales casos, la suma no es necesariamente contínua.

En efecto, consideremos el ejemplo ya estudiado:

$$z^2 + \frac{z^2}{1+z^2} + \frac{z^2}{\left(1+z^2\right)^2} + \frac{z^2}{\left(1+z^2\right)^3} + \cdots$$

Evidentemente, se trata de una serie geométrica de razón: $\frac{1}{1+z^2}$, por lo que dicha serie converge a: $S(z) = \frac{z^2}{1-\frac{1}{1+z^2}}$, si $\left|\frac{1}{1+z^2}\right| < 1$

Es decir, $S(z) = 1 + z^2$, si $|1 + z^2| > 1$

$$S(z) = \begin{cases} 1 + z^2, & \text{si } z \neq 0 \\ 0, & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Puede verse que esta serie no tiene Convergencia Uniforme pues, en la vecindad de $z = 0$, donde la convergencia es uniforme, dicha suma salta bruscamente de $1 + z^2$ a 0, aún cuando cada término de la serie es una función contínua de z, para todos los valores de z (excepto $z = \pm i$), lo que demuestra que el límite de una suma de funciones contínuas puede ser discontínua si la convergencia no es uniforme.

Análisis de la Región de Convergencia:

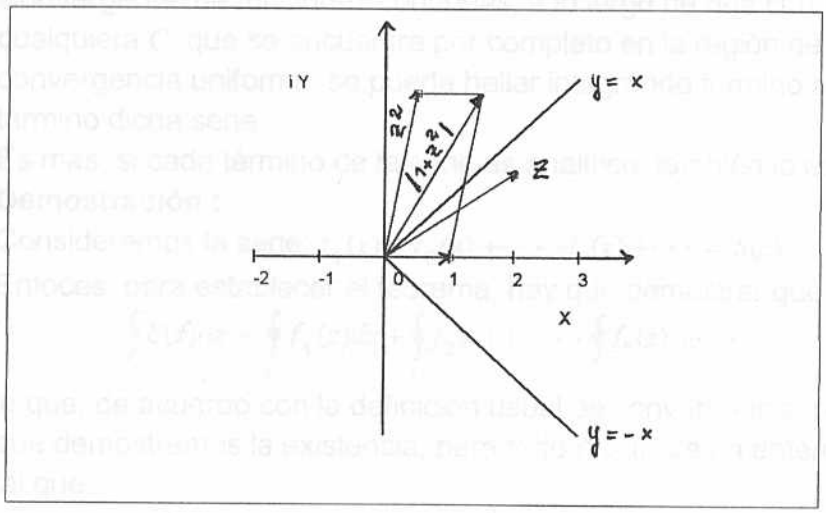
La región de convergencia correspondiente a la desigualdad: $|1 + z^2| > 1$ se presenta a continuación:

$$|1 + z^2| > 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \arg z^2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

de donde:

$$\left| 1+z^2 \right| > 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

es decir, la variable z tiene que pertenecer al sector de $90°$ limitado por las mitades derechas de las rectas: $y = \pm x$, como se muestra en la siguiente gráfica:



(Región de Convergencia)

== oo ==

b) Teorema 2

Si los términos de una serie Uniformemente Convergente se multiplican por cualquier función acotada $g(z)$, la serie que resulta también es Uniformemente Coonvergente.

Demostración

Sea R la región de convergencia uniforme de la serie:

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

Y sea $g(z)$ una función tal que : $\left| g(z) \right| \leq M, \ \forall z \in R$

Ahora bien, como la serie de las f converge uniformemente, se deduce que en correspondencia con el infitesimal $\frac{\varepsilon}{M}$

existe un entero N tal que:

$$\left| R_n(z) \right| = \left| f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots \right| < \frac{\varepsilon}{M}, \ \forall n > N, \ \forall z \in R$$

De donde:

$$\left| g(z) \cdot f_{n+1}(z) + g(z) \cdot f_{n+2}(z) + \cdots \right| = \left| g(z) \right| \cdot \left| f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots \right|$$

Es decir,

$$\left| g(z) \cdot f_{n+1}(z) + g(z) \cdot f_{n+2}(z) + \cdots \right| \leq M \left| f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots \right| \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left| g(z) \cdot f_{n+1}(z) + g(z) \cdot f_{n+2}(z) + \cdots \right| \leq \varepsilon \ , \ \forall n > N, \ \forall z \in R$$

Pero esto es precisamente la condición para que la serie producto:

$$g(z) \cdot f_1(z) + g(z) \cdot f_2(z) + \cdots + g(z) \cdot f_n(z) + \cdots$$

sea Uniformemente Convergente.

c) Teorema 3 : Integración Término a Término

Una de las propiedades más importantes de la series Uniformemente Convergentes, la expresa el siguiente teorema:

" La integral de la suma $S_n(z)$ de una serie Uniformemente Convergente de funciones contínuas, a lo largo de una curva cualquiera C que se encuentra por completo en la región de convergencia uniforme, se puede hallar integrando término a término dicha serie.

Es más, si cada término de la serie es analítico, también lo es la suma."

Demostración :

Consideremos la serie: $f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)+\cdots = S(z)$

Entoces, para establecer el teorema, hay que demostrar que:

$$\oint_C S(z)dz = \oint_C f_1(z)dz + \oint_C f_2(z)+\cdots+\oint_C f_n(z)+\cdots$$

lo que, de acuerdo con la definición usual de convergencia, requiere que demostremos la existencia, para todo $\varepsilon > 0$, de un entero N tal que:

$$\left| \oint_C S(z)dz - \sum_{j=1}^{\infty} \oint_C f_j(z)dz \right| < \varepsilon \ , \ \forall n > N$$

Ahora bien, para cualquier suma finita, es cierto que la integral de una suma es igual a la suma de las integrales. Por lo tanto, el primer miembro de esta última desigualdad se puede escribir:

$$\left| \oint_C S(z)dz - \sum_{j=1}^{\infty} \oint_C f_j(z)dz \right| = \left| \oint_C \left[S(z)dz - \sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)dz \right] dz \right| = \left| \oint_C R_n(z)dz \right|$$

Sea L la longitud del trayecto de integración. Entonces, para la convergencia uniforme de la serie dada, se sabe que existe un número entero N tal que.

$|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n > N$ y $\forall z \in$ Región de Convergencia (en particular, para todos los valores de z sobre la trayectoria de integración).

Por lo tanto, si $n > N$, podemos escribir :

$$\left| \oint_C S(z)dz - \sum_{j=1}^{\infty} \oint_C f_j(z)dz \right| = \left| \oint_C R_n(z)dz \right| \le \oint_C |R_n(z)| \cdot |dz| < \frac{\varepsilon}{L} \oint_C |dz| = \frac{\varepsilon}{L} L = \varepsilon$$

lo cual establece la primera parte del teorema.

Para establecer la segunda parte, supongamos que la región de Convergencia Uniforme R es simplemente conexa (o se le ha hecho simplemente conexa mediante cortes transversales). Entonces, si cada término $f_j(z)$ es analítico en R, se deduce del Teorema de Cauchy-Goursat que la integral de cada término en torno a cualquier curva cerrada simple (o en su modificación simplemente conexa por

el Principio de Deformación de Contornos), es cero. Por lo tanto, la integral de la suma: $\oint_C S(z)dz$ es cero, y por lo tanto, de acuerdo con el Teorema de Morera antes expuesto, $f(z)$ es Analítica, lo que completa el teorema.

$$= oo =$$

Ejemplo 13

Con el objeto de ilustrar el teorema precedente, consideremos de nuevo la expresión:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots , \quad |z| < 1$$

Integremos esta serie término a término a lo largo de un contorno C contenido en el disco $|z| < 1$. Supongamos que el contorno C va del punto $z = 0$ a $z = z_0$. Así, de la ecuación:

$$\oint_C S(z)dz = \oint_C f_1(z)dz + \oint_C f_2(z) + \cdots + \oint_C f_n(z) + \cdots$$

se obtiene:

$$\int_0^{z_0} \frac{1}{1-z}dz = \int_0^{z_0} dz + \int_0^{z_0} z^2 dz + \int_0^{z_0} z^3 dz + \int_0^{z_0} z^4 dz + \cdots$$

Pero:

$$\int_0^{z_0} \frac{1}{1-z}dz = -\ln(1-z)\Big|_0^{z_0} = \ln\left(\frac{1}{1-z}\right)\Big|_0^{z_0} = \ln\left(\frac{1}{1-z_0}\right) - \ln\left(\frac{1}{1-0}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-z_0}\right)$$

Obsérvese que las integrales del lado derecho son inmediatas.

Finalmente:

$$\ln\left(\frac{1}{1-z_0}\right) = \int_0^{z_0} \frac{1}{1-z}dz \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{1-z_0}\right) = \int_0^{z_0} \left(1 + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots\right)dz , \quad |z| < 1$$

De donde:

$$\ln\left(\frac{1}{1-z_0}\right) = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} , \quad |z| < 1$$

$$= oo =$$

d) Teorema 4 : Derivación Término a Término

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_n(z) + \cdots$ Converge Uniformemente, a $S(z)$ para todo z en R , y si:

$f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z) + \cdots$ son funciones anlíticas en R ,

entonces, $S(z)$ es tanbién analítica en R.

Este teorema garantiza la existencia de la derivada de la suma de toda serie de funciones analíticas, que converge uniformemente.

Esdecir, $\frac{d}{dz}S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d f_n(z)}{dz} = f'_1(z) + f'_2(z) + \cdots$

Demostración:

Sea z un punto general de la región de Convergencia Uniforme R de la serie dada y sea C una curva cerrada simple trazada alrededor de z en R.

Si escribimos la serie en la forma:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t) + \cdots$$

donde t es una variable que recorre los valores de z en C, podemos multiplicar por la función acotada $\frac{1}{2\pi i\,(t-z)^2}$, y por el teorema respectivo, se tiene que :

$$\frac{f(t)}{2\pi i\,(t-z)^2} = \frac{f_1(t)}{2\pi i\,(t-z)^2} + \frac{f_2(t)}{2\pi i\,(t-z)^2} + \cdots + \frac{f_n(t)}{2\pi i\,(t-z)^2} + \cdots$$

también convergerá uniformemente. Por lo tanto, por el Toerema precedente (Teorema 3), se puede integrar término a término en torno a C, obteniéndose :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f_1(t)}{(t-z)^2}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f_2(t)}{(t-z)^2}dz + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f_n(t)}{(t-z)^2}dz + \cdots$$

Pero estas integrales, por la primera generalización de la Fórmula Integral de Cauchy, son precisamente, las derivadas de los respectivos términos de la serie dada, en el punto z . Por lo tanto:

$$f'(t) = f'_1(t) + f'_2(t) + \cdots + f'_n(t) + \cdots$$

lo cual establece el teorema.

$$== \text{oo} ==$$

El siguiente ejemplo ilustra el teorema precedente :

Ejemplo 14

Dada la serie: $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = 1 + z + z^2 + \cdots, \left| z \right| < 1$

Calcular el desarrollo en serie de : $\frac{1}{(1-z)^2}$

Solución:

Observemos que: $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2}$

Luego, por aplicación del teorema anterior, se obtiene:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}(1+z+z^2+\cdots), \qquad |z| < 1$$

De donde:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1+2z+3z^2+\cdots, \qquad |z| < 1$$

Es decir, $$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1}, \qquad |z| < 1$$

6.8) EJERCICIOS PROPUESTOS

1°) Determine la región de convergencia de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)(2z)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{inz}$ *d)* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^k}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^k}$ *e)* $\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{in^2 z}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n\, n!}$ *g)* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-2}(z+i)^{k+1}}{k}$

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1-i)^{2k}}$ *i)* $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{z}{n}\right)$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ *k)* $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, z^n$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{z}\right)^n$ *m)* $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)!\left(\frac{z+2}{n+1}\right)^n$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+3)!\left[\frac{1}{(z+3)(n+3)}\right]^n$ *o)* $\sum_{n=1}^{\infty} (n+5)!\left(\frac{z-2}{n+3}\right)^n$

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nz)}{n^3}$

2°) Demuestre que la suma de la serie:

$e^{-y}\operatorname{sen}x + e^{-2y}\operatorname{sen}2x + e^{-3y}\operatorname{sen}3x + \cdots$, cuando $y > 0$, es:

$$\frac{e^{-y}\operatorname{sen} x}{1 - 2e^{-y}\cos x + e^{-2y}}$$

3°) Determine la suma de las series y especifique la región del plano z donde converge a dicha suma.

a) $1 + (z-1)^2 + (z-1)^4 + (z-1)^6 + \cdots$

b) $1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots$

4°) *a)* Use el producto de Cauchy para demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{cuando } |z| < 1$$

b) Use el resultado obtenido en el aparte a) y una nueva multiplicación en serie para demostrar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2!} z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^3}$$

5°) Por medio del Criterio M de Weierstrass, demuestre que las siguientes series convergen uniformemente en las regiones indicadas:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in^2 z}}{n!}$, $|z| \le R,\ R < \infty$; *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{n+1}$, $|z| \le 0.99$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+in}{2}\right) z^n}{n^3}$, $|z| \le 1$; *d)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$, $\operatorname{Re} z \le 0$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$, $|z| \le \frac{2}{4}$; *f)* $\sum_{n=0}^{\infty} e^z z^{n-1}$, $|z| \le 1$

6°) Por medio de los teoremas 3 y 4 antes expuestos, demuestre que:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$, $|z| < 1$. Use el resultado aquí obtenido para demostrar que : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^3}$, $|z| \le 1$

b) Considere la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots$

demuestre que su n-ésima suma parcial está dada por:

$$\frac{z^n\,[n\,(z-1)\,-1]+1}{(1-z)^2}\,, \quad \text{cuando} \quad z \neq 1$$

$$== \text{oo} ==$$

CAPÍTULO VII

LA SERIE DE TAYLOR

7.1) INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo daremos respuestas a las preguntas que fueron formuladas en la introducción del Capítulo VI. Como se recordará, nos preguntábamos en esa oportunidad:

a) ¿Cuales son las funciones $f(z)$ que pueden ser representadas por medio de una serie de potencias?

b) ¿Cómo se obtiene dichas series y para qué valores de la variable z la serie representa efectivamente a la función $f(z)$?

c) ¿Es posible representar cualquier función analítica por medio de una serie de potencias?

Las respuestas a estas y otras preguntas las encontraremos en el siguiente teorema:

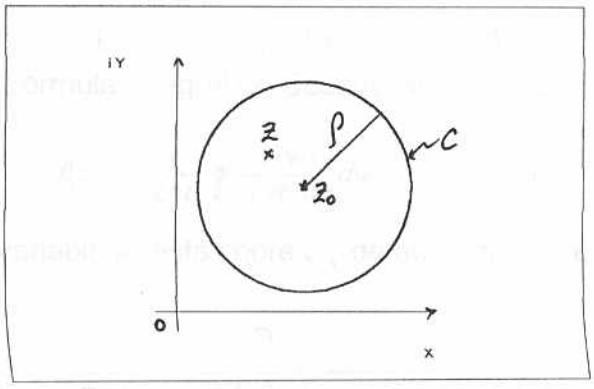
7.2) TEOREMA: Serie de Taylor

Si $f(z)$ es analítica dentro de un círculo C con centro en z_0, entonces, para todo z dentro de C, se verifica que:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$

Es decir :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad , \quad |z-z_0| < \rho$$



(Fig.7.1: $|z-z_0| < \rho$)

Antes de demostrar este teorema, hagamos las siguientes observaciones:

a) Esta serie de potencias se conoce como: **"Desarrollo en Serie de Taylor"** de la función $f(z)$, alrededor del punto z_0, en honor al matemático inglés Brook deTaylor (1685-1731), quien en 1715 obtuvo este desarrollo para

funciones reales de una variable.

b) El círculo C es el círculo de mayor radio "ρ" , centrado en z_0, dentro del cual $f(z)$ es analítica; es decir, z_s es la singularidad de $f(z)$ más cercana a z_0.

c) En el **caso particular** en que $z_0 = 0$, la serie de Taylor se conoce como: Serie de Maclaurin.

d) Nótese que la serie dada por la ecuación anterior, puede también escribirse en la forma:

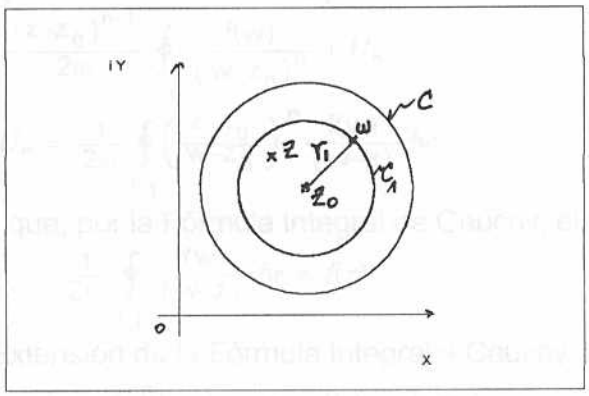
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \quad , \qquad |z - z_0| < \rho$$

donde : $C_n = \dfrac{f^{(n}(z_0)}{n!}$

Demostración:

Sea z cualquier punto dentro del círculo C.

Construyamos un círculo C_1 con centro en z_0 y radio r_1 que encierre a z, como muestra la Figura 7.2



(Fig.7.2: $C_1 : |z - z_0| = r_1$)

Entonces, por la Fórmula Integral de Cauchy, se tiene que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)} dw \qquad .....(2)$$

(Obviamente, la variable w está sobre C_1 de acuerdo con el concepto de integral de línea).

Pero:

$$\frac{1}{(w-z)} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{(w-z_0)-\left[1-\dfrac{(z-z_0)}{(w-z_0)}\right]} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(w-z)} = \frac{1}{(w-z_0)}\left[1 + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right) + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n-1} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \frac{1}{\left[1-\dfrac{(z-z_0)}{(w-z_0)}\right]}\right]$$

si y sólo si: $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$

Luego:

$$\frac{1}{(w-z)} = \frac{1}{(w-z_0)} + \frac{(z-z_0)}{(w-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(w-z_0)^3} + \cdots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(w-z_0)^n} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \frac{1}{(w-z)} \quad \ldots (3)$$

Multiplicando ambos lados de la expresión (3) por : $\frac{f(w)}{2\pi i}$, obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(w)}{(w-z)} = \frac{1}{2\pi i}\frac{f(w)}{(w-z_0)} + \frac{(z-z_0)}{2\pi i}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\frac{f(w)}{(w-z_0)^3} + \cdots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \frac{f(w)}{(w-z)} \quad \ldots\ldots (4)$$

Integrando ahora miembro a miembro la expresión (4), se obtiene.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z)}dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)}dw + \frac{(z-z_0)}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw + \frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^3}dw + \cdots$$

$$+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n} + U_n \quad \ldots\ldots (5)$$

donde : $U_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \frac{f(w)}{(w-z)}dw$

Pero, obsérvese que, por la Fórmula Integral de Cauchy, el primer miembro de la ecuación (5) es: $\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z)}dw = f(z)$ $\ldots\ldots (6)$

Además, por la Extensión de la Fórmula Integral e Cauchy, la cual establece que:

$$\frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw = f^{(n}(z_0), \quad n = 0,1,2,3,\cdots \qquad (7)$$

los segundos miembros de la ecuación (5) se convierten, respectivamente, en:

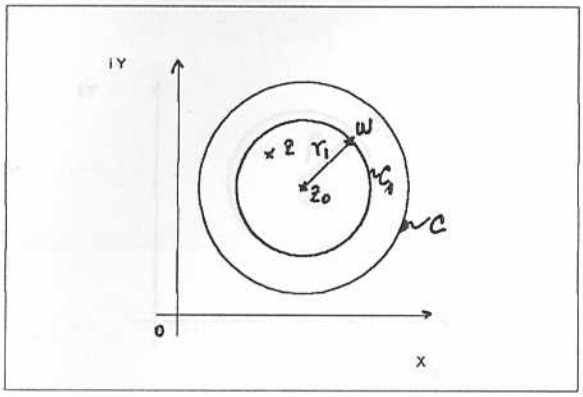
$$f(z_0),\ \frac{(z-z_0)}{1!}f'(z_0),\ \frac{(z-z_0)^2}{2!}f''(z_0),\ \cdots,\ \frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n}(z_0),\ U_n\ ,\ |z-z_0| < a \quad (8)$$

Sustituyendo los resultados (7) y (8) en la expresión (6), se obtiene :

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!}f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \cdots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n}(z_0) + U_n$$

Para probar el teorema, sólo falta probar que : $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$

A tal efecto, observemos que, como w está sobre C_1, se tiene que:



(Fig.7.3: $C_1 : |z-z_0| = r_1$)

$\left|\frac{z-z_0}{w-z}\right| = k < 1$

Además .
$$\begin{cases} a) \text{ Como } f(z) \text{ es analítica, } \Rightarrow |f(z)| < M, \text{ con } M = \text{ constante} \\ b) \ |w-z| = |(w-z_0)-(z-z_0)| \geq r_1 - |z-z_0| \end{cases}$$

En consecuencia:

$$|U_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_1}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \frac{f(w)}{(w-z)}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}k^n \frac{M}{r_1-|z-z_0|}2\pi r_1 \leq \frac{k^n M r_1}{r_1-|z-z_0|}$$

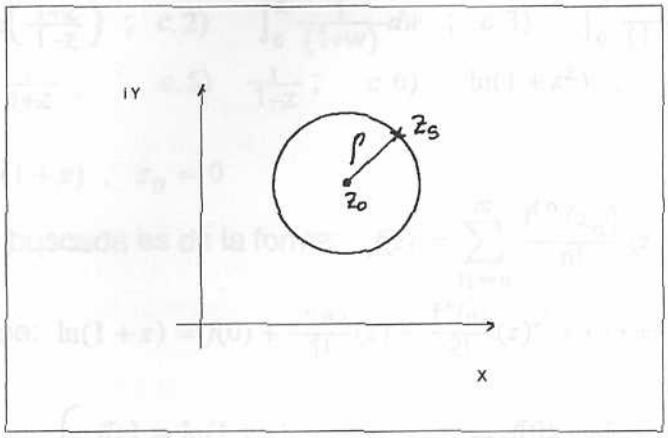
de donde: $\lim_{n\to\infty}|U_n| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{k^n M r_1}{r_1-|z-z_0|}\right) = 0$ por ser : $0 < k < 1$,

lo que completa la demostración.
En resumen, tenemos :

1º) $$\boxed{f(z) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!}f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{n!}f^{(n}(z_0) + \cdots}$$

O también: $$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}$$

2) La región de convergencia será: $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1 \Rightarrow |z-z_0| < |w-z_0|$
de donde : $|z-z_0| < \rho$.



(Fig.7.4: Región de Convergencia de Taylor :

Es decir:

* z_s es la singularidad de $f(z)$ más cercana a z_0
* C es el mayor círculo centrado en z_0 , dentro del cual $f(z)$ es analítica.
* $\rho = |z_s - z_0|$ es el radio del círculo C, dentro del cual $f(z)$ es analítica.

3º) Obsérvese que este teorema no asegura la convergencia de la serie de $f(z)$ cuando z es un punto del perímetro de C. En este caso, es necesrio considerar cada serie y cada valor de z perteneciente a C , como casos individuales, pues para $\rho \geq 1$, U_n está indefinido.

4º) El teorema no afirma que la serie de Taylor no converja fuera del círculo $C : |z - z_0| = \rho$. Sólo asegura que éste es el mayor círculo dentro del cual la serie converge a $f(z)$.

5º) Si la singularidad más cercana al punto z_0 no es única sino que existen varias singularidades a la misma distancia respecto de z_0 ,el círculo C pasa por ellas.

6º) Si $f(z)$ no posee singularidades, entonces el radio de C es infinito, y se dice que el radio de convergencia es infinito ($\rho = \infty$).

$= oo =$

7.2.1) Ejemplos Resueltos I

Ejemplo 1

a) Desarrolle la función $f(z) = \ln(1+z)$ en serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$.

b) Determine la región de convergencia de dicha serie.

c) Use el resultado anterior para calcular la serie de Taylor de las funciones:

c.1) $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$; c.2) $\int_0^z \frac{1}{(1+w)}dw$; c.3) $\int_0^z \frac{1}{(1-w)}dw$;

c.4) $\frac{1}{1+z}$; c.5) $\frac{1}{1-z}$; c.6) $\ln(1+z^2)$; c.7) $\ln(1-z^2)$

Solución:

a) $f(z) = \ln(1+z)$, $z_0 = 0$

La serie buscada es de la forma: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, con $z_0 = 0$

Por lo que: $\ln(1+z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(z) + \frac{f''(0)}{2!}(z)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(0)}{n!}(z)^n + \cdots$

Luego:

$$\begin{cases} f(z) = \ln(1+z) & \Rightarrow f(0) = 0 \\ f'(z) = \frac{1}{1+z} & \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2} & \Rightarrow f''(0) = -1 \\ f'''(z) = \frac{(-1)(-2)}{(1+z)^3} & \Rightarrow f'''(0) = 2! \\ f^{(IV}(z) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{(1+z)^4} & \Rightarrow f^{(IV}(0) = -3! \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f^{(n}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n} & \Rightarrow f^{(n}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \end{cases}$$

Por lo tanto :

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n} + \cdots$$

O también: $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n}$

b) **Región de convergencia**

El n-ésimo término de la serie es : $f_n(z) = \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$

Por lo tanto, utilizando el Criterio del Cociente, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}z^n}{(n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{(n+1)}\cdot\frac{z^{n+1}}{z}\right| = |z|$$

Por lo tanto, la serie converge absolutamente para: $|z| < 1$.

Se puede demostrar que la serie dada es convergente para : $|z| = 1$

y divergente para : $|z| = -1$. Basta para ello aplicar el Criterio del Término General. En efecto.

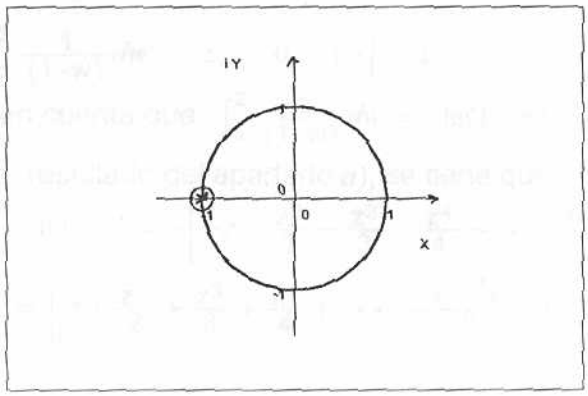
$$z = 1 \Rightarrow f(z) = \ln(2) \Rightarrow \text{ La serie Converge}$$
$$z = -1 \Rightarrow f(z) = \ln(0) = -\infty \Rightarrow \text{ La serie Diverge}$$

NOTA:

Este resultado también puede deducirse del hecho que la serie converge en un círculo centrado en $(0,0)$ que se extiende hasta la singularidad más próxima a este punto, la cual corresponde a:

$$\ln(1+z) = -\infty \Rightarrow (1+z) = 0 \Rightarrow z_s = -1$$

En consecuencia, la región de convergencia es:
todo z tal que : $|z| \leq 1$, *excepto* $z = -1$, es decir ..



(Región de Convergencia)

$$= oo =$$

c.1) $f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, $z_0 = 0$, $|z| < 1$

De acuerdo con el resultado anterior:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \cdots$$

Reemplazando z por $-z$, se obtiene:

$$\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + - \cdots - \frac{z^n}{n} - \cdots$$

Ambas serie convergen para : $|z| < 1$

Restando miembro a miembro estas series, tenemos:

$$\ln(1+z) - \ln(1-z) = \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \cdots\right) -$$
$$- \left(-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots - \frac{z^n}{n} - \cdots\right)$$

de donde:

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+\cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)} \quad , \quad |z|<1$$

$$= oo =$$

c.2) $f(z) = \int_0^z \frac{1}{(1+w)}dw \quad , \quad z_0 = 0 \quad , \quad |z|<1$

Teniendo en cuenta que: $\int_0^z \frac{1}{(1+w)}dw = \ln(1+z)$

y usando el resultado del apartado *a)*, se tiene que:

$$\int_0^z \frac{1}{(1+w)}dw = \ln(1+z) = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}$$

$$= oo =$$

c.3) $f(z) = \int_0^z \frac{1}{(1-w)}dw \quad , \quad z_0 = 0 \quad , \quad |z|<1$

Teniedo en cuenta que: $\int_0^z \frac{1}{(1-w)}dw = -\ln(1-z) = -\ln[1+(-z)]$

Usando el resultado del apartado *a)*, se tiene que:

$$\int_0^z \frac{1}{(1-w)}dw = -\ln(1-z) = -\left[-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\cdots-\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}-\cdots\right] \Rightarrow$$

$$\int_0^z \frac{1}{(1-w)}dw = \left[z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+\cdots\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

$$= oo =$$

c.4) $f(z) = \frac{1}{1+z} \quad , \quad z_0 = 0 \quad , \quad |z|<1$

Teniedo en cuenta que: $\frac{d}{dz}\left[\ln(1+z)\right] = \frac{1}{1+z}$

Usando el resultado del apartado *a)*, se tiene que:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{d}{dz}\left[z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+\cdots\right]$$

De donde: $\frac{1}{1+z} = 1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^{n-1}z^n+\cdots$

$$= oo =$$

c.5) $f(z) = \frac{1}{1-z} \quad , \quad z_0 = 0 \quad , \quad |z|<1$

Teniedo en cuenta que: $\frac{d}{dz}\left[\ln(1-z)\right] = -\frac{1}{1-z}$

Usando el resultado del apartado *a)*, se tiene que:

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{d}{dz}\left[-z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}-\cdots\right]$$

De donde: $\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n+\cdots$

c.6) $f(z) = \ln(1+z^2)\,;\quad z_0 = 0\ ,\ |z| < 1$

Teniedo en cuenta que: $\ln(1+z^2) = \ln[1+z]_{z=z^2}$

Usando el resultado del apartado *a*), se tiene que:

$$\ln(1+z^2) = \left[z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \cdots \right]_{z=z^2} \Rightarrow$$

$$\ln(1+z^2) = z^2 - \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} - \frac{z^8}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} z^{2n}}{n} + \cdots$$

O también: $$\ln(1+z^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n}}{n}$$

$$= \text{oo} =$$

c.7) $f(z) = \ln(1-z^2)\,;\quad z_0 = 0\ ,\ |z| < 1$

Teniedo en cuenta que: $\ln(1-z^2) = \ln[1-z]_{z=z^2}$

Usando el resultado del apartado *c.1*), se tiene que:

$$\ln(1-z^2) = \left[-z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots - \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} - \cdots \right]_{z=z^2} \Rightarrow$$

$$\ln(1-z^2) = -\left[z^2 + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} + \frac{z^8}{4} + \cdots + \frac{z^{2n}}{n} + \cdots \right]$$

O también: $$\ln(1-z^2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 2

a) Desarrolle la función $f(z) = \operatorname{sen} z$ en una serie de Taylor, alrededor de $z = \frac{\pi}{4}$.

b) Determine la región de convergencia de esta serie.

Solución:

Método 1: Por aplicación directa de la serie de Taylor

$$\begin{cases} f(z) = \operatorname{sen} z & \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'(z) = \cos z & \Rightarrow f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ f''(z) = -\operatorname{sen} z & \Rightarrow f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'''(z) = -\cos z & \Rightarrow f'''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f^{(IV)}(z) = \operatorname{sen} z & \Rightarrow f^{(IV)}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Luego, la serie buscada será de la forma:

$$f(z) = f(\tfrac{\pi}{4}) + \frac{f'(\frac{\pi}{4})}{1!}(z-\tfrac{\pi}{4}) + \frac{f''(\frac{\pi}{4})}{2!}(z-\tfrac{\pi}{4})^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(\frac{\pi}{4})}{n!}(z-\tfrac{\pi}{4})^n + \cdots$$

Por lo tanto :

$$\operatorname{sen} z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(z-\tfrac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{2.2!}(z-\tfrac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{2.3!}(z-\tfrac{\pi}{4})^3 + \cdots \text{ , de donde:}$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + (z-\tfrac{\pi}{4}) - \frac{1}{2!}(z-\tfrac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3!}(z-\tfrac{\pi}{4})^3 + \cdots\right]$$

== oo ==

Método 2: Sea : $u = z + \frac{\pi}{4}$ o $u = z - \frac{\pi}{4}$, entonces :

$$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}(u + \tfrac{\pi}{4}) = \operatorname{sen} u \cos(\tfrac{\pi}{4}) + \cos u \operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} u + \cos u)$$

de donde, sustituyendo sen u y cos u por sus respectivos desarrollos de Taylor alrededor de $u = 0$, se obtiene :

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots\right] + \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \cdots\right] \text{ , de donde:}$$

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + u - \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots\right]$$

y devolviendo el cambio : $u = z + \frac{\pi}{4}$, obtenemos finalmente que :

$$\operatorname{sen} z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + (z-\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{2!}(z-\tfrac{\pi}{4})^2 - \tfrac{1}{3!}(z-\tfrac{\pi}{4})^3 + \cdots\right]$$

tal como se obtuvo anteriormente.

b) **Región de convergencia de esta serie.**

También la región de convergencia puede ser calculada por varios métodos, por ejemplo:

Método 1:

La singularidad de la función sen z más cercana al punto $z_0 = \frac{\pi}{4}$ está en el infinito, luego, la serie converge para todos los valores de z tal que:

$$|z| = \rho < \infty$$

Es decir, la región de convergencia buscada es todo el plano finito.

Método 2:

Aplicando el Criterio de Cociente, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-\frac{\pi}{4})^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(z-\frac{\pi}{4})^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{(z-\frac{\pi}{4})^{n+1}}{(z-\frac{\pi}{4})^n}\right| \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-\frac{\pi}{4})}{(n+1)}\right|$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = 0 \iff |z| \neq \infty$$

Es decir, la serie converge para todo z finito. En otras palabras, para :

$$|z| = \rho < \infty$$

tal como se obtuvo anteriormente.

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 3

a) Desarrolle la función $f(z) = e^z$ en una serie de Taylor, alrededor de $z = z_0$.

b) Determine la región de convergencia de esta serie.

Solución:

Por aplicación directa de la serie de Taylor

$$\begin{cases} f(z) = e^z & \Rightarrow f(z_0) = e^{z_0} \\ f'(z) = e^z & \Rightarrow f'(z_0) = e^{z_0} \\ f''(z) = e^z z & \Rightarrow f''(z_0) = e^{z_0} \\ \cdots & \\ f^{(n}(z) = e^z & \Rightarrow f^{(IV}(z_0) = e^{z_0} \end{cases}$$

Luego, la serie buscada será de la forma:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$

Por lo tanto :

$$e^z = e^{z_0} + \frac{e^{z_0}}{1!}(z-z_0) + \frac{e^{z_0}}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{e^{z_0}}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$

De donde:

$$e^z = e^{z_0}\left[1 + \frac{(z-z_0)}{1!} + \frac{(z-z_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} + \cdots\right] \Rightarrow$$

$$e^z = e^{z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{n!}$$

Casos particulares:

a) Serie de Maclaurin : $z_0 = 0 \Rightarrow$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

b) $z_0 = i \Rightarrow$

$$e^{z} = e^{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^{n}}{n!} = e^{i}\left[1+\frac{(z-i)}{1!}+\frac{(z-i)^{2}}{2!}+\cdots+\frac{(z-i)^{n}}{n!}+\cdots\right]$$

Región de Convergencia: $R.C.$

Esta serie es válida en todo punto del plano complejo, ya que no exixte punto singular en dicho plano para la función $f(z) = e^{z}$, es decir, $R.C. \; / \; |z| = \rho, \;\; \rho < \infty.$

$$= oo =$$

7.3) OTROS DESARROLLOS EN SERIE DE TAYLOR

7.3.1) Desarrollos de Maclaurin

Otros desarrollos en serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$, que se consideran de utilidad, son :

Caso 1: $z_0 = 0$, $|z| = \rho < \infty.$

$$a) \quad \operatorname{sen} z = z - \frac{1}{3!}z^{3} + \frac{1}{5!}z^{5} - \frac{1}{7!}z^{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$b) \quad \cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^{2} + \frac{1}{4!}z^{4} - \frac{1}{6!}z^{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$c) \quad \operatorname{sinh} z = z + \frac{1}{3!}z^{3} + \frac{1}{5!}z^{5} + \frac{1}{7!}z^{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z)^{n}}{n!}$$

$$d) \quad \cosh z = 1 + \frac{1}{2!}z^{2} + \frac{1}{4!}z^{4} + \frac{1}{6!}z^{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$e) \quad e^{z^{2}} = 1 + \frac{z^{2}}{1!} + \frac{z^{4}}{2!} + \frac{z^{6}}{3!} + \frac{z^{8}}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}$$

Estas representaciones en serie de Maclaurin son válidas en todo punto del plano complejo puesto que las cinco funciones de la izquierda son analíticas para $\forall z \; / \; |z| = \rho < \infty.$

Caso 2) : $z_0 = 0, \quad |z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^{2} + z^{3} + z^{4} + z^{5} + z^{6} + z^{7} + z^{8} + z^{9} + z^{10} + z^{11} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(z)^{n}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^{2} - z^{3} + z^{4} - z^{5} + z^{6} - z^{7} + z^{8} - z^{9} + z^{10} - z^{11} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z)^{n}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{2}} = 1 + 2z + 3z^{2} + 4z^{3} + 5z^{4} + 6z^{5} + 7z^{6} + 8z^{7} + 9z^{8} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}n(z)^{n-1}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{3}} = 1 + 3z + 6z^{2} + 10z^{3} + 15z^{4} + 21z^{5} + 28z^{6} + 36z^{7} \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}(z)^{n-1}$$

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - z^{10} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z)^{2n}$$

$$\begin{cases} \ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{6}z^6 + \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{8}z^8 + \frac{1}{9}z^9 + \cdots \Rightarrow \\ \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z)^n}{n} \end{cases}$$

$$\ln(1-z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 - \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{6}z^6 - \tfrac{1}{7}z^7 - \tfrac{1}{8}z^8 - \tfrac{1}{9}z^9 + \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z)^n}{n}$$

$$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \cdots\right] = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = -2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \cdots\right] = -2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(z+1)} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 - \frac{5}{128}z^4 + \frac{7}{256}z^5 - \frac{21}{1024}z^6 + \cdots \Rightarrow \\ \sqrt{(z+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left[\frac{1}{2}-(n-1)\right]}{n!} (z)^n \end{cases}$$

7.3.2) Otras series de Taylor

Otras series de Taylor de interés, son:

Ejemplo 4

a) Desarrolle la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ en serie de Taylor de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z+1)^n$$

b) Determine el término general y la región de convergencia

Solución

a) El desarrollo solicitado se lleva a cabo alrededor de $z_0 = -1$, *por lo tanto:*

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{1-z} & \Rightarrow \quad f(-1) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{0!}{2} \\ f'(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2} & \Rightarrow \quad f'(-1) = \dfrac{1!}{2^2} \\ f''(z) = \dfrac{(1)(2)}{(1-z)^3} & \Rightarrow \quad f''(-1) = \dfrac{2!}{2^3} \\ f'''(z) = \dfrac{(1)(2)(3)}{(1-z)^4} & \Rightarrow \quad f'''(-1) = \dfrac{3!}{2^4} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f^{(n}(z) = \dfrac{n!}{(1-z)^{n+1}} & \Rightarrow \quad f^{(n}(-1) = \dfrac{n!}{2^{n+1}} \end{cases}$$

Luego:

$$\frac{1}{1-z} = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(z+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(z+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(z+1)^3 + \cdots \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}(z+1) + \frac{1}{2^3}(z+1)^2 + \frac{1}{2^4}(z+1)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n$$

b) Término General:

Evidentemente: $f_n(z) = \dfrac{1}{2^{n+1}}(z+1)^n$

c) Región de Convergencia:

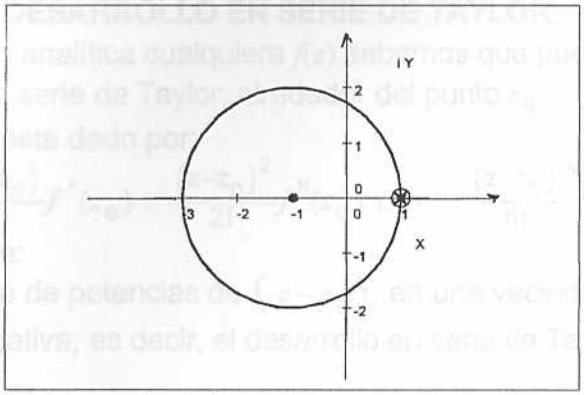
Método 1: aplicando el Criterio del Cociente, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z+1)^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{(z+1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}(z+1)\right| = \frac{1}{2}|z+1|$$

En consecuencia, la serie converge absolutamente para todo z tal que: $\frac{1}{2}|z+1| < 1 \Rightarrow |z+1| < 2$, lo cual corresponde a los puntos interiores a la circunferencia con centro en $z_0 = -1$ y radio $\rho = 2$.

Método 2: también puede determinarse la región de convergencia calculando las singularidades de $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ en el plano complejo y determinando cual de ellas es la más cercana a $z_0 = -1$. Obviamente, ello corresponde al punto $z_s = 1$.

Luego, la región de convergencia será : $|z+1| < 2$, tal como se obtuvo anteriormente. Dicha región se muestra a continuación:



NOTA: Nótese que, con mayor propiedad, puede escribirse que la región de convergencia buscada es: $|z+1| \leq 2$, excepto $z = 1$.

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 5

Calcule el radio del círculo máximo en todo punto del cual el desarrollo indicado es válido:

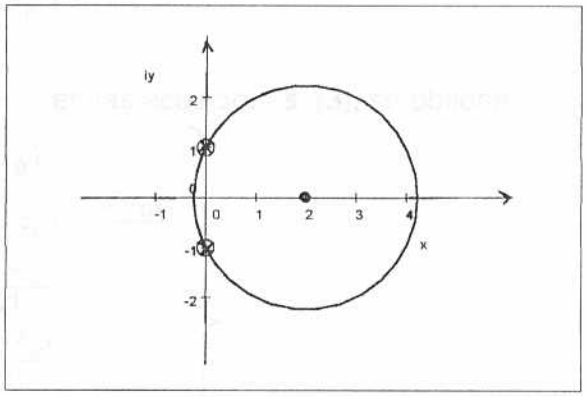
$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-2)^n$$

Solución:

La serie de Taylor se ha desarrollado alrededor del punto $z_0 = 2$.

Las singulridades de $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ ocurrene en: $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \pm i$

En este caso, ambas singularidades se encuentra a igual distancia de $z_0 = 2$; dicha distancia es : $\rho = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$



Luego, la serie de Taylor dada: $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-2)^n$, converge a: $\frac{1}{z^2+1}$

en todo punto del dominio circular : $|z-2| < \sqrt{5}$,

o también para: $|z-2| \leq \sqrt{5}$ excepto: $z = \pm i$

7.4) UNICIDAD DEL DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR

Dada una función analítica cualquiera $f(z)$ sabemos que podemos representarla por medio de una serie de Taylor, alrededor del punto z_0 .

Dicho desarrollo está dado por:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)}{1!} f'(z_0) + \frac{(z-z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \cdots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} f^{(n}(z_0) + \cdots \qquad (1)$$

Cabe preguntarse:

¿ Existe otra serie de potencias de $(z-z_0)$ en una vecindad de z_0?. La respuesta es negativa; es decir, el desarrollo en serie de Taylor, si existe, es único.

Demostración:

Supongamos que existe otro desarrollo y representemos el mismo por :

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + a_4(z-z_0)^4 + \cdots \qquad (2)$$

Derivando la ecuación (2) , se obtiene :

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + 4a_4(z-z_0)^3 + \cdots \quad , |z-z_0| < r$$

Derivando por segunda vez::

$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3(z-z_0) + 12a_4(z-z_0)^2 + \cdots \quad , \quad |z-z_0| < r$$

Escribiendo adecuadamente las derivadas sucesivas :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + a_4(z-z_0)^4 + \cdots \\ f'(z) = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + 4a_4(z-z_0)^3 + \cdots \\ f''(z) = (1)(2)a_2 + (2)(3)a_3(z-z_0) + (3)(4)a_4(z-z_0)^2 + \cdots \\ f'''(z) = (1)(2)(3)a_3 + (2)(3)(4)a_4(z-z_0) + \cdots \\ \cdots \\ f^{(n}(z) = n!a_n + \cdots \end{array} \right\} \qquad (3)$$

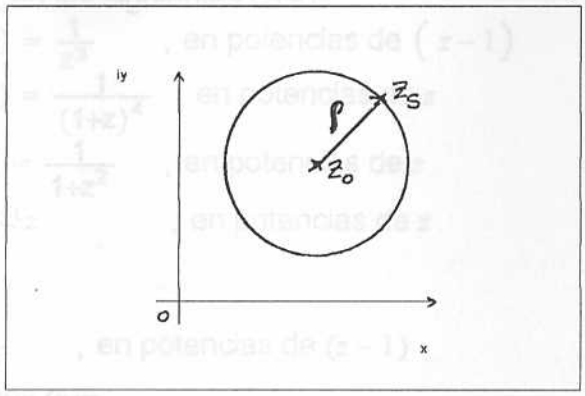
Haciendo : $z = z_0$ en las ecuaciones (3), se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = f(z_0) \\ a_1 = f'(z_0) = \frac{f'(z_0)}{1!} \\ a_2 = \frac{f''(z_0)}{2!} \\ a_3 = \frac{f'''(z_0)}{3!} \\ \cdots \\ a_n = \frac{f^{(n}(z_0)}{n!} \end{array} \right\}$$

Pero estos coeficientes son precismente los del desarrollo en serie de Taylor, por lo tanto, podemos concluir que:

"*El desarrollo en serie de Taylor alrededor de* z_0 de una función analítica $f(z)$,

es la **única** *serie de potencias de* $(z-z_0)$ *que converge a* $f(z)$ *en todo punto de un dominio circular, centrado en* z_0 *, tal que* $|z-z_0| < \rho$, *siendo* ρ *la distancia de* z_0 *a la singularidad de* $f(z)$ *más cercana a* z_0."



(Región de Convergencia de Taylor)

NOTA:

El teorema no afirma (ni niega) que la serie de Taylor converja o no sobre o fuera del círculo $|z-z_0| < \rho$. Sólo asevera que éste es el mayor círculo para el cual, en todo punto interior al mismo, la serie converge a $f(z)$.

7.5) OBSERVACIONES ACERCA DE LA ANALITICIDAD

Hemos visto que existe una estrecha relación entre la analiticidad de una función $f(z)$ y las series de Taylor.

Resumiendo lo hasta aquí expuesto acerca de:

a) Desarrollo en serie de Taylor

b) Unicidad del desarrollo en serie de Taylor

c) Extensión de la Fórmula Integral Cauchy (exixtencia de la derivada de todos órdenes), lo que se expresa por:

$$f^{(n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

podemos decir que una función $f(z)$ es analítica en un dominio D, si satisface una cualquiera de las siguientes condiciones:

a) $f'(z_0)$ existe en todo punto de D.

b) $f(z)$ tiene derivadas de todos los órdenes en todo punto de D.

c) $f(z)$ puede representarse mediante un desarrollo en serie de Taylor en una vecindad de cada punto de D.

d) $f(z)$ es la suma de una serie de potencias que converge en una vecindad de cada punto de D.

e) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ satisface la ecuaciones de Cauchy-Riemann.

f) $\int_A^B f(z)dz$ es independiente de la trayectoria que une el punto A con el punto B.

7.6) EJEMPLOS RESUELTOS II

Ejemplo 5

Determine el desarrollo en serie de Taylor y la Región de Convergencia correspondiente, en los siguientes casos :

a) $f(z) = \frac{1}{z^3}$, en potencias de $(z-1)$

b) $f(z) = \frac{1}{(1+z)^4}$, en potencias de z

c) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, en potencias de z

d) $\tan^{-1} z$, en potencias de z

Solucion :

5.a) $f(z) = \frac{1}{z^3}$, en potencias de $(z-1)$

Conocemos que :

$$f(z) = \frac{1}{z} = 1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots, \qquad |z-1| < 1$$

Luego, derivando una vez término a término, se obtiene:

$$-\frac{1}{z^2} = -1+2(z-1)-(z-1)^2+4(z-1)^3-5(z-1)^4+\cdots$$

Derivando por segunda vez término a término, encontramos que:

$$\frac{2}{z^3} = 2-2(z-1)+3\cdot 4(z-1)^2-4\cdot 5(z-1)^3+\cdots$$

De donde:

$$\frac{1}{z^3} = 1-\frac{3\cdot 2}{2}(z-1)+\frac{4\cdot 3}{2}(z-1)^2-\frac{5\cdot 4}{2}(z-1)^3+\cdots, \qquad |z-1| < 1$$

== oo ==

5.b) *b)* $f(z) = \frac{1}{(1+z)^4}$, en potencias de z

Conocemos que :

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{1-z}\Big|_{z=-z} = 1-z+z^2-z^3+\cdots, \qquad |z| < 1$$

Luego, derivando una vez término a término, se obtiene:

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = -1+2z-3z^2+4z^3-5z^4+\cdots$$

Derivando por segunda vez término a término, encontramos que:

$$\frac{2\cdot 1}{(1+z)^3} = 2\cdot 1-3\cdot 2z+4\cdot 3z^2-5\cdot 4z^3+6\cdot 5z^4+\cdots$$

Derivando por tercera vez término a término:

$$-\frac{3\cdot 2\cdot 1}{(1+z)^4} = 3\cdot 2\cdot 1-4\cdot 3\cdot 2z+5\cdot 4\cdot 3z^2-6\cdot 5\cdot 4z^3+\cdots, \quad |z| < 1$$

De donde:

$$\frac{1}{(1+z)^4} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1}-\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1}z+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 1}z^2-\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}z^3+\cdots, \qquad |z| < 1$$

Es decir:

$$\frac{1}{(1+z)^4} = 1-4z+10z^2-20z^3+35z^4-56z^5+\cdots, \qquad |z| < 1$$

NOTA:

Obsérvese que , para $N \geq 0$, se verifica que:

$$\frac{1}{(1-z)^N} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad , \text{con } C_n = \frac{(N-1+n)!}{n!(N-1)!} \quad , \quad |z| < 1$$

$$= oo =$$

5.c) *c)* $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, en potencias de z

Conocemos que :

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1+z}\Big|_{z=z^2} = [1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \cdots]_{z=z^2} \ , \ |z| < 1$$

Luego,

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - z^{10} + \cdots, \quad |z| < 1$$

$$= oo =$$

5.d) $f(z) = \tan^{-1} z$, en potencias de z

Derivando la función dada, se obtiene: $f'(z) = \frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \frac{1}{z^2+1}$

Conocemos por el ejemplo anterior que:

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - z^{10} + \cdots, \quad |z| < 1$$

En consecuencia:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - z^{10} + \cdots, \quad |z| < 1$$

De donde:

$$f(z) = \tan^{-1} z = \int_0^z \left(1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - z^{10} + \cdots\right) dz \ , \quad |z| < 1$$

Es decir:

$$\tan^{-1} z = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \frac{1}{9}z^9 - \frac{1}{11}z^{11} + \cdots \ , \quad |z| < 1$$

$$= oo =$$

Ejemplo 6

Determine el centro y el radio de círculo dentro del cual, la serie de Taylor indicada converge a la función dada:

a) $\frac{1}{1+z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-1)^n$; *b)* $\frac{1}{\text{sen } z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-1-i)^n$

c) $\frac{1}{z^4+z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-i)^n$; *d)* $\frac{1}{1-\tan z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-1-i2)^n$

e) $\frac{1}{z^3+8} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-5)^n$

Solución :

6.a) $\dfrac{1}{1+z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-1)^n$

La serie ha sido desarrollada alrededor de $z_0 = 1$

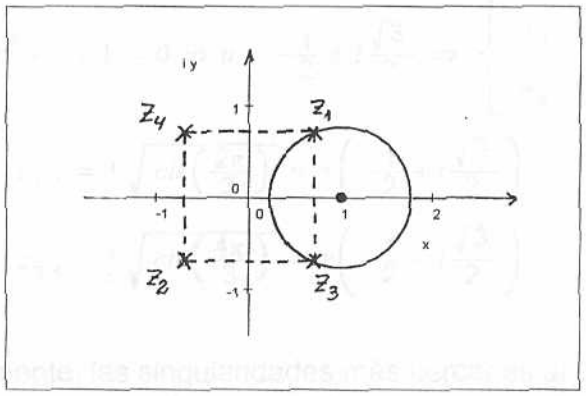
Además, las singularidades de $f(z)$ son la solución de la ecuación:

$1+z^4 = 0$, de donde : $z^4 = -1 \Rightarrow z^4 = cis\,\pi \Rightarrow z^2 = \pm cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Es decir : $z^2 = \pm cis(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} z_{1,2} = \pm\sqrt{cis\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ z_{3,4} = \pm\sqrt{-cis\left(\frac{\pi}{2}\right)} \end{cases}$

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{cis\left(\frac{\pi}{2}\right)} = cis\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z_2 = -\sqrt{cis\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -cis\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z_3 = \sqrt{cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = cis\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ z_4 = -\sqrt{cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -cis\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

La siguiente gráfica muestra la ubicación del punto $z_0 = 1$ así como también la ubicación de las singularidades calculadas:



Evidentemente, las singularidades más cercanas al punto $z_0 = 1$, son:

$z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

La circunferencia centrada en $z_0 = 1$ que pasa por estos dos puntos singulares, es : $|z-1| = \sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

La región de convergencia será : $|z-1| \le \sqrt{2-\sqrt{2}}$, excepto $z = z_1, z_3$

= oo =

6.b) $\dfrac{1}{\text{sen z}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z-1-i \right)^n$

La serie ha sido desarrollada alrededor de $z_0 = 1+i$

Además, las singularidades de $f(z)$ son la solución de la ecuación:

sen $z = 0$, de donde: $z = k\pi$, con $k = 0, 1, 2, \cdots$

Evidentemente, la singularidad más cercanas al punto $z_0 = 1+i$, es:

$$z_1 = 0 \qquad (k = 0)$$

La circunferencia centrada en $z_0 = (1+i)$ que pasa por este punto singular, es : $\left| z-1-i \right| = \sqrt{2}$

La región de convergencia será : $\left| z-1 \right| \leq \sqrt{2}$, excepto $z = 0$

$$= \text{oo} =$$

6.c) $\dfrac{1}{z^4+z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z-i \right)^n$

La serie ha sido desarrollada alrededor de $z_0 = i$

Además, las singularidades de $f(z)$ son la solución de la ecuación:

$z^4 + z^2 + 1 = 0$, de donde, haciendo : $z^2 = u$, se obtiene:

$$u^2 + u + 1 = 0 \Rightarrow u = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = cis\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ u_2 = cis\left(\frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Luego: $\begin{cases} z_{1,2} = \pm\sqrt{cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \pm\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ z_{3,4} = \pm\sqrt{cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \pm\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$

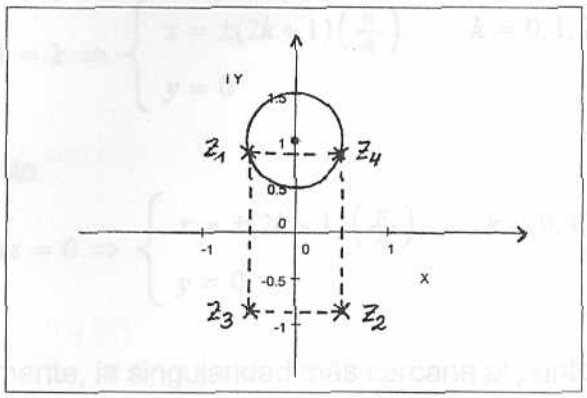
Evidentemente, las singularidades más cercanas al punto $z_0 = 1+i$, son:

$$z_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad y \quad z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

La circunferencia centrada en $z_0 = (1+i)$ que pasa por estos puntos singular, es : $\left| z-1-i \right| = \sqrt{2-\sqrt{3}}$

La región de convergencia será : $\left| z-1 \right| \leq \sqrt{2-\sqrt{3}}$, excepto $z = z_1, z_2$.

Su gráfica se muestra a continuación:



$= oo =$

6.*d*) $\dfrac{1}{1-\tan z} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z-1-i2 \right)^n$

La serie ha sido desarrollada alrededor de $z_0 = 1+i2$

Además, las singularidades de $f(z)$ son la solución de la ecuación:

$1-\tan z = 0$, de donde: $\tan z = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} z = \cos z$

Pero:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad y \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Luego:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow \left(e^{iz} - e^{-iz} \right) = i\left(e^{iz} + e^{-iz} \right) , \Rightarrow$$
$$e^{iz}\left(1-i \right) = e^{-iz}\left(1+i \right)$$

De donde: $e^{i2z} = \dfrac{1+i}{1-i} = i$

Es decir, $e^{i2(x+iy)} = e^{-2y}\left(\cos 2x + i\, sen 2x \right) = i$

Igualando parte real y parte imaginaria : $\begin{cases} e^{-2y}(\cos 2x) = 0 \\ e^{-2y}\left(sen 2x \right) = 1 \end{cases}$

Pero:

$$e^{-2y}(\cos 2x) = 0 \Rightarrow 2x = \pm(2k+1)\left(\frac{\pi}{2} \right) , \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

es decir :

$$e^{-2y}(\cos 2x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm(2k+1)\left(\frac{\pi}{4} \right), \ k = 0,1,2,3,\ldots \\ y \in R \end{array} \right\} \ldots . (1)$$

Por otra parte :

$$e^{-2y}\left(sen2x\right) = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = \pm(2k+1)\left(\frac{\pi}{4}\right), & k = 0,1,2,3,\ldots \\ y = 0 & \end{array} \right\} \ldots (2)$$

Por lo tanto:

$$1 - \tan z = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = \pm(2k+1)\left(\frac{\pi}{4}\right), & k = 0,1,2,3,\ldots \\ y = 0 & \end{array} \right\},$$

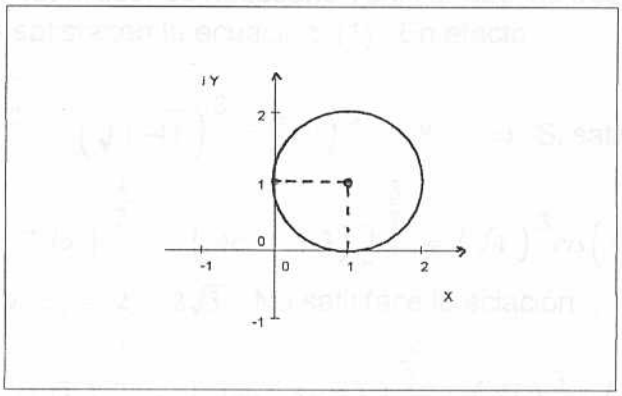
Evidentemente, la singularidad más cercana al punto $z_0 = 1+i$, es:

$$z_1 = \frac{\pi}{4}$$

La circunferencia centrada en $z_0 = (1+i)$ que pasa por este punto singular, es : $\left| z-1-i \right| = \sqrt{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^2 + 1}$

La región de convergencia será : $\left| z-1 \right| < \sqrt{\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^2 + 1} = 1.0228$

Su gráfica se muestra a continuación:



(Región de convergencia: $\left| z-1 \right| \leq 1.0228$)

== oo ==

6.e) $$\frac{1}{z^{\frac{3}{2}} + i8} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(z-5\right)^n$$

La serie ha sido desarrollada alrededor de $z_0 = 5$

Además, las singularidades de $f(z)$ son la solución de la ecuación:

$$z^{\frac{3}{2}} + i8 = 0 \qquad .....(1)$$

De donde: $z^{\frac{3}{2}} = -i8 \qquad \Rightarrow z^{\frac{3}{2}} = 2^3 e^{i\left[\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]}$

Luego, elevando al cuadrado ambos miembros de esta igualdad, se obtiene :

$$z^3 = 2^6 e^{i[3\pi + 4k\pi]} \quad \Rightarrow \quad z = 8e^{i\left[\frac{3\pi + 4k\pi}{3}\right]}, \quad k = 0, 1, 2$$

Las soluciones son :

$$\begin{cases} z_1 = -4, & \text{para : } k = 0 \\ z_2 = 8e^{i\left[\frac{7\pi}{3}\right]} = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + i2\sqrt{3}, & \text{para : } k = 1 \\ z_3 = 8e^{i\left[\frac{11\pi}{3}\right]} = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - i2\sqrt{3}, & \text{para : } k = 2 \end{cases}$$

Verificación:

Como en el proceso de cálculo de los valores de z fué necesario elevar al cuadrado, es necesario verificar que las tres soluciones halladas satisfacen la ecuación (1) . En efecto:

$$(z_1)^{\frac{3}{2}} = (-4)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{(-4)}\right)^3 = (2i)^3 = -8i \quad \Rightarrow \text{ Si satisface la ecuación (1)}$$

$$(z_2)^{\frac{3}{2}} = \left(2 + i2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left[4cis(\pi/3)\right]^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 cis\left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = 8i$$

luego, $z_2 = 2 + i2\sqrt{3}$ No satisface la eciación (1).

$$(z_3)^{\frac{3}{2}} = \left(2 - i2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \left[4cis(5\pi/3)\right]^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 cis\left(\frac{5\pi}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = 8i$$

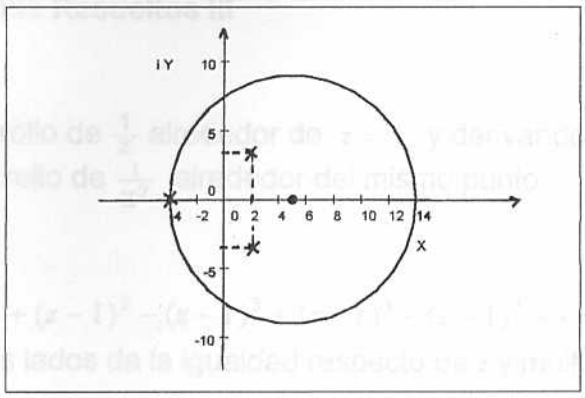
luego, $z_3 = 2 - i2\sqrt{3}$ No satisface la eciación (1).

En consecuencia, la única solución de la ecuación (1) es :

$$z_1 = 4$$

La región de convergencia buscada será por lo tanto, la circunferencia centrada en $z_0 = 5$ que pasa por este punto singular $z_1 = 4$, cuya ecuación es : $|z - 5| = 9$.

Su gráfica se muestra a continuación:



(Región de convergencia: $|z-5|=9$)

.

$$= \text{oo} =$$

.

7.7) MÉTODOS AUXILIARES PARA OBTENER DESARROLLOS EN SERIE DE TAYLOR

Las ecuaciones:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \quad , \quad |z-z_0|<\rho, \quad \rho>0$$

$$C_n=\frac{f^{(n}(z_0)}{n!}$$

nos permite obtener el desarrollo en sefie de Taylor de una función analítica cualquiera $f(z)$. Pero a veces es posible emplear métodos abreviados que nos ahorran el tedio de calcular varias derivadas de orden superior para obtener los coeficintes C_n. En esta sección estudiaremos algunos de esos métodos abreviados.

7.7.1) Método 1: Derivación e Integración término a término

Ya hemos visto que la serie de Taylor de $f(z)$ permite ser derivada término a término. Si la serie original converge dentro de un círculo de radio ρ y centro z_0, la serie que se obtiene por derivación término a término converge a $f'(z)$, dentro del mismo círculo.

Este procedimiento permite repetirse un número indefinido de veces y así obtener una serie para cualquier derivada de $f(z)$.

Adicionalmente, otro de los teoremas analizados perimite integrar término a témino la serie de Taylor de $f(z)$ a lo, largo de una trayectoria contenida en un círculo de radio ρ . La serie que resulta de esta operación converge a la integral de $f(z)$ a lo largo de la misma trayectoria.

Ilustraremos lo aquí expuesto con los siguientes ejemplos;

.

$$= \text{oo} =$$

.

7.7.2) Ejemplos Resueltos III

Ejemplo 7

Usando el desarrollo de $\frac{1}{z}$ alrededor de $z = 1$, y derivando término atérmino, obtenga el desarrollo de $\frac{1}{z^2}$ alrededor del mismo punto.

Solución:

Sabemos que:

$$\frac{1}{z} = 1 + (-z+1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + (z-1)^4 - (z-1)^5 + \cdots, \qquad |z-1| < 1$$

Derivando ambos lados da la igualdad respecto de z y multiplicando por (-1), se obtiene:

$$\frac{1}{z^2} = 1 + (-2z+2) + 3(z-1)^2 - 4(z-1)^3 + 5(z-1)^4 - 6(z-1)^5 + 7(z-1)^6 - \cdots$$

De donde:

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(z-1)^n \quad , \text{ para : } |z-1| < 1$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 8

Obtenga la serie de Maclaurin de : $f(z) = \int_0^z g(w)dw$, donde :

$$g(w) = \begin{cases} \frac{\text{sen w}}{w} , & \text{si } w \neq 0 \\ 1 , & \text{si } w = 0 \end{cases}$$

Esta función $g(w)$ se conoce como "Función seno integral" y no puede evaluarse en términos de funciones elementales . Aparece frecuentemente al resolver problemas de radiaciones electromagnéticas.

Solución:

Sabemos que, alrededor de $z = 0$,

$$\text{sen w} = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \frac{w^9}{9!} - \frac{w^{11}}{11!} + \cdots, \qquad \forall z \text{ finito}$$

Por lo tanto:

$$\frac{\text{sen w}}{w} = 1 - \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} - \frac{w^6}{7!} + \frac{w^8}{9!} - \frac{w^{10}}{11!} + \cdots, \qquad \forall z \text{ finito}$$

Integrando término a término, se obtiene:

$$\int_0^z \frac{\text{sen w}}{w} dw = \int_0^z \left[1 - \frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} - \frac{w^6}{7!} + \frac{w^8}{9!} - \frac{w^{10}}{11!} + \cdots\right] dw$$

De donde:

$$\int_0^z \frac{\text{sen w}}{w} dw = z - \frac{z^3}{3 \cdot 3!} + \frac{z^5}{5 \cdot 5!} - \frac{z^7}{7 \cdot 7!} + \frac{z^9}{9 \cdot 9!} - \frac{z^{11}}{11 \cdot 11!} + \cdots \Rightarrow$$

$$\int_0^z \frac{\text{sen w}}{w} dw = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)(2n+1)!} \qquad \text{válida para : } \forall z \text{ finito.}$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 9

Obtenga la serie de Maclaurin de : $f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

Solución:

Sabemos que:

$$\ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \ln(1+w) - \ln(1-w) = \int_0^z \left(\frac{1}{1+w} + \frac{1}{1-w}\right) dw \qquad \ldots.(1)$$

Pero: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots \\ \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \end{array} \right\}, \quad |z| < 1$

Por lo que: $\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}\right) = 2\left(1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \cdots\right)$

Sustituyendo en (1), se obtiene:

$$\ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \int_0^z \left(\frac{1}{1+w} + \frac{1}{1-w}\right) dw = 2\int_0^z (1 + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \cdots) dz \Rightarrow$$

Es decir: $\ln\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \cdots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)}, \quad |z| < 1$

$$= oo =$$

Ejemplo 10

Obtenga la serie de Maclaurin de : $f(z) = \int_0^z e^{w^2}\, dw$

Solución:

Sabemos que:

$f'(z) = e^{z^2}$

Pero: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \ \forall z$ finito

Luego:

$$e^{z^2} = e^z|_{z=x^2} = 1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \frac{z^8}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \Rightarrow$$

$$f'(z) = 1 + \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \frac{z^8}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$$

Integrando término a término:

$$f(z) = \int_0^z e^{w^2} dw = \frac{z}{0!\cdot 1} + \frac{z^3}{1!\cdot 3} + \frac{z^5}{2!\cdot 5} + \frac{z^7}{3!\cdot 7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \ \forall z \text{ finito}$$

Ejemplo 11

Obtenga la serie de Maclaurin de : $f(z) = \arctan z$

Solución:

Sabemos que:

$$f(z) = \arctan z \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1+z}\Big|_{z=z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 + \cdots, \; |z| < 1$$

Integrando término a término, se obtiene:

$$f(z) = \int_0^z f'(z)dz = \int_0^z [1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 + \cdots]dw = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \cdots$$

Es decir,

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)}, \quad |z| < 1$$

$$== \text{oo} ==$$

Ejemplo 12

Obtenga la serie de Maclaurin de : $f(z) = \int_0^z \frac{e^w}{w} dw \;, \; w > 0$

Solución:

Sabemos que, $f(0) = \int_0^0 \frac{e^w}{w} dw = 0$

Además,

$$f'(z) = \frac{e^z}{z} = \frac{1}{z}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right) = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots, \; z > 0$$

Integrando término a término, se obtiene:

$$f(z) = \int_0^z f'(z)dz = \int_0^z \left(\frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots\right)dw \Rightarrow$$

$$f(z) = \ln z + z + \frac{z^2}{2 \cdot 2!} + \frac{z^3}{3 \cdot 3!} + \frac{z^4}{4 \cdot 4!} + \frac{z^5}{5 \cdot 5!} + \cdots, \; z > 0$$

es decir,

$$f(z) = \ln z + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z)^{n+1} \;, \text{ donde : } C_n = \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!}$$

7.7.3) Método 2: Multiplicación y división de series

Sean $g(z)$ y $h(z)$ dos funciones analíticas. Entonces, en principio, podemos obtener el desarrollo en serie de Taylor de $f(z) = g(z) \cdot h(z)$ multiplicando el desarrollo en serie de Taylor de $g(z)$ por el de $h(z)$.

Esto es posible gracias a que, como ya hemos estudiado, el producto de dos series absolutamene convergentes, es una serie absolutamente convergente cuya suma es igual al producto de las sumas de las series originales.

Naturalmente, las series originales han de desarrollarse alrededor del mismo punto z_0.

NOTA: Multiplicar series suele ser, en general, una operación tediosa, particularmente si se desea obtener una expresión general para el n-ésimo término de la serie resultante. No obstante, el procedimiento se sijmplifica si sólo se requieren los primeros términos del dessarrollo.

Ejemplo 13:

a) Mediante el producto de series, obtenga el desarrollo de Maclaurin de:

$f(z) = \frac{e^z}{1-z}$. Determine la región de convergencia.

b) Use el resultado para obtener el valor de la décima derivada de $f(z)$ en $z = 0$.

Solución:

De acuerdo con lo estudiado en secciones precedentes, sabemos que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} & , \forall z \, finito \\ \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n & , |z| < 1 \end{array} \right\} \text{, luego.}$$

$$f(z) = \frac{e^z}{1-z} = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots\right) \Rightarrow$$

Para multiplicar en forma ordenada estas series utilizaremos el conocido " Producto de Cauchy ", obteniéndose:

$$\begin{array}{lll} f(z) = \frac{1}{0!} + & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \sum subíndices = 2 \\ +\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}\right) z + & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \sum subíndices = 3 \\ +\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) z^2 + & \cdots\cdots\cdots\cdots & \sum subíndices = 4 \\ +\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) z^3 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \sum subíndices = 5 \\ \vdots & & \\ +\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} z^n & & \end{array}$$

Por lo tanto: $$\frac{e^z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \right) z^n$$

Región de Convergencia: $\{\forall z \, finito\} \cap \{|z| < 1\} = |z| < 1$

b) Resulta bastante tedioso calcular la derivada décima de $f(z)$, diferenciando diez (10) veces esta función. Obsérvese sin embargp que, en la serie de Maclaurin de $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$, se tiene que:

$$C_n = \frac{f^{(n}(0)}{n!}, \text{ de donde : } f^{(n}(0) = n! C_n \Rightarrow f^{(10}(0) = 10! \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{j!} \Rightarrow$$

$$f^{(10}(0) = 10!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{10!}\right) = 9.864.101$$

$$== \text{oo} ==$$

Ejemplo 14:

a) Mediante la división de series, obtenga el desarrollo de Maclaurin de: $f(z) = \frac{e^z - 1}{\cos z}$. Determine la región de convergencia..

Solución:

Según ya hemos estudiado:
$$\begin{cases} e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots, & \forall z \text{ finito} \\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots, & z \in (-\infty, \infty) \end{cases}$$

Dividiendo estas dos series, se obtiene:

$$\begin{array}{l|l} z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots & -\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots \\ \hline -z \quad -\frac{z^3}{2!} \quad + \cdots & z + \frac{z^2}{2!} + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right)z^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{(2!)^2}\right)z^4 + \cdots \\ \hline \frac{z^2}{2!} + \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right)z^3 + \frac{z^4}{4!} + \cdots & \\ -\frac{z^2}{2!} \quad + \frac{z^4}{(2!)^2} + \cdots & \\ \hline \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right)z^3 + \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{(2!)^2}\right)z^4 + \cdots & \end{array}$$

Luego, la división anterior muestra que:

$C_0 = 0$ ..... (Coeficiente de z^0)

$C_1 = 1$ ..... .(Coeficiente de z^1)

$C_2 = \frac{1}{2!}$ ....(Coeficiente de z^1)

$C_3 = \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}$ .....(Coeficiente de z^1)

En resumen:

$$\frac{e^z - 1}{\cos z} = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{2}{3}z^3 + \frac{7}{24}z^4 + \frac{3}{10}z^5 + \frac{91}{720}z^6 + \frac{13}{105}z^7 + \cdots \quad ,\forall z \text{ finito.}$$

$$= oo =$$

7.7.4) Método 3: Fracciones simples

Sea $f(z)$ una función algebráica racional, es decir, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios en z.

Si $Q(z) \neq 0$, entonces $f(z)$ tiene desarrollo en serie de Taylor alrededor de z_0.

En principio, los coeficientes de $f(z)$ pueden obtenerse por derivaciones

sucesivas de $f(z)$, pero este procedimiento es frecuentemente tedioso.
Cando el grado de $Q(z)$ es superior al grado de $P(z)$, el método de las fracciones parciales proporciona un procedimiento sistemático para obtener los coeficientes de la serie de Taylor.

Cuando $P(z)$ es de grado igual o superior al de $Q(z)$, el método que vamos a presentar también resulta útil, siempre y cuando se efectúe una división simple previa.

Regla 1: Factores distintos

Sea $P(z) / Q(z)$ una fracción racional tal que el polinomio $P(z)$ es de grado menor que el de $Q(z)$. Si podemos factorizar $Q(z)$ en la forma:

$$Q(z) = k(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

donde : $z_1, z_2, \cdots, z_n$ son son todas contantes distintas y k es una constante,

entonces: $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{A_1}{(z - z_1)} + \dfrac{A_2}{(z - z_2)} + \cdots + \dfrac{A_n}{(z - z_n)}$,

en donde: $\begin{cases} A_1, A_2, \cdots \text{ son constantes} \\ z \neq a_j, \ j = 1, 2, 3, \cdots, n \end{cases}$

Ilustraremos lo aquí expuesto con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 15:

Desarrolle $f(z) = \dfrac{z}{(z^2 - z - 2)}$ en serie de Taylor alrededor de $z = 1$

Solución:

Por la Regla 1, obtenemos:

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - z - 2)} = \frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z-2)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = -1 \Rightarrow -1 \equiv A(-3) \Rightarrow A = \frac{1}{3} \\ z = 2 \Rightarrow 2 \equiv B(3) \Rightarrow B = \frac{2}{3} \end{array} \right\}$$

luego: $$f(z) = \frac{z}{(z^2 - z - 2)} = \frac{1/3}{(z+1)} + \frac{2/3}{(z-2)}$$

Primera Fracción:

$$\frac{1/3}{(z+1)} = \frac{1/3}{(z-1)+2} = \frac{1/3}{2\left(1+\frac{z-1}{2}\right)} = \frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{z-1}{2}\right)+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\cdots\right],$$

desarrollo válido para: $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, es decir, en el dominio $D_1 : |z-1| < 2$

Segunda Fracción:

$$\frac{2/3}{(z-2)} = \frac{2/3}{(z-1)-1} = \frac{2/3}{-1[1-(z-1)]} = -\frac{2}{3}\left[1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots\right],$$

desarrollo válido en el dominio $D_2 : |z-1| < 1.$

Como los dominios D_1 y D_2 se intersectan $(D_1 \cap D_2 = D_1)$, podemos escribir que:

$$f(z) = \frac{z}{(z^2-z-2)} = \frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{z-1}{2}\right)+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\cdots\right]-$$

$$-\frac{2}{3}\left[1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots\right],$$

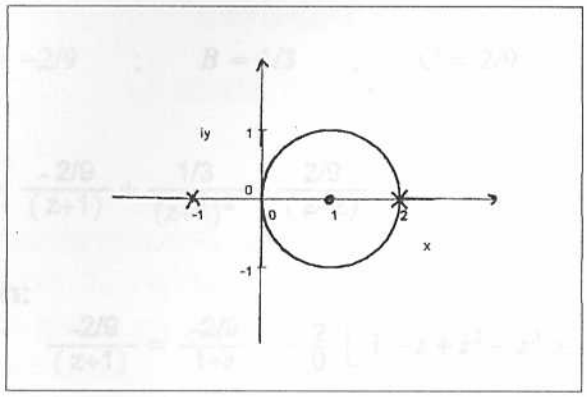
De donde :

$$f(z) = \left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{12}-\frac{2}{3}\right)(z-1)+\left(\frac{1}{24}-\frac{2}{3}\right)(z-1)^2+\cdots, \quad \text{o también:}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-1)^n \quad , \quad C_n = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{3} \quad , \quad |z-1| < 1$$

NOTA:

Nótese que la región de convergencia : $|z-1| < 1$ puede también obtenerse calculando la singularidad de $f(z)$ más cercana al punto $z_0 = 1$, (centro del desarrollo), como lo ilustra la siguiente figura :



(Región: $|z-1|<1$)

Regla 2: Factores repetidos

Sea $P(z)/Q(z)$ una fracción racional tal que el polinomio $P(z)$ es de menor grado que $Q(z)$. Además. la factorización de $Q(z)$ es de la forma:

$$Q(z)=(z-z_1)^m(z-z_2)^n\cdots(z-z_n)^p$$

con lo cual:

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(z)}{(z-z_1)^m(z-z_2)^n\cdots(z-z_n)^p}$$

Podemos entonces descomponer $\frac{P(z)}{Q(z)}$ como en el caso anterior:

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A_1}{(z-z_1)}+\frac{A_2}{(z-z_1)^2}+\cdots++\frac{A_m}{(z-z_2)^m}+$$

$$+\frac{B_1}{(z-z_2)}+\frac{B_2}{(z-z_2)^2}+\cdots+\frac{B_n}{(z-z_2)^n}+\cdots+$$

$$+\frac{N_1}{(z-z_n)}+\frac{N_2}{(z-z_n)^2}+\cdots+\frac{N_p}{(z-z_n)^p}$$

Ilustraremos lo aquí expuesto con el siguiente ejemplo:

== oo ==

Ejemplo 16:

Desarrolle $f(z)=\frac{z}{(z+1)^2(z-2)}$ en serie de Maclaurin

Solución:

Como $(z+1)$ aparece elevado al cuadrado, hemos de aplicar la Regla 2.

Así se obtiene:

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)^2(z-2)}=\frac{A}{(z+1)}+\frac{B}{(z+1)^2}+\frac{C}{(z-2)}$$

De donde: $A = -2/9$; $B = 1/3$; $C = 2/9$

Es decir:

$$f(z) = \frac{-2/9}{(z+1)} + \frac{1/3}{(z+1)^2} + \frac{2/9}{(z-2)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Primera Fracción:

$$\frac{-2/9}{(z+1)} = \frac{-2/9}{1+z} = -\frac{2}{9}\left[\, 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots \right]$$

desarrollo válido en el dominio $D_1 : |z| < 1$

Segunda Fracción:

$$\frac{1/3}{(z+1)^2} = \frac{1}{3}\left[\, 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \cdots \right],$$

desarrollo válido en el dominio $D_2 : |z| < 1$

Tercera Fracción:

$$\frac{2/9}{z-2} = \frac{2}{9}\frac{1}{-2\left(1 - \frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{9}\left[1 + \left(\frac{z}{2}\right) + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots\right]$$

desarrollo válido en edominio $D_3 : \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2$

Como los dominios D_1 , D_2 y D_3 se intersectan ($D_1 \cap D_2 \cap D_3 = D_1$), podemos escribir , sustituyendo estos resultados en la expresión (1), que:

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)} = -\frac{2}{9}\left[\, 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots \right] + \frac{1}{3}\left[\, 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + \cdots \right] -$$

$$-\frac{1}{9}\left[1 + \left(\frac{z}{2}\right) + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots\right], \text{válido para } |z| < 1$$

Para $|z| < 1$ es posible sumar estas tres series para obtener :

$$\frac{z}{(z+1)^2(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

donde : $C_n = (-1)^n\left(\frac{2}{9}\right) + (-1)^n\left(\frac{n+1}{3}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

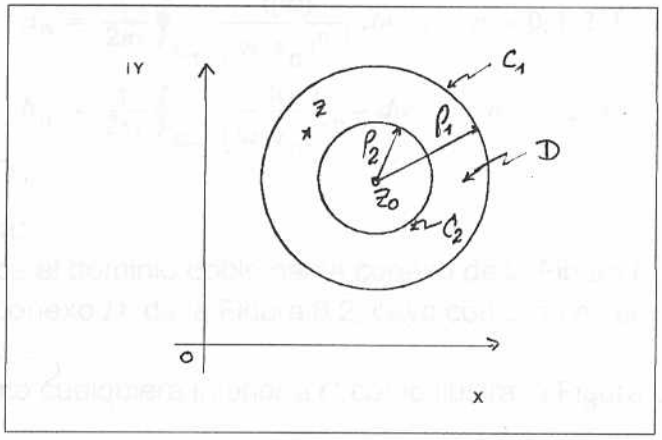
== oo ==

CAPÍTULO VIII

LA SERIE DE LAURENT

8.1) INTRODUCCIÓN

En varios problemas de aplicación es necesario desarrollar una función $f(z)$ alrededor de un punto z_0 donde $f(z)$ es singular. Obviamente, el teorema de Taylor no se puede aplicar en tales casos, por lo que se requiere desarrollar un nuevo tipo de serie conocida como " Serie de Laurent ". Dicha serie será una representación de $f(z)$, válida en un dominio anular D (corona circular), limitado por las circunferencias C_1 y C_2 , de radios ρ_1 y ρ_2 respectivamente, siendo $\rho_1 > \rho_2$ y tales que $f(z)$ es analítica en dicha corona circular y en cada punto de C_1 y C_2, como se ilustra en la figura 8.1 siguiente.



(Fig. 8.1: $\rho_2 < |z - z_0| < \rho_1$)

Como en el caso de la serie de Taylor, $f(z)$ puede ser singular en algunos puntos del exterior de C_1 y, como característica esencialmente nueva, también puede ser singular en algunos puntos en el interior de C_2, incluso en z_0.

8.2) APLICACIONES

La Serie de Laurent es de gran importancia para la evaluación de muchas clases de integrales, pues constituye una valiosa herramienta para el cálculo de residuos, los cuales se estudiarán en el siguiente capítulo (Capítulo IX).

Otro uso de la serie de Laurent, es en el cálculo de la Transformada Z (se estudiará en el Capítulo X del este trabajo), la cual es de gran importancia en las matemáticas aplicadas y en diversa ramas de la Ingeniería, especialmente, en Ingeniería de Telecomunicaciones.

Cabe preguntarse, ¿qué clase de funciones pueden representarse en serie de Laurent y en qué región del plano complejo será válido dicha representación? La respuesta se encuentra en el siguiente teorema:

8.3) TEOREMA DE LAURENT

Sea $f(z)$ una función analítica sobre las circunferencias C_1 y C_2, ambas centradas en z_0 y en la corona circular $\rho_2 < |z - z_0| < \rho_1$ por ellas definida (Ver Fig.8.1).
Si z pertenece al dominio D así definido, la función $f(z)$ puede representarse mediante la serie conocida como "Serie de Laurent", dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

Es decir:

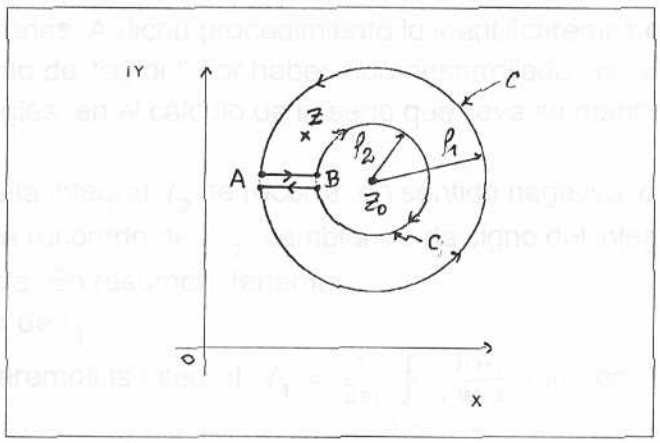
$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots$$

Donde:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \\ b_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}} dw \quad , \quad n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

Demostración:

Transformemos el dominio doblemente conexo de la Figura 8.1 en el dominio simplemente conexo D de la Figura 8.2, cuyo contorno es ahora la curva cerrada simple C.
Sea z un punto cualquiera interior a C, como ilustra la Figura 8.2



(Fig. 8.2 : $z \in D$)

Por el Teorema de la Fórmula Integral de Cauchy, tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z)} dw \qquad \ldots . (1)$$

Pero, el contorno C así definido, recorrido en sentido positivo, está

conformado por:

C :
- * El segmento rectilíneo orientado AB
- * La circunferencia C_2 recorrida en sentido horario
- * El segmento rectilíneo orientado BA
- * Lacircunferencia C_1 recorrida en sentido antihorario

Por lo tanto:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{AB} \frac{f(w)}{(w-z)}dw + \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_1)}dw + \int_{BA} \frac{f(w)}{(w-z_1)}dw - \oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_1)}dw\right]$$

Las contribuciones de los segmentos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ a la integral de la expresión (1) se anulan, debido a que las direcciones de integración son contrarias: Por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a :

$$f(z) = I_1 - I_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

donde:

- $I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)}dw$, con C_1 recorrida en sentido positivo (anti-horario)
- $I_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)}dw$, con C_2 recorrida en sentido negativo (horario)

Obsérvese las direcciones de integración de estas dos integrales. El contorno de la integral I_1 , es decir, la circunferencia C_1, se recorre en sentido positivo, por lo que el cálculo de la misma se lleva a cabo de misma manera que el de la integral presente en la serie de Taylor, lo que ocasiona la evidente vinculación entre ambas series. A dicho procedimiento lo identificaremos como " Procedimiento de Taylor " por haber sido desarrollado por este importante matemático inglés, en el cálculo de la serie que lleva su nombre, ya estudiada en el Capítulo VII.

El contorno de la integral I_2 se recorre en sentido negativo, por lo que invertiremos este sentido de recorrido de C_2 cambiando de signo del integrando correspondiente. En resumen, tenemos :

a) Cálculo de I_1 :

Consideremos la integral : $I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)}dw$, con C_1 reorrida en sentido positivo (anti-horario).

Aplicando el " Procedimiento de Taylor " antes desarrollado, se tiene que:

$$\frac{1}{(w-z)} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{(w-z_0)} \cdot \frac{1}{\left[1-\frac{(z-z_0)}{(w-z_0)}\right]} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(w-z)} = \frac{1}{(w-z_0)}\left[1+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n-1}+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{1}{1-\frac{(z-z_0)}{(w-z_0)}}\right.$$

De donde:

$$\frac{1}{(w-z)} = \frac{1}{(w-z_0)}+\frac{(z_1-z_0)}{(w-z_0)^2}+\frac{(z_1-z_0)^2}{(w-z_0)^3}+\cdots+\frac{(z_1-z_0)^{n-1}}{(w-z_0)^n}+\left(\frac{z_1-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{1}{(w-z_1)}$$

Multiplicando por : $\frac{f(w)}{2\pi i}$ e integrando miembro a miembro alrededor del contorno C_1, se obtiene:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z)}dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)}dw+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{(z-z_0)}{(w-z_0)^2}f(w)dw+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_3'}\frac{(z_1-z_0)^2}{(w-z_0)^3}f(w)dw+\cdots+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_3'}\frac{(z-z_0)^{n-1}}{(w-z_0)^n}f(w)dw \quad + U_n$$

donde $U_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{(w-z)}dw$

Pero, dado que el factor : $(z-z_0)^n$, $n = 1,2,3,\cdots$ es independiente de la variable de integración w , se puden sacar de la respectiva integral, obteniéndose:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)}dw+\frac{(z-z_0)}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw+\frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^3}dw+\cdots+$$

$$+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}dw+U_n$$

En resumen, se puede escribir que:

$$I_1 = a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\cdots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+U_n. \quad ..(3)$$

donde :
$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)}dw \\ a_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw \\ a_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^3}dw \\ \cdots \\ a_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}dw \\ U_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\left(\frac{z_1-z_0}{w-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{(w-z_1)}dw \end{cases}$$

b) Consideremos ahora la Integral : $I_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z)}dw$, con C_2 recorrida en sentido negativo (horario).

Invirtiendo el orden de integración y contrarrestando esta operación cambiando de signo al integrando, se obtiene:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(z-w)}dw$$

Aplicando de nuevo el " Procedimiento de Taylor ", se obtiene :

$$\frac{1}{(z-w)} = \frac{1}{(z-z_0)-(w-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)}\cdot\frac{1}{\left[1-\frac{(w-z_0)}{(z-z_0)}\right]} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(z-w)} = \frac{1}{(z-z_0)}\left[1+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^{n-1}+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{1}{1-\frac{(w-z_0)}{(z-z_0)}}\right]$$

De donde:

$$\frac{1}{(z-w)} = \frac{1}{(z-z_0)}+\frac{(w-z_0)}{(z-z_0)^2}+\frac{(w-z_0)^2}{(z-z_0)^3}+\cdots+\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{1}{(z-z_0)}$$

Multiplicando por : $\frac{f(w)}{2\pi i}$ e integrando miembro a miembro sobre el contorno C_2, recorrido ahora en sentido positivo,se obtiene:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(z-w)}dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(z-z_0)}dw+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{(w-z_0)^2}{(z-z_0)^3}f(w)dw+\cdots+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{(w-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}f(w)dw+V_n$$

Donde $V_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{(z-w)}dw$

Pero, dado que el factor : $\frac{1}{(z_1-z_0)^n}$, $n=1,2,3,\cdots$ es independiente de la variable de integración w , se puden sacar de la respectiva integral, obteniéndose:

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(z_1-w)}dw=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z_1-z_0)}\oint_{C_2}f(w)dw+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z_1-z_0)^3}\oint_{C_2}(w-z_0)^2f(w)dw+\cdots+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z_1-z_0)^n}\oint_{C_2}(w-z_0)^{n-1}f(w)dw+V_n$$

En resumen, se puede escribir que:

$$I_2=\frac{b_1}{(z_1-z_0)}+\frac{b_2}{(z_1-z_0)^2}+\frac{b_2}{(z_1-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{(z_1-z_0)^{n-1}}+V_n \qquad \ldots(4)$$

donde :

$$\begin{cases} b_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}f(w)dw \\ b_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-1}}dw \\ b_3=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-2}}dw \\ \cdots \\ b_{n-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n}}dw \\ V_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\left(\frac{w-z_0}{z_1-z_0}\right)^n\frac{f(w)}{(z-w)}dw \end{cases}$$

Sustituyendo estos resultados (3) y (4) en la ecuación (2), se obtiene :

$$f(z_1)=a_0+a_1(z_1-z_0)+a_2(z_1-z_0)^2+a_3(z_1-z_0)^3+\cdots+a_{n-1}(z_1-z_0)^{n-1}+U_n+$$

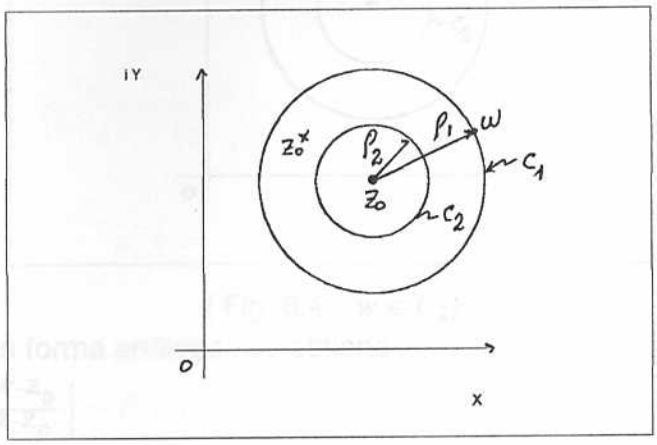
$$+\frac{b_1}{(z_1-z_0)}+\frac{b_2}{(z_1-z_0)^2}+\frac{b_2}{(z_1-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{(z_1-z_0)^{n-1}}+V_n$$

Esta expresión coincide con el resultado buscado si podemos demostrar que :

$$\lim_{n\to\infty}U_n=0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty}V_n=0$$

Cálculo de U_n :

Para demostrar que $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, observemos que , como la variable de integración w está sobre C_1 , (ver Fig.8.3), se verifica que :



(Fig. 8.3: $w \in C_1$)

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-z_0}{w-z_0}\right| = \gamma < 1 \\ |w-z| = |(w-z_0)-(z-z_0)| \geq \rho_1 - |z-z_0| \\ |f(w)| < M, \text{ donde } M \text{ es la cota superior de } f(z) \text{ sobre } C_1 \end{cases}$$

Por lo tanto, aplicando el Principio conocido como **" Desigualdad ML "** , se obtiene:

$$|U_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_1}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \frac{f(w)}{(w-z)}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}(\gamma)^n \frac{M}{\rho_1-|z-z_0|}(2\pi\rho_1) = \frac{(\gamma)^n M}{\rho_1-|z-z_0|}(\rho_1)$$

Es decir :

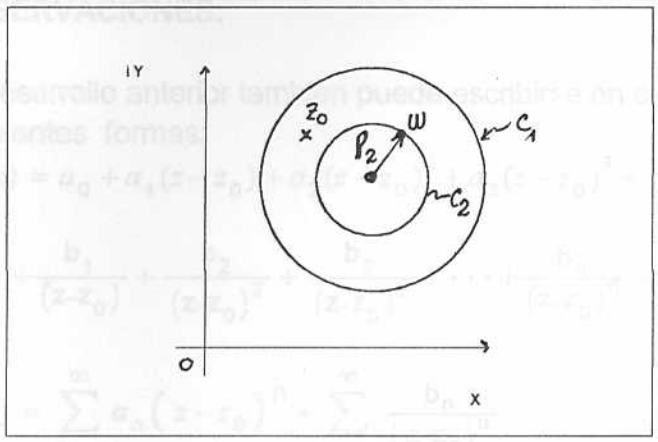
$$|U_n| \leq \frac{(\gamma)^n M}{\rho_1-|z-z_0|}(\rho_1) \quad , \quad 0<\gamma<1$$

Luego, $\lim_{n\to\infty}|U_n| \leq \lim_{n\to\infty}\left[(\gamma)^n \frac{M}{\rho_1-|z-z_0|}\rho_1\right] = 0$, por ser $0<\gamma<1$

Además, $\lim_{n\to\infty}|U_n| = 0 \Rightarrow U_n \to 0$, cuando $n \to \infty$

Cálculo de V_n :

Para probar que también $\lim_{n\to\infty}|V_n| = 0$, obsérvese que, en este caso, la variable de integración w está sobre C_2, (ver Fig. 8.4), por lo que :



(Fig. 8.4 : $w \in C_2$)

Procediendo en forma análoga , se obtiene :

$$\begin{cases} \left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| = \beta < 1 \\ |z-w| = |(z-z_0)-(w-z_0)| \geq |z-z_0| - \rho_2 \\ |f(w)| < M, \text{ donde } M \text{ es la cota superior de } f(z) \text{ sobre } C_2 \end{cases}$$

Por lo tanto, al igual que en el caso anterior, aplicando la " Desigualdad ML " , se obtiene

$$|V_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_2}\left(\frac{w-z}{z-z_0}\right)^n \frac{f(w)}{(z-w)}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}(\beta)^n \frac{M}{|z-z_0|-\rho_2}\left(2\pi r_3''\right) = \frac{(\beta)^n M}{|z-z_0|-\rho_2}(\rho_2)$$

Es decir:

$$|V_n| \leq \frac{(\beta)^n M}{|z-z_0|-\rho_2}(\rho_2) \quad , \quad 0 < \beta < 1$$

Luego, $\lim_{n\to\infty}|V_n| \leq \lim_{n\to\infty}\left[(\beta)^n \frac{M}{|z-z_0|-\rho_2}\rho_2\right] = 0$, por ser $0 < \beta < 1$

lo que comprueba el teorema. En resumen :

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_3}{(z-z_0)^3} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots$$

Esta serie converge y representa a la función $f(z)$ en una corona circular que se obtiene a partir de la corona circular dada $\rho_2 < |z-z_0| < \rho_1$, dilatando la circunferencia C_1 y reduciendo la circunferencia C_2 contínuamente, hasta que cada una de ellas alcance un punto donde $f(z)$ es singular.

8.3.1) OBSERVACIONES:

1º) El desarrollo anterior también puede escribirse en cualquiera de las siguientes formas:

a) $$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots +$$

$$+\frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots$$

b) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

donde:
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw \quad , \quad n = 0,1,2,3,\cdots \\ b_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \dfrac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw \quad , \quad n = 1,2,3,\cdots \end{cases}$$

c) La serie de Laurent también puede representarse por una sola sumatoria :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$$

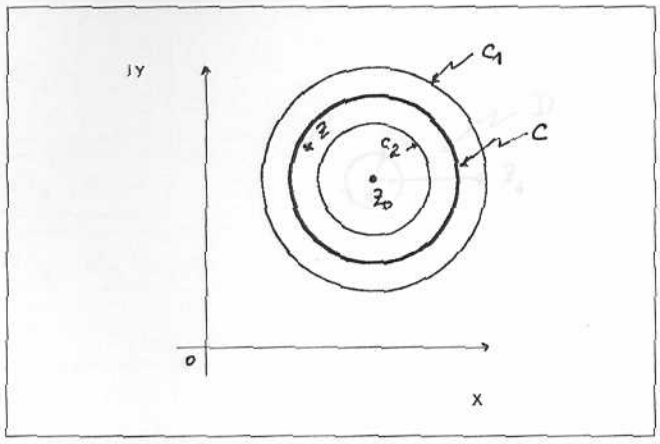
la cual es válida cuando z satisface la condición :

$$\rho_2 < |z-z_0| < \rho_1$$

Los coeficientes, en este caso, están dados por :

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

donde el contorno de integración C es cualquier contorno cerrado simple contenido en el anillo circular $\rho_2 < |z-z_0| < \rho_1$, como se ilustra en la Figura 8.5 que se muestra a continuación :



(Fig. 8.5: Contorno $C \subset D$)

2°) *La parte de la serie de Laurent que contiene las potencias positivas de* $(z-z_0)$, *es decir, la suma :*

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

se llama : **" Parte Analítica "** de la serie de Laurent.

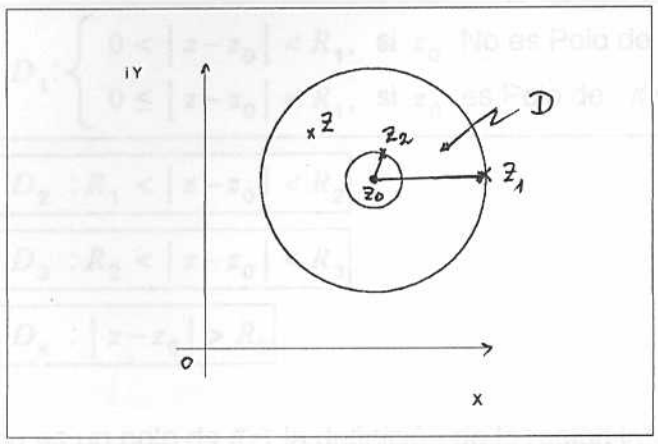
La parte que contiene las potencias negativas de $(z-z_0)$, *es decir, la suma :*

$$\frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

se llama : **" Parte Principal "** de la serie de Laurent.

Si la Parte Principal es cero, la serie de Laurent se reduce a la serie de Taylor. Obviamente, ello curre cuando la función $f(z)$ es analítica en todo punto interior a la circunferencia C_1, incluso en su centro z_0.

3°) Las circunferencias C_1 y C_2 se obtienen, como ya se indicó, incrementando el radio ρ_1 y disminuyendo el radio ρ_2 hasta que, en dichos procesos de deformación, nos encontremos con un puntos singulares tales como z_1 y z_2 , respectivamente. Ver Figura 8.6



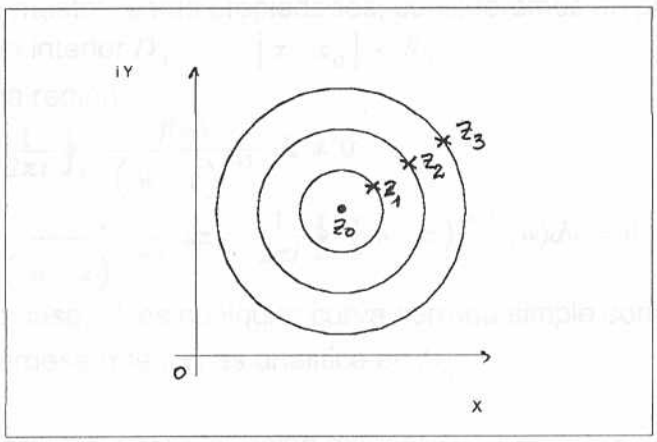
(Fig. 8.6 : Región Anular de Laurent : D)

4°) La función $f(z)$ admite diferentes desarrollo en series de Laurent, alrededor de z_0; ello dependerá de:

a) Si z_0, centro del desarrollo, es o no Punto Singular

b) De la cantidad de puntos singulares que contenga $f(z)$.

En cada región D_n existirá un único desarrollo de Laurent. Para el caso de la Figura 8.7, las regiones posibles alrededor de z_0 son:



(Fig. 8.7 : Regiones de Laurent)

$$\begin{cases} \boxed{D_1 : \begin{cases} 0 < |z - z_0| < R_1, & \text{si } z_0 \text{ No es Polo de } f(z) \\ 0 \le |z - z_0| < R_1, & \text{si } z_0 \text{ es Polo de } f(z) \end{cases}} \\ \boxed{D_2 : R_1 < |z - z_0| < R_2} \\ \boxed{D_3 : R_2 < |z - z_0| < R_3} \\ \boxed{D_4 : |z - z_0| > R_3} \end{cases}$$

5°) Si z_0 no es un polo de $f(z)$, la definición de la región interior D_1 es : $0 \le |z - z_0| < R_1$. Es evidente que, en este caso, la función $f(z)$ es analítica en todo puntro interior a dicha región. En consecuencia, la región D_1 es una región de Taylor, por lo que el desarrollo en serie da Laurent contendrá exclusivamente potencias positivas de $(z - z_0)$. Es decir, $b_n = 0, \quad \forall n = 1,2,3,\cdots,$ y en consecuencia, la serie de Laurent estará integrada sólamente por la Parte Analítica.
También en este caso $(Si\, z_0\ no\ es\ un\ polo)$, la región exterior D_4, definida por $|z - z_0| > R_3$, contendrá exclusivamente potencias negativas, es decir, será una zona exclusivamente de Laurent $(a_n = 0, \quad \forall n = 0,1,2,3,\cdots)$. y estará integrada sólo por la Parte Principal.
Para demostrar estas propiedades, consideremos en primer lugar la región interior $D_1 : 0 \le |z - z_0| < R_1$
En dicha región:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dz \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z)^{-n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (w - z)^{n-1} f(w) dw = 0, \quad \forall n = 1,2,3,\cdots$$

En este caso, C es cualquier curva cerrada simple contenida en D_1 (Recuérdese que $f(z)$ es analítica en D_1)

Consideremos ahora la región exterior D_4: $|z - z_0| > R_3$. En este caso:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dz$$

Pero, el integrando $g(w) = \dfrac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}$ es anlítico sobre C. Por lo tanto $a_n = 0, \quad \forall n = 0,1,2,3,\cdots$ por el Principio de Independencia

de la Trayectoria.

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z)^{-n+1}}\,dz \neq 0, \quad \forall n = 1,2,3,\cdots$$

En este caso, C es cualquier curva cerrada simple contenida en D_4

6°) En regiones interiores tales como D_2 y D_3 coexisten tanto las potencias positivas como las negativas, pues , en general, en estos casos, $a_n \neq 0$ y $b_n \neq 0$.
Obviamente, si z_0 es también un polo, en este caso

$$D_1 : 0 < |z - z_0| < R_1$$

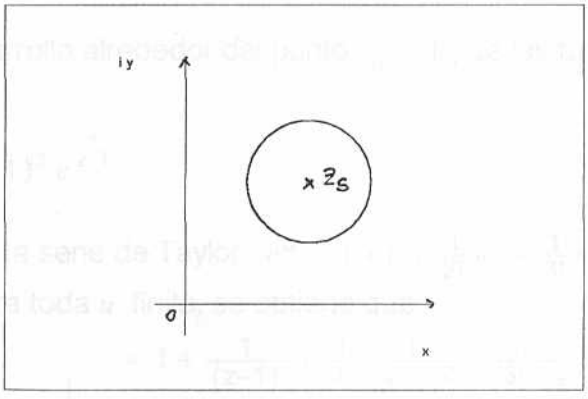
y en consecuencia, $a_n \neq 0$ y $b_n \neq 0$.

7°) La serie converge uniformemente en toda región anular D_n centrada en z_0, definidas anteriormente.

8°) Aunque en principo, es posible obtener los coeficientes de la serie de Laurent a partir de las ecuaciones señaladas en los literales *b)* o *c)*, estas expresiones se usan en raras ocasiones. En la práctica, los coeficientes se obtienen manipulando series conocidas (ver ejemplo que se propone a continuación) o, en su defecto, por medio de descomposiciones en fracciones simples, tal como se ilustra en los ejemplos sucesivos.

8.3.2) DEFINICIÓN: Punto Singular Aislado

Un punto z_s es un punto singular aislado de $f(z)$, si $f(z)$ es analítica en un entorno reducido de z_s, excepto en z_s, como se ilustra en la Figura 8.8.

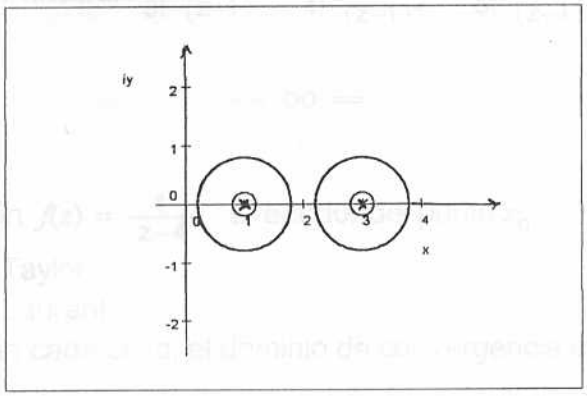


(Fig.8.8: $0 < |z - z_s| < \rho$)

En otras palabras, z_s es un Punto Singular Aislado de la función $f(z)$, si existe un número positivo ρ tal que, en el interior de la circunferencia $|z - z_s| = \rho$, el único punto singular de $f(z)$ es z_s.

Por ejemplo, las singularidades de la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)^4}$

son : $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = 1, \text{ polo simple} \\ z_2 = 3, \text{ polo de orden 4} \end{array} \right\}$. Ambas singularidades son aisladas, ya que podemos encontrar un disco centrado en cada uno de ellos, tal que la función $f(z)$ es analítica en todos sus puntos, excepto en sus respectivos centros, como se ilustra a continución en la figura 8.9



(Figura 8.9)

Dichos discos son : $0 < |z-1| < r_1$ y $0 < |z-3| < r_2$

$=$ oo $=$

8.3.3) Ejemplos Resueltos I

Ejemplo 1:

Obtenga el desarrollo alrededor del punto $z_0 = 1$, de las funciónes:

a) $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$

b) $f(z) = (z-1)^2 e^{\frac{1}{z-1}}$

Solución:

a) A partir de la serie de Taylor : $e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + \frac{1}{5!}u^5 + \cdots$,

válida para toda u finita, se obtiene que:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}} = e^u \Big|_{u = \frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{(z-1)^4} + \cdots,$$

válida para $z \neq 1$

Esta es una serie de Laurent, donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Parte Analítica : } 1 \\ \text{Parte Principal : } \dfrac{1}{(z-1)} + \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{(z-1)^3} + \dfrac{1}{4!}\dfrac{1}{(z-1)^4} + \cdots \end{array} \right\}, z \neq 1$$

b) Multiplicando ambos lados de la ecuación anterior por $(z-1)^2$, se obtiene:

$$(z-1)^2 e^{\frac{1}{z-1}} = (z-1)^2\left[1+\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(z-1)^4}+\cdots\right] \Rightarrow$$

$$(z-1)^2 e^{\frac{1}{z-1}} = (z-1)^2+(z-1)+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots$$

Esta es una serie de Laurent,

donde:. $\left\{\begin{array}{l}\text{Parte Analítica}: \frac{1}{2!}+(z-1)+(z-1)^2 \\ \text{Parte Principal}: \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{5!}\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots\end{array}\right\}, z \neq 1$

$$= oo =$$

Ejemplo 2:

Desarrolle la fución $f(z) = \frac{1}{z-4}$ alrededor del punto $z_0 = 1$

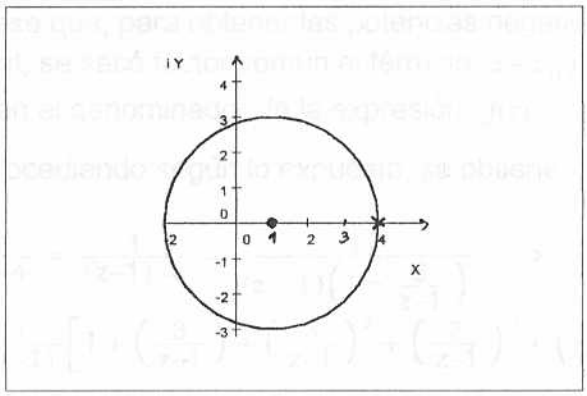
a) En serie de Taylor

b) En serie de Laurent

c) Determine en cada caso, el dominio de convergencia de $f(z)$.

Solución:

a) Se observa que la única singularidad de $f(z)$ es $z_s = 4$. Luego, $f(z)$ puede ser desarrollada en serie de Taylor en un entorno reducido de $z_0 = 1$, es decir, en el dominio : $0 \leq |z-1| < 3$, tal como lo ilustra la siguiente figura:



(Dominio de Taylor: $0 \leq |z-1| < 3$)

El desarrollo de Taylor alrededor de $z_0 = 1$ se obtiene, tal como se demostró en el Teorema de Taylor, sacando factor común la constante $(z_s - z_0) = 4-1 = 3$, que aparece en el denominador de la siguiente expresión: $f(z) = \frac{1}{z-4} = \frac{1}{(z-1)-3}$

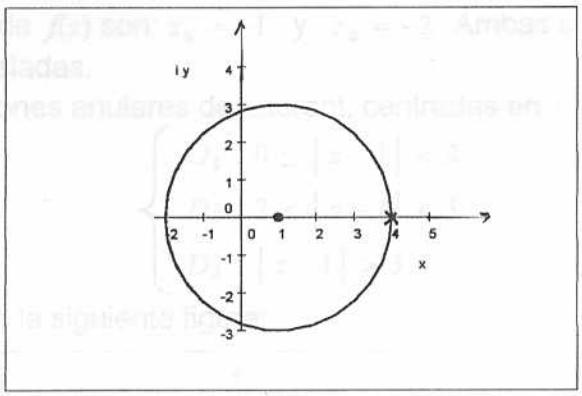
Luego, procediendo en consecuencia, se obtiene:

$$f(z) = \frac{1}{z-4} = \frac{1}{(z-1)-3} = \frac{1}{3\left(\frac{z-1}{3}-1\right)} = -\frac{1}{3\left(1-\frac{z-1}{3}\right)} \Rightarrow$$

$$f(z) = -\frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{z-1}{3}\right)+\left(\frac{z-1}{3}\right)^2+\left(\frac{z-1}{3}\right)^3+\cdots\right] = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$$

Desarrollo válido, como ya se indicó, para $\forall z \in D_1 : |z-1| < 3$

b) Luego, $f(z) = \frac{1}{z-4} = \frac{1}{(z-1)-3}$ puede desarrollarse en serie de Laurent en la corona circular $D_2 : 3 < |z-1| < r, \quad r < \infty$ el cual se muestra en la siguiente figura



(Dominio de Laurent : $3 < |z-1| < \infty$)

Recuérdese que, para obtener las potencias negativas en el Teorema de Laurent, se sacó factor común el término $(z-z_0) = (z-1)$ que aparece en el denominador de la expresión: $f(z) = \frac{1}{z-4} = \frac{1}{(z-1)-3}$

Luego, procediendo según lo expuesto, se obtiene:

$$f(z) = \frac{1}{z-4} = \frac{1}{(z-1)-3} = \frac{1}{(z-1)\left(1-\frac{3}{z-1}\right)} \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)}\left[1+\left(\frac{3}{z-1}\right)+\left(\frac{3}{z-1}\right)^2+\left(\frac{3}{z-1}\right)^3+\left(\frac{3}{z-1}\right)^4+\cdots\right] \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{3^2}{(z-1)^3}+\frac{3^3}{(z-1)^4}+\frac{3^4}{(z-1)^5}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+1}}$$

desarrollo válido para : $\left|\frac{3}{z-1}\right| < 1$, es decir, $\forall z \in D_2 : |z-1| > 3$

OBSERVACIÓN:

Nótese que, en este caso, la Parte Analítica (potencias positivas) y la Parte Principal del desarrolo en serie de Laurent, no coexisten. Ello se debe a que las regiones de convergencia de cada una de estas partes no se intersectan, es decir: $D_1 \cap D_2 = \Phi$.

La razón de todo ello radica en que, la región D_1, definida por : $|z-1| < 3$ es

una región típicamente de Taylor pues la función $f(z) = \frac{1}{z-4}$ es analítica en todo punto interior a ella, incluyendo el centro del desarrollo pedido, $z = 1$. Nótese también que, en este caso, el desarrollo de Laurent en la región más externa, es decir, en D_2, contiene exclusivamente potencias negetivas.

$$== \text{oo} ==$$

Ejemplo 3:

Desarrolle la fución $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ en una serie de Laurent, en potencias de $(z-1)$, que sea válida en un dominio anular que contenga al punto $z = \frac{3}{2}$.

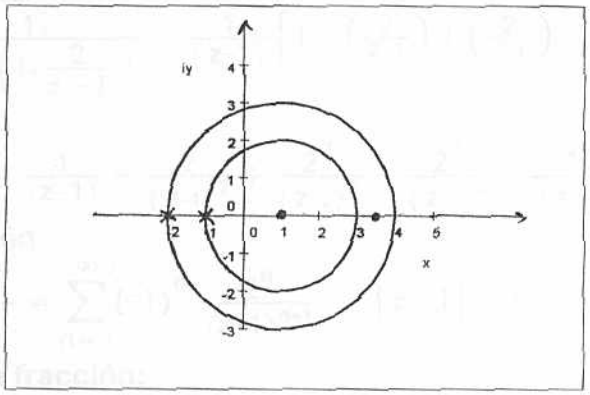
Solución:

Las singularidad de $f(z)$ son: $z_s = -1$ y $z_s = -2$. Ambas son, evidentemente, singularidades aisladas.

Las posibles regiones anulares de Laurent, centradas en $z = 1$, son:

$$\begin{cases} D_1 : 0 \le |z-1| < 2 \\ D_2 : 2 < |z-1| < 3 \\ D_3 : |z-1| > 3 \end{cases}$$

tal como lo ilustra la siguiente figura:



(Dominios anulares de Laurent)

Obsérvse que el desarrollo de Laurent pedido es el correspondiente a la región anular $D_2 : 2 < |z-1| < 3$, pues sólo ella contiene al punto dado $z = \frac{3}{2}$.

Para el cálculo de la serie de Laurent usaremos el método de descomposición de $f(z)$ en fracciones simples. Así obtenemos:

$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{(z+1)} + \frac{B}{(z+2)}$, de donde se obtiene: $\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$

Es dcir: $f(z) = \frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{(z+2)}$.

Como se desea calcular la serie de Laurent, es necesario calcular tanto las potencias positivas como las negativas de cada una de las fracciones simples

en que se ha descompuesto la función $f(z)$, y determinar en consecuencia el aporte de cada una de ellas alcuales domonio especificado (D_2).

Así se obtiene:

Primera fracción

$$\frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{(z-1)+2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\text{a) } \textbf{Potencias Positivas: } \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{z-1}{2}\right)}} \\ \boxed{\text{b) } \textbf{Potencias Negativas: } \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{(z-1)\left(1+\frac{2}{z-1}\right)}} \end{cases}$$

a) **Las Potenias Positivas** que se obtienen de esta fracción son válidas para : $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, es decir, para : $|z-1| < 2$, por lo tanto, como la intersección de este dominio con el dominio de interés (D_2) es vacía, se concluye que la primera fracción no aporta potencias positivas a D_2, por lo que se omiten dichos términos.

b) **Las Potenias Negativas** que se obtienen de esta fracción son válidas para $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$, es decir, para : $|z-1| > 2$. Como la intersección de este dominio con el dominio de interés (D_2) es distinta de vacío, se concluye que la primera fracción si aporta potencias negativas a D_2, por lo que se procede de inmediato al cálculo de dichos términos.

En efecto:

$$\frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{(z-1)\left(1+\frac{2}{z-1}\right)} = \frac{1}{(z-1)}\left[1-\left(\frac{2}{z-1}\right)+\left(\frac{2}{z-1}\right)^2-\left(\frac{2}{z-1}\right)^3+\cdots\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{(z-1)} - \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2^2}{(z-1)^3} - \frac{2^3}{(z-1)^4} + \frac{2^4}{(z-1)^5} - \frac{2^5}{(z-1)^6} \cdots$$

O también:

$$\frac{1}{(z+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}}, \quad |z-1| < 2 \qquad \ldots(1)$$

Segunda fracción:

$$\frac{1}{(z+2)} = \frac{1}{(z-1)+3} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\text{a) } \textbf{Potencias Positivas: } \frac{1}{(z-1)+3} = \frac{1}{3\left(1+\frac{z-1}{3}\right)}} \\ \boxed{\text{b) } \textbf{Potencias Negativas: } \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{(z-1)\left(1+\frac{3}{z-1}\right)}} \end{cases}$$

a) Las Potencias Positivas que se obtienen de esta fracción son válidas para: $\left|\frac{z-1}{3}\right| < 1$, es decir, para : $|z-1| < 3$, por lo tanto, como la intersección de este dominio con el dominio de interés (D_2) es distinta de vacío, se concluye que la segunda fracción si aporta potencias positivas

a D_2, por lo que se procede al cálculo de dichos términos. En efecto,

$$\frac{1}{(z+2)} = \frac{1}{3\left(1+\frac{z-1}{3}\right)} = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{z-1}{3}\right)+\left(\frac{z-1}{3}\right)^2-\left(\frac{z-1}{3}\right)^3+\cdots\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(z+2)} = \frac{1}{3} - \frac{(z-1)}{3^2} + \frac{(z-1)^2}{3^3} - \frac{(z-1)^3}{3^4} + \frac{(z-1)^4}{3^5} + \frac{(z-1)^5}{3^6}\cdots$$

O también:

$$\frac{1}{(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}, \quad |z-1| < 3 \qquad \ldots(2)$$

b) **Las Potenias Negativas** que se obtienen de esta fracción son válidas para $\left|\frac{3}{z-1}\right| < 1$, es decir, para : $|z-1| > 3$. Como la intersección de este dominio con el dominio de interés (D_2) es vacía, se concluye que la segunda fracción no aporta potencias negativas a D_2, por lo que se omite cálculo de dichos términos.

En conclusión, las series identificadas con (1) y (2) convergen a sus respectivas funciones , en sus respectivos dominios.

Sustituyendo las fracciones simples por su correspondientes desarrollos en serie, obtenemos:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$$

Válido para: $\{|z-1| > 2\} \cap \{|z-1| < 3\}$, es decir, el desarrollo será válido en la corona circular : $2 < |z-1| < 3$ la cual contiene a $z = \frac{7}{2}$.

NOTA:

1.) Nótese que la expresión anterior puede escribirse en forma más breve, así:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-1)^n, \quad \text{donde:} \begin{cases} C_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}, & \text{si } n \geq 0 \\ C_n = (-1)^{n+1}\, 2^{n+1}, & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

2.) Es posible obtener un desarrollo de $f(z)$ en serie de Laurent, en el dominio : $|z-1| > 3$. En este caso, el desarrollo estaría integrado por:

a) Las potencias negativas de la primera fracción, las cuales son válidas para: $|z-1| > 2$, según ya se calculó.

b) Las potencias negativas de la segunda fracción, las cuales son válidas para : $|z-1| > 3$.

El resultado sería:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2)^n}{(z-1)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3)^n}{(z-1)^{n+1}}$$

O también:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

donde: $C_n = (-1)^n\left[2^n - 3^n\right]$, $n = \cdots -3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$

El desarrollo es válido para : $|z-1| > 3$.

3.) La función $f(z)$ es analítica en el dominio : $0 \le |z-1| < 2$, por lo que es posible obtener un desarrollo de $f(z)$ en serie de Taylor, en dicho dominio . En este caso se obtendría:

a) Las potencias positivas de la primera fracción, las cuales son válidas para: $|z-1| < 2$, según ya se calculó.

b) Las potencias positivas de la segunda fracción, las cuales son válidas para : $|z-1| < 3$.

El resultado será :

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$$

O también:

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

donde: $C_n = (-1)^n\left[\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right]$, $n = \cdots -3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$

El desarrollo es válido para : $|z-1| < 2$.

El resultado era de esperarse, por cuanto la región $|z-1| < 2$ es una región típica de Taylor.

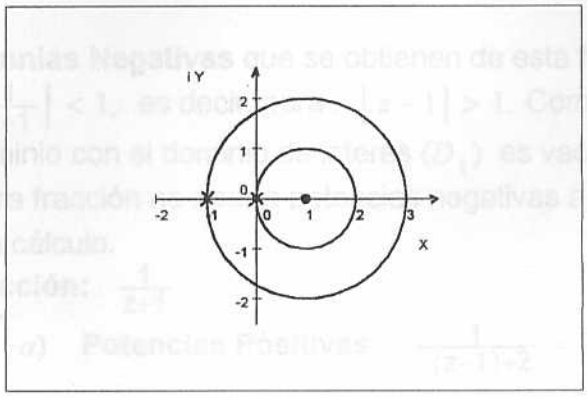
$$== oo ==$$

Ejemplo 4:

Desarrolle la fución $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ en una serie de Laurent que sea válida en un entorno reducido de $z = 1$.

Solución:

Las singularidad de $f(z)$ son: $z_s = 0$ y $z_s = -1$. Ambas son singularidades aisladas.



(Regiones de Laurent)

Las posibles regiones de Laurent, alrededor del punto $z = 1$, son:

a) $D_1 : 0 \leq |z-1| < 1$

b) $D_2 : 1 < |z-1| < 2$

b) $D_3 : 2 < |z-1| < \rho, \quad \rho = \infty$, o simplemente $D_3 : |z-1| > 2$

Luego, la mayor vecindad de $z = 1$ que excluye a ambas singularidades es : $D_1 : 0 \leq |z-1| < 1$.

Buscaremos entonces un desarrollo de Laurent en potencias de $(z-1)$, en esta región. A tal efecto, al descomponer $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ en fracciones simples, se obteniene:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

Primera fracción:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} \Rightarrow \begin{cases} a) \ \textbf{Potencias Positivas}: & \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{1+(z-1)} \\ b) \ \textbf{Potencias Negativas}: & \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{(z-1)\left(1+\frac{1}{z-1}\right)} \end{cases}$$

a) **Las Potencias Positivas** que se obtienen de esta fracción son válidas para $|z-1| < 1$. Por lo tanto, la intersección de este dominio con el dominio de interés $D_1 : (0 \leq |z-1| < 1$ es distinta de vacío, por lo que se concluye que la primera fracción si aporta potencias positivas a D_1. Tales potencias son :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + (z-1)^4 - \cdots \quad (1)$$

desarrollo válido para : $|z-1| < 1$.

b) **Las Potenias Negativas** que se obtienen de esta fracción son válidas para $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$, es decir, para : $|z-1| > 1$. Como la intersección de este dominio con el dominio de interés (D_1) es vacía, se concluye que la primera fracción no aporta potencias negativas a D_1, por lo que se omite su cálculo.

Segunda fracción: $\frac{1}{z+1}$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} \Rightarrow \begin{cases} a) \text{ **Potencias Positivas**: } \dfrac{1}{(z-1)+2} = \dfrac{1}{2\left[1+\dfrac{(z-1)}{2}\right]} \\ b) \text{ **Potencias Negativas**: } \dfrac{1}{(z-1)+2} = \dfrac{1}{(z-1)\left(1+\dfrac{2}{z-1}\right)} \end{cases}$$

a) **Las Potencias Positivas** que se obtienen de esta fracción son válidas para $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, es decir, para: $|z-1| < 2$. Por lo tanto, la intersección de este dominio con el dominio de interésdado por :

$$D_1 : 0 \leq |z-1| < 1$$

es distinta de vacío, por lo que se concluye que la primera fracción si aporta potencias positivas a D_1. Tales potencias son :

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2\left[1+\dfrac{(z-1)}{2}\right]} = \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{z-1}{2}\right)+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\cdots\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} - \frac{(z-1)}{2^2} + \frac{(z-1)^2}{2^3} - \frac{(z-1)^3}{2^4} + \cdots \quad (2)$$

desarrollo válido para : $|z-1| < 2$.

b) **Las Potenias Negativas** que se obtienen de esta fracción son válidas para $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$, es decir, para : $|z-1| > 2$. Como la intersección de este dominio con el dominio de interés (D_1) es vacía, se concluye que la primera fracción no aporta potencias negativas a D_1, por lo que se omite su cálculo.

En conclusión, las series identificadas con (1) y (2) convergen a sus respectivas funciones , en sus respectivos dominios. Sustituyendo las fracciones simples por su correspondiente desarrollo en serie,

obtenemos :

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = 1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3-\cdots$$
$$-\left[\frac{1}{2}-\frac{(z-1)}{2^2}+\frac{(z-1)^2}{2^3}-\frac{(z-1)^3}{2^4}+\cdots\right]$$

Simplificando :

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}(z-1)+\tfrac{7}{8}(z-1)^2-\tfrac{15}{16}(z-1)^3+\cdots$$

Válido para: $\{0 \le |z-1| < 1 \} \cap \{ |z-1| < 2. \} = 0 \le |z-1| < 1$
es decir, el desarrollo será válido en D_1 : $0 \le |z-1| < 1$.

NOTA:

1.) Nótese que el desarrollo buscado contiene exclusivamente potencias positivaas. El resultado era de esperarse, por cuanto la región D_1 : $0 \le |z-1| < 1$. es una región típica de Taylor, es decir, la función $f(z)$ es analítica en D_1.

2.) De haberse pedido el desarrollo en serie de Laurent alrededor de $z = 1$, válido en la región D_2 dada po : D_2 : $1 < |z-1| < 2$, se obtendría que, de acuerdo con arriba expuesto, dicho desarrollo estaría conformado por las Potencias Negativas de la Primera fracción, más las Potencia Positivas de la Segunda fracción, pues sus respectivos dominios se intersectan con D_2.
Por lo tanto, en este caso, se obtendría:

Primera fración:

Potencias Negativas:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{(z-1)\left(1+\dfrac{1}{z-1}\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)}\left[1-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots \quad , \quad |z-1| > 1$$

Segunda fración:

Potencias Positivas :

$$\frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2\left[1+\dfrac{(z-1)}{2}\right]} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{z-1}{2}\right)+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\cdots\right] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(z+1)} = \frac{1}{2}-\frac{(z-1)}{2^2}+\frac{(z-1)^2}{2^3}-\frac{(z-1)^3}{2^4}+\cdots$$

Por lo tanto, el desarrollo en serie de Laurent, alrededor de $z=1$, válido en la región D_2 dada por: $1<|z-1|>2$, es:

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots-$$

$$-\left[\frac{1}{2}-\frac{(z-1)}{2^2}+\frac{(z-1)^2}{2^3}-\frac{(z-1)^3}{2^4}+\cdots\right]$$

De donde :

$$f(z)=-\frac{1}{2}+\frac{(z-1)}{2^2}-\frac{(z-1)^2}{2^3}+\frac{(z-1)^3}{2^4}-\cdots+\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots$$

Desarrollo válido para: $\{|z-1|>1\}\cap\{|z-1|<2.\}=1<|z-1|<2$ es decir, el desarrollo será válido en D_2 : $1<|z-1|<2.$

NOTA:

1º) Nótese la coexistencia de potencias positivas y negetivas en la región definida por la corona circular D_2 : $1<|z-1|<2.$

2º) Se deja al interesado el demostrar que, en este caso, el desarrollo de Laurent en la región exterior D_3 : $|z-1|>2$, contiene *exclusivamente potencias negativas de* $(z-1)$.

$$= oo =$$

OBSERVACIÓN:

En los ejemplos anteriores hemos ilustrado la manera de obtener desarrollos en serie de Laurent cuando la función por desarrollar es un cociente de polinomios de z.

Se mostró también como desarrollar en serie de Laurent las funciones trascendentes tales como:

a) $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$

b) $f(z)=(z-1)^2 e^{\frac{1}{z-1}}$

Como se recordará, estas series de Laurent se obtiene haciendo un cambio de variable en el desarrollo de Maclaurin de e^z, dado por :

$$e^u = 1+u+\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{3!}u^3+\frac{1}{4!}u^4+\frac{1}{5!}u^5+\frac{1}{6!}u^6+\cdots$$

donde se hizo el cambio de variable : $u=\frac{1}{(z-1)}$

En determinadas ocasiones, las series de Laurent de funciones trascendentes se obtienen ya sea por simpe división de series de Taylor, o mediante un

procedimiento recursivo equivalente a la división de series, como se muestra a continuación:

Ejemplo 5:

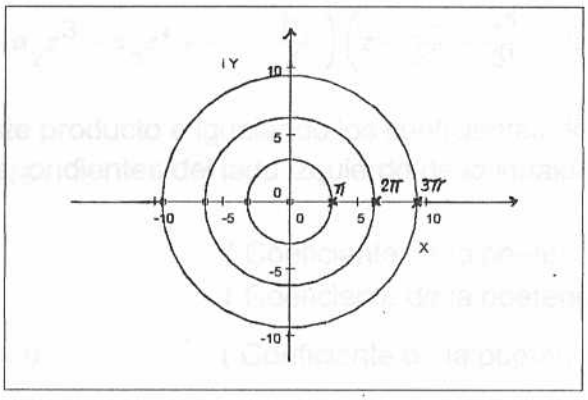
Desarrolle la fución $f(z) = \dfrac{1}{\text{sen}z}$ en una serie de Laurent que sea válida en un entorno reducido del origen. Indique la región del plano complejo en que es válido dicho desarrollo.

Solución:

Método 1

Las singularidad de $f(z)$ son la solución de la ecuación: sen $z = 0$.

Por lo tanto: $z = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ son puntos singulares aislados de la función $f(z) = \dfrac{1}{\text{sen}z}$. En consecuencia, podemos desarrollar esta función en serie de Laurent, alrededor de $z_0 = 0$, en infinitos dominios dados por la ecuación : $n\pi < |z| < (n+1)\pi, \; n = 0, 1, 2, \cdots,$ tal como se muestra a continuación:



Regiones: $n\pi < |z| < (n+1)\pi$

En el caso particular $n = 0$, tendremos el entorno reducido del origen, es decir, la región $D_1 : 0 < |z| < \pi$.

En este caso buscamos un desarrollo en serie de la forma:

$$\frac{1}{\text{sen}z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \qquad \text{con} \qquad z_0 = 0$$

es decir,

$$\frac{1}{\text{sen}z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \frac{b_3}{z^3} + \cdots \qquad (1)$$

Demostraremos a continuación que muchos de estos coeficientes son nulos en esta serie. En efecto, obsérvese que, si multiplicamos por z ambos lados de la expresión (1), se obtiene:

$$\frac{z}{\text{sen}z} = a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + a_3 z^4 + \cdots + b_1 + \frac{b_2}{z} + \frac{b_3}{z^2} + \frac{b_4}{z^3} + \cdots \qquad (2)$$

Ahora bien, por la Regla de L´Hopital, tenemos: $\lim_{z\to 0}\frac{z}{\text{sen}z}=1$

Como la expresión de la izquierda de (2) , debe tener el mismo límite, es necesario que:

$$b_2=b_3=b_4=\cdots=0$$

pues de lo contrario, los términos : $\frac{b_2}{z}, \frac{b_3}{z^2}, \frac{b_4}{z^3}, \cdots, etc.$ tenderían hacia infinito cuando $z\to 0$..

Una vez eliminados todos los coeficientes $b_n \ \forall n\geq 2$, tenemos que la expresión (1) se reduce a :

$$\frac{z}{\text{sen}z}=a_0z+a_1z^2+a_2z^3+a_3z^4+\cdots+\frac{b_1}{z} \qquad (3)$$

A continuación aplicaremos el procedimiento recursivo conocido como "método de los coeficientes indeterminados" para obtener estos coeficientes.

Recordando que la serie de la función sen z, alrededor de $z=0$ es:

$\text{sen}\,z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}-\frac{z^{11}}{11!}+\cdots$, podemos escribir:

$$1\equiv\left(a_0z+a_1z^2+a_2z^3+a_3z^4+\cdots+\frac{b_1}{z}\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}-\frac{z^{11}}{11!}+\cdots\right)$$

Desarrollando este producto e igualando los coeficientes de las diversas potencias de z a los correspondientes del lado izquierdo de la igualdad, se obtiene que:

$b_1=1$ ..... (Coeficiente de la poetencia z^0)

$a_0=0$ ..... (Coeficiente de la poetencia z^1)

$a_1-\frac{b_1}{3!}=0$ ..... (Coeficiente de la poetencia z^2)

$a_2-\frac{a_0}{3!}=0$ ..... (Coeficiente de la poetencia z^3)

$a_3-\frac{a_1}{3!}+\frac{b_1}{5!}=0$ .... (Coeficiente de la poetencia z^4)

De lo expuesto se concluye que los coeficientes de todas las potencias pares son nulos; es decir:

$$a_0=a_2=a_4=a_6=\cdots=0$$

Para los coeficientes impares se obtiene:

$$\begin{cases} b_1=1 \\ a_1=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6} \\ a_3=-\frac{1}{5!}+\frac{\frac{1}{3!}}{3!}=-\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!}\frac{1}{3!}=\frac{7}{360} \\ etc. \end{cases}$$

Por lo que, la serie buscada es:

$$\frac{z}{\text{sen}z}=\frac{1}{6}z+\frac{7}{360}z^3+\cdots+\frac{1}{z}, \qquad .....(4)$$

válida para: $0 < |z| < \pi$.

Método 2:

Como el desarrollo buscado es alrededor del origen, podemos efctuar una simple división del numerador (1), entre el desarrollo en serie de Maclaurin de sen z.

Así se obtiene:

$$1 \qquad\qquad z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{11}}{11!} + \cdots$$

$$-1 + \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \frac{z^8}{9!} - \frac{z^{10}}{11!} + \cdots \qquad \frac{1}{z} + \frac{z}{3!} + \left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right)z^3 + \cdots$$

$$-\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{(3!)^2} - \frac{z^6}{3!\,5!} + \frac{z^8}{3!\,7!} - \frac{z^{10}}{3!\,9!} + \frac{z^{12}}{3!\,11!}$$

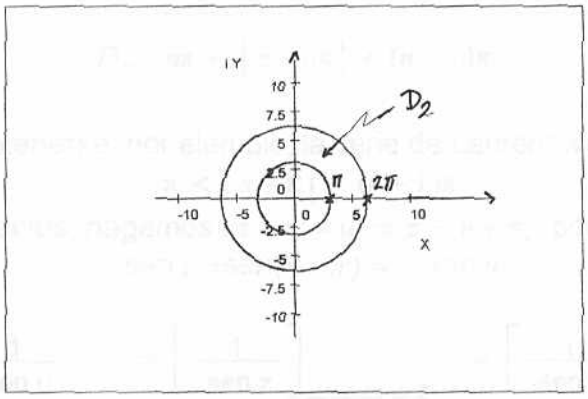
$$\left(\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right)z^4 + \cdots$$

Lo que corrobora el resultado antes obtenido.

OBSERVACIONES:

1º) La serie de Laurent dada por la ecuación (4) converge a $\frac{1}{\text{senz}}$ en el dominio D_1 dado por $0 < |z| < \pi$.

2º) Por las posiciones de las singularidades de $f(z)$ vemos que debe ser posible otra serie de Laurent, en potencias de z, que sea válida en en el dominio D_2 de la figura, es decir, en : $\pi < |z| < 2\pi$



Región: $\pi < |z| < 2\pi$

Análogamente, existe una serie de Laurent válida en el dominio D_3 definido

por $2\pi < |z| < 3\pi$. De hecho, puede encontrarse un número infinito de series de Laurent, cada una de las cuales será válida en una región anular centrada en el origen. Los coeficientes de estas series no pueden determinarse por simple división de la serie de Maclaurin del sen z ,como se hizo en el Método 2 aquí expuesto, pues ésta sólo es válida en un entorno reducido del origen.

En principio, podríamos encontrar cada coeficiente aplicando la integral que aparece en el Teorema de Laurent:

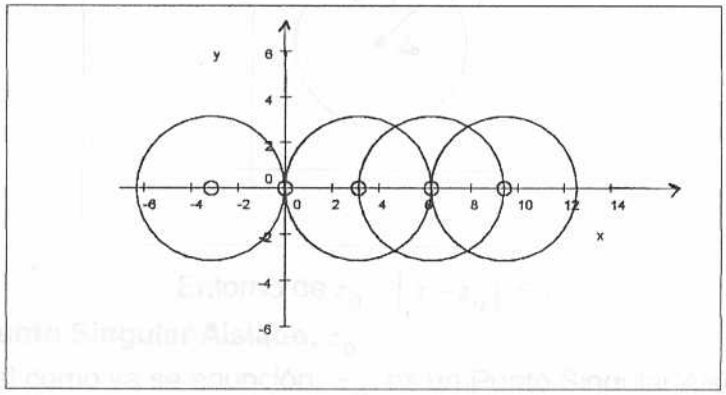
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad , \quad C_n = \oint_C \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

siendo C cualquier contorno cerrado simple contenido en $D_2, D_3, D_4, etc.$

Por el momento, sólo disponemos del **Teorema de la Integral de Cauchy** para el cálculo de estas integrales, por lo que postergaremos el cálculo de las mismas hasta nuestro estudio del **Teorema del Resíduo** en el próximo capítulo.

3º) Para otros anillos circulares centrados en $z_0 = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \cdots$ sería necesario desarrollar la función $f(z) = \text{sen } z$ en las regiones anulares definidas por : $n\pi < |z - z_0| < (n+1)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

como se ilustra en la siguiente gráfica :



$$D_n : n\pi < |z - n\pi| < (n+1)\pi$$

Así podría obtenerse, por ejemplo, la serie de Laurent válida en la región:

$$\pi < |z - \pi| < (k+1)\pi$$

Para tales efectos, hagamos : $z - \pi = u \Rightarrow z = u + \pi$, por lo que,

$$\text{sen } z = \text{sen}(u + \pi) = -\text{sen } u$$

Luego:

$$\frac{1}{\text{sen z}} = -\frac{1}{\text{sen u}} \Rightarrow \left[\frac{1}{\text{sen z}}\right]_{\text{alrededor de } z=\pi} = \left[\frac{1}{\text{sen u}}\right]_{\text{alrededor de } u=0}$$

Es decir :

$$\frac{1}{\text{sen z}} = -\frac{1}{\text{sen u}} = -\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{3!}u + \frac{7}{360}u^3 + \cdots\right]$$

Devolviendo el cambio : $u = z - \pi$, se obtiene :

$$\left[\frac{1}{\text{sen z}}\right]_{\text{alrededor de } z=\pi} = -\left[\frac{1}{z-\pi} + \frac{1}{3!}(z-\pi) + \frac{7}{360}(z-\pi)^3 + \cdots\right]$$

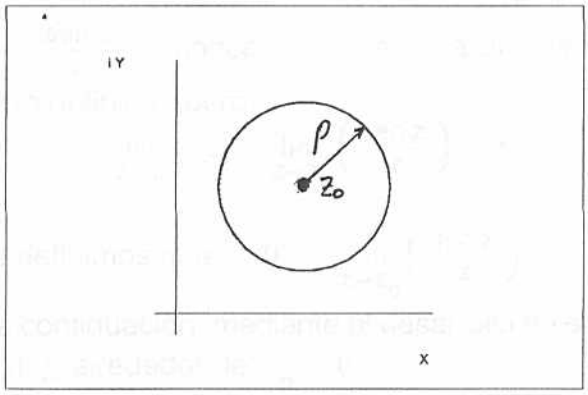
desarrollo válido para : $\pi < |z-\pi| < 2\pi$

8.4) CLASIFICACIÓN DE LAS SINGULARIDADES

El desarrollo en serie de Laurent constituye una herramienta eficaz para el estudio de las singularidades de una función $f(z)$.
A tal efecto, hagamos las siguientes definiciones :

8.4.1) Entorno Reducido de un punto z_0

Se llama así a la región del plano complejo que contiene a todos los puntos del mismo ubicados sobre y en el interior de la circunferencia centrada en z_0 y de radio ρ ; es decir, a la región definida po r : $|z - z_0| \leq \rho$



Entorno de z_0 : $|z - z_0| \leq \rho$

8.4.2) Punto Singular Aislado: z_0

Tal como ya se enunción, z_0 es un Punto Singular Aislado si $f(z)$ es nalítica para todo z perteneciente a un Entorno Reducido de z_0 , excepto en $z = z_0$.
En otras palabras, z_0 es un punto singular aislado de la función $f(z)$, si y sólo si, existe una circunferencia centrada en z_0. y de radio ρ, tal que $f(z)$ es analítica $\forall z \in |z - z_0| \leq \rho$, excepto en $z = z_0$.

8.4.3) Polos

Sea $f(z)$ una función cuyo resarrollo en serie de Laurent, es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \frac{b_3}{(z-z_0)^3} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots$$

Si la Parte Principal tiene un número finito de términos, dados por

$$\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\frac{b_3}{(z-z_0)^3}+\cdots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n},\qquad n=finito, b_n\neq 0$$

Entonces $z=z_0$ se dice que es un Polo de Orden "n".
En el caso particular en que $n=1$, se dice que $z=z_0$ es un Polo Simple.
Obsérvese que si $f(z)$ tiene un polo en z_0, entonces:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

8.4.4) Singularidad Evitable

Si una función unívoca $f(z)$ no está definida en $z=z_0$, pero:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=existe$$

entonces, $z=z_0$ es una Singularidad Evitable. En tal caso, se define a $f(z)$ en $z=z_0$ como igual al $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

Ejemplo 6:

Si $f(z)=\frac{\operatorname{sen} z}{z}$, entonces $z=0$ es una singularida evitable, puesto que $f(0)$ no está definida , pero :

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)=1$$

Por lo que definimos que : $f(0)=\lim_{z\to z_0}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right)=1,$ tal como se confirma a continuación, mediante el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z)$, alrededor de $z_0=0$

En efecto:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z}=\frac{1}{z}\left(1-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\frac{z^9}{9!}-\frac{z^{11}}{11!}+\cdots\right)\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\frac{z^8}{9!}-\frac{z^{10}}{11!}+\cdots\Rightarrow\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1$$

Lo que confirma que la singularidad en $z=0$ es evitable.

$$= oo =$$

8.4.5) Singularidad Esencial

Si $f(z)$ es una función unívoca, entonces, cualquier singularidad que no es Polo ni Singularidad Evitable, se llama Singularidad Esencial.
Por lo tanto, es evidente que si $z=z_0$ es una singularidad esencial de $f(z)$, entonces la Parte Principal del desarrollo en serie de Laurent tiene infinitos términos.

Ejemplo 7:

Puesto que : $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n \Rightarrow$

$z = 0$ es una Singularidad Esencial, pues el número de términos de la Parte Principal de la serie de Laurent, es infinito.

Ejemplo 8:

Clasificar las singularidades de la función : $f(z) = \tan\left(\frac{1}{z}\right)$

Solución:

La función $f(z) = \tan\left(\frac{1}{z}\right) = \dfrac{sen\left(\frac{1}{z}\right)}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$ tiene polos en la solución de la

ecuación : $\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$

es decir, en $z \approx \frac{2}{(2k+1)\pi}$.

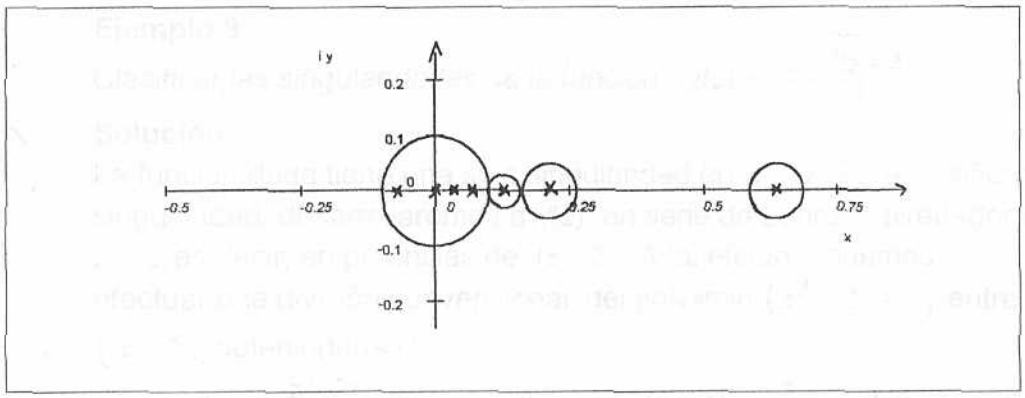
Por lo tanto:

a) El punto límite $z = 0$ es una Singularidad Esencial no aislada, pues cuando $k \to \infty$, $z \to 0$, por lo que dentro de un círculo cualquiera de de radio ρ, existen vatrios punto singulares, por pequeño que sea ρ.

b) El resto de las singularidades $z \approx \frac{2}{(2k+1)\pi}$, $\quad k \neq \infty$

son singularidades esenciales aisladas.

La siguiente gráfica ilustra lo aquí expuesto:



$$D_k : k\pi < |z| < (k+1)\pi$$

8.4.6) Función Entera

Una función $f(z)$ analítica en todo el plano complejo finito, (es decir, en todo el plano excepto en ∞) , se llama Función Entera.

Evidentemente, las funciones: e^z, sen z, $\cos z$, son funciones enteras.

NOTA:

NOTA:

a) Una función entera se puede representar por una serie de Taylor de radio de convergencia infinito.

b) Recíprocamente, si una serie de potencias tiene radio infinito, representa *una función entera.*

8.4.7) Ejemplos Resueltos II

Ejemplo 8

La función:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{z}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots-1\right)=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

no es analítica en $z=0$, pero : $\lim_{z\to 0}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$, por lo que si se escribe $f(0)=1$, *la función se hace analítica en todo el plano complejo* finito, es decir, se hace entera. En este caso, la función

$f(z)=\frac{e^z-1}{z}$ se puede redefirnir como función entera, como sigue:

$$f(z)=\begin{cases}\frac{e^z-1}{z}, & \text{si } z\neq 0\\ 1, & \text{si } z=0\end{cases}$$

d) Obsérvese que, por el Teorema de Liouville, una función que es analítica en todo el plano complejo, incluyendo ∞, es constante.
De aquí que, cualquier función entera que no sea constante, tal como: e^z, sen z, $\cos z$, polinomios por lo menos de primer grado, etc.
debe ser singular en el infinito.

$$==\ oo\ ==$$

Ejemplo 9

Clasificar las singularidades de la función : $f(z)=\frac{z^3-2z+3}{z-2}$

Solución:

La función dada tiene una sola singularidad en $z=2$. Para clasificar esta singularidad, desarrollaremos a $f(z)$ en serie de Laurent, alrededor de $z=2$, es decir, en potencias de $(z-2)$. A tal efecto, podemos efectuar una división convencional del polinimio $\left(z^3-2z+3\right)$ entre $\left(z-2\right)$, obteniendose :

$$f(z)=\frac{z^3-2z+3}{z-2}=z+\frac{3}{z-2}=2+(z-2)+\frac{3}{z-2},\quad |z-2|>0$$

por lo tanto, $z-2$ es un Polo Simple.

Ejemplo 10

Clasificar las singularidades de la función : $f(z)=\frac{senhz}{z^4}$

Solución:

La función dada tiene una sola singularidad en $z = 0$. Desarrollando a $f(z)$ en serie de Laurent, alrededor de $z = 0$, se obtiene:

$$f(z) = \frac{\text{senhz}}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}z + \frac{1}{7!}z^2 + \cdots$$

por lo tanto, $z = 0$ es un Polo de orden 3.

Ejemplo 11

Clasificar las singularidades de la función : $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^5} + \dfrac{3}{(z-2)^2}$

Solución:

La función dada tiene dos singularidades, una en $z = 0$ y otra en $z = 2$.

Desarrollando en fracciones parciales, se encuentra que:

$$\frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2} = -\frac{1}{32z} + \frac{1}{32(z-2)} + \frac{47}{16(z-2)^2} + \frac{1}{8(z-2)^3} - \frac{1}{4(z-2)^4} + \frac{1}{2(z-2)^5}$$

Por lo tanto: $\begin{cases} z = 0 \text{ es un Polo Simple} \\ z = 2 \text{ es un Polo de quinto orden} \end{cases}$

Ejemplo 12

La función :

$$f(z) = \text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\, z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{7!}\frac{1}{z^7} + \cdots$$

tiene una singularidad esencial aislada en $z = 0$.

Ejemplo 13

El polinimio $f(z) = 2z + 6z^3$ tiene un Polo de tercer orden en el infinito, porque $f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{z} + \frac{6}{z^2}$ tiene un polo de orden 3 en $z = 0$.

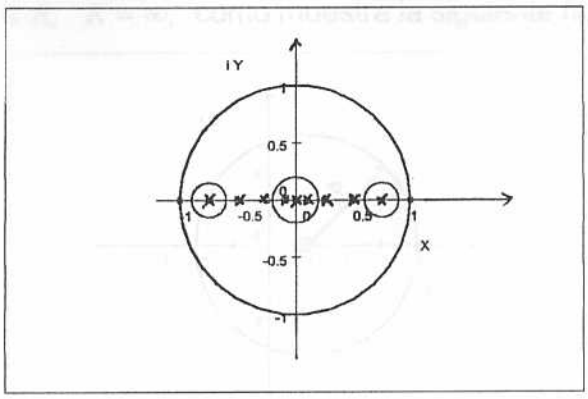
En general, un polinomio de n-ésimo grado, tiene un polo de n-ésimo orden en el ifinito.

Ejemplo 14

La función $f(z) = \dfrac{1}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{z}\right)}$ tiene los puntos singulares en:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{z}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{z} = k\pi \Rightarrow z = \frac{1}{k} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

Todos estas singularidades se encuentran en el eje real, entre $z = -1$ y $z = 1$. Cada uno de los puntos singulares , excepto $z = 0$, está aislado. El punto singular $z = 0$ no está aislado porque toda vecindad del origen contiene otros puntos singulares de la función, para infinitos valores de k, como lo ilustra la siguiente figura:



($z = 0$: Singularidad no aislada)

8.5) CÁLCULO DE SERIES DE LAURENT ALREDEDOR DE PUNTOS SINGULARES

A continuación se ilustra con varios ejemplos, una procedimiento matemático que permite calcular la serie de Laurent de una función $f(z)$, cuando se requiere dicho desarrollo alrededor de los puntos singulares de la misma.
Se indicará también, en cada caso, la región de convergencia correspondiente.

Ejemplo 15

Hallar la serie de Laurent alrededor de la singularidaes indicadas, para cada una de las siguientes funciones. Clasifique la singularidad en cada caso y exprese la región de convergencia de cada serie.

$a)$ $\begin{cases} f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3} \\ z = 1 \end{cases}$ $b)$ $\begin{cases} f(z) = (z-3)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{z+2}\right) \\ z = -2 \end{cases}$ $c)$ $\begin{cases} f(z) = \dfrac{z - \text{sen}\, z}{z^3} \\ z = 0 \end{cases}$

$d)$ $\begin{cases} f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)} \\ z = -2 \end{cases}$ $e)$ $\begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-3)^2} \\ z = 3 \end{cases}$

Solución:

$a)$ $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}, \quad z = 1$

Hagamos el cambio : $z - 1 = u$, con lo que : $f(u) = \dfrac{e^{2+2u}}{u^3} = e^2 \dfrac{e^{2u}}{u^3} \Rightarrow$

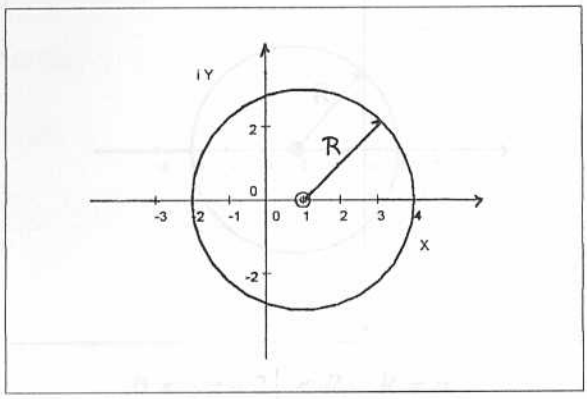
$$f(u) = \frac{e^2}{u^3}\left[1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \cdots\right] = e^2\left[\frac{1}{u^3} + \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}u + \cdots\right] \Rightarrow$$

Devolviendo el cambio:

$$f(z) = e^2\left[\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}(z-1) + \cdots\right]$$

Por lo tanto, $z = 1$ es un Polo de orden 3. La serie converge para todos los valores de z, excepto para $z = 1$, es decir , para:

$0 < |z-1| < R, \quad R = \infty,$ como muestra la siguiente figura :



$$0 < |z-1| < R, \quad R = \infty$$

$$== \text{oo} ==$$

b) $f(z) = f(z) = (z-3)\,\text{sen}\left(\frac{1}{z+2}\right), \qquad z = -2$

Hagamos $z+2 = u,$ con lo que : $\left\{ \begin{array}{l} z = u-2 \\ z+2 = u-5 \end{array} \right\}$. En consecuencia:

$$f(u) = (u-5)\text{sen}(\tfrac{1}{u}) = (u-5)\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{3!\,u^3} + \frac{1}{5!\,u^5} - \frac{1}{7!\,u^7} + \cdots\right] \Rightarrow$$

$$f(u) = \left[1 - \frac{1}{3!u^2} + \frac{1}{5!\,u^4} - \frac{1}{7!\,u_u{}^6} + \cdots\right] - 5\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{3!\,u^3} + \frac{1}{5!\,u^5} - \frac{1}{7!\,u^7} + \cdots\right] \Rightarrow$$

$$f(u) = 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3!\,u^2} + \frac{5}{3!\,u^3} + \frac{1}{5!\,u^4} - \cdots$$

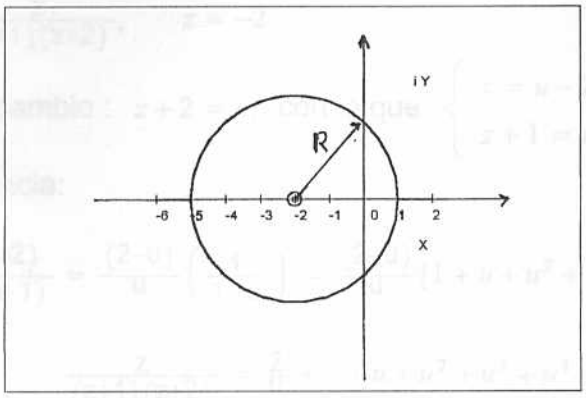
Devolviendo el cambio:

$$f(z) = 1 - \frac{5}{(z+2)} - \frac{1}{3!(z+2)^2} + \frac{5}{3!(z+2)^3} + \frac{1}{5!(z+2)^4} - \cdots$$

Por lo tanto, $z = -2$ es una Singularidad Esencial. La serie converge para todos los valores de z, excepto para $z = -2$, es decir , para:

$$0 < |z+2| < R, \quad R = \infty$$

como lo muestra la siguiente figura:



$$0 < \left| z+2 \right| < R, \quad R = \infty$$

.

== oo ==

.

c) $f(z) = f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}, \qquad z = 0$

$$\frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left[z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)\right] = \frac{1}{z^3}\left[\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots\right]$$

En consecuencia:

$$\frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3} = \left[\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \frac{z^6}{9!} + \cdots\right]$$

Tomando el límite cuando $z \to 0$, se obtiene:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3} = \lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \frac{z^6}{9!} + \cdots\right] = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto, $z = 0$ es una Singularidad Evitable. La serie converge para todo valor de z y, en consecuencia, la función dada puede ser definida como Función Entera, de la siguiente manera:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}, & \text{si } z \neq 0 \\ \dfrac{1}{6}, & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

NOTA:

Nótese que el resultado aquí obtenido puede calcularse también mediante la Regla de L´Hopital, por ser de la forma $\frac{0}{0}$. En efecto:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z - \operatorname{sen} z}{z^3} = \lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos z}{3z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{6z} = \frac{1}{6}$$

.

== oo ==

.

d) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, \qquad z = -2$

Hagamos el cambio : $z+2 = u$, con lo que : $\left\{ \begin{array}{l} z = u-2 \\ z+1 = u-1 \end{array} \right\}$.

En consecuencia:

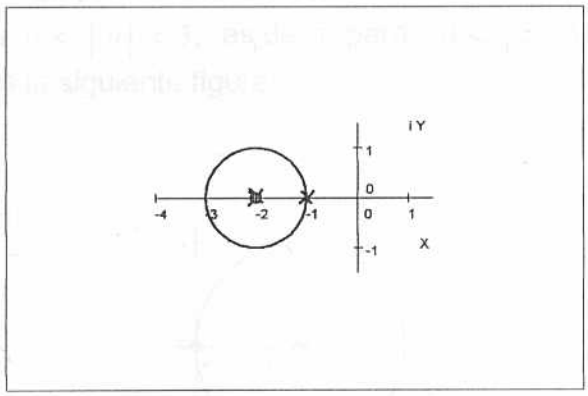
$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{(u-2)}{u(u-1)} = \frac{(2-u)}{u}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{(2-u)}{u}[1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+\cdots] \Rightarrow$$

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + \cdots$$

Devolviendo el cambio:

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{(z+2)} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + (z+2)^3 + (z+2)^4 + \cdots$$

Por lo tanto, $z = -2$ es un Polo de Primer Orden o Polo Simple.
La serie converge para todos los valores de z, tales que : $0 < |z+2| < 1$
como muestra la siguiente figura:



R.C.: $0 < |z+2| < 1$

NOTA:
Obviamente, por descomposición en fracciones simples se obtiene el mismo resultado.
En efecto:

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -1 \text{ es un Polo de Orden 1 o Polo Simple} \\ z = -2 \text{ es un Polo de Orden 1 o Polo Simple} \end{array} \right.$$

.
== oo ==
.
.

e) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-3)^2}, \quad z = 3$

Hagamos el cambio : $z - 3 = u$, con lo que : $z = u + 3$

En consecuencia:

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{1}{9u^2\left(1+\frac{u}{3}\right)^2} = \frac{1}{9u^2}\left[1 - 2\left(\frac{u}{3}\right) + 3\left(\frac{u}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{u}{3}\right)^3 + 5\left(\frac{u}{3}\right)^4 - \cdots\right] \Rightarrow$$

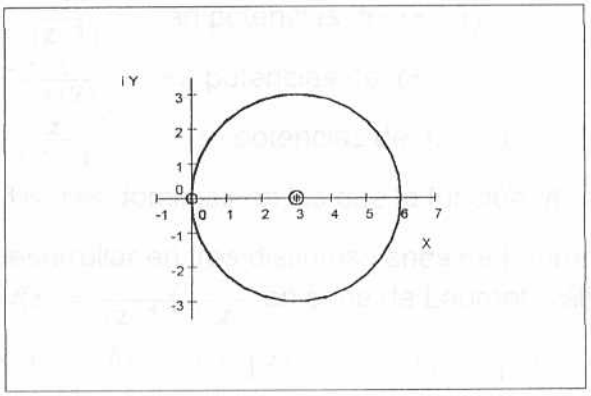
$$\frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{1}{9u^2} - \frac{1}{27u} + \frac{1}{27} - \frac{4}{243}u + \cdots$$

Devolviendo el cambio:

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{1}{9\,(z-3)^2} - \frac{1}{27(z-3)} + \frac{1}{27} - \frac{4}{243}(z-3) + \cdots$$

Por lo tanto, $z = 3$ es un Polo de Segundo Orden o Polo Doble.

La serie converge para todos los valores de z, tales que : $0 < \left|\frac{u}{3}\right| < 1$,
es decir, para $0 < |u| < 3$, es decir, para : $0 < |z-3| < 3$
como muestra la siguiente figura:



R.C. :$0 < |z-3| < 3$

NOTA:

Obviamente, por descomposición en fracciones simples se obtiene el mismo resultado.

En efecto, $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-3)^2} = \dfrac{1/9}{z^2} + \dfrac{2/27}{z} + \dfrac{1/9}{(z-3)^2} - \dfrac{2/27}{(z-3)} \Rightarrow z = 3$ es un Polo de Orden 2.

== oo ==

8.6) EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Desarrolle la función $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ en una serie de Laurent, válida para

a) $1 < |z| < 3$ *b)* $|z| < 3$ *c)* $0 < +1 < 2$ *d)* $|z| < 1$

2) En los siguientes desarrollos en serie de Laurent, determine una expresión para el n-ésimo término de la serie y calcule el mayor dominio anular en el que la serie es válida.

a) $f(z) = \frac{1}{z^4}$ en potencias de z.

b) $f(z) = z^4 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ en potencias de z.

c) $f(z) = z\, e^{\frac{1}{z-1}}$ en potencias de $z-1$

d) $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z-1)}{z}$ en potencias de $z-1$

3) Para la función : $f(z) = \frac{1}{z+2}$ obtenga el desarrollo en serie de Laurent que sea válido en las regiones que se indican. Determine una expresión para el n-ésimo término de la serie.

a) $|z| > 2$ *b)* $|z+1| > 1$

4) Desarrolle las siguientes funciones en serie de Laurent en un dominio de radio exterior infinito.Determine el centro y el radio interior de dicho dominio. Proporcione una expresión para el n-ésimo término de la serie.

a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)}$ en potencias de $(z+3)$

b) $f(z) = \frac{1}{(z+2)}$ en potencias de $(z-i)$

c) $f(z) = \frac{z}{(z-i)}$ en potencias de $(z-1)$

5) Determine los tres dominios en los que la función $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z+3)}$ se puede desarrollar en tres distintas series de Laurent, en potencias de z.

6) Desarrolle $f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$ en serie de Laurent, válida para:

a) $|z| < 1$, *b)* $1 < |z| < 2$, *c)* $|z| > 2$, *d)* $|z-1| > 1$

e) $0 < |z-2| < 1$

7) Desarrolle $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ en una serie de Laurent válida para:

a) $0 < |z| < 2$, *b)* $|z| < 2$

8) Hallar un desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)}$ válido para $|z-3| > 2$.

9) Desarrollar $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$ en una serie de Laurent que sea válida para:

a) $|z| < 2$ *b)* $|z| > 2$.

10) Desarrolle cada una de las siguientes funciones en una serie de Laurent, *alrededor de* $z = 0$. *Clasifique las singularidades en cada caso:*

a) $\frac{1-\cos z}{z}$ *b)* $\frac{e^{z^2}}{z^3}$ *c)* $z^{-1}\cosh\left(z^{-1}\right)$ *d)* $z^2 e^{-z^4}$

e) $z\,\operatorname{senh}\sqrt{z}$

11) Demueste que si la función $f(z) = \tan z$ se desarrolla en una serie de Laurent alrededor de $z = \frac{\pi}{2}$, entonces,

a) La parte principal es: $\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}$

b) La serie converge para : $0 < \left| z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{2}$

c) $z = \frac{\pi}{2}$ es un Polo Simple.

12) Determine y clasifique todas las singularidades de las funciones:

a) $\frac{1}{\left(2\operatorname{sen} z - 1\right)^2}$ *b)* $\frac{z}{\left(e^{\frac{1}{z}}-1\right)}$ *c)* $\cos\left(z^2 + z^{-2}\right)$

d) $\tan^{-1}\left(z^2 + 2z + 2\right)$ *e)* $\frac{z}{\left(e^{z}-1\right)}$

13) Desarrolle $f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$ en una serie de Laurent alrededor de $z = 2$. Determine la región de convergencia y clasifique las singularidades de $f(z)$.

$= \infty =$

CAPÍTULO IX

INTEGRACIÓN POR EL MÉTODO DE LOS RESÍDUOS

9.1) INTRODUCCIÓN

Se desarrolla en este capítulo la teoría de los Resíduos y se ilustra dicha teoría al utilizarla no sólo para evaluar en una forma elegante y sencilla ciertas integrales complejas, sino también para hallar el valor de ciertos tipos de integrales reales que aparecen en matemáticas aplicadas y que son de difícil cálculo en el campo real.

9.2) RESÍDUOS

Si $f(z)$ es analítica en una vecindad D (o entorno reducido) de z_o, entonces, por el Teorema de Cauchy-Goursat, se tiene que:

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

siendo C cualquier curva cerrada contenida en D, como se muestra en la figura 9.1

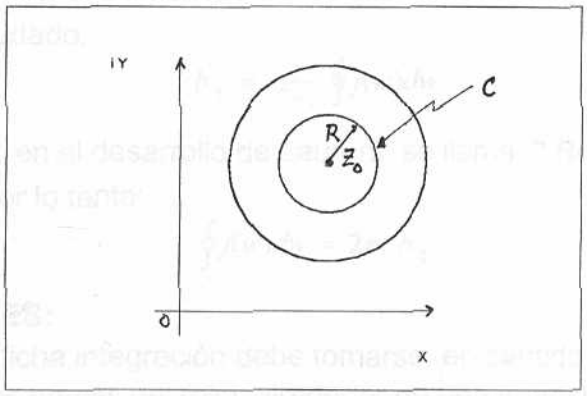


Fig. 9.1 $D : 0 \leq |z - z_0| < R$

Sin embargo, si $f(z)$ tiene un polo de orden " n" o una singularidad esencial aislada en $z = z_o$, y z_o se encuentra en el interior de C, entonces la integral (1) es diferente de cero, es decir .

$$\oint_C f(z)dz \neq 0$$

En este caso, $f(z)$ puede ser representada mediante la siguiente serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_o)^n}$$

la cual converge en el dominio : $0 < |z - z_0| < R$, siendo R la distancia desde

z_0 hasta el punto singular más cercano (z_s) , de $f(z)$, tal como se ilustra en la figura 9.2 siguiente :

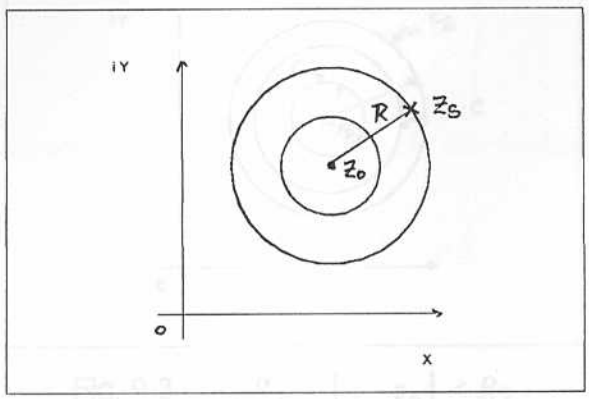


Fig. 9.2 $R = \left| z_s - z_0 \right|$

Tal como ya se demostró, los coeficientes a_n y b_n estan dados por :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw \quad ; \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw$$

Para este desarrollo, el coeficiente b_1 se obtendrá haciendo $n = 1$, dando como resultado:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(w)dw$$

El coeficiente b_1 en el desarrollo de Laurent, se llama: **" Resíduo de** $f(z)$ **en** $z = z_0$ **"** , y por lo tanto:

$$\oint_C f(w)dw = 2\pi i\, b_1$$

OBSERVACIONES:

Obsérvese que dicha integración debe tomarse en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, alrededor de una trayectoria cerrada simple C que se encuentre en el dominio : $0 < \left| z - z_0 \right| < R$, y contenga al punto $z = z_0$ en su interior.

9.3 TEOREMA DEL RESÍDUO

El resíduo (b_1) de la función $f(z)$ en el punto singular z_0, es igual a coeficiente de la potencia $\frac{1}{(z-z_0)}$ en la serie de Laurent que representa a la función $f(z)$ en una región anular dada por : $0 < \left| z - z_0 \right| < R$

Demostración:

Sea $f(z)$ una función analítica sobre las circunferencias C_1 y C_2 , centradas ambas en z_0 y en la región anular D entre ellas definida : $R_1 < \left| z - z_0 \right| < R_2$, como muestra la figura 9.3.

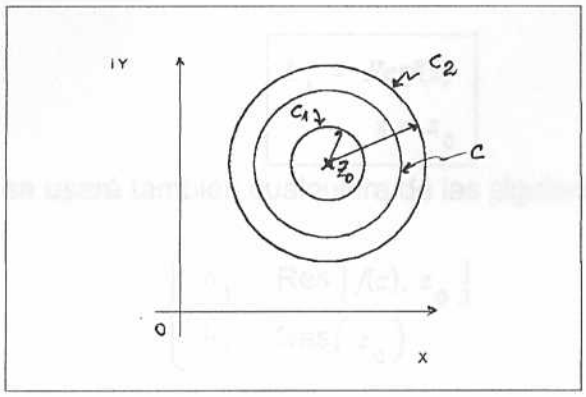


Fig. 9.3 : $D : R_1 < |z - z_0| < R_2$

Sea C una curva cerrada simple contenida en D.
Entonces, de acuerdo con el Teorema de Laurent,

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $\frac{1}{2\pi i}$ en integrando alrededor de C, se obtiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left[a_0 + a_1(z-z_0) + +a_2(z-z_0)^2 \cdots\right]dz +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left[\frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots\right] \quad \ldots(1)$$

Pero:

a) Por el Teorema de Cauchy-Goursat :

$$\oint_C \left[a_0 + a_1(z-z_0) + +a_2(z-z_0)^2 \cdots\right]dz = 0$$

b) Por la Fórmula Integral de Cauchy :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \left[\frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots\right]dz = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\, b_1 = b_1$$

Sustituyendo los resultados de los literales a) y b) en la expresión (1), se encuentra que:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = b_1$$

y por lo tanto:

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i b_1}$$

El coeficiente b_1 del desarrollo de Laurent, para este caso, se llama:
" **Resíduo de** $f(z)$ en $z = z_0$" por ser el único coeficiente en la expresión (1)

que queda al evaluar dicha expresión. Es por ello que usaremos la notación:

$$\boxed{b_1 = \underset{z=z_0}{Res} f(z)}$$

Eventualmente, se usará también cualquiera de las siguientes notaciones:

$$\begin{cases} b_1 = \text{Res}\left[f(z),\, z_0\right] \\ b_1 = \text{Res}\left(z_0\right) \end{cases}$$

OBSERVACIONES:

1º) Ya hemos visto que el desarrollo de la serie de Laurent se puede obtener por varios métodos. Formalmente, se puede usar las fórmulas integrales para los coeficentes e integrar luego término a término la expresión:

$$f(z) = a_0 + a_1\left(z-z_0\right) + a_2\left(z-z_0\right)^2 + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots$$

y recordar que :

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i & , \text{ si } n = 1 \\ 0 & , \text{ si } n \neq 1 \end{cases}$$

2ª) Hemos visto también que existen otros métodos para obtener el desarrollo de Laurent sin usar las fórmulas integrales antes referidas para los coeficientes. En consecuencia, puede obtenerse el valor del resíduo por medio de cualquiera de esos métodos y, a continuación, aplicar la fórmula :

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i b_1$$

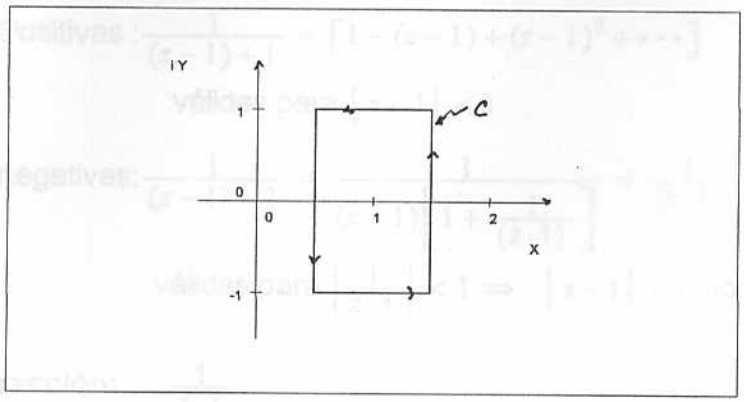
para evaluar así la integral de contorno.

== oo ==

9.3.1) Ejemplos Resueltos I

Ejemplo 1

Sea $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$. Calcular : $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$, donde C es el contorno que se muestra en la siguiente figura, descrito en sentido positivo.



(Contorno C)

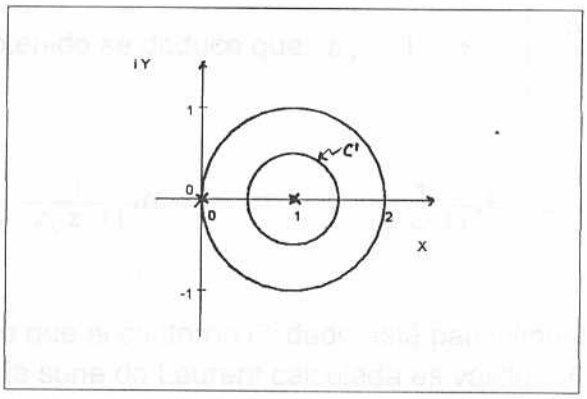
Solución:

Las singularidades de $f(z)$ son: $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases}$

Por lo tanto, la mayor región anular D que es una vecindad (o entorno reducido) de $z = 1$, es :

$$D : 0 < |z-1| < 1$$

la cual se muestra a continuación:



Por el Principio de Deformación de Contornos, la curva dada C se puede reducir a la circunferencia C' contenida en D.

Obsérvese que $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ es analítica sobre C y en todo punto de su interior, excepto en $z_2 = 1$, que es una singularidad aislada. Por lo tanto, puede aplicarse el Teorema del Resíduo. A tal efecto, desarrollemos la función $f(z)$ en serie de Laurent alrededor de $z_0 = 1$.

Así se obtiene:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} \quad , \text{ de donde:}$$

Primera fracción:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} \Rightarrow$$

Potencias Positivas : $\frac{1}{(z-1)+1} = \left[1-(z-1)+(z-1)^2+\cdots\right]$

válidas para $|z-1|<1$

Potencias negativas: $\frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{(z-1)\left[1+\frac{1}{(z-1)}\right]} = \frac{1}{(z-1)}\left[1-\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots\right]$

válidas para $\left|\frac{1}{z-1}\right|<1 \Rightarrow |z-1|>1$, por lo que se omite su desarrollo

Segunda fracción: $\frac{1}{z-1}$

Esta fracción ya está desarrollada en serie de Laurent alrededor de $z=1$.
El mismo es único y válido $\forall z \neq 1$.
En consecuencia, la primera fracción aporta las potencias positivas a la región bajo estudio, mientras que la segunda fracción aporta la potencia negativa: $\frac{1}{z-1}$. Es decir:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -1+(z-1)-(z-1)^2+(z-1)^3-\cdots+\frac{1}{z-1}, \quad 0<|z-1|<1$$

Del desarrollo obtenido se deduce que: $b_1 = 1 \Rightarrow \left[\operatorname{Res}_{z=1} f(z) = 1\right]$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z(z-1)}dz = 1 \Rightarrow \oint_C \frac{1}{z(z-1)}dz = 2\pi i(1) = 2\pi i$$

NOTA:

1°) Obsérvese que el contorno C dado está parcialmente fuera del dominio en el que la serie de Laurent calculada es válida. Sin embargo, tal como ya se indicó, el contorno C puede deformarse hasta convertirse en el contorno C', sobre el cual se ha calculado la integral.

2°) Alrededor del rectángulo dado C, habría que realizar la integración término a término sobre cada uno de sus lados para obtener el resultado final aquí establecido.

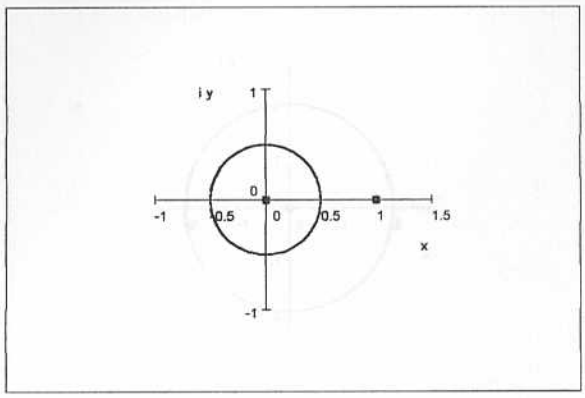
$$= oo =$$

Ejemplo 2

Calcular : $\oint_C \frac{1}{z(z-1)}dz$, donde C es el contorno definido por : $|z| = \frac{1}{2}$, descrito en sentido positivo.

Solución:

El contorno de integración se muestra en la siguiente figura:



Contorno: $|z| = \frac{1}{2}$

En este caso, es necesario obtener la serie de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z = 0$, obteniéndose :

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

Pero:

$$\begin{cases} \frac{1}{z} = \frac{1}{z}, \text{ válido para } |z| \neq 0 \\ \frac{1}{z-1} = -\left(\frac{1}{1-z}\right) = -[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots], \text{ válido para } |z| < 1 \end{cases}$$

Luego,

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - [1 + z + z^2 + z^3 + \cdots] = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \cdots$$

El resíduo buscado será: $b_1 = -1$, por lo que :

$$\oint_C \frac{1}{z(z-1)} dz = 2\pi i(-1) = -2\pi i$$

.

== oo ==

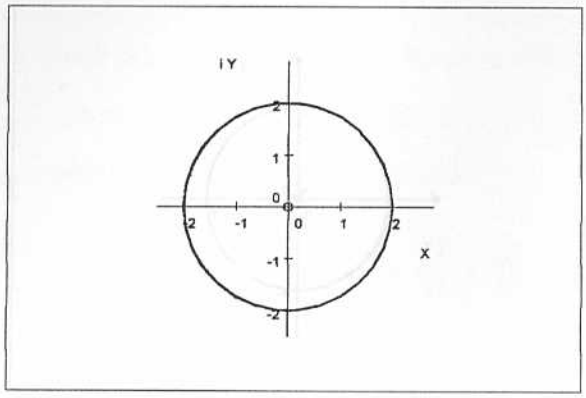
.

Ejemplo 3

Calcular : $\frac{1}{2\pi i} \oint_C z \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz$, siendo C el contorno definido por : $|z| = 2$, descrito en sentido positivo.

Solución:

El contorno de integración se muestra en la siguiente figura:



Contorno: $|z| = 2$

La serie de Laurent de $f(z)$ alrededor de $z = 0$, será :

$$z\,\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = z\left[\frac{\left(\frac{1}{z}\right)}{1!} - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^7}{7!} + \cdots\right] \quad \Rightarrow$$

$$z\,\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^4} - \frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{z^6} + \cdots$$

Por lo tanto, $z = 0$ es una Singularidad Esencial Aislada.

Se observa que el coeficiente de $\left(\frac{1}{z}\right)$ es $b_1 = 0$, por lo que:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C z\,\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)dz = 0$$

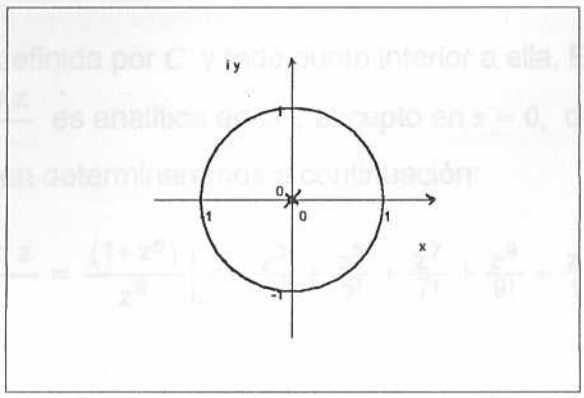
NOTA:
Se observa en este ejemplo que una función puede tener una singularidad en un punto y poseer un resíduo igual a cero en dicho punto; es decir, la analiticidad de una función sobre y dentro de una curva cerrada y simple C es suficiente para que $\oint_C f(z)\,dz = 0$, mas, no es necesaria.

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 4

Calcular : $\oint_C \frac{\text{sen}\,z}{z^4}\,dz$, C el contorno definido por : $|z| = 1$, descrito en sentido positivo.

Solución:
El contorno de integración se muestra en la siguiente figura:



Contorno: $|z| = 1$

Sea D la región definida por C y todo punto interior a ella. Entonces, $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ es analítica en D , excepto en $z = 0$ donde tiene un punto singular de orden 3.

En efecto:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \frac{z^{11}}{11!} + \cdots\right] = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots$$

de donde : $b_1 = -\dfrac{1}{3!}$

Por lo que:

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}\, dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{3!}\right) = -\frac{\pi i}{3}$$

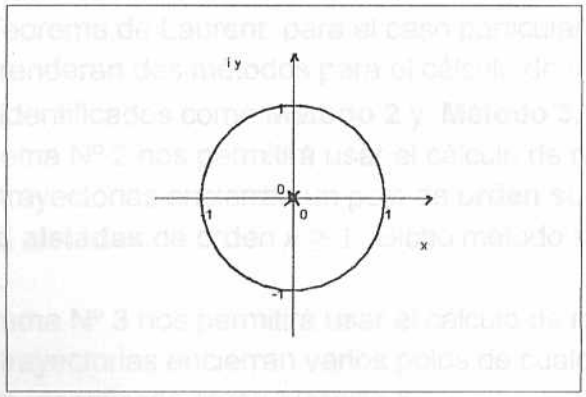
$$= oo =$$

Ejemplo 5

Calcular : $\displaystyle\oint_C \frac{(1+z^5)\operatorname{senh} z}{z^6}\, dz$, C el contorno definido por : $|z| = 1$, descrito en sentido positivo.

Solución:

El contorno de integración se muestra en la siguiente figura:



Contorno: $|z| = 1$

Sea D la región definida por C y todo punto interior a ella. Entonces,

$f(z) = \dfrac{(1+z^5)\,\text{senh}\,z}{z^6}$ es analítica en D , excepto en $z = 0$, donde tiene un punto singular cuyo orden determinaremos a continuación:

En efecto:

$$\frac{(1+z^5)\text{senh}\,z}{z^6} = \frac{(1+z^5)}{z^6}\left[z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \frac{z^{11}}{11!} + \cdots\right] \Rightarrow$$

Por lo que:

$$\frac{(1+z^5)\text{senh}\,z}{z^6} = \left(1 + z^5\right)\left[\frac{1}{z^5} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z} + \frac{z}{7!} + \frac{z^3}{9!} + \frac{z^5}{11!} + \cdots\right], \quad 0 < |z| < \infty$$

De donde se obtiene que $z = 0$ es un polo de orden 5.

Además, $b_1 = \dfrac{1}{5!}$ por lo que :

$$\oint_C \frac{(1+z^5)\text{senh}\,z}{z^6}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{5!}\right) = \frac{\pi}{60}i$$

$$= \text{oo} =$$

9.3.2) Observación

Hasta aquí nos hemos valido del Teorema del Resíduo para calcular integrales de contorno, cuyas trayectoria de integración C encierran **una sóla** singularidad aislada, de primer orden o de orden $n > 1$, pero sólamente una en el interior de C.

En todos los casos estudiados, hemos recurrido al desarrollo en serie de Laurent para extraer de él el valor del coeficiente b_1. En adelante, este método será identificado como **Método 1.**

A continuaión estudiaremos tres Teoremas que nos permitirán obtener el valor del resíduo b_1, sin necesidad de recurrir al desarrollo en serie de Laurent.

El Teorema Nº 1 nos permitirá usar el cálculo de resíduos para evaluar integrales cuyas trayectorias encierran **un polo simple,** es decir una **singularidad aislada** de orden $n = 1$. Es por tanto un teorema alterno al ya conocido como Teorema de Laurent, para el caso particular $n = 1$. De dicho teorema se desprenderán dos métodos para el cálculo de b_1 cuando $n = 1$, los cuales serán identificados como **Método 2** y **Método 3.**

El Teorema Nº 2 nos permitirá usar el cálculo de resíduos para evaluar integrales cuyas trayectorias encierran un polo de **orden superior**, es decir, **una singularidad aisladas** de orden $n \geq 1$. Dicho método será identificado como **Método 4.**

El Teorema Nº 3 nos permitirá usar el cálculo de resíduos para evaluar integrales cuyas trayectorias encierran varios polos de cualquier orden ($n = finito$), .Dicho métod será identificado como **Método 5**.

9.3.3 Teorema Nº 1 : Polo Simple

Método 2:

Supongamos que, por hipótesis, la función $f(z)$ tiene sólo un Polo Simple $(n = 1)$, en $z = z_0$, interior a la trayectoria de integración C, como se muestra en la figura 9.4 :

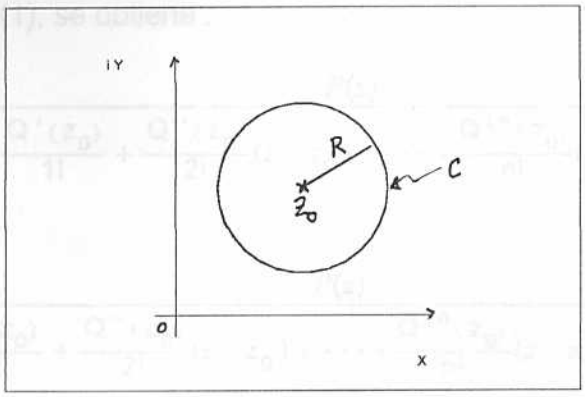


Fig. 9.4 :Contorno C : $|z - z_0| = R$

En este caso, la serie de Laurent correspondiente a la función $f(z)$ tendrá la siguiente forma genérica:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)}, \qquad b_1 \neq 0, \quad b_n = 0 \ \ para\ n \geq 2$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por : $(z - z_0)$, se obtiene:

$$(z-z_0)f(z) = \left[a_0 + a_1(z-z_0) + a_0(z-z_0)^2 + \cdots + \right](z-z_0) + b_1$$

Tomando ahora límite cuando $z \to z_0$, se obtiene :

$$\boxed{b_1 = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)f(z)}$$

Método 3:

En el caso de existencia de un sólo Polo Simple, existe otra forma muy útil de calcular el valor del resíduo b_1, como se expondrá a continuación.

Para ello, escribamos la función $f(z)$ dada, en la forma:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad \ldots\ldots(1)$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son analíticas y $Q(z)$ tiene por hipótesis, un Cero Simple en $z = z_0$, es decir, $Q(z) = (z - z_0)R(z)$.

En este caso, $Q(z)$ puede desarrollarse en serie de Taylor de la forma :

$$Q(z) = Q(z_0) + \frac{Q'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{Q''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{Q^{(n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$

Como $z = z_0$ es un polo de $f(z)$, es evidente que : $Q(z_0) = 0$, por lo que :

$$Q(z) = (z - z_0)\left[\frac{Q'(z_0)}{1!} + \frac{Q''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \cdots + \frac{Q^{(n}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1} + \cdots \right]$$

Sustituyendo en (1), se obtiene :

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z - z_0)\left[\frac{Q'(z_0)}{1!} + \frac{Q''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \cdots + \frac{Q^{(n}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1} + \cdots \right]}$$

de donde :

$$(z - z_0) f(z) = \frac{P(z)}{\left[\frac{Q'(z_0)}{1!} + \frac{Q''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \cdots + \frac{Q^{(n}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1} + \cdots \right]} \quad \cdots\cdot(2)$$

Pero, de ecuerdo con lo demostrado por el **Método 2**, antes expuesto:

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

por lo que, tomando límite cuando $z \to z_0$ en la expresión (2), se obtiene :

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{\left[\frac{Q'(z_0)}{1!} + \frac{Q''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \cdots + \frac{Q^{(n}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1} + \cdots \right]}$$

de donde :

$$\boxed{b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}}$$

En resumen, podemos decir que, hasta el momento, cuando $z = z_0$ es un Polo Simple, disponemos de tres métodos para calcular el valor del resíduo

$$b_1 = \text{Res}\left[f(z),\ z = z_0 \right]$$

Tales métodos se resumen a continuación :

a) Método 1:

Si $z = z_0$ es una singularidad aislada de orden $n \geq 1$, entonces :

b_1 = coeficiente del término $\frac{1}{(z - z_0)}$ en el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z)$.

En el caso particular en que $z = z_0$ es una singularidad aislada de orden $n = 1$

se dispone además de los dos métodos adicionales, enunciados en el **Teorema Nº 1** antes expuesto, es decir :

b) Método 2: $b_1 = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right]$

c) Método 3: $b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q'(z)}$

$$= oo =$$

9.3.4) Ejemplos Resueltos II

Ejemplo 6

Sea: $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$. Calcule el resíduo de $f(z)$ en el punto singular $z = 0$.

Solución:

En este caso, $z = 0$ es una **singularidad esencial**, por lo que el único método aplicable será el antes identificado como **Método 1**. Por lo tanto, usando el desarrollo conocido de e^u, para $u = -\frac{1}{z}$, se obtiene:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)}{1!} + \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^3}{3!} + \cdots$$

De donde:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \cdots$$

El resíduo en $z = 0$ será el coeficiente de $\frac{1}{z}$, es decir: $b_1 = -1$

NOTA:

Nótese que, en este caso, no puede aplicarse el método identificado como Método 2 y expresado por $b_1 = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right]$, ya que $z = 0$ no es un Polo Simple sino una Singularidad Esencial $(n \to \infty)$. Por la misma razón, no puede aplicarse el Método 3 expresado por : $b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q'(z)}$

$$= oo =$$

Ejemplo 7

Sea: $f(z) = \frac{3}{1-z}$. Calcule los resíduos en los puntos singulares de $f(z)$.

Solución:

El único punto singular de la función dada es : $z = 1$, el cual es aislado y simple. Luego, podemos aplicar cualquiera de los tres métodos antes expuetos.

En efecto:

Método 1)

La fracción $\frac{3}{1-z}$ desarrollada alrededor de $z = 1$, es decir, en potencias de $(z - 1)$, de acuerdo con el Teorema de Unicidad del desarrollo en serie de

Laurent, es la propia fracción $\frac{3}{1-z} = -\frac{3}{(z-1)}$, por lo que : $b_1 = -3$

Método 2)

Como $z = 1$ es un Polo Simple, se tiene que: $b_1 = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right] \Rightarrow$

$$b_1 = \lim_{z \to 1} \left[(z-1) \frac{3}{(1-z)} \right] = -3$$

Método 3)

Como $z = 1$ es un Polo Simple, se tiene que: $b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q'(z)} \Rightarrow$

$$b_1 = \lim_{z \to 1} \left(\frac{3}{-1} \right) = -3$$

$$= oo =$$

Ejemplo 8

Sea: $f(z) = \frac{2}{1-e^z}$. Calcule los resíduos en los puntos singulares de $f(z)$.

Solución:

Método 1)

b_1 = coeficiente del término $\frac{1}{(z-z_0)}$ en el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z)$. En este caso, el único punto singular de la función dada es la solución de la ecuación :

$1 - e^z = 0 \quad \Rightarrow z = 0$, el cual es aislado.

Además, $Q(z) = 1 - e^z \Rightarrow Q'(0) = -e^z \big|_{z=0} = -1 \neq 0, \Rightarrow z = 0$ además de aislado es un polo simple. En consecuencia, podemos aplicar cualquiera de los tres métodos antes expuetos.

Método 1:

Desarrollando $f(z) = \frac{2}{1-e^z}$ alrededor de $z = 0$, es decir, en la corona circular : $0 < |z| < R, \ R < \infty,$ se obtiene :

$$\begin{cases} e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \\ 1 - e^z = \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \\ \frac{2}{1-e^z} = 2\left[-\frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{12} + \frac{z^3}{720} - \cdots \right] \end{cases}$$

Por lo tanto : $b_1 = -2$

Método 2:

Como $z = 0$ es un Polo Simple, se tiene que: $b_1 = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right] \Rightarrow$

$$b_1 = \lim_{z \to 0} \left[(z-0) \frac{2}{(1-e^z)} \right] = \lim_{z \to 0} \frac{2z}{(1-e^z)} \to \frac{0}{0}$$

Aplicando la Regla de L´Hopital, se obtiene :

$$b_1 = \lim_{z\to 0} \frac{2z}{(1-e^z)} = \lim_{z\to 0} \frac{2}{(-e^z)} = -2$$

Método 3:

Como $z = 0$ es un Polo Simple, se tiene que:

$$b_1 = \lim_{z\to z_0} \frac{P(z)}{Q'(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{2}{(-e^z)} = \left(\frac{2}{-1}\right) = -2$$

== oo ==

9.3.5 Teorema Nº 2 : Polo de Orden Superior

Supongamos que, por hipótesis, la función $f(z)$ tiene sólo un Polo de orden $n > 1$ en un punto $z = z_0$, interior a la trayectoria de integración C, tal como muestra la figura 9.5:

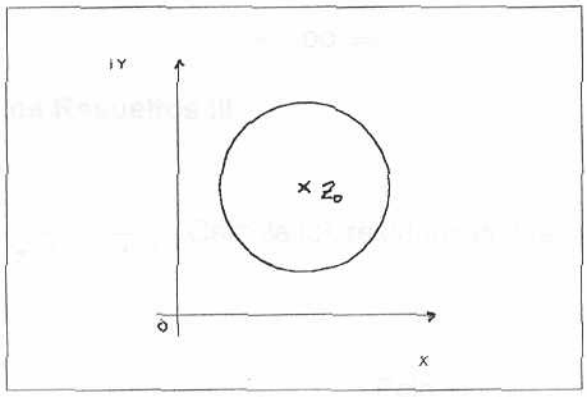


Fig. 9.5 : Contorno $C : \left| z - z_0 \right| = R$

En este caso, la serie de Laurent correspondiente a la función $f(z)$ tendrá la siguiente forma genérica:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

$$b_n \neq 0$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por : $(z-z_0)^n$, se obtiene:

$$(z-z_0)^n f(z) = \left[a_0 + a_1(z-z_0) + a_0(z-z_0)^2 + \cdots + \right](z-z_0)^n + b_1(z-z_0)^{n-1} + b_2(z-z_0)^{n-2} + \cdots + b_n$$

Esto demuestra que ahora b_1 es el coeficiente de la potencia $(z-z_0)^{n-1}$ en el desarrollo de Taylor de la función : $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$, alrededor de $z = z_0$.

Por lo tanto, por el Teorema de Taylor, se obtiene :

$$b_1 = \frac{g^{(n-1}(z_0)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \left\{ \frac{d^{(n-1}}{dz^{n-1}} \left[g(z) \right] \right\} \qquad \cdots(1)$$

Pero, $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$ por lo que, sustituyendo en (1), se obtiene :

$$\boxed{b_1 = \text{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{(n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(z-z_0\right)^n f(z)\right]\right\}} \quad ...(2)$$

NOTA:

1) En adelante, haremos referencia a este método como : **Método 4**
2) Nótese que , si $n = 1$ (Polo simple), se obtiene la fórmula señalada anteriormente en el Método 2, es decir:

$$b_1 = \lim_{z\to z_0}\left(z-z_0\right) f(z)$$

Por lo tanto , la fórmula (2) es válida para $n \geq 1$.

.

== oo ==

.

9.3.6) Ejemplos Resueltos III

Ejemplo 9

Sea: $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$. Calcule los resíduos en los puntos singulares de $f(z)$.

Solución:

Las singularidades de $f(z)$ son: $\begin{cases} z_1 = 1 & : \text{Polo Simple, aislado} \\ z_2 = -1 & : \text{Polo de orden 2, aislado} \end{cases}$

Luego:

Resíduo en $z_1 = 1$ (Polo Simple) $\Rightarrow$

a) Utilizando el Método 2:

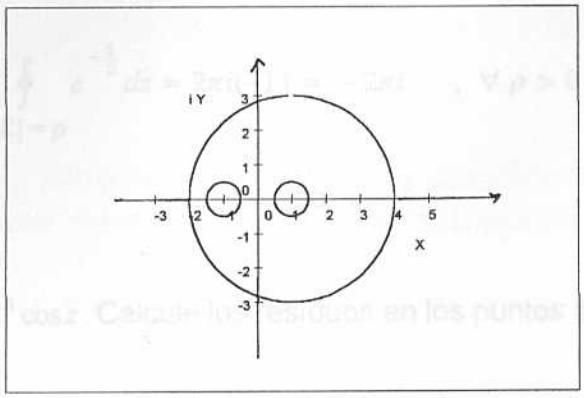
$$b_1 = \text{Res}\left[f(z),\ 1\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Resíduo en $z_2 = -1$ $\left[\begin{array}{l}\text{Polo de segundo} \\ \text{orden } (n=2), \text{aislado}\end{array}\right]$, por lo tanto :

$$b_1 = \text{Res}\left[f(z),\ -1\right] = \lim_{z\to -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right] = \frac{-1}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1} = -\frac{1}{4}$$

NOTA:

Obsérvese que, de acuerdo con el Teorema del Resíduo:



(Contornos a), b) y c))

a) $$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi i}{2}$$

b) $$\oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}$$

c) $$\oint_{|z-1|=3} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}dz = 2\pi i\left\{\left[\begin{array}{l}\text{Res } f(z) \\ z=1\end{array}\right] + \left[\begin{array}{l}\text{Res } f(z) \\ z=-1\end{array}\right]\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}dz = 2\pi i\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\right) = 0$$

$$== \text{oo} ==$$

Ejemplo 10

Sea: $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$. Calcule los resíduos en los puntos singulares de $f(z)$

Solución:

En este caso, $z = 0$ es una singularidad esencial, por lo que el único método válido para calcular el valor del resíduo será el correspondiente al desarrollo en serie de Laurent (Método 1), de donde se extraerá el coeficiente de la potencia : $\frac{1}{z}$.

Así se obtiene:

$$f(z) = e^{-\frac{1}{z}} \Rightarrow f(z) = e^{u}\Big|_{u=-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)}{1!} + \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^3}{3!} + \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^4}{4!} + \cdots$$

De donde:

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} - \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots$$

Luego, el resíduo en $z = 0$ será el coeficiente de $\left(\frac{1}{z}\right)$, es decir: $b_1 = -1$

por lo que:

$$\oint_{|z|=\rho} e^{-\frac{1}{z}} dz = 2\pi i(-1) = -2\pi i \quad , \forall \rho > 0$$

$$== oo ==$$

Ejemplo 11

Sea: $f(z) = z^{-5}\cos z$. Calcule los resíduos en los puntos singulares de $f(z)$.

Solución:

$f(z) = \frac{\cos z}{z^5} \Rightarrow z = 0$ es un polo de orden 5, por lo tanto, disponemos de dos métodos para calcular el valor del resíduo en este punto singular. Son los indicados como Método 1 y Método 4.

Método 1:

Desarrollando a $f(z) = \frac{\cos z}{z^5}$ en serie de Lautent alrededor de $z = 0$, se se obtiene:

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^5} = \frac{1}{z^5}\left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \cdots\right] \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z} - \frac{z}{6!} + \frac{z^3}{8!} - \cdots \Rightarrow$$

Extrayendo el coeficiente de la potencia $\left(\frac{1}{z}\right)$ en este desarrollo, se obtiene:

$$\mathrm{Res}\left[f(z), 0\right] = b_1 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$$

Método 4: Si se desea aplicar el método 4, se obtiene que, como $z = 0$ es un polo de orden 5, entonces :

$$\mathrm{Res}\left[f(z), 0\right] = b_1 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^{(4}}{dz^4}\left(z^5\frac{\cos z}{z^5}\right)\right]_{z=0} = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^{(4}}{dz^4}(\cos z)\right]_{z=0} = \frac{1}{4!}$$

Evidentemente:

$$\oint_{|z|=\rho} \frac{\cos z}{z^5} dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4!}\right) = \frac{\pi i}{12} \quad , \forall \rho > 0$$

$$== oo ==$$

Ejemplo 12

Sea: $f(z) = e^z \csc^2(z)$. Calcule los resíduos en los puntos singulares de $f(z)$.

Solución:

$f(z) = e^z \csc^2(z) = \frac{e^z}{\mathrm{sen}^2 z} \Rightarrow z_k = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, son polos múltiples aislados.

Además, $Q(z) = \text{sen}^2 z \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q'(z_k) = 2\,\text{sen}\, z_k \cos z_k = \text{sen}(2z_k) = 0, \ \forall k \\ Q''(z_k) = 2\cos\left(2\, z_k\right) \neq 0 \end{array} \right\}$

por lo tanto, $z = z_k$ son polos de orden 2, por lo que disponemos de dos métodos para calcular el valor del resíduo en estos puntos singulares. Estos métodos son :

Método 1:

Desarrollando a $f(z) = e^z \csc^2 z$ en serie de Lautent alrededor de $z = k\pi$, y obteniendo el coeficiente de $\frac{1}{(z - k\pi)}$ como resíduo buscado.

Para facilitar los cálculos, hagamos : $z - k\pi = u \Rightarrow z = k\pi + u$

Así, la función a desarrollar en una serie de Laurent en torno a $u = 0$, será :

$$f(u) = e^{k\pi + u} \csc^2 (k\pi + u)$$

de donde : $f(u) = \dfrac{e^{k\pi} e^u}{\text{sen}^2(k\pi + u)} = e^{k\pi} \dfrac{e^u}{\left[(-1)^k \text{sen}\, u\right]^2} = e^{k\pi} \dfrac{e^u}{(\text{sen}\, u)^2}$

Utilizando el desarrollo de Maclaurin para : e^u y sen u, obtenemos :

$$f(z) = e^z \csc^2 z = \frac{e^{k\pi}\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \cdots\right)}{\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{4^5}{5!} - \frac{4^7}{7!} + \cdots\right)^2} = \frac{e^{k\pi}\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \cdots\right)}{u^2\left(1 - \frac{u^2}{3!} + \frac{4^4}{5!} - \frac{4^6}{7!} + \cdots\right)^2}$$

$$\Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{e^{k\pi}\left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \cdots\right)}{u^2\left(1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2\,u^4}{45} + \cdots\right)} = e^{k\pi}\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u} + \frac{5}{6} + \frac{u}{3} + \cdots\right)$$

Extrayendo el coeficiente de la potencia $\left(\frac{1}{u}\right)$ en este desarrollo, se obtiene:

$$b_1 = e^{k\pi}$$

$$\text{oo}$$

Método 4:

Como $z = k\pi$ es un polo múltiple de orden 2, se tiene que:

$$\text{Res}\left[f(z),\ z = k\pi\right] = b_1 = \frac{1}{1!} \lim_{z \to k\pi} \left\{ \frac{d}{dz} \left[(z - k\pi)^2 \frac{e^z}{\text{sen}^2 z} \right] \right\} \quad \cdots (1)$$

Sustituyendo: sen z por su infinitésimo correspondiente, se obtiene : $z \to k\pi \quad \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} z - k\pi = u \Rightarrow u \to o, \text{ cuando } z \to k\pi \\ \text{sen z} = \text{sen}(u + k\pi) = \text{sen}(\text{u})\cos(k\pi) + \cos(\text{u})\,\text{sen}(k\pi) = \pm\text{sen}(\text{u}) \end{array} \right\}$$

Por lo que, sustituyendo en (1) , se obtiene:

$$b_1 = \lim_{u\to 0}\left\{\frac{d}{du}\left[(u)^2\frac{e^{u+k\pi}}{(u)^2}\right]\right\} = \lim_{u\to 0}\left(e^{u+k\pi}\right) = e^{k\pi} \qquad (Ver\ \text{Nota 2})$$

tal como se obtuvo anteriormente.

NOTA:

1) Obviamente, $k = 0 \Rightarrow b_1 = 1 \quad ; k = 1 \Rightarrow b_1 = e^{\pi} \quad ,etc.$

2) El valor de b_1 también puede obtenerse derivando convencionalmente la expresión (1) y luego calculando el límite cuando $z \to k\pi$.

Por simplicidad, podemos hacer : $\begin{cases} z - k\pi = u \Rightarrow dz = du \\ z \to k\pi \Rightarrow u \to 0 \end{cases}$

Luego :

$$b_1 = \lim_{u\to 0}\frac{d}{du}\left[\left(\frac{u}{\pm \operatorname{senu}}\right)^2 e^{u+k\pi}\right] \quad \Rightarrow$$

$$b_1 = \lim_{u\to 0}\left[2\left(\frac{u}{\operatorname{senu}}\right)\frac{\operatorname{senu} - u\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}\, e^{u+k\pi}\right] + \left(\frac{u}{\pm \operatorname{senu}}\right)^2 e^{u+k\pi} \qquad \ldots(2)$$

Pero:

$$\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{senu} - u\cos u}{sen^2 u} \to \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{senu} - u\cos u}{sen^2 u} = \lim_{u\to 0}\frac{\cos u - \left(\cos(u) - u\operatorname{sen}(u)\right)}{2sen(u)\cos(u)} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{senu} - u\cos u}{\operatorname{sen}^2 u} = \lim_{u\to 0}\frac{u\operatorname{sen}(u)}{2\operatorname{sen}(u)\cos(u)} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{2\cos(u)} = 0$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (2), se obtiene :

$$b_1 = \lim_{u\to 0}\left[2(1)(0)\, e^{k\pi}\right] + \lim_{u\to 0}\left(\frac{u}{\pm \operatorname{senu}}\right)^2 e^{u+k\pi} = e^{k\pi}$$

tal como se obtuvo anteriormente.

$$= oo =$$

Ejemplo 13

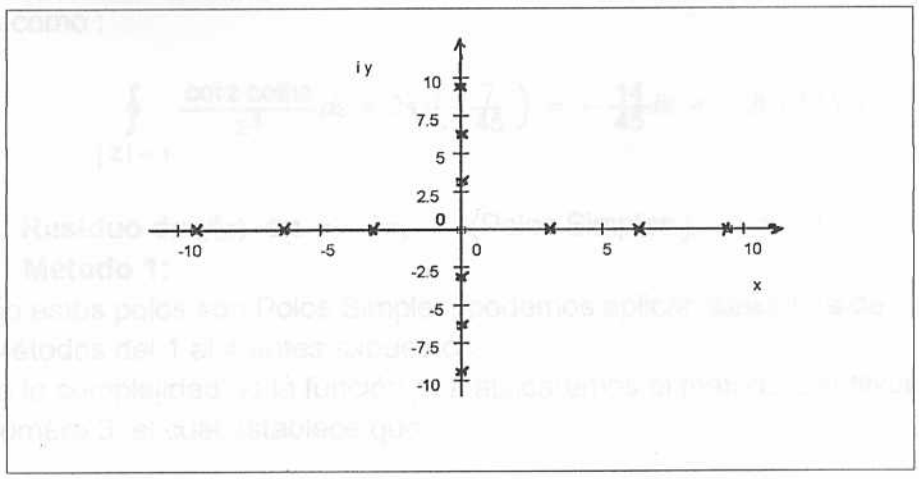
Sea: $f(z) = \dfrac{\cot z \coth z}{z^3}$. Calcule los resíduos en los puntos singulares de $f(z)$ $z = 0.$ y $z = \pi.$

Solución:

$f(z) = \dfrac{\cot z \coth z}{z^3} = \dfrac{\cos z \cosh z}{z^3 \operatorname{senz}\operatorname{senh} z} \Rightarrow$ Los Polos de $f(z)$ son:

$$\begin{cases} \text{sen } z = 0, \Rightarrow z = k\pi, \text{ Polos simples} \\ \text{senh z} = \frac{1}{i}\text{sen}(iz) \Rightarrow iz = k\pi \Rightarrow z = ik\pi, \text{ Polos simples} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \\ z = 0, \text{ polo de orden : } n = 3 + 1 + 1 = 5 \end{cases}$$

El siguiente gráfico ilustra la ubicación de estos polos en el plano complejo :



(Ubicación de los polos de $f(z)$)

Cálculo de Resíduos:

a) Resíduo de $f(z)$ en $z = 0$

Método 1:

Podemos desarrollar $f(z) = \dfrac{\cos z \cosh z}{z^3 \text{senz senh z}}$ en serie de Laurent alrededor de $z = 0$. y obtener el coeficiente de $\dfrac{1}{(z)}$ como resíduo buscado.

Así se obtiene :

$$f(z) = \frac{\cos z \cosh z}{z^3 \text{senz senh z}} = \frac{\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)}{z^3\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)} \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{\left(1 - \frac{z^4}{6!} + \cdots\right)}{z^5\left(1 - \frac{z^4}{90} + \cdots\right)} = \frac{1}{z^5}\left(1 - \frac{7z^4}{45} + \cdots\right) = \frac{1}{z^5} - \frac{7}{45}\frac{1}{z} + \cdots$$

por lo que el resíduo buscado en $z = 0$ es : $b_1 = -\dfrac{7}{45}$.

Como $z = 0$ es un polo de orden 5, podemos también aplicar el Método 4 para obtener el valor del resíduo b_1. En efecto :

Método 4 :

$$b_1 = \frac{1}{4!}\lim_{z \to 0}\frac{d^4}{dz^4}\left[z^5 \frac{\cos z \cosh z}{z^3 \text{senz senh z}}\right] = \frac{1}{4!}\lim_{z \to 0}\frac{d^4}{dz^4}\left[z^2 \frac{\cos z \cosh z}{\text{senz senh z}}\right]$$

Derivando cuatro veces la expresión entre corchetes y tomando el límite indicado, se obtiene :

$$b_1 = -\frac{7}{45}$$

tal como se obtuvo anteriormente.

Obviamente, por aplicación de Teorema del Resíduo, podemos evaluar integrales tales como :

$$\oint_{|z|=3} \frac{\cot z \coth z}{z^3} dz = 2\pi i\left(-\frac{7}{45}\right) = -\frac{14}{45} i\pi = -0.97738i$$

b) Resíduo de $f(z)$ en $z = k\pi$, (Polos Simples), $k = 1, 2, \cdots$

Método 1:

Como estos polos son Polos Simples, podemos aplicar cualquiera de los Métodos del 1 al 4 antes expuestos.

Dada la complejidad de la función $f(z)$, aplicaremos el método identificado con en número 3, el cual establece que :

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res} f(z) \\ z = k\pi\end{array}\right] = \lim_{z\to k\pi} \frac{P(z)}{Q'(z)} = \lim_{z\to k\pi} \frac{\cos z \cosh z}{\frac{d}{dz}\left(z^3 \text{senz senh z}\right)} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res} f(z) \\ z = k\pi\end{array}\right] = \lim_{z\to k\pi} \frac{\cos z \cosh z}{3z^2 \text{senz senh z} + z^3\left(\cos z \text{ senh z} + \text{sen z} \cosh z\right)}$$

Luego:

$$k = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Res} f(z) \\ z = \pi\end{array}\right] = \lim_{z\to\pi} \frac{\cos z \cosh z}{\frac{d}{dz}(z^3 \text{senz senh z})} = \frac{e^{2\pi}+1}{\pi^3(e^{2\pi}-1)} = 3.2372 \times 10^{-2}$$

$$k = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Res} f(z) \\ z = 2\pi\end{array}\right] = \lim_{z\to 2\pi} \frac{\cos z \cosh z}{\frac{d}{dz}(z^3 \text{senz senh z})} \frac{\frac{1}{8}e^{4\pi} + \frac{1}{8}}{\pi^3(e^{4\pi}-1)} = 4.0315 \times 10^{-3}$$

$$k = 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Res} f(z) \\ z = 3\pi\end{array}\right] = \lim_{z\to 3\pi} \frac{\cos z \cosh z}{\frac{d}{dz}(z^3 \text{senz senh z})} = \frac{\frac{1}{27}e^{6\pi} + \frac{1}{27}}{\pi^3(e^{6\pi}-1)} = 1.1945 \times 10^{-3}$$

y así sucesivamente.

c) Resíduo de $f(z)$ en $z = ik\pi$, (Polos Simples), $k = 1, 2, \cdots$

Método 1:

En forma análoga al caso b) ,se obtiene :

$$\left[\begin{array}{c}\text{Res} f(z)\\ z=ik\pi\end{array}\right]=\lim_{z\to k\pi}\frac{P(z)}{Q'(z)}=\lim_{z\to ik\pi}\frac{\cos z\cosh z}{\frac{d}{dz}\left(z^3\text{senz senh z}\right)}\quad\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c}\text{Res} f(z)\\ z=ik\pi\end{array}\right]=\lim_{z\to ik\pi}\frac{\cos z\cosh z}{3z^2\text{senz senh z}+z^3\left(\cos z\,\text{senh z}+\text{sen z}\cosh z\right)}$$

Luego:

$$k=1\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{Res} f(z)\\ z=i\pi\end{array}\right]=\lim_{z\to i\pi}\frac{\cos z\cosh z}{\frac{d}{dz}(z^3\text{senz senhz})}=\frac{\cosh\pi}{\pi^3\text{senh}\pi}=3.2372\times10^{-2}$$

$$k=2\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{Res} f(z)\\ z=i2\pi\end{array}\right]=\lim_{z\to 2\pi i}\frac{\cos z\cosh z}{\frac{d}{dz}(z^3\text{senz senhz})}=\frac{\frac{1}{8}\cosh^2\pi-\frac{1}{16}}{\pi^3\text{senh}\pi\cosh\pi}=4.0315\times10^{-3}$$

$$k=3\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{Res} f(z)\\ z=i3\pi\end{array}\right]=\lim_{z\to i3\pi}\frac{\cos z\cosh z}{\frac{d}{dz}(z^3\text{senz senhz})}=1.1945\times10^{-3}$$

y así sucesivamente.

Evidentemente, de acuerdo con lo expuesto, se pueden evaluar las siguientes integrales:

a) $$\oint_{|z-\pi|=3}\frac{\cot z\coth z}{z^3}dz=2\pi i\left[\begin{array}{c}\text{Res} f(z)\\ z=\pi\end{array}\right]=2\pi i(3.2372\times10^{-2})=6.4744\times10^{-2}i\pi$$

b) $$\oint_{|z-i2\pi|=3}\frac{\cot z\coth z}{z^3}dz=2\pi i\left[\begin{array}{c}\text{Res} f(z)\\ z=i2\pi\end{array}\right]=2\pi i(4.0315\times10^{-3})=8.063\times10^{-3}i\pi$$

== oo ==

Ejemplo 14

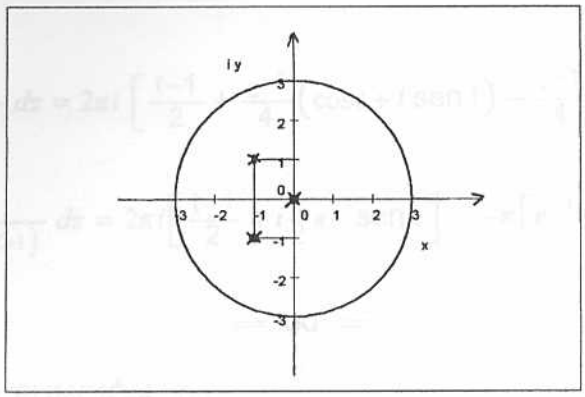
Calcule : $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+z+1)}dz$ alrededor de la circunferencia $|z|=3$, recorrida en sentido positivo.

Solución:

El integrando tiene : Un polo doble en $z=0$

Dos polos simples en $z=-1\pm i$

Todos estos polos son interiores a la trayectoria de integración $|z|=3$ como lo ilustra la siguiente figura:



(Contorno : $|z| = 3$

Luego, de acuerdo con el Teorema del Resíduo, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+z+1)}\,dz = \left[\,\text{Res}f(z), z=0\,\right] + [\text{Res}f(z), z=-1+i] + [\text{Res}f(z), z=-1-i]$$

Cálculo de los resíduos:

Resíduo en $z = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res}\, f(z)\\ z=0\end{array}\right] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+z+1)}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{zt}}{(z^2+z+1)}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res}\, f(z)\\ z=0\end{array}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{te^{zt}\left(z^2+2z+2\right)-e^{zt}(2z+2)}{\left(z^2+2z+2\right)^2} = \frac{t-1}{2}$$

Resíduo en $z = -1+i$ **:**

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res}\, f(z)\\ z=-1+i\end{array}\right] = \lim_{z\to -1+i}\left\{(z+1-i)\frac{e^{zt}}{z^2\left(z+1-i\right)\left(z+1+i\right)}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res}\, f(z)\\ z=-1+i\end{array}\right] = \lim_{z\to -1+i}\left\{\frac{e^{(-1+i)t}}{\left(-1+i\right)^2(2i)}\right\} = \frac{e^{-t}}{4}e^{it} = \frac{e^{-t}}{4}\left(\cos t + i\,\text{sen}\,t\right)$$

Resíduo en $z = -1-i$ **:**

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res}\, f(z)\\ z=-1-i\end{array}\right] = \lim_{z\to -1-i}\left\{(z+1+i)\frac{e^{zt}}{z^2(z+1-i)(z+1+i)}\right\} = \lim_{z\to -1+i}\left\{\frac{e^{zt}}{z^2(z+1-i)}\right\} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res}\, f(z)\\ z=-1-i\end{array}\right] = \lim_{z\to -1-i}\left\{\frac{e^{(-1-i)t}}{(-1-i)^2(2i)}\right\} = \frac{e^{-t}}{-4}e^{-it} = -\frac{e^{-t}}{4}\left(\cos t - i\,\text{sen}\,t\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+z+1)}\,dz = 2\pi i\left[\frac{t-1}{2} + \frac{e^{-t}}{4}(\cos t + i\,\text{sen}\,t) - \frac{e^{-t}}{4}(\cos t - i\,\text{sen}\,t)\right]$$

De donde:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+z+1)}\,dz = 2\pi i\left[\frac{t-1}{2} + i\frac{1}{2}e^{-t}\text{sen}\,t\right] = -\pi\left[e^{-t}\text{sen}\,t + i(1-t)\right]$$

$$= oo =$$

9.4) CEROS DE UNA FUNCIÓN $f(z)$:

Definición:

Si $f(z)$ es analítica en un dominio D y :

a) $f(z) = 0$ en $z = z_0$, se dice que $f(z)$ tiene un Cero Simple en $z = z_0$.

b) Si además : $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = f'''(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$
se dice que $z = z_0$ es un Cero de Orden n

Demostración:

La serie de Taylor de la función $f(z)$, desarrollada alrededor de $z = z_0$ será:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$

Por lo tanto:

* $(z-z_0)$ será un cero de orden 1 si y sólo si $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) \neq 0$
* $(z-z_0)$ será un cero de orden 2 si y sólo si $f(z_0) = f'(z_0) = 0$ y $f''(z_0) \neq 0$
* $(z-z_0)$ será un cero de orden n si y sólo si :

$(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = f'''(z_0) = \cdots = f^{(n-1}(z_0) = 0$ y $f^{(n}(z_0) \neq 0$

En conclusión, el orden del cero z_0 de la función $f(z)$, es igual al orden de la derivada primera deriva no nula, evaluada en z_0.

$$= oo =$$

9.4.1) Ejemplos Resueltos IV

Ejemplo 15

a) La función $f(z) =$ sen z , tiene ceros en : $z = k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

Obsérvese que : $\begin{cases} f(k\pi) = 0 \\ f'(k\pi) = \cos z\big|_{z=k\pi} = (-1)^k = \pm1 \neq 0 \end{cases}$

Por lo tanto, $z = k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ son ceros simples.

b) La función $f(z) = (z-a)^3$ tiene un cero en : $z = a$

En efecto, obsérvese que : $\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = 3(z-a)^2\big|_{z=a} = 0 \\ f''(a) = 6(z-a)\big|_{z=a} = 0 \\ f'''(a) = 6z\big|_{z=a} = 6a \neq 0 \end{cases}$

Por lo tanto, $z = a$, es un cero de orden 3.

c) La función $f(z) = 1 - \cos z$ tiene ceros en : $z = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Obsérvese que : $\begin{cases} f(2k\pi) = 0 \\ f'(a) = sen(2k\pi) = 0 \\ f''(2k\pi) = \cos(2k\pi) = 1 \neq 0 \end{cases}$

Por lo tanto, $z = 2k\pi$, es un cero de orden 3.

d) La función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ tiene un cero simple en : $z = \infty$

== oo ==

Ejemplo 16

Determine la ubicación y orden de los ceros de las siguientes funciones:

a) $f(z) = z^4 - 1$ *b)* $f(z) = z^{-3}\cos^3(\pi z)$ *c)* $f(z) = z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$

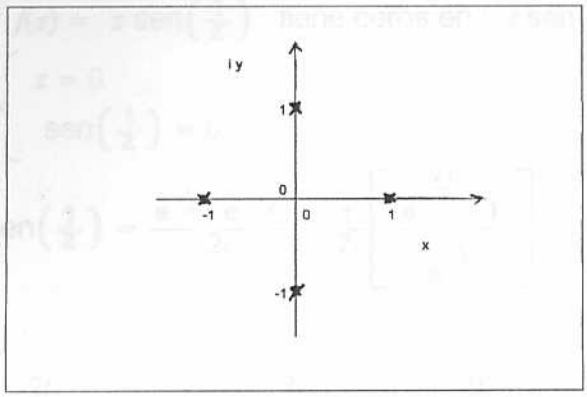
Solucion:

a) La función $f(z) = z^4 - 1$ tiene ceros en : $z^4 = 1$, es decir, en

$z^4 = e^{i2k\pi}$, de donde : $z = e^{\frac{i2k\pi}{4}} = e^{\frac{ik\pi}{2}}$, $k = 0, 1, 2, 3$

por lo tanto: $\begin{cases} k = 0 \Rightarrow z_0 = e^0 = 1 \\ k = 1 \Rightarrow z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2} = i \\ k = 2 \Rightarrow z_2 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\text{sen}\pi = \cos\pi = -1 \\ k = 3 \Rightarrow z_3 = e^{\frac{i3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i \end{cases}$

La ubicación de estos ceros en el plano z, será.



(Ubicación de los ceros: $z = e^{\frac{ik\pi}{2}}$)

Obviamente, los cuatro ceros son ceros simples.

$$= \text{oo} =$$

b) La función $f(z) = z^{-3}\cos^3(\pi z)$ tiene ceros en : $\cos^3(\pi z) = 0$,

De donde:

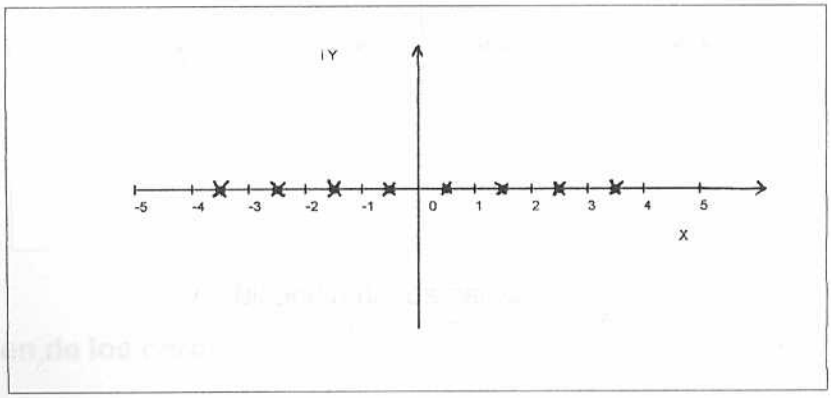
$$\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{e^{i\pi z}+\frac{1}{e^{i\pi z}}}{2} = 0 \Rightarrow \frac{e^{i2\pi z}+1}{2e^{i\pi z}} = 0 \Rightarrow e^{i2\pi z} = -1$$

por lo tanto: $e^{i2\pi z} = e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow i2\pi z = i\pi(1+2k)$ $,k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$

De donde :

$$z = \frac{(1+2k)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}[z] = \dfrac{(1+2k)}{2}, & k = 0,\pm1,\pm2,\cdots \\ \mathrm{Im}[z] = 0 \end{cases}$$

La ubicación de estos ceros en el plano z, será.



(Ubicación de los ceros: $z = \dfrac{(1+2k)}{2}$)

Obviamente, todos estos ceros son ceros simples.

c) La función $f(z) = z\,\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene ceros en : $z\,\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$,

De donde: $\begin{cases} z = 0 \\ \text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \end{cases}$

Pero : $\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{\frac{i}{z}} - e^{-\frac{i}{z}}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{\frac{2i}{z}} - 1}{e^{\frac{i}{z}}}\right]$;

Luego,

$$\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow e^{\frac{2i}{z}} - 1 = 0 \Rightarrow e^{\frac{2i}{z}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{2i}{z}} = e^{i(2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

De donde : $\frac{2}{z} = 2k\pi$, es decir, $z = \frac{1}{k\pi}$

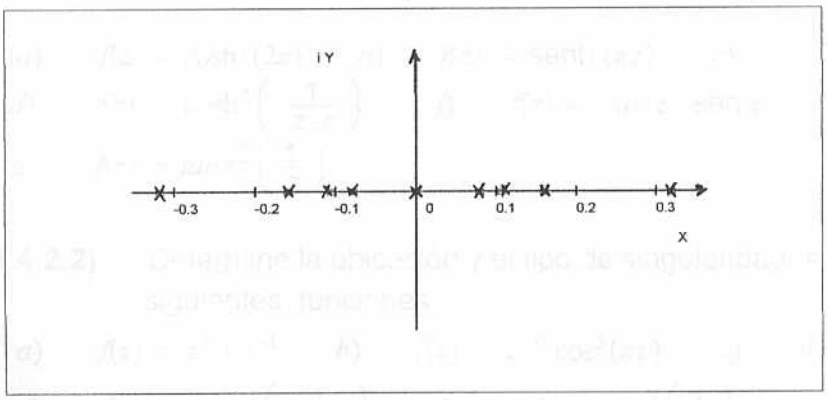
Luego, los ceros de la función dada son :

$$z = \frac{1}{k\pi} \Rightarrow \begin{cases} \text{Re}[z] = \frac{1}{k\pi}, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ \text{Im}[z] = 0 \end{cases}$$

Para los distintos valores de k, se obtiene:

$$z = \left\{\infty, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{4\pi}, \cdots, 0\right\}$$

La ubicación de estos ceros en el plano z, será.



(Ubicación de los ceros: $z = \frac{1}{k\pi}$)

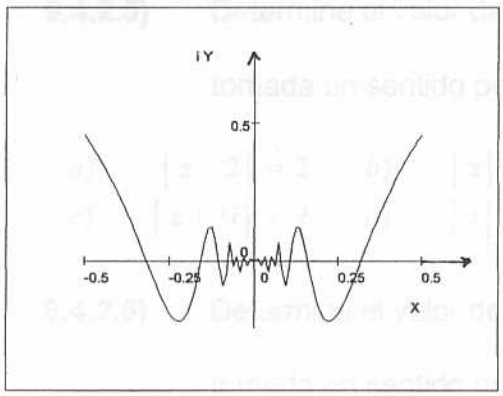
Orden de los ceros:

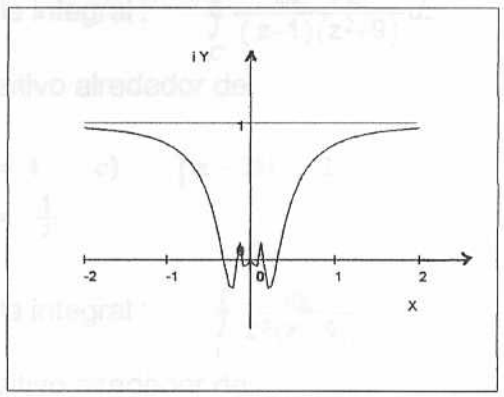
$$f(z) = z\,\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{k\pi}\right) = \frac{1}{k\pi}\,\text{sen}(k\pi) = 0$$

$$\begin{cases} f'(z) = \text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) + z\cos\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow \\ f'\left(\frac{1}{k\pi}\right) = \text{sen}(k\pi) + \frac{1}{k\pi}\cos(k\pi) = 0 + \frac{1}{k\pi}(-1)^k = \pm\frac{1}{k\pi} \neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $f'(\frac{1}{k\pi}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{k\pi}$ son Ceros Simples.

La siguientes gráficas de la función $f(z)$ ilustran lo aquí expuesto:





$(\lim_{z\to 0} z\,\text{sen}(\frac{1}{z}) = 0)$ $(\lim_{z\to\infty} z\,\text{sen}(\frac{1}{z}) = 1)$

$$= \text{oo} =$$

9.4.2) Ejercícios Propuestos I

9.4.2.1) Determine la ubicación y el tipo de singularidades de las siguientes funciones

a) $f(z) = \cosh^2(2z)$ *b)* $f(z) = \text{senh}(\pi z)$ *c)* $z^2 + z^{-1}$

d) $f(z) = \cosh^2\left(\frac{1}{z-\pi}\right)$ *f)* $f(z) = \cos z - \text{sen}\, z$

g) $f(z) = tang^2\left(\frac{1}{z}\right)$

9.4.2.2) Determine la ubicación y el tipo de singularidades de las siguientes funciones:

a) $f(z) = z^2 + z^{-1}$ *b)* $f(z) = z^{-3}\cos^3(\pi z)$ *c)* $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2}$

d) $f(z) = \cosh^2\left(\frac{1}{z-\pi}\right)$ *e)* $f(z) = tang^2\left(\frac{1}{z}\right)$

f) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ *g)* $f(z) = \frac{z^2}{1+z}$ *h)* $f(z) = \frac{\text{sen}\, z}{z}$

i) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$

9.4.2.3) Determine el orden de cada polo y el valor del resíduo correspondiente, para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2-2z}$ *b)* $f(z) = \tanh z$ *c)* $f(z) = \dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$

d) $f(z) = \dfrac{1-e^{2z}}{(z-1)^2}$ *e)* $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$

9.4.2.4) Determine el resíduo en $z = 0$ de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \csc z$ *b)* $f(z) = z^{-3}\cos(z^2)$ *c)* $f(z) = z\cos\left(\dfrac{e^{z^2}}{z^2}\right)$

9.4.2.5) Determine el valor de la integral : $\oint_C \dfrac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$

tomada en sentido positivo alrededor de:

a) $|z-2| = 2$ *b)* $|z| = 4$ *c)* $|z-3i| = 2$

c) $|z+3i| = 2$ *d)* $|z| = \frac{1}{2}$

9.4.2.6) Determine el valor de la integral : $\oint_C \dfrac{dz}{z^3(z+4)}$

tomada en sentido positivo alrededor de:

a) $|z| = 2$ *b)* $|z+2| = 3$ *c)* $|z-3i| = 2$

d) $|z+5|+|z-1| = 8$ *e)* $|z+5|+|z+3| = 4$

9.4.2.7) Determine el valor de la integral : $\oint_C \dfrac{3z^2+2z-4}{z^3-4z}dz$

tomada en sentido positivo alrededor de:

a) $|z-i| = 3$ *b)* $|z-3-i| = 2$ *c)* $|z-1-i| = 2$

9.4.2.8) Determine el valor de la integral : $\oint_C \dfrac{z+1}{z(z-1)(z-2)}dz$

tomada en sentido positivo alrededor de:

a) $|z-1| = \frac{1}{4}$ *b)* $|z-2| = \frac{1}{2}$ *c)* $|z| = \frac{3}{2}$

d) $|z-\frac{1}{2}| = \frac{1}{4}$ *e)* $|z+1|+|z-3| = 6$

9.4.2.9) Si C es la circunferencia $|z| = 2$ descrita en sentido positivo, determine el valor de las integrales :

a) $\oint_C \tan z\,dz$ *b)* $\oint_C \dfrac{dz}{\operatorname{senh}(2z)}$ *c)* $\oint_C \dfrac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)}dz$

9.4.2.10) Si C es la circunferencia $|z| = 1$ descrita en sentido positivo, determine el valor de las integrales:

a) $\oint_C z^{-1}e^{-z}dz$ *b)* $\oint_C z^{-1}\csc z\,dz$ *c)* $\oint_C z^{-2}\csc z\,dz$

d) $\oint_C z\, e^{\frac{1}{z}}\, dz$ e) $\oint_C \frac{\text{senz}}{z^4} dz$ f) $\oint_C \frac{1+z^5}{z^6} dz$

g) $\oint_C \frac{z}{2z-1}\, dz$ h) $\oint_C \frac{3\cos z}{2i-3z} dz$ i) $\oint_C \frac{4z^3+8}{\pi+4z} dz$

j) $\oint_C \frac{z+1}{2z+i} dz$ k) $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-2z} dz$ l) $\oint_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z} dz$

m) $\oint_C \csc z\, dz$ n) $\oint_C \cot z\, dz$ ñ) $\oint_C \tan(\pi z)\, dz$

o) $\oint_C \coth 2z\, dz$ p) $\oint_C \frac{1}{1-e^z}\, dz$ q) $\oint_C \frac{z^2+1}{e^z \operatorname{sen} z} dz$

r) $\oint_C e^z \cot 4z\, dz$ s) $\oint_C \tan(2\pi z) dz$ t) $\oint_C \cot\left(\frac{z}{4}\right) dz$

g) $\oint_C \frac{\text{senhz}}{4z^2+1}\, dz$ h) $\oint_C \frac{\cosh z}{z^2-3iz} dz$ i) $\oint_C \frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2} dz$

9.4.2.11) Evalúe las siguientes integrales por el método de los Resíduos. Emplée desarrollos de Laurent alrededor de los puntos singulares donde sea necesario.

a) $\oint_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-i)^{n-4}} \frac{\sqrt{n}}{n!} dz$ alrededor de : $|z+i| = 3$

b) $\oint_C z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$ alrededor de : $|z+1+i| = 4$

c) $\oint_C \frac{\text{sen z - senh z}}{z^8}\, dz$ alrededor de $|z| = 1$

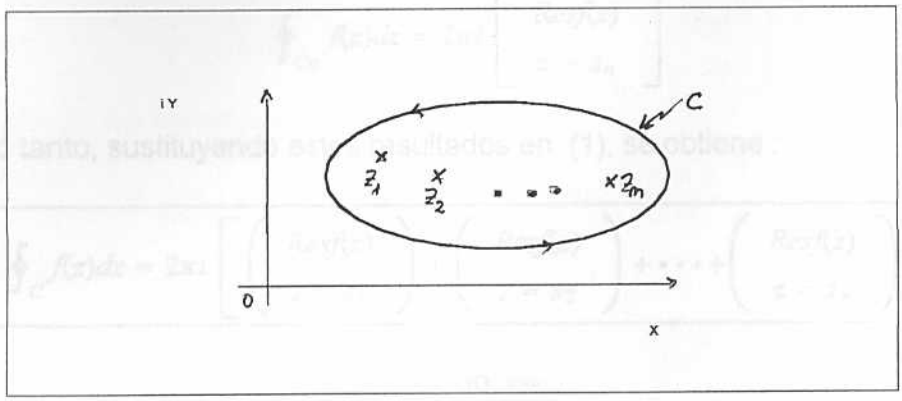
d) $\oint_C \frac{dz}{z \operatorname{senh} z}$ alrededor de $|z| = 1$

== oo ==

9.5) APLICACIÓN DEL TEOREMA DEL RESÍDUO A REGIONES MULTIPLEMETE CONEXAS

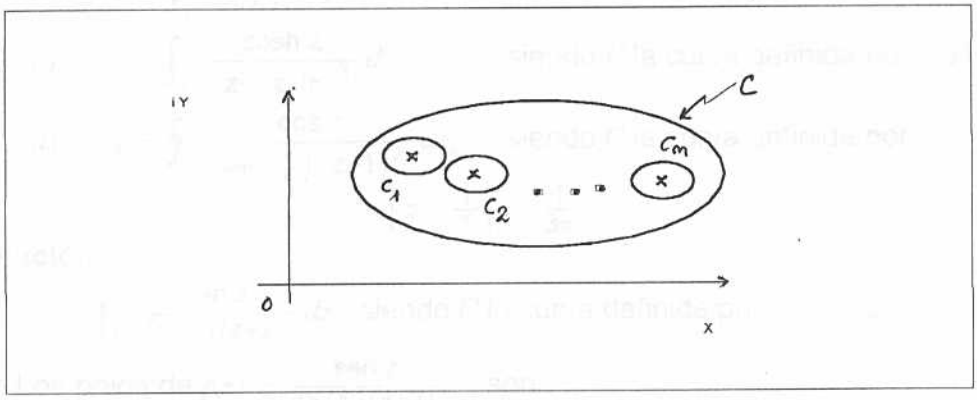
9.5.1) Teorema 3

Supongamos ahora que : $z_1, z_2, \cdots, z_n$ polos aislados de $f(z)$, de cualquier orden, interiores a la curva cerrada C, tal como se ilustra en la figura 9.6



(Fig.9.6 : Polos interiores a C)

Tracemos ahora las curvas simples ceradas $C_1, C_2 \cdots, C_n$ las cuales definen, respectivamente, un entorno reducido de cada uno de los polos citados, tales que $C_j \cap C_k = \varnothing, \ \forall j \neq k,$ como se muestra a continuación la figura 9.7



(Fig. 9.7 :Polos interiores a C y sus respectivos entornos reducidos)

Por el Teorema de Integración en Dominios Multiplemente Conexos, podemos escribir que:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)dz \quad \ldots \quad (1)$$

Pero, por el Teorema del Resíduo se tiene que :

$$\oint_{C_1} f(z)dz = 2\pi i \left[\begin{array}{c} Res f(z) \\ z = z_1 \end{array} \right]$$

$$\oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \left[\begin{array}{c} Res f(z) \\ z = z_2 \end{array} \right]$$

$$\oint_{C_n} f(z)dz = 2\pi i \left[\begin{array}{c} Resf(z) \\ z = z_n \end{array} \right]$$

Por lo tanto, sustituyendo estos resultados en (1), se obtiene :

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \left[\left(\begin{array}{c} Resf(z) \\ z = z_1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} Resf(z) \\ z = z_2 \end{array} \right) + \cdots + \left(\begin{array}{c} Resf(z) \\ z = z_n \end{array} \right) \right]$$

== oo ==

9.5.2) Ejemplos Resueltos V

Ejemplo 17

Evaluar las siguientes integrales

a) $I = \oint_C \frac{\text{sen z}}{(z+1)(z+2)}\, dz,$ siendo C la curva definida por : $|z| = 3$

b) $I = \oint_C \frac{e^z}{\text{senh z}}\, dz,$ siendo C la curva definida por : $|z| = 4$

c) $I = \oint_C \frac{\cosh z}{z^2(z+i\pi)^3}\, dz,$ siendo C la curva definida por : $|z| = 4$

d) $I = \oint_C \frac{\cos z}{\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)(z-1)^2}\, dz,$ siendo C la curva definida por :

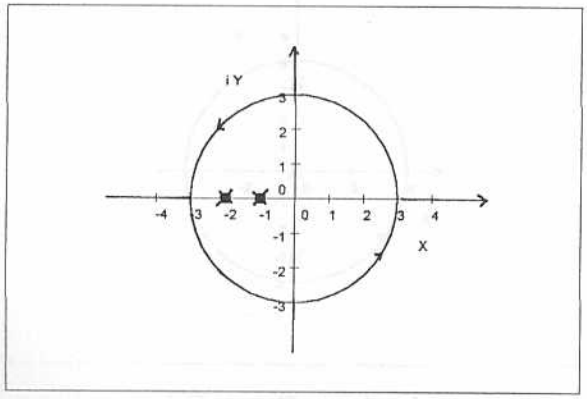
$$\left| z - \frac{1}{\pi} \right| = \frac{1}{3\pi}$$

Solución:

a) $I = \oint_C \frac{\text{sen z}}{(z+1)(z+2)}\, dz,$ siendo C la curva definida por : $|z| = 3$

Los polos de $f(z) = \frac{\text{sen z}}{(z+1)(z+2)}$, son :

$$\begin{cases} z = -1 : & \text{Polo Simple Aislado, interior a la curva } |z| = 3 \\ z = -2 : & \text{Polo Simple Aislado, interior a la curva } |z| = 3 \end{cases}$$



(Curva C y polos)

Luego: $$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\left[\begin{pmatrix} Resf(z) \\ z=-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Resf(z) \\ z=-2 \end{pmatrix}\right]$$

Cálculo de los Resíduos:

$$\begin{bmatrix} Resf(z) \\ z=-1 \end{bmatrix} = \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{\text{sen z}}{(z+1)(z+2)}\right] = \lim_{z\to -1}\left[\frac{\text{sen z}}{(z+2)}\right] = -\,\text{sen}(1)$$

Análogamente,

$$\begin{bmatrix} Resf(z) \\ z=-2 \end{bmatrix} = \lim_{z\to -2}\left[(z+2)\frac{\text{sen z}}{(z+1)(z+2)}\right] = \lim_{z\to -2}\left[\frac{\text{sen z}}{(z+1)}\right] = \text{sen}(2)$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema del Resíduo en Dominios Multiplemente Conexos, se obtiene :

$$I = \oint_C \frac{\text{sen z}}{(z+1)(z+2)}\,dz = 2\pi i[\,\text{sen}(2) - \text{sen}(1)\,]$$

$$= \text{oo} =$$

b) $I = \oint_C \frac{e^z}{\text{senh z}}\,dz$, siendo C la curva definida por : $|z| = 4$

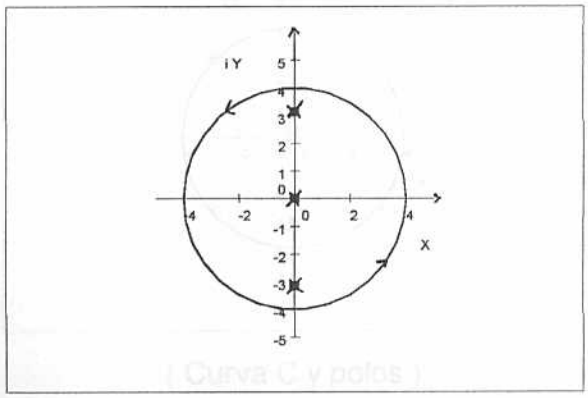
Los polos de $f(z) = \frac{e^z}{\text{senh z}}$, son la solución de la ecuación:

$$\text{senh z} = 0 \Rightarrow \frac{\text{sen}(iz)}{i} = 0$$

de donde : $\text{sen}(iz) = 0 \Rightarrow iz = h\pi,\quad k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$

Es decir : $\boxed{z = \frac{k\pi}{i} = k\pi i}$, $k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$, por lo que, evidentemente, dichos polos son aislados.

Además, los polos interiores a C son : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_1 = i\pi \\ z_2 = -i\pi \end{cases}$



(Curva C y polos)

Orden de los polos:

Aplicando lo expuesto en el punto 9.4), se obtiene:

$$Q(z) = \text{senh z} \Rightarrow \begin{cases} Q'(z) = \cosh z \\ Q'(z_k) = \cosh(k\pi i) \neq 0, \quad \forall k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

Por lo tanto, $z = k\pi i$ son Polos Simples de $f(z)$. En consecuencia,

$$\left[\begin{matrix} Resf(z) \\ z = 0 \end{matrix} \right] = \lim_{z \to 0} \frac{P(z)}{Q'(z)} = \lim_{z \to 0} \left[\frac{e^z}{\cosh z} \right] = 1$$

$$\left[\begin{matrix} Resf(z) \\ z = i\pi \end{matrix} \right] = \lim_{z \to i\pi} \frac{P(z)}{Q'(z)} = \lim_{z \to i\pi} \left[\frac{e^z}{\cosh z} \right] = \frac{e^{i\pi}}{\cosh(i\pi)} = \frac{-1}{\cos\pi} = 1$$

$$\left[\begin{matrix} Resf(z) \\ z = -i\pi \end{matrix} \right] = \lim_{z \to -i\pi} \frac{P(z)}{Q'(z)} = \lim_{z \to -i\pi} \left[\frac{e^z}{\cosh z} \right] = \frac{e^{-i\pi}}{\cosh(-i\pi)} = \frac{-1}{\cos\pi} = 1$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema del Resíduo en Dominios Multiplemente Conexos, se obtiene :

$$I = 2\pi i \left[1 + 1 + 1 \right] = 6\pi i$$

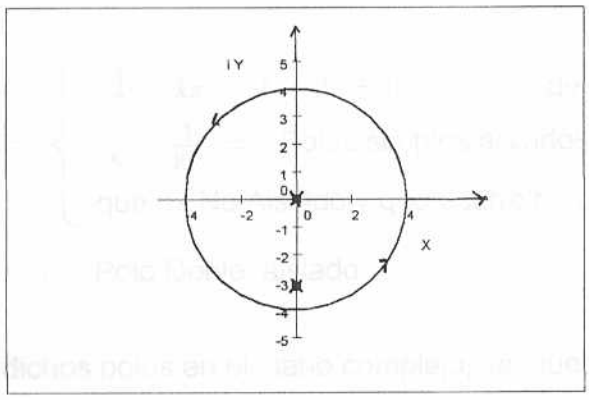
$$== \text{oo} ==$$

c) $I = \oint_C \frac{\cosh z}{z^2(z+i\pi)^3} dz,$ siendo C la curva definida por : $|z| = 4$

Los polos de $f(z) = \frac{\cosh z}{z^2(z+i\pi)^3}$, son la solución de la ecuación:

$$z^2(z+i\pi)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 0, & \text{Polo Aislado de orden } n = 2 \\ z_1 = -i\pi, & \text{Polo Aislado de orden } n = 3 \end{cases}$$

Dichos polos son interiores a C



(Curva C y polos)

por lo que :

$$I = 2\pi i\left[\left(\begin{array}{c} Resf(z) \\ z=0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} Resf(z) \\ z=-i\pi \end{array} \right) \right]$$

Los valores de estos resíduos serán:

$$\left[\begin{array}{c} Resf(z) \\ z=0 \end{array} \right] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{\cosh z}{z^2(z+i\pi)^3} \right] = -\frac{3}{\pi^4}$$

$$\left[\begin{array}{c} Resf(z) \\ z=-i\pi \end{array} \right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+i\pi)^3 \frac{\cosh z}{z^2(z+i\pi)^3} \right] = \frac{\pi^2-6}{2\pi^4}$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema del Resíduo en Dominios Multiplemente Conexos, se obtiene :

$$I = 2\pi i\left[-\frac{3}{\pi^4} + \frac{\pi^2-6}{2\pi^4} \right] = i\frac{(\pi^2-12)}{\pi^3}$$

$$\cdot$$

$$== \text{oo} ==$$

$$\cdot$$

d) $I = \oint_C \frac{\cos z}{\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)(z-1)^2}\,dz$, siendo C la curva definida por : $\left| z - \frac{1}{\pi} \right| = \frac{1}{3\pi}$

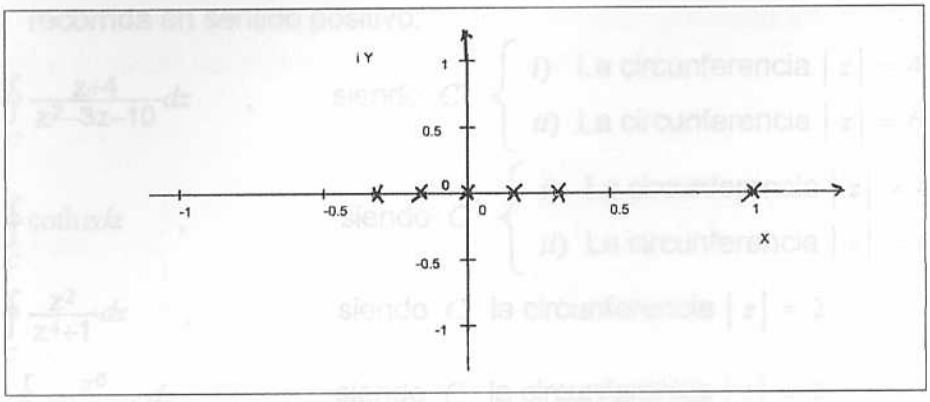
Los polos de $f(z) = \frac{\cos z}{\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)(z-1)^2}$, son la solución de la ecuación:

$$\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)(z-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \\ (z-1)^2 = 0 \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{cases} \text{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \text{ de donde :} \\ z_k = \frac{1}{k\pi} \Rightarrow \text{ Polos simples aislados, excepto } z = 0, \\ \text{que es No Aislado y que ocurre para } K = \infty \end{cases} \\ (z-1)^2 \Rightarrow z = 1 : \text{ Polo Doble, aislado} \end{cases}$$

La ubicación de dichos polos en el plano complejo, se muestra a continuación:



(Ubicación de polos en el plano z)

Se observa que el único polo interior a la curva $C : \left| z - \frac{1}{\pi} \right| = \frac{1}{3\pi}$, es :

$$z = \frac{1}{\pi}$$

Por lo tanto

$$I = 2\pi i \left[\begin{array}{c} Resf(z) \\ z = \frac{1}{\pi} \end{array} \right]$$

El valor de este resíduo será:

$$\left[\begin{array}{c} Resf(z) \\ z = \frac{1}{\pi} \end{array} \right] = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1/\pi} \left[\left(z - \frac{1}{\pi} \right) \frac{\cos z}{\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)(z-1)^2} \right] = \lim_{z \to 1/\pi} \left[\frac{\left(z - \frac{1}{\pi}\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{\cos z}{(z-1)^2} \right] \to \frac{0}{0}$$

Pero:
$$\begin{cases} \lim_{z \to 1/\pi} \left[\frac{\left(z - \frac{1}{\pi}\right)}{\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)} \right] = \lim_{z \to 1/\pi} \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)} = -\lim_{z \to 1/\pi} \frac{z^2}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\pi^2} \\ \lim_{z \to 1/\pi} \left[\frac{\cos z}{(z-1)^2} \right] = \frac{\cos(1/\pi)}{\left(\frac{1}{\pi} - 1\right)^2} = \frac{\pi^2 \cos(1/\pi)}{(1-\pi)^2} \end{cases}$$

Luego: $$\left[\begin{array}{c} Resf(z) \\ z = \frac{1}{\pi} \end{array} \right] = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2 \cos(1/\pi)}{(1-\pi)^2} = \frac{\cos(1/\pi)}{(1-\pi)^2}$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema del Resíduo en Dominios Multiplemente Conexos, se obtiene :

$$I = 2\pi i \left[\frac{\cos(1/\pi)}{(1-\pi)^2} \right]$$

== oo ==

9.5.3) Ejercícios Propuestos II

Evalúe las siguientes integrales a lo largo de la curva dada en cada caso,

recorrida en sentido positivo:

a) $\oint_C \frac{z+4}{z^2-3z-10}dz$, siendo C $\begin{cases} i)\ \text{La circunferencia } |z| = 4 \\ ii)\ \text{La circunferencia } |z| = 6 \end{cases}$

b) $\oint_C \coth z dz$, siendo C $\begin{cases} i)\ \text{La circunferencia } |z| = 4 \\ ii)\ \text{La circunferencia } |z| = 6 \end{cases}$

c) $\oint_C \frac{z^2}{z^4+1}dz$, siendo C la circunferencia $|z| = 2$

d) $\oint_C \frac{z^6}{(z+1)^3}dz$, siendo C la circunferencia $|z| = 2$

e) $\oint_C \frac{(z^2+1)^8}{z^9}dz$, siendo C la circunferencia $|z| = 1$

f) $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2\cos(\pi z)}dz$, siendo C $\begin{cases} i)\ \text{La circunferencia } |z| = 0.3 \\ ii)\ \text{La circunferencia } |z-1| = 0.6 \end{cases}$

g) $\oint_C \frac{(e)^{\pi z}}{(z^2+1)^2}dz$, siendo C la circunferencia $|z| = 2$

h) $\oint_C \frac{(z^2+z+1)^n}{(z^2+3z+1)^2}dz$, siendo C la circunferencia $|z| = 1$, $n = 0,1,2,\ldots$

i) $\oint_C \frac{(z)^n}{(z+a)(z+\frac{1}{a})}dz$, siendo C la circunferencia $|z| = 1$, $\begin{cases} -1 < a < 1 \\ n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$

j) $\oint_C \frac{(e)^{mz}}{(z+ia)(z+\frac{i}{a})}dz$, siendo C la circunferencia $|z| = 1$, $\begin{cases} -1 < a < 1 \\ m \in R \end{cases}$

== oo ==

9.6) EVALUACIÓN DE INTEGRALES REALES

El Teorema del Resíduo proporciona un método sencillo y muy elegante para evaluar ciertas clases de integrales reales complicadas.
La escogencia de la trayectoria de integración cerrada y simple más conveniente puede exigir a veces gran ingenio; sin embargo, en muchos casos, el método puede hacerse rutinario. Los siguientes casos son los más comunes en la práctica :

9.6.1) CASO 1: Integrales de la forma $I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \text{sen}\,\theta)\,d\theta$

En este caso, R es una función racional de senθ, cosθ, o de ambos. En general, este tipo de integrales son muy difíciles de evaluar usando los métodos del cálculo elemental. El cálculo de resíduos puede darnos el resultado de una manera directa.

En efecto, la integral real dada se transforma en una integral de línea compleja, a través del siguiente cambio de variable:

$$e^{i\theta} = z$$

Con lo cual:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{(z^2+1)}{2z} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{(z^2-1)}{2iz} \end{cases}$$

De esta forma :

a) **Integrando**:
El integrando se transforma en una funcion racional de z, digamos, $f(z)$

b) **Límites de Integración**:
Conforme θ recorre el intervalo de 0 hasta 2π, la vatriable z recorre una vez la circunferencia unitaria $|z| = 1$ en sentido contrario al de las agujas del reloj.

c) **Diferencial**:

$$e^{i\theta} = z \Rightarrow \frac{dz}{d\theta} = i\,e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{ie^{i\theta}} = \frac{dz}{iz}$$

Por lo que la integral dada se transforma en :

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \oint_C R\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{iz}$$

es decir :

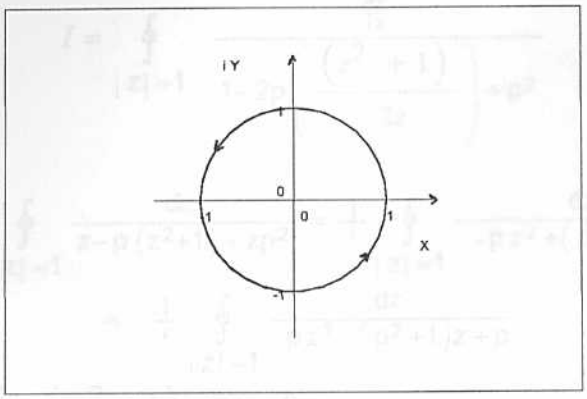
$$I = \oint_C f(z)\,\frac{dz}{iz}$$

siendo C la circunferencia : $|z| = 1$

Nótese que :

a) La integración se debe tomar en sentido contrario al de las agujas del reloj.

b) Cuando θ recorre el intervalo que va de 0 a 2π, o cualquier otro intervalo de longitud 2π, el punto que representa a la expresión $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ recorre la circunferencia unitaria dada por estas ecuaciones, en sentido contrario al de las agujas del reloj.



(Contorno $C : \left| z \right| = 1$)

c) La integral de contorno a lo largo de esta circunferencia se evalúa por medio de la Teoría de Resíduos.

d) Obsérvese que el método falla si el integrando de la integral de contorno tiene polos **sobre** la circunferencia unitaria. Esto sólo puede ocurrir si la expresión :

$$I = \int_0^{2\pi} R\left(\cos\theta, \text{sen}\,\theta\right) d\theta$$

resulta ser una integral impropia, es decir, si el denominador de la función racional $R\left(\cos\theta, \text{sen}\,\theta\right)$ se anula en el intervalo :$0 \le \theta \le 2\pi$, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

Sea $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{sen\,\theta}\, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)} = 2 \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2-1} dz \quad \Rightarrow$

$I = 2 \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-1)(z+1)} dz$ El método falla pues el integrando posée polos sobre la contorno de integración $\left| z \right| = 1$

== oo ==

9.6.1.1) Ejemplos Resueltos VI

Ejemplo 18

Evalúe la integral : $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2}$ donde p es una constante real tal que $0 < p < 1$.

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{(z^2+1)}{2z} \\ d\theta = \frac{dz}{iz} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2p\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) + p^2} \quad \Rightarrow$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{1-2p\left(\frac{(z^2+1)}{2z}\right)+p^2}$$

De donde:

$$I = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z-p(z^2+1)+zp^2} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{-pz^2+(p^2+1)z-p}$$

$$= -\frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{pz^2-(p^2+1)z+p}$$

Pero : $p z^2 - \left(p^2+1\right)z + p = 0 \Rightarrow$

$$z = \frac{(p^2+1)\pm\sqrt{(p^2+1)^2-4p^2}}{2p} = \frac{(p^2+1)\pm\sqrt{p^4+2p+1-4p^2}}{2p} = \frac{(p^2+1)\pm\sqrt{(p^2-1)^2}}{2p} \Rightarrow$$

$$z = \frac{(p^2+1)\pm|p^2-1|}{2p} \qquad \textit{Además, } 0 < p < 1 \Rightarrow \left|p^2-1\right| = 1-p^2, \text{ por lo que :}$$

$$z = \frac{(p^2+1)\pm(1-p^2)}{2p} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{p} \\ z_2 = p \end{cases}$$

Por lo que:

$$I = -\frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{p(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)}$$

El integrando tiene por lo tanto, polos simples en :

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{p} > 1 \Rightarrow \text{Exterior a } |z| = 1 \\ z_2 = p \ < 1 \Rightarrow \text{Interior a } |z| = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema del Resíduo:

$$I = -\frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{p(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)} = -\frac{1}{i}(2\pi i)\left[\text{Res} f(z),\ z = p\right] \qquad \ldots.(1)$$

Pero: $\left[\text{Res } f(z),\ z = 1\right] = \lim_{z\to p}\left[(z-p)\frac{1}{p(z-p)\left(z-\frac{1}{p}\right)}\right] = \lim_{z\to p}\left[\frac{1}{p\left(z-\frac{1}{p}\right)}\right] \Rightarrow$

$$\left[\text{Res } f(z),\ z = 1\right] = \frac{1}{p^2-1}$$

En consecuencia, sustituyendo en (1):

$$I = \frac{1}{i}(2\pi i)\left[\frac{1}{1-p^2}\right] = 2\pi\left(\frac{1}{1-p^2}\right)$$

$$= oo =$$

Ejemplo 19

Evalúe la integral : $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k + \operatorname{sen}\theta}$ donde p es una constante real tal que $k > 1$.

Solución:

Aplicando el cambio de variable antes especificado: $\begin{cases} z = e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz} \\ \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}\frac{(z^2-1)}{z} \end{cases}$

Se obtiene : $I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{k + \frac{1}{2i}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)} = \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 2ikz - 1} dz$

El integrando tiene por lo tanto, polos simples en :

$$\begin{cases} z_1 = i\left(-k + \sqrt{k^2-1}\right) \\ z_2 = -i\left(k + \sqrt{k^2-1}\right) \end{cases}$$

Recordemos que $k > 1$ por hipótesis, luego : $|z_2| = k + \sqrt{k^2-1} > 1$

por lo que el polo z_2 es exterior a la curva $|z| = 1$

Además, sabemos que, en toda expresión cuadrática : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}, \end{cases}$

en este caso : $z_1 \cdot z_2 = -\frac{1}{1} = -1$, por lo que : $|z_1| = \frac{1}{|z_2|}$;

$|z_2| > 1 \Rightarrow |z_1| < 1$, es decir, el polo z_1 está ubicado en el interior de la circunferencia de integración $|z| = 1$.

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema del Residuo:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k + \operatorname{sen}\theta} = \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 2ikz - 1} dz = (2\pi i)\left[\operatorname{Res} f(z),\ z = z_1\right] \quad \ldots.(1)$$

Pero: $\left[\operatorname{Res} f(z),\ z = z_1\right] = \lim_{z \to z_1}\left[(z - z_1)\frac{2}{(z-z_1)(z-z_2)}\right] = \lim_{z \to z_1}\left[\frac{2}{(z-z_2)}\right]$;

$$\left[\operatorname{Res} f(z),\ z = z_1\right] = \frac{2}{(z_1 - z_2)} = \frac{2}{\left[i\left(-k + \sqrt{k^2-1}\right) - i\left(k + \sqrt{k^2-1}\right)\right]} \Rightarrow$$

$$\left[\operatorname{Res} f(z),\ z = z_1\right] = \frac{2}{2i\sqrt{k^2-1}} = \frac{1}{i\sqrt{k^2-1}}$$

En consecuencia, sustituyendo en (1):

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k + \operatorname{sen}\theta} = 2\pi i\left(\frac{1}{i\sqrt{k^2-1}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}, \qquad k > 1$$

Ejemplo 20

Evalúe la integral : $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4\,\mathrm{sen}\,\theta}\, d\theta$

Solución:

Aplicando el cambio de variable antes especificado: $e^{i\theta} = z$, se obtiene:

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \dfrac{e^{i2\theta} + e^{-2i\theta}}{2} = \dfrac{z^2 + z^{-2}}{2} = \left(\dfrac{z^4+1}{2z^2}\right) \\ \mathrm{sen}\, z = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z^2-1}{z}\right) \\ z = e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = \dfrac{dz}{iz} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\left(\dfrac{z^4+1}{2z^2}\right)}{5 - (4)\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z^2-1}{z}\right)}\left(\frac{dz}{iz}\right) = I = \oint_{|z|=1} \frac{iz\left(z^4+1\right)}{2z^2\left(5iz - 2z^2 + 2\right)}\left(\frac{dz}{iz}\right) \quad \Rightarrow$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\left(z^4+1\right)}{2z^2\left(5iz - 2z^2 + 2\right)}\left(\frac{dz}{iz}\right) = \oint_{|z|=1} \frac{\left(z^4+1\right)}{2z^2\left(5iz - 2z^2 + 2\right)} dz \quad \Rightarrow$$

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\left(z^4+1\right)}{2z^2\left(-2z^2 + 5iz + 2\right)} dz$$

El integrando tiene por lo tanto :

$$\begin{cases} \text{Un polo de orden 2 en: } z_1 = 0 \\ \text{Un polo simple en : } \quad z_2 = \frac{i}{2} \\ \text{Un polo simple en : } \quad z_3 = 2i \end{cases}$$

El polo en el punto $z_3 = 2i$ está fuera de la circunferencia $|z| = 1$, por lo que no hay necesidad de tenerlo en cuenta. En conecuencia :

$$I = 2\pi i\left\{ \left[\mathrm{Res}\, f(z),\ z = z_1 \right] + \left[\mathrm{Res}\, f(z),\ z = z_2 \right] \right\} \qquad \ldots(1)$$

Cálculo de los resíduos:

a)

$$\left[\begin{matrix} \mathrm{Res}\, f(z) \\ z = 0 \end{matrix} \right] = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{\left(z^4+1\right)}{2z^2\left(-2z^2 + 5iz + 2\right)} \right] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\frac{\left(z^4+1\right)}{2\left(-2z^2 + 5iz + 2\right)} \right]$$

De donde:

$$\left[\mathrm{Res} f(z),\ z = 0\right] = \tfrac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{4z^3\left(-2z^2 + 5iz + 2\right) - \left(z^4+1\right)(-4z + 5i)}{\left(-2z^2 + 5iz + 2\right)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{5i}{4}\right) = -\frac{5}{8}i$$

b) $$\left[\begin{array}{l}\text{Res } f(z)\\ z=\frac{i}{2}\end{array}\right]=\left\{\frac{\frac{\left(z^4+1\right)}{2z^2}}{\frac{d}{dz}\left(-2z^2+5iz+2\right)}\right\}_{z=\frac{i}{2}}=\left[\frac{\frac{\left(z^4+1\right)}{2z^2}}{\left(-4z+5i\right)}\right]_{z=\frac{i}{2}}\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res } f(z)\\ z=\frac{i}{2}\end{array}\right]=\frac{\left(\frac{1}{16}+1\right)}{2\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{-4i}{2}+5i\right)}=\frac{\frac{17}{16}}{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{6i}{2}\right)}=\frac{17}{24}\,i$$

En consecuencia, sustituyendo en (1):

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta}{5-4\,\text{sen}\,\theta}d\theta=2\pi i\left(-\frac{5}{8}i+\frac{17}{24}i\right)=-\frac{1}{6}\pi$$

== oo ==

Ejemplo 21

Evaluar las integrales:

a) $I_a=\oint_C\frac{\text{senz}}{(z+1)(z+2)}dz$, siendo C la curva $|z|=3$, recorrida en sentido positivo.

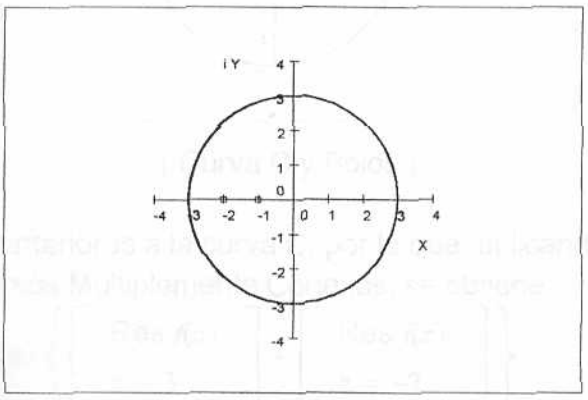
b) $I_b=\oint_C\frac{\text{senz}\,dz}{(z-3)(z+2)^2}$, siendo C la curva $|z|=4$, recorrida en sentido positivo.

Solución:

a) Los polos de $f(z)=\frac{\text{senz}}{(z+1)(z+2)}$ son:

$$\begin{cases}z=-1: & \text{Polo Simple Aislado, interior a C}\\ z=-2: & \text{Polo Simple Aislado, interior a C}\end{cases}$$

La trayectoria de integración y la ubicación de dichos polos, se muestra a continuación:



(Curva C y Polos)

Como ambos polos son interiores a la curva C, el Teorema del Resíduo en

Dominios Multiplemente Conexos, establece que:

$$I_a = 2\pi i\left\{\left[\begin{array}{c}\text{Res } f(z)\\ z=-1\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}\text{Res } f(z)\\ z=-2\end{array}\right]\right\} \quad \ldots\ldots(1)$$

Cálculo de los Resíduos :

$$\left[\begin{array}{c}\text{Res } f(z)\\ z=-1\end{array}\right] = \lim_{z\to -1}\left[(z+1)\frac{\text{sen z}}{(z+1)(z+2)}\right] = \lim_{z\to -1}\left[\frac{\text{sen z}}{(z+2)}\right] = \frac{-\text{sen}(1)}{(-1+2)} = -\text{sen}(1)$$

Análogamente,

$$\left[\begin{array}{c}\text{Res } f(z)\\ z=-2\end{array}\right] = \lim_{z\to -2}\left[(z+2)\frac{\text{sen z}}{(z+1)(z+2)}\right] = \lim_{z\to -2}\left[\frac{\text{sen z}}{(z+1)}\right] = \frac{-\text{sen}(2)}{(-2+1)} = \text{sen}(1)$$

Por lo tanto, sustituyendo estos resultados en (1), se obtiene :

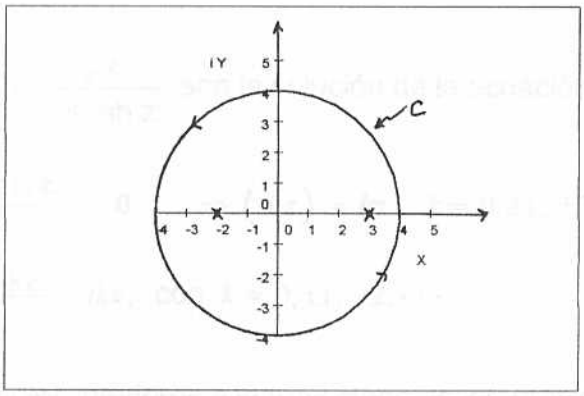
$$I_a = 2\pi i\left[\ -sen(1)+sen(1)\ \right] = 0$$

$$== \text{oo} ==$$

b) Los polos de $f(z) = \dfrac{\text{sen z}}{(z-3)(z+2)^2}$ son :

$$\begin{cases} z=3 & : \text{ Polo de Aislado, interior a C}\\ z=-2 & : \text{ Polo de orden 2 Aislado, interior a C}\end{cases}$$

La trayectoria de integración y la ubicación de dichos polos, se muestra a continuación:



(Curva C y Polos)

Ambos polos son interiores a la curva C, por lo que, aplicando el Teorema del Resíduo en Dominios Multiplemente Conexos, se obtiene :

$$I_b = 2\pi i\left\{\left[\begin{array}{c}\text{Res } f(z)\\ z=3\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}\text{Res } f(z)\\ z=-2\end{array}\right]\right\} \quad \ldots\ldots(2)$$

Cálculo de los Resíduos :

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res } f(z)\\ z=3\end{array}\right] = \lim_{z\to 3}\left[(z-3)\frac{\text{sen z}}{(z-3)(z+2)^2}\right] = \lim_{z\to 3}\left[\frac{\text{sen z}}{(z+2)^2}\right] = \frac{\text{sen}(3)}{25}$$

Adicionalmente,

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res } f(z)\\ z=-2\end{array}\right] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}\left[(z+2)^2\frac{\text{sen z}}{(z+1)(z+2)^2}\right] = \lim_{z\to -2}\frac{d}{dz}\left[\frac{\text{sen z}}{(z+1)}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res } f(z)\\ z=-2\end{array}\right] = \text{sen}(2) - \cos(2)$$

Por lo tanto, sustituyendo estos resultados en (2), se obtiene :

$$I_b = 2\pi i\left[\frac{\text{sen}(3)}{25} + \text{sen}(2) - \cos(2)\right] = 2.6622(\pi i)$$

$$= \text{oo} =$$

Ejemplo 22

Evaluar la integral:

$I = \oint_C \frac{e^{\text{z}}}{\text{senh z}} dz$, siendo C la curva $|z| = 4$, recorrida en sentido positivo.

Solución:

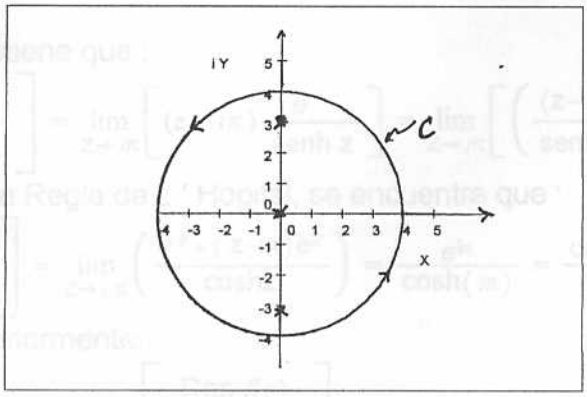
Los polos de $f(z) = \frac{e^{\text{z}}}{\text{senh z}}$ son la solución de la ecuación: $\text{senh } z = 0$

Es decir : $\frac{\text{sen}(i\,\text{z})}{i} = 0 \quad \Rightarrow (i\,z) = k\pi \;,\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

De donde : $z_{\text{k}} = \frac{\text{k}\pi}{i} = ik\pi$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Por lo tanto, los polos interiores a la trayectoria de integración C son: $\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = i\pi \\ z_3 = -i\pi \end{cases}$

La trayectoria de integración y la ubicación de dichos polos, se muestra a continuación:



(Curva C y Polos)

Orden de los polos:

Sea: $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, luego : $Q(z) = \text{senh } z \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q'(z) = \cosh z \\ Q'(z_k) = \cosh z_k \neq 0, \forall k \end{array} \right\}$,

por lo tanto, $z = z_k$ son polos simples. En consecuencia :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Res } f(z) \\ z = 0 \end{array} \right] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{P(z)}{Q'(z)} \right] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{e^z}{\cosh z} \right] = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Res } f(z) \\ z = i\pi \end{array} \right] = \lim_{z \to i\pi} \left[\frac{P(z)}{Q'(z)} \right] = \lim_{z \to i\pi} \left[\frac{e^z}{\cosh z} \right] = \frac{e^{i\pi}}{\cos \pi} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Res } f(z) \\ z = -i\pi \end{array} \right] = \lim_{z \to -i\pi} \left[\frac{P(z)}{Q'(z)} \right] = \lim_{z \to -i\pi} \left[\frac{e^z}{\cosh z} \right] = \frac{e^{-i\pi}}{\cos(i\pi)} = \frac{-1}{\cos \pi} = 1$$

Por lo tanto, el Teorema del Resíduo en Dominios Multiplemente Conexos, establece que :

$$I = 2\pi i \left[1 + 1 + 1 \right] = 6\pi i$$

NOTA:

Obsérvese que los resíduos aquí calculados han sido determinados, por razones prácticas, usando para ello el método antes identificado como Método 3. Sin embargo, como se trata de polos simples, puede también ser evaluados usando el Método identificado como Método 2 . En efecto,

$$\left[\begin{array}{l} \text{Res } f(z) \\ z = 0 \end{array} \right] = \lim_{z \to 0} \left[z \cdot \frac{e^z}{\cosh z} \right] = \lim_{z \to 0} \left[\left(\frac{z}{\text{senhz}} \right) e^z \right] \to \frac{0}{0}$$

Por lo tanto, aplicando la Regla de L ' Hopital, se encuentra que :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Res } f(z) \\ z = 0 \end{array} \right] = \lim_{z \to 0} \left(\frac{e^z + ze^z}{\text{coshz}} \right) = 1, \text{ tal como se obtuvo anteriormente.}$$

En forma análoga se obtiene que :

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res } f(z)\\ z=i\pi\end{array}\right]=\lim_{z\to i\pi}\left[(z-i\pi)\frac{e^z}{\text{senh } z}\right]=\lim_{z\to i\pi}\left[\left(\frac{(z-i\pi)}{\text{senh } z}\right)e^z\right]\to\frac{0}{0}$$

Por lo tanto, aplicando la Regla de L ' Hopital, se encuentra que :

$$\left[\begin{array}{l}\text{Res } f(z)\\ z=i\pi\end{array}\right]=\lim_{z\to i\pi}\left(\frac{e^z+(z-i\pi)e^z}{\text{cosh}z}\right)=\frac{e^{i\pi}}{\cosh(i\pi)}=\frac{\cos\pi+i\,\text{sen}\pi}{\cos\pi}=-1$$

tal como se obtuvo anteriormente.

En forma análoga se obtiene: $\left[\begin{array}{l}\text{Res } f(z)\\ z=-i\pi\end{array}\right]=-1$

9.6.1.2) Ejercicios Propuestos III

1°) Demuestre las siguientes identidades :

a) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\,\text{sen}\,\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$, si $a>b$

b) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta=\frac{\pi}{12}$

c) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(5-3\,\text{sen}\,\theta)^2}=\frac{5\pi}{32}$

d) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{k-\text{sen}\,\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-1}}$, si $k>1$

e) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$, si $a>b$, a y b reales.

f) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{a+b\cos\theta}d\theta=\frac{2\pi}{b}\left[1-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]$, si $a>b$

g) $\int_0^{2\pi}\text{sen}^4\theta\,d\theta=\frac{3\pi}{4}$

h) $\int_0^{2\pi}\cos^n\theta\,d\theta=\begin{cases}\frac{2\pi}{2^n}\frac{n!}{[(\frac{n}{2})!]^2}, & \text{para } n\geq 0 \text{ y par}\\ 0, & \text{para } n \text{ impar}\end{cases}$

i) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\,\text{sen}\,\theta)^2}=\frac{5\pi a}{\left(\sqrt{a^2-b^2}\right)^3}$, para : $a>b\geq 0$

j) $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\text{sen}^2\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a(a+1)}}$, para: $a>0$

k) $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta=\frac{2\pi}{a(a^2-1)}$, para a real, $|a|>1$

l) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta=\frac{2\pi a}{(a^2-1)}$, para a real, $|a|<1$

m) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cosh a + \cos\theta} d\theta = \frac{2\pi(-1)^n e^{-na}}{\operatorname{senh} a}$, para $n \geq 0$ y entero, y $a > 0$.

n) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta} d\theta = \frac{2\pi}{ab}$, para a, b reales, $ab > 0$

2°) Evalúe las siguientes integrales :

a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$ *b)* $\int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{5 - 4\cos\theta} d\theta$ *d)* $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5\theta \operatorname{sen}(5\theta) d\theta$

e) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{5 - 4\operatorname{sen}\theta} d\theta$ *f)* $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos\theta} d\theta$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5 + 4\cos^2\theta} d\theta$

$= oo =$

9.6.2) CASO 2: Integrales Impropias

Se entiende por integrales impropias, aquellas en las cuales uno o ambos límites de integración son infinitos, es decir, cualquier expresión de la forma :

$$\int_k^{\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

donde $f(x)$ es una función real de x, y k es una constante real.

* Las integrales de las dos primeras clases aquí señaladas se definen en términos de integrales propias (suma de Riemann), de la siguiente manera:

$$\int_k^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_k^R f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{k} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{k} f(x)dx$$

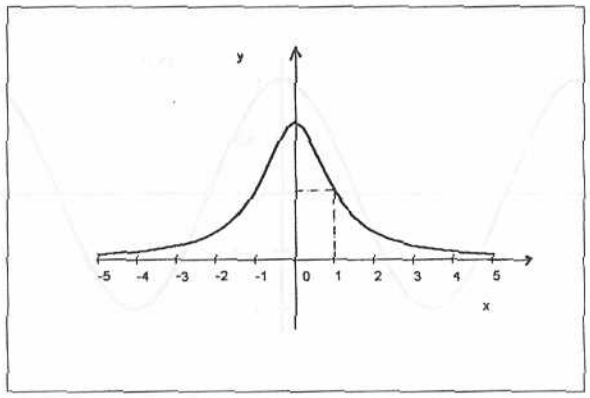
siempre y cuando, ambos límites axistan.

No siempre existen estas integrales impropias: Así, por ejemplo:

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \arctan x \Big|_1^{\infty} = \lim_{R\to\infty} [\arctan R - \arctan 1] \Rightarrow$

$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\pi \Rightarrow Existe.$

Obsérvese que el área bajo la curva $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ decae rápidamente a cero, por lo que dicha área es finita.

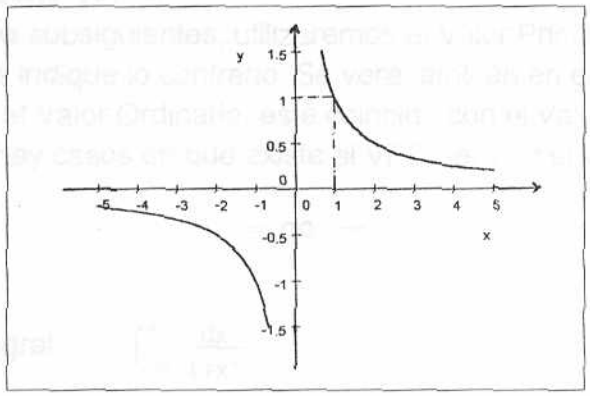


Gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x}dx = \lim_{R\to\infty} (\ln x)\Big|_1^R = \lim_{R\to\infty} (\ln R - \ln 1)\Big|_1^{\infty} = \lim_{R\to\infty} \ln R$

por lo que dicha integral no existe.

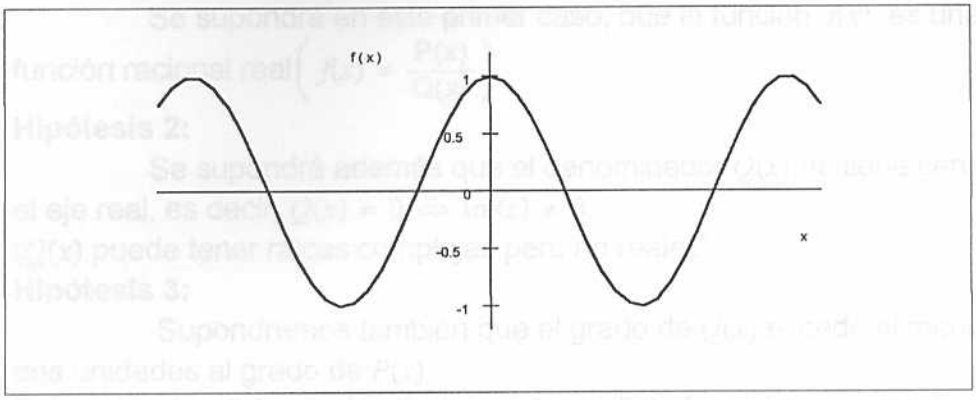
Obsérvese que el área bajo la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ no decae rápidamente a cero, por lo que dicha área es infinita



Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $\int_0^{\infty} \cos x\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \cos x dx = \lim_{R\to\infty} (\text{ senx})\Big|_0^R = \lim_{R\to\infty} \text{ sen } R \Rightarrow \textit{No existe}$

En este caso, la representación gráfica de $f(x) = \cos x$ muestra que, a lo largo del eje x, en el intervalo $[0,\infty)$, el área total bajo la curva no tiene límite:



$$(f(x) = \cos x)$$

* Una integral impropia en donde ambos límites de integración son infinitos, puede definirse de dos formas distintas:

a) Una de ellas es : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} f(x)dx,$

mejor conocida como: **" Valor Ordinario "** de la Integral Impropia. En este caso, ambos límites deben existir independientemente.

b) Una segunda forma es : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$

Este valor de la integral impropia, si existe, se llama : **"Valor Principal de Cauchy (VPC) ".**

En los cálculos subsiguientes, utilizaremos el Valor Principal de Cauchy, a menos que se indique lo contrario. Se verá también en el siguiente ejemplo que, si existe el Valor Ordinario, éste coincide con el Valor Principal de Cauchy; no obstante, hay casos en que existe el VPC pero no el Valor Ordinario.

$$= oo =$$

Ejemplo 23

Evaluar la integral : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

Solución:

Como $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es una función par, se tiene que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{R\to\infty} \left[\arctan x \Big|_{0}^{R} \right] = 2(\tfrac{\pi}{2} - 0) = \pi$$

9.6.2.1) Cálculo del Valor Principal de Cauchy: VPC $= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$

Para el cálculo de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ utilizaremos el Teorema del Resíduo, por lo que pueden presentarse varios casos. A saber :

CASO 1:

Este primer caso se circunscribe a aquellas funciones $f(x)$ que cumplen las siguientes tres (3) hipótesis :

Hipótesis 1:

Se supondrá en este primer caso, que la función $f(x)$ es una función racional real $\left(f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \right)$.

Hipótesis 2:

Se supondrá además que el denominador $Q(x)$ no tiene ceros en el eje real, es decir, $Q(x) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) \neq 0$.
($Q(x)$ puede tener raices complejas pero no reales).

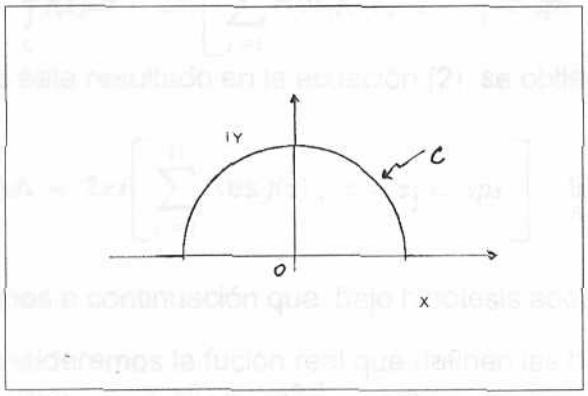
Hipótesis 3:

Supondremos también que el grado de $Q(x)$ excede al menos en dos unidades al grado de $P(x)$.

Bajo estas condiciones, los límites antes señalados existen, como se verá a continuación.

Demostración

Para el cálculo de $VPC = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx$ consideremos la integral de contorno: $\oint_C f(z)dz$ alrededor de una trayectoria C , donde C es el arco de semicircunferencia S, recorrido en sentido positivo, seguido del segmento que se extiende desde el Punto $(-R,0)$ hasta $(R,0.)$, como se muestra en la figura 9.8



(Figura 9.8)

El contorno C así definido consta del arco S, recorrido en sentido positivo, más el segmento rectilíneo que va de $(-R+i0)$ a $(R+i0)$.

Por lo tanto :

$$\oint_C f(z)dz = \int_S f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(z)dz \quad \ldots\ldots (1)$$

Pero, sobre el segmento $(-R,0)$ a $(R,0)$ se tiene que $\text{Im}[\,z\,] = y = 0$, por lo que : $\left\{ \begin{array}{l} z = x \\ f(z) = f(x) \\ dz = dx \end{array} \right\}$ y, en consecuencia : $\int_{-R}^{R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx$

por lo que, sustituyendo en (1), se obtiene:

$$\oint_C f(z)dz = \int_S f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

de donde : $$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \oint_C f(z)dz - \int_S f(z)dz \qquad \ldots\ldots (2)$$

Es evidente que, a objeto de transformar la integral del lado izquierdo de (2) en la integral buscada, es necesario tomar el límite cuando $R \to \infty$, a ambos lados de dicha expresión, obteniéndose:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = VPC = \lim_{R\to\infty} \left[\oint_C f(z)dz - \int_S f(z)dz \right]$$

donde el contorno de integración C consta del segmento de recta: $y = 0, -R \le x \le R$ y la semicircunferencia : $|z| = R, 0 \le \arg z \le \pi$.

A objeto de conservar la igualdad presente en la ecuación (2), es necesario extender las integrales complejas del segundo miembro de dicha expresión, a todo el semiplano superior, lo cual se logra eligiendo R lo suficientemente grande, con lo cual el contorno C encierra todos los polos de $f(z)$ ubicados en el semiplano superior, que identificaremos con las siglas "sps".
Entonces, por el Teorema del Residuo se tiene que :

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{n} \text{Res}\, f(z)\ ,\ z = z_j \subset sps \right]$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2), se obtiene :

$$VPC = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \left[\sum_{j=1}^{n} \text{Res}\, f(z)\ ,\ z = z_j \subset sps \right] - \lim_{R\to\infty} \int_S f(z)dz \qquad \ldots. (3)$$

Demostraremos a continuación que, bajo hipótesis adecuadas : $\lim_{R\to\infty} \int_S f(z)dz = 0$

Para ello, consideremos la fución real que definen las hipótesis 1 y 2 :

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}, \qquad donde : m > n$$

Para evaluar esta integral, aplicaremos la Desigualdad ML expuesta anteriormente en el Capítulo I. Así obtenemos que :

$\lim_{R\to\infty} \int_S f(z)dz \le \lim_{R\to\infty} (ML)$, donde : $|z| = R$ por definición de Integral de Lïnea.

Además :

$$\begin{cases} M = \lim_{R\to\infty} |f(z)| = \lim_{z\to\infty} |f(z)| = \lim_{z\to\infty} \left| \frac{a_n z^n}{b_m z^m} \right| = \lim_{z\to\infty} \left| \frac{a_n}{b_m} \right| \frac{1}{|z^{m-n}|} = \lim_{z\to\infty} \left| \frac{a_n}{b_m} \right| \frac{1}{|z|^{m-n}} \\ L = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} 2\pi R = \pi |z| \end{cases}$$

En consecuencia, tomando el límite cuando $R \to \infty$, se obtiene que

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_S f(z)dz \right| \le ML \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{R\to\infty} \left| \frac{a_n}{b_m} \right| \frac{1}{|z|^{m-n}} \left(\pi |z|\right) = \lim_{R\to\infty} \left| \frac{a_n}{b_m} \right| \frac{\pi}{|z|^{m-n-1}}$$

Por lo tanto :

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_S f(z)dz \right| = 0 \text{ , si y sólo si : } m-n-1 \ge 1,$$

es decir , $\lim_{R\to\infty} \left| \int_S f(z)dz \right| = 0$ para : $m-n \ge 2$ $(Hipótesis\ 3)$

En resumen, se obtiene el importante resultado:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \left[\begin{array}{l} \text{Res } f(z) \\ z = z_j \subset s.p.s. \end{array} \right]$$

donde el contorno de integración C consta del segmento de recta :

$$y = 0, -R \le x \le R$$

seguido de la semicircunferencia : $|z| = R, 0 \le \arg z \le \pi$. Ello que significa que C contiene todos los polos contenidos en el semiplano superior (s.p.s.).

En resumen :

$$\boxed{VPC = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \left[\begin{array}{l} \text{Res } f(z) \\ z = z_j \subset s.p.s. \end{array} \right]}$$

siempre que : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\quad Q(x) \ne 0 \ \ \forall x \in R, \quad m-n \ge 2$

Obviamente, $Q(x)$ puede tener raices complejas, pero no reales.

$$= \text{oo} =$$

9.6.2.2) Ejemplos Resueltos VII

Ejemplo 24

Demuestre que : $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$

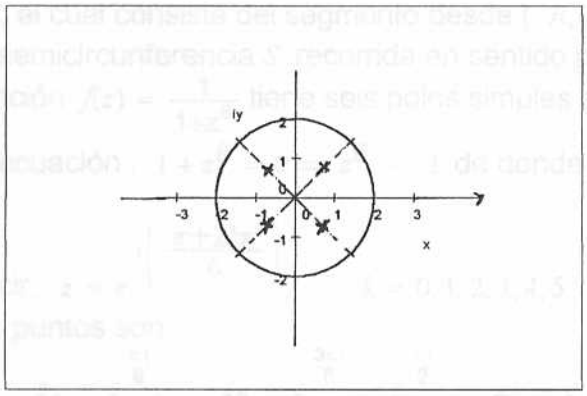
Solución:

Consideremos $\oint_C \frac{dz}{1+z^4}$ donde C es el contorno cerrado de la figura, el cual consiste del segmento desde $(-R,0)$ a $(R,0)$, más la semicircunferencia S recorrida en sentido positivo.

La función : $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ tiene cuatro polos simples en la solución de la ecuación : $1+z^4 = 0$. Tales puntos son :

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}, \quad z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad z_3 = e^{-\frac{\pi i}{4}}, \quad z_4 = e^{-\frac{3\pi i}{4}}$$

Sólo los dos primeros de estos puntos se encuentran en el semiplano superior (sps), como lo ilustra la siguiente figura:



(Ubicación de los polos de $f(z)$)

Por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i\left\{\left[\text{Res}\, f(z),\ z = z_1\right] + \left[\text{Res}\, f(z),\ z = z_2\right]\right\} \quad \ldots(1)$$

Cálculo de : $\left[\text{Res}\, f(z),\ z = z_1\right]$

$$\text{Res}\, f(z_1) = \frac{P(x)}{Q'(x)}\bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{4\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)^3} = \frac{1}{4}e^{-\left(\frac{3\pi i}{4}\right)} = -\frac{1}{4}e^{\left(\frac{\pi i}{4}\right)}$$

Cálculo de : $\left[\text{Res}\, f(z),\ z = z_2\right]$

$$\text{Res}\, f(z_2) = \frac{P(x)}{Q'(x)}\bigg|_{z=z_2} = \frac{1}{4z^3}\bigg|_{z=z_2} = \frac{1}{4\left(e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)^3} = \frac{1}{4}e^{-\left(\frac{9\pi i}{4}\right)} = \frac{1}{4}e^{-\left(\frac{\pi i}{4}\right)}$$

Sustituyendo en la expresión (1), se obtiene :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i\left(\frac{1}{4}\right)\left[-e^{\left(\frac{\pi i}{4}\right)} + e^{-\left(\frac{\pi i}{4}\right)}\right] = -\pi i\left(\frac{1}{2}\right)\left[e^{\left(\frac{\pi i}{4}\right)} - e^{-\left(\frac{\pi i}{4}\right)}\right]$$

De donde :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = -\pi(i)^2\left[\frac{e^{\left(\frac{\pi i}{4}\right)} - e^{-\left(\frac{\pi i}{4}\right)}}{2i}\right] = \pi\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}$$

tal como se quería demostrar.

$$== \text{oo} ==$$

Ejemplo 25

Demuestre que : $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$

Solución:

Consideremos $\oint_C \frac{dz}{1+z^6}$ donde C es el contorno cerrado de la figura, el cual consiste del segmento desde $(-R,0)$ a $(R,0)$ seguido de la semicircunferencia S recorrida en sentido positivo.

La función $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ tiene seis polos simples en la solución de la ecuación : $1+z^6 = 0 \Rightarrow z^6 = -1$, de donde : $z^6 = e^{i[\pi+2k\pi]}$

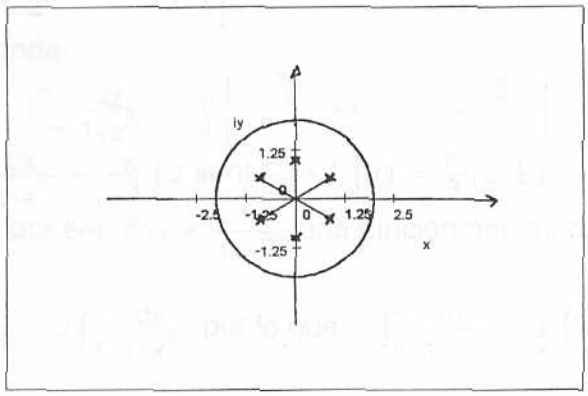
es decir, $z = e^{i\left[\frac{\pi+2k\pi}{6}\right]}$, $\quad k = 0,1,2,3,4,5$

Tales puntos son :

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{6}}, \quad z_2 = e^{\frac{3\pi i}{6}} = e^{\frac{\pi i}{2}} \quad z_3 = e^{\frac{5\pi i}{6}},$$

$$z_4 = e^{\frac{7\pi i}{6}}, \quad z_5 = e^{\frac{9\pi i}{6}} = e^{\frac{3\pi i}{2}}, \quad z_6 = e^{\frac{11\pi i}{6}}$$

Sólo los tres primeros de estos puntos se encuentran en el semiplano superior (sps), como lo ilustra la siguiente figura:



(Ubicación de los polos de $f(z)$)

Por lo tanto:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^{3} \left[\text{Res } f(z),\ z = z_j \right] \right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Cálculo de : $\left[\text{Res } f(z),\ z = z_1 \right]$

Utilizando entonces la Regla de L´Hopital´, se encuentra que :

$$\text{Res } f(z_1) = \lim_{z \to z_1} \left[(z - z_1) \frac{P(x)}{Q(x)} \right] = \lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{6}}} \left[\left(z - e^{\frac{\pi i}{6}} \right) \frac{1}{\left(1+z^6\right)} \right] \Rightarrow$$

$$\text{Res } f(z_1) = \lim_{z \to e^{\frac{\pi i}{6}}} \left[\frac{1}{6z^5} \right] = \frac{1}{6} e^{-\frac{5\pi i}{6}}$$

Cálculo de : $\left[\text{Res } f(z),\ z = z_2 \right]$

$$\text{Res}\, f(z_2) = \lim_{z\to z_2}\left[(z-z_2)\frac{P(x)}{Q(x)} \right] = \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{6}}}\left[\left(z-e^{\frac{\pi i}{2}}\right)\frac{1}{(1+z^6)} \right] \Rightarrow$$

$$\text{Res}\, f(z_1) = \lim_{z\to e^{\frac{3\pi i}{6}}}\left[\frac{1}{6z^5} \right] = \frac{1}{6}e^{-\frac{15\pi i}{6}}$$

Cálculo de : $\text{Res}\, f(z)$, $z = z_3$

$$\text{Res}\, f(z_3) = \lim_{z\to z_3}\left[(z-z_2)\frac{P(x)}{Q(x)} \right] = \lim_{z\to e^{\frac{5\pi i}{6}}}\left[\left(z-e^{\frac{-5\pi i}{6}}\right)\frac{1}{(1+z^6)} \right] \Rightarrow$$

$$\text{Res}\, f(z_1) = \lim_{z\to e^{\frac{5\pi i}{6}}}\left[\frac{1}{6z^5} \right] = \frac{1}{6}e^{-\frac{25\pi i}{6}}$$

Sustituyendo en la expresión (1), se obtiene :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^6} = 2\pi i\left(\frac{1}{6}\right)\left[e^{-\left(\frac{5\pi i}{6}\right)} + e^{-\left(\frac{15\pi i}{6}\right)} + e^{-\left(\frac{25\pi i}{6}\right)} \right] \Rightarrow$$

De donde :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^6} = \frac{\pi i}{3}\left[e^{\left(\frac{7\pi i}{6}\right)} + e^{-\left(\frac{\pi i}{2}\right)} + e^{-\left(\frac{\pi i}{6}\right)} \right] \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6} = -\frac{\pi i}{3}\left[2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)+1\right](i) = \frac{\pi}{3}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)+1\right] = \frac{2\pi}{3}$$

Pero, por ser $f(x) = \dfrac{1}{1+x^6}$ una función par, se cumple que :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6} = 2\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6} \text{ por lo que : } \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi$$

tal como se quería demostrar.

== oo ==

Ejemplo 26

Demuestre que : $I = \int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \dfrac{7\pi}{50}$

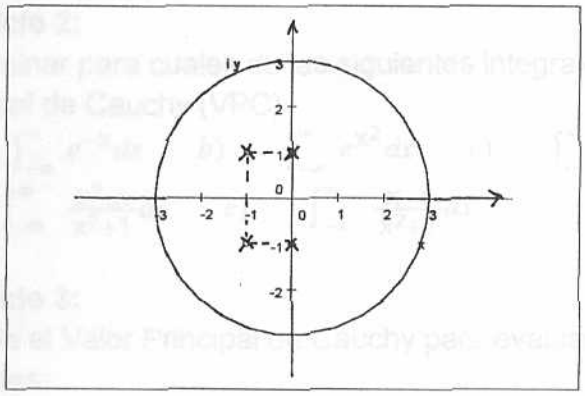
Solución:

La función $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ *tiene cuatro polos en la solución de las*

ecuaciónes : $\begin{cases} z^2+1=0 \\ z^2+2z+2=0 \end{cases}$

Tales polos son :
$$\begin{cases} z_1 = -i\ , & \text{Polo de segundo orden, en el spi.} \\ z_2 = i\ , & \text{Polo de segundo orden, en el sps.} \\ z_3 = -1+i\ , & \text{Polo de primer orden, en el sps.} \\ z_4 = -1-i\ , & \text{Polo de primer orden, en el spi.} \end{cases}$$

Tal situación se ilustra en la siguiente figura:



(Ubicación de los Polos)

Luego, sólo los polos z_2 y z_3 se encuentran en el semiplano superior (sps).
Por lo tanto:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = 2\pi i \left[\sum_{j=2}^{3} \text{Res } f(z),\ z = z_j \right] \quad \ldots \quad (1)$$

Cálculo de : $\left[\text{Res } f(z),\ z = z_2 = i \right]$ $\quad (Orden\ n = 2)$

$$\text{Res } f(z_2) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to z_2} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+2z+2)} \right] \Rightarrow$$

$$\text{Res } f(z_2) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)} \right] = \frac{9i-12}{100} \Rightarrow$$

Cálculo de : $\left[\text{Res } f(z),\ z = z_3 = -1+i \right]$ $\quad (Orden\ n = 1)$

$$\text{Res } f(z_3) = \lim_{z \to z_3} \left[(z-z_3) \frac{P(x)}{Q(x)} \right] = \lim_{z \to z_3} \left[(z-z_3) \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-z_3)(z-z_4)} \right] \Rightarrow$$

$$\text{Res } f(z_3) = \lim_{z \to -1+i} \left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1+i)} \right] = \frac{3-4i}{25}$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión (1), se obtiene :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = 2\pi i \left[\frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25} \right] = \frac{7\pi}{50}$$

9.6.2.3) Ejercicios Propuestos IV

Ejercicio 1

Determinar cuales de las siguientes integrales existen

a) $\int_0^{\infty} e^{-2x}dx$ *b)* $\int_0^{\infty} e^{2x}dx$ *c)* $\int_0^{\infty} xe^{-2x}dx$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1}dx$

Ejercicio 2:

Determinar para cuales de las siguientes integrales, existe el Valor Principal de Cauchy (VPC) :

a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}dx$ *b)* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}dx$ *c)* $\int_0^{\infty} xe^{-2x}dx$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1}dx$ *e)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^2+1}dx$

Ejercicio 3:

Emplee el Valor Principal de Cauchy para evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$ *b)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 - x^2}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}dx$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}$ *b)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+x+1)}{(x^4+x^2+1)}dx$

Ejercicio 4:

Demuestre que , cuando a y b son positivos,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2ab}\frac{1}{(a+b)},$$

tanto para $a = b$ como si $a \neq b$

Ejercicio 5:

Demuestre que , $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{100}+1} = \frac{\left(\frac{\pi}{100}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{100}\right)}$

Ejercicio 6:

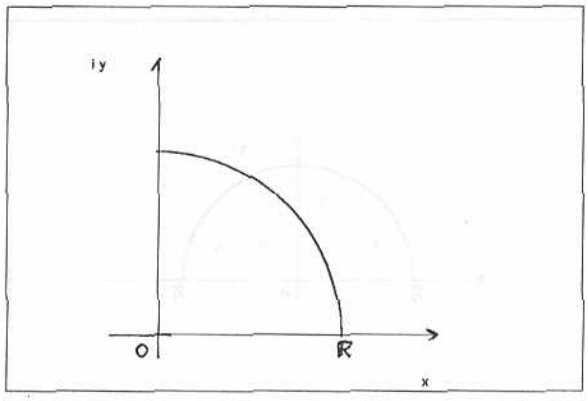
Demuestre que : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\cosh u} = \pi$

(*Sugerencia : Haga el cambio de variable : $x = e^u$ y aplique luego el cáculo de Residuos*).

Ejercicio 7:

a) Explíque a qué se debe que no podemos evaluar la integral : $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+1}dx$ por medio de un contorno semicircular en el semiplano superior(sps) o en el semiplano inferior(spi).

b) Considere el contorno en forma de cuadrante que aparece en la figura siguiente, y sea C_1 el arco de radio $R > 1$.



Demuestre que :

$$\int_0^R \frac{x}{x^4+1}dx - \int_R^0 \frac{y}{y^4+1}dx + \int_{C_1} \frac{z}{z^4+1}dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n}\left[\operatorname{Res}\left(\frac{z}{z^4+1}\right), z_j \in \textit{primer cuadrante}\right]$$

c) Tome el límite $R \to \infty$ y demuestre que : $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{\pi}{4}$

== oo ==

9.6.3) CASO 3: Integrales de la forma : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iax}dx$

Supongamos que la función $f(z)$ es Meromorfa en todo el semiplano superior (sps) y supongamos además que $f(z)$ es una función racional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios primos entre si, y $Q(z)$ no tiene ceros reales, (es decir, $f(z)$ no tiene polos sobre el eje real).

Si el grado de $Q(z)$ excede al de $P(z)$ en al menos 2 unidades y $a > 0$, entonces:

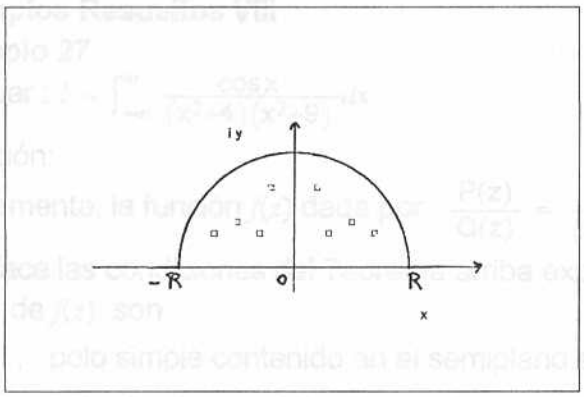
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left[f(z)e^{iaz}\ ,\ z_j \in sps\right]$$

z_j son los polos de $f(z)e^{iaz}$ contenidos en el semi plano superior.

NOTA: Obsérvese que $f(z)$ y $f(z)e^{iaz}$ tiene los mismos polos.

Demostración:

Sea C_R la mitad superior de la circunferencia : $|z| = R$ y tomemos R suficientemente grande, digamos, $R > R_0$ como para que todos los polos z_0 de $f(x)\, e^{iax}$ que estén localizados en el semiplano superior, estén dentro de dicha semicircunferencia, tal como lo ilustra la siguiente figura:



Por el Teorema del Resíduo, tenemos:

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, e^{iax}dx + \int_{S} f(z)\, e^{iaz}dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}\left[f(z)e^{iaz},\ z_j \in sps\right] \qquad (1)$$

Representemos por " $d \geq 2$" la diferencia entre el grado de $Q(x)$ y el grado de $P(x)$. Bajo estas hipótesis, las condiciones del Teorema expuesto en el llamado **CASO 1** anterior, se satisfacen. De aquí que :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S} f(z)\, e^{iaz}dz = 0$$

Por lo tanto, tomando límite para $R \to \infty$ en la ecuación (1), se obtiene:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}\left[f(z)e^{iaz},\ z_j \in sps\right] \qquad \ldots(2)$$

OBSERVACIONES:

1º) Obsérvese que los polos de $f(z)\, e^{iaz}$ ubicados en el semiplano superiror, son precisamente las raices de $Q(z) = 0$ en dicha región.

2º) Como : $e^{iaz} = \cos ax + i \text{ sen } ax$, la expresión (2) , tomando parte real y parte imagianaria, permite evaluar directamente, integrales de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)dx \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \text{sen}\,(ax)dx$$

En efecto :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{iax}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}(ax)dx$$

Igulando con a expresión (2), se obtiene :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)dx = \text{Re}\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\left[\begin{array}{c} f(z)e^{iaz} \\ z_j \in sps \end{array}\right]\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}(ax)dx = \text{Im}\left\{2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res\left[\begin{array}{c} f(z)e^{iaz} \\ z_j \in sps \end{array}\right]\right\}$$

$$= \text{oo} =$$

9.6.3.1) Ejemplos Resueltos VIII

Ejemplo 27

Evaluar : $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx$

Solución:

Obviamente, la función $f(z)$ dada por : $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}$

satisface las condiciones del Teorema arriba expuesto. Además, los polos de $f(z)$ son:

$z_1 = 2i$, polo simple contenido en el semiplano superior (sps)

$z_1 = -2i$, polo simple no contenido en el semiplano superio

$z_1 = 3i$, polo simple contenido en el semiplano superior (sps)

$z_1 = -3i$, polo simple no contenido en el semiplano superior

Por lo tanto, tomando $a = 1$ en la exponencial compleja e^{iax} ,se obtiene

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = 2\pi i \, [\text{Res}(2i) + \text{Res}(3i)] \quad ..(1)$$

Cálculo de los Resíduos

Como los polos de $f(z)$ son simples, se obtiene :

a) $$\text{Res}\left[f(z)\, e^{iz}, 2i\right] = \lim_{z\to 2i} \left[(z-2i) f(z)\, e^{iz}\right] = \lim_{z\to 2i} \left[\frac{e^{iz}}{(x+2i)(x^2+9)}\right] \Rightarrow$$

$$\text{Res}\left[f(z)\, e^{iz}, 2i\right] = \frac{e^{-2}}{20\,i}$$

b) $$\text{Res}\left[f(z)\, e^{iz}, 3i\right] = \lim_{z\to 2i} \left[(z-3i) f(z)\, e^{iz}\right] = \lim_{z\to 2i} \left[\frac{e^{iz}}{(x^2+4)(x+3i)}\right] \Rightarrow$$

$$\text{Res}\left[f(z)\, e^{iz}, 3i\right] = \frac{e^{-3}}{30\,i}$$

Sustituyendo en (1):

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \,\text{sen}x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = 2\pi i \left[\frac{e^{-2}}{20i} + \frac{e^{-3}}{30i}\right] \Rightarrow$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \,\text{sen}x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{5}\left[\frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^{-3}}{3}\right]$$

Tomando ahora la parte real de esta última expresión, se obtiene:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = \frac{\pi}{5}\left[\frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^{-3}}{3}\right]$$

y por añadidura:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}x}{(x^2+4)(x^2+9)} dx = 0$$

== oo ==

9.6.3.2) Ejercicios Propuestos V

Demuestre que :

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{\pi}{3}$ *b)* $\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{\pi}{6e^2}(e-1)$

c) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^4+1)}dx = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$ *d)* $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^6+64)} = \frac{\pi}{96}$

e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+2x+1}{(x^4+8x^2+16)}dx = \frac{5\pi}{16}$ *f)* $\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{(x^2+1)} = \frac{\pi}{4}\left(1-5e^{-4}\right)$

g) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}dx = \frac{\pi}{16a^3}, a>0$

i) $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)\,e^{-ma}$, $a>0,\ m\geq 0$

j) $\int_{0}^{\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^4)^2} = \frac{3\sqrt{2}\,\pi}{16\,a}$, $a>0$

k) Evalúe las siguientes integrales :

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+4)}\,dx$ 2) $\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} 3x}{(x^2+4)^2}\,dx$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+4x+1)}\,dx$ 4) $\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+1}\,dx$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4x+1)^2}\,dx$ 6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4+x^2+1}\,dx$

7) $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+x^2+1}\,dx$ 6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\left[(x-1)^2+1\right]^2}\,dx$

$==$ oo $==$

9.6.4) CASO 4: Integrales de la forma : $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{iax}dx,\ \operatorname{Im}(z_k)\neq 0$

Intentemos ahora extender el Teorema anterior al caso de funciones $f(z)$ que, además de ser meromorfas en el semiplano superior, que el grado del denominador $Q(x)$ sea mayor que el grado del numerador $P(x)$ y que además, tengan **polos simples** sobre el eje x.

Bajo tales hipótesis,

$$V.P.C\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{n=1}^{k}\left[\operatorname{Res} f(z),\ z=z_n\right]+\pi i\sum_{j=1}^{s}\left[\operatorname{Res} f(z),\ z=z_j\right]$$

donde:

$V.P.C.$ es el Valor Principal de Cauchy

z_n , $(n=0,1,2,\cdots,k)$, son los polos de $f(z)$ en el semiplano superior (sps).

z_j , $(j=0,1,2,\cdots,s)$, son los polos simples de $f(z)$ sobre el eje real.

Demostración:

La demostración del presente Teorema, requiere del siguiente Lema:

Sea:

S_r el arco de circunferencia centrado en "a" y de radio "r", es decir,

$S_r : z = a + re^{i\theta} \quad , (\theta_1 \le \theta \le \theta_2)$

Si la función $f(z)$ tiene un polo simple en $z = a$, entonces:

$$\lim_{r \to 0} \int_{S_r} f(z)dz = i\,(\theta_2 - \theta_1)\left[\text{Res}\, f(z),\ z = a\right]$$

Para demostrar este Lema, consideremos lo siguiente:

Como la función $f(z)$ tiene un polo simple en $z = a$, su serie de Laurent expandida alrededor de "a", será:

$$f(z) = \frac{[\text{Res f(z), z=a}]}{\text{z–a}} + \lambda(z)$$

donde $\lambda(z)$ es analítica en $z = a$.

Integrando tèrmino a término, se obtiene:

$$\int_{S_r} f(z)dz = \left[\text{Res}\, f(z),\ z = a\right] \cdot \int_{S_r} \frac{dz}{z-a} + \int_{S_r} \lambda(z)dz \qquad \ldots(1)$$

Como $\lambda(z)$ es contínua en $z = a$, podemos elegir "r" lo suficientemente pequeño, tal que dado un $\xi > 0$, se verifica que.

$$\left|\, \lambda(z) \right| < \left|\, \lambda(a) \right| + \xi, \qquad \forall z \text{ sobre } S_r$$

Por lo tanto, como $r \to 0$, se verifica que:

$$\left| \int_{Sr} \lambda(z)dz \right| \le \int_{Sr} \left|\, \lambda(z) \right| \left|\, dz \right| < \left[\left|\, \lambda(a) \right| + \xi \right] \int_{Sr} \left|\, dz \right| \qquad \Rightarrow$$

$$\left| \int_{Sr} \lambda(z)dz \right| \le \left[\left|\, \lambda(a) \right| + \xi \right](\theta_2 - \theta_1)r \to 0 \qquad \ldots.(2)$$

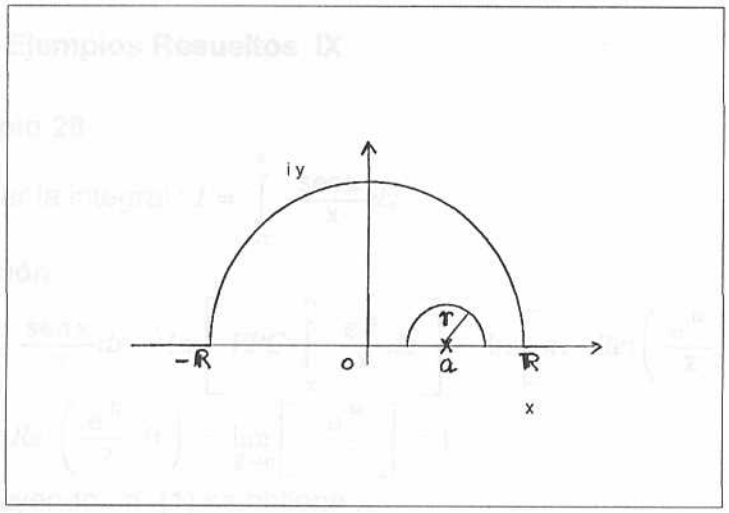
De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$\boxed{\lim_{r \to 0} \int_{Sr} f(z)dz = i\,(\theta_2 - \theta_1)\left[\text{Res}\, f(z),\ z = a\right]}$$

lo que establece el lema bajo estudio.

Consideremos ahora lo que ocurre en el Teorema analizado, cuando a la función $f(z)$ se le permite tener un polo simple en $z = a$ sobre el eje real.

Sea en este caso C el contorno definido por la semicircunferencia $C_R : z = R\,e^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi$ más el intervalo: $-R \le x \le a - r$ seguido de la semicircunferencia $C_r : z = a + re^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi$, y el segmento rectilíneo: $a + r \le x \le R$.. Dicho contorno se muestra en la siguiente figura:



(Contorno C)

Tomando R suficientemente grande y r suficientemente pequeña, podemos hacer que el contorno C encierre todos los polos de $f(z)$ ubicados en el semiplano superior (sps). Entonces, por el Teorema del Resíduo tenemos que :

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{a-r} f(x)dx + \int_{C_r} f(z)dz + \int_{a+r}^{R} f(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \left[\text{Res}\, f(z),\ z = z_n \right] \qquad \ldots(3)$$

Pero:

$\lim_{R\to\infty} \oint_C f(z)dz = 0$, tal como ya se probó en el caso del Teoerma del Resíduo

$V.P.C. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0^+}} \left[\int_{-R}^{a-r} f(x)dx + \int_{a+r}^{R} f(x)dx \right]$ por definición de V.P.C.

$\lim_{r\to 0} \oint_C f(z)dz = -i(\pi - 0)\left[\text{Res}\, f(z),\ z = a \right] = -i\pi \left[\text{Res}\, f(z),\ z = a \right]$

Utilizando estas tres últimas igualdades, se observa que , cuando $R \to \infty$ y $r \to 0$, la ecuación (3) se transforma en :

$$V.P.C. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \left[\text{Res}\, f(z),\ z = z_n \right] + \pi i \sum_{j=1}^{s} \left[\text{Res}\, f(z),\ z = a \right]$$

Aplicando el resultado arriba obtenido a cada polo z_j , se obtiene:

$$V.P.C. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{n=1}^{k} \left[\text{Res} f(z),\ z = z_n \right] + \pi i \sum_{j=1}^{s} \left[\text{Res}\, f(z),\ z = z_j \right]$$

9.6.4.1) Ejemplos Resueltos IX

Ejemplo 28

Evaluar la integral : $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$

Solución:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \operatorname{Im}\left[VPC \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right] = \operatorname{Im}\left[\pi i \cdot Res\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) \right] \quad \ldots (1)$$

Pero : $Res\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) = \lim_{z \to 0} \left[z \frac{e^{iz}}{z} \right] = 1$

Sustituyendo en (1) se obtiene :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \operatorname{Im}[\, \pi i \,] = \pi$$

$$== \text{oo} ==$$

Ejemplo 29

Evaluar la integral : $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx$

Solución:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}$$

La función : $\frac{1 - e^{i2z}}{2z^2}$ tiene un polo simple en $z = 0$, por lo que el Teorema anterior nos dice que:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \operatorname{Re}\left[VPC \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{i2x}}{2x^2} dx \right] = \operatorname{Re}\left[\pi i \cdot Res\left(\frac{1 - e^{i2z}}{2z^2}, 0 \right) \right] \quad \ldots (1)$$

Pero :

$$Res\left(\frac{1 - e^{i2z}}{2z^2}, 0 \right) = \lim_{z \to 0} \left[z \frac{1 - e^{i2z}}{2z^2} \right] = \lim_{z \to 0} \left[\frac{1 - e^{i2z}}{2z} \right] = \lim_{z \to 0} \left(\frac{-i2e^{i2z}}{2} \right) = -i$$

Sustituyendo en (1) se obtiene :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \operatorname{Re}[\, \pi i(\, -i) \,] = \pi$$

$$== \text{oo} ==$$

Ejemplo 30

Evaluar la integral : $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^3 x}{x^3}\, dx$

Solución:

Aplicando la Fórmula de De Moivre, se obtiene:

$$\text{sen}^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x}\right) \Rightarrow$$

$$\text{sen}^3 x = -\frac{1}{8i}\left(2i\,\text{sen}3x - 3(2i)\,\text{sen}x\right) = \frac{3}{4}\text{sen}\,x - \frac{1}{4}\text{sen}\,3x$$

Por lo tanto :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^3 x}{x^3} dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(3\,\text{sen}\,x - \text{sen}3x)}{x^3} dx$$

Observémos ahora que : $3\,\text{sen}\,x - \text{sen}3x = \text{Im}\left[3e^{ix} - e^{i3x} - 2\right]$

por lo que, la función : $\frac{3e^{iz} - e^{i3z} - 2}{z^3}$ tiene un polo simple en $z = 0$.

En consecuencia :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^3 x}{x^3} dx = \tfrac{1}{4}\text{Im}\left[\, VPC \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(3\,\text{sen}\,x - \text{sen}3x)}{x^3} dx \right] \Rightarrow$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^3 x}{x^3} dx = \tfrac{1}{4}\text{Im}\left[\, \pi i \cdot Res\left(\frac{3e^{iz} - e^{i3z} - 2}{z^3}, 0\right)\right] \quad \ldots(1)$$

Pero : $Res\left(\frac{3e^{iz} - e^{i3z} - 2}{z^3}, 0\right) = \lim_{z\to 0}\left[\, z\,\frac{3e^{iz} - e^{i3z} - 2}{z^3}\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{3e^{iz} - e^{i3z} - 2}{z^2}\right]$

Aplicando ahora la Regla de L´Hopital, se obtiene .

$$Res\left(\frac{3e^{iz} - e^{i3z} - 2}{z^3}, 0\right) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{3e^{iz} - e^{i3z} - 2}{z^2}\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{3ie^{iz} - 3ie^{i3z}}{2z}\right] = 3\lim_{z\to 0}\left[\frac{-e^{iz} + 3e^{i3z}}{2}\right]$$

$$Res\left(\frac{3e^{iz} - e^{i3z} - 2}{z^3}, 0\right) = 3\frac{(-1+3)}{2} = 3$$

Sustituyendo en (1), tenemos finalmente que .

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^3 x}{x^3}\, dx = \frac{1}{4}\text{Im}\left[\, \pi i \cdot 3\,\right] = \frac{3\pi}{4}$$

$$== \text{oo} ==$$

9.6.4.2) Ejercicios Propuestos VI

Demuestre las siguientes igualdades, si $n \in N$, y $a, b, m > 0$

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2}\left(1 + e^{-2}\right)$ *b)* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a\cos x + x\,\text{sen}x}{x^2 + a^2} dx = 2\pi e^{-a}$

c) $\int_{-0}^{\infty} \frac{dx}{\left(a+bx^2\right)^n} = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}$ d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } mx}{x\left(x^2+b^2\right)^2} dx = \frac{\pi}{2b^4}\left[1 - \frac{e^{-mb}}{2}(mb+2)\right]$

e) $\int_0^{\infty} \frac{x^4}{(x^6-1)} dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ f) $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen } mx}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} dx = \pi(b-a) \quad a \geq o, \quad b \geq 0$

En paticular, demuestre que : $\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$

$$= oo =$$

NOTA:

Existen otros tipos de Integrales reales que no trataremos en este trabajo, pues las mismas tienen principalmente un interés teórico que escapa al objetivo de este curso. Sin embargo, una demostración de los métodos de solución de dichas integrales y sus aplicaciones respectivas, puede encontrarse en:

" *Elements of Complex Variables",* por Louis L. Pennisi, segunda edición, Holt Rinehart and Winston.