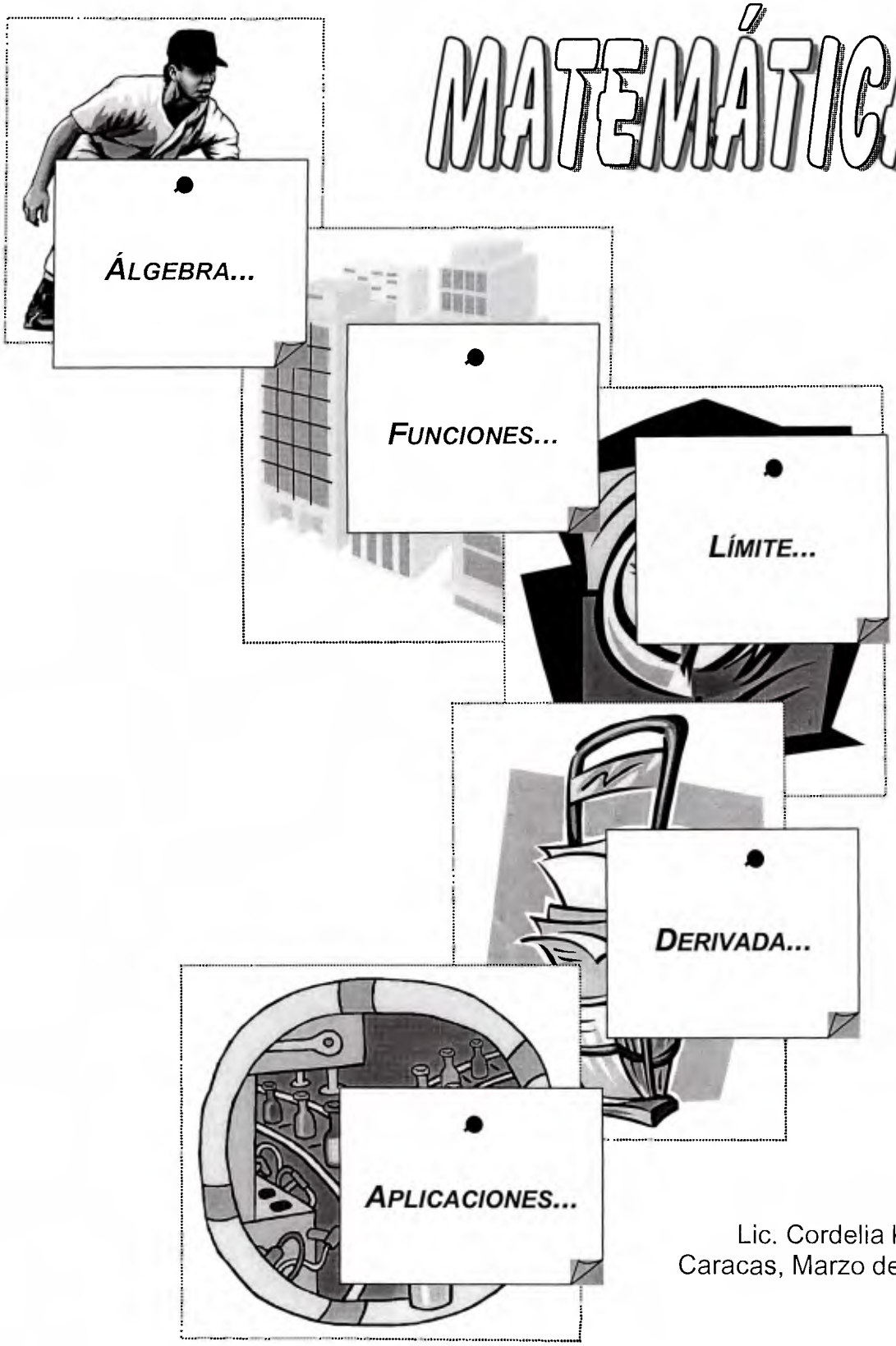
TRAB
A2000
K4

MATEMÁTICA I



Lic. Cordelia Khouri
Caracas, Marzo de 2000

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

INSTRUMENTO DE APOYO PARA LA CÁTEDRA DE MATEMÁTICA I

- ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN Y CONTADURÍA -

Lic. Cordelia Khouri Licha

Asistente

Caracas, Marzo de 2000

A mis profesores y a mis alumnos...

...por todo lo que me han enseñado...

AGRADECIMIENTO

A Dios...simplemente por todo...

A mi familia...por estar conmigo, siempre allí cuando los necesito...

A las siguientes personas...
Angie Riego,
Aura Sojo,
Johaina Khouri
Lourdes Trápani,
Sergio Hernández,
... por tener siempre un momento para mí...

En especial a Armando Volpe,... sin su apoyo no hubiera sido igual...

A todos mis sinceras gracias...

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

Introducción 6

Unidad de Repaso:

Álgebra elemental y Geometría Analítica 9

1. Números reales. Operaciones con números reales 10
2. Expresiones algebraicas y simplificación 15
3. Inecuaciones 25
4. Valor absoluto 32
5. Ecuaciones. Sistemas de Ecuaciones 35
6. Algunos tópicos de Geometría Analítica 40

Unidad I:

Funciones y Gráficas 46

1.1. Funciones y su definición, dominio y rango 47
1.2. Gráfica de funciones reales de variable real y otras curvas 62
1.3. Operaciones con funciones y composición de funciones 77
1.4. Función inversa 85
1.5. Funciones exponenciales y logarítmicas 89
1.6. Aplicaciones de las funciones: Modelos Funcionales 101
1.7. Miscelánea de ejercicios 124

Unidad II:

Límites y Continuidad 127

2.1. Definición de límite 128
2.2. Teoremas sobre límites 131
2.3. Resolución de límites indeterminados 132
2.4. Límites unilaterales 141

2.5. Límites y asíntotas..... 150
2.6. Continuidad de una función..... 160
2.7. Teorema del Valor Intermedio..... 175
2.8. Miscelánea de ejercicios..... 179

Unidad III:
Derivadas..... 182
3.1. Definición de derivada..... 183
3.2. Reglas de derivación..... 187
3.3. Derivada de funciones compuestas..... 191
3.4. Derivación implícita..... 193
3.5. Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas..... 194
3.6. Derivadas de orden superior..... 199
3.7. Derivadas de funciones paramétricas..... 203
3.8. Diferenciales. Aproximaciones por diferenciales..... 206
3.9. Miscelánea de ejercicios..... 212

Unidad IV:
Aplicaciones de la derivada..... 215
4.1. Extremos en un intervalo..... 216
4.2. Teorema de Rolle, Teorema de Lagrange y Teorema de Cauchy..... 220
4.3. Regla de L´Hôpital..... 228
4.4. Criterio de la primera derivada. Crecimiento y decrecimiento..... 236
4.5. Criterio de la segunda derivada. Concavidad..... 240
4.6. Estudio completo de curvas..... 248
4.7. Optimización..... 257
4.8. Aplicaciones a la ciencia económica..... 267
4.9. Miscelánea de ejercicios..... 302

Bibliografía..... 308

INTRODUCCIÓN

Uno de los obstáculos más fuertes para el estudiante que comienza la carrera de Administración y Contaduría está en el área de la matemática, no sólo por la preparación previa que, por lo general, no es la adecuada, sino también por la falta de un instrumento de apoyo durante el desarrollo de la cátedra, entre otros factores.

Este trabajo se ha desarrollado con el fin de concentrar una serie de conceptos y ejercicios adaptados al programa de la cátedra de Matemáticas I de la Escuela de Administración y Contaduría, claro está, no pretende ser un libro de texto, ni sustituir la bibliografía recomendada, simplemente busca ser ese instrumento que complementa lo visto en clase.

El principal objetivo de este trabajo es ofrecer al estudiante un material de apoyo teórico práctico que le permita cursar con éxito la cátedra de Matemáticas I en base al siguiente principio: desarrollar una capacidad de análisis a partir de una ejercitación de manera constante y efectiva.

Este objetivo no es fácil de cumplir ya que depende en gran parte del estudiante, su preparación y el interés por la materia. Sin embargo, en función de este principio se diseñó el presente instrumento cuidando los detalles de forma y de fondo.

En cuanto a forma se ofrece un material atractivo a la vista, de fácil lectura y con diversos gráficos y cuadros de llamada.

En cuanto a fondo, es un material que contiene teoría, ejemplos, ejercicios y diversos cuadros de llamada y apartados que complementan los contenidos teóricos, entre otras funciones. En general, los cuadros se ubican bajo los siguientes títulos:

- NOTA: son básicamente aclaratorias, recomendaciones y sugerencias al estudiante o lector.
- CUIDADO: son cuadros que advierten los errores más frecuentes que se suelen cometer.
- RECUERDA QUE: señala conceptos u otros aspectos que se necesita para comprender un determinado tema y que debería ser previamente manejado por el estudiante o lector.
- Sin título: son diversos cuadros donde se dejan preguntas al aire y demás comentarios, con el fin de invitar al análisis y la reflexión.

En cuanto al esquema general del trabajo, este contiene 5 unidades desarrolladas de la siguiente manera:

- Unidad de Repaso: fue creada con el fin de contrarrestar la deficiente preparación en el área de matemática que, por lo general, parece ser el problema común de todo alumno que ingresa a esta carrera. Contiene un breve marco teórico y más de 240 ejercicios propuestos con respuesta.

- Unidad I a Unidad IV: son cuatro unidades que abarcan los temas de funciones, límites, derivadas sus aplicaciones, contenido en el programa de Matemáticas I. En general se estructuran de la siguiente manera:
  - BREVE MARCO TEÓRICO: se presenta un resumen del tema.
  - EJERCICIOS RESUELTOS: se presentan como ejemplos. El fin de estos ejemplos no es presentar un ejercicio resuelto de cada modelo posible, sino más bien mostrar un proceso de razonamiento lógico, dejando claro que no es *mecanizar*, es *analizar*.
  - EJERCICIOS PROPUESTOS: son variados y con su respuesta.
  - MISCELÁNEA DE EJERCICIOS: está situado al final de cada unidad, y fue incluido con el objeto de relacionar la teoría vista en toda la unidad.

Por último, se espera que este material sea de gran apoyo, sin embargo no hay que olvidar que el éxito sólo se logrará con verdadera constancia y dedicación.

UNIDAD DE REPASO

ÁLGEBRA ELEMENTAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

CONTENIDO

1. Números reales. Operaciones con números reales.
2. Expresiones algebraicas y simplificación.
3. Inecuaciones.
4. Valor absoluto.
5. Ecuaciones. Sistemas de Ecuaciones.
6. Tópicos de Geometría Analítica.

UNIDAD DE REPASO:

ÁLGEBRA ELEMENTAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

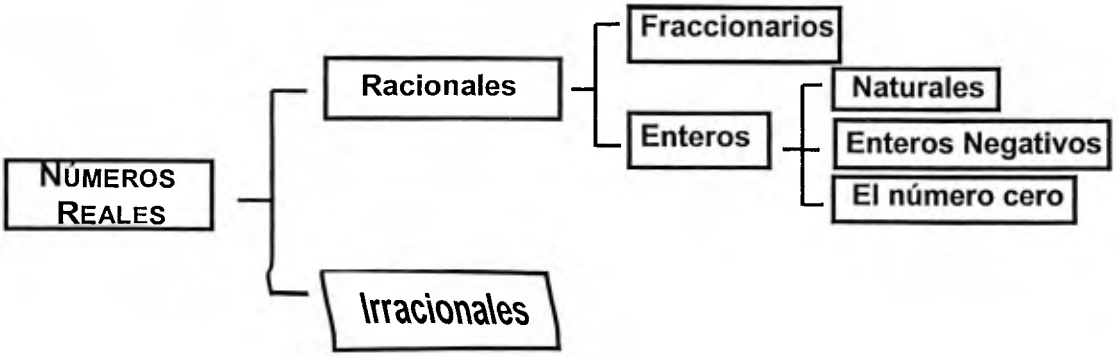
1. NÚMEROS REALES. OPERACIONES CON NÚMEROS REALES.

NÚMEROS REALES: Comprende los conjuntos de números racionales e irracionales.

NÚMEROS RACIONALES: son aquellos que se pueden escribir de la forma: a/b, siendo a y b números enteros y b $\neq$ 0, Ejemplo: -3; 2/5; 8; 1,6. (Note que 1,6=8/5).

NÚMEROS IRRACIONALES: son aquellos que no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros. Ejemplo: $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{7}$; $2\sqrt{|-7|}$; e .

Luego; las relaciones entre los conjuntos que conforman al conjunto de los números reales viene dado por el siguiente esquema:



PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES:

1. $a + b = b + a$
2. $a.b = b.a$
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. $a.(b.c) = (a.b).c$
5. $(a \pm b).c = a.c \pm b.c$
6. $(a \pm b)/c = a/c \pm b/c$
7. $(a.b)^p = a^p.b^p$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$
9. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$
10. $a^p.a^q = a^{p+q}$
11. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
12. $\sqrt[p]{a.b} = \sqrt[p]{a}.\sqrt[p]{b}$
13. $\sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}$
14. $(a^p)^q = a^{p.q}$
15. $\left(\sqrt[p]{a}\right)^q = a^{q/p}$
16. $\sqrt[p]{a^q} = a^{q/p}$
17. $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p.q]{a}$
18. $a + 0 = 0 + a = a$
19. $a.1 = 1.a = a$
20. $a.0 = 0.a = 0$
21. $a^0 = 1$

NOTA

La división entre cero y las raíces de índice par de números negativos no están definidas en el conjunto **R**

EJERCICIOS PROPUESTOS A.

Dadas las siguientes proposiciones marque su respuesta con verdadero (V) o falso (F) según sea el caso:

1) $\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{6}{7}$ ____

2) $4^2 = 2^4$ ____

3) $\frac{3}{2}.(-4+2)=(2-4).\frac{3}{2}$ ____

4) $(4+3)^2 = 25$ ____

5) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{-4}$ ____

6) -8.(5/3) +4.(7)(2) = 4(7)(2) – 8.(5/3) ____

7) $3^2+4^2 = 7^2$ ____

8) $\frac{3\sqrt{2}-1}{3\sqrt{2}}=-1$ ____

9) $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=x+y$ ____

10) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{12}$ ____

11) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=3$ ____

12) $\sqrt{16}+\sqrt{-16}=0$ ____

13) $3^2=2^3$ ____

14) $\frac{a+b}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ ____

15) $6^3 = 18$ ____

16) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{6}$ ____

17) $(a+b)^3=a^3+b^3$ ____

18) -3/(8+5-7)+10=10-3/(5-7+8) ____

19) $3^4-3^0 = 80$ ____

20) (12/4) /3 = 12/(4/3) ____

RESPUESTAS A.

1) F; 2) V; 3) V; 4) F; 5) V; 6) V; 7) F; 8) F; 9) V; 10) V,

11) F; 12) F; 13) F; 14) V; 15) F; 16) F; 17) F; 18) V; 19) V; 20) F.

EJERCICIOS PROPUESTOS B.

Efectúe las siguientes operaciones y simplifique siempre que sea posible:

1) $\dfrac{2^3+2^4}{2^5}\div\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$

2) $\dfrac{3^{-1}+2^{-2}-3^{-3}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}-3^{-2}}$

3) $-5^2-2^3/[-(7+4-3)/(-14)^0]$

4) $2+\dfrac{3}{5+\dfrac{\frac{1}{2}+1}{4-\frac{1}{3}}}$

5) $\sqrt[3]{-125}+\sqrt{25}-\sqrt[3]{125}$

6) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-0,5}+\left(\dfrac{625}{81}\right)^{-0,25}+\left(\dfrac{243}{32}\right)^{-0,2}$

7) $\sqrt{16}.(3\sqrt{8})^{3/2}+\left(\sqrt[6]{16}\right)^3.\left(\sqrt{45}-\sqrt{8}\right)$

8) $(3^{-2}/4^{-1/2}-5^0)/(1-1/2)^{-2}.(-7)^0$

9) $\sqrt[3]{\sqrt{32}+\sqrt{5}}.\sqrt[3]{\sqrt{32}-\sqrt{5}}$

10) $2(2^{1/2}+1)^3-5(2^{1/2}+1)^2+3(2^{1/2}+1)-7$

11) $\left(\frac{5\pi}{3}\sqrt{27}+\frac{3\pi}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

12) $$\frac{2}{\dfrac{\frac{1}{5}+3}{2}+\dfrac{\frac{1}{4}-2}{3-\dfrac{1+\frac{1}{4}}{2-\frac{1}{3}}}}$$

13) $$\frac{\left(-\frac{3}{2}\pi\right)^3+\left(\frac{\sqrt{\pi^3}}{3}\right)^2-\frac{7}{4}\pi^3}{\frac{\pi}{9}}+\frac{21}{3}\pi^2$$

14) $$\frac{\sqrt[3]{81}-\sqrt{9}+\sqrt[3]{243}+\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{243}}\right)^{-1}}$$

15) $$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3.\left(\frac{9}{4}\right)^{-2}.\left(\frac{2}{3}\right)^0.\left(\frac{27}{32}\right)^4}{\left(\frac{8}{81}\right)^{-1}.\left(\frac{4}{27}\right)^2}$$

16) $(3-7^{1/2}).[16+6(7)^{1/2}]^{1/2}$

17) $\sqrt{1+\sqrt{7+\sqrt{2.\sqrt{3-\sqrt{5}}.\sqrt{3+\sqrt{5}}}}}$

18) $$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}.\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)}{3\sqrt{12}-\sqrt{8}-3\sqrt{18}+\sqrt{27}}$$

19) $$\frac{2+3\left(4-\sqrt{5}\right)-2\left(4-\sqrt{5}\right)^2+\left(4-\sqrt{5}\right)^3}{-12+5\sqrt{5}}$$

20) $\sqrt[5]{\sqrt{2096}+\sqrt{2000}}.\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt{3096}-\sqrt{1000}}.\sqrt{10\sqrt{10}+6\sqrt{86}}-20\sqrt{5}}$

RESPUESTAS B.

1) 1/3	2) 59/231	3) –24	4) 304/119	5) –5
6) 44/15	7) $12\sqrt{5}$	8) –7/36	9) 3	10) $3.(2)^{1/2}-5$
11) 18	12) 90/37	13) $-\frac{305}{8}\pi^2$	14) $10.(3)^{-5/3}+3^{2/3}-1$	15) $3^7/2^{15}$
16) 2	17) 2	18) 1	19) –8	20) $2\sqrt[5]{3}$

2. EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y SIMPLIFICACIÓN. (PRODUCTOS NOTABLES, FACTORIZACIÓN, RACIONALIZACIÓN, OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS).

A continuación se presenta un resumen de los productos notables y los casos de factorización utilizados con más frecuencia.

PRODUCTOS NOTABLES:

- Binomio al cuadrado: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- Suma por su diferencia: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- Producto de binomios con un término común:

  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- Binomio al cubo: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

- Binomio a la n: $(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}.b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + ... + b^n$

(El desarrollo de $(a - b)^n$ es igual al anterior pero con signos alternados).

FACTORIZACIÓN:

- Factor común: m.a + m.b = m.(a + b)
- Trinomio cuadrado perfecto: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
- Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a-b).(a+b)$
- Trinomio de la forma $x^2 + ax + b = (x+p).(x+q)$; donde p+q= a y p.q= b
- Suma de cubos: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab+b^2)$
- Diferencia de cubos: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

EJERCICIOS PROPUESTOS C.

Efectúe las siguientes operaciones desarrollando los productos notables:

1) $(3x^2 - 1)^2$

2) $(x^{1/3} + y^{7/2})^2$

3) $\left(\frac{a^{p+q}}{2} + \frac{b^{p-q}}{3}\right)\left(\frac{a^{p+q}}{2} + \frac{b^{p-q}}{-3}\right)$

4) $(10x - 2Y + 1)^2$

5) $(x - h)^3$

6) $\left(\frac{\sqrt[4]{t^3}}{3} + \frac{t^5}{2}\right)^2$

7) $(x - 3)^3 - (x + 3)^3$

8) $(3x - 7)(3x + 2) - (3x - 14^{1/2})(14^{1/2} + 3x)$

9) $(e^{x+y} - e^{-x-y})^2$

10) $(a^2 - a - 1)^2 - (a^2 + a + 1)^2$

11) $-(a+b)(a-b) - (a-b)^2 - 2ab$

12) $(x-1)(x-2)(x+1) - 2(x+2)(x+3) + (x+1)^2$

13) $\left(\frac{x^2y^3}{4} + \frac{z^3}{2}\right)\left(\frac{x^2y^3}{4} + \frac{z^3}{-2}\right)$

14) $(e^{-x} + e^{-y})^2 + (e^x + e^y)(e^y + e^x)$

15) $(x - y)^4 - (2x + y)^4$

RESPUESTAS C.

1) $9x^4 - 6x^2 + 1$;

2) $x^{2/3} + 2x^{1/3}y^{7/2} + y^7$;

3) $\frac{a^{2p+2q}}{4} - \frac{b^{2p-2q}}{9}$;

4) $100x^2 - 40xy + 20x - 4y + 4y^2 + 1$;

5) $x^3 - 3x^2h + 3xh^2 - h^3$;

6) $\frac{\sqrt{t^3}}{9} + \frac{t^{23/4}}{3} + \frac{t^{10}}{4}$;

7) $-18x^2 - 54$;

8) $-15x$;

9) $e^{2x+2y} + e^{-2x-2y} - 2$;

10) $-4a^3 - 4a^2$;

11) $-2a^2$;

12) $x^3 - 3x^2 - 9x - 11$;

13) $\frac{x^4y^6}{16} - \frac{z^6}{4}$;

14) $2e^{-2x} + 2e^{-x-y}$;

15) $-15x^4 - 36x^3y - 18x^2y^2 - 12xy^3$

EJERCICIOS PROPUESTOS D.

Factorice las siguientes expresiones en productos de factores irreducibles.

1) $x^2 + x + a - a^2$

2) $z^3 - 6z^2 - z + 6$

3) $t^{5/2} - 4.t^{1/2}$

4) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

5) $0{,}01 - x^{2n}$

6) $x^8 - 6561$

7) $e^{4x} - 2e^{2x+2y} + e^{4y}$

8) $(x + h)^3 - h^3$

9) $(a + b)^2 - 12(a + b) + 20$

10) $x^4 + 2x^2 + 1$

11) $x^2 - 5ax - 36a^2$

12) $x^3 + 27h^3$

13) $z^3 - 5z^2 + 84z$

14) $6k^2 - 13k + 6$

15) $x^2y - 5$

16) $1 - 18x^2 + 81x^4$

17) $x^5 + y^5$

18) $2a^5 - 8a^4 + 3a - 12$

19) $x^{2m+2} - x^2y^{2n}$

20) $10h^2 - 19h - 15$

RESPUESTAS D.

1) $(x + a)(x - a + 1)$;

2) $(z - 6)(z - 1)(z + 1)$;

3) $t^{1/2}(t - 2)(t + 2)$;

4) $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$;

5) $(1/10 - x^n)(1/10 + x^n)$;

6) $(x^4 + 81)(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$;

7) $(e^{2x} - e^{2y})^2$;

8) $x(x^2 + 3xh + 3h^2)$;

9) $(a + b - 10)(a + b - 2)$;

10) $(x^2 + 1)^2$;

11) $(x - 9a)(x + 4a)$;

12) $(x + 3h)(x^2 - 3hx + 9x^2)$;

13) $z(z - 12)(z + 7)$;

14) $(3k - 2)(2k - 3)$;

15) $(xy^{1/2} + 5^{1/2})(xy^{1/2} - 5^{1/2})$;

16) $(1 - 3x)^2(1 + 3x)^2$;

17) $(x + y)(x^4 - x^3a + x^2a^2 - xa^3 + a^4)$;

18) $(a - 4)(2a^4 + 3)$;

19) $x^2(x^m - y^n)(x^m + y^n)$;

20) $(2h - 5)(5h + 3)$

EJERCICIOS PROPUESTOS E.

Racionalice las siguientes expresiones (numeradores o denominadores) y simplifique si es posible:

1) $\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{12-x}}{x^2-9}$

2) $\sqrt[3]{x^3+8x^2}-x$

3) $\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$

4) $\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$

5) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

6) $\dfrac{x-16}{\sqrt[4]{x}-2}$

7) $\dfrac{\sqrt[3]{t}-2}{t-8}$

8) $\dfrac{\sqrt[5]{p}-2}{p^2-1024}$

9) $\dfrac{\sqrt{x^2-x+6}-\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-4x+3}$

10) $\sqrt[3]{(n+a)(n+b)(n+c)}-n$

RESPUESTAS E.

1) $\dfrac{4}{(x+3)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{12-x}\right)}$;

2) $\dfrac{8x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+8x^2\right)^2}+\sqrt[3]{x^6+8x^5}+x^2}$;

3) $\dfrac{5+4x}{\sqrt{9+5x+4x^2}+3}$;

4) $\dfrac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{-3(x-1)}$;

5) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$;

6) $\left(\sqrt[4]{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+4\right)$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2}+2\sqrt[3]{t}+4}$;

8) $\dfrac{1}{(p+32)\left(p^{4/5}+2p^{3/5}+4p^{2/5}+8p^{1/5}+16\right)}$;

9) $\dfrac{3}{(1-x)\left(\sqrt{x^2-x+6}+\sqrt{x^2+2x-3}\right)}$;

10) $\dfrac{(a+b+c)n^2+(ab+ac+bc)n+abc}{\left(\sqrt[3]{(n+a)(n+b)(n+c)}\right)^2+n\sqrt[3]{(n+a)(n+b)(n+c)}+n^2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS F.

Simplifique las siguientes expresiones:

1) $\dfrac{2x^2}{4x^2-4xy}$

2) $\dfrac{3y-6x}{2mx-my-2nx+ny}$

3) $\dfrac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$

4) $\dfrac{3z^4-4z^3+1}{(z-1)^2}$

5) $\dfrac{8y^3-3y^2+7y}{2y^3+2y}$

6) $\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

7) $\dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{a\sqrt{x}-x\sqrt{a}}$

8) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-6b-ab+6a}$

9) $\dfrac{\frac{4}{5}x\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{5}x-\frac{4}{5}\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{5}x}{2\sqrt{3}-\sqrt{8}}$

10) $\dfrac{\sqrt{x^5}-4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{4x}-2}$

11) $\dfrac{(a+b)(a^2+b^2)(a^2-2ab+b^2)}{(a-b)(a^2-b^2)(a^2+2ab+b^2)}$

12) $\dfrac{1-h^6}{(h+1)(1+h+h^2)}$

13) $\dfrac{a^2-a^3-1+a}{a^2+1-a^3-a}$

14) $\dfrac{x^4-2m^2x^2+m^4}{x^4-mx^3-m^3x+m^4}$

15) $\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

16) $\dfrac{\sqrt{12-x}-3x}{2x-3\sqrt{19-5x}}$

17) $\dfrac{3x^3-12x-x^2y+4y}{x^4-5x^3-14x^2}$

18) $\dfrac{pq^{-1}\sqrt{p}\sqrt{q\sqrt{p}}\,p^7qp^{-2}}{pq\sqrt{p}}\sqrt{\sqrt{p}\,\sqrt[3]{q}}$

19) $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}\,\sqrt{a^2b}\,a^{-1}\,\dfrac{(a+b)}{ab}}{\left(a^2b^3\right)^{1/3}\sqrt[3]{b^{-1}}\,\sqrt[3]{a}\,\sqrt{a+b}}$

20) $\dfrac{x(x-y)(x+y)+\left(x^2+xy+y^2\right)(x-y)}{\sqrt[3]{x\sqrt{y}}\left(x^4-y^4\right)}$

RESPUESTAS F.

1) $\dfrac{x}{2x-2y}$;

2) $\dfrac{3}{n-m}$;

3) $\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2}$;

4) $3z^2+2z+1$;

5) $\dfrac{8y^2-3y+7}{2\left(y^2+1\right)}$;

6) $6+11x+6x^2$;

7) $\dfrac{\left(x^2+ax+a^2\right)\left(a\sqrt{x}+x\sqrt{a}\right)}{-ax\left(x\sqrt{x}+a\sqrt{a}\right)}$;

8) $\dfrac{a+b}{a-6}$;

9) $x/2$;

10) $\dfrac{\sqrt{x}}{4}(x+2)\left(2\sqrt[3]{2x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4\right)$;

11) $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$;

12) $(1-h)(1-h+h^2)$;

13) $\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$;

14) $\dfrac{(x+m)^2}{x^2+mx+m^2}$;

15) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}$;

16) $\dfrac{-8x-12\sqrt{19-5x}}{(4x+57)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{12-x}\right)}$;

17) $\dfrac{(x-2)(3x-y)}{x^2(x-7)}$;

18) $p^{11/2}/q^{1/3}$;

19) $\dfrac{(a+b)^{1/2}}{a^{5/3}b^{1/2}}$;

20) $\dfrac{-y^{11/6}}{x^{1/3}(x+y)\left(x^2+y^2\right)}$

EJERCICIOS PROPUESTOS G.

Efectúe las siguientes operaciones y simplifique a su mínima expresión.

1) $\dfrac{4z}{z^3-4z}-\dfrac{z^2-z}{z^3-3z^2+2z}$

2) $\dfrac{\dfrac{x^2-5}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{4}{x+1}-1}$

3) $\dfrac{1}{r^2+s^5-s}-\dfrac{1}{r^2+s^5+s}$

4) $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{a^{-2}-1}-a^{-1}\right)$

5) $\dfrac{a-1}{a^2-4}+\dfrac{a-2}{a^2-a-6}+\dfrac{a+6}{a^2-5a+6}$

6) $\dfrac{4z^2-1}{2z^2-8}-\dfrac{z+3}{z-2}-\dfrac{(z+1)^2}{z^2+4z+4}$

7) $\dfrac{x+3y}{y+x}+\dfrac{3y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x}{y-x}$

8) $\dfrac{1}{a-3}+\dfrac{a+1}{(a-2)(3-a)}+\dfrac{2}{(2-a)(1-a)}$

9) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}\cdot\dfrac{x^3+x^2}{x+2}$

10) $\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2}{x+2}$

11) $\dfrac{x^2+3x}{x^2+4x+3}\div\dfrac{x^2-2x}{x+1}$

12) $\dfrac{2x}{x^2-9}+\dfrac{x}{x^2+6x+9}-\dfrac{3}{x+3}$

13) $\dfrac{x+3}{5-x}-\dfrac{x-5}{x+5}+\dfrac{2x^2+30}{x^2-25}$

14) $\dfrac{z^3-8}{z+2}\cdot\dfrac{2z^2+8}{z^3-4z}\cdot\dfrac{z^3+2z^2}{z^3+2z^2+4z}$

15) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{a^2+3ab+2b^2}{a^2-3ab+2b^2}$

16) $\dfrac{x^3+x^2-12x}{x^2-3x}\cdot\dfrac{3x^2-10x+3}{3x^2+11x-4}$

17) $\dfrac{n^2+n}{2n^2+7n-4}\cdot\dfrac{4n^2-4n+1}{2n^2-n-3}\cdot\dfrac{2n^2+5n-12}{2n^3-n^2}$

18) $\dfrac{a^3-27}{a^2-9}\div\left(\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3+b^3}\cdot\dfrac{a^3-a^2b+ab^2}{a^2+ab}\right)$

19) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

20) $\left(x^{2/3}+2^{1/3}\right)\left(x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x^2}-\sqrt[3]{4}\right)$

21) $\left(\sqrt[n+3]{\sqrt[n-1]{x^2}\cdot\sqrt[n+1]{x^{-1}}}\right)^{n^2-1}$

22) $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-\dfrac{2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2\left(ab^{-1}+1\right)^2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1-ab^{-1}}{1+ab^{-1}}}$

23) $\dfrac{x+\sqrt{xy}}{x+y}\cdot\left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^{-1}-\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\right)^{-1}\right]$

24) $\left[\dfrac{r^{4/3}+8r^{1/3}s}{r^{2/3}-2\sqrt[3]{rs}+4s^{2/3}}-2\sqrt[3]{rs}\right]^{6}$

25) $\left[\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^{-1}+3\sqrt{xy}\right]^{1/2}$

RESPUESTAS G.

1) $\dfrac{-1}{z+2}$; 2) $\dfrac{x+2}{1-x}$; 3) $\dfrac{2s}{r^2}$;

4) **–1;** 5) $\dfrac{3a^2+19}{(a-2)(a+2)(a-3)}$; 6) $\dfrac{6z^2+27z+22}{2(z-2)(z+2)^2}$;

7) $\dfrac{2x^2+3xy}{(x+y)(x-y)}$; 8) $\dfrac{a+3}{(3-a)(2-a)(1-a)}$; 9) x(x+1);

10) $\dfrac{x+11}{x^2-4}$; 11) $\dfrac{1}{x-2}$; 12) $\dfrac{3(x+9)}{(x+3)^2(x-3)}$;

13) $\dfrac{2}{x+5}$; 14) $\dfrac{z^2+4}{z+2}$; 15) $\dfrac{a-2b}{a+2b}$;

16) x-3; 17) 1/n; 18) $\dfrac{a^2+3a+9}{a+3}$;

19) $4x(x^2-1)^{1/2}$; 20) x^2+2; 21) x;

22) $\dfrac{b^2+2ab-a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$; 23) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 24) r^4;

25) $x^{1/2}+y^{1/2}$

3. INECUACIONES.

DESIGUALDAD: es una expresión matemática que indica si un valor es mayor o menor que otro.

Luego: **a > b** si **a - b** es *positivo*;

a < b si **a - b** es *negativo*.

PROPIEDADES: Dado a, b, c $\in$ **R**, podemos enumerar algunas propiedades de la desigualdad:

1) $a < b \Leftrightarrow b > a$

2) $a > b$ y $b > c \Leftrightarrow a > c$; igualmente si $a < b$ y $b < c \Leftrightarrow a < c$

3) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$; de igual forma: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

4) $\left.\begin{array}{l} a > b \\ a < b \end{array}\right\}$ y $c > 0$ $\Rightarrow a.c > b.c$

$\Rightarrow a.c < b.c$

5) $\left.\begin{array}{l} a > b \\ a < b \end{array}\right\}$ y $c < 0$ $\Rightarrow a.c < b.c$

$\Rightarrow a.c > b.c$

6) $a > b \Leftrightarrow 1/a < 1/b$, análogamente $a < b \Leftrightarrow 1/a > 1/b$

7) Si $a > 0$ y $b > 0$ y $n \in \mathbf{Z}^+$

Entonces: $a > b \Rightarrow a^n > b^n$

$a < b \Rightarrow a^n < b^n$

¡¡CUIDADO!!!

Evite este error:
Si $a < 0$ y/o $b < 0$, la propiedad 7
NO SE CUMPLE

INTERVALOS: son subconjuntos de los números reales. Estos pueden ser:

- **CERRADOS:** contienen a los extremos del mismo.

Es decir: $A = \{ x \in \mathbf{R} / a \leq x \leq b \} = [a,b]$

Gráficamente:

O bien:

- **ABIERTOS:** no contienen a los extremos del mismo.

Es decir: $A = \{ x \in \mathbf{R} / a < x < b \} = (a,b) =]a,b[$.

Gráficamente:

O bien:

- **SEMI-CERRADOS O SEMI-ABIERTOS:** contienen sólo un extremo.

Es decir: $A = \{ x \in \mathbf{R} / a \leq x < b \} = [a,b) = [a,b[$

Gráficamente:

O bien:

$$B = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, a < x \leq b \} = (a,b] =]a,b]$$

Gráficamente:

- **EXTENDIDOS:** uno de los extremos es $+\infty$; ó $-\infty$.

Es decir: $A = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a \}$

Gráficamente:

$$B = \{ x \in \mathbf{R} \,/\, x > a \}$$

Gráficamente:

INECUACIONES: son desigualdades con una o más variables. Su solución consiste en determinar los valores de la variable que satisface a la inecuación.

Para resolver inecuaciones algebraicas en general:

1. Se agrupan todos los términos en el primer miembro, obteniendo una inecuación de la forma $\mathbf{P(x) \leq 0}$, $\mathbf{P(x) \geq 0}$, $\mathbf{P(x) < 0}$ **ó** $\mathbf{P(x) < 0}$.

2. Se factoriza **P(x)** para determinar sus raíces reales.
3. Se ubican las raíces en la recta real.
4. Determine el signo de cada intervalo, ubicado en la recta real, que se obtiene al sustituir un valor cualquiera del intervalo en **P(x).**

   Los signos del intervalo se alternan, a menos que alguna raíz sea de multiplicidad par.
5. La unión de los intervalos que satisfacen la inecuación obtenida en (1) es la solución.

Si P(x) y Q(x) son polinomios y $P(x)/Q(x) < 0$, $P(x)/Q(x) > 0$, $P(x)/Q(x) \leq 0$, ó $P(x)/Q(x) \geq 0$

1. Se determinan las raíces reales del numerador y del denominador.
2. Se ubican las raíces en la recta real.
3. Se determina el signo de cada intervalo sustituyendo un valor del mismo en el **COCIENTE P(x)/Q(x)**.
4. La solución es la unión de los intervalos que satisfacen la inecuación.

NOTA
Las raíces de Q(x) **NUNCA** deben ser incluidas en la solución ya que no está definida la división entre cero.

Si $\sqrt[n]{P(x)} \geq \sqrt[n]{Q(x)}$ *ó* $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)}$ *entonces:*

CASO 1:

n es impar $\Rightarrow$ $\left(\sqrt[n]{P(x)}\right)^n \geq (Q(x))^n \vee \left(\sqrt[n]{P(x)}\right)^n \leq (Q(x))^n$ ya que no hay restricción.

CASO 2:

n es par $\Rightarrow$ 1. Debe considerar P(x) $\geq$ 0, ya que no está definida la raíz par de valores negativos.

2. Antes de eliminar la raíz debe considerar cuando los miembros de la inecuación sean **NO NEGATIVOS**

INECUACIONES DOBLES: Son aquellas que tienen dos signos de desigualdad.

Para resolver P(x) < Q(x) ≤ R(x), por ejemplo:

Se separan en dos inecuaciones simples y se halla la intersección de las soluciones de ambas. Es decir:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & P(x) < Q(x) \\ \text{(II)} & Q(x) \leq R(x) \end{array}\right\} \quad \mathbf{S_{TOTAL} = S_I \cap S_{II}}$$

SISTEMAS DE INECUACIONES: son conjuntos de n inecuaciones cuya solución es la intersección las soluciones de cada inecuación.

EJERCICIOS PROPUESTOS H.

1) $\frac{3x^2}{2}+\frac{(x-1)^2}{2} \leq 2x^2+\frac{x+1}{4}$

2) $12x^3 - 4x^2 < 3x - 1$

3) $8x^3 + 4x^2 - 2x - 1 \geq 0$

4) $x^2 - 6x + 10 < 0$

5) $\frac{(2x+3)^3}{8} \geq x^3+\frac{9x^2}{2}+1$

6) $x^2 - 7 \geq 0$

7) $\frac{2x+3}{3x-1} < 2$

8) $\frac{x^3-4x}{x^2-4x-5} \geq 0$

9) $x^3 \geq \frac{7x^2-x-6}{x-1}$

10) $\frac{x}{x^2-1} \leq \frac{1}{x-1}-\frac{x}{x+1}-3$

11) $\frac{(x+2)^3(x+1)(x-3)}{(x-1)^2(x-2)} \geq 0$

12) $\frac{x}{a} \geq \frac{a}{x}$; *siendo* $a<0$

13) $\frac{x-a}{x-2a} < \frac{x+a}{x}$; *siendo* $a<0$

14) $\frac{bx+a}{ax+b} \leq \frac{1}{x}$; *siendo* $a<-b<0$

15) $1 < \frac{3x+10}{x+7} < 2$

16) $-3 \leq \frac{2x-1}{x+2} \leq 3$

17) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x+\frac{3}{4} < \frac{3}{4}x-\frac{1}{6}$

18) $x \leq \frac{a+bx}{ax+b} \leq \frac{1}{x}$; *siendo* $b<0<a<-b$

19) $2\sqrt{x-3} < \sqrt{x+9}$

20) $\sqrt{x-1}-1>0$

21) $\sqrt{x} < \frac{1}{x}$

22) $\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)} \geq \sqrt{x+2}$

23) $\begin{cases} \frac{x}{x^2-1}+\frac{x}{x+1} \leq \frac{1}{x-1}-3 \\ \frac{1}{x-5}-4 \leq \frac{x-1}{x+2}+\frac{1}{x^2+5x+6} \end{cases}$

24) $\begin{cases} \sqrt{x^2+40} > x+4 \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x+2} \leq 2 \end{cases}$

25) $\begin{cases} x^2 + x < 12 \\ x^2 - x > 2 \end{cases}$

26) $\begin{cases} (x-1)(x^3+2) < x^4 - x^3 \\ \dfrac{5x-1}{3} > x - 2 \end{cases}$

27) $\begin{cases} x^3 - x^2 > x(x^2 + x - 3) \\ x^2 + 2x + 1 > 0 \\ x^3 + x^2 + 1 > -\dfrac{1}{x} \end{cases}$

28) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 + 2 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$

29) A continuación se resuelve la inecuación:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4} > 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 > 2x + 8$$
$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x - 7 > 0 \quad Rp: \left(2 - \sqrt{11}; 2 + \sqrt{11}\right)$$

¿Es correcta la solución?. Justifique su respuesta.

30) La solución de $\sqrt{x-4} < x + 1$ es:

$$\left(\sqrt{x-4}\right)^2 < (x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad x - 4 < x^2 + 2x + 1$$
$$\Rightarrow \quad -x^2 - x - 5 < 0 \quad \Rightarrow \quad x2 + x + 5 > 0 \quad Rp: x \in R$$

¿Es correcta la solución?. Justifique su respuesta.

RESPUESTAS H.

1) [1/5,∞);

2) (-∞,-1/2) ∪ (1/3,1/2);

3) {-1/2} ∪ [1/2, ∞);

4) ∅;

5) [-19/5,∞);

6) $(-\infty,-(7)^{1/2}] \cup [(7)^{1/2}, \infty)$;

7) (-∞,1/3) ∪ (5/4, ∞);

8) [-2,-1) ∪ [0,2] ∪ (5, ∞);

9) [-2,-1] ∪ [3, ∞];

10) $\left(-1,\frac{1-\sqrt{65}}{8}\right]\cup\left(1,\frac{1+\sqrt{65}}{8}\right]$;

11) (-∞,-2) ∪ [-1,1] ∪ (1,2) ∪ [3, ∞);

12) (-∞,a] ∪ (0,-a];

13) (2a,0);

14) (-∞,-1] ∪ (0,-b/a) ∪ [1, ∞);

15) (-3/2,4);

16) (-∞,-7] ∪ [-1, ∞);

17) (11/3,15/2);

18) [-∞,-1] ∪ {1};

19) [3,7];

20) (2, ∞);

21) (0,1);

22) [4, ∞);

23) $\left(-1,\frac{1-\sqrt{65}}{8}\right]\cup\left(1,\frac{1+\sqrt{65}}{8}\right]$;

24) {2};

25) (-4,-1) ∪ (2,3);

26) (-5/2,1);

27) ∅;

28) (-∞,-2);

29) Incorrecto;

30) Incorrecto.

4. Valor Absoluto.

Definición: Sea la función f(x): $f(x)=|x|=\begin{cases} x & si \quad x\geq 0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases}$

Propiedades:

1. $|x|=\sqrt{x^2}$
2. $|x+y|\leq|x|+|y|$
3. $|x-y|\geq|x|-|y|$
4. $|x.y|=|x|.|y|$

5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

6. $|x| \leq a$ es equivalente a $-a \leq x \leq a$

7. $|x| \geq a$ es equivalente a $x \leq -a$ ó $x \geq a$

EJERCICIOS PROPUESTOS I.

Resuelva las siguientes ecuaciones:

1) $|2x| = 5$

2) $|3x+5| = 1$

3) $|x-3| = x-3$

4) $|x-3| = 4$

5) $|x^2-6x+8| = 3$

6) $|2x-1| = 5$

7) $|x| = |x-1|$

8) $||x+1|+2| = 2$

9) $|x-4| = -5$

10) $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = 3$

11) $\left|\frac{x^2+x-3}{1-x}\right| = x$

12) $|2x+1| = -x$

13) $\left|\frac{1}{x}\right| = \left|\frac{3-x}{2x+5}\right|$

14) $||x+3|-2| = 3$

15) $|x-2| + |x-1| = x-3$

16) $|3-x| - |x+2| = 5$

RESPUESTAS I.

1) $x = \pm 5/2$;

2) $x = -4/3$, $x = -2$;

3) $[3, \infty)$;

4) $x = 5$, $x = 1$;

5) $x = 1$, $x = 5$;

6) $x = -3/4$, $x = 13/4$;

7) $x = 1/2$;

8) $x = -1$;

9)No tiene solución en **R**

10) x = -4, x = -2/5;

11) x = $\pm(3/2)^{1/2}$, x = 3/2;

12) x = -1/3, x = -1;

13) x = $\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$;

14) x = -8, x = 2;

15) No tiene solución en **R**

16) (-∞,-2)

EJERCICIOS PROPUESTOS J

Resuelva las siguientes inecuaciones:

1) $|3x-1| \leq 2$

2) $|2x-1| \leq |x+1|$

3) $\frac{x^2+x-6}{|x|-x^2} \geq 0$

4) $|x-1| \geq |x+1|^{-1}$

5) $2|x| + x > 0$

6) $\left|\frac{2-3x}{1+2x}\right| \leq 4$

7) $\frac{|x-2|}{|2x-1|-4} \leq 0$

8) $||x|-2| \leq 1$

9) $|2x-5| \leq |x+4|$

10) $|x-1| \geq 4|x+2| - 8x$

11) $\frac{|x+1|}{|x-1|} \leq 2$

12) $|2x-1| \leq 3 < |x+3|$

13) $|x-1| + |x+1| \leq 8$

14) $\frac{1}{|2x^2+x+1|} \leq \frac{1}{|x-1|(2x-1)}$

15) $||x-2|-x+3| < 5$

16) $|x| + |x+1| + |x-4| + |x-6| < 100$

17) $(|x-4|)^{1/2} + x^{1/2} > 2$

18) $(|x^2+x-2|)^{1/2} < 2$

19) $\left|\frac{x-a}{x+a}\right| > \frac{a}{x}$ siendo $-1 < a < 0$ 20) $\begin{cases} 2\sqrt{x-3} \le \sqrt{x+9} \\ |1-2x| \le 8 \end{cases}$

RESPUESTAS J.

1) [-1/3,1]; 2) [0,2]; 3) [-3,-1) ∪ (1,2];

4) $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$; 5) **R** - {0}; 6) (-∞,-5/6] ∪ [-2/11, ∞);

7) (-3/2,5/2); 8) [-3,-1] ∪ [1,3]; 9) [1/3,9];

10) [9/5, ∞); 11) (-∞,1/3] ∪ [3, ∞); 12) (0,2];

13) [-4,4]; 14) (1/2, ∞) - {1}; 15) (0, ∞);

16) (-91/4,109/8); 17) (0,4) ∪ (4, ∞); 18) (-3,2);

19) $(-\infty, a+a\sqrt{2}) \cup (0, \infty) - \{-a\}$; 20) [3, 9/2].

6. ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES.

ECUACIÓN: es una igualdad que se satisface para determinados valores de la variable. Para resolverlos es necesario hallar los valores de la incógnita que satisface la ecuación.

SISTEMA DE ECUACIONES: se requiere encontrar los valores de todas las incógnitas que satisfacen al conjunto de ecuaciones.

Sugerencias para resolver problemas:

- Lea el problema con cuidado, hasta tener claro lo que se pregunta y los datos.
- Asigne letras a las cantidades desconocidas e identifique cuáles son datos y cuáles son incógnitas.
- Construya la ecuación o ecuaciones según las restricciones que el problema da a la incógnita.
- Resuelva la ecuación hallando los valores de la incógnita. Ésta sería la respuesta.
- Analice si la respuesta es razonable. (Por ejemplo: si su incógnita se refiere a tiempo y el resultado es negativo debe sospechar que puede haber un error).

EJERCICIOS PROPUESTOS K.

Resuelva las siguientes ecuaciones en **R**.

1) $-\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{7}{2-x}+\dfrac{3}{x+1}$

2) $\sqrt{\dfrac{z+1}{z-5}}-2\sqrt{\dfrac{1}{z-6}}=0$

3) $x^4+3x^3+4x^2+3x+1=0$

4) $\dfrac{12-3x}{16-x^2}=\dfrac{3}{5}$

5) $\sqrt[3]{5-2\sqrt{5-\sqrt{x-1}}}-2=0$

6) $\dfrac{3x-1}{x^2+7x+12}-\dfrac{1}{2x+6}=\dfrac{7}{6x+24}$

7) $\dfrac{t-2}{t^2+8t+7}+\dfrac{t-2}{t^2-6t-7}-\dfrac{2t-5}{t^2-49}=0$

8) $\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\dfrac{1}{7}$

9) $2\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{4x+5}$

10) $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-7}}=\sqrt{x-4}$

RESPUESTAS K.

1) 5/13;	2) 7;	3) –1;	4) 1;	5) 137/16;
6) 39/8;	7) 5;	8) $(7/3)^{3/2}+1$;	9) 1;	10) 8.

EJERCICIOS PROPUESTOS L.

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

1) $\begin{cases} 7x+2y=-1 \\ y=4x+7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-y=14 \\ x+y=-2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2s-3t=-10 \\ 5s+6t=29 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{y+4}{x}=2x-2 \\ y=x^2-2x \end{cases}$

5) $\begin{cases} 48xy^2-9x^4=0 \\ x^3-4y^2-3=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{y-2}{x+1}=\dfrac{1}{(x+1)^2} \\ y=\dfrac{x}{x+1} \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=17 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}=-7 \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}xy=6 \\ x(y-12)=12(y-6) \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2+y^2-2x-4y-4=0 \\ 5x+5y-12=0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2y+xy^2=2 \\ y^2+2xy=0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \\ \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2a} \end{cases}$

12) $\begin{cases} x-y=\dfrac{1}{4}xy \\ x^2+y^2=\dfrac{5}{2}xy \end{cases}$

13) $\begin{cases} 4x-y+2z=2 \\ -3x+y-4z=-1 \\ x+5z=1 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x+3y+4z=-6 \\ -x+4y-6z=6 \\ 3x-2y+2z=2 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 3x-2y+z=-2 \\ 4x+3y-5z=5 \\ 5x-5y+3z=-4 \end{cases}$

RESPUESTAS L.

1) (1,3);	2) (6,-8);	3) (1,4);
4) (2,0), (-2,8);	5) ($\sqrt[3]{12}$,3/2), ($\sqrt[3]{12}$,-3/2)	6) (-3,3/2);
7) (1/2,1/3);	8) (4,3), (3,4);	9) (14/5,-2/5), (-7/5,19/5);
10) (1,-2);	11) (a,0);	12) (-2,-4), (4,2), (0,0);
13) (1,2,0);	14) (4/3,-2/3,-5/3);	15) (-1,-2,-3).

EJERCICIOS PROPUESTOS M.

Para cada uno de los siguientes problemas plantee y resuelva la ecuación correspondiente:

1) Una fábrica de chocolates elabora una barra de chocolate con caramelo que mide 10 cm de largo, 5 cm de ancho y 2 cm de alto. Al incrementar los costos de elaboración, la empresa decide recortar el volumen de la barra en un 28%

manteniendo la misma altura y reduciendo el largo y el ancho en cantidades iguales. ¿Cuál será el largo y el ancho de la nueva barra?.

2) Una firma posee 70 apartamentos, los cuales alquila a $250 mensuales. La empresa ha determinado que por cada aumento de $10 en el precio del alquiler se generan 2 vacantes sin posibilidades de ser cubiertas. La compañía necesita garantizar un ingreso mensual de $17980 por concepto de rentas. ¿A cuánto deberá alquilar cada apartamento?.

3) Rodrigo vendió dos automóviles recibiendo $13000, si recibió $1400 más por uno que por otro, ¿cuál fue el precio de venta de cada uno?

4) Encuentre dos números cuya suma sea 1/3 y su diferencia sea 3.

5) Se utilizó un pedazo de cartón cuadrado para construir una bandeja, cortando 2 pulgadas cuadradas en cada esquina y doblando después las pestañas. Encuentre el tamaño del cuadrado original si la bandeja tiene un volúmen de 128 pulgadas cúbicas.

6) Al hacer compras para su tienda, Lourdes pagó $4800 por unos vestidos y unos abrigos. Pagó $40 por cada vestido y $100 por cada abrigo. Vendió los vestidos con una ganancia del 20% y los abrigos con una ganancia del 50%. En total sus ganancias ascendieron a $1800. ¿Cuántos vestidos y cuántos abrigos compró?.

7) Un rectángulo tiene un perímetro de 26 y un área de 30. Encuentre sus dimensiones.

8) La asistencia a un juego de Béisbol Profesional Venezolano fue 45000 personas, y el dinero recaudado en la entrada fue Bs. 375000. Si cada persona compró un boleto de Bs. 10000 o un boleto de Bs. 15000, ¿cuántos boletos de cada tipo se vendieron?. *(Problema de introducción de esta unidad)*

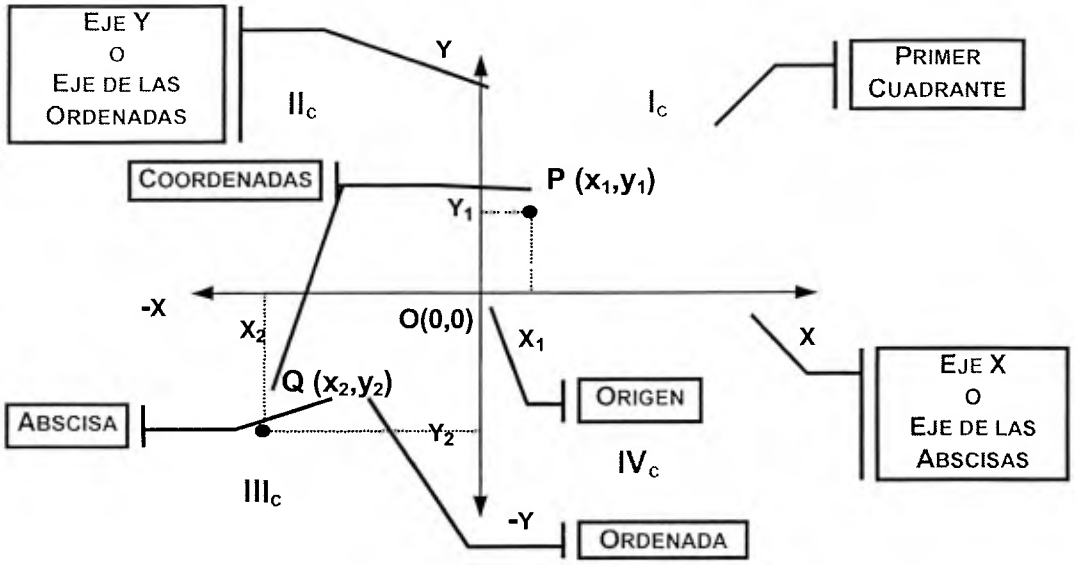
RESPUESTAS M.

1) 9cm, 4cm;	2) $310 ó $290;
3) $7200, $5800;	4) 5/3, -4/3;
5) 12x12 pulgadas;	6) 28 abrigos, 50 vestidos;
7) 3x10 u;	8) 36000 y 9000

---

6. ALGUNOS TÓPICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.

- Plano Cartesiano: sistema de coordenadas rectangulares formado por dos rectas perpendiculares. Sus elementos se muestran en la siguiente figura:



Dados los puntos P (x_1,y_1) y Q (x_2,y_2), se tiene que:

- Distancia entre dos puntos:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Se deduce aplicando el Teorema de Pitágoras

- Punto Medio:

$$Pm\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

- Pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Ecuación de la Recta:
  - Forma *Punto y Pendiente*: **$y - y_1 = m(x - x_1)$**
  - Forma *Reducida*: **$y = mx + b$**

- Forma *General*: **Ax + By + C = 0**

➢ Paralelismo y Perpendicularidad:

Suponga que se tiene la recta R_1 con pendiente m_1 y la recta R_2 con pendiente m_2, luego:

Si $m_1 = m_2$ entonces las rectas R_1 y R_2 son paralelas.

Si $m_1.m_2 = -1$ entonces las rectas R_1 y R_2 son perpendiculares.

➢ Distancia de un punto a una recta:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS N.

1) Demuestre mediante pendientes que:

a) Los cuatro puntos (0,0); (-2,1); (3,4) y (5,3) son vértices de un paralelogramo.

b) Los tres puntos (3,1); (6,0) y (4,4) son vértices de un triángulo rectángulo, y calcule su área.

c) Los cuatro puntos (-6,1); (-4,6); (4,-3) y (6,2) son vértices de un rectángulo.

d) Los cuatro puntos (-4,-1); (3,8/3); (8,-4) y (2,-9) son los vértices de un trapecio.

2) Dadas las rectas: L_1: $Ax - 3y + B - A = 0$

L_2: $2Ax - 3By + 5 = 0$

Encuentre los valores de A y B tales que :

a) L_1 pasa por (3,5) y L_2 pasa por (-1,0).

b) L_1 y L_2 se intersectan en el punto (1,3).

c) L_1 es perpendicular a L_2 y L_2 es paralela a $y = 4x - 10$.

3) Demuestre que los segmentos que unen los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

4) Demuestre que el segmento que unen los puntos medios de dos lados de cualquier triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

5) Hallar el valor de k para que la recta $4x - ky = 7$ tenga pendiente igual a 3.

6) Una recta que pasa por A(2,1) y es perpendicular a $3x + 4y - 12 = 0$; ¿en qué punto corta al eje x?.

7) ¿Cuál es el área del triángulo que tiene por vértices a (0,2); (5,3) y (-5,8)?.

8) Halle la ecuación de la recta perpendicular al segmento A(1,-3), B(3,5) en su punto medio.

9) El punto P equidista de A (-1,9); B (5,3) y C (3,-3). Halle sus coordenadas.

10) Hallar las coordenadas del punto en el cual la mediatriz del segmento (-2,6) (-4,2) corta a $x + 5 = 0$.

11) Determine un punto del eje x que equidista de (-1,0) y (-2,-3).

12) Hallar k para que los puntos A (1,3); B(5,7); C (2,k) sean colineales.

13) Los puntos medios de los lados de un triángulo son M(5,3); N(1,5); P(-1,-1). Halle las coordenadas de sus vértices.

14) Halle las ecuaciones de las diagonales de un rectángulo, tres de cuyos vértices son A (-2, 5/2); B(3,-5/2); C(7,3/2).

15) La recta L pasa por P(1,3) y forma con los ejes coordenados un triángulo de área 6 u^2. Halle su ecuación.

16) Demuestre que las diagonales de cualquier rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

17) Hallar la distancia entre las rectas $4y = 3x + 8$ y $8y = 6x + 5$.

18) Se dan las rectas $4x - 3y + 12 = 0$ y $y = 0$. Hallar la ecuación de la recta simétrica a la primera con respecto a la segunda.

19) Los extremos de la diagonal de un rectángulo son A (1,1) y C (9,5). Hallar los otros dos vértices.

20) La compañía ABC producen plumas que venden a $ 20 la pieza. El material y la mano de obra para hacer una pluma cuesta $ 16 y la compañía tiene gastos fijos anuales (alquileres, impuestos, etc.) de $ 8500. Escriba la ecuación para la ganancia P de la compañía para un año en que produce y vende x plumas. ¿Cuál es la ganancia si produce y venden 2000 plumas al año?. (Ganancia es la diferencia entre ingreso y costo.)

RESPUESTAS N.

2) a) A = 5/2; B = 10; b) A = 38; B = 9; c) A = -3/4; B = -1/8;

5) K = 4/3;	6) (5/4 , 0);	7) 75 / 2 u^2;
8) x + 4y – 6 = 0;	9) P (-2,2);	10) (-5,5);
11) (-6,0);	12) k= 4	13) (7,9); (-5,1); (3,-3);
14) 2x-18y-41=0; 8x+2y-49;	15) y = -3x+6	17) 11/10;
18) 4x+3y-12=0;	19) (3,7); (7,-1)	20) P(x)=4x-8500; -$500

UNIDAD I

FUNCIONES Y GRÁFICAS

El señor Andrés es dueño de un edificio ubicado en el centro de la ciudad. Cuenta con 10 pisos y 6 apartamentos por piso, disponibles para alquilar. Él puede alquilar todos los apartamentos si fija una cuota mensual de Bs. 200000 de alquiler.

Con un alquiler más alto algunos apartamentos quedarán vacíos. En promedio por cada aumento de Bs. 10000 en la cuota de alquiler, un apartamento quedará vacío sin posibilidad de alquilarse.

¿Cuál es la cuota de alquiler mensual que debería fijar el señor Andrés para obtener el máximo ingreso?

CONTENIDO

1.1 Funciones y su definición, dominio y rango.

1.2 Gráficas de funciones reales de variable real y otras curvas.

1.3 Operaciones con funciones y composición de funciones.

1.4 Función inversa.

1.5 Funciones exponenciales y logarítmicas.

1.6 Aplicaciones de las funciones:Modelos Funcionales.

1.7 Miscelánea de ejercicios.

UNIDAD I:

FUNCIONES Y GRÁFICAS

1.1 DEFINICIONES:

FUNCIÓN UNIFORME: es una regla que asigna a cada valor de una variable **X**, un valor, y sólo uno, de otra variable **Y**. Se denota *f(x)*, aunque también suelen utilizarse otras letras, por ejemplo: g(x), r(t), h(x), etc.

Si f es función entonces:

$$f= \{(x,y) \ / \ y = f(x)\}$$

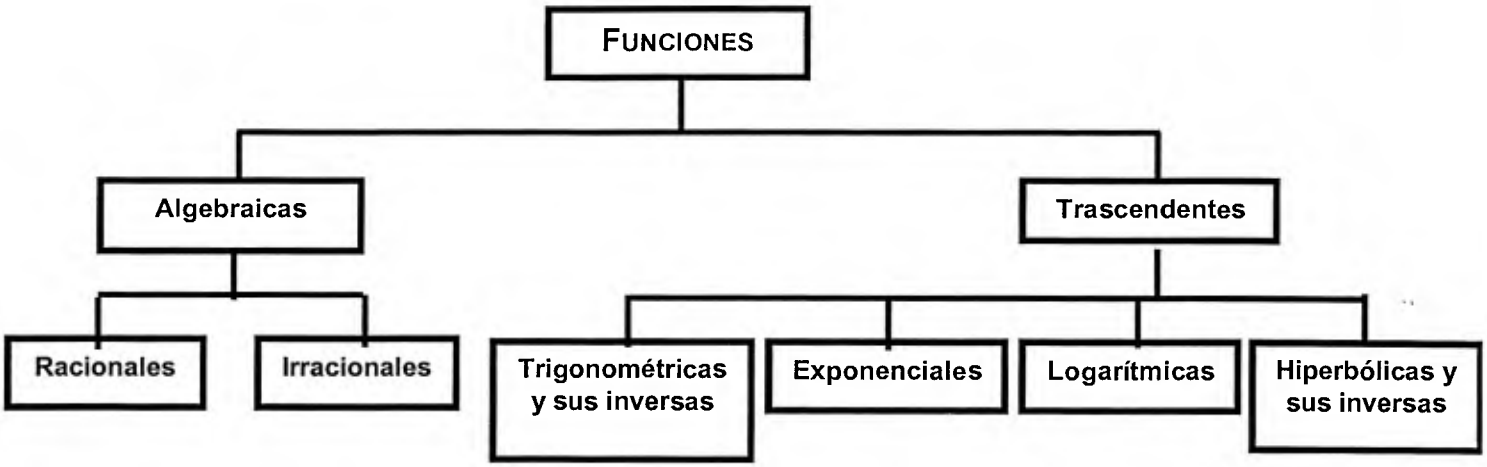
donde *y = f(x)* se lee "y es función de *x*", siendo **y** la *variable dependiente* y **x** la *variable independiente*.

DOMINIO: es el conjunto de todos los valores posibles de x. Se denota Domf.

RANGO: es el conjunto de todos los valores correspondientes a y. Se denota Rgo f.

FUNCIONES DE VALORES REALES DE VARIABLE REAL: son funciones cuyos dominios y rangos pertenecen al conjunto de los números reales.

CLASIFICACIÓN GENERAL DE LAS FUNCIONES:



NOTA

Para resolver estos ejercicios basta con sustituir la variable por el valor indicado y realizar las operaciones según el caso.

Ejemplo 1:

Dado $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4+2}$, hallar:

a)f(0), b) f(-1), c) f(3x), d) f(h-x), e) f(1/x), f) f(x^2)

Solución:

a) $f(0)=\dfrac{0^2-1}{0^4+2}=-\dfrac{1}{2}$

b) $f(-1)=\dfrac{(-1)^2-1}{(-1)^4+2}=0$

c) $f(3x)=\dfrac{(3x)^2-1}{(3x)^4+2}=\dfrac{9x^2-1}{81x^4+2}$

d) $f(h-x)=\dfrac{(h-x)^2-1}{(h-x)^4+2}$

¡¡CUIDADO!!

Evite estos errores:

f(3x) ≠ 3f(x)

Es decir: $\dfrac{(3x)^2-1}{(3x)^4+2}\neq 3\dfrac{x^2-1}{x^4+2}$

f(h-x) ≠ h-f(x)

Es decir: $\dfrac{(h-x)^2-1}{(h-x)^4+2}\neq h-\dfrac{x^2-1}{x^4+2}$

f(1/x) ≠ 1/f(x)

Es decir: $\dfrac{\left(1/x\right)^2-1}{\left(1/x\right)^4+2}\neq\dfrac{x^4+2}{x^2-1}$

f(x^2) ≠ [f(x)]^2

Es decir: $\dfrac{\left(x^2\right)^2-1}{\left(x^2\right)^4+2}\neq\left(\dfrac{x^2-1}{x^4+2}\right)^2$

e) $f(1/x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^4 + 2} = \dfrac{x^2(1-x^2)}{1+2x^4}$

f) $f(x^2) = \dfrac{(x^2)^2 - 1}{(x^2)^4 + 2} = \dfrac{x^4 - 1}{x^8 + 2}$

RECUERDA QUE...

Para demostrar una igualdad no se deben realizar operaciones entre los miembros de la ecuación, mas bien se deben trabajar cada miembro de forma independiente.

Ejemplo 2:

Si $f(t) = a^t$, para todo $a \in \mathbf{R}$. Demostrar

a) $f(t+4) - f(t-3) = (a^4 - a^{-3}).\ f(t)$

b) $\dfrac{f(t+2)}{f(t-7)} = f(9)$

c) $f(t+5).f(t-1) = a^4\ f(2t)$

Solución:

a) $f(t+4) - f(t-3) = (a^4 - a^{-3}).\ f(t)$

$a^{t+4} - a^{t-3} = (a^4 - a^{-3}).\ f(t)$ *Se sustituye en la función por la variable indicada*

$a^t.a^4 - a^t.a^{-3} = (a^4 - a^{-3}).\ f(t)$

$a^t(a^4 - a^{-3}) = (a^4 - a^{-3}).\ f(t)$ *Observe que f(t) = a^t*

b) $\dfrac{f(t+2)}{f(t-7)} = f(9)$

$$\frac{a^{t+2}}{a^{t-7}} = \frac{a^t.a^2}{a^t.a^{-7}} = a^9 = f(9)$$

c) $f(t+5).f(t-1) = a^4 f(2t)$

$a^{t+5}.a^{t-1} = a^4 f(2t)$

$a^t.a^5.a^t.a^{-1} = a^{2t}.a^4 = a^4 f(2t)$

¡CUIDADO!

No confundas la notación funcional con un producto.
Es decir:

$$\mathbf{f(t+5).f(t-1) \neq f(t).f(5).f(t).f(-1)}$$

Ejemplo 3:

Sea $f(x) = x^2 + 3x - 5$. Evaluar:

a) $f(x-2) - f(x)$, b) $f(x+a) + f(x-a)$, c) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$

Solución:

a) $f(x-2) - f(x) = \underbrace{(x-2)^2 + 3(x-2) - 5}_{f(x-2)} - \underbrace{(x^2 + 3x - 5)}_{f(x)}$

Desarrollando los productos y simplificando... ⇨ $= x^2 - 4x + 4 + 3x - 6 - 5 - x^2 - 3x + 5 = -4x - 2$

b) $f(x+a) + f(x-a) = \underbrace{(x+a)^2 + 3(x+a) - 5}_{f(x+a)} - \underbrace{[(x-a)^2 + 3(x-a) - 5]}_{f(x-a)} = 4ax + 6a$

Desarrollando los productos y simplificando, se obtiene el resultado.

NOTA
Queda de parte del estudiante comprobar los resultados realizando las operaciones necesarias.

c) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x-h)^2 + 3(x-h) - 5 - (x^2 + 3x - 5)}{h} = 2x + h + 3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS I.A.

1) Dado $g(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$, determinar:

(a) g(1), (b) g(-3), (c) g(5-x), (d) $\dfrac{g(h+3)}{g(h)}$

2) Dado f(t) = $\sqrt{5t^2-4}$, determinar:

(a) f($\sqrt{5t^2-4}$), (b) $f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)$, (c) $\dfrac{f(h+t)-f(t)}{h}$, $h \neq 0$

3) Si $h(x) = a^{kx+1}$, para todo a, k $\in$ **R** , demuestre que:

(a) $\dfrac{h(x+1)}{h(x-1)} = a^{2k}$, (b) $h(x-k).h(x+k) = [h(x)]^2$, (c) $\dfrac{h(kx-2)}{h(kx+2)} = a^{-4kx}$

4) En la función f(x)= x + 1/x, demostrar que:

(a) $[f(x)]^2 = f(x^2) + 2$, (b) f(t) = f(1/t)

5) Si $y = 3x^2 - 2x + 5$ y $x = 3t - 1$, hallar y = f(t).

6) Si $y = \dfrac{\sqrt{5x^2+10}}{x^4+3}$ y $x = \sqrt{t^2-2}$, hallar y = f(t)

7) Si $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, hallar x = f(y)

8) Si $u = \sqrt[4]{\dfrac{t^3 - 1}{4}}$, hallar t = f(u)

9) Dada $f(x) = x^3 - 1$, hallar $(f(a) - f(b)) / (a-b)$, $a \neq b$

10) Dado z = f(t) = (t + 1) / (t -1), hallar:

(a) $f(t^2)$; (b) $[f(t)]^2$; (c) 3f(t);

(d) f(3t); (e) f(t/3); (f) f(t) /3

11) Si $f(t) = (a^t+a^{-t})$ y $g(t) = (a^t-a^{-t})$, demuestre que $f(p)f(q)+g(p)g(q)=f(p+q)$

12) Si $f(b) = ab^2+a^2b$, demuestre que $f(a)f(b)=2a^4b(b+a)$

RESPUESTAS I.A

1) (a) 1, (b) 1/5, (c) $\dfrac{2}{x^2-10x+26}$, (d) $\dfrac{h^2+1}{(h+3)^2+1}$

2) (a) $\sqrt{25t^2-24}$, (b) $\dfrac{\sqrt{t^2-18t+1}}{t+1}$, (c) $\dfrac{25h+t}{\sqrt{5(h+t)^2-4}+\sqrt{5t^2-4}}$

5) $y = 27t^2 - 24t + 5$, 6) $y = \dfrac{\sqrt{5}t}{t^4-4t^2+7}$

7) $x = \dfrac{b-dy}{cy-a}$, 8) $t = \sqrt[3]{4u^4+1}$ 9) $a^2 + ab + b^2$

10) (a) $\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$, (b) $\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)^2$, (c) $\dfrac{3t+3}{t-1}$, (d) $\dfrac{3t+1}{3t-1}$, (e) $\dfrac{t+3}{t-3}$, (f) $\dfrac{t+1}{3t-3}$

RESTRICCIONES EN LAS FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL. DETERMINACIÓN DEL CAMPO DE EXISTENCIA.

PARA HALLAR EL DOMINIO:

Al definir funciones se deben considerar dos restricciones, (existe una tercera restricción que será considerada mas adelante, al estudiar la función logarítmica).:

- Evitar la división por cero:

Es decir, toda función en el cual el denominador está contenida la variable, se deberá excluir del dominio los valores de x para los cuales el denominador se hace cero.

- En el caso de raíces de índice par, la variable no debe tomar valores que producen resultados negativos dentro de la raíz.

Ejemplo 4:

Hallar el dominio de $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1}$

-y despejar $x = \frac{1}{2}$

Solución:

Debemos hallar los valores de x que hacen cero al denominador:

$$2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = ½$$

Luego, $\text{Dom } f=\{x \,/\, x \in \mathbf{R}\,,\ x \neq ½\}$

Otra forma de expresar dominio:

$$\text{Dom: } x \in \mathbf{R} - \{½\},$$

o bien,

$$\text{Dom: } x \in (-\infty\,,\ ½\,) \cup (½\,,\ \infty)$$

Ejemplo 5:

Hallar el dominio de $y = \dfrac{5x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 - 35x}$

Solución

Para hallar los valores de x que hacen el denominador cero, es necesario factorizar:

$$x^3 - 2x^2 - 35x = x(x - 7)(x + 5) = 0$$

Luego, las raíces son:

$$x = 0, \quad x = 7 \quad y \quad x = -5$$

El dominio son todos los valores de x excluyendo, por supuesto, las raíces del denominador:

$$x \in \mathbb{R} - \{-5, 0, 7\}$$

Ejemplo 6:

Hallar el dominio de $y = \sqrt[4]{x^2 - 4}$.

¡¡CUIDADO!!

Evite este error:

$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$

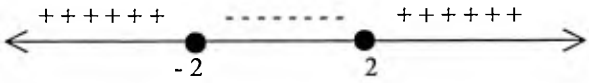
No debe extraer raíces pares en una inecuación.

Solución:

Se debe resolver la inecuación

$$x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (x - 2).(x + 2) \geq 0$$

Ubicamos las raíces x = 2 y x = -2 en la recta real y estudiamos el signo de cada intervalo:



Al sustituir cualquier número de un intervalo, por ejemplo x = 0 en [-2 , 2], en la inecuación observamos que:

$$(0 - 2).(0 + 2) < 0 \qquad \text{(Resultado negativo)}$$

Luego, cualquier valor $x \in (-2, 2)$ producirá un resultado negativo. Así mismo, cualquier valor $x \notin (-2, 2)$ producirá resultados mayores o iguales a cero.

El dominio, entonces, es Dom: $x \in (-\infty , -2] \cup [2, \infty)$

Ejemplo 7:

Hallar el dominio de $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

Solución:

En este caso se debe considerar ambas restricciones:

$$x^2 - 9 > 0 \Longrightarrow (x - 3).(x + 3) > 0$$

Ubicamos x = 3 y x = -3 en la recta real:

La solución que satisface la inecuación es el dominio:

$$\text{Dom:} \quad x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

Ejemplo 8:

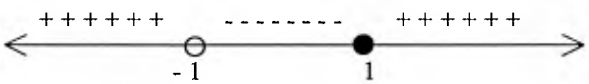
Hallar el dominio de $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Solución:

Se resuelve la inecuación $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$.

Obtenemos las raíces del numerador: x = 1 y *denominador:* x = -1

y los ubicamos en la recta real,



Observe que x=-1 hace cero al denominador. Por lo tanto no puede ser incluido en el dominio.

Dom: $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$

Ejemplo 9:

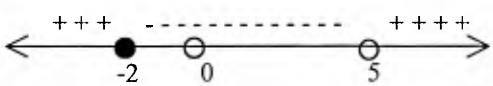
Hallar el dominio de $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-5}} + \dfrac{1}{2x}$

Solución:

El dominio, en este caso, es la intersección de los dominios de cada término:

$$\frac{x+2}{x-5} \geq 0 \qquad y \qquad 2x \neq 0$$

Luego,



Dom: $x \in (-\infty, -2] \cup (5, \infty)$

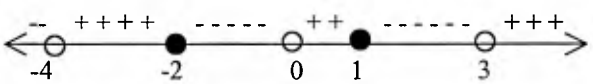
Ejemplo 10:

Hallar el dominio de $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - 12x}}$

Solución:

Resolvemos la inecuación ya factorizada:

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+4)(x-3)} \geq 0 \qquad \text{y ubicamos las raíces} \begin{cases} x = -2,\ x=1 \text{ (Numerador)} \\ x=0,\ x=-4,\ x=3 \text{ (Denominador)} \end{cases}$$



Dom: $x \in (-4, -2] \cup (0, 1] \cup (3, \infty)$

<u>PARA HALLAR EL RANGO</u>:

No siempre es posible hallar el rango de una función, pues para ello lo ideal es despejar *x* en función de *y*.

Ejemplo 11:

Hallar el rango de $y = \dfrac{4 - 5x}{2x - 1}$

Despejamos *x* en función de *y* ⟹ $x = \frac{4+y}{2y+5}$

Luego, observamos el denominador y excluímos del rango los valores de *y* que dan como resultado *cero* en el denominador.

De esta manera: $y \neq -5/2$ ⟹ Rango: **R** – {-5/2}

Ejemplo 12:

Hallar el rango de $y = 5x - x^2 + 6$

Aplicamos Resolvente de una Ecuación Cuadrática

Para obtener x en función de y: $x^2 - 5x + y - 6 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{49-4y}}{2}$ donde $49 - 4y \geq 0$

Resolviendo la inecuación se obtiene el rango: $(-\infty, 49/4]$

Ejemplo 13:

Hallar el rango de $xy2 + 3y2 - x + 1 = 0$

Se obtiene *x* en función de *y*, luego se factoriza: $x = \frac{-3y^2 - 1}{(y-1)(y+1)}$

Se excluye los valores que dan como resultado cero en el denominador:

Rango: **R** – {-1 , 1}

EJERCICIOS PROPUESTOS I.B.

Determine el dominio de las siguientes funciones:

1) $y=\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ 2) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x^2+x-12}}$ 3) $y=\sqrt{\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-2x-8}}$

4) $y=\dfrac{\sqrt{3x-4}}{x^2-7}$ 5) $y=\dfrac{\sqrt{3x^2-12}}{x^5-2x^3}$ 6) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{2x^3+12x^2-x-6}$

Determine el dominio de las funciones y = f(x):

7) $x^2 - xy + 1 = 0$ 8) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

9) $x^2y - x^2 - y = 0$ 10) $xy^2 + 3y^2 - x + 1 = 0$

RESPUESTAS I.B.

(1) $(-\infty, 0] \cup (1, \infty)$ (2) $(-\infty, -4) \cup [0,1] \cup (3, \infty)$

(3) $(-\infty, -4/3) \cup [1/2, 2) \cup [5, \infty)$ (4) $[4/3, \sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)$

(5) $(-\infty, -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}, \infty)$ (6) $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 6\right\}$

(7) $\mathbb{R} - \{0\}$ (8) $\mathbb{R}$

(9) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (10) $(-\infty, -3) \cup [1, \infty)$

EJERCICIOS PROPUESTOS I.C.

Determine el rango:

1) $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ 2) $y = \frac{4x-5}{2x^2-2}$ 3) $y = \frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$

4) $x^2+2xy+y^2-2x-2y-1=0$ 5) $y^2(x^2-4) = x^4$ 6) $xy - 2y + 4 = 0$

RESPUESTAS I.C.

1) [0.1); 2) $(-\infty,0)\cup(0,1/2]\cup[2,\infty)$; 3)R-{1}; 4)$(-\infty,-0.26]\cup[2.26,\infty)$;

5) $(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$; 6) R-{0}

1.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL Y OTRAS CURVAS

La gráfica de una función real en el *plano cartesiano* es el conjunto de puntos de dicho plano cuyos *pares ordenados* satisfacen la ecuación de la función.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL:

El cálculo nos proporciona valiosas herramientas para realizar una buena representación gráfica de una función. Estas herramientas serán conocidas a medida que avancemos en el curso. Sin embargo, ahora es útil seguir los siguientes pasos para *esbozar* la gráfica de una función:

- Hallar el dominio de la función y el rango si es posible.

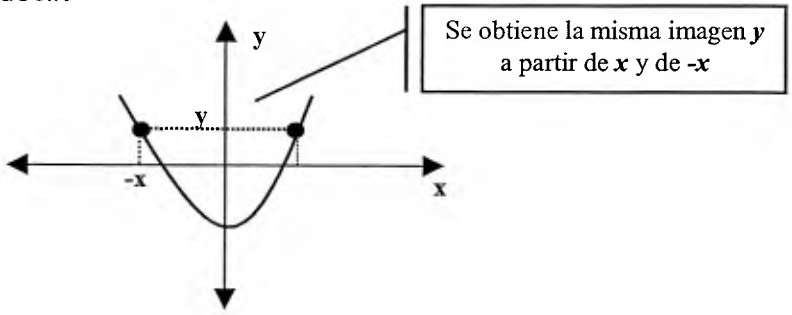
- Realizar una tabla de valores que satisfacen la función: para seleccionar estos valores se recomienda:

  - Buscar los puntos de corte con los ejes coordenados, haciendo $x = 0$ e $y = 0$.
  - Buscar puntos cerca del origen.
  - Buscar puntos en los extremos del dominio, cuando es posible.

- Verifique si la curva es **SIMÉTRICA**:

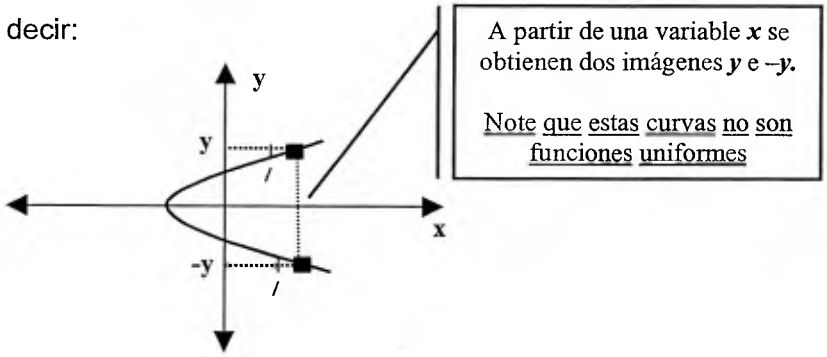
  - Si f(x) = f(-x) es simétrica con respecto al eje y.

    Es decir:



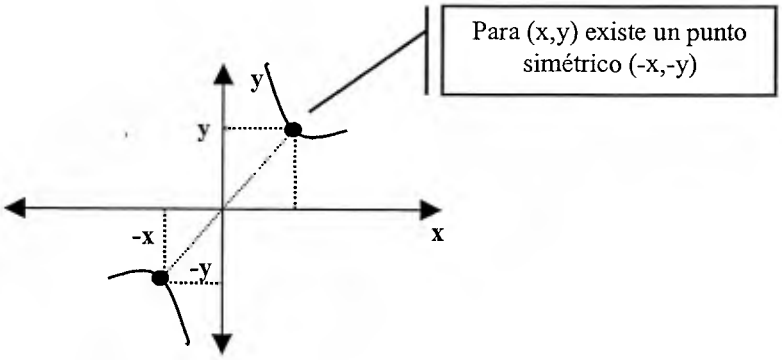
  - Si f(x) = -f(x) es simétrica con respecto al eje x.

    Es decir:



  - Si f(x) = -f(x) es simétrica con respecto al origen.

    Es decir:



ASÍNTOTAS DE UNA CURVA: son rectas tangentes a la curva en el infinito. Pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.

- *Asíntotas verticales:* son de la forma **x = k.**, siendo k las raíces del denominador. Una función puede tener varias asíntotas verticales.

- *Asíntotas horizontales:* son de la forma **y = k**. Para obtenerla se despeja x en función de y, luego k es la raíz del denominador.

En caso de no ser posible despejar x en función de y, en una función racional, tome en cuenta lo siguiente:

Sea $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$, y además $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ no es simplificable, entonces

(i) Si n > m no hay asíntotas horizontales.

(ii) Si n = m entonces $y = a_n/b_m$ es asíntota horizontal.

(iii) Si n < m entonces y = 0 es asíntota horizontal.

- *Asintotas oblicuas:* son de la forma **y = mx + b.**

NOTA
La justificación matemática se considerará en el estudio de límites, al igual que la obtención de asíntotas oblicuas.

Ejemplo 14:

Hallar la gráfica de y = 3x + 4

Solución:

> **NOTA**
> Toda función representada por una ecuación lineal tiene como gráfica una RECTA.
>
> En este caso basta sólo dos puntos para realizar la gráfica.

(1) Buscamos los puntos de corte:

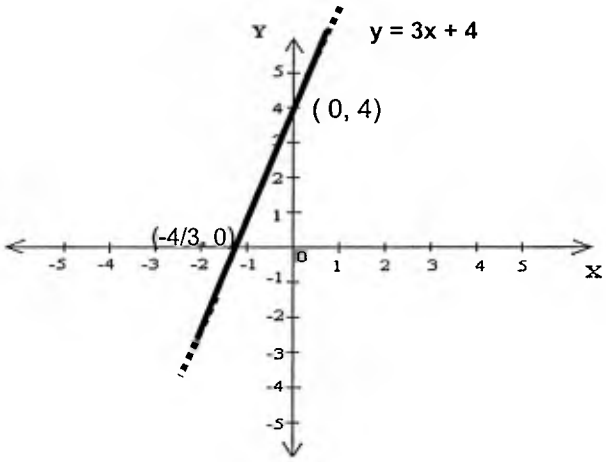
x = 0	y = 4	(0 , 4)
y = 0	x = - 4/3	(-4/3, 0)

(2) Dominio: $x \in \mathbf{R}$

(3) No hay simetría con el eje y ni con el origen.

(4) Tabla:

X	Y
-2	-2
-1	1
0	4
1	7



Ejemplo 15:

Esbozar la gráfica de $y = \dfrac{1}{2-x}$

Solución:

(1) Buscando puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \quad y = ½$ $\qquad$ $(0 , ½)$

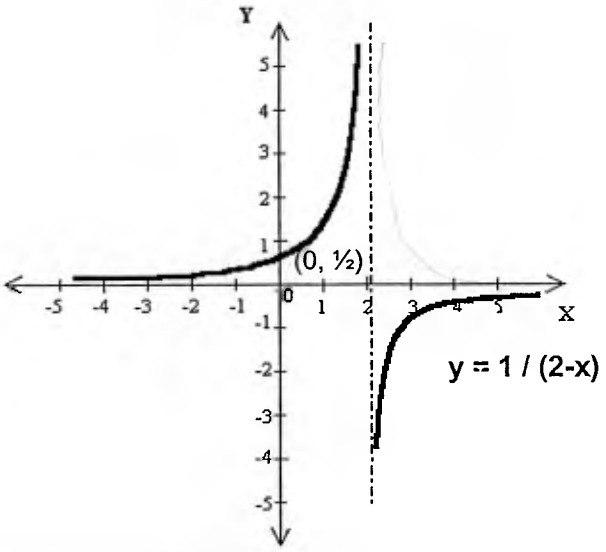
$y = 0 \quad x \nexists$ $\qquad$ No hay valores de x para y = 0

(2) Dominio: $x \in \mathbf{R} - \{2\}$

(3) No hay simetría con el eje y ni con el origen.

(4) Tabla:

X	Y
-2	1 /4
-1	1/3
1	1 /2
3	-1
4	-1/2



NOTA
Observe que x = 2 está fuera del dominio e y = 0 está fuera del rango, por lo tanto la curva no toma esos valores.

Ejemplo 16:

Esbozar la gráfica de $y = \sqrt{x - 4}$

Solución:

(1) Puntos de corte:

$x = 0$ $\quad y \nexists$ $\quad$ No corta al eje y.

$y = 0$ $\quad x = 4$ $\quad (4, 0)$

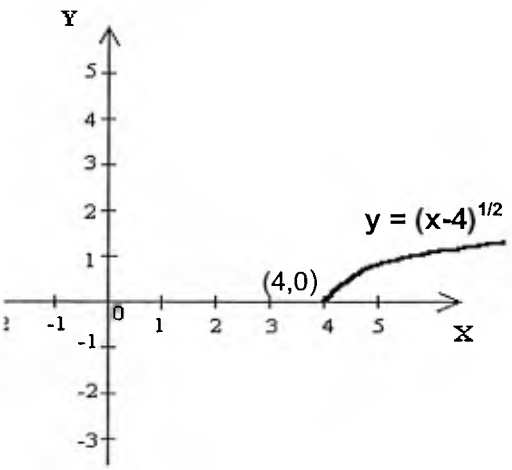
(2) Dominio: $x \in [4, \infty)$

NOTA
Observe que para $x < 4$ no hay función, por lo tanto no hay gráfica.

(3) No hay simetría con el eje y ni con el origen.

(4) Tabla:

X	Y
5	1
6	$2^{1/2}$
7	$3^{1/2}$
8	2
9	$5^{1/2}$



Ejemplo 17:

Esbozar la gráfica de $x^2y - 4y = 8$

Solución:

(1) Puntos de corte con los ejes coordenados: (0, 2)

(2) Dominio: $y = \dfrac{8}{(x-2)(x+2)}$; luego, $x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

(3) Rango: $x = \pm\sqrt{\dfrac{8+4y}{y}}$; luego, el rango es (- ∞, -2] ∪ (0, ∞)

(4) Simetría: con el eje y

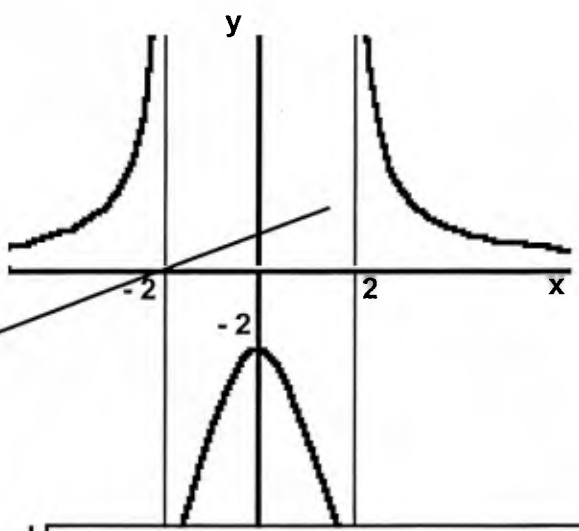
(5) Asíntotas: Asíntotas Verticales: x = 2; x = -2

Asíntota Horizontal: y = 0

(6) Tabla:

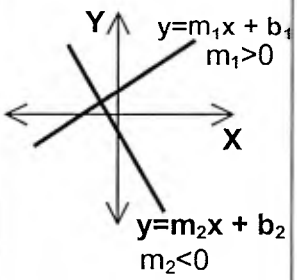
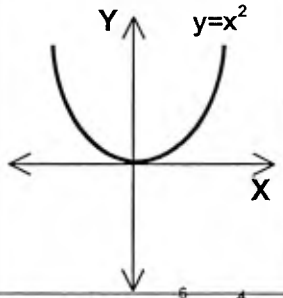
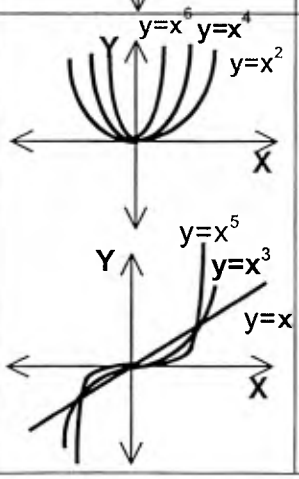
X	Y
-4	2/3
-3	8/5
-1	-8/3
0	-2
1	-8/3
3	8/5
4	2/3

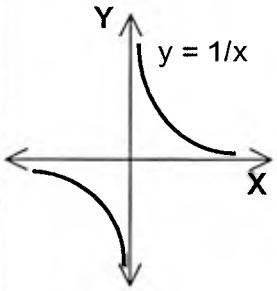
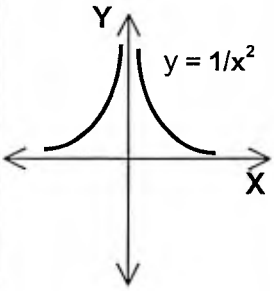
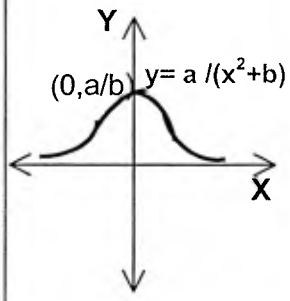
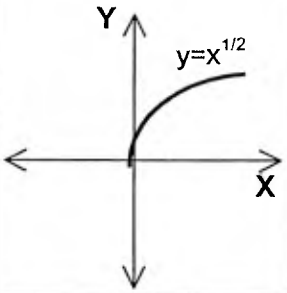
Observa la simetría en los valores de la tabla

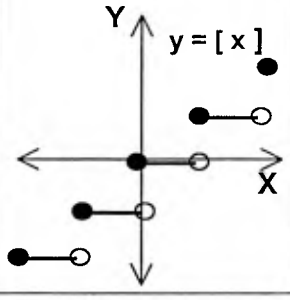
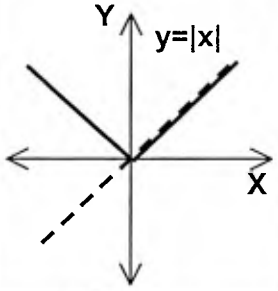
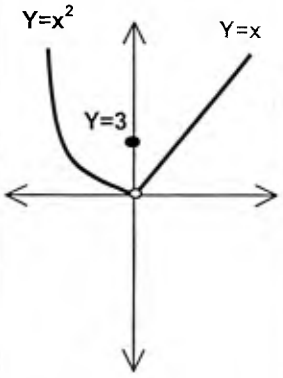


Para facilitar el esbozo de la gráfica primero ubica las asíntotas y los puntos de la tabla.

ALGUNAS FUNCIONES NOTABLES Y SUS GRÁFICAS:

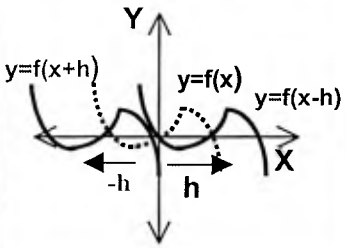
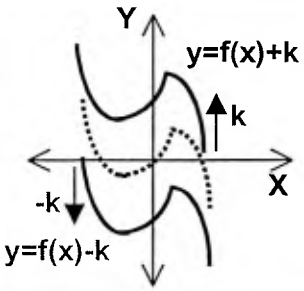
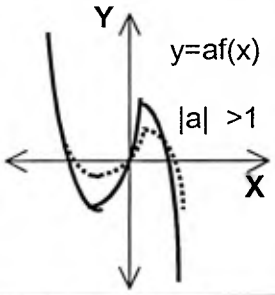
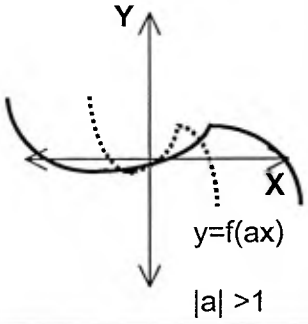
FUNCIÓN	ECUACIÓN	DOMINIO	GRÁFICA	OBSERVACIONES
LINEAL	$y = mx + b$	$x \in \mathbf{R}$		• Basta dos puntos para graficar. • m es pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, m>0 , recta creciente m<0 , recta decreciente m=0 , recta horizontal. • b es ordenada en el origen. • Dos rectas notables: **y=b** Función constante **y=x** Función identidad
CUADRÁTICA	$Y=ax^2+bx+c$ o bien $y=a(x-h)^2+k$ $(a \neq 0)$	$x \in \mathbf{R}$		• Vértice (h,k) • Simetría con x=h. • Si a>0 abierta hacia arriba. • Si a<0 abierta hacia abajo.
POLINÓMICAS	y=P(x) donde P(x) es polinomio.	$x \in \mathbf{R}$		Casos Particulares: $y=x^{2p}$ • Simetría con respecto al eje y. • 2p>0 la curva se hace "más cerrada". $y=x^{2p+1}$ Simetría con respecto al origen.

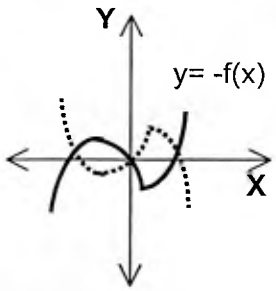
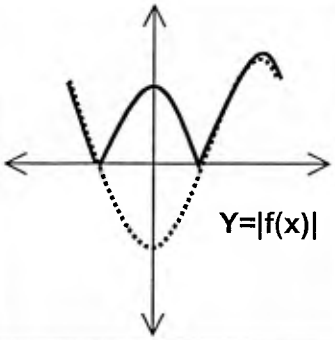
FUNCIÓN	ECUACIÓN	DOMINIO	GRÁFICA	OBSERVACIONES
RACIONAL	y=P(x) / Q(x) donde P(x) y Q(x) son polinomios.	x tal que Q(x) ≠ 0	  	• Generalmente poseen asíntotas. Casos Particulares: **y = 1/x** • Simetría con respecto al origen. • Asíntotas: los ejes coordenados. **y = 1/x²** • Simetría con respecto al eje y. • Asíntotas: los ejes coordenados. **y = a /(x² + b)** • Simetría con respecto al eje y. • Asíntota: eje x. • Punto de corte en el eje y : (0, a/b)
RAÍZ CUADRADA	$y=\sqrt{x-h}$	x-h≥0		• Es semiparábola de eje horizontal.

FUNCIÓN	ECUACIÓN	DOMINIO	GRÁFICA	OBSERVACIONES
PARTE ENTERA (MÁXIMO ENTERO CONTENIDO EN)	$y = [\,x\,]$	$x \in \mathbf{R}$		• Por definición, si k es entero y se cumple que $k \leq x < k+1 \Rightarrow [\,x\,] = k$ Luego, el rango es $\mathbf{Z}$ (Ej: [1,5] = 1; [3,8] = 3; [-2,6] = -3; [-0,1] = -1;
VALOR ABSOLUTO	$y = \lvert x \rvert$	$x \in \mathbf{R}$		• Por definición $\lvert x \rvert = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$
FUNCIÓN POR INTERVALOS	Ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x<0 \\ 3 & \text{si } x=0 \\ x & \text{si } x>0 \end{cases}$	Según f(x)	Del Ejemplo: 	Son funciones cuya imagen varía según el intervalo del eje x que se considere.

TRANSFORMACIONES DE UNA FUNCIÓN:

La función y = f(x) puede sufrir los siguientes cambios en su estructura:

TRANSFORMACIÓN	CAMBIO EN LA GRÁFICA	GRÁFICA
y=f(x ± h) **(h ∈ R)**	• Se traslada h unidades horizontalmente: Si h>0 , hacia la derecha Si h<0 , hacia la izquierda	
y=f(x) ± k **(k ∈ R)**	• Se traslada k unidades verticalmente: Si k >0 , hacia arriba Si k <0 , hacia abajo	
y=af(x) **(a ∈ R)**	• Si |a| >1 se expande verticalmente. • Si |a| <1 se contrae verticalmente.	
y=f(ax) **(a ∈ R)**	• Si |a| >1 se expande horizontalmente. • Si |a| <1 se contrae horizontalmente.	

TRANSFORMACION	CAMBIO EN LA GRAFICA	GRAFICA
y= -f(x)	• La gráfica se refleja con respecto al eje x. (Es simétrica a f(x) con respecto al eje x)	
Y= |f(x)|	• La parte negativa (por debajo del eje x) de la gráfica se refleja por encima del eje x.	

EJERCICIOS PROPUESTOS I.D.

Esbozar la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

(Sugerencia: observe si la función es una función notable con algunas transformaciones, halle puntos de corte con los ejes coordenados, dominio, rango, simetría, asíntotas (si las hay) y elabore una tabla con valores cercanos a los valores hallados de x.)

1) $y = -3x^2 + 6x - 4$

2) $y = (x-3)^4 + 2$

3) $y = -(x+2)^5 - 1$

4) $y = \dfrac{1}{x-3} + 4$

5) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2} - 4$

6) $y = \dfrac{x-2}{x^2 - 3x - 4}$

7) $y = \dfrac{3}{x^2 + 2}$

8) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - x - 2}$

9) $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

10) $y = -\sqrt{x+1}$

11) $y = |x^2 + 4x + 1|$

12) $y = [\,x-1\,]$

13) $y = [\,x\,] - x$

14) $y = |1 / x + 1|$

15) $y = \dfrac{4x - 5}{2x^2 - 2}$

16) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

17) $y = \dfrac{x}{|x|}$

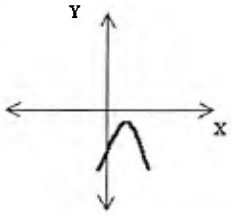
18) $y = \dfrac{1}{x^2 - 8x + 16}$

19) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$

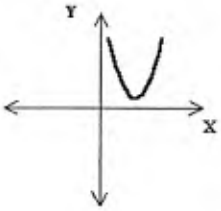
20) $y = \left|\dfrac{1}{x-4} + 2\right|$

RESPUESTAS I.D.

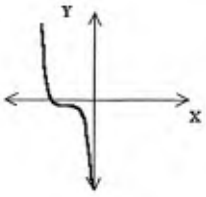
1)



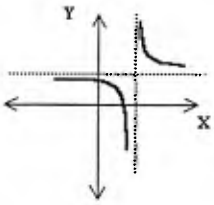
2)



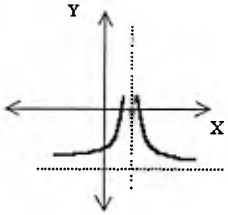
3)



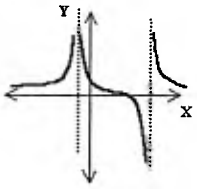
4)



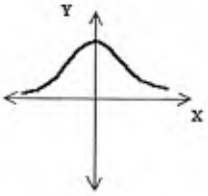
5)



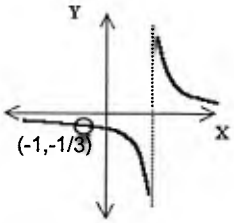
6)



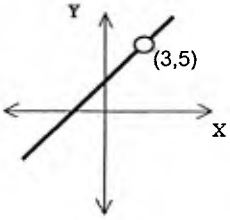
7)



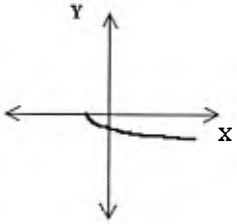
8)



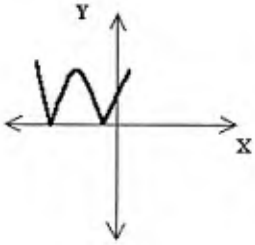
9)



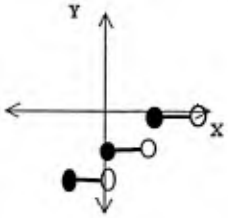
10)



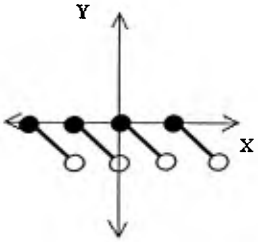
11)



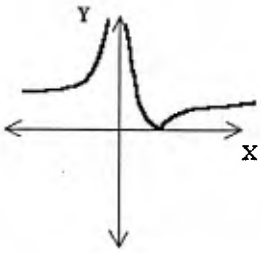
12)



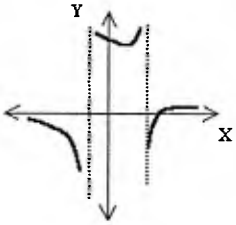
13)



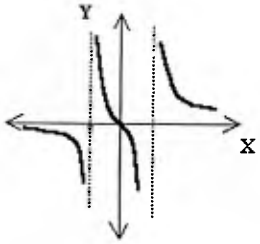
14)



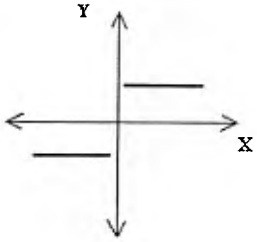
15)



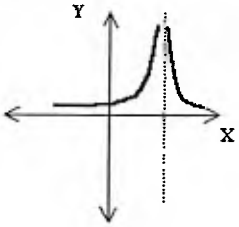
16)



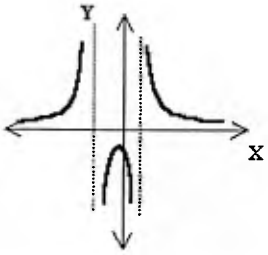
17)



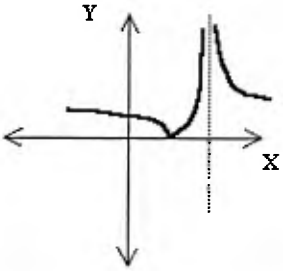
18)



19)



20)



1.3 Operaciones con funciones y composición de funciones.

Operaciones con Funciones:

Suponga que f(x) y g(x) son dos funciones con dominios Dom f y Dom g respectivamente. Se definen, entonces, las siguientes funciones:

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

Cociente: $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$; $g(x) \neq 0$

El dominio en los 3 primeros casos es Dom f $\cap$ Dom g.

En el caso del cociente, además de intersectar los dominios es necesario excluir los valores de x donde g(x) = 0.

Ejemplo 18:

Sea $f(x) = \frac{1}{x-2}$ y $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

Hallar las siguientes funciones y sus dominios:

(a) (f+g)(x); (b)(f-g)(x); (c)(f.g)(x).

Solución:

(a) (f+g)(x) = f(x) + g(x) = $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}+x+2}{(x-2).\sqrt{x-1}}$

Dom(f+g) = Dom f $\cap$ **Dom** g

Dom f = $x \in$ **R** - {2} Dom g = $x \in (1, \infty)$

Luego:

Dom(f+g) = Dom f $\cap$ **Dom** g = (1,2) $\cup$ (2, ∞)

(b) (f-g)(x) = f(x) - g(x) = $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}-x-2}{(x-2).\sqrt{x-1}}$

Luego:

Dom(f-g) = Dom(f+g) = (1,2) $\cup$ (2, ∞)

(c) (f.g)(x) = $\frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-2).\sqrt{x-1}}$

Luego:

Dom(f.g) = Dom(f-g) = Dom(f+g) = (1,2) $\cup$ (2, ∞)

Ejemplo 19:

Sea h(x) = $\sqrt{x+4}$; g(x) = $\sqrt{x^2-4}$

Hallar las siguientes funciones y sus dominios:

(a) (f+g)(x); (b)(f-g)(x); (c)(f.g)(x); (d)(f/g)(x); (e)(g/f)(x).

Solución:

(a) (f+g)(x) = $\sqrt{x+4}$ + $\sqrt{x^2-4}$

Dom f = [-4, ∞) Dom g = (-∞,-2] ∪ [2, ∞)

* Dom (f+g) = [-4,-2] ∪ [2, ∞)

(b) (f-g)(x) = $\sqrt{x+4}$ - $\sqrt{x^2-4}$

(c) (f.g)(x) = $\sqrt{(x+4)(x^2-4)}$

* Observe que para las tres operaciones anteriores Dom(f.g) = Dom(f-g) = Dom(f+g) = Dom f ∩ Dom g = [-4,-2] ∪ [2, ∞)

(d) (f/g)(x) = $\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2-4}} = \dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}$

Dom f ∩ Dom g $\underbrace{- \{ x \in \mathbf{R} \,/\, \sqrt{x^2-4} = 0\}}$

Es decir, excluímos los valores de x tal que g(x) = 0

Luego, el dominio es:

[-4,-2] ∪ [2, ∞) – {-2,2} = [-4,-2) ∪ (2, ∞)

(e) (g/f)(x) = $\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x+4}}$

Dom f ∩ Dom g – { x ∈ **R** / $\sqrt{x+4}$ = 0}

Luego, el dominio es:

[-4,-2] ∪ [2, ∞) – {-4} = (-4,-2] ∪ [2, ∞)

EJERCICIOS PROPUESTOS I.E

Para las siguientes funciones hallar: (a) (f+g)(x), (b) (f-g)(x); (c) (f.g)(x); (d)(f/g)(x) y sus respectivos dominios.

1) $f(x) = x-5$; $g(x) = x^2 - 1$

2) $f(x) = x^{1/2}$; $g(x) = x^2 + 1$

3) $f(x) = (x-3)^{1/2}$; $g(x)= (x-4)^{-1}$

4) $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x-2$

5) $f(x) = x^{1/2}$; $g(x) = x^2 - 1$

6) $f(x) = (x+1)^{-1}$; $g(x) = x / (x-2)$

7) $f(x) = (x+1) / (x-1)$; $g(x) = 1 / x$

8) $f(x) = 1 / (x^3 - 1)$; $g(x) = x^{1/2}$

9) $f(x) = x^2 - x$; $g(x) = x+5$

10) $f(x) = (1+x)^{1/2}$; $g(x) = (x^2-1)^{1/2}$

RESPUESTAS I.E.

1) Dom f $\cap$ Dom g = **R** ; (a) x^2+x-6; (b) $-x^2+x-4$; (c) x^3-5x^2-x+5; (d) $(x-5) / (x^2-1)$ Dom(f/g) = **R** – {-1;1}.

2) Dom f $\cap$ Dom g = $[0, \infty)$; (a) $x^{1/2} + x^2+1$; (b) $x^{1/2} - x^2-1$; (c) $x^{1/2}(x^2+1)$; (d) $x^{1/2}/(x^2+1)$; Dom(f/g) = $[0, \infty)$.

1) Dom f $\cap$ Dom g = $[3,4) \cup (4, \infty)$; (a) $[(x-3)^{1/2} (x-4) + 1] / (x-4)$; (b) $[(x-3)^{1/2} (x-4) - 1]/ (x-4)$; (c) $(x-3)^{1/2} / (x-4)$; (d) $(x-3)^{1/2} (x-4)$.

2) Dom f $\cap$ Dom g = **R** ; (a) x^2+3x-1; (b) x^2-3x+3 ; (c) $3x^3-2x^2+3x-2$; (d)$(x^2+1)/(3x-2)$ Dom(f/g) = **R** – {2/3}.

3) Dom f $\cap$ Dom g=$[0, \infty)$; (a) $x^{1/2} +x^2-1$; (b) $x^{1/2}- x^2 + 1$; (c) $x^{1/2}(x^2-1)$; (d) $x^{1/2}/(x^2-1)$; Dom(f/g) = $[0, 1) \cup (1, \infty)$.

6) Dom f $\cap$ Dom g = **R** - {-1,2}; (a) $(x^2+2x-2)/(x^2-x-2)$;(b) $(-x^2-2)/(x^2-x-2)$; (c) $x/(x^2-x-2)$; (d) $(x-2)/x(x+1)$.

7) Dom f $\cap$ Dom g = **R** - {0 ,1};(a)$(x^2 +2x-1)/(x^2-x)$;(b) $x^2+1)/(x^2-x)$; (c) $(x+1)/(x^2-x)$; (d) $x(x+1)/(x-1)$.

8) Dom f $\cap$ Dom g = $[0, 1) \cup (1, \infty)$.; (a) $[1+ x^{1/2}(x^3-1)]/(x^3-1)$; (b)$[1 - x^{1/2}(x^3-1)]/(x^3-1)$; (c) $x^{1/2} / (x^3-1)$; (d) $1/ x^{1/2} (x^3-1)$.

9) Dom f $\cap$ Dom g = **R** ; (a) x^2+5 , (b) x^2-2x-5 ; (c) $x^3 + 4x^2 -5x$; (d) $(x^2-x) / (x+5)$.

10) Dom f $\cap$ Dom g = $\{-1\} \cup [1, \infty)$; (a) $(1+x)^{1/2} + (x^2-1)$; (b) $(1+x)^{1/2} - (x^2-1)$; (c) $(1+x)(x-1)^{½}$; (d) $1/(x-1)^{½}$.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Definición: Sean f y g funciones reales. La función $(f_o g)(x)$ (se lee f compuesta con g) es la función real cuyo dominio está formado por los elementos de $x \in$ Dom g tales que $g(x) \in$ Dom f, regla de correspondencia:

$$(f_o g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo 20:

Dado $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + 1$; $h(x) = 1/x$

Hallar: (a) $(f_o g)(x)$; (b) $(g_o f)(x)$; (c) $(f_o g_o h)(x)$

Solución:

(a) $(f_o g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2+1}$

(b) $(g_o f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$

(c) $(f_o g_o h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(1/x)) = f(1/x^2 + 1) = \sqrt{1/x^2 + 1}$

En ocasiones es conveniente reconocer cuando una función es composición de dos o más funciones, ya que esto nos puede facilitar su análisis.

Ejemplo 21:

Descomponer $h(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+2}}{\sqrt[4]{x-3}}$ en 2 funciones tal que h(x) = f(g(x))

Solución:

$h(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{1/4}$

Sea $f(x) = x^{1/4}$ y $g(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

Luego $f(g(x)) = f\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right) = \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{1/4}$

> **NOTA**
> Existen muchas formas de descomponer las funciones. Debemos considerar la más conveniente según el caso.

Sin embargo, es necesario destacar una observación importante con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 22:

Dado $f(x) = 1/(x^2 - 1)$; $g(x) = x^{1/2}$

Hallar: (a) $(f_o g)(x)$ (b) $(g_o f)(x)$

Solución:

$(f_o g)(x) = f(g(x)) = 1/(x - 1)$

Dominio: $x \in (0,1) \cup (1, \infty)$

(b) $(g_o f)(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - 1}}$

Dominio: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

OBSERVACIÓN: $(f_o g)(x) \neq (g_o f)(x)$; y sus dominios también son distintos. Por lo tanto la composición de funciones **NO ES CONMUTATIVA**. Sin embargo, existe un caso particular donde $\mathbf{f_o g = g_o f}$ que se considera en el siguiente punto.

EJERCICIOS PROPUESTOS I.F

Hallar las funciones compuestas:

(a) $(f_o g)(x)$; (b) $(g_o f)(x)$; (c) $(g_o g)(x)$,

a partir de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^2$; $g(x) = (x)^{1/2}$

2) $f(x) = x + 1$; $g(x) = 1/x$

3) $f(x) = (x + 1)^{1/2}$; $g(x) = x^4 - 1$

4) $f(x) = (9 - (x - 1)^2)^{1/2}$; $g(x) = x^2 - 9$

5) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 4x + 4}$; $g(x) = x + 1$

RESPUESTAS I.F.

1) (a) x; (b) x; (c) $(x)^{1/4}$

2) (a) $(1 + x)/x$; (b) $1/(x + 1)$; (c) x

3) (a) x^2; (b) $x^2 + 2x$; (c) $(x^4 - 1)^4 - 1$

4) (a) $[9 - (x^2 - 10)^2]^{1/2}$; (b) $2x - 1$; (c) $(x^2 - 9)^2 - 9$

5) (a) $\dfrac{x+3}{(x-1)^2}$; (b) $\dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 4x + 4}$; (c) $x + 2$

EJERCICIOS PROPUESTOS I.G

Determine las funciones que componen la función dada según se requiera en cada caso.

1) $h(x) = (3x + 1)^2$; $h(x) = (f_o g)(x)$

2) $k(x) = -\sqrt{(x^2 - 4x + 7)^3}$; $k(x) = (h_o g_o f)(x)$

3) $h(x) = -\left(\frac{3}{x-1}\right)^5$; $h(x) = (f_o g)(x)$

4) $k(x) = \left(\sqrt{2x+1}\right)^3$; $k(x) = (h_o g_o f)(x)$

5) $k(x) = \left(1+\sqrt{2x-11}\right)^2$; $k(x) = (h_o g_o f)(x)$

RESPUESTAS I.G

1) $f(x) = x^2$; $g(x) = 3x+1$

2) $f(x) = x^2-4x+7$; $g(x) = x^3$; $h(x) = -x^{1/2}$

3) $f(x) = -x^5$; $g(x) = 3 / (x-1)$

4) $f(x) = 2x+1$; $g(x) = x^{1/2}$; $h(x) = x^3$

5) $f(x) = 2x -11$; $g(x) = 1 - x^{1/2}$; $h(x) = x^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS I.H

Hallar f(x) :

1) $(g_o f)(x) = 5 - 3x + x^2$; $g(x) = x^2 + x + 3$

2) $(f_o g)(x) = 1 / (x^2 + 1)$; $g(x) = x^2 + 1$

3) $(g_o f)(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $g(x) = x^3$

4) $(f_o g)(x) = 9x^2 - 3x - 1$; $g(x) = 3x + 4$

5) $(g_o f)(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 2x^2 + 2}$; $g(x) = x / (x^2 + 1)$

RESPUESTAS I.H

1) $x - 2$; $1 - x$ 2) $1 / x$ 3) $x - 1$

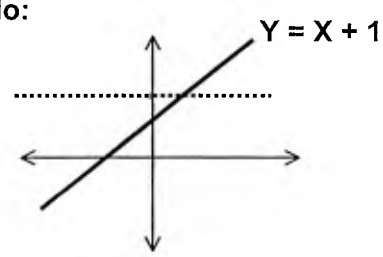
4) $x^2 - 9x + 19$ 5) $x^2 - 1$; $1 / (x^2 - 1)$

1.4. FUNCIÓN INVERSA

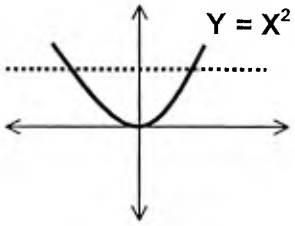
Para el estudio de estas funciones es necesario aclarar antes el concepto de función biyectiva:

Función Biyectiva: es aquella que a cada valor del rango le corresponde un valor de su dominio y sólo uno.

Ejemplo:



Es Biyectiva



No es Biyectiva

Para reconocer si la gráfica de una función corresponde a una función biyectiva, basta con trazar una recta horizontal. Esta debe cortar a la gráfica una sola vez.

Luego, solo las funciones biyectivas son las que poseen inversa, aunque en ocasiones es necesario *restringir* el dominio de la función para que esta sea biyectiva.

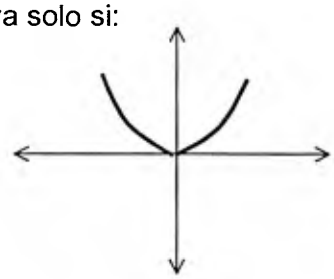
Ejemplo 23:

Sea $f(x) = x^2$. Se puede considerar biyectiva solo si:

Dom f = x $\in$ [0, ∞)

O bien,

Dom f = x $\in$ (- ∞ , 0]



Pero el dominio no debe ser todos los reales, pues dejará de ser biyectiva.

Definición de Función Inversa:

Dos funciones f y g son inversas si y solo si:

a) Para cada x que pertenece al dominio de f, f(x) está en el dominio de g y **$(g_o f)(x) = x$.**

b) Para cada x que pertenece al dominio de g, g(x) está en el dominio de f y **$(f_o g)(x) = x$.**

La Función Inversa de **f(x)** se denota **$f^{-1}(x)$.**

¡¡CUIDADO!!

Evite este error:

$f^{-1}(x) \neq 1 / f(x)$

Para hallar la inversa de una función $y = f(x)$ se despeja x en función de y, luego se intercambian las variables.

Ejemplo 24:

Hallar la función inversa de $y = x^3 + 1$, compruebe que $(f_o f^{-1})(x)=(f^{-1}{}_o f)(x)=x$.

Solución:

Despejamos x en función de y: $x = (y - 1)^{1/3}$

Intercambiamos las variables: $y = (x - 1)^{1/3}$

De esta manera:

$$\mathbf{f(x) = x^3 + 1} \quad ; \quad \mathbf{f^{-1}(x) = (x - 1)^{1/3}}$$

Si hallamos $(f_o f^{-1})(x)$:

$$(f_o f^{-1})(x) = [(x-1)^{1/3}]^3 + 1 = x$$

Si hallamos $(f^{-1}{}_o f)(x)$:

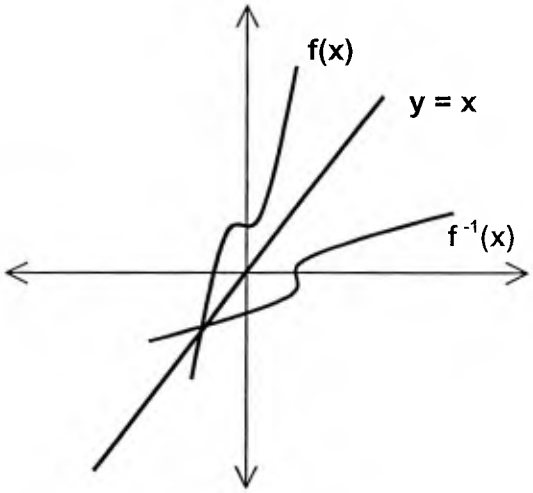
$$(f^{-1}{}_o f)(x) = (x^3 + 1 - 1)^{1/3} = x$$

$$\mathbf{(f_o f^{-1})(x)=(f^{-1}{}_o f)(x)=x}$$

Gráfica de la Función Inversa:

Esta se obtiene reflejando la gráfica de f(x) respecto a la recta y=x.

Tomando como ejemplo la curva anterior se tiene:



EJERCICIOS PROPUESTOS I.I.

Determine la inversa de cada función y compruebe que $(f_o f^{-1})(x) = (f^{-1}{}_o f)(x)=x$. Halle la gráfica de la función y de su inversa.

1) $y = (x-5)^3$

2) $y = 1 / (x-1)$

3) $y = -(x+2)^3$

4) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$

5) $y = \frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{3}{4}}$

6) $y = (1-x) / (1+x)$

RESPUESTAS I.I.

1) $x^{1/3} + 5$;

2) $(1 + x) / x$;

3) $-x^{1/3} -2$

4) $(1-x^3)^{1/3}$

5) $x^2 - x + 1$;

6) $(1-x) / (1+x)$

1.5 Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Definición de Función Exponencial:

Función Exponencial es toda función de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$, y $x \in \mathbf{R}$

Gráficamente:

Analicemos la gráfica de $f(x) = 2^x$; $g(x) = 5^x$; $h(x) = 3^x$, donde $a > 1$.

Estas gráficas tienen en común las siguientes características:

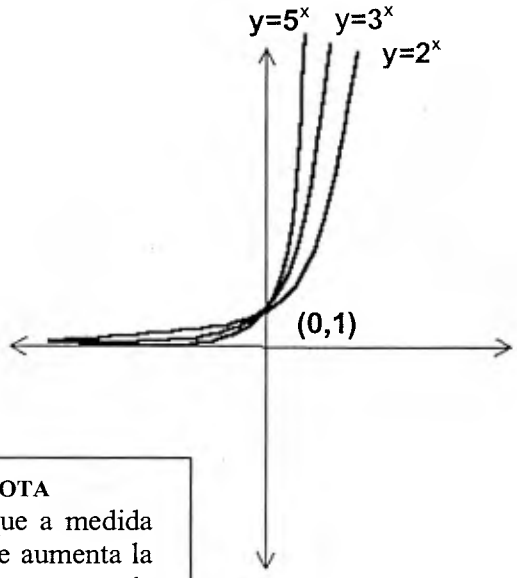
Dominio: $x \in \mathbf{R}$

Punto de corte: (0,1)

Simetría: No hay

Asíntota*: $y = 0$

Y hallamos algunos valores:



x	2^x	3^x	5^x
-2	¼	1/9	1/25
-1	½	1/3	1/5
0	1	1	1
1	2	3	5
2	4	9	25

Nota
Observe que a medida que la base aumenta la función crece más rápido

* Se analizará en la Unidad II: Límites y Continuidad

Sin embargo, si consideramos una base $0 < a < 1$:

Ejemplos: analicemos las gráficas de $f(x) = (1/2)^x$; $g(x) = (1/3)^x$; $h(x) = (1/5)^x$.

Características comunes:

Dominio: $x \in \mathbf{R}$

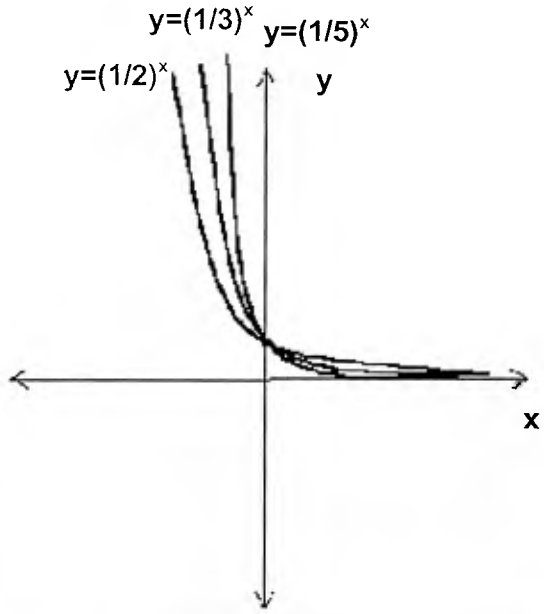
Punto de corte: (0,1)

Simetría: no hay

Asíntota: $y = 0$

Tabla de datos:

x	$(1/2)^x$	$(1/3)^x$	$(1/5)^x$
-2	4	9	25
-1	2	3	5
0	1	1	1
1	1/2	1/3	1/5
2	1/4	1/9	1/25



NOTA

La grafica de $\mathbf{f(x) = a^x}$ es

Creciente si $\mathbf{a > 1}$
Decreciente si $\mathbf{0 < a < 1}$

Ejemplo 25:

Estudie y realice la gráfica de $f(x) = 2^{x+3} - 1$

Solución:

Dominio: $x \in \mathbf{R}$

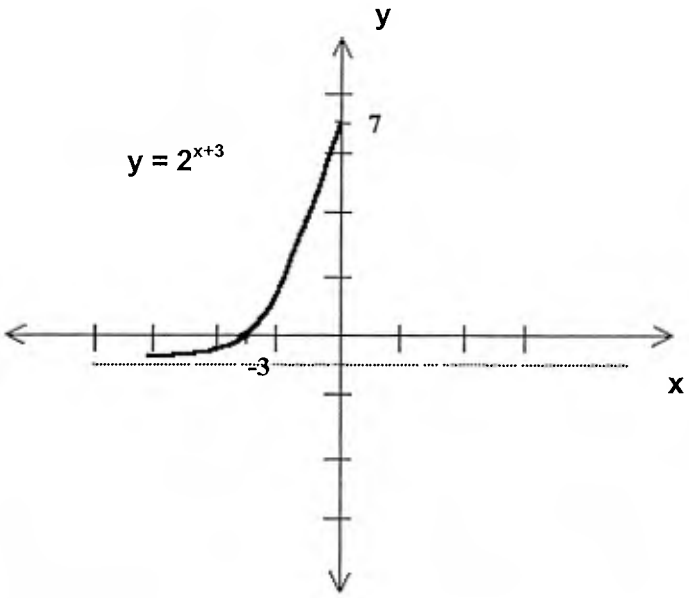
Puntos de corte: (0,7) y (-3, 0)

Simetría: no hay

Asíntota: y= -1

Tabla:

X	Y
-2	1
-1	3
0	7
1	15
2	31



Otra forma de esbozar la gráfica es analizar $y = 2^x$ y las transformaciones tal como se explicó en el punto 1.2, trasladando la curva 3 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia abajo.

EJERCICIOS PROPUESTOS I.J.

1. Halle el valor de x:

a) $(125)^{1/x} - 25 = 0$

b) $3^{x^2-4} =$

c) $\sqrt[3]{3^{9x^2-3x}} = 9$

d) $9^x - 4\sqrt{3}\,3^{x-1} + 1 = 0$

e) $3^{2x-2} + 9^{x+1} - 27^{\frac{2x-3}{3}} = 245$

f) $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = \dfrac{40}{41}$

2. Estudiar y esbozar la gráfica las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3^{-x/2} - 3$; b) $f(x) = 2^{|x|}$ y $g(x) = -2^{|x|}$; c) $f(x) = 3^{-x^2}$

RESPUESTAS I.J.

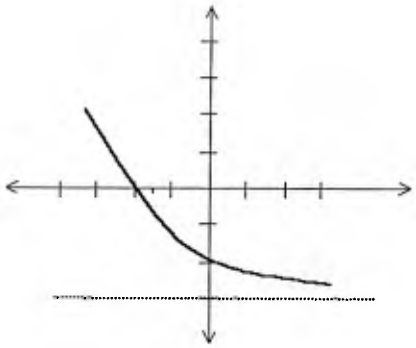
1.

a) x = 3/2; b) x = 2; x = -2; c) x = 1; x = -2/3; d) x = ½; x = - ½ ;

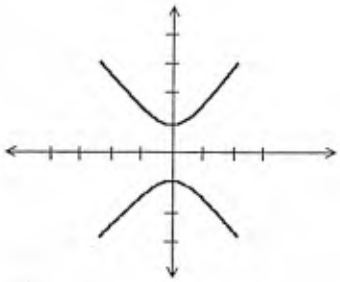
e) x = 3/2; f) x = 2.

2.

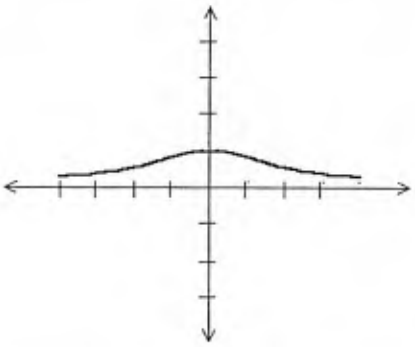
a)



b)



c)



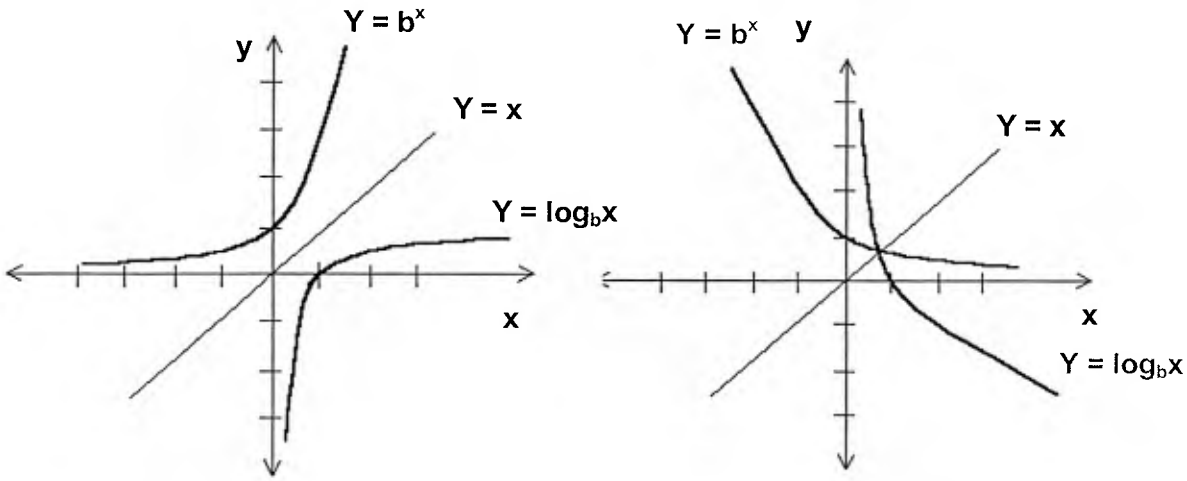
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN LOGARÍTMICA:

Es la función inversa de la función exponencial. Es de la forma

$$f(x) = \log_b x$$

La gráfica se obtiene reflejando $y = a^x$ con respecto a la recta $y = x$.

Cuando b > 1 **Cuando 0 < b < 1**



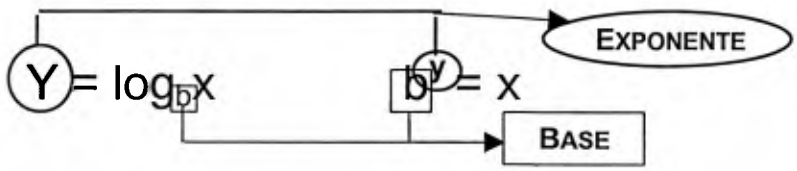
<u>Propiedades de $f(x) = \log_b x$:</u>

A partir de la gráfica podemos notar algunas propiedades comunes:

- Dominio: $x \in (0, \infty)$. Los números negativos y el cero no tienen logaritmo.
- Para $b > 1$ es creciente, para $0 < b < 1$ es decreciente.
- Tiene asíntota vertical.

Propiedades de los Logaritmos:

Para trabajar con logaritmos debemos dominar su forma exponencial:



Observa que un logaritmo no es más que el exponente que al elevar cierta base, genera un resultado.

Ejemplo 26: Llevar a la forma exponencial las siguientes expresiones:

a) $\log_5 25 = 2 \Longrightarrow 5^2 = 25$

b) $\log_6 36^{-1} = -2 \Longrightarrow 6^{-2} = 1 / 36$

Luego, si M y N son números positivos, $b > 0$ y $b \neq 1$, entonces podemos enumerar las siguientes propiedades*:

1. $\log_b M N = \log_b M + \log_b N$
2. $\log_b M / N = \log_b M - \log_b N$
3. $\log_b M^k = k \log_b M$
4. $\log_b b = 1$
5. $\log_b 1 = 0$

CUIDADO

1. $\log_b (M+N) \neq \log_b M . \log_b N$
2. $\log_b (M-N) \neq \log_b M / \log_b N$
3. $\log_b M^k \neq (\log_b M)^k$

* Se invita al estudiante/lector a demostrar estas propiedades.

Cambio de Base: para N > 0, a > 0, b > 0 , a ≠ 1 y b ≠ 1, se tiene que:

$$\mathbf{Log}_{\,b}\,\mathbf{N} = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Ejemplo 27: Halle el valor de x en la siguiente expresión:

$$\log_8 (x - 6) + \log_8 (x + 6) = 2$$

Solución:

Aplicando las propiedades se tiene que: $\log_8(x^2 - 36) = 2$

Luego: $x^2 - 36 = 8^2 \rightarrow (x + 10)(x - 10) = 0$

Resulta $x = 10$ ✓ y $x = -10$. ✗

Observa que no son válidas las dos soluciones, si sustituimos x = -10 en la expresión planteada inicialmente, obtendremos logaritmos de números negativos, los cuales no existen.

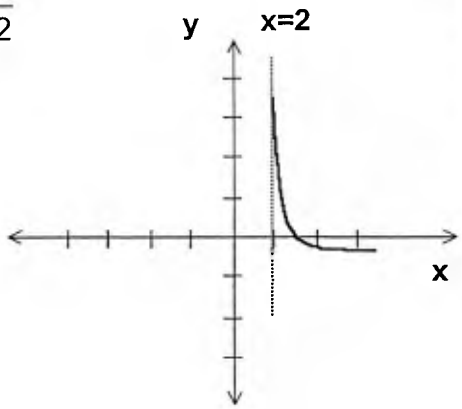
Ejemplo 28:

Esboce la gráfica de $y = \log_5 \dfrac{1}{x-2}$

Dominio: $\dfrac{1}{x-2} > 0$, luego $x \in (2, \infty)$

Puntos de corte: (3, 0)

Asíntota: x = 2



x	y
3	0
4	-0.43
5	-0.68
6	-0.86
7	-1

EJERCICIOS PROPUESTOS I.K

1. Calcule el valor de x en las siguientes expresiones:

a) $\log_{16}x + \log_{16}(x-4) = \frac{5}{4}$ b) log(3-x) -log(12-x) = -1

c) $\log_{\frac{1}{7}}x + \log_{\frac{1}{7}}(5x-28) = -2$ d) $\log_{\frac{1}{5}}12x^2 - \log_{\frac{1}{5}}(20x-9) = -2$

e) $\log_3(8x^2+1)-\log_3(4x^2-2x+1)=2$

2. Demuestre que $\log_a M.N = \log_a M + \log_a N$

3. Demuestre que $\log_b M^k = k\log_b M$

4. Explique por qué $\log_b b = 1$ y $\log_b 1 = 0$

5. Halle el dominio, las asíntotas, puntos de corte (si los hay) y esboce la gráfica de:

a) y = log5x3 b) $y = \log 4\sqrt{x+1}$ c) $y = \log_2(x^2+x)-\log_2 x$

6. Despeje x de las siguientes expresiones:

a) $\log x=\frac{1}{4}[\log(m+n)+\log(m-n)-3\log(p+q)-2\log(p-q)]$

b) $\log_m x = \frac{1}{5}[3\log_m a - 2\log_m b]+2\log_m c - 2$

c) $\log_2 x = \frac{1}{3}[3\log_2 a + 1]-\frac{1}{2}[1+\log_2 3]$

d) $\log_2 x=\frac{1}{2}[3\log_2(a-b)+\log_2(a+b)-2\log_2 a]$

7. Sean las funciones $f : R_+ \to R/f(x) = \log_a x$ (a >1)

$$g: R_+ \to R/g(x) = \log_b x \qquad (0 < b < 1)$$

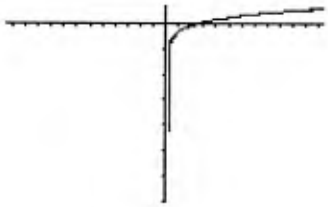
Probar que para todo número real x, positivo y distinto de 1, se cumple que:

$$\frac{f(x)-g(x)}{x-1} > 0$$

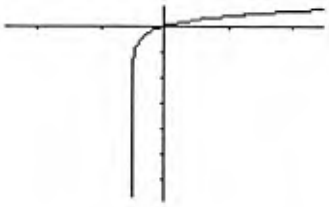
RESPUESTAS I.K

1. a) 8, b) 2, c) 7, d) $\frac{9}{2}, \frac{1}{2}$, e) 4

5. a) $y = \log_5 x^3$



b) $y = \frac{1}{2}\log_4(x+1)$



c) $y = \log_2(x^2 + x) - \log_2 x$

6.a) $x = \sqrt[4]{\dfrac{(m+n)(m-n)}{(p+q)^3(p-q)^2}}$ b) $x = \sqrt[3]{\dfrac{a^3}{b^2}} \cdot \dfrac{c^2}{m^2}$

c) $x = \dfrac{\sqrt[3]{2}\,a}{\sqrt{6}}$ d) $x = \dfrac{\sqrt{(a-b)^3(a+b)}}{a}$

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS NATURALES:

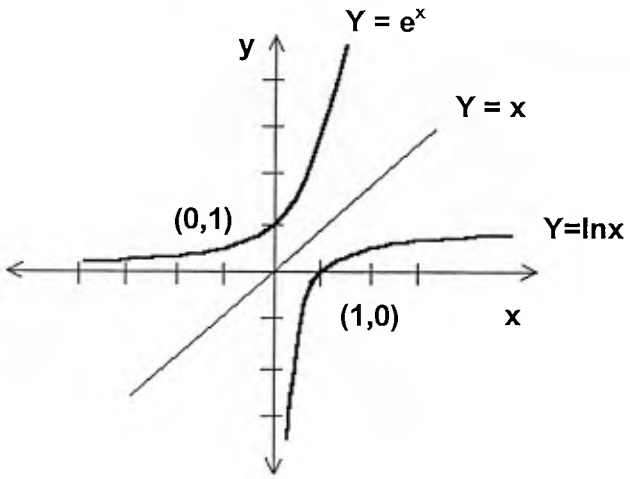
Son funciones exponenciales y logarítmicas que tienen como base el número *e*, es decir: **$f(x) = e^x$** y **$g(x) = \log_e x = \ln x$** (se lee " logaritmo neperiano de x")

RECUERDA QUE:

e es un número irracional. Se obtiene de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n \to \infty$

e = 2.71828182

Gráficamente:



Sus propiedades son las mismas descritas en función exponencial y logarítmica. Sin embargo, existen infinidad de aplicaciones en las ciencias sociales, económicas y naturales donde interviene el número e y la función exponencial. Algunas serán consideradas en el punto 1.6

EJERCICIOS PROPUESTOS I.L

1. Esboce la gráfica de las siguientes funciones:

a) $h(x) = e^{x-2}$ b) $y = e^{-x2}$ c) $g(x) = 1-e^{-x}$

d) $f(x) = \ln(x-4)$ e) $f(x) = \ln x^3$

2. Calcule el dominio de:

a) $y = \ln(x+2)$ b) $y = 1 + \ln x$ c) $y = 4^{\sqrt{x^2+2}}$

d) $y=\ln(x - \sqrt{x^3 - 1})$ e) $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^x$ f) $y = e^{\ln\sqrt{x}} + \ln e^{\sqrt{x+1}}$

g) $y = \dfrac{e^{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \ln(2x+1)}$ h) $y = e^{|x|} + \ln\left(\dfrac{2-3x}{x^2}\right)$

3. Halle el valor de x:

a) $e^{\ln(1-x)} = 2x$ b) $\ln e^{\sqrt{x+1}} = 3$

c) $\ln(x^2-4)-\ln(x+2)=0$ d) $\ln(x^2+x-2) = \ln x + \ln(x-1)$

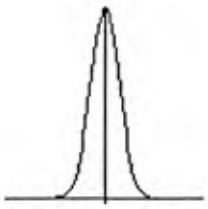
4. Demuestre que $\ln\left(\frac{x}{4} - \frac{\sqrt{x^2-4}}{4}\right) = -\ln(x + \sqrt{x^2-4})$

5. Si $f(x) = e^x$, demuestre que $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = e^2\left(\dfrac{e^h - 1}{h}\right)$

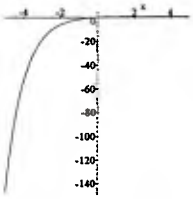
RESPUESTAS I.L

1. a) $y = e^{x-2}$

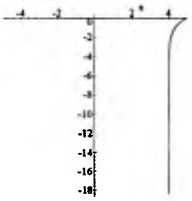
b) $y = e^{-x^2}$



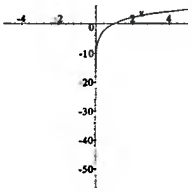
c) $y = 1 - e^{-x}$



d) $y = \log_e(x - 4)$



e) $y = \log_e x^3$



2. a) $x \in (-2, \infty)$ b) $(0, \infty)$ c) R, e) $(-1, 1)$ f) $[0, \infty)$

g) $(-\frac{1}{2}, 1) - \left\{ \frac{e^{-1} - 1}{2} \right\}$ h) $(-\infty, \frac{2}{3})$

3. a) $\frac{1}{3}$, b) 8, c) 3, d) 1

1.6 Aplicaciones de las funciones: Modelos Funcionales.

En la práctica se utilizan las funciones para representar una aproximación a una situación real, lo que resulta útil para la solución de problemas.

En realidad, estas funciones son muy complejas por todas las variables que implican, por ello es preferible elaborar modelos que involucren lo esencial: modelos idealizados.

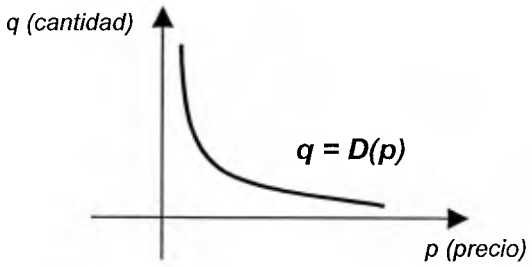
Antes de presentar algunos ejemplos de modelos es necesario definir los siguientes conceptos:

- Bienes: conjunto de dinero, fincas, inmuebles, valores mobiliarios, maquinaria, etc., que posee una persona, institución o empresa.

- Mercado: conjunto de los consumidores y productores de un producto o línea de productos.

- Función de Demanda (D(P)): relación entre el precio de un bien o producto y la cantidad que el consumidor está dispuesto a adquirir a cada nivel de precio.

Si consideramos el precio p de un bien y la demanda q del mismo, en un sistema de coordenadas, la curva de demanda será, por lo general, decreciente:

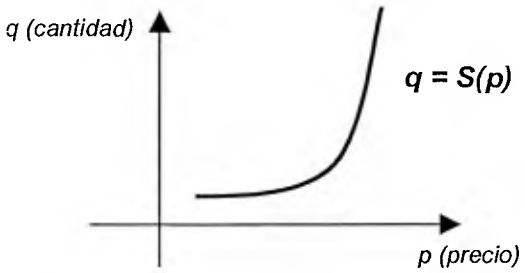


NOTA

Observa que es decreciente, ya que a medida que aumenta el precio de un bien disminuyen las cantidades demandadas. Lógico, ¿no?

- FUNCIÓN DE OFERTA (S(P)): relación entre el precio de un bien o producto y la cantidad ofrecida por los proveedores a cada nivel de precio.

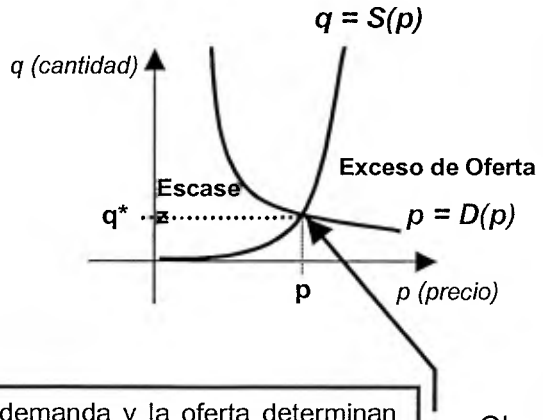
Si consideramos el precio p de un bien y la cantidad ofrecida q del mismo, en un sistema de coordenadas, la curva de oferta será, por lo general, creciente:



NOTA

Los proveedores pueden ofrecer su producto a un precio determinado. Si el precio aumenta, la cantidad ofrecida también aumentará.

- EQUILIBRIO DE MERCADO (O PUNTO DE EQUILIBRIO): es el punto donde la cantidad demandada es exactamente igual a la cantidad ofrecida a un mismo precio. Gráficamente es la intersección de las curvas de oferta y demanda.



La demanda y la oferta determinan conjuntamente el precio p* y la cantidad q* de equilibrio que se intercambia en el mercado.

NOTA

La demanda y oferta son dependientes del precio, sin embargo, en Economía es común encontrar los ejes invertidos. Es decir, p en el eje vertical y q en el eje horizontal.

Observando la gráfica se puede notar que:

- Antes del punto de equilibrio la cantida demandada supera a la cantidad ofrecida, por lo que hay **ESCASEZ**
- Después del punto de equilibrio la cantidad ofrecida supera a la demandada, por lo que hay **EXCESO DE OFERTA**

- INGRESO (I) : es el dinero que recibe la empresa por la venta de su producto.

Ingreso = (cantidad vendida)x(precio unitario)

$$I = q \times p$$

- COSTOS FIJOS (CF): no depende del nivel de producción. Este puede ser por concepto de alquileres, maquinarias, etc.

- COSTOS VARIABLES (CV): Son los que dependen del nivel de producción. Es por ello que cuando se habla de los mismos se debe especificar a que nivel de producción se hace referencia.

  Costo Variable (x) = (cantidad de factor variable)x(costo unitario)

  Cv = q x c

- COSTO TOTAL (C): es la suma de los costos fijos más los costos variables.

  C = Cf + Cv

- BENEFICIO (B): es la ganancia de la empresa.

  Beneficio = Ingreso - Costo

  B = I – C

El productor estaría en equilibrio cuando el ingreso es igual al costo, incluyendo en los costos el *costo de oportunidad.* Es decir, I = C cuando B = 0

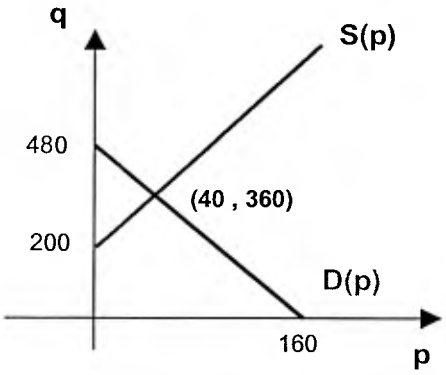
Las gráficas de todas las funciones económicas se analizan en el primer cuadrante. ¿Por qué?...

Ejemplo 29:

Las funciones de oferta y demanda de determinado artículo son S(p)=4p+200 y D(p) = -3p + 480 respectivamente. Calcule el precio de equilibrio y las cantidades de oferta y demanda correspondiente. Realice una representación gráfica.

Solución:

Para hallar el punto de equilibrio se intersecan las funciones de Oferta y Demanda. Simplemente igualando tenemos que:



S (p) = D (p)

4p + 200 = -3p + 480

p = 40, luego **q= 360**

Ejemplo 30:

Un fabricante puede vender cierto producto a $110 c/ u. El costo total está formado por costos indirectos fijos de $7000 y costos variables a $60 por c/u.

a) ¿Cuántas unidades debe vender para alcanzar el punto de equilibrio del productor?

b) Si venden 100 unidades, ¿cuál será su beneficio?

c) ¿Cuántas unidades debe vender si desea una ganancia de $1500?

Solución:

a) I(q) = 110q

= precio x cantidad

C(q) = 60q + 7000

= Cv + Cf

Igualando Ingreso y Costo se obtiene el punto de equilibrio:

$$110q = 60q + 7000$$

q = 140 unidades

b) La utilidad o beneficio viene dado esta vez en función de las cantidades, ya que así están expresados el ingreso y el costo.

$$B(q) = I(q) - C(q)$$

$$B(q) = 110q - (60q + 7000)$$

$$B(q) = 50q - 7000$$

Cuando q = 100 unidades, **B(100) = -$2000** *Pérdida*

c) Para obtener un beneficio de $1500:

$$B(q) = 1500 = 50q - 7000$$

q = 170 unidades que debe vender.

Ejemplo 31:

A la Empresa Pativen le cuesta $ 8 producir una patineta. Además tienen $200 diarios en gastos fijos.

a) Calcule el costo total de producir x patinetas

b) Calcule el ingreso por vender x patinetas diarias a $16.

c) Grafique y halle el punto de equilibrio del productor, e interprete.

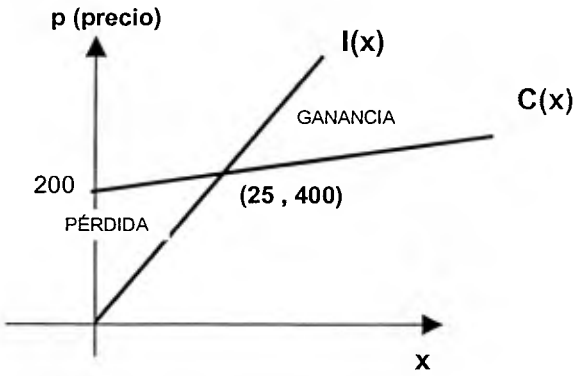
d) ¿Cuál es el beneficio de vender diariamente 20 unidades, 25 unidades y 40 unidades?. ¿Qué relación tiene con el punto (c)?

Solución:

a) Costo = C(x) = 8x + 200 $\boxed{\text{Costo por unidad + Costo fijo}}$

b) Ingreso = I (x) = 16x

c)



I(x) = C(x)

16x = 8x + 200

x = 25

I(x) = C(x) = 400

Es necesario vender 25 unidades diarias para obtener el mismo ingreso que costo. Es decir, en equilibrio.

d) B(x) = I(x) – C(x)

$$B(x) = 16x - 8x - 200 = 8x - 200$$

Para x = 20 B(x) = -40 Pérdida: el costo está por encima del ingreso. (Observe en la gráfica que está antes del punto de equilibrio)

Para x = 25 B(x) = 0 En equilibrio.

Para x = 40 B(x) = 120 Ganancia: el ingreso está por encima del costo. (Observe en la gráfica que está después del punto de equilibrio)

Ejemplo 32:

Chocolates Savy vende cajas de bombones a Bs. 2000 cada una. Si x es el número de cajas producidas semanalmente (en miles), los costos vienen dado por $C(x)=100x^2 + 1300x +1000$ en Bs. Determine el punto de equilibrio del productor.

Solución:

$I(x) = 2000x$ y $C(x) = 100x^2 + 1300x +1000$

Luego

$$I(x) = C(x) \longrightarrow 2000x = 100x^2 + 1300x +1000$$

$$(x-2)(x-5)=0$$

$$\mathbf{x = 2} \quad \text{ó} \quad \mathbf{x = 5}$$

Es decir, si la compañía produce 2000 cajas semanales o 5000 cajas semanales está en equilibrio.

Ejemplo 33:

Toshobi Electronics produce radios grabadores a $2 por unidad y los vende a $5 por unidad. Según un estudio estadístico los consumidores comprarán 4000 radios al mes a ese precio. Se estima que la demanda disminuirá en 400 radios al mes por cada aumento de $1.

a) ¿Cuál es el beneficio en función del precio de venta?

b) ¿A qué precio se obtendrá el beneficio máximo?

c) ¿Cuál es el intervalo de precio en el que puede vender el producto?

Solución:

a) Si consideramos x = nuevo precio de venta, p = precio de venta actual y c = costo de producción unitario, tenemos que:

$$B(x) = (\text{número de radios})x(\text{precio} - \text{costo})$$

Sin embargo sería un grave error escribir directamente:

$$B(x) = x(p-c)$$

Ya que estas variables dependen de ciertas situaciones que debemos analizar. Luego, analizando cada factor:

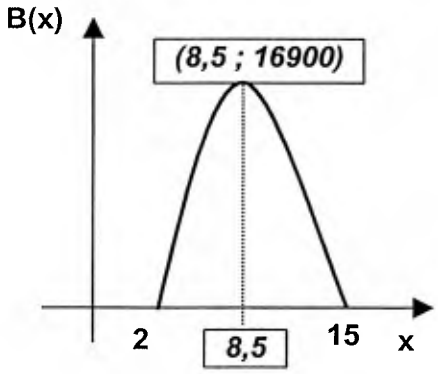
$$\text{Número de radios} = 4000 - 400.\underbrace{(x-5)}_{\text{Representa el aumento de precio a partir de \$ 5}}$$

$$\text{Precio} - \text{costo} = x - 2$$

$$B(x) = [4000 - 400(x-5)].(x-2)$$

$$\mathbf{B(x) = -400\,(x-2)(x-15) \longrightarrow B(x) = -400x^2 + 6800x - 12000}$$

b) B(x) = - 400x2 + 6800x – 12000 es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola.



Para hallar el precio que maximiza la utilidad es necesario hallar el punto máximo* (mas alto) de la curva, en este caso el vértice de la parábola. El precio que da el beneficio máximo es $ 8,5. Antes y después de este precio los beneficio son menores (observe la gráfica).

c) Como la parábola corta en x = 2 y x = 15, el precio debe estar en el intervalo $2 \leq x \leq 15$, ya que fuera de ese intervalo no existe gráfica en el primer cuadrante. Matemáticamente B(x) es negativa.

Ejemplo 34:

Movilven Telefonía Celular cobra a los consumidores una tarifa de Bs. 200 por minuto para los primeros 50 minutos y Bs. 150 por minuto para cantidades que exceden los 50 minutos. Determine la función costo en función de x minutos. Calcule el costo para 40 min. y para 60 min.

*Este concepto se ampliará en la Unidad IV

Solución:

Como esta función varía para $x \leq 50$ y para $x > 50$, es una función por partes.

Para $x \leq 50$ $\quad C(x) = 200x$

Para $x > 50$ $\quad C(x) = C1 + C2$

- C1 es el costo de los 50 primeros minutos (x = 50).
- C2 es el costo de los minutos que exceden a 50 (x-50)

Luego,

$$C(x) = 200.50 + 150\,(x - 50)$$

$$C(x) = 2500 + 150x$$

Entonces,

$$C(x) = \begin{cases} 200x & \text{si } x \leq 50 \\ 2500 + 150x & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

Para x = 40, $\quad C(x) = 200 \,.\, 40 = \text{Bs. } 8000$

Para x = 60, $\quad C(x) = 2500 + 150 \,.\, 60 = \text{Bs.}11500$

Ejemplo 35:

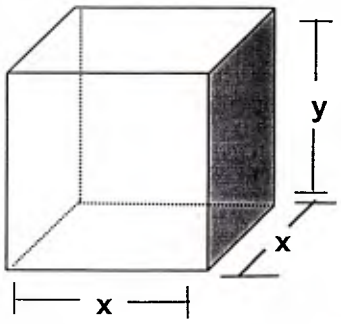
Una caja de base cuadrada debe tener un volumen de 250 cm^3. Para la base y la tapa se utiliza un material que cuesta Bs. 2 por cm^2, y para los lados cuesta Bs. 1 por cm^2.

a) Exprese el costo en función de la longitud de la base.

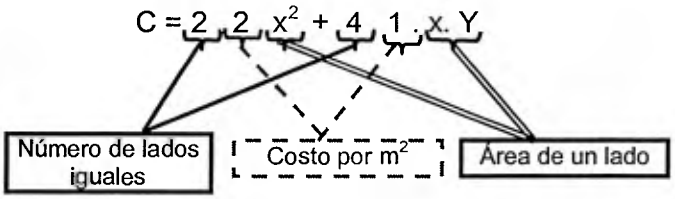
b) Si se dispone de Bs. 450 para cada caja, ¿se podrá construir cajas de 100 cm^2 de base?

Solución:

Es necesario hacer un dibujo que nos permita analizar el problema con mayor claridad:



a) $V = 250 = x^2 . y$ $\qquad$ $y = 250 / x^2$



$$C(x) = 4\,x^2 + 1000/x$$

c) $C(10) = 4.10^2 + 1000/10 = Bs.\ 500$

Necesita más de Bs. 450 para construir cajas de ese tamaño.

Ejemplo 36:

La suma de $100 son invertidos a un interés compuesto de 6 % anual. ¿Cuánto tardará en incrementar la inversión a $150?

NOTA:

Interés Compuesto: $\mathbf{P = Po\,(1+r)^n}$

Donde:
P = Capital
Po = Capital inicial
R = Intereses
n = n° de períodos (tiempo)

Se invita al estudiante a investigar sobre esta ecuación.

Solución:

Aplicando la ecuación:

$P = Po(1+r)^n$

$$150=100(1+0,06)^n$$

$$n = \log 1,5 / \log 1,06 = 6,96$$

Es necesario, aproximadamente 7 años para obtener $150

Ejemplo 37:

La curva de demanda para cierto artículo es 5p + 2q = 200 y la curva de oferta es p=4/5q + 10.

a) Determine el precio y la cantidad de equilibrio.

b) ¿Cuál será el precio después de fijar un impuesto de Bs.6 por unidad?. Determine el incremento en el precio y la disminución en la cantidad demandada referente al punto de equilibrio.

Solución:

a) Demanda: 5p + 2q = 200 Oferta: p=4/5q + 10

Luego,

$5(4/5q + 10) + 2q = 200$; **q = 25** y por lo tanto, **p = 30**

b) El impuesto es pagado por el proveedor, por lo que debe ser considerado en la función de oferta y la función de demanda permanece igual:

$$p - \mathbf{6} = 4/5q + 10 \quad y \quad 5p + 2q = 200$$

se intersecan para hallar el nuevo punto de equilibrio, resultando

$$q = 20 \qquad y \qquad p = 32$$

Entonces p aumenta Bs. 2 y q disminuye 5 unidades.

Ejemplo 38: ***(Problema de introducción de esta Unidad)***

El señor Andrés es dueño de un edificio ubicado en el centro de la ciudad. Cuenta con 10 pisos y 6 apartamentos por piso, disponibles para alquilar. El puede alquilar todos los apartamentos si fija una cuota mensual de Bs. 200000 de alquiler.

Con un alquiler más alto algunos apartamentos quedarán vacíos. En promedio se estima que por cada aumento de Bs. 10000 en el alquiler, un apartamento quedará vacío sin posibilidad de alquilarse. ¿Cuál será la cuota mensual de alquiler que el señor Andrés deberá fijarse para obtener el máximo ingreso?.

Solución:

Designamos a x = n° de apartamentos vacíos.

Ingreso = (alquiler)x(n° de apartamentos alquilados)

$$I(x) = (200000+10000x).\ (60-x)$$

$$\mathbf{I(x) = 10000.(60 - x)\ (20 + x) = 10000\ (120 + 40x - x^2)}$$

Observa que la función ingreso resultó ser una parábola abierta hacia abajo, cuyo vértice sería el punto máximo, que representaría el ingreso máximo en función del número de apartamentos que dejarán de alquilarse.

V (20 , 8000000) ,

es decir, quedarían x = 20 apartamentos sin alquilarse, y se obtendría un ingreso de Bs. 8000000. *(Se sugiere realizar la gráfica y analizar en ella este resultado)*

EJERCICIOS PROPUESTOS I.M

Resuelva los problemas que se plantean a continuación:

1. Plastiven C.A. elabora un producto cuyo precio es de $ 25 por unidad. Cada unidad le cuesta a la compañía $ 18 en gastos varios, y los costos fijos anuales son de $250000. Si x es el número de unidades producidas y vendidas durante el año:

a) Halle la función de costo total.

b) Halle la función de ingreso total

c) Halle la función utilidad.

d) ¿Cuál será la utilidad anual si se producen y venden 100000 unidades al año?

e) ¿Qué nivel de producción lleva al punto de equilibrio?

2. El Instituto Paz y Alegría planea una rifa para recaudar $10000. Venderán 500 boletos para la rifa de un automóvil que costará $12000. ¿Cuánto deberá costar cada boleto si se aspira obtener una utilidad neta de $10000?

3. Una agencia está diseñando una campaña publicitaria por televisión. Los costos de desarrollo (costos fijos) son 150000 dólares y la agencia pagará 15000 dólares

por minuto en cada spot de televisión. La agencia estima que, por cada minuto de publicidad, se obtendrá un aumento de 70000 dólares en las ventas. De esa cifra, 47000 dólares se utilizarán para cubrir costos de producción de los artículos a vender, y 15000 dólares es para pagar el minuto de publicidad. El resto es la contribución al costo y a la utilidad.

a) ¿Cuántos minutos de publicidad se necesitan para recuperar los costos de desarrollo de la campaña publicitaria?

b) Si la compañía se sirve de 15 spots de 1 minuto de duración, determine el ingreso total, los costos totales (producción y publicidad) y la utilidad (o pérdida) total que resultan de esta campaña.

4. La compañía Venezuela Software tiene una computadora que utiliza para varios fines. Uno de los principales costos es el desarrollo de software para llevar la contabilidad de restaurantes y afines. El vicepresidente de sistemas de información desea evaluar si es menos costoso tener a su propio personal de programación o hacer que los programas los prepare otra empresa especializada. Estima que los costos de escritura de los programas serán de $1,25 por línea de código. Además, los costos anuales indirectos del apoyo a los programadores ascienden a $ 15000. El software preparado fuera de la empresa cuesta, en promedio, $2 por línea de código.

a) ¿Cuántas líneas de código por año hacen iguales los costos de las dos opciones?

b) Si las necesidades de programación se estiman en 30000 líneas por año, ¿cuáles son los costos de ambas opciones?

c) En la parte (b), ¿cuál debe ser el costo por línea de código de los programas en la empresa para que cuesten lo mismo?

5. Una empresa de equipo electrónico de alta tecnología necesita un microprocesador especial para emplearlo en una microcomputadora que fabrica. Se han descubierto varias opciones para satisfacer sus necesidades. Puede adquirir los microprocesadores a un proveedor de $10 cada uno . También puede comprar dos equipos automatizados y fabricar los microprocesadores. Un equipo cuesta $80000 y tendrá costos variables de $8 por microprocesador. Un equipo más automatizado tiene un precio de $120000 y genera costos variables de $5 por unidad. Determine las opciones de costo mínimo para varios niveles de producción.

6. Inversiones D'lokura C.A. está estudiando la compra de un equipo que utilizará en la elaboración de un nuevo producto. Está analizando tres máquinas. La máquina 1 tiene un precio de $100000, y el costo de fabricación de cada producto se estima en $25. La máquina 2 cuesta $150000, con un costo de fabricación de $22,50 por cada unidad. La máquina 3 tiene un precio de $180000 y un costo de fabricación de $21 por cada unidad. Determine los niveles de producción en que cada máquina será la alternativa de menor costo. (Sugerencia: puede orientar su análisis a través de una gráfica de las tres funciones de costo).

7. Un envase cilíndrico puede contener 4π pulgadas cúbicas de helado de mantecado. El costo de construcción de una pulgada cuadrada de la tapa y base metálica equivale al doble del costo del lateral en cartón. Exprese el costo de construcción del envase en función del radio, si el costo del lado es 0,02 centavos por pulgada cuadrada.

8. El Club Pequeño Líbano busca recaudar dinero con fines benéficos recolectando botellas usadas para entregarlas a una compañía que las recicla. Desde que comenzó el proyecto, hace 80 días, el club ha recogido 24000 kg. de vidrio. La compañía ofrece actualmente Bs. 1 por kg. Sin embargo, como las botellas se acumulan con mas rapidez de lo que pueden reciclarse, la compañía planea reducir en Bs. 1 cada día el precio que pagará por 100 kg de vidrio. Suponiendo que el club pueda seguir recogiendo botellas al mismo ritmo y que los costos de transporte imposibiliten a la compañía a hacer mas de un viaje, exprese los ingresos que el club obtiene de su proyecto de reciclaje como una función del número de días adicionales que dure este proyecto. Dibuje la gráfica y calcule cuando debería el club terminar el proyecto de entrega para maximizar sus ingresos.

9. La compañía Inversiones D'lokura ha recibido un pedido del departamento de recreación de la ciudad para fabricar 8000 tablas de plástico para su programa de natación. La compañía posee varias máquinas, cada una de las cuales puede producir 30 tablas por hora.

El costo de poner en marcha las máquinas para producir estas tablas es de $20 por máquina. Una vez que las máquinas se ponen en funcionamiento, la operación es automatizada y requiere de un solo supervisor de producción que gana $4,80 por hora. Exprese el costo de producción de las 8000 tablas como una función de la cantidad de máquinas empleadas que la compañía debe utilizar para minimizar el costo.

10. La afiliación a un club privado de tenis cuesta $1000 por año y da derecho al socio a utilizar los campos de juego por una cuota de $3 por hora. En el club de la competencia, la afiliación cuesta $800 por año y el uso de los campos cuesta $4 por hora. Si sólo se basa en el aspecto financiero, ¿a qué club se asociaría?

11. Las funciones de oferta y demanda para cierto artículo son $S(p)=p-10$ y $D(p)=5600/p$, respectivamente.

a) Encontrar el precio de equilibrio y la cantidad correspondiente de unidades ofrecidas y demandadas.
b) Dibujar las curvas de oferta y demanda en el mismo eje
c) ¿Dónde corta la curva de demanda el eje p?, ¿cuál es la interpretación económica de ese punto?

12. Al enfrentar una fuerte sequía en cierta región, el gobernador fijó drásticos aumentos de la tarifa del agua para evitar su desperdicio. La tarifa mensual para una familia promedio (de 4 miembros) fue de $1,22 por cada 100 litros de agua para

los primeros 1200 litros; $10 por cada 100 litros de agua para los siguientes 1200 litros y $50 por cada 100 litros de agua de allí en adelante. Exprese el valor de una factura mensual del agua para una familia como una función de la cantidad de agua consumida.

13. Un comerciante puede vender 200 unidades de cierto artículo al día a Bs.30 por unidad y 250 unidades a Bs. 27 por unidad. La ecuación de oferta para ese artículo es $6p = x + 48$.

a) Determine la ecuación de la demanda para el artículo, suponiendo que es lineal.
b) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.
c) Determine el precio y la cantidad de equilibrio si se ha fijado un impuesto de Bs.3,40 sobre el artículo. ¿Cuál es el incremento en el precio y la disminución en la cantidad demandada?
d) ¿Qué subsidio por unidad incrementaría la demanda en 24 unidades?.
e) ¿Con que impuesto adicional por unidad debe gravarse el artículo de modo que el precio de equilibrio por unidad se incremente por Bs.1,08?

14. Si, para cierto producto, el precio por unidad es de $4, los consumidores compraran 10000 unidades por mes. Luego, si el precio se incrementa a $5 por unidad los consumidores comprarían 9000 unidades por mes. Con base en ello:

a) Suponiendo que la curva de demanda es lineal, encuentre su ecuación.

b) La ecuación de la oferta es:

$$p = \begin{cases} 3{,}2 + \dfrac{q}{2000} & \text{si } 0 \leq q \leq 6000 \\ 5 + \dfrac{q}{5000} & \text{si } 6000 < q \end{cases}$$

Encuentre el punto de equilibrio y la cantidad total gastada por los consumidores en ese producto con el precio de equilibrio.

15. Motores Venezuela compra bandas importadas para el ventilador de su automóvil SkyVen al precio de $2,50 cada una. El gerente está considerando la posibilidad de fabricar sus propias bandas con costos fijos de $6000 al año y un costo unitario de $1,30. ¿Cuántas bandas deberá requerir al año para justificar su fabricación por la empresa misma?.

16. Se lanza una nueva cámara de video al mercado. Si su precio es de $1700 o más, no tendrá demanda. Por cada disminución de $100 en el precio, la demanda se incrementará en 200 unidades. El fabricante no está dispuesto a considerar un precio unitario de $500 o menos y ofrecerá 1400 cámaras al precio de $850 cada una. Determine las ecuaciones de oferta y demanda suponiendo que son lineales. ¿Cuál es el precio y la cantidad de equilibrio?.

17. La agencia de viajes Vacaciones Inolvidables ofrece un paquete vacacional de $500 por persona, en Orlando durante una semana, para grupos de seis o más personas, con un descuento del 10% de este precio a partir de la persona número

12 en el grupo. Construya la función C(x) dando el costo promedio por persona en un grupo de tamaño x.

18. Un granjero tiene 500 m de cerca con la cuál delimitará un corral rectangular. ¿Cuál es el área máxima que puede cercar?.

19. Se observó que la razón de aumento de precio de cierta acción cambió entre el principio de 1982 y 1987 de acuerdo a la fórmula $R = 4(1,2)^t$, donde t es el tiempo en años a partir de 1982. ¿Cuál era el valor de la razón en 1987 (t = 5)?. Suponiendo que se mantiene el incremento, ¿cuándo alcanzará la razón el valor de 20?.

20. Los costos fijos semanales de la empresa CKL por su producto son de $200 y el costo variable por unidad es de $0,70. La empresa puede vender x unidades a $p por unidad en donde 2p = 5 - 0,01x. ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana de modo que obtenga: a) ingresos máximos, b) beneficio máximo?.

RESPUESTAS I.M.

1. a) C = 18x+250000, b) I = 25x, c) B = 7x-250000, d) $450000, e) 35714,28 unidades.
2. $44
3. a) 20, b) -$37500.
4. a) 20000, b) $52500, $60000, c) $1,5.

5. Si la producción es menor a 24 unidades se debe comprar a $10 por unidad. Si es mayor a 24 unidades compre equipo más automatizado.

6. Máquina 1 si x < 20000, máquina 3 si x > 20000.

7. $C = 0{,}08\,\pi\,(r^2 + 2r)$

8. $I = (240+3t)(1+0{,}01t)$; 10 días.

9. $C = 20x + 1280/x$, 8 máquinas.

10. Asociarse al segundo club si se juegan menos de 200 horas de tenis, o al primero si son más de 200 horas anuales.

11. a) p = $80, q = 70 unidades., c) S(10) = 0, los fabricantes no suministrarán unidades a menos que el precio del mercado sea mayor a $10.

12. $c(x) = \begin{cases} 1{,}22x & 0 \le x \le 12 \\ 10x - 105.36 & 12 < x \le 24 \\ 50x - 1065{,}36 & x > 24 \end{cases}$

13. a) $p = 42 - 0.06x$; b) x = 150, p = 33; c) p_1 = Bs. 33,90, x_1 = 135; d) Bs. 5,44; e) Bs. 4,08.

14. a) $p = 14 - q / 1000$; b) q = 7500, p = $6,50

15. Debe requerir más de 5000 bandas.

16. Demanda: $p = 1700 - x/2$, oferta: $p = 500 + x/4$; p = $900, x = 1600.

17. $c(x) = \begin{cases} 500 & \text{si } 6 \le x \le 12 \\ 450 + \dfrac{600}{x} & \text{si } x > 12 \end{cases}$

18. 15625 m^2

19. 9,95; t = 8,8

20. a) 250 unidades; b) 180 unidades.

1.7 Miscelánea de Ejercicios.

A continuación se ofrece una serie de ejercicios de repaso de esta unidad.

☑ Indique si los siguientes planteamientos son Verdadero o Falso. Justifique su respuesta.

1. Si el rango de una función consta de un solo número, su dominio también consta de un solo número.
2. La función inversa de y = f(x) = 3 es x = -3
3. Si f(x) y g(x) tienen el mismo dominio, entonces f(x) /g(x) tiene también ese dominio.
4. El rango de $y = e^{\sqrt{x^2-1}}$ es todos los reales.
5. Si la gráfica de y = f(x) intersecta al eje x en x=c, entonces la gráfica de y=f(x+h) intersecta al eje x en x = c-h.

☑ Dado f(x) y g(x)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{|2x+1| + x} & \text{si} \quad x \le -3 \\ |x^2 + 5| & \text{si} \quad -3 < x < 2 \\ \ln(x-3) & \text{si} \quad 2 \le x < 4 \\ e^{x/2} & \text{si} \quad x \ge 4 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{3}$$

hallar, siempre que sea posible, las siguientes expresiones:

6. f(3); f(-1); f(0); f(7); f(e)
7. f(x+h) ; $f(x^2-a)$
8. (fog)(x) ; $(gog^{-1})(x)$
9. $f^{-1}(x)$ en el intervalo $(5, \infty)$
10. [g(x+h)-g(x)] /h
11. $(gof^{-1})(x)$ en el intervalo [2,4)

☑ Hallar el dominio de:

12. $y = \log [1-\log(x^2-3x+12)] + (x-1)^{-1}$

13. $$y = \begin{cases} \sqrt{|x-2|+3} & \text{si} \quad x < -1 \\ 4 & \text{si} \quad x = -1 \\ \dfrac{1}{2x - \sqrt{x^2+1}} & \text{si} \quad -1 < x < 2 \\ e^{x^2-3/x} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

☑ Analice las siguientes expresiones y esboce su gráfica.

14. $|x^2 -2x+7| < 3x - 8$
15. $y = ½ + (x^2- 4)^{1/2}$ y su inversa.

16. $$y = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+3} & \text{si} \quad x < -2 \\ 3 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ |x^2 - 3| & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ \sqrt{x-2} & \text{si} \quad 3 \le x \le 5 \\ \ln(x-5) & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$$

☑ Resuelva los siguientes problemas:

17. Un fabricante produce réplicas pequeñas de la Estatua de la Libertad. El determina que el costo diario, en dólares, al producir n estatuas está expresado por $C = n^2 - 120n + 4200$. ¿Cuántas estatuas debe producir cada día para tener costos mínimos?. ¿Cuál será ese costo mínimo?.

18. La compañía CKL tiene costos fijos totales de Bs. 100000000 y costos variables totales igual al 80% de las ventas totales. ¿A cuánto debe ascender las ventas totales para obtener una ganancia de Bs. 40000000?.

19. Se va a utilizar una lámina cuadrada de hojalata para formar una caja sin tapa cortando cuadrados de 5 cm en cada esquina y doblando los lados hacia arriba. El volumen de la caja debe ser de 300 cm^3 . Cuál es el área del cuadrado original?.

20. Un empresario adquiere una máquina por Bs. 36500000, la máquina gasta en promedio Bs. 6000 en mantenimiento y combustible. El operador que la maneja cobra Bs. 9500 por hora y a los clientes se les carga Bs. 25000 por hora.

a) Halle las ecuaciones de Ingreso y de costo en función de t horas.

b) ¿En qué momento está en equilibrio el servicio de la maquinaria?

UNIDAD II

LÍMITES Y CONTINUIDAD

La población (en miles) de una colonia de bacterias, t minutos después de la introducción de una toxina, está dada por la función:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & t < 5 \\ -8t + 72 & t \geq 5 \end{cases}$$

¿Cuándo morirá la colonia?

¿Por qué la población debe ser de 10000 en algún momento, entre t=1 y t=7?

CONTENIDO

2.1 Definición de Límite

2.2 Teoremas sobre límites

2.3 Resolución de límites indeterminados

2.4 Límites unilaterales

2.5 Límites y asíntotas

2.6 Continuidad de una función

2.7 Teorema del Valor Intermedio

2.8 Miscelánea de ejercicios.

UNIDAD II:

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

2.1. DEFINICIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

Antes de definir Límites aclararemos algunos conceptos:

- **ENTORNO DE UN NÚMERO**

El entorno de un punto "a" es un intervalo abierto que puede contener a ese punto.

En general, el entorno se representa como un intervalo:

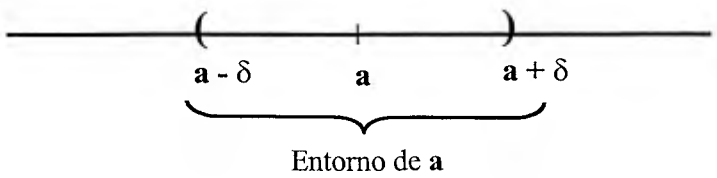
$$\mathbf{N(a) = (a - \delta,\ a + \delta)}$$

Donde δ (delta) es un número positivo casi siempre muy pequeño.

El entorno se puede expresar en tres formas:

- Intervalo: $N(a) = (a - \delta;\ a + \delta)$
- Desigualdad: $N(a)$: $a - \delta < x < a + \delta$
- Módulo $N(a)$: $|x - a| < \delta$

Interpretación Gráfica en la Recta Real:



Entorno reducido: excluye al punto "a".

Luego, el entorno reducido se define como:

$$N'(a) = \{x \,/\, a - \delta < x < a + \delta \,;\, x \neq a\}$$

- **NOCIÓN INTUITIVA DE LÍMITE:**

Cuando se habla de límite de una función en Cálculo se refiere al valor que toma esa función cuando la variable *tiende* a un valor, se acerca pero no toma ese valor.

Ejemplo 1:

Consideremos la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x - 6}$$

No está definida para x = 6, pero si buscamos los valores de f(x) para un entorno reducido de x = 6, tenemos que:

x	f(x)
5.9	7.9
5.99	7.99
5.999	7.999
5.9999	7.9999

Si x *tiende a* 6 por la izquierda, **f(x)** *tiende a* **8**

x	f(x)
6.1	8.1
6.01	8.01
6.001	8.001
6.0001	8.0001

Si x *tiende a* 6 por la derecha, **f(x)** *tiende a* **8**

Es decir, el *verdadero valor* de f(x) es 8 cuando x tiende a 6. Esto nos lleva a la definición de *límite*:

DEFINICIÓN DE LÍMITE:

Se dice que y = f(x) tiende al límite "L" cuando la variable x se acerca a "a", si a cada entorno N(L) le corresponde un entorno reducido N'(a), tal que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow f(x) \in N(L) \Longleftrightarrow x \in N'(a)$$

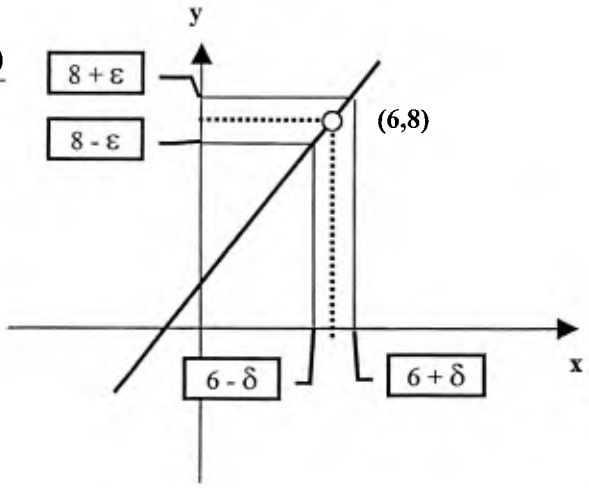
$$|f(x) - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow 0 < |x-a| < \delta$$

donde ε (epsilon) y δ (delta) son muy pequeños.

Volviendo al ejemplo 1, la interpretación gráfica sería:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x - 6} = \frac{(x-6)(x+2)}{x-6}$$

Luego: f(x) = x +2; x ≠ 6



2.2. TEOREMAS SOBRE LÍMITES.

a) $\lim\limits_{x \geqslant a} k = k$ para k = constante

b) $\lim\limits_{x \geqslant a} (f(x) \pm g(x) \pm h(x)) = \lim\limits_{x \geqslant a} f(x) \pm \lim\limits_{x \geqslant a} g(x) \pm \lim\limits_{x \geqslant a} h(x)$

c) $\lim\limits_{x \geqslant a} [\, f(x) \,.\, g(x) \,] = \lim\limits_{x \geqslant a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \geqslant a} g(x)$

d) $\lim\limits_{x \geqslant a} f(x) / g(x) = \lim\limits_{x \geqslant a} f(x) / \lim\limits_{x \geqslant a} g(x)$

e) $\lim\limits_{x \geqslant a} k \,.\, f(x) = k \lim\limits_{x \geqslant a} f(x)$

f) $\lim\limits_{x > a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x > a} f(x)]^n$ para $n \in \mathbf{R}$. (Si $n = 1/k$ y k es par, $\lim\limits_{x > a} f(x) > 0$)

g) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en un intervalo abierto que contiene a *a* (probablemente excepto en *a*), y los límites de f y g existen cuando x tiende a *a*, entonces:

$$\lim_{x > a} f(x) \leq \lim_{x > a} g(x)$$

h) Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x en un intervalo que contiene a *a*, (probablemente excepto en *a*) y $\lim\limits_{x > a} f(x) = \lim\limits_{x > a} h(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x > a} g(x) = L$.
(Este teorema se conoce como Teorema del EMPAREDADO)

Valores infinitos e infinitésimos:

En Cálculo, a menudo, se manejan valores que "tienden a" cero o a infinito. Si consideramos *k* como cualquier número real, se cumple que:

$K + \infty = +\infty$	$K - \infty = -\infty$
$K \cdot \infty = \infty$ (si $k > 0$)	$K \cdot \infty = -\infty$ (si $k < 0$)
$\infty \cdot \infty = \infty$	$\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
$\infty + \infty = \infty$	$1/\infty = 0$ y $1/0 = \infty$

Algunas operaciones pueden resultar indeterminadas. Destacaremos los siguientes *casos de indeterminación*:

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \infty - \infty \quad ; \quad 0.\infty \quad ; \quad 1^{\infty}$$

2.3. Resolución de límites indeterminados:

Se presentan varios casos, según la indeterminación:

Caso 1: Límite de la forma 0/0. (Verdadero valor)

Si $x \to a$, existe en el numerador y denominador un factor $(x-a) = 0$.

¿Cómo resolverlo? → *Factorice y simplifique (x-a)*

<u>CASO 2:</u> Límite de la forma ∞ / ∞.

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a_1x^m + a_2x^{m-1} + a_3x^{m-2} + \ldots}{b_1x^n + b_2x^{n-1} + b_3x^{n-2} + \ldots} = L$ donde m, n $\in$ R, se puede presentar tres casos:

1. $m > n$ $\quad L \to \infty$
2. $m < n$ $\quad L = 0$
3. $m = n$ $\quad L = a_1 / b_1$

¿Cómo resolverlo? $\to$ Divida el numerador y denominador entre la variable x elevada a la potencia mayor.

<u>CASO 3:</u> Límite de la forma $\infty - \infty$.

¿Cómo resolverlo? $\to$ llévese a la forma 0/0 o ∞ / ∞ con aplicaciones de álgebra sencillas. Por ejemplo: multiplicar por la conjugada, si fuera el caso.

<u>CASO 4:</u> Límite de la forma $0.\infty$.

¿Cómo resolverlo? $\to$ Llévese a la forma 0/0 o ∞ / ∞ , mediante operaciones convenientes.

CASO 5: Límite de la forma 1^{∞}.

ANTES DEBES SABER QUE...

$$e^k = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{kx} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{k}{x}}$$

¿Cómo resolverlo? →

Si f(x) → 1 y g(x) → ∞ cuando x → a, entonces

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to a}[1+(f(x)-1)]^{g(x)} = \lim_{x\to a}[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}(f(x)-1).g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[f(x)-1]\,g(x)}$$

Ejemplo 2: Resolver $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6}$

Solución:

Primero se debe sustituir x por 2, para así saber si es indeterminado y de que forma:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6} = \frac{4+6-10}{4+2-6} = \frac{0}{0}$$

Como es 0 / 0, factorizamos buscando simplificar (x-2):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+3)} = \frac{7}{5}$$

Ejemplo 3: Resolver $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+1}{3x-2x^3}$

Solución:

Verificamos que es de la forma ∞/∞ y que el mayor exponente es 3.

Luego dividimos numerador y denominador por x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+1}{3x-2x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{-\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x}{x^3}}$$

Observa que $\frac{c}{\infty} \to 0$ (c es constante)

Entonces:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 1}{3x - 2x^3} = \frac{5 - \frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{-2 + \frac{3}{\infty}} = -\frac{5}{2}$$

→ Este resultado es fácil de obtener directamente. Basta con analizar donde predomina la variable, pues allí predominará el ∞.

Ejemplo 4: Resolver $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4x+5} - 3x}{\sqrt{2x+7} - 3}$

Solución:

Al sustituir x por 1 observamos que es de la forma 0/0.

Racionalizamos para factorizar:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4x+5} - 3x}{\sqrt{2x+7} - 3} \cdot \frac{\sqrt{2x+7} + 3}{\sqrt{2x+7} + 3} \cdot \frac{\sqrt{4x+5} + 3x}{\sqrt{4x+5} + 3x} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(4x + 5 - 9x^2)\sqrt{2x+7} + 3}{(2x + 7 - 9)\sqrt{4x+5} + 3x} = \lim_{x\to 1} \frac{(9x+5)(x-1)\sqrt{2x+7} + 3}{2(x-1)\sqrt{4x+5} + 3x} = 7$$

Ejemplo 5: Resolver: $\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^2}{\sqrt[3]{x^6+1}}$

Solución:

Note que el mayor exponente no está explícito, debe considerar el índice de la raíz.

Luego, se divide entre x^2, con especial cuidado por las potencias:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+\frac{x}{x}\right)^2}^{\text{Al ser una potencia al cuadrado, } x^2=(x)^2}}{\underbrace{\sqrt[3]{\frac{x^6}{x^6}+\frac{1}{x^6}}}_{\text{Al ser raíz cúbica, } x^2=\sqrt[3]{x^6}}} = \frac{(\sqrt{1+0}+1)^2}{\sqrt[3]{1+0}} = 4$$

Ejemplo 6: $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-bx}\right)$

Solución:

Como es de la forma $\infty - \infty$, debemos llevarlo a la forma ∞/∞ o 0/0.

Multiplicamos por la conjugada:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-bx}\right).\frac{\left(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-bx}\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-bx}\right)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+ax-x^2+bx}{\left(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-bx}\right)} = \frac{ax+bx}{\left(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-bx}\right)} \quad \to \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{ax}{x}+\frac{bx}{x}}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{ax}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{bx}{x^2}}\right)} = \frac{a+b}{2}$$

Ejemplo 7: Resolver $\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+1}\right)$

Solución:

Es de la forma $0.\infty$, se lleva a ∞/∞ o 0/0.

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{x^2+1+x^2-1}{x^4-1}\right) = \quad \to \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^4}{x^4-1} = 2$$

Ejemplo 8: Resolver $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x-2}{x+1}-1\right].3x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{x+1}.3x} = e^{-9}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS II.A

Calcule el valor de los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{bx+a}}{\sqrt{cx+d}-\sqrt{dx+c}}$

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+x^2-21x-45}{x^3+6x^2+9x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sqrt{x^2+1}-x^2\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x-5}$

6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}}{x-a}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(ax^n-bx^{n-1}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x}-\sqrt{4x-3}}$

9. $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sqrt{a^2+an+n^2}-\sqrt{a^2-an+n^2}}{\sqrt{a+n}-\sqrt{a-n}}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt[4]{x^2+2x}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{(1-x)^3}\right)$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}+\dfrac{1}{x}\right)$

14. $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\left(\dfrac{a}{x+b}-\dfrac{b}{x+a}\right)$

15. $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{t+\sqrt{t+\sqrt{t}}}}{\sqrt{t+1}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+a)(n+b)(n+c)}-n\right)$

17. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x-16}{\sqrt[4]{x}-2}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt[3]{5n^3-n^2}\right)$

19. $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{z}{1+z+\dfrac{2z^2}{1-z}}}$

20. $\lim\limits_{p\to 32} \dfrac{\sqrt[5]{p}-2}{p^2-1024}$

21. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$

22. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^{-3}-2^{-3}}{h}$

23. $\lim\limits_{x\to -\pi} \sqrt[5]{\dfrac{x^2-\pi^2}{x+\pi}}$

24. $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{h}\right)\left(\dfrac{1}{1+h}-1\right)$

25. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

26. $\lim\limits_{t\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{t}-2}{t-8}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2-3n}{n^2+4n}+\dfrac{n^3-2n^2}{4n^3+8n-5}\right)$

28. $\lim\limits_{s\to 2} \left(\dfrac{1}{s-2}-\dfrac{4}{s^2-4}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-x+6}-\sqrt{x^2+2x-3}}{x^2-4x+3}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n^4-3n}-\sqrt{4n^6-3n^2+1}}{\sqrt[4]{16n^3-1}-\sqrt[3]{3n^9-n^7+4n^3-1}}$

31. $\lim\limits_{s\to\infty} \left(\sqrt[3]{s2-2s+2}-\sqrt[3]{s-1}\right)$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1-nx)^m}{x^2}$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2x+3}{x-1}\right)^{\frac{x^2+1}{\sqrt{x}+1}}$

34. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\log_b \dfrac{\sqrt{7+x}-3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}}\right]$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \log \dfrac{x^2-\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-2}$

36. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[3]{x^6-12x^2}}{3x^2+\sqrt{2x^3}}+\dfrac{\sqrt[4]{x^4-1}}{x^4}\right)^{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}}$

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x+(-2)^x}{5^{x-1}}$

38. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

39. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[4]{1+8x}$

40. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

41. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2-8x+3}\right]$

42. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

43. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right]$

44. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

45. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

46. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{3x^2+4}{3x^2+5}\right]^{x^2+3}$

47. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2}{1-x}}$

48. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{2+3x}{2+5x}\right]^{\frac{1}{x}}$

49. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

50. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

51. $\lim\limits_{x\to 2} (x-1)^{\frac{1}{x-2}}$

52. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\,[\sqrt{3+x}-x]$

53. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

54. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$

55. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

56. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

57. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{(x+2)(x-3)}-x\right]$

58. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{2x-1}{2x+1}\right]^{2x}$

59. $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{2x+3}{2x+1}\right]^{x+1}$

60. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$

RESPUESTA II.A

1) $3a$, 2) $\frac{(a-b)\sqrt{c+d}}{(c-d)\sqrt{a+b}}$, 3) $\frac{8}{3}$,

4) $\frac{1}{2}$, 5) $\frac{1}{12}$, 6) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$,

7) ∞, 8) $\frac{3}{2}$, 9) $\sqrt{a}$,

10) 1, 11) ∞, 12) $\frac{3}{2}$,

13) 2, 14) $a-b$, 15) 1,

16) $\frac{a+b+c}{3}$, 17) 32, 18) ∞,

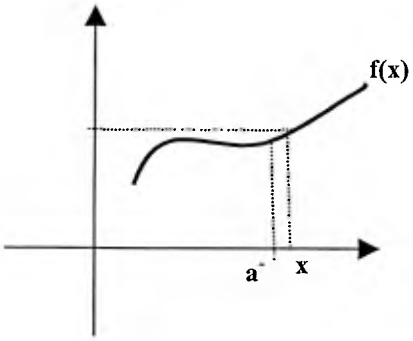
19) ∞, 20) $\frac{1}{5120}$, 21) $\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$,

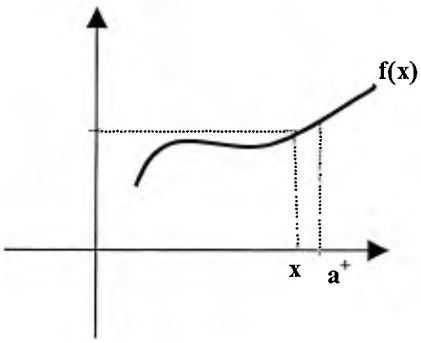
22) $\frac{-3}{16}$,	23) $-\sqrt[5]{2\pi}$,	24) $-\frac{1}{2}$,
25) $3x^2$,	26) $\frac{1}{12}$,	27) $\frac{5}{4}$,
28) $\frac{1}{4}$,	29) $-\frac{1}{3}$,	30) $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$,
31) ∞,	32) $\frac{mn(n-m)}{2}$,	33) -3,
34) $\log_b \frac{34}{23}$,	35) 0,	36) $\frac{1}{3}$,
37) 10,	38) e^4,	39) e^8,
40) $\frac{1}{8}$,	41) 6,	42) $\frac{1}{2}$,
43) -2,	44) -1,	45) $-\frac{1}{56}$,
46) $e^{-\frac{1}{3}}$,	47) e^{-2},	48) e^{-1},
49) 1,	50) $\frac{2}{3}$,	51) e,
52) $-\infty$,	53) $\frac{1}{2}$,	54) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$,
55) $\frac{4}{3}$,	56) 0,	57) $-\frac{1}{2}$,
58) e^{-2},	59) e,	60) $\frac{\sqrt[n]{a}}{na}$

2.4. Límites Unilaterales

En ocasiones podemos encontrar una función que tiende a valores distintos por la izquierda y por la derecha del valor *a* al que tiende la variable, e incluso puede no existir el límite por uno de los lados.

Gráficamente, se interpreta de la siguiente manera:





$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

La relación entre los límites laterales y el límite de una función vienen dada por el siguiente teorema:

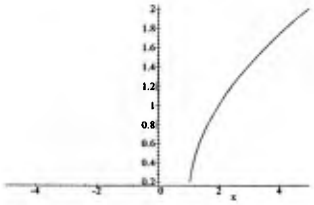
Suponga que un intervalo abierto contiene al punto a y que una función f está definida en todo el intervalo excepto, posiblemente, en a. Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Ejemplo 9: Averigue si existe el límite de f(x) = $\sqrt{x-1}$ cuando x tiende a 1 por la derecha.

Solución:

y = $\sqrt{x-1}$



Observa que $1^+>1$, por lo tanto
$x-1>0$
y el límite existe.

Si buscamos el límite cuando x tiende a 1 por la izquierda notamos que

$$1^- < 1 \quad \rightarrow \quad x-1<0 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x-1} \nexists$$

Luego

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} \neq \lim_{x\to 1^-} \sqrt{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to 1} \sqrt{x-1} \nexists}$$

Ejemplo 10: Suponga que f(x) = $\frac{|x|}{x}$ si x$\neq$ 0 y f (0) = 1.

a) Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ y $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

b) ¿Cuál es el $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$?

Solución:

a) Se debe analizar lo que sucede cuando x > 0 y cuando x < 0:

* Cuando x > 0 $\Rightarrow$ $|x| = x$ $\rightarrow$ $f(x) = \frac{x}{x} = 1$

Luego, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

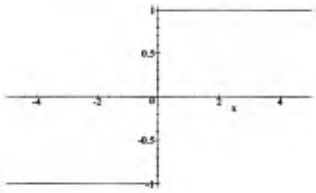
* Cuando x < 0 $\Leftrightarrow$ $|x| = -x$ $\rightarrow$ $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$

Luego, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

b) Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \nexists$

Gráficamente podemos observar que son límites distintos:

$y = \frac{|x|}{x}$



Ejemplo 11: Calcular $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x < 1 \\ x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

Solución:

En estos casos es necesario hallar el límite por la izquierda y por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^-} x^3 + 1 = 2 \quad y \quad \lim_{x \to 1^+} x^3 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} x^3 + 1 = 2$$

Ejemplo 12: Calcular $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 2}{4} & x < 3 \\ x^2 - 2x + 10 & x \geq 3 \end{cases}$

Solución:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{3x - 2}{4} = \frac{7}{4} \quad y \quad \lim_{x \to 3^+} (x^2 - 2x + 10) = 13$$

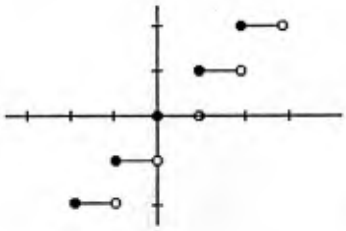
Luego, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to 3} f(x) \nexists$

Ejemplo 13: Calcule los límites cuando $x \to 0^-$, $x \to 0^+, x \to 1^-, x \to 1^+$, $x \to 2^-, x \to 2^+$, etc. de f(x) = $[x]$

Solución:

Si observamos la gráfica de la función parte entera podemos notar que los límites son distintos:

f(x) = $[x]$



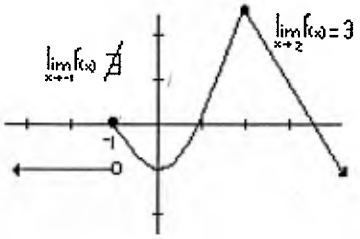
Calculamos los límites laterales... $\left[\begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to 0^-} [x] = -1 & \lim\limits_{x\to 0^+} [x] = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} [x] = 0 & \lim\limits_{x\to 1^+} [x] = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} [x] = 1 & \lim\limits_{x\to 2^+} [x] = 2 \end{array}\right.$

Ejemplo 14: Dada la función f(x) = $\begin{cases} -1 & x < -1 \\ x2 - 1 & -1 \leq x < 2 \\ 7 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$

grafique y calcule a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Solución:

En la gráfica podemos observar que no siempre existe el límite de una función en un punto:



Al calcular el límite debemos considerar el comportamiento de la función tanto por la izquierda como por la derecha del valor al que tiende la variable.

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} -1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} x^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -1} f(x) \nexists$ b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} x^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 7 - 2x = 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

Ejemplo 15: Si f(x) = $\begin{cases} x + a & x < -1 \\ 2ax + b & -1 \leq x < 1 \\ b - 3x & x \geq 1 \end{cases}$

Calcule los valores de a y b para que los límites cuando x→ -1 y x→ 1 de f(x) existan.

Solución:

Recuerda que el límite en un determinado valor existe sólo si son iguales los límites laterales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} x+a=-1+a\\ \lim\limits_{x\to -1^+} 2ax+b=-2a+b\end{array}\right\} \Rightarrow -1+a=-2a+b \Rightarrow \boxed{3a-b=1} \text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} 2ax+b=2a+b\\ \lim\limits_{x\to 1^+} b-3x=b-3\end{array}\right\} \Rightarrow 2a+b=b-3 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{3}{2}} \text{(II)}$$

Intersectando las ecuaciones (I) y (II) obtenemos:

$$a=-\frac{3}{2} \text{ y } b=-\frac{11}{2}$$

Ejemplo 16: Calcule los límites laterales de f(x) = $\frac{2}{3+4^{\frac{1}{x}}}$ en x = 0.

Solución:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3+4^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3+4^{-\infty}} = \frac{2}{3}$$

Observa que 0^- implica valores negativos de x luego, $\frac{1}{0^-} = -\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3+4^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3+4^{\infty}} = 0$$

Así mismo 0^+ implica valores positivos de x luego, $\frac{1}{0^+} = \infty$

EJERCICIOS PROPUESTOS II.B

Para cada una de las siguientes funciones calcule el límite, si existe,

cuando la variable tiende al valor indicado.

1. $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases} \qquad x \to 0$

2. $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < -1 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} & -1 \leq x < 4 \\ \dfrac{11-2x}{x^2-11} & x \geq 4 \end{cases} \qquad x \to -1 \quad y \quad x \to 4$

3. $f(x) = \begin{cases} 3 & x < -3 \\ -\dfrac{x^3}{9} & -3 \leq x \leq 3 \\ x-1 & x > 3 \end{cases} \qquad x \to -3 \quad y \quad x \to 3$

4. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5} & x < 5 \\ \dfrac{x^2-64}{8-x} & 5 \leq x < 8 \\ -16 & x = 8 \end{cases} \qquad x \to 5 \quad y \quad x \to 8$

5. $f(r) = \begin{cases} 2r+3 & r < 1 \\ 5 & r = 1 \\ 7-2r & r > 1 \end{cases} \qquad x \to 1$

6. $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 2 \\ 4 & x = 2 \\ 4-x^2 & x > 2 \end{cases} \qquad x \to 2$

7. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x<1 \\ 4 & x=1 \\ x^2+2 & x>1 \end{cases} \qquad x \to 1$

8. $f(x) = \begin{cases} |x-1| & x<-1 \\ 0 & x=-1 \\ |1-x| & x>-1 \end{cases} \qquad x \to -1$

9. $f(x) = \begin{cases} x+1 & x<-1 \\ x^2 & -1 \le x \le 1 \\ 1-x & x>-1 \end{cases} \qquad x \to -1 \quad y \quad x \to 1$

10. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-9} & x \le -3 \\ \sqrt{9-x^2} & -3 < x < 3 \\ \sqrt{x^2+9} & x \ge 3 \end{cases} \qquad x \to -3 \quad y \quad x \to 3$

11. $f(x) = [x] - x, \qquad x \to 4^-$

12. $f(x) = \dfrac{x}{[x]}, \qquad x \to 0^-$

13. $f(x) = \dfrac{[2x]+x}{2x-|x|-[x]}, \qquad x \to 0$

14. $f(x) = [x] + [4-x], \qquad x \to 2$

15. $f(x) = 3 + |2x-4|, \qquad x \to 2$

16. $f(x) = \dfrac{|2x+1| + [2x+1] + 2x+1}{2x+1}, \qquad x \to -\frac{1}{2}$

RESPUESTAS II.B

1) no existe	2) no existe, $\frac{3}{5}$	3) 3, no existe	4) no existe, -16
5) 5	6) 0	7) no existe	8) 2
9) no existe	10) 0, no existe	11) -1	12) 0
13) no existe	14) 3,	15) 3	16) no existe.

EJERCICIOS PROPUESTOS II.C

Calcule los valores de k, a y b para que los siguientes límites existan en los valores indicados.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 3 \\ kx - 1 & x > 3 \end{cases}$ $\quad x \to 3$

2. $f(x) = \begin{cases} 4x + k & x < 0 \\ kx^2 + 2 & x \geq 0 \end{cases}$ $\quad x \to 0$

3. $f(x) = \begin{cases} 2x - a & x < 1 \\ -3ax + b & 1 \leq x < 3 \\ 4x - b & x \geq 3 \end{cases}$ $\quad x \to 1 \quad y \quad x \to 3$

RESPUESTAS II.C

1) 3, 2) 2, 3) $a = -\frac{8}{5}, b = -\frac{6}{5}$

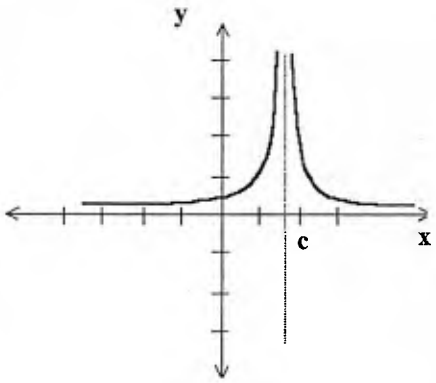
2.5 Límites y Asíntotas:

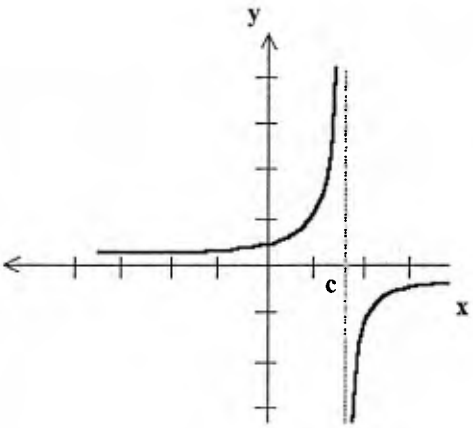
Recuerda que
Una curva puede tener varias asintotas verticales. (*Revisa lo visto en la Unidad I*)

❑ Limites Infinitos. Asíntotas Verticales:

Cuando se tiene que el $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$ implica que f(x) crece o decrece al infinito cuando x se acerca a c. Luego, **x = c** es una asíntota vertical.

Si $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ ó $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$, entonces f tiene una *asíntota vertical de ramas convergentes:*





Si $\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$ (o viceversa), entonces f tiene una

asíntota vertical de ramas divergentes.

Nota
Al trazar la grafica es conveniente estudiar si la función se aproxima a la asíntota por encima o por debajo de ésta.

❑ Limites en el Infinito. Asíntotas Horizontales:

Cuando $x \to \pm\infty$, el límite de f(x) es L. Luego, **y = L** es asíntota horizontal.

❑ Limites infinitos en el Infinito. Asíntotas Oblicuas:

Es de la forma **y = mx + b** donde:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Nota
Una curva puede cortar a las asíntotas horizontales y oblicuas.

Ejemplo 17: Hallar las asintotas de $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

Solución:

Analicemos todas las asíntotas que tiene la gráfica.

Asíntotas Verticales: estas vienen dada por las raíces del denominador:

$$y = \frac{x^2+1}{(x-1).(x+1)} \qquad \begin{cases} \mathbf{x = -1} \\ \mathbf{x = 1} \end{cases} \quad \text{son posibles asintotas.}$$

Calculamos los límites laterales de la función cuando x tiende al valor de las raíces:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2+1}{(x-1)\ (x+1)} = +\infty \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{Observa que } -1^- + 1 = 0^+, \\ \text{luego, el cociente es positivo , tiende a } +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2+1}{(x-1)\ (x+1)} = -\infty \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{Observa que } -1^+ + 1 = 0^-, \\ \text{entonces el cociente es negativo , tiende a } -\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{(x-1)\ (x+1)} = -\infty \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{Observa que } 1^- - 1 = 0^-, \\ \text{el cociente es negativo , tiende a } -\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{(x-1)\ (x+1)} = +\infty \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{Observa que } 1^+ - 1 = 0^+, \\ \text{el cociente es positivo , tiende a } +\infty \end{array} \right.$$

Asíntotas Horizontales: hallamos el límite cuando $x \to \pm\infty$ de f(x).

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

Debe analizar si el cociente tiende a 1 por encima o por debajo de este valor.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1$$

Cuando x $\to -\infty$ y x $\to \infty$, la curva es asintótica a **y=1** por encima de ésta.

Asíntotas Oblicuas: hallamos el valor de m y b

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = 0 \qquad b =$$

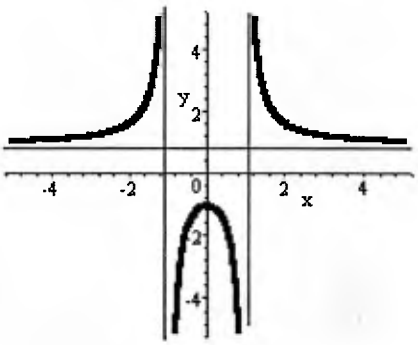
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} - 0\right) = 1$$

Luego, y = 0.x + 1= 1 es la misma asíntota horizontal.

Al estudiar la asíntota cuando x$\to -\infty$ hallamos tambien el resultado y =1.

Entonces la Asíntota Horizontal es una Asíntota Oblicua de pendiente 0

$$x^2y - y - x^2 - 1 = 0$$



En la gráfica puede notar que:

x = 1 y x = -1 son asíntotas verticales de ramas divergentes

y = 1 es asíntota horizontal

Ejemplo 18: Hallar las asíntotas de $y = \dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}$

Solución:

Asíntotas Verticales:

$$y = \frac{x^2-2}{x^2-x-2} = \frac{x^2-2}{(x-2)(x+1)} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ posibles asíntotas}$$

Hallamos los límites laterales y analizamos el signo del resultado:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2-2}{(x-2)(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-2}{(x-2)(x+1)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2}{(x-2)(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2}{(x-2)(x+1)} = \infty$$

Luego, asíntotas verticales: **x = -1** y **x = 2**

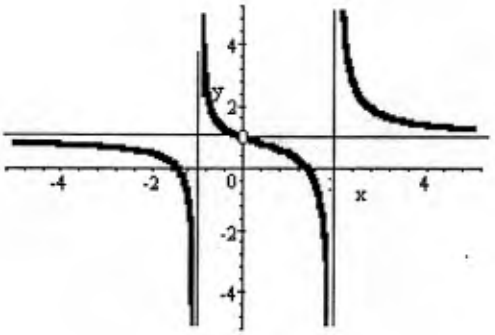
Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-2}{x^2-x-2} = 1 \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{x^2-2}{x^2-x-2} = 1$$

Luego. asíntota horizontal: **y = 1**

Asíntotas Oblicuas: en esta curva no hay asíntota oblicua.

$$y = \frac{x^2 - 2}{x^2 - x - 2}$$



Observa que la asíntota horizontal corta a la curva en el punto (0,1).
¿Cómo es ese punto?.

Ejemplo 19 Hallar las asíntotas de $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución:
Asíntotas Verticales:

$$y = \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \infty$$

Asíntotas verticales: **x = -1** y **x = 1**

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \infty$$

No hay asíntotas horizontales

Asíntotas Oblicuas:

$2x^2$

Cuando x→ ∞

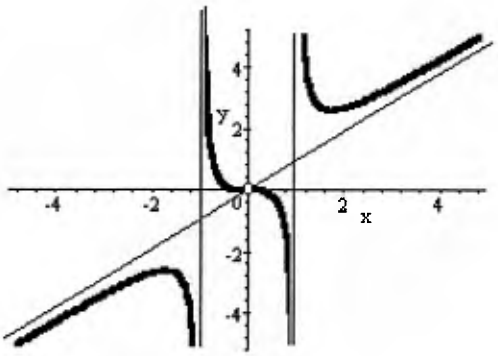
$$\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x^2-1)x} = 1 \\ b &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad y = x$$

Cuando x→ −∞

$$\left.\begin{aligned} m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x^2-1)x} = 1 \\ b &= \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad y = x$$

Asíntota oblicua: **y = x**

y = $\frac{x^3}{x^2-1}$



¿Qué sucede en el origen de coordenadas con la curva y la asíntota.

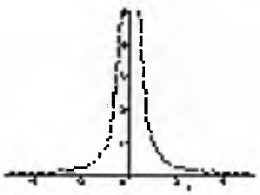
EJERCICIOS PROPUESTOS II.D

Hallar las asíntotas de las siguientes curvas. (Esboce la gráfica)

1. $yx^2=1$
2. $yx^2 + yx - 2y = x^2$
3. $y = \frac{x^3}{x^2-4}$
4. $y = 1 - \frac{4}{x^2}$
5. $y = \frac{4}{(x-2)^3}$
6. $y = \frac{x}{x^2+x-2}$
7. $y = \frac{2+x}{1+x}$
8. $y = \frac{-4x}{x^2+4}$
9. $y = \frac{-2}{(x-2)^2}$
10. $y = \frac{1}{(x+3)^4}$
11. $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$
12. $y = \frac{x^2-6x+3}{x-3}$
13. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
14. $y = \sqrt[3]{2x^2-x^3}$
15. $y = \frac{x^2+x-10}{2x-1}$

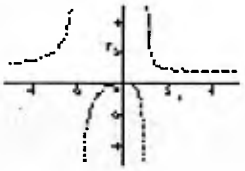
RESPUESTAS II.D

1. $yx^2=1$



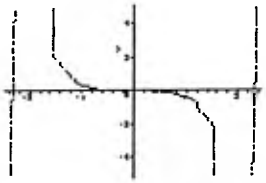
Asíntotas $x = 0$, $y = 0$

2. $yx^2 + yx - 2y = x^2$



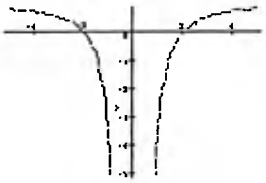
Asíntotas $x = 1$, $x = -2$, $y = 1$

3. $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$



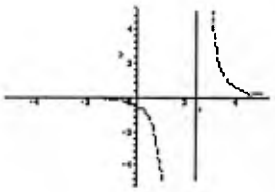
Asíntotas: x = -2, x = 2

4. $y = 1 - \frac{4}{x^2}$



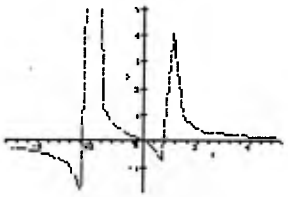
Asíntotas: x = 0, y = 1

5. $y = \frac{4}{(x-2)^3}$



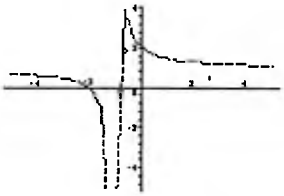
Asíntotas: x = 2, y = 0

6. $y = \frac{x}{x^2 + x - 2}$



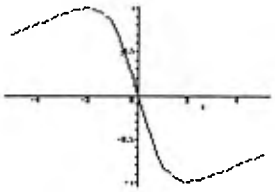
Asíntotas: x =1, x =-2, y = 0

7. $y = \frac{2 + x}{1 + x}$



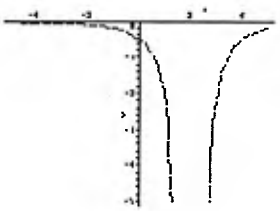
Asíntotas: x = 1, y = 1

8. $y = \frac{-4x}{x^2+4}$



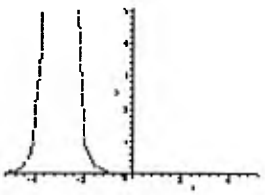
Asíntotas: y = 0

9. $y = \frac{-2}{(x-2)^2}$



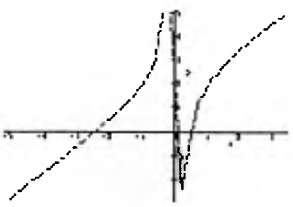
Asíntotas: y = 0, x = 2

10. $y = \frac{1}{(x+3)^4}$



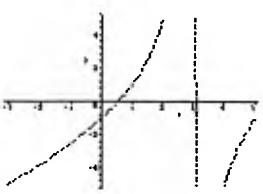
Asíntotas: x = -3, y = 0

11. $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$



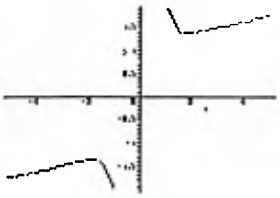
Asíntotas: x = 0, y = x + 2

12. $y = \frac{x^2-6x+3}{x-3}$



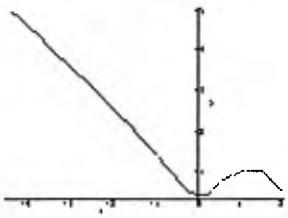
Asíntotas: x = 3, y = x-3

13. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$



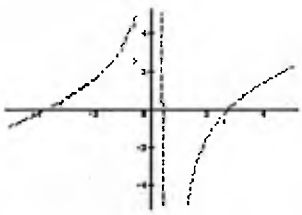
Asíntotas: $x = 1$, $x = -1$

14. $y = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$



Asíntotas: $y = -x + \frac{2}{3}$

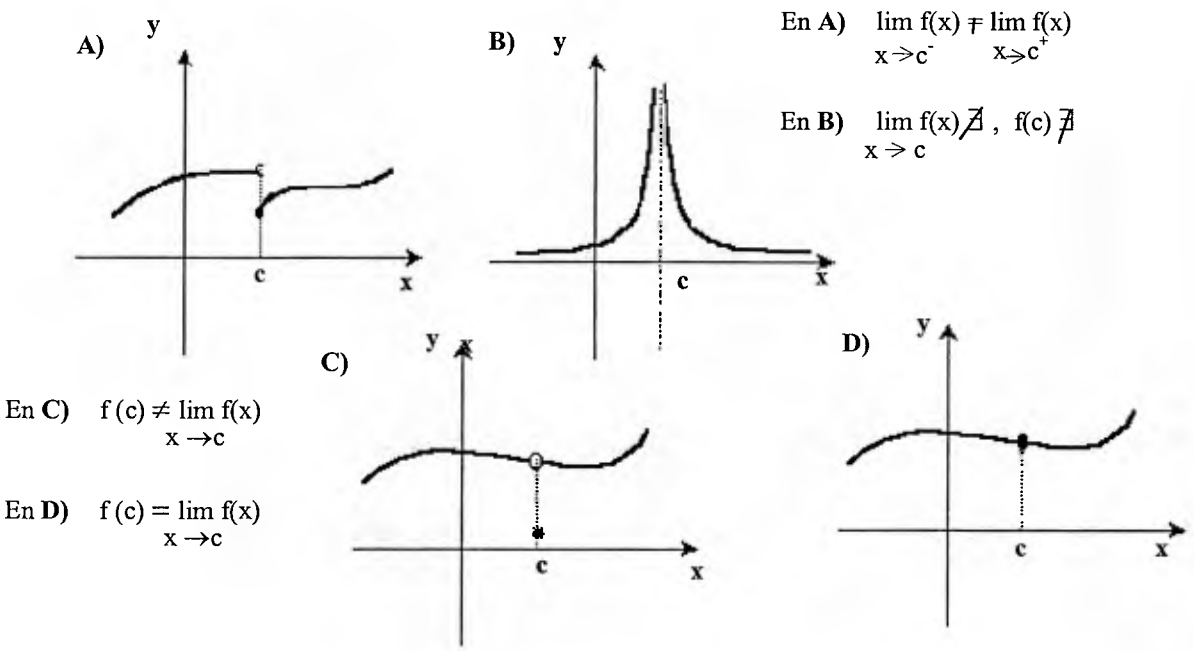
15. $y = \dfrac{x^2 + x - 10}{2x - 1}$



Asíntotas: $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

2.6. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN:

Continuidad, en un lenguaje coloquial, se interpreta como "sin interrupciones". Si observamos cada una de las siguientes gráficas:



En **A)** $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$

En **B)** $\lim_{x \to c} f(x) \nexists$, $f(c) \nexists$

En **C)** $f(c) \neq \lim_{x \to c} f(x)$

En **D)** $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$

La única gráfica que puede ser trazada de manera continua es la (D). Entonces, para que una función sea continua debe evitarse los casos (A), (B) y (C).

❑ CONTINUIDAD EN UN PUNTO:

Sea f una función definida en un intervalo que contiene a c.

Es continua en x=c si se verifica que:

$$\begin{cases} \textbf{(1)}\ f(c) \text{ está definido} \\ \textbf{(2)}\ \text{Existe } \lim_{x \to c} f(x) \\ \textbf{(3)}\ \lim_{x \to c} f(x) = f(c) \end{cases}$$

- **CONTINUIDAD EN UN INTERVALO:**

Una función es *continua en un intervalo (a,b)* si lo es en todos los puntos de ese intervalo.

Una función es *continua en un intervalo [a,b]* cuando lo es en el intervalo (a,b) y además es continua por la izquierda en a y por la derecha en b.

Ejemplo 20: Determine si $y = \frac{1}{x}$ es continua en (0,3)

Solución:

$y = \frac{1}{x}$

Observa que en el dominio $x \neq 0$.

Hallando límite en $x = 0$ → $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$. Sin embargo, $x = 0 \notin (0,3)$.

Entonces, si es continua en ese intervalo.

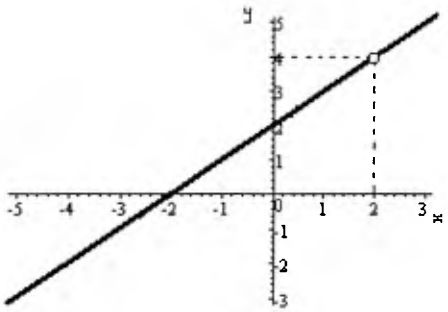
Ejemplo 21: Determine si $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ en el intervalo (1,3)

Solución:

Como $x = 2$ no está definida en f(x) hallamos el límite para saber a que valor tiende:

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$, pero $f(2) \nexists$

$y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$



No es continua en (1,3)

Ejemplo 22: Determine si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$ en $x = 1$

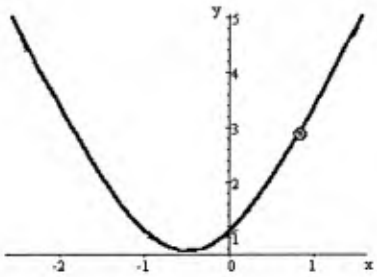
Para que sea continua debe ocurrir que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ y además exista.

Entonces:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + x + 1)(x - 1)}{x - 1} = 3 \quad y \quad f(1) = 3$$

Es continua en ese punto.

Gráficamente:



$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

Observa que el salto que se tiene cuando $x \neq 1$ queda "cubierto" cuando $f(1) = 3$

❑ DISCONTINUIDADES DE UNA FUNCIÓN. TIPOS:

Si una función es discontinua en x = c, entonces su gráfica tiene un salto o ruptura en ese punto. Sin embargo, el tipo de discontinuidad puede variar según la condición que se deja de cumplir para que sea continua. *(Véase la definición de continuidad).*

Discontinuidad Evitable:

Se presenta cuando $\lim_{x \to c} f(x)$ *existe* y f(c) *no existe*. Es *evitable* porque se puede redefinir la función dándole el valor del límite: verdadero valor.

Ejemplo 23: Determine el verdadero valor de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ para que sea continua en x = 2.

Solución:

Es fácil observar que en x = 2 no está definida f(x)

Calculamos el límite de la función en x = 2:

$\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = 4$ Para que sea continua se define **f(2) = 4**

Discontinuidad No Evitable:

Puede ser de dos formas:

Discontinuidad de 1° Especie: ——

- Existe $\lim_{x \to c} f(x)$ y $f(c)$
- $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

Ejemplo 24: Determine si f(x) es continua en x = 1.

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

Observa que existe $\lim_{x \to 1} f(x)$ y existe $f(1)$ pero

$$\left.\begin{array}{r} \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x - 2 = -1 \\ f(1) = 3 \end{array}\right\} -1 \neq 3$$

Discontinuidad de 2° Especie: puede ser de dos formas

Con salto finito: ——

- Existe $\lim_{x \to c^-} f(x)$ y existe $\lim_{x \to c^+} f(x)$
- $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$

Con salto infinito: —— No existe $\lim_{x \to c^-} f(x)$

y/o

No existe $\lim_{x \to c^+} f(x)$

Ejemplo 25: Analice la continuidad de $f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases}$

Solución:

Debemos analizar la continuidad en x = 1 donde probablemente no se cumplan todas las condiciones:

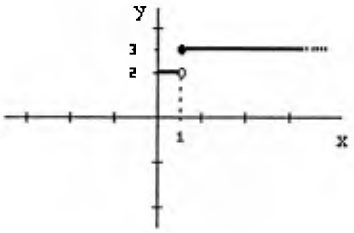
$\lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2$ $\lim\limits_{x \to 1^+} 3 = 3$, luego: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

pero ambos existen.

Además, f(1) = 3.

Gráficamente:

$f(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ 3 & x \geq 1 \end{cases}$



En este caso es discontinuidad de 2° especie, con salto finito.

Ejemplo 26: Analice la continuidad de $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Solución:

Esta función presenta una discontinuidad en x = 1, ya que anula al denominador.

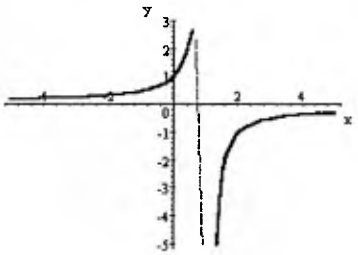
Es evidente que f(1) ∄ pero ¿que sucede a la izquierda y derecha de x=1?

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$$

Como no existen los límites, entonces es discontinuidad de 2° especie con salto infinito.

Observa la gráfica:

$y = \frac{1}{1-x}$



El salto es infinito ya que x = 1 es asíntota

Ejemplo 27: Estudie la continuidad de f(x) = $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$

Solución:

Factorizamos el numerador y denominador y buscamos las raíces donde posiblemente hay discontinuidad:

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Analizamos si se cumplen las tres condiciones para que la función sea continua en cada raíz del denominador:

En $x = 3$ $\quad f(3) \nexists$

Buscamos el límite cuando $x \to 3$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{(x+3)} = 0 \quad \Rightarrow$$

Discontinuidad evitable ya que el límite existe

Redefinimos la función dando a f(3) el valor del límite: f(3) = 0

En x = -3

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \infty \qquad \lim_{x\to -3^+}\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = -\infty$$

Es discontinuidad no evitable de 2° especie con salto infinito.

Ejemplo 28: Estudie la continuidad de $h(t) = \begin{cases} t^2 - 3t & t < 2 \\ 5 & t = 2 \\ 8 - 5t & t > 2 \end{cases}$

en t=2

Solución:

Estudiamos los límites laterales en t=2:

$$\lim_{t\to 2^-} t^2 - 3t = -2 \qquad \lim_{t\to 2^+} 8 - 5t = -2$$

El límite es -2 pero h(2) = 5 entonces, $\lim_{t\to 2} h(t) \neq h(2)$

En ese caso se debe redefinir la función → h(2) = -2

Así, para que h(t) sea continua se reescribe

$$h(t) = \begin{cases} t^2 - 3t & t < 2 \\ -2 & t = 2 \\ 8 - 5t & t > 2 \end{cases}$$

Ejemplo 29: ¿Para qué valores de a y b es continua la función f(x) ?

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ ax+b & 1 \leq x < 2 \\ 3x & x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

Para que sea continua debe existir el límite cuando $x \to 1$ y cuando $x \to 2$, además de ser iguales a f(1) y f(2) respectivamente.

Cuando $x \to 1$

$$\lim_{x \to 1^-} x+1 = 2 \qquad \lim_{x \to 1^+} ax+b = a+b \qquad \Rightarrow \qquad a+b = 2 \quad \text{(I)}$$

Cuando $x \to 2$

$$\lim_{x \to 2^-} ax+b = 2a+b \qquad \lim_{x \to 2^+} 3x = 6 \qquad \Rightarrow \qquad 2a+b = 6 \quad \text{(II)}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones (I) y (II) y obtenemos que

$$a = 4 \quad \text{y} \quad b = -2$$

Pero además debemos hallar f(1) y f(2)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 4x-2 & 1 \leq x < 2 \\ 3x & x \geq 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} f(1) = 2 \\ f(2) = 6 \end{matrix}$$ son iguales a sus límites.

❑ CONTINUIDAD DE FUNCIONES COMPUESTAS

Teorema del Límite de la Composición de Funciones:

Si el $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y f(x) es continua entonces:

NOTA
Se invita a investigar la demostración de este teorema.

$$\lim_{x \to c} f[g(x)] = f[\lim_{x \to c} g(x)] = f(L)$$

Si g(x) es continua en c y f(x) es continua en g(c) entonces (fog)(x) es continua en c.

Ejemplo 30: Demuestre que $h(x) = |x^2 - 3x + 6|$ es continua para todo número real.

Solución:

Podemos escribir h(x) conmo una composición de f(x) = |x| y $g(x) = x^2 - 3x + 6$,

como ambas son continuas para todo R , h(x) tambien lo será.

Ejemplo 31: Dado $f(x) = x^2 - 2x^3 + \frac{1}{5}x^5$ y $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x} - \sqrt{4x-3}}$,

calcule el límite, si existe, cuando x = 3 de (fog)(x).

Solución:

Sabemos que f(x) es continua en todo R ya que es un polinomio, por lo tanto no tiene restricciones. Debemos hallar el límite de g(x) cuando $x \to 3$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x}-\sqrt{4x-3}}$$ Es de la forma 0/0, aplicando doble conjugada:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x+1-2x+2)(\sqrt{3x}+\sqrt{4x-3})}{(3x-4x+3)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-2})} = \frac{3}{2}$$

Aplicando el teorema

$$\lim_{x\to 3} f[g(x)] = f\left[\lim_{x\to 3} g(x)\right] = f(\tfrac{3}{2}) = (\tfrac{3}{2})^2 - 2(\tfrac{3}{2})^3 + \tfrac{1}{5}(\tfrac{3}{2})^5 = : -\tfrac{477}{160}$$

Ejemplo 32: Estudie la continuidad de (fog)(x) siendo

$$f(x) = \begin{cases} -1 & 0 < x < 5 \\ -1 & x \geq 5 \end{cases} \qquad g(x) = 3x - 1$$

Solución:

f(x) y g(x) son continuas, por lo tanto, (fog)(x) debería ser continua.

Demostrémoslo:

$$(fog)(x) = \begin{cases} -1 & 0 < 3x-1 < 5 \\ -1 & 3x-1 \geq 5 \end{cases} \rightarrow (fog)(x) = \begin{cases} -1 & \frac{1}{3} < x < 2 \\ -1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Hallamos los límites laterales cuando x → 2

$\lim_{x\to 2^-} -1 = -1$, $\lim_{x\to 2^+} -1 = -1$ luego, es continua

Ejemplo 33: Realice el bosquejo de la gráfica de una función con

las siguientes características:

a) Dominio en [-2, 2]

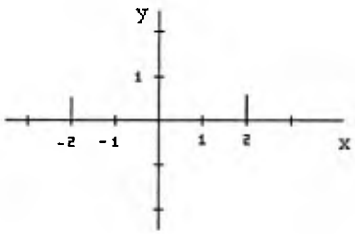
b) f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1

c) Discontinua en -1 y 1

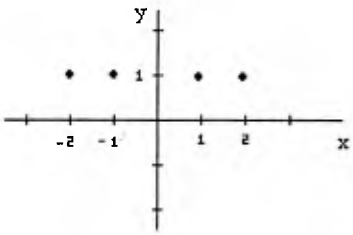
d) Continua en -1^+ y 1^-

Solución: (Es necesario aclarar que existen muchas gráficas con las mismas características.)

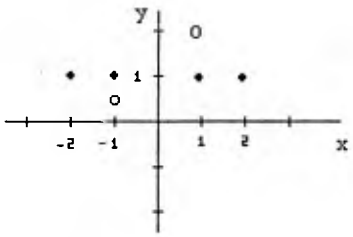
Delimitamos el dominio (a) en el plano



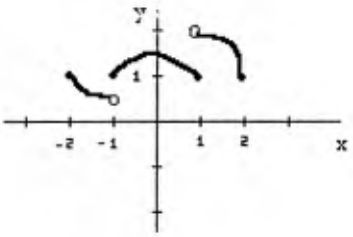
Ubicamos los puntos (b)



Como es discontinua en -1 y 1 (c) ubicamos otras posibles imágenes para esas abscisas



Finalmente trazamos las curvas considerando especialmente donde hay continuidad (d)



EJERCICIOS PROPUESTOS II.E

Estudie la continuidad de las siguientes funciones.

(En caso de discontinuidad indique de que tipo es):

1. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

3. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x-10}$

4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x2-2x-3}{x-3} & x \neq 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x-8}{x-2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$

8. $g(t) = [t + \frac{1}{2}]$

9.h(t) = $\begin{cases} \ln(t-1) & t < 1 \\ e^{t-1} & t \geq 1 \end{cases}$

10.$f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 0 \\ -2 & x = 0 \\ 3x^2+1 & 0 < x < 1 \\ -x+5 & x > 1 \end{cases}$

11. f(x) = $\dfrac{[x]-[x]^2}{x^2-1}$

12.$f(x) = [x-1]$

Halle los valores de a, b y c para que las siguientes funciones sean continuas:

13. f(x) = $\begin{cases} 2 & x \leq -1 \\ ax+b & -1 < x < 3 \\ -2 & x \geq 3 \end{cases}$

14. f(x) = $\begin{cases} \dfrac{2x^3+5+a}{x-1} & x \neq 1 \\ a+13 & x = 1 \end{cases}$

15. f(x) = $\begin{cases} x & x \leq 1 \\ ax+b & 1 < x < 4 \\ -2x & x \geq 4 \end{cases}$

16. f(x) = $\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

17. f(x) = $\begin{cases} 1+x & |x-2| < 1 \\ a+bx+x^2 & |x-2| \geq 1 \end{cases}$

18. f(x) = $\begin{cases} 8 & x \leq -2 \\ ax+5 & x > 2 \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 2 & x < 1 \\ bx & x = 1 \\ \dfrac{c\sqrt{x-1}}{x-1} & 1 < x < 4 \end{cases}$

Estudie la continuidad de h(x) = (fog)(x)

20. $f(x) = x^2$; $g(x) = x-1$

21. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; $g(x) = x^2 + 5$

22. $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x+1}$

23. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$

24. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$; $g(x) = x - 1$

25. $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 3 \\ -3 & x \geq 3 \end{cases}$; $g(x) = 2x - 4$

Esboce la gráfica de una función que satisfaga las condiciones dadas:

26. Continua en $(-\infty, 2]$ y $[2,\infty)$; límite cuando x tiende a 0 es 4,

límite cuando x tiende a 2^- es -3, límite cuando x tiende a 2^+ es ∞;

límite cuando x tiende a 5 es 0.

27. Continua en $(-\infty, 0)$ y $[0,\infty)$; límite cuaando x tiende a -4 es 0,

límite cuando x tiende a 0^+ es 3, límite cuando x tiende a 0^- es -3;
límite cuando x tiende a 4 es 2.

28. Continua en $(-\infty,-3]$, $(-3,3)$ y $[3,\infty)$; límite cuando x tiende a -5 es 2;

límite cuando x tiende a -3^- es 0, límite cuando x tiende a -3^+ es 4,

límite cuando x tiende a 0 es 1; límite cuando x tiende a 3^- es 0;

límite cuando x tiende a 3^+ es -5; límite cuando x tiende a 4 es 0.

RESPUESTAS II.E

1. Discontinuidad de 2° especie en x = 1

2. Continua

3. discontinuidad evitable en x 0 -2, de 2° especie en x = 5

4. Discontinuidad evitable en x = 3

5. Redefinir la función: f(1) = 1

6. Redefinir la función: f(2) = 4

7. Redefinir la función: f(0) = 1

9. Discontinuidad de 2° especie en x = 1

10. Discontinuidad de 2° especie en x = 0

11. Discontinuidad de 2° especie en x = 1

13. a = -1, b = 1

14. a = -7

15. a = -3, b = 4

16. No existe

17. a = 4 , b = -3

18. a = $-\frac{3}{2}$

20. R

21. R

22. $[-1,\infty)$

23. $(3, \infty)$

24. Discontinua en x = 1

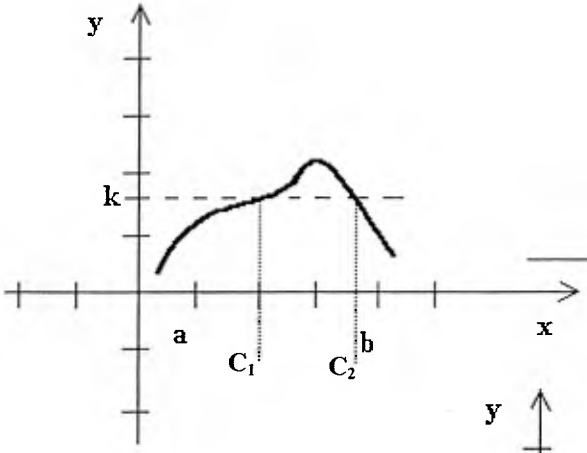
25. R - $\left\{\frac{-7}{2}\right\}$

2.7. Teorema del Valor Intermedio (o el teorema de Darboux):

Si f(x) es continua en [a,b] y k es cualquier número comprendido entre f(a) y f(b), existe al menos un número c en [a,b] para que f(c) = k.

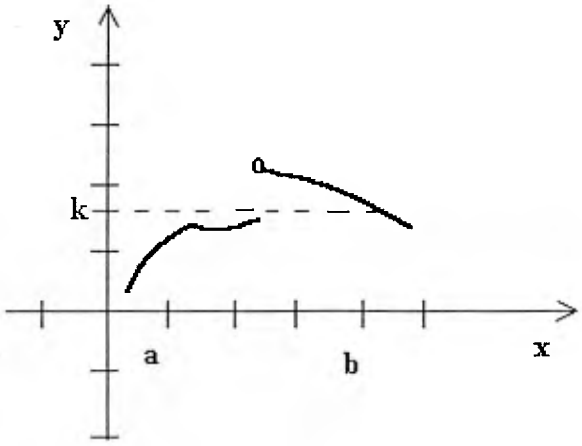
En otras palabras, este teorema asegura la existencia de *al menos* un número c en el intervalo [a,b]. De hecho, una función continua pasa de un valor a otro tomando todos los intermedios, sin saltos.

Por ejemplo:



f es continua en [a,b].

Para *k* existe más de una *c* en ese intervalo.



f no es continua en [a,b].

Para *k* no existe *c* en ese intervalo

Ejemplo 34: En la función $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, demuestre que existe f(c) = 4 en el intervalo [0,3]. Si es posible, halle el valor de c.

Solución:

Como es un polinomio, sabemos que es continuo en el intervalo dado. Aplicando el teorema del valor intermedio, hallamos f(0) y f(3):

$f(0) = 0^3 - 0^2 + 0 - 2 = -2$ $\qquad$ $f(3) = 3^3 - 3^2 + 3 - 2 = 19$

Como f(c) = 4 ∈ [-2 , 19], entonces existe.

Para hallar c:

$$f(c) = c^3 - c^2 + c - 2 = 4 \quad \rightarrow \quad c^3 - c^2 + c - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad c = 2$$

Ejemplo 35: En la función $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$, demuestre si es aplicable el teotrema de valor intermedio para hallar c tal que f(c) = 7, en el intervalo [0,4].

Solución:

La función $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1}$ es discontinua en x=1, y x = 1 ∈ [0,4]

Por lo tanto, no es aplicable el teorema de valor intermedio para demostrar la existencia de f(c) =7 en [0,4]

Ejemplo 36: (*Problema de introducción de la unidad*)

La población (en miles) de una colonia de bacteria, t minutos después de la introducción de una toxina, está dada por la función:

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & t < 5 \\ -8t + 72 & t \geq 5 \end{cases}$$

a) ¿Cuándo morirá la colonia?

b) Explique por qué la población debe ser 10000 en algún momento entre t = 1 y t = 7.

Solución:

a) Se debe hallar t para que f(t) = 0.

Cuando $t < 5 \quad \rightarrow \quad t^2 + 7 = 0 \quad ; \quad t \nexists$

Cuando $t \geq 5 \quad \rightarrow \quad -8t + 72 = 0 \quad ; \quad t = 9$

b) Para utilizar el teorema de valor intermedio, es necesario verificar que f(t) es continua en [1,7]:

$\lim\limits_{t \to 5^-} t^2 + 7 = 32 \qquad \lim\limits_{t \to 5^+} -8t + 72 = 32$

Luego, hallamos f(1) y f(7)

$f(1) = 1^2 + 7 = 8 \qquad f(7) = -8 * 7 + 72 = 16$ (en miles)

Como $10 \in [8, 16]$ entonces, debe haber 10000 en algún momento.

EJERCICIOS PROPUESTOS II.F

A continuación se indica una función f y un intervalo cerrado [a,b]. Determine si el teorema de valor intermedio es válido para el valor k dado. Si se cumple halle c tal que f(c) = k

1. $f(x) = 2 + x - x^2 \quad en \quad [0,3] \quad , \quad k = 1$

2. f(x) = $\sqrt{25 - x^2} \quad en \quad [-\frac{9}{2}, 3] \quad , \quad k = 3$

3. f(x) = $\frac{4}{x+2} \quad en \quad [-3, 1] \quad , \quad k = \frac{1}{2}$

4. f(x) = $\begin{cases} x^2 - 4 & -2 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad en \quad [-2, 3] \quad , \quad k = -1$

Resolver :

5. Juan Carlos pesa 75,3 kg. a la edad de 20 años. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que en algún momento pesó exactamente 55 kg.

6. Demuestre que la ecuación $x^5 - 4x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene, al menos, una solución entre x = 2 y x= 3.

RESPUESTAS II.F

1. c = $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

2. $c = -4$

3. Discontinua en x = -2

4. Discontinua en x = 1.

2.8 MISCELÁNEA DE EJERCICIOS.

☑ Indique si los siguientes planteamientos son verdadero o falso. Justifique s respuesta.

1. Si p(x) es una función polinomial, entonces el $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$

2. Si el $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)]$ existe, entonces existen $\lim_{x \to c} f(x)$ y el $\lim_{x \to c} g(x)$

3. Si f(x) < k para toda x y existe $\lim_{x \to c} f(x)$, entonces $\lim_{x \to c} f(x) < k$

4. Si f(x) $\neq g(x)$ en toda x, entonces $\lim_{x \to c} f(x) \neq \lim_{x \to c} g(x)$

5. Si f es continua y positiva en [a,b], entonces $\frac{1}{f}$ puede tomar todo valor comprendido entre $\frac{1}{f(a)}$ y $\frac{1}{f(b)}$

☑ Resolver:

6. De ejemplos de funciones tales que :

   a) No exista ninguno de los límites laterales en x= 2

   b) Existe el límite por la derecha de x = 2, pero no por la izquierda.

7. Demuestre que en x = 0, f(x) = $\frac{x}{3^{1/x} + 1}$ tiene una discontinuidad evitable.

8. Demuestre que si f(x) es continua en [a,b] , c es cualquier número de ese intervalo y f(c) < 0, entonces existe un número k > 0 tal que siempre que c - k < x < c + k entonces f(x) < 0

9. Calcule, razonadamente, el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4x^3-6x^2}{4x^3-1}\right]^{\frac{x^2+1}{x}}$

10. Halle la relación entre a y b para que:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x+a}{2x-1}\right]^{x+5}=\lim_{x\to\infty}\left[1-\frac{3}{2x+3}\right]^{bx+1}$$

11. Una función definida en toda la recta real es estrictamente creciente. ¿Puede deducirse que su límite en $+\infty$ es $+\infty$?. Si la respuesta es negativa, justifique con un ejemplo.

12. Demuestre que $ax^3+bx^2+cx+d=0$ tiene, al menos, una raíz real. (Utilice el teorema del valor intermedio).

13. Trace la gráfica de una función que satisfaga las siguientes condiciones:

- f es continua en $(-\infty,-2)$, $[-2,1)$, $[1,3]$ y $(3 , \infty)$

- $\lim_{x\to-4} f(x)=0$; $\lim_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$; $\lim_{x\to-2^+} f(x)=0$; $\lim_{x\to0} f(x)=-3$; $\lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$;

$\lim_{x\to1^+} f(x)=2$; $\lim_{x\to3^-} f(x)=4$; $\lim_{x\to3^+} f(x)=-1$; $\lim_{x\to5} f(x)=0$.

14. Trace la gráfica de f si $f(x)=[1-x^2]$ y $x\in[-2 , 2]$

a) ¿Existe $\lim_{x\to0} f(x)$?

b) ¿Es f continua en 0?

15. Un convenio laboral garantiza un incremento salarial del 9% durante 5 años. Para un salario inicial de \$ 28500, el salario viene dado por $S=28500\,(1.09)^{[t]}$, donde $t=0$ corresponde a 1995. Esboce la gráfica de la función y estudie su

continuidad.

16. Una conferencia telefónica cuesta Bs. 1040 los 2 primeros minutos y Bs. 360 cada minuto adicional o fracción. Escriba la función costo de una llamada en función de t minutos y analice su continuidad.

17. El número de unidades en el almacén de una empresa es

$$N(t) = 25.\left(2\left[\frac{t+2}{2}\right] - t\right)$$

donde t es meses. Esbozar la gráfica de la función y estudiar su continuidad. ¿Cada cuánto tiempo debe reponerse la mercancía?.

18. Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$. Demuestre que existe un número real a tal que f(a) = 100

19. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & si \quad x \neq 3 \\ 1 & si \quad x = 3 \end{cases}$ ¿Es f continua en 3?. Explique.

20. El costo en dólares para el gobierno, de aprehender un x por 100 de cierta droga ilegal, a su entrada por la frontera, viene dado por $C = \dfrac{528x - 52800}{10^4 - x^2}$, cuando $0 \leq x < 100$.

a) Calcular el costo para 25%, 50%, y 75%.

b) ¿A cuánto asciende el costo si tiende al 100%?.

UNIDAD III

DERIVADAS

Se proyecta que, dentro de t años, la circulación de un periódico local será

$$C(t) = 100t^2 + 400t + 5000$$

Calcule la cantidad en la que aumentará la circulación durante los próximos 6 meses.

CONTENIDO

3.1 Definición de derivada.

3.2 Reglas de derivación.

3.3 Derivación de funciones compuestas.

3.4 Derivación implícita.

3.5 Derivación de funciones exponenciales y logarítmicas.

3.6 Derivadas de orden superior.

3.7 Derivadas de funciones paramétricas.

3.8 Diferenciales. Aproximaciones por diferenciales.

3.9 Miscelánea de ejercicios.

UNIDAD III:

DERIVADAS

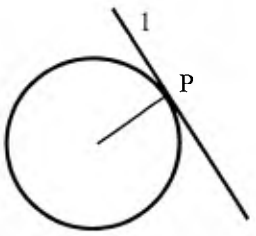
3.1. DEFINICIÓN DE DERIVADA:

Antes de definir Derivada analizaremos el concepto de Recta Tangente:

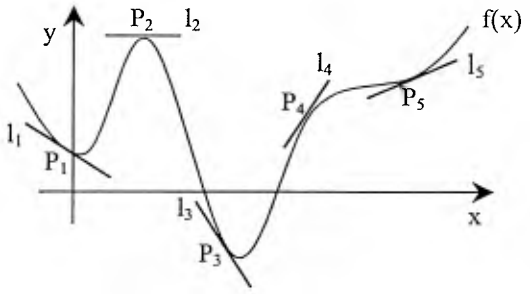
Recta Tangente:

Es aquella que toca a la curva en un sólo punto.

En la circunferencia:



Pero en una curva la pendiente de la recta tangente varía en cada punto.



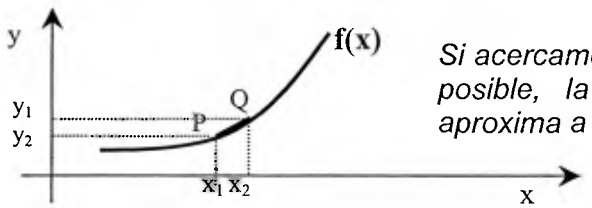
Observa que:

- La pendiente de la recta es constante en cualquier punto.

- La pendiente de un punto P(x,y) de la curva varía y viene dado por la recta tangente en ese punto.

La PENDIENTE es la dirección de la RECTA TANGENTE, a la curva.

Para hallarlo:



Si acercamos Q a P lo más posible, la curva PQ se aproxima a una recta.

Luego: PQ ≈ Recta y su pendiente es

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pero $x_2 - x_1 \to 0$, es una variación muy pequeña, entonces:

$y_2 - y_1 = \Delta y$ y $x_2 - x_1 = \Delta x$, luego **$m = \Delta y / \Delta x$.**

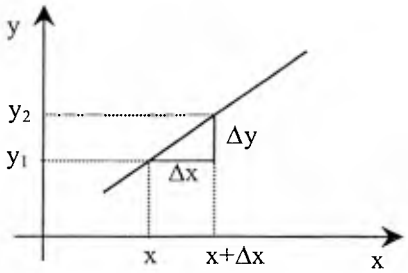
Si $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, entonces **$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$**

¿Cómo hallar Δy en f(x)?

$y = f(x)$; $\Delta y = y_2 - y_1$

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$



Al sustituir queda:

$$\boxed{m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Ejemplo 1:

Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + 1$, en cualquier punto y en los puntos (0,1), (-1,2) y (1,2).

Solución:

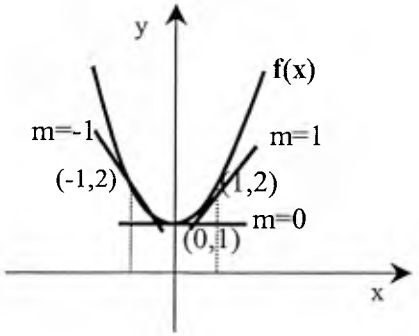
$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$; y $f(x) = x^2 + 1$, entonces;

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)^2 + 1 - (x^2+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x$$

En (0,1) $m = 2.(0) = 0$,

En (-1,2) $m = 2.(-1) = -2$,

En (1,2) $m = 2.(1) = 2$



Ejemplo 2:

Hallar la pendiente de $f(x) = 3x + 1$

Solución:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x) + 1 - (3x+1)}{\Delta x} = 3$$

Es CONSTANTE, note que es una RECTA.

DEFINICIÓN DE DERIVADAS:

La derivada de una función en x viene dada por

$$f'(x) = m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

SI F(X) ES CONTINUA

Una función es derivable en x si existe su derivada en ese punto, y es derivable en un intervalo (a,b) si es derivable en todos los puntos del intervalo.

NOTACIÓN: La derivada de y = f(x) se escribe de varias formas:

y ' = f'(x) se lee "f prima de x"

dy / dx se lee "derivada de y con respecto a x"

O también:

d[f(x)]/dx ; $D_x[y]$

Ejemplo 3:

Halle la primera derivada de $y = x^2 + 1$:

Solución:

Aplicando la definición queda:

Desarrollamos el producto y simplificamos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 1 - (x^2+1)}{\Delta x} = \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{1}}{\Delta x} = 2x$$

Sin embargo, el proceso de derivación por definición suele ser largo y a veces tedioso, por lo que es necesario conocer las reglas de la derivada.

3.2. REGLAS DE DERIVACIÓN:

A continuación se presentan las reglas que nos permiten derivar sin recurrir a la definición. (Estas provienen de la definición de derivada, por lo que su fundamento matemático es sólido y se pueden demostrar.)

Si y = f(x), m es un numero racional y k es constante:

1. $y = x^m \Rightarrow y' = m.x^{m-1}$
2. $y = k, \Rightarrow y' = 0$
3. $y = k.x^m \Rightarrow y' = m.k.x^{m-1}$
4. Si $y = f(x) \pm g(x) \pm h(x) \Rightarrow [f(x) \pm g(x) \pm h(x)]' = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$
5. Derivada de un producto:

   $y = u.v$, siendo $u = f(x)$ y $v = g(x) \Rightarrow y' = u'.v + v'.u$
6. Derivada de un cociente:

   $y = \frac{u}{v}$, siendo $u = f(x)$ y $v = g(x) \Rightarrow y' = \frac{u'.v - v'u}{v^2}$

Ejemplo 4:

Demuestre que $y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + v'.u$, siendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$.

Solución:

Aplicamos la definición:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

Sumamos y restamos este término para poder factorizar y obtener una expresión similar a la definición

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - g(x).f(x+\Delta x)] + [g(x).f(x+\Delta x) - f(x).g(x)]}{\Delta x}$$

Factorizamos

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).[g(x+\Delta x) - g(x)] - g(x).[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x}$$

Separamos las fracciones

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ f(x+\Delta x).\frac{[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + g(x)\frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \right\}$$

$$y' = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

Por definición se obtiene **g'(x) y f'(x)**

Ejemplo 5:

Demuestre que $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'.v - v'u}{v^2}$

Solución:

De nuevo aplicamos la definición:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{v(x).u(x+\Delta x) - u(x).v(x+\Delta x)}{v(x).v(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x).v(x) - u(x).v(x+\Delta x)}{\Delta x[v(x).v(x+\Delta x)]}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x).v(x) - u(x).v(x)] - [u(x).v(x+\Delta x) - u(x).v(x)]}{\Delta x[v(x).v(x+\Delta x)]}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)[u(x+\Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x[v(x).v(x+\Delta x)]}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]}{\Delta x} - u(x)\frac{[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x}}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$y' = \frac{v(x).u'(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Ejemplo 6:

Hallar y' si

a) $y = \dfrac{(a+b)x^n}{p+q} - \dfrac{a^2+b^2}{2}$

b) $y = (x + 4)(x - 5)$

c) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

Solución:

Aplicando las reglas de la derivada según el caso:

a) $y = \dfrac{(a+b)x^n}{p+q} - \dfrac{a^2+b^2}{2}$

$y' = \dfrac{n(a+b)}{p+q}x^{n-1}$

b) $y = (x + 4)(x - 5)$

$y' = (x - 5) + (x - 4) = 2x - 1$

c) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

$y' = \dfrac{(2x-5)(x-3)-(x^2-5x+6)}{x-3} = \dfrac{x^2-6x-6}{x-3}$

Ejemplo 7:

Deducir una regla para la derivada de y = $\sqrt[n]{x}$

Solución

y = $x^{1/n}$

$$y' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

3.3. Derivada de Funciones Compuestas (Regla de la Cadena)

Si y = f(u) y u = g(x) entonces y = f(g(x)) y su derivada es

$$y' = f'(g(x)).g'(x), \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 8:

Si $y = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$, y $u = (x^2+2)^{1/3}$, hallar dy/dx

Solución:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{2u(u^2+1)-2u(u^2-1)}{(u^2+1)^2}.\frac{1}{3}(x^2+2)^{-2/3}.(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3}\frac{ux\left(x^2+2\right)^{-2/3}}{\left(u^2+1\right)^2}$$ como $x^2 + 2 = u^3$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3}\frac{x\sqrt[3]{x^2+2}}{\left(\left(\sqrt[3]{x^2+2}\right)^2+1\right)^2.\left(\sqrt[3]{x^2+2}\right)^2} = \frac{8}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+2}\left(\left(\sqrt[3]{x^2+2}\right)^2+1\right)^2}$$

Ejemplo 9:

Dadas las siguientes funciones, halle y':

a) $y = (x^3 + 2)^{20}$

b) $y = x^2(x^3 + 1)^{1/3}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{3x^3-1}}{2x^2+1}$

Solución:

Aplicamos la regla de la cadena:

a) $y = (x^3 + 2)^{20}$

$y' = 20(x^3 + 2)^{19}(3x^2) = 60x^2(x^2 + 2)^{19}$

Se deriva $y = u^{20}$ y luego se multiplica por u'

b) $y = x^2(x^3 + 1)^{1/3}$

$y' = 2x(x^3 + 1)^{1/3} + 1/3(x^3 + 1)^{-2/3}.3x^2.x^2$

$y' = 2x(x^3 + 1)^{1/3} + x^4(x^3 + 1)^{-2/3}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{3x^3 - 1}}{2x^2 + 1}$

Se deriva como un cociente sin olvidar la derivada interna

$$y' = \frac{\dfrac{9x^2}{2\sqrt{3x^3 - 1}}.\left(2x^2 + 1\right) - 4x\sqrt{3x^3 - 1}}{\left(2x^2 + 1\right)^2} = \frac{9\left(x^2\right)\left(2x^2 + 1\right) - 4x\left(3x^3 - 1\right)}{2\left(2x^2 + 1\right)^2\sqrt{3x^3 - 1}}$$

$$y' = \frac{18x^4 + 9x^2 - 12x^4 + 4x}{2\left(2x^2 + 1\right)^2\sqrt{3x^3 - 1}} = \frac{6x^4 + 9x^2 + 4x}{2\left(2x^2 + 1\right)^2\sqrt{3x^3 - 1}}$$

3.4. DERIVACIÓN IMPLÍCITA:

Cuando no es posible obtener y = f(x), o simplemente no es conveniente, se puede obtener la derivada por medio de la Regla de la Cadena.

Ejemplo 10:

Dada $x^3 - y^2 + y^3 + 1 = 0$, halle y':

Solución:

Derivamos sin olvidar que x es variable independiente e y es una función de x:

$$3x^2 - 2y.y' + 3y^2.y' = 0$$

y' es la derivada interna de y

Despejamos y':

$$Y' = -3x^2 / (3y^2 - 2y)$$

3.5. DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS:

Para hallar las fórmulas de derivación de estas funciones debemos partir de la definición del número e:

RECUERDA QUE:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Derivada logarítmica:

Si $y = \ln x$ entonces $y' = \frac{1}{x}$

Si $y = \ln u$ donde $u = f(x)$, entonces $y' = \frac{u'}{u}$

Derivada exponencial:

Si $y = e^x$ entonces $y' = e^x$

Si $y = e^u$ entonces $y' = u'.e^u$

Se sugiere al estudiante investigar sobre la demostración de estas fórmulas de derivación.

Cuando la base es distinta al número e:

Si $y = \log_a x$ entonces $y' = 1/ x\ln a$

Si $y = a^x$ entonces $y' = a^x \ln a$

Si $y = x^x$ entonces $y' = x^x(1 + \ln x)$

Ejemplo 11:

Demuestre que si $y = \log_a x$ entonces $y' = \frac{1}{x \ln a}$

Solución:

Es apropiado realizar un cambio de base para obtener la función en base e:

Luego

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$y' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' =$$

$$y' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

Ejemplo 12: Dada $y = e^{3x^2-2x} + ln\sqrt{x^2-1}$ halle y′:

Solución:

Simplemente aplicamos las reglas de derivación:

$$y = e^{3x^2-2x} + ln(x^2-1)^{\frac{1}{2}} = e^{3x^2-2x} + \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

$$y' = \underbrace{(6x-2)}_{\text{es derivada de } 3x^2-2x} e^{3x^2-2x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\overbrace{2x}^{\text{es derivada de } x^2-1}}{x^2-1}\right)$$

Ejemplo 13: Dada $y = x^{2x+1}$ halle y′:

Solución:

Cuando tenemos una función elevada a otra función resulta más práctico aplicar logarítmos neperianos:

$$y = x^{2x+1}$$

$$lny = lnx^{2x+1}$$

Aplicando propiedades de los logarítmos

$$lny = \underbrace{(2x+1)lnx}_{\text{es un producto y debe ser derivado como producto.}}$$

Derivando en forma implícita:

$$\frac{y'}{y} = 2.\ln x + (2x+1)\frac{1}{x}$$

Pero $y = x^{2x+1}$

$$y' = \left[2.\ln x + (2x+1)\frac{1}{x}\right].y$$

$$y' = \left[2.\ln x + (2x+1)\frac{1}{x}\right].x^{2x+1}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS III.A

Derive y simplifique utilizando las reglas de derivación. (Si es conveniente derive en formaa implícita)

1. $y = (x^2+1)(x^2-1)^{\frac{1}{2}}$
2. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
3. $y = x\,(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
4. $y = \sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$
5. $y = (x^{\frac{1}{2}} - 1)(x^{\frac{1}{2}} + 1)$
6. $xy = (x+y)^2$
7. $x^3 - 3axy + y^3 = 0$
8. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

9. $xy = \sqrt[3]{x^2+3}$

10. $y = x\dfrac{\sqrt{(a-x)x}}{b}$

11. $xy^2+x^2y = 4$

12. $x^3-y^3 = 1$

13. $x^2 - xy + y^2 = 6$

14. $(x+y)(2x-3y) = 1$

15. $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x})$

16. $y = \ln\left[(1+e^x)^{\frac{1}{2}} - 1\right] - \ln\left[(1+e^x)^{\frac{1}{2}} + 1\right]$

17. $y = \ln\left[\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}+x}\right]$

18. $y = \frac{p}{2}\ln(x^2-a^2) + \frac{q}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

19. $x^2 - xy + y^2 = 4$

20. $\sqrt{x+y} - y^2 = y$

21. $e^y = x+y$

22. $x^y = y^x$

RESPUESTA III.A

1. $y' = (3x^3-x)(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$

2. $y' = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

3. $y' = \dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

4. $y' = \frac{1}{4}(x^{-\frac{3}{4}} + x^{-\frac{5}{4}})$

5. $y' = 1$

6. $y' = -\dfrac{2x+y}{x+2y}$

7. $y' = \dfrac{x^2 - ay}{ax - y^2}$

8. $y' = -\dfrac{y^2}{x^2}$

9. $y' = -\dfrac{x^2 + 9}{3x^2(x^2 + 3)^{\frac{2}{3}}}$

10. $y' = \dfrac{x(3a - 4x)}{2b[(a - x)x]^{\frac{1}{2}}}$

11. $y' = -\dfrac{2xy + y^2}{2xy + x^2}$

12. $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$

13. $y' = \dfrac{2x - y}{x - 2y}$

14. $y' = -\dfrac{4x - y}{x + 6y}$

15. $y' = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}}}$

16. $y' = (1 + e^x)^{-\frac{1}{2}}$

17. $y' = 2(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}$

18. $y' = \dfrac{px - q}{x^2 - a^2}$

19. $y' = \dfrac{y - 2x}{2x - y}$

20. $y' = -\dfrac{1}{1 - \sqrt{x + y}\,(4y + 2)}$

21. $y' = \dfrac{1}{x + y - 1}$

22. $y' = \dfrac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$

3.6. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR:

Si se halla la primera derivada de una función y = f(x), y luego, la derivada de la derivada, si ésta existe, se obtienen las *derivadas de orden superior*.

Se denota:

1ª derivada $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

2ª derivada $y'' = f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

3ª derivada $y''' = f'''(x) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$

4ª derivada $y^{iv} = f^{iv}(x) = \dfrac{d^{iv}y}{dx^{iv}}$

...

...

10ª derivada $y^{(10)} = f^{(10)}(x) = \dfrac{d^{10}y}{dx^{10}}$

...

...

n-ésima derivada $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$

CUIDADO

No confunda las notaciones de derivada y potencia:

$$f^{(n)}(x) \neq f^{n}(x)$$

derivada

potencia

Ejemplo 14: Obtenga y''' de $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Solución:

$y = x^2 + x^{-2} \rightarrow y' = 2x - 2x^{-3}$

$y'' = 2 + 6x^{-4}$ Derivando y'

$y''' = -24x^{-5}$ Derivando y''

Ejemplo 15: Demuestre que $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene derivadas de todo orden en x = b

Solución:

Derivando sucesivamente $\rightarrow$ $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$y'' = 6ax + 2b$

$y''' = 6a$

$y^{iv} = 0 \rightarrow$ A partir de aquí todas las derivadas son cero

Ejemplo 16: Analice las derivadas sucesivas de $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ en x = 0.

Solución:

$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} \rightarrow$ en x = 0 $\rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} \rightarrow$ en x = 0 $\rightarrow f''(0) = \frac{4}{0} = \nexists$ $\boxed{\text{Sólo existe f'(0).}}$

Ejemplo 17: Hallar $y^{(n)}$ de $y = \frac{1}{1-2x}$

Solución:

Resulta más práctico expresarla como

$$y = (1-2x)^{-1}$$

Derivando

$$y' = (-1)(1-2x)^{-2} \underbrace{(-2)}_{\substack{\text{derivada}\\ \text{interna}}}$$

$$y'' = (-1)(-2)(1-2x)^{-3}(-2)^2$$

$$y''' = (-1)(-2)(-3)\ (1-2x)^{-4}\ (-2)^3$$

Observa como se relacionan los factores con el orden de la derivada:

$$y''' = \underbrace{(-1)(-2)(-3)}_{(-1)^n n!}\ (1-2x)^{\overbrace{-4}^{-(n+1)}}\ (-2)^{\overbrace{3}^{n}}$$

Luego,

$$y^{(n)} = (-1)^n n!(1-2x)^{-(n+1)}(-2)^n$$

EJERCICIOS PROPUESTOS III.B

Halle la segunda derivada de:

a) 1. $h(s) = s^{1/3} + 2s^{-2}$

b) 2. $g(z) = (3z+1)^{1/2}$

c) 3. $y = x^2 + x^{-2}$

d) 4. $y = (x^2+9)^{1/2}$

e) 5. $f(t) = t(1-t)^{-2}$

6. Dada $y = x^2 \dfrac{(x-3)}{1-x}$ hallar y^{iv}

Obtenga la derivada n-ésima de

7. $y = \frac{1}{x}$

8. $y = \frac{1+x}{1-x}$

9. Dada $y'' - 4y' + 3y = 0$ halle el valor de k para que $y = e^{kx}$ la satisfaga.

10. Demuestre que $y = (a + bx)e^{kx}$ satisface a $y'' - 2ky' + k^2y = 0$

11. Sea f(x) un polinomio de grado n. Demuestre que $f^{(k)}(x) = 0$ para $k > n$.

RESPUESTA III.B

1. $h''(s) = \frac{-2s^{-5/3}}{9} + 12s^{-4}$

2. $g''(z) = \frac{-9(3z+1)^{-3/2}}{4}$

3. $y'' = 2 + 6x^{-4}$

4. $y'' = 9(x^2 + 9)^{-3/2}$

5. $f''(t) = 2(t+2)(1-t)^{-4}$

6. $y^{iv} = -48(1-x)^{-5}$

7. $y^{(n)} = (-1)^n n! x^{-n-1}$

8. $y^{(n)} = 2n!(1-x)^{-n-1}$

3.7. DERIVADAS DE FUNCIONES PARAMÉTRICAS:

Si las variables x e y dependen de una tercera variable, estamos en presencia de dos funciones paramétricas, donde la tercera variable es un parámetro. Es decir, **x = f(t)** e **y = g(t)** son funciones paramétricas que dependen del parámetro **t**.

Si

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

Las derivadas vienen dada por:

Primera derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 18: Hallar la ecuación de la recta tangente $x = \sqrt{t}$, $y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$ en el punto donde t = 4.

Solución:

Recuerda que la primera derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva.

Hallamos la primera derivada:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}}$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$

Hallamos los valores de x e y además de las derivadas en t = 4:

En t = 4 x = 2, y = $\frac{7}{2}$ y m = $\frac{dy}{dx} = \frac{17}{4}$

EJERCICIOS PROPUESTOS III.C

Hallar la primera derivada de y con respecto a x:

1. x = $\frac{1}{t+1}$ $\quad y = \left(\frac{1}{t+1}\right)^2$
2. x = $\sqrt{1+\sqrt{t}}$ $\quad y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$
3. x = e^{-r} $\quad y = e^{2r}$
4. x = $\frac{3as}{1+s^3}$ $\quad y = \frac{3as^2}{1+s^3}$

5. $x = \sqrt{u^2 + 1}$ $\qquad y = \dfrac{u - 1}{\sqrt{u^2 + 1}}$

Hallar la segunda derivada de y con respecto a x en el punto indicado.

6. $x = \ln(1+t^2)$ $\qquad y = t^2$ $\qquad$ en $t = 0$

7. $X = t^3 + 3t + 1$ $\qquad y = t^3 - 3t + 1$ $\qquad$ en $t = 1$

RESPUESTA III.C

1. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2t}{t+1}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[6]{\dfrac{(1-\sqrt{t})^4}{(1-\sqrt[3]{t})^3 t}}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = -2e^{3r}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{s(2-s^3)}{1-2s^3}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+u}{u(u^2+1)}$

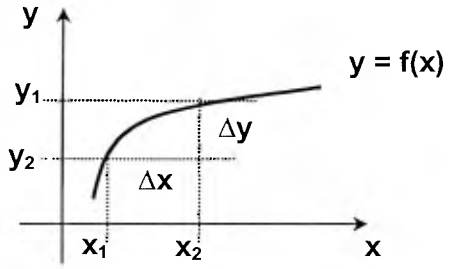
6. 1

7. $\dfrac{1}{6}$

3.8. DIFERENCIALES. APROXIMACIONES POR DIFERENCIALES.

Consideremos la función y = f(x). Por lo general, a una variación pequeña de la variable x le corresponde una variación de y.

Es decir:



Recordando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Es decir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx} \quad \text{si} \quad \Delta x \approx 0$$

Así surge la siguiente definición:

Sea y = f(x) donde f es derivable y sea Δx un pequeño incremento arbitrario de x. Entonces:

(I) La diferencial dy está dada por **dy = f '(x).Δx**

(II) La diferencial dx está dada por **dx = Δx**

Observa que **dy = f ' (x) .dx**

dy / dx = f '(x)

La derivada se puede expresar como el cociente de dos diferenciales.

Además, en las diferenciales se aplican las reglas de derivación:

Sea u = f(x) y v = g(x), u y v son derivables y c es constante. Entonces:

- $d\,[c.u] = c\,.du$
- $d\,[u \pm v] = du \pm dv$
- $d\,[u.v] = udv + vdu$
- $d\,[u / v] = (vdu - udv) / v^2$

Por medio de diferenciales podemos calcular valores aproximados, errores en mediciones y cambios porcentuales:

Ejemplo 19:

El costo total, en miles de Bs., para fabricar q unidades de un determinado artículo viene dado por $C(q) = 4\,q^3/3 - 0{,}3\,q^2 + 5q + 5000$. Si el nivel actual de producción es 57 unidades, estime cómo cambiará el costo total si se aumenta el nivel de producción a 57,5 unidades.

Solución:

Según nuestros datos

$$C(q) = 4\,q^3/3 - 0{,}3\,q^2 + 5q + 5000\ ;\ q = 57 \text{ y } \Delta q = dq = 0{,}5.$$

Luego:

$$d\,[C(q)] = C'(q).dq$$

$$d\,[C(q)] = (4\,q^2 - 0{,}6\,q + 5).\,dq$$

Sustituyendo q y dq:

$$d\,[C(q)] = (4\,(57)^2 - 0{,}6\,(57) + 5).\,(0{,}5)$$

$$d\,[C(q)] = 6483{,}4$$

Representa el cambio en el costo si q aumenta 0,5

Comparemos esta respuesta con el resultado real de $\Delta C = C(57{,}5) - C(57)$

$C(57{,}5) = 257774{,}79$ $\qquad$ $C(57) = 251234{,}30$

$$\Delta C = C(57{,}5) - C(57) = 6540{,}50$$

El resultado real se aproxima al obtenido con el diferencial.

Ejemplo 20:

La medida del lado de un cuadrado da 15 cm. Aproxime el porcentaje de error cometido al calcular su área, si el posible error en la medida del lado es 0,05cm.

El *error relativo* estimado de un medición es

Error relativo = dy / y

Solución:

$l = 15$ cm ; $dl = 0{,}05$ cm y $A = l^2$

Entonces:

$$\text{Error relativo} = dA / A$$

$A = (15\text{ cm})^2 = 225\text{ cm}^2$; $dA = 2.l.dl = 2.(15\text{ cm}).(0{,}05\text{ cm}) = 1{,}5\text{ cm}^2$

Luego:

$$\text{Error relativo} = dA / A = (1{,}5\ cm^2) / 225\ cm^2 = 0{,}0067$$

$$\%\ \text{de Error relativo} = 0{,}67\ \%$$

Ejemplo 21:

La producción de una industria es $P(k) = 400\ .k^{1/2}$ unidades, donde k representa la inversión de capital. Estime el incremento porcentual que se generará en la producción a partir de un aumento del 1% en la inversión de capital.

El *cambio porcentual* estimado es *Cambio porcentual = (dy / y) *100*

Solución:

Se tiene

$$P(k) = 400\ .k^{1/2} \qquad ; \qquad dk = 0{,}01k$$

Luego:

$$\text{Cambio porcentual de } P = (dP / P)*100$$

$$dP = 200.k^{-1/2}.dc = 200\ k^{-1/2}.0.01k = 2.\ k^{1/2} \qquad P = 400\ .\ k^{½}$$

$$(dP / P)*100 = 0{,}5\ \%$$

Ejemplo 22:

La producción diaria, en cierta fábrica, es $Q(I) = 600\ .\ I^{1/2}$ unidades, donde I representa el tamaño de la fuerza laboral en cientos de horas – hombre. Si actualmente se tienen 900 horas – hombre, ¿qué cantidad adicional será necesaria para incrementar la producción en 8 unidades diarias?

Solución:

Se tiene

$$Q(l) = 600\, l^{1/2}\ ;\ l = 9\ ;\ dQ = 8\ ;\ dl = ?$$

Luego:

$$dQ = 300\, l^{-1/2}.dl \quad \Longrightarrow \quad dl = dQ / (300\, l^{-1/2})$$

$dl = 0{,}08$ — Necesita un aumento diario de 8 horas – hombre.

EJERCICIOS PROPUESTOS D

1. Se calcula que el radio de un disco circular es aproximadamente 8 cm con un error en la medición de 0,06 cm. Use diferenciales para estimar el máximo error obtenido al calcular el área de uno de los lados del disco.
2. Use diferenciales para estimar el crecimiento del volumen de un cubo si cada lado cambia de 10 a 10,1 cm. ¿Cuál es el valor exacto del incremento del volumen?.
3. El costo total para un fabricante es $C(q) = 0{,}1\, q^3 - 0{,}5\, q^2 + 500\, q + 200$ miles de Bs. cuando el nivel de producción es q unidades. Si el nivel de producción aumenta de 4 a 4,1 unidades, ¿cuál será el cambio en el costo total?
4. Suponga que mide el radio de un círculo y resulta 12 cm. Si la medición tiene un margen de error del 3% ¿qué tan exacto es el cálculo del área?
5. Los registros indican que x años después de 1998, el impuesto medio sobre la propiedad de una casa de 120 m^2 en cierta zona de Caracas será

$T(x)=60x^{3/2} + 40x + 1200$ Bs. Calcule el porcentaje en el cual se incrementará el impuesto sobre la propiedad durante la primera mitad de 2002.

6. Estime qué le sucederá al volumen de un cubo si la longitud de cada lado se disminuye en un 2%.
7. Estime qué le sucederá al volumen de una esfera si el radio se incrementa en un 1%.
8. Si la producción es $Q(x) = 400k^{1/2}$ unidades, donde k representa la inversión de capital de la empresa. Estime qué incremento porcentual se generará en la producción a partir de un aumento del 1% en la inversión de capital.
9. Estime el mayor error porcentual que puede permitirse en la medición del radio de una esfera, si se desea que el error en el cálculo del volumen no exceda el 8%.
10. *(Problema de introducción de esta unidad).* Se proyecta que, dentro de t años, la circulación de un periódico local será $C(t) = 100t^2 + 400t + 5000$. Calcule la cantidad en la que aumentará la circulación durante los próximos 6 meses.

RESPUESTAS D

1. 1,5 %	2. 0,301 cm^3	3. 50080 Bs.
4. 27,14 cm^2	5. 6%	6. –6%
7. 3%	8. 0,5%	9. $\pm$ 2,67%
10. 200		

3.9. MISCELÁNEA DE EJERCICIOS.

☑ Indique si los siguientes planteamientos son verdadero o falso. Justifique su respuesta.

1. La pendiente de la tangente a la curva $y = x^3 + x$ es diferente en cada punto de la curva.
2. La derivada de un producto es igual al producto de las derivadas.
3. Si $y = \pi^5$, entonces $y' = 5\pi^4$
4. Si existe $f'(c)$ entonces f es continua en c.
5. Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x, entonces $f(x) = g(x)$ para toda x.

☑ Resolver

6. Demuestre que si $x.y = k$, donde k es una constante distinta de cero, entonces $\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{4}{k}$

7. La ecuación de la demanda de cierto tipo de caramelo es $px+x+20p=3000$, donde la demanda es 1000 unidades por semana cuando el precio unitario es p Bs. Si el precio actual es de Bs. 25 y aumenta a razón de Bs. 2,5 por semana, ¿cuál será el cambio en la demanda?.

8. Suponga que $f(x) = 3x + |x|$ y $g(x) = x / 4 - |x| / 3$. Demuestre que no existe $f'(0)$ ni $g'(0)$ pero si existe $(fog)'(0)$.

9. Sea $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ y $g(x) = x^5 + 4x^3 + 2x$. Use diferenciales para estimar el incremento de $(gof)(x)$ cuando x cambia de -1 a $-1{,}01$.

10. Dado $f(x) = 2 / (1-x)$, halle $f^{(n)}(x)$ para todo n entero y positivo.

11. Sea $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$.

a) Encuentre las abscisas de todos los puntos sobre la gráfica de f tales que la tangente que pase por cada uno de ellos sea paralela a la recta A (-3, 2) y B(1, 14).

b) Encuentre los valores de $f''(x)$ en los ceros de $f'(x)$.

12. Se calcula que dentro de t meses la población de cierta ciudad será $P(t)=3t + 5t^{3/2} + 6000$. ¿A qué razón porcentual cambiará la población con respecto al tiempo dentro de 4 meses?

13. En determinada fábrica se elabora $q(t) = t^2 + 50t$ unidades aproximadamente durante las primeras t horas de una jornada de producción. El costo total de fabricar q unidades es $C(q) = 0{,}1q^2 + 10q + 400$ miles de Bs. Halle la tasa a la cual cambia el costo de fabricación con respecto al tiempo, dos horas después de iniciada la producción.

14. Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad será $P(t) = 10 - 20/(t+1)^2$ en miles. Un estudio ambiental revela que el nivel del monóxido de carbono en el aire será $M(p) = 0{,}8\,(p2 + p + 139)^{1/2}$ unidades cuando la población sea p miles. ¿A qué razón porcentual variará el nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de t años?

15. Hallar y" de $y = x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - 2\sqrt{1+x^2}\,\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + 2x$

16. Hallar y''' en (1,1) de $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$

17. La media geométrica de *x* y *x* + *n* es $g = [x(x+n)]^{1/2}$ y la media aritmética es $a = [x + (x + n)] / 2$. Demuestre que $dg / dx = a / g$

18. Encuentre un polinomio f(x) de grado 2 tal que f(1) = 5, f'(1) = 3 y f''(x)= -4.

19. Dibuje la gráfica de $f(x) = 4 - |x-2|$

a) ¿Es f continua en x = 2?

b) ¿Es f derivable en x = 2?

20. Dibuje la gráfica de f(x) si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & x < -2 \\ 1 - 4x - x^2 & x \geq -2 \end{cases}$$

a) ¿Es f continua en x = -2?

b) ¿Es f derivable en x = -2?

UNIDAD IV

APLICACIONES DE LA DERIVADA

La Empresa C.K.L. lanzó al mercado una nueva marca de jugos con dos sabores, en botellas de 2 litros. La gerencia estima que la demanda de su producto varía con su precio, siendo la función de demanda semanal:

$$q = 180000 - 250p$$

donde q es el número de unidades demandadas y p el precio en Bs. El costo total de producir q unidades se estima con la función:

$$C = 350000 + 300q + 0{,}001q^2$$

¿Qué cantidad se debe producir semanalmente para maximizar las ganancias?

CONTENIDO

4.1 Extremos en un intervalo.

4.2 Teorema de Rolle, Teorema de Lagrange y Teorema de Cauchy.

4.3 Regla de L'Hôpital.

4.4 Criterio de la primera derivada. Crecimiento y decrecimiento.

4.5 Criterio de la segunda derivada. Concavidad.

4.6 Estudio completo de curvas.

4.7 Optimización.

4.8 Aplicaciones a la ciencia económica.

4.9 Miscelánea de ejercicios.

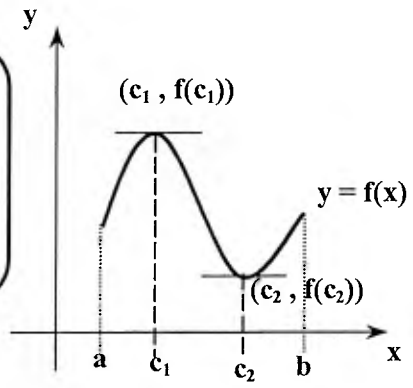
UNIDAD IV:

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

4.1. EXTREMOS EN UN INTERVALO:

La gráfica de f(x) definida en el intervalo [a,b] puede tener varias características: intervalos donde es creciente y decreciente, puntos donde alcanza el valor más alto y donde alcanza el valor más bajo, etc. Estos puntos son precisamente los extremos de la función en ese intervalo.

RECUERDA QUE...
El teorema de Valor Intermedio (unidad II), garantiza la existencia de f(c) =k para c en [a,b] si f es continua.



Se define como *Extremos Relativos en un intervalo* si:

a) $f(c_1)$ es el *máximo* de f en [a,b] si

$f(c_1) \geq f(x)$ para todo x en [a,b]

b) $f(c_2)$ es el *mínimo* de f en [a,b] si

$f(c_2) \leq f(x)$ para todo x en [a,b]

A partir de lo anterior podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1: *Teorema del Valor Extremo:*

Si f es continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces f alcanza un valor máximo y un valor mínimo en ese intervalo.

Si observa la gráfica anterior puede notar que las rectas tangentes a f(x) en los extremos son paralelas al eje x. Es decir, su pendiente es cero.

Por lo tanto:

RECUERDA QUE...

La pendiente de f(x) es f ' (x).

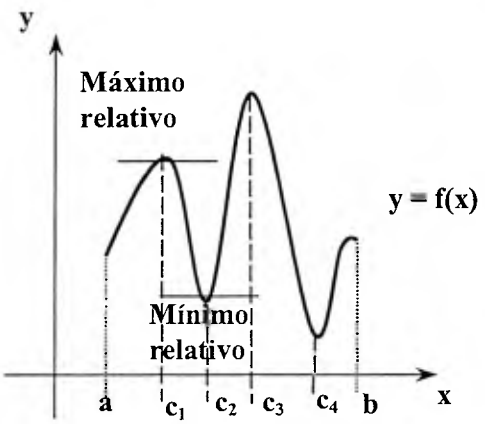
Teorema 2:

Si f tiene un extremo relativo en c, entonces *f ' (c) = 0 ó f ' (c) no existe.*

El valor que toma x, es decir x = c, donde la función tiene un extremo se conoce como *número crítico*. Luego:

c es *Número crítico* si existe f(c) y f'(c) = 0 o no existe.

Son *extremos relativos* porque puede existir un valor de f(x) más alto o más bajo en el intervalo, o en todo su dominio.



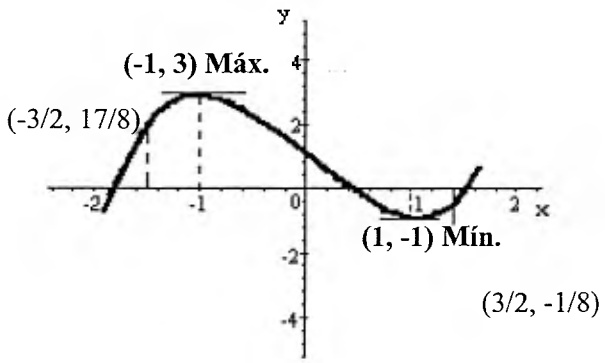
Si es el máximo valor o el mínimo valor, es un *extremo absoluto*

Ejemplo 1: Hallar los extremos absolutos de $y = f(x)$ en el intervalo dado para

a) $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$ en $[-3/2, 3/2]$

b) $y = |x|$ en $[-3, 3]$

Solución:



a) $y = f(x) = x^3 - 3x + 1$

- Hallamos los números críticos, es decir, donde $f'(x) = 0$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0$$

$$3(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = -1 \quad y \quad x_2 = 1$$

- Hallamos $f(x_1)$ y $f(x_2)$:

$f(x_1) = f(-1) = 3$ $\qquad$ $f(x_2) = f(1) = -1$

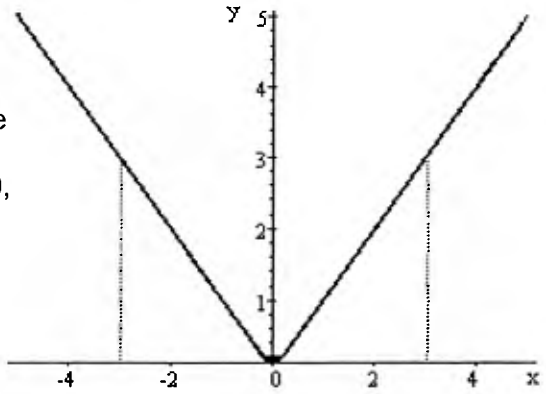
Lógicamente, el máximo y el mínimo lo identificamos con el mayor y menor valor de f(x) en el intervalo, incluyendo los extremos del mismo.

Sin embargo, para identificar correctamente los puntos máximos y mínimos necesitamos el criterio de la segunda derivada, que se considerará más adelante.

- Hallamos f(a) y f(b) ya que es probable que los extremos absolutos estén en los extremos del intervalo.

$f(-3/2) = -1/8$ $\qquad$ $f(3/2) = 17/8$

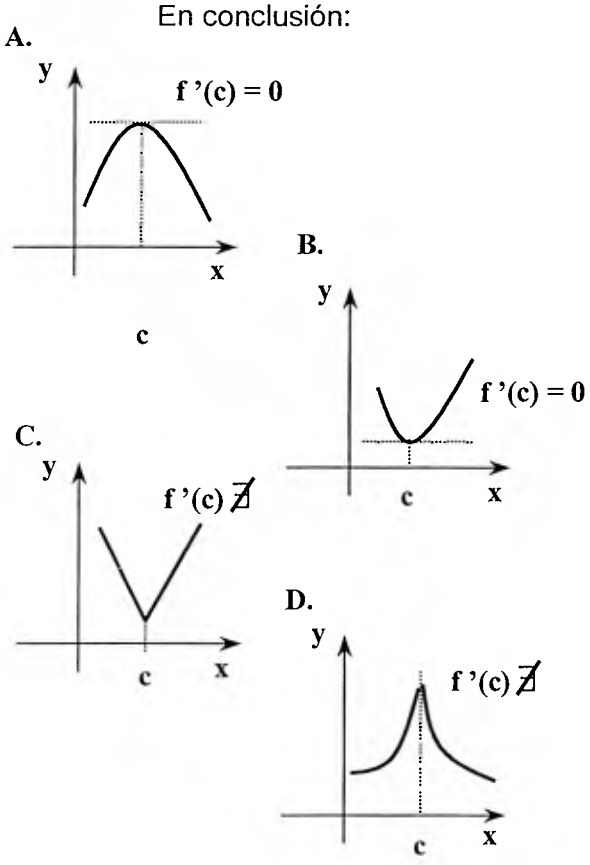
b) $y = |x|$ en $[-1, 1]$



En la gráfica se puede observar que el extremo de la función está en x = 0, pero si hallamos la derivada en x =0 vemos que no existe, ya que los límites laterales no coinciden:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = -1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = 1$$

En conclusión:



- Si f '(c) = 0 entonces x = c es un número crítico. (fig. A y B)
- Si f '(c) ∄ entonces x = c es un número crítico. (fig. C y D)

Para hallar los extremos en un intervalo cerrado [a,b]:

- Halla los números críticos en el intervalo (donde f'(x) = 0 o no existe).
- Halla los valores de f(x) en los números críticos.
- Halla f(a) y f(b).
- Compara los valores de f(x) obtenidos. Por lo general, el mayor valor es el máximo, y el menor es el mínimo.

Conociendo la definición de extremos relativos podemos enunciar los siguientes teoremas:

4.2. TEOREMA DE ROLLE, TEOREMA DE LAGRANGE Y TEOREMA DE CAUCHY:

NOTA
Se invita al estudiante a investigar sobre la demostración de estos teoremas.

- **TEOREMA DE ROLLE:**

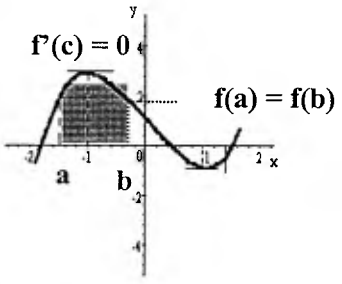
Si f(x) es:

(i) Continua en [a,b]

(ii) Derivable en (a,b)

(iii) f(a) = f(b)

Entonces, existe c que está en (a,b) tal que f '(c) = 0.



Es decir, existe al menos un punto en (a,b) de f(x) en el que la tangente es paralela al eje x.

Ejemplo 2: Razona si es aplicable el teorema de Rolle en

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad \text{en} \quad [1\ ,\ 3].$$

Solución:

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ en [1 , 3]

Evaluamos si se cumplen las condiciones:

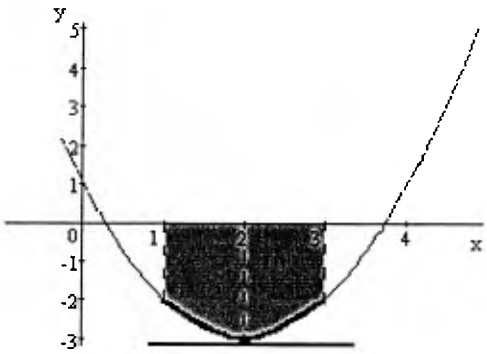
(i) Es continua, ya que todo polinomio es continuo en todos los reales.

(ii) $f'(x) = 2x - 4$ y existe en [1 , 3]

(iii) f(1) = -2 = f(3)

Luego, debe existir f'(c) = 0 → $f'(x) = 2x - 4 = 0$ → $x = 2$

Observa lo que sucede en x = 2:



Tangente horizontal

Ejemplo 3: Aplicando el teorema de Rolle, determine todos los valores de x en f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) en [1, 3], tales que la tangente a esos puntos sean paralelos al eje de las abscisas.

Solución:

(i) f(x) es continua en [1, 3].

(ii) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, existe en [1, 3]

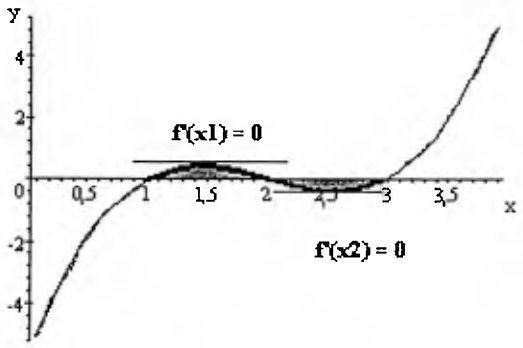
(iii) f(1) = f(3) = 0

Luego, hallamos x para f'(x) = 0:

$$3x^2 - 12x + 11 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{6+\sqrt{3}}{3} \simeq 2,57, \qquad x_1 = \frac{6-\sqrt{3}}{3} \simeq 1,42$$

En la gráfica:

$$f(x) = y = (x-1) * (x-2) * (x-3)$$



En los puntos críticos, la tangente es horizontal.

- **TEOREMA DE LAGRANGE O TEOREMA DEL VALOR MEDIO (PARA DERIVADAS):**

Es una generalización del teorema de Rolle:

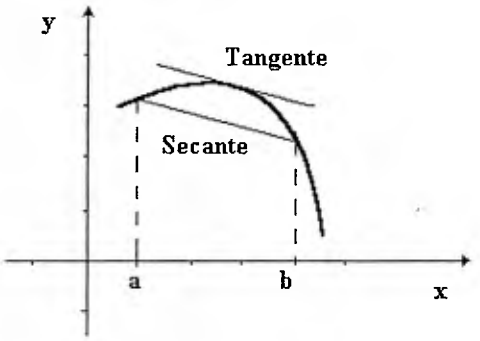
Si f(x) es continua en [a,b] y derivable en (a, b), existe al menos un c en (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Pendiente de la recta tangente

Pendiente de la recta secante

Es decir, existe al menos un punto en c, en el que la recta tangente es paralela a la cuerda que pasa por los puntos (a,f(a)) y (b,f(b)).



Ejemplo 4: Decida si el teorema de Valor Medio es aplicable en las funciones dadas. Si es así, halle todos los valores de c en donde se cumple el teorema.

a) $f(x)= x^3 / 3$ en [-2 , 2]

b) $g(t) = t + 1/t$ en [-1 , ½]

Solución:

a) $f(x) = x^3/3$ en $[-2, 2]$

Como es polinomio es continua y derivable en todo los reales.

Hallamos $f'(x)$: $f'(x) = x^2$

Sustituimos los valores correspondientes en la expresión:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \rightarrow x^2 = \frac{\frac{8}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)}{2-(-2)} = \frac{4}{3}$$

Luego, $x = 2/3^{1/2}$ o $x = -2/3^{1/2}$

b) $g(t) = t + 1/t$ en $[-1, ½]$

g(t) no es continua en t = 0. Sin embargo, supongamos que no nos damos cuenta de esta condición y procedemos a aplicar el teorema:

$$g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \rightarrow 1-\frac{1}{t^2} = \frac{7}{2} \rightarrow t^2 = -\frac{2}{5}$$

Luego, t no existe en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 5:

José viajó 180 Km en 2 horas y aseguró que nunca excedió el límite de 80 km/h. Demuestre que mintió, usando el teorema de valor medio.

Solución:

Tomamos como f(t) la distancia recorrida en el tiempo t, en el intervalo de 0 a 2 horas:

Luego:

$$f'(t) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} \rightarrow f'(t) = \frac{180\ km}{2\ h} = 90\ km/h$$

En algún momento debió exceder los 80 km/h.

- **TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY:**

Es una generalización del teorema de Valor Medio:

Consideremos dos funciones f(x) y g(x) continuas y derivables en [a , b]. Por el teorema de Valor Medio se tiene que:

En $[a,b]$ existe $c_1 \in [a,b]$ tal que $f'(c_1) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En $[a,b]$ existe $c_2 \in [a,b]$ tal que $g'(c_2) = \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$

Luego, dividiendo miembro a miembro obtenemos :

$$\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Este teorema es de especial importancia para la demostración de la Regla de L'Hôpital que facilita el cálculo de límites indeterminados. (Se estudiará en el siguiente punto)

EJERCICIOS PROPUESTOS IV.A

A continuación explique por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle a la función en el intervalo dado:

1. f(x) = $\frac{2-x}{2+x}$ en [-3, 0]

2. f(x) = $\frac{x^2-1}{x^2}$ en [-1, 1]

3. f(x) = $|x-2|+2$ en [0, 4]

En los siguientes ejercicios determine si es aplicable el teorema de Rolle a f en el intervalo dado. Si no es aplicable indique por qué. Si es aplicable, halle todos los valores de c en el que se cumple el teorema.

4. f(x) = x^2 -2x en [0, 2]

5. f(x) = $|x|-1$ en [-1, 1]

6. f(x) = $\frac{x^2-2x-3}{x+2}$ en [-1, 3]

En los siguientes ejercicios determine si es aplicable el teorema de Valor Medio en el intervalo dado. Si es aplicable, halle todos los valores de c en el que se cumple el teorema.

7. f(t) = $\frac{t+3}{t-3}$ en [-1, 4]

8. g(x) = $\frac{x}{x+1}$ en $[-\frac{1}{2}, 2]$

Resolver:

9. Sea $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Demuestre que para cualquier intervalo [a, b], el valor c según el teorema de Valor Medio es el punto medio del intervalo.

10. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x-4}$. Demuestre que en [2, 6] no existe ningún número tal que $f'(c) = \frac{f(6)-f(2)}{6-2}$. Analice si contradice el teorema de Valor Medio y razone su respuesta.

RESPUESTAS IV.A

1. Discontinua en $x = -2$, además $f(-3) \neq f(0)$.

2. Discontinua en $x = 0$

3. No derivable en $x = 2$.

4. $f'(1) = 0$

5. No derivable en $x = 0$

6. $f'(-2+\sqrt{5}) = 0$

7. Discontinua en $t = 3$

8. $f'\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2}{3}$

4.3. REGLA DE L´HÔPITAL:

En la Unidad II hemos visto como calcular algunos límites indeterminados, sin embargo, hasta ahora no es posible calcular una importante cantidad de ellos, o son calculados mediante procedimientos complicados. La regla de L´Hôpital resulta una herramienta muy útil, para calcular estos límites con mucha sencillez.

Luego:

Regla de L´Hôpital:

Sean f y g dos funciones que cumplen con las condiciones del teorema de Cauchy. Entonces:

Si existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ también existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ y además

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Solo si es de la forma
0 / 0 *ó* ∞ / ∞

Esto se cumple ya que, cuando un límite del tipo f(x) / g(x) existe significa que la relación entre las ordenadas de las curvas y = f(x) e y = g(x) tiende a estabilizarse. Igualmente, si existe el límite de f'(x) / g'(x) , entonces, la relación entre sus *pendientes* tiende a estabilizarse.

Recuerda que los límites indeterminados son de la siguiente forma

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \infty - \infty \quad ; \quad 0.\infty \quad ; \quad 1^{\infty} \quad ; \quad 0^{0} \quad ; \quad \infty^{0}$$

Pero la regla de L´Hôpital sólo es aplicable en las dos primeras formas que s presentan. Para poder aplicar esta regla en otros límites es necesario llevarlos a la formas 0/0 ó ∞/∞ por medio de algunos artificios algebraicos.

Ejemplo 6: Resuelva el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x^2 - 9}$$

Solución:

Debemos analizar la forma que tiene el límite:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

Antes resolvíamos este límite factorizando y eliminando (x - 3), ya que producía la indeterminación. Ahora derivaremos numerador y denominador de forma independiente

CUIDADO

Evita el siguiente error:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$$

No es derivar como un COCIENTE

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+9x-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{3x^2-6x+9}{2x}$$

Revisamos si no hay más indeterminación y buscamos el resultado:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-6x+9}{2x} = \frac{18}{6} = 3$$

Nota:

Si la indeterminación continua, se deberá seguir derivando hasta que desaparezca la indeterminación.

Pero suponga que olvidamos revisar si la indeterminación se anuló y seguimos aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-6x+9}{2x} = \lim_{x\to 3}\frac{6x-6}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Obtendremos un resultado FALSO.

Ejemplo 7: Resuelva el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2}$$

Solución:

Revisamos la forma del límite y procedemos a derivar si es $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-ae^{-ax}+be^{-bx}}{2x}$$

Como todavía existe la indeterminación, seguimos aplicando la regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-ae^{-ax}+be^{-bx}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^2e^{-ax}-b^2e^{-bx}}{2} = \frac{a^2-b^2}{2}$$

Observa que en este caso donde el cociente está formado por una función exponencial y un polinomio, fue necesario derivar hasta reducir el polinomio a una constante. Quizás es cómodo tomar en cuenta este detalle para agilizar la resolución del ejercicio, pero no en todos los cocientes se deben derivar hasta encontrar la constante (revisa el ejemplo 6).

Ejemplo 8: Resuelva el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} x(a^{\frac{1}{x}}-1)$$

Solución:

Este límite es de la forma $\infty * 0$, por lo que debemos llevarlo a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty} x(a^{\frac{1}{x}}-1) = \lim_{x\to\infty} \frac{(a^{\frac{1}{x}}-1)}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\frac{1}{x}\to 0}} = \frac{0}{0}$$

Luego, aplicamos la regla:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(a^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}a^{\frac{1}{x}}(\ln a)}{-\frac{1}{x^2}} = \ln a$$

Otra forma de resolverlo es aplicando un cambio de variable a partir de la transformación:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(a^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}}$$

Sea $t = \frac{1}{x}$, si $x \to \infty$, $t \to 0$, luego:

$$\lim_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a^t \ln a}{1} = \ln a$$

Ejemplo 9: Resuelva el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$$

Solución:

Analizamos la forma del límite y encontramos que no hay indeterminación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \frac{e^0 + \frac{1}{e^0}}{0} = \frac{2}{0} = \infty$$

Pero, si olvidamos revisar la indeterminación y aplicamos la regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^0 + \frac{1}{e^0}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Obtendremos un resultado FALSO.

Ejemplo 10: Resuelva el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$$

Solución:

Observa que es de la forma $\infty - \infty$. Sumando las fracciones:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x+x\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x+x\frac{1}{x}}{\ln x+x\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x+1}{\ln x+1+1}=\frac{1}{2}$$

Ejemplo 11: Resuelva el límite:

$$\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}$$

Solución:

Recuerda que por propiedad de los logarítmos y de los límites, podemos expresar el límite de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln(x+e^x)^{\frac{2}{x}}}=e^{\lim_{x\to\infty}\ln(x+e^x)^{\frac{2}{x}}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\ln(x+e^x)}$$

Debemos resolver el límite del exponente. Es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\ln(x+e^x)=2\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1}=$$

$$2\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=2$$

Luego, el resultado es:

$$\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{\frac{2}{x}}=e^2$$

Si el límite es de la forma 0^0, 1^∞ *ó* ∞^0

se puede reducir a $\frac{0}{0}$ *o* $\frac{\infty}{\infty}$ *considerando sus logarítmos neperianos*

EJERCICIOS PROPUESTOS IV.B

Calcule los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hôpital:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(1-\sqrt{1-x})$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x\right)$

3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-x^3}-\sqrt[3]{x}}{1-x}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

8. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{c^x-d^x}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$

11. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

12. $\lim\limits_{x\to 0} (3x+1)^{-\frac{1}{x}}$

13. $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{x}$

14. $\lim_{x\to 1^-} x^{\frac{1}{1-x^2}}$

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2x}{x^2}$

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2-x)e^x - x - 2}{x^3}$

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

18. $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

19. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{e}{e^x - e} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

20. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+Ax)}{x}$

RESPUESTAS IV.B

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $3a$ 4) $\frac{5}{6}$ 5) 0 6) e 7) 1 8) $\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$

9) $\dfrac{\ln(a/b)}{\ln(c/d)}$ 10) e^{-2} 11) $\frac{3}{2}$ 12) e^{-3} 13) 1 14) $e^{-1/2}$ 15) 1

16) $-\frac{1}{6}$ 17) 1 18) $\ln a - \ln b$ 19) $-\frac{1}{2}$ 20) A

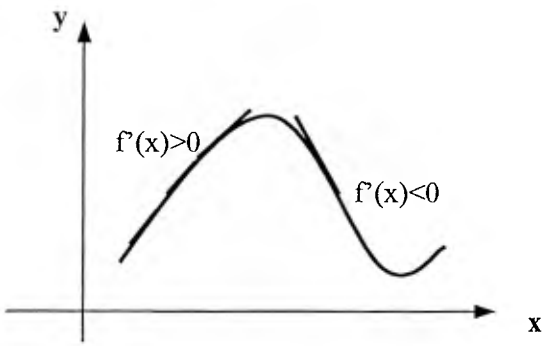
4.4. CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO.

La pendiente de una curva está dada por la primera derivada. Al comienzo de esta unidad vimos como los extremos de una función se obtienen mediante la primera derivada. Es decir, los extremos de f(x) están en f'(x) = 0 o en donde no existe f'(x).

Sin embargo, ¿qué sucede si f'(x) existe y es distinta de cero?. Observa en la siguiente gráfica:

REDUERDA QUE...

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Luego, si definimos un intervalo (a,b) donde f(x) es continua y derivable se tiene que:

- Si f'(x) > 0 *para toda x en (a,b)* es porque **y** crece cuando **x** crece.

  Entonces *f(x) es* <u>*CRECIENTE*</u> *en (a,b)*
- Si f'(x) < 0 *para toda x en (a,b)* es porque **y** decrece cuando **x** crece.

  Entonces *f(x) es* <u>*DECRECIENTE*</u> *en (a,b)*
- Si f'(x) = 0 *para toda x en (a,b)* entonces *f(x) es* <u>*CONSTANTE*</u> *en (a,b).*

Para hallar estos intervalos se sugiere:

- Hallar los números críticos (donde $f'(x) = 0$ o no existe.)
- Definir los intervalos en la recta real, limitados por los números críticos.
- Estudiar el signo de $f'(x)$ en esos intervalos.

Ejemplo 12: Identifique los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = y = x^3/4 - 3x$.

Solución

Hallamos $f'(x)$: $f'(x) = \frac{3}{4} x^2 - 3$

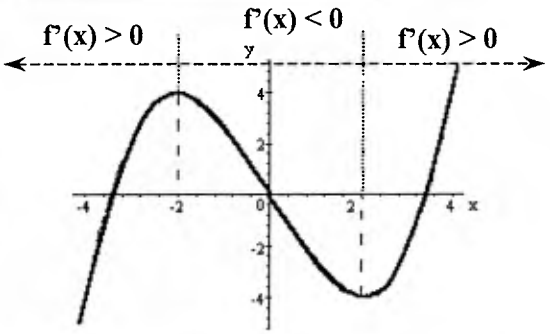
Buscamos los números críticos: $f'(x) = 0$; $x = -2$ y $x = 2$

Definimos los intervalos y hallamos el signo de $f'(x)$ en cada uno. Es apropiado hacer una tabla para facilitar el análisis.

Intervalo	x	f'(x)	Conclusión
$(-\infty, -2)$	-3	+	Creciente
(-2,2)	0	-	Decreciente
$(2, \infty)$	3	+	Creciente

Tomamos cualquier valor de prueba del intervalo

De $f'(x)$ solo interesa el signo, o si es igual a 0



Observa que $f'(-2)=f'(2)=0$.
¿Qué sucede en $x = -2$ y $x = 2$?.

Ejemplo 13: : Identifique los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = y = x^2 / (x-1)$.

Solución

Debes revisar todas las posibilidades: Cuando y' = 0 y cuando y' no existe.

Hallamos f'(x) y los números críticos:

$y' = x(x-2) / (x-1)^2$ ⟹ $y' = 0$ ⟹ $x = 0 ; x = 2$

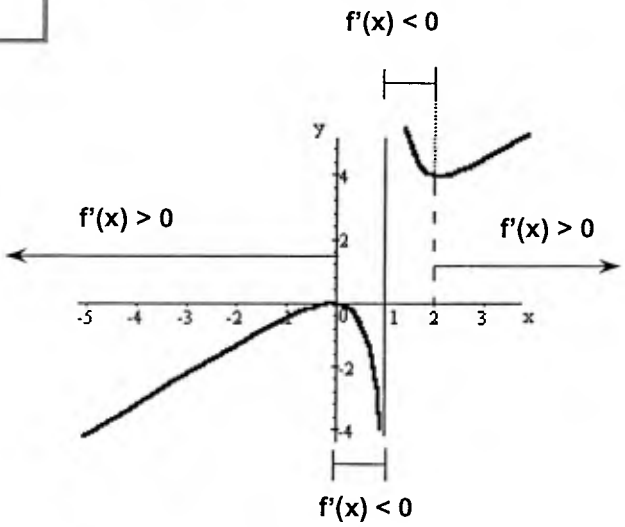
⟹ *y' no existe* ⟹ $x = 1$

Luego, creamos la tabla en base a los intervalos dados por los números críticos:

Intervalo	x	f'(x)	Conclusión
$(-\infty, 0)$	-1	+	Creciente
(0, 1)	0,5	-	Decreciente
(1, 2)	1,5	-	Decreciente
$(2, \infty)$	3	+	Creciente

Observa que el número crítico x = 1 es la asíntota vertical.

Observa que f'(0) = f'(2) = 0. ¿Qué sucede en esos puntos?



Ejemplo 14: Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = y = x^5 + 1$

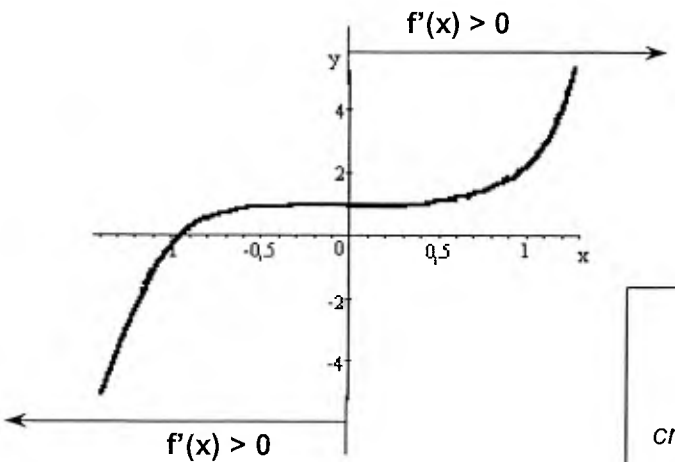
Solución

Hallamos $y' = 5x^4$

Cuando $y' = 0$; $x = 0$.

Creando la tabla obtenemos:

Intervalo	x	f'(x)	Conclusión
$(-\infty, 0)$	-1	+	Creciente
$(0, \infty)$	1	+	Creciente



Es estrictamente creciente.

Si una curva es estrictamente creciente o estrictamente decreciente entones es MONÓTONA

Según nuestro análisis, x = 0 es un punto crítico. Pero no es un extremo relativo, ¿tendrá alguna otra propiedad?

EJERCICIOS PROPUESTOS IV.C:

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes curvas:

1. $y = 2x^3 + 3x2 - 12x$
2. $y = x^{1/3} + 1$
3. $y = x + x^{-1}$
4. $y = (x^2 - 2x + 1)(x + 1)^{-1}$
5. $y = 2x\,(1 + x^2)^{-1}$
6. $y = \ln|1 - x^2|$
7. $y = x\,(x^2 - 6x - 16)^{-1}$
8. $y = 2e^{x^2-4x}$
9. $y = (x^4 + 1).x^{-2}$
10. $y = (x^2 - 4)^{2/3}$

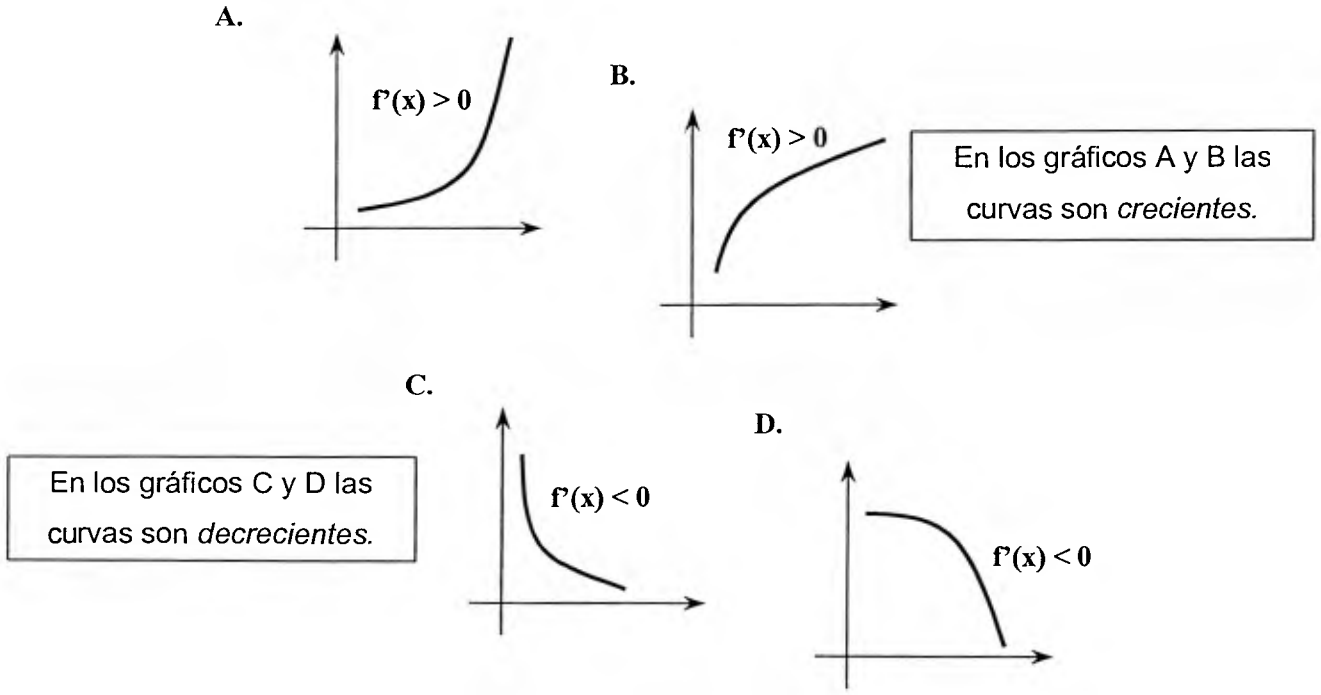
RESPUESTAS IV.C.

1. Creciente en $(-\infty, -2)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-2, 1)$
2. Creciente en todos los reales.
3. Creciente en $(-\infty,-1)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$
4. Creciente en $(-\infty, -3)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-3, -1)$ y $(-1, 1)$
5. Creciente en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; decreciente en $(-1, 1)$

6. Creciente en (-1, 0) ; decreciente en (0,1)
7. Cecreciente en (-∞, -2) ; (-2,8) y (8, ∞)
8. Creciente en (2, ∞) ; decreciente en (-∞, 2)
9. Creciente en (-1, 0) y (1, ∞) ; decreciente en (-∞, -1) y (0,1)
10. Creciente en (-2, ∞) y (2, ∞) ; decreciente en (-∞, -2) y (0, 2)

4.5. CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA. CONCAVIDAD.

Observa las siguientes gráficas:



Pero existe una diferencia importante en A y B, a pesar de que ambas son crecientes, lo mismo podemos decir de C y D. Esta diferencia está dada por la *CONCAVIDAD*, es decir, *"si la curva está abierta hacia arriba o hacia abajo".*

La CONCAVIDAD viene dada por la segunda derivada. Luego, en una función f(x) continua en [a,b] y derivable en (a, b) se cumple que:

- Si f'(x) > 0 *para toda x en (a,b)* es *Cóncava hacia arriba*.
- Si f'(x) < 0 *para toda x en (a,b)* es *Cóncava hacia abajo*.
- Si f'(x) = 0 en x = c, es *Cambio de Concavidad.*

En este caso el punto donde se produce el cambio de concavidad se conoce como *Punto de Inflexión.* Luego:

Punto de Inflexión:

Sea f(x) una función con una recta tangente en el punto (c, f(c)), este es un *punto de inflexión* si la concavidad cambia en ese punto. Con respecto a f'(c) puede no existir o ser 0.

Para estudiar la concavidad de f se sugiere (de manera análoga a los intervalos de crecimiento y decrecimiento):

- Hallar x = c donde f'(c) = 0 o no existe.
- Definir los intervalos en la recta real, limitados por los puntos de inflexión.
- Estudiar el signo de f'(x) en esos intervalos.

Ejemplo 15: Determine los puntos de inflexión y estudie la concavidad de $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

Solución:

Calcula además los extremos relativos y analiza cómo es la concavidad en cada uno.

Hallamos las dos primeras derivadas:

$y = -x^3 + 3x^2 - 2$

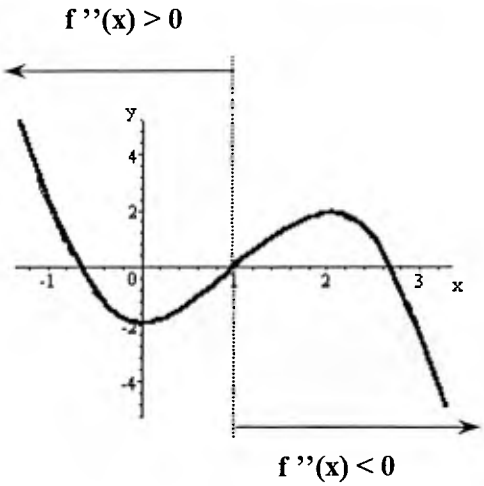
$y' = -3x^2 + 6x$

$y'' = -6x + 6$

Cuando $y'' = 0 \Longrightarrow x = 1$

Utilizando una tabla tenemos que:

Intervalo	x	f''(x)	Conclusión
$(-\infty, 1)$	0	+	Cóncava hacia arriba
$(1, \infty)$	2	-	Cóncava hacia abajo



Ejemplo 16: Determine los puntos de inflexión y estudie la concavidad de $y = (x^2 + 1) / (x^2 - 1)$

Solución:

RECUERDA QUE

Es conveniente simplificar la primera derivada antes de seguir derivando.

Hallamos las dos primeras derivadas.

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$y' = \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{-4(x^2-1)^2-2(x^2-1).(2x).(-4x)}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

¿Notaste que x = 1 y x =-1 so valores que no pertenecen al dominio?, ¿y que además son asíntotas verticales?.

Observa que:

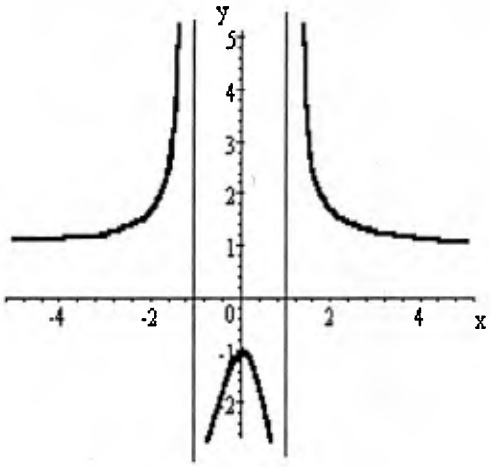
Cuando y'' no existe x = -1 y x = 1

No hay valores de x en los reales donde y' = 0.

Creando la tabla tenemos que:

Intervalo	x	f''(x)	Conclusión
(-∞, -1)	-2	+	Cóncava hacia arriba
(-1, 1)	0	-	Cóncava hacia abajo
(1, ∞)	2	+	Cóncava hacia arriba

¿Qué sucede en x = 0?.



Ejemplo 17: Determine los puntos de inflexión y estudie la concavidad de $y = \dfrac{-3x^5 + 40x^3 + 135x}{270}$

$y = \dfrac{-x^5}{90} + \dfrac{4}{27}x^3 + \dfrac{x}{2}$

Solución

$y'' = 5x^4$

Antes de comenzar a derivar es conveniente simplificar la función, obteniendo:

$y = -\dfrac{x^5}{18} + \dfrac{4x^3}{9} + \dfrac{1}{2}$

$y = - x^5 / 90 + 4 x^3 / 27 + x / 2$

Derivando:

$y' = -x^4 / 18 + 4x^2 / 9 + ½$; $y'' = -2 x^3/9 + 8 x/9$

Cuando $y'' = 0 \Longrightarrow x = 0; x = -2$ y $x = 2$

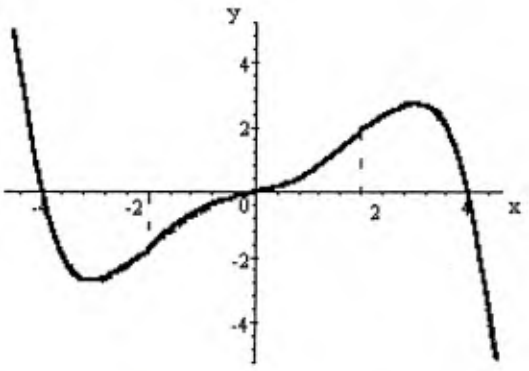
En la tabla:

Intervalo	x	f''(x)	Conclusión
$(-\infty, -2)$	-3	+	Cóncava hacia arriba
(-2, 0)	-1	-	Cóncava hacia abajo
(0, 2)	1	+	Cóncava hacia arriba
$(2, \infty)$	3	-	Cóncava hacia cabajo

Analiza, ¿qué relación habrá entre la concavidad y los extremos relativos.?

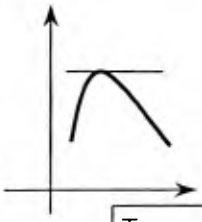
NOTA

Los cambios de concavidad los produce un punto de inflexión, pero ***no todos los puntos de inflexión generan cambio de concavidad.*** Estudia como ejemplo $y = x^4$



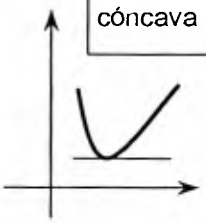
Cuando se estudiaron los extremos relativos, se expresó la necesidad de utilizar la segunda derivada para identificar de una forma más segura los puntos máximos y mínimos. Ahora tenemos que:

Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) < 0$ es *Máximo relativo*.



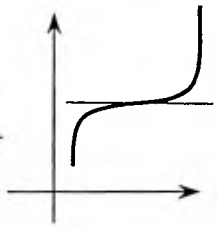
Tangente Horizontal y cóncava hacia abajo

Tangente Horizontal y cóncava hacia arriba



Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) > 0$ es *Mínimo Relativo.*

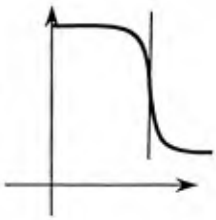
Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) = 0$ es *Inflexión horizontal.*



Tangente Horizontal y cambio de concavidad.

Si $f'(x)$ no existe y $f''(x)$ no existe es, probablemente, *Inflexión vertical.*

Tangente Vertical y cambio de concavidad.



NOTA

En este caso puede existir una asíntota vertical.

Esta información resulta muy útil para el *estudio completo de curvas* que se analizará en el siguiente punto.

EJERCICIOS PROPUESOS IV. D

Halle los puntos de inflexión y estudie la concavidad de las siguientes curvas:

1. $x^2y + 12y - 24 = 0$
2. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$
3. $y = -3x^5 + 5x^3$
4. $y = x^{2/3}(x - 5)$
5. $y = x^2 \ln x$
6. $y + x^2y - x = 0$
7. $2xy - y - x^2 + 1 = 0$
8. $y = 4(x - 5)^{2/3} + 20(x - 1)^{3/2}$
9. $y = x(x + 1)^{1/2}$
10. $y = (1 + x^2)e^x$

RESPUESTA IV. D.:

1. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -12^{1/2})$ y $(12^{1/2}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-12^{1/2}, 12^{1/2})$
2. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$ y $(4, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(2, 4)$
3. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2^{-1/2})$ y $(0, 2^{-1/2})$; cóncava hacia abajo en $(-2^{-1/2}, 0)$ y $(2^{-1/2}, \infty)$
4. Cóncava hacia arriba en $(-1, 0)$ y $(0, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)$
5. Cóncava hacia arriba en $(e^{-3/2}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(0, e^{-3/2})$
6. Cóncava hacia arriba en $(-3^{1/2}, 0)$ y $(3^{1/2}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-\infty, -3^{1/2})$ y $(0, 3^{1/2})$
7. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -5/8)$ y $(1/2, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-5/8, 1/2)$
8. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -12^{1/2})$ y $(12^{1/2}, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-12^{1/2}, 12^{1/2})$
9. Cóncava hacia arriba en $(-1, \infty)$
10. Cóncava hacia arriba en $(-\infty, -3)$ y $(-1, \infty)$; cóncava hacia abajo en $(-3, -1)$

4.6. ESTUDIO COMPLETO DE CURVAS:

En la unidad I se analizaron gráficas de curvas, pero en ese momento no se tenían todas las herramientas para realizar trazos de curvas más precisos, por lo que teníamos que conformarnos con bosquejos aproximados. Ahora es posible hallar las asíntotas oblicuas y profundizar en el estudio de las asíntotas en general (con la ayuda de límites visto en la unidad II), los extremos de una función en un intervalo, o en todo su dominio, y otras características como su concavidad, por medio de las derivadas.

Para realizar el estudio completo de una curva es apropiado hallar los siguientes elementos:

- Extensión. (Dominio y Rango).
- Puntos de corte con los ejes de coordenadas.
- Simetría.
- Asíntotas.
- Puntos críticos.
- Gráfica.

También resulta útil crear una tabla donde se pueda resumir, por intervalos, las características de la curva.

Ejemplo 18: Realice el estudio completo de $x^2y - 2x^2 - y = 0$.

Solución

Hallamos todos los elementos:

- *Dominio:*

Expresamos la curva como $y = 2x^2 / (x^2-1)$

Luego, Dom: $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$

Todos estos elementos han sido estudiados anteriormente, por lo que no se hace énfasis en el procedimiento. Se recomienda repasar la teoría anterior si se tienen dudas.

- *Rango:*

$$x = \sqrt{\frac{y}{y-2}} \rightarrow \frac{y}{y-2} \geq 0 \rightarrow \text{Rgo}: (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$$

- *Puntos de corte con los ejes de coordenadas:* (0, 0)

- *Simetría:* con el eje y.

- *Asíntotas:*

A. V.: x = 1 ; x = -1

A. H.: y = 2

¿Cómo es la curva con respecto a las asíntotas?

Calcula los límites laterales y hacia $\pm\infty$.

- *Puntos críticos:*

$$y = \frac{2x^2}{x^2-1}$$

Hallamos la primera y segunda derivada, y los valores para los cuales no existe o es cero:

$$y' = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

y' = 0 si x = 0 ; y' no existe si x = 1, x = -1

$$y'' = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

y'' = 0 para ningún valor de x ; y'' no existe si x = 1 ; x = -1.

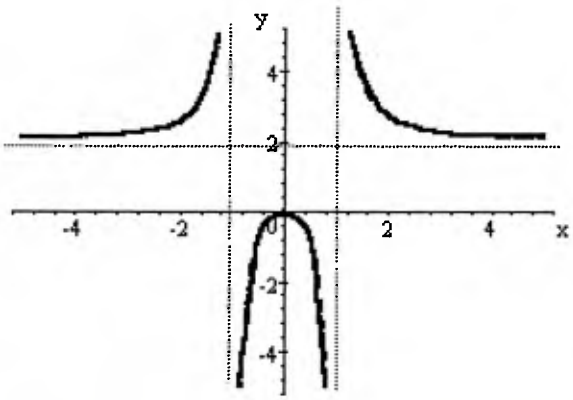
- Creamos una tabla con los intervalos limitados por los números críticos:

INTERVALO	X	Y	Y'	Y''	CONCLUSIONES
(-∞ , -1)	-2	8/3	+	+	Creciente, cóncava hacia arriba
	-1	No existe	No existe	No existe	Asíntota vertical
(-1, 0)	- ½	-3/2	+	-	Creciente, cóncava hacia abajo
	0	0	0	-	Máximo
(0, 1)	½	-3/2	-	-	Decreciente, cóncava hacia abajo
	1	No existe	No existe	No existe	Asíntota vertical
(1, ∞)	2	8/3	-	+	Decreciente, Cóncava hacia arriba

Es importante conocer qué sucede en los números críticos.

- Gráfica:

Ubica las asíntotas, puntos de corte, puntos críticos y toma en cuenta la extensión y simetría.



NOTA

Debe existir concordancia entre la gráfica, la tabla y los elementos hallados.

Ejemplo 19: Realice el estudio completo de $x^2y + y - x^2 + 1 = 0$

Solución:

- *Dominio:* $x \in \mathbf{R}$
- *Rango:* [-1, 1]
- *Puntos de corte:* (0, -1) ; (-1, 0) y (1, 0)
- *Simetría:* con el eje y.
- *Asíntotas:* y = 1
- *Puntos críticos:*

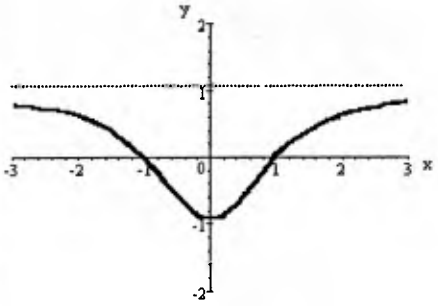
$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad , \quad y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad , \quad y'' = \frac{1 - 12x^2}{(x^2+1)^3}$$

Luego, $y' = 0$ si $x = 0$.

$y'' = 0$ si $x = 12^{-1/2}$, $x = -12^{-1/2}$

- *Tabla:*

INTERVALO	X	Y	Y'	Y''	CONCLUSIONES
$(-\infty, -1/\sqrt{12})$	-1	0	-	-	Decreciente. Cócava hacia abajo
	$1/\sqrt{12}$	-11/13	-	0	Decreciente Inflexión
$(-1/\sqrt{12}, 0)$	-1/10	-99/101	-	+	Decreciente Cóncava hacia arriba
	0	-1	0	+	Mínimo
$(0 , 1/\sqrt{12})$	1/10	-99/101	+	+	Creciente Cóncava hacia arriba
	$1/\sqrt{12}$	-11/13	+	0	Creciente Inflexión
$(1/\sqrt{12}, \infty)$	1	0	+	-	Creciente Cóncava hacia abajo



Identifica los puntos de inflexión y observa los cambios de concavidad.

Ejemplo 20: Realice el estudio completo de $y = 3x^5 - 20x^3 + 16$

Solución:

- *Dominio:* $x \in \mathbf{R}$
- *Rango:* $y \in \mathbf{R}$
- *Puntos de corte:* (0, 16) .

(Corta varias veces a eje x pero, en este ejemplo, no es posible hallar estos valores sin la ayuda de una calculadora. Tampoco es necesario).

- *Simetría:* no tiene.
- *Asíntotas:* no tiene.
- *Puntos críticos:*

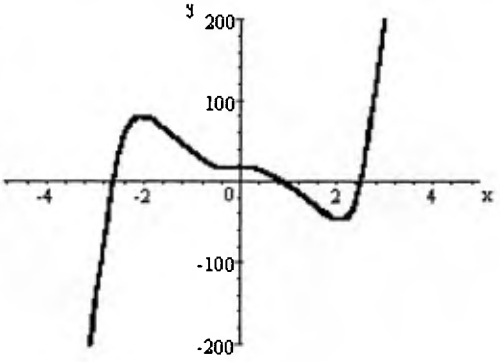
$y = 3x^5 - 20x^3 + 16$; $y' = 15x^4 - 60x^2$; $y'' = 60x^3 - 120x$

Luego, $y' = 0$ si $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$

$y'' = 0$ si $x = 0$, $x = -1{,}41$ $x = 1{,}41$

- *Tabla:*

INTERVALO	X	Y	Y'	Y''	CONCLUSIONES
(-∞, -2)	-3	-173	+	-	Creciente Cóncava hacia abajo
	-2	80	0	-	Máximo
(-2; -1, 41)	-1,5	60,7	-	-	Decreciente Cóncava hacia abajo
	-1,41	55,6	-	0	Decreciente Inflexión
(-1, 41; 0)	-1	33	-	+	Decreciente Cóncava hacia arriba
	0	16	0	0	Inflexión horizontal
(0 ; 1,41)	1	-1	-	-	Decreciente Cóncava hacia abajo
	1,41	-23,6	-	0	Decreciente Inflexión
(1,41; 2)	1,5	-28,7	-	+	Decreciente Cóncava hacia arriba
	2	-48	0	+	Mínimo
(2, ∞)	3	205	+	+	Creciente Cóncava hacia arriba



Ejemplo 21: Realice el estudio completo de $x^2y - 4y - 2x^3 = 0$

Solución

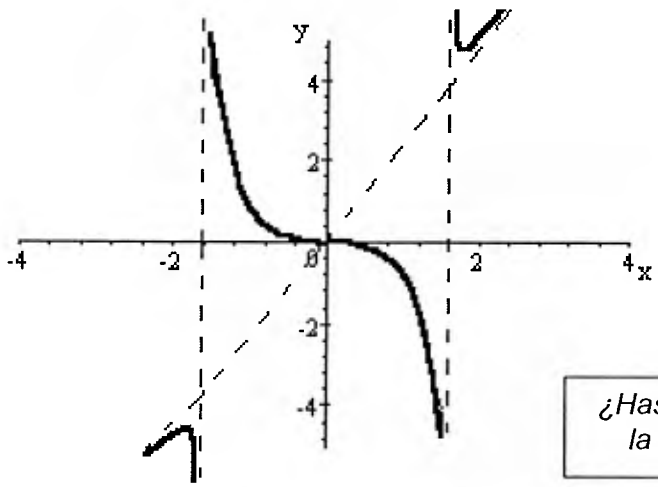
- *Dominio:* $x \in \mathbf{R} - \{-2, 2\}$.
- *Rango:* $y \in \mathbf{R}$
- *Puntos de corte:* (0, 0)
- *Simetría:* con el origen.
- *Asíntotas:* x = 2, x = -2, y = 2x.
- *Puntos críticos:*

$$y = \frac{2x^3}{x^2 - 4} \quad ; \quad y' = \frac{2x^4 - 24x^2}{(x^2 - 4)^2} \quad ; \quad y'' = \frac{16x^3 + 192x}{(x^2 - 4)^3}$$

Luego,	y' = 0	si	x = -3,46 ;	x = 3,46
	y' no existe	si	x = -2 ;	x = 2
	y'' = 0	si	x = 0	
	y'' no existe	si	x = -2 ;	x = 2

- *Tabla:*

INTERVALO	X	Y	Y'	Y''	CONCLUSIONES
(-∞; -3,46)	-4	-10,7	+	-	Creciente, cóncava hacia abajo
	-3,46	-10,4	0	-	Máximo
(-3,46; -2)	-3	-10,8	-	-	Decreciente, cóncava hacia abajo
	-2	No existe	No existe	No existe	Asíntota vertical
(-2, 0)	-1	0,7	-	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
	0	0	0	0	Inflexión horizontal
(0 ; 2)	1	-0,7	-	-	Decreciente, cóncava hacia abajo
	2	No existe	No existe	No existe	Asíntota vertical
(2 ; 3,46)	3	10,8	-	+	Decrreciente, cóncava hacia arriba
	3,46	10,4	0	+	Mínimo
(3,46; ∞)	4	10,7	+	+	Creciente, cóncava hacia arriba



¿Has notado que la curva corta a la asíntota oblicua en (0, 0)?

Ejemplo 22: Realice el estudio completo de la curva $y = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$

Solución:

- *Dominio:* $x \in \mathbf{R}$
- *Rango:* $y \in \mathbf{R}$
- *Puntos de cortes:* (0, 0); (125/8 , 0)
- *Simetría:* no tiene.
- *Asíntotas:* no tiene.
- *Puntos críticos:*

$y = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$; $y' = 10x^{2/3}/3 - 20x^{1/3}/3$; $y'' = 20x^{-2/3}/9 - 20x^{-1/3}/9$

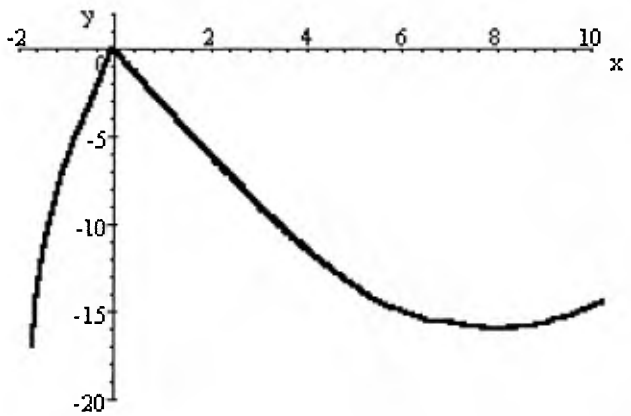
Luego, $y' = 0$ si $x = 0$; $x = 8$

$y'' = 0$ si $x = 1$

y'' no existe si $x = 0$

- *Tabla:*

INTERVALO	X	Y	Y'	Y''	CONCLUSIONES
(-∞, 0)	-1	-7	+	-	Creciente, cóncava hacia abajo
	0	0	0	No existe	Máximo
(0 , 1)	½	-1,4	-	-	Decreciente, cóncava hacia abajo
	1	-3	-	0	Decreciente, inflexión
(1 , 8)	2	-6,2	-	+	Decreciente, cóncava hacia arriba
	8	-16	0	+	Mínimo
(8, ∞)	27	81	+	+	Creciente, cóncava hacia arriba



¿Cómo es la concavidad en (0, 0)?.

Es decir, existe máximos y mínimo cuya concavidad no está definida.

EJERCICIOS PROPUESTOS IV.E.

Realice el estudio completo de las siguientes curvas:

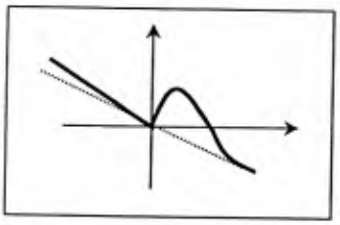
1. $y^3 = x^2(6 - x)$
2. $y^2 = x /(x - 2)$
3. $y = x.(x^2 + 7)^{-1/2}$
4. $x^3 - x^2y + 4 = 0$
5. $x^2 - xy + 1 = 0$
6. $y^2 = x.(x - 3)^2$
7. $y^2(x^2 - 4) - x^4 = 0$
8. $x^2y + y - 4 = 0$
9. $x^2y - 2x^3 + 8$
10. $y^2 = x^2 + 1$
11. $3x^2 + xy - 2x + 3 = 0$
12. $y = x^4 - 2x^2 + 1$

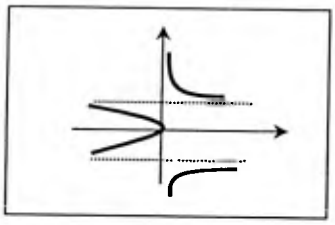
13. $y = 3x^4 - 6x^2$

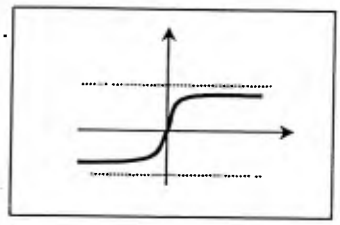
14. $y = 3x^{2/3} - 2x$

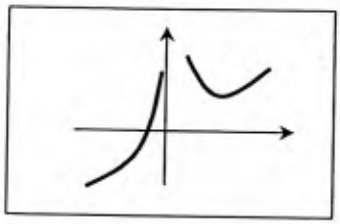
15. $y = x^3 / (2x^2 - 8)$

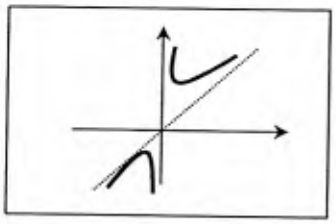
RESPUESTAS IV. E.

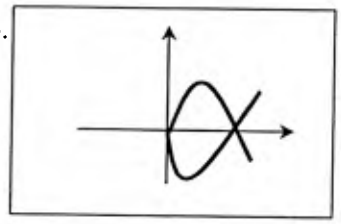
1.


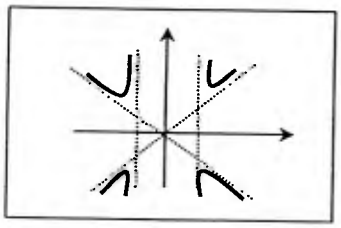
2.


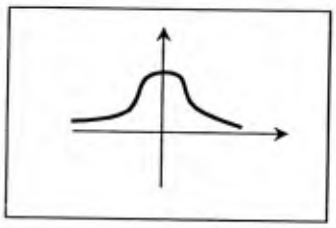
3.


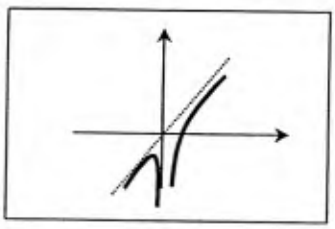
4.


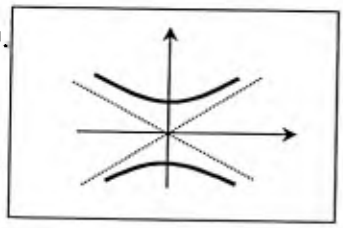
5.


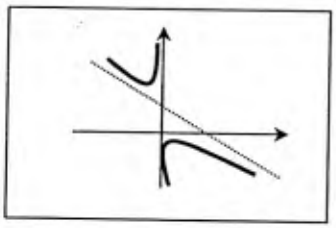
6.


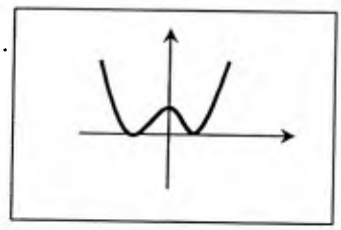
7.


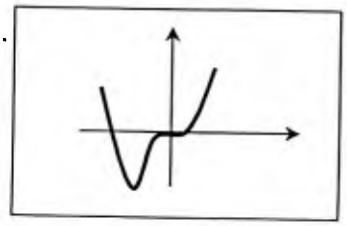
8.


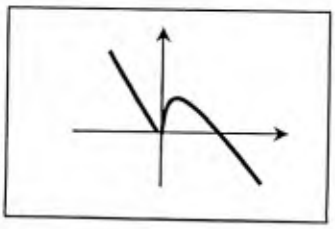
9.


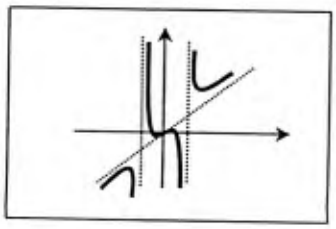
10.


11.


12.


13.


14.


15.


4.7. OPTIMIZACIÓN:

Una de las aplicaciones más importantes de las derivadas es el poder hallar los valores máximos y mínimos de una función. Esto es especialmente útil si la función tiene algún significado y se aplica a diversas como la física y la economía. No hay una serie de pasos eficaces para resolver todos los problemas de optimización, pero en general se sugiere:

Recuerde los problemas practicados en la unidad I

- Asignar nombres y símbolos a todos los datos e incógnitas. Realice un gráfico si es posible.
- Plantee la ecuación a optimizar. (A maximizar o minimizar).
- Determine el dominio de la ecuación sujeto a las condiciones del problema.
- Aplique los criterios de la primera y segunda derivada para hallar los valores máximos y / o mínimos. (Recuerde hallar el valor de la función en los extremos del intervalo. Quizás el valor máximo o mínimo esté allí).

Ejemplo 23

Encuentre dos números reales positivos cuyo producto sea 100 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

Solución:

Debemos asignar letras a nuestras incógnitas: x e y por ejemplo.

Luego, x e y tienen una condición: $x.y = 100$

Y la ecuación a minimizar:

$x^2 + y^2 = M$ Donde M debe ser el mínimo valor posible.

Pero ¿derivamos M en función de x e y?. A este nivel no se tienen las herramientas para ello. Entonces:

$M = x^2 + y^2$; e $y = 100/x$ ——— Condición inicial

Sustituimos la condición en la ecuación a optimizar, para expresarlo en función de una variable:

$$M = x^2 + 10000/ x^2$$

$M' = 2x - 20000 / x^3$; $M' = 0$ si $x = 10$ o $x = -10$

Hallamos la segunda derivada para saber que extremo relativo es:

$M'' = 2 + 60000 / x^4$; observa que $M'' > 0$ para cualquier valor de x.

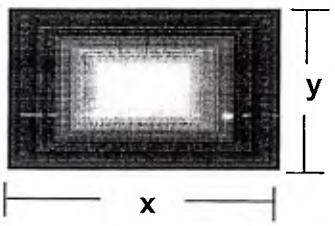
Entonces, $x = 10$; $y = 10$

¿Porqué se descarta la solución x = -10?

Ejemplo 24

Demuestre que el rectángulo de perímetro P que abarca el área máxima es un cuadrado.

Solución:



Aquí conviene realizar un gráfico, pero debemos *demostrar* que el resultado obtenido será un cuadrado.

CUIDADO

En las demostraciones no debe asumir el resultado pues se comete el error de asignar las variables de manera errónea, y no sería válida la demostración.

Por ejemplo, si dibujamos un cuadrado, en vez de considerar una variable para cada lado diferente, se asignaría una sola variable y ya no se justifica la demostración.

Conocemos el perímetro:

$$P = 2x + 2y$$

Debemos optimizar el área:

$$A = x.y; \qquad y = P/2 - x$$

Sustituyendo en el área:

$$A = x.P/2 - x^2$$

$$A' = P/2 - 2x \quad ; \qquad A' = 0 \text{ si } \quad x = P / 4$$

¿Qué sucede con la segunda derivada?

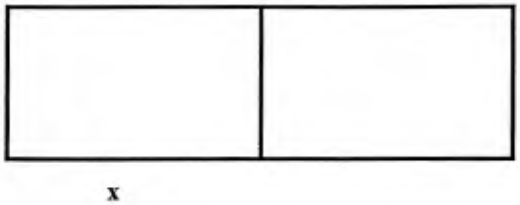
$$A'' = -2 \qquad A'' < 0 \text{ para cualquier valor de x.}$$

Entonces, $x = P/4$; $y = P/4$ *Son iguales, es un cuadrado*

Ejemplo 25

Un campesino quiere cercar su terreno y delimitar allí dos corrales, uno adyacente al otro, de 900 m^2 cada uno, como se muestra en la figura. ¿Cuánto debe medir x e y para utilizar la mínima cantidad de cerca posible?

Solución:



Los datos que se tienen se refiere a área y la función a optimizar es el perímetro.

Como son dos corrales iguales:

Área: $A = 2 \,.\, 900m^2 = 2x \,.\, y$

***2x** es la base del rectángulo completo, al sumar las dos áreas.*

Simplificando: $x.y = 900$

La función a optimizar es:

Debes sumar todos los lados

$$P = 4x + 3y$$

En función de una variable:

$$y = 900 / x \quad ; \quad P = 4x + 2700 / x$$

Derivamos:

$$P' = 4 - 2700 / x^2 \quad ; \quad P' = 0 \quad \text{si} \quad x = 15(3)^{1/2}$$

$$P'' = 5400 / x^3 \quad ; \quad P'' > 0 \text{ para cualquier valor de } x > 0.$$

Entonces, $x = 15\,(3)^{1/2}$, $y = 20.(3)^{1/2}$

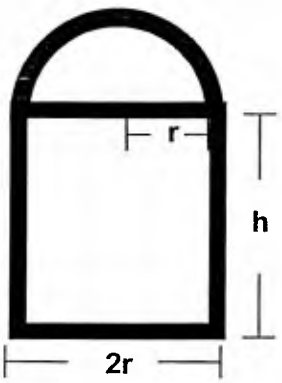
RECUERDA QUE...

X no puede tomar cualquier valor en todos los problemas. Si se refiere a distancia, siempre serán valores positivos.

Ejemplo 26

Una ventana gótica consta de un semicírculo montado sobre un rectángulo. Si el perímetro debe ser P, ¿cuánto debe medir la base de la ventana y la altura del rectángulo para que la entrada de luz sea máxima?

Solución



Es conveniente expresar todos los datos en función del radio del semicírculo y la altura del rectángulo.

Luego,

$P = 2h + 2r + \pi r$

$A = \pi r^2 / 2 + 2rh$

RECUERDA QUE:
En el círculo:
Perímetro: $P = 2\pi r$
Área: $A = \pi r^2$

Como se debe maximizar el área, lo expresamos en función de una variable:

$$h = P / 2 - (2 + \pi)\, r / 2$$

Luego,

$$A = \pi r^2 / 2 + Pr - (2 + \pi)\, r^2 = -\,(2 + \pi/2)\, r^2 + Pr$$

$$A' = -\,(4 + \pi)\, r + P \quad ; \quad A' = 0 \text{ si } r = P / (4 + \pi)$$

Verificamos que sea el valor que maximiza el área:

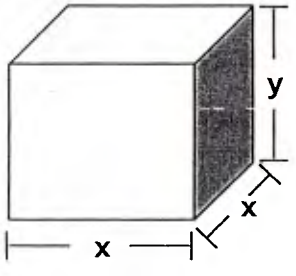
$$A'' = -\,4 - \pi < 0 \qquad \text{No depende de x.}$$

Entonces, $r = P / (4 + \pi)$; $h = P / (4 + \pi)$

Ejemplo 27

Demuestre que, de todos los paralelepípedos de base cuadrada y volumen conocido, el de menor superficie es el cubo.

Solución



El volumen: $V = x^2y$

Área: $A = 2x^2 + 4xy$

Luego, el área en función de una variable (x):

¿Obtendremos el mismo resultado si expresamos el área en función de la otra variable (y)?. Compruébelo.

$A = 2x^2 + 4V / x$

$A' = 4x - 4V / x^2$; $A' = 0$ si $x = V^{1/3}$

Si halla A'' observará que es un mínimo.

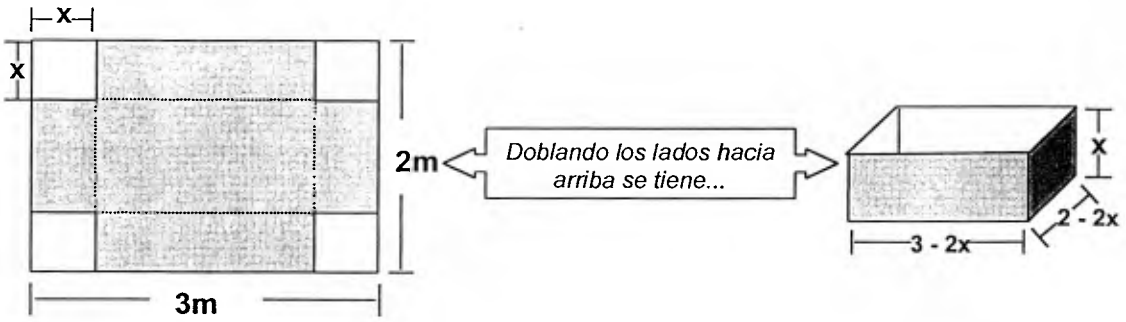
Entonces, $x = V^{1/3}$; $y = V^{1/3}$ *Es un CUBO*

Ejemplo 28

Se va a construir una caja abierta (sin tapa) con una pieza rectangular de cartón de dimensiones 2m y 3 m, cortando esquinas cuadradas iguales y doblando los lados hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de máximo volumen que se puede construir.

Solución

A diferencia del ejemplo anterior, debemos maximizar el volumen. Pero antes es necesario ilustrar el problema:



El volumen es $V = (3 - 2x)(2 - 2x)\,x = 4x^3 - 10x^2 + 6x$

$V' = 12x^2 - 20x + 6$; $V' = 0$ si $x_1 = (5 + 7^{1/2}) / 6$ ó $x_2 = (5 - 7^{1/2}) / 6$

Cómo se tienen dos posibles resultados, se debe verificar cual maximiza el volumen:

$V'' = 24x - 20$ $V'' > 0$ si $x_1 = (5 + 7^{1/2}) / 6$ *Mínimo*

$V'' < 0$ si $x_2 = (5 - 7^{1/2}) / 6$ *Máximo*

Luego, las dimensiones son:

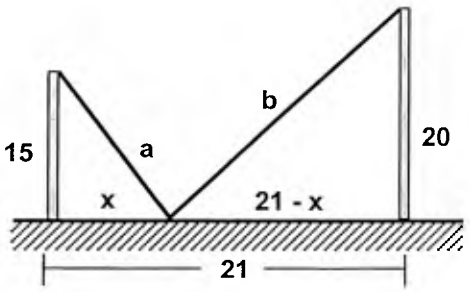
$(5 + 7^{1/2}) / 6$; $(4 + 7^{1/2}) / 3$; $(1 + 7^{1/2}) / 3$

Ejemplo 29

Dos postes de 15m y 20m de alto están separados por una distancia de 21m y se quiere unir sus extremos por un cable que debe tocar el suelo en un punto entre los postes. Ubique el punto en donde el cable debe tocar el piso para que su longitud sea mínima.

Solución

Realizamos un dibujo esquemático del problema:



Sea L la longitud a minimizar, entonces:

$$L = a + b$$

Recuerda el teorema de Pitágoras

$$L = (x^2 + 15^2)^{1/2} + [(21-x)^2+20^2]^{1/2}$$

Al derivar se obtiene:

$$L' = \frac{x}{\sqrt{x^2+15^2}} + \frac{x-21}{\sqrt{(21-x)^2+20^2}} \quad ; \qquad L' = 0 \text{ si } x = 9 \text{ ó } x = -63$$

Comprueba si realmente es el valor mínimo.

Se descarta la respuesta negativa, y la longitud se minimiza si el cable toca el suelo a 9 m del poste de 15m.

EJERCICIOS PROPUESTOS IV. F

1. Un fabricante de cajas debe fabricar una caja cerrada con una capacidad de 288 cm^3 y la base debe tener una longitud tres veces mayor a su anchura. Determine la caja de dimensiones más económicas suponiendo que el material utilizado para la base, tapa y lados tienen el mismo costo por cm^2.

2. Se desea descomponer el número 20 en dos partes tales que el producto del cuadrado de la parte menor por el cubo de la parte mayor sea máximo. ¿Cómo debe hacerse la descomposición?.

3. Se desea inscribir un rectángulo en una circunferencia de radio r, de tal manera que su área sea máxima. ¿Cuáles serán las dimensiones?

4. Un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 6 cm, gira alrededor de su cateto vertical dando como resultado un cono de revolución, (es decir, un cono recto). ¿Cuál debe ser la longitud del cateto horizontal para obtener el volumen máximo?.

5. ¿Cuál debe ser la superficie total de un tambor cilíndrico de metal, sin tapa, que debe contener 3140 m^3 de agua, para que el gasto en material sea mínimo?

6. En los laboratorios se hacen filtros cónicos plegando un papel de filtro circular. Si el radio es R, calcule la altura del cono que maximiza en volumen.

7. Una página se escribe con un texto de área impresa de 54 cm^2. Se dejan márgenes de 2 cm en la parte superior e inferior de la hoja, y de 3 cm a la izquierda y derecha. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja más económica?.

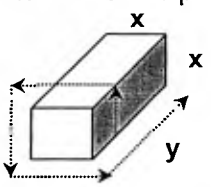
8. ¿Cómo debe cortarse un alambre de longitud L para que un trozo forme un cuadrado y el otro una circunferencia, y la suma de las áreas de ambos sea máxima?.

9. En una hacienda existe un muro de 100 m, y parte de él se va a usar para formar un corral con 260 m adicionales de cerca para los otros tres lados. Hallar las dimensiones para lograr el área máxima. ¿Cuál es esta área?.

10. Un ganadero desea cercar un prado rectangular adyacente al río. El prado debe abarcar 180000 m^2. ¿Qué dimensiones debe tener el prado para utilizar la menor cantidad de cerca posible, considerando innecesario cercar el lado del río?

11. Un triángulo está formado por los semiejes positivos y una recta que pasa por el punto (2, 3). Hallar los vértice de modo que su área sea máxima.

12. Un paquete enviado por correo puede tener un perímetro a lo largo de la línea de trazos, según la figura, de 108 cm. Hallar las dimensiones del paquete de máximo volumen, si la sección transversal es un cuadrado.



RESPUESTAS IV.F.

1. 4 , 6 , 12	2. 12 y 8	3. $2r^2$
4. $2(6)^{1/2}$	5. 942 m^2	6. $r / 3^{1/2}$
7. 15cm x 10cm	8. $4L / (4 + \pi)$; $\pi L / (4 + \pi)$	
9. 8000 m^2	10. 6m x 3m	11. (0,0) , (4,0) , (0,6)
12. 18cm x 18cm x 36 cm		

4.8. APLICACIONES A LA CIENCIA ECONÓMICA

❑ Más sobre optimización

Para la economía es ideal obtener resultados óptimos de los modelos económicos. Es decir, los comerciantes buscan el beneficio máximo, los fabricantes buscan el costo mínimo, etc.

El uso del cálculo resulta fundamental para obtener estos valores óptimos y aún más, el cálculo es imprescindible para formalizar el estudio del análisis marginal (que se considerará más adelante) y que constituye un aspecto importante de la teoría microeconómica.

NOTA

Existen diversos modelos funcionales y no es posible dar un ejemplo de cada uno, por ello a continuación solo se presenta una muestra para aclarar, más que el modelo, el proceso de resolución del problema. (Si considera necesario, repasa los problemas de las unidades anteriores)

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de optimización de funciones aplicadas a la economía. Básicamente se requiere hallar la función a optimizar y hallar las derivadas correspondientes para obtener los extremos relativos.

Ejemplo 30 *(Problema de introducción de ésta unidad)*

La Empresa C.K.L. lanzó al mercado una nueva marca de jugos con dos sabores, en botellas de 2 litros. La gerencia estima que la demanda de su producto varía con su precio, siendo la función de demanda semanal $q = 180000 - 250p$

donde q es el número de unidades demandadas y p el precio en Bs. El costo total de producir q unidades se estima con la función:

$$C = 350000 + 300q + 0{,}001q^2$$

¿Qué cantidad se debe producir semanalmente para maximizar las ganancias?. ¿Cuál será el precio unitario y la ganancia máxima?.

Solución

Se requiere q para maximizar la utilidad semanal. Entonces, la función a maximizar es:

$$\text{Utilidad} = \text{Ingreso} - \text{Costo}$$

$$U = p.q - (350000 + 300q + 0{,}001q^2)$$

La función de demanda es $q = 180000 - 250p$

Luego: $p = 720 - 0{,}004q$

Se sustituye: $U = \underbrace{720q - 0{,}004q^2}_{p.q} - \underbrace{350000 - 300q - 0{,}001q^2}_{costo}$

Obtenida la función a optimizar, derivamos para hallar los puntos críticos:

$$U = -0{,}005q^2 + 420q - 350000$$

$$U' = -0{,}01q + 420 \quad ; \quad U' = 0 \text{ si } q = 42000$$

Es decir, *se deben producir semanalmente 42000 unidades para obtener la utilidad máxima.*

El precio de cada uno: $p = 720 - 0{,}004.(42000) = 552.$

Bs. 552 cada unidad.

Y la utilidad semanal será: $U = -0{,}005(42000)^2 + 420.(42000) - 350000$

U = Bs. 8470000 por semana.

Ejemplo 31

La compañía Inversiones A.C.R. es la representante, en Venezuela, de la motocicleta Excálibur de 250 cc. La gerencia estima que la demanda de estas motocicletas es de 10000 unidades al año y que se venderán en una razón uniforme durante todo el año. El costo de cada pedido de embarque es de $10000 y el costo anual de almacenamiento de cada motocicleta es de $ 200.

La gerencia tiene el siguiente problema: si ordena demasiadas unidades se incrementan innecesariamente los costos de almacenamiento. Pero si se hacen pedidos pequeños con frecuencia (para no almacenar), se incrementa los costos por realización de pedidos. ¿De qué tamaño debe ser cada pedido y con qué frecuencia

deben realizarse de modo que los costos de surtido y almacenamiento sean mínimos?.

Solución:

Identificamos los datos:

Demanda = 10000 unidades al año

Costo de cada pedido (Cp) = $10000

Costo anual por almacenamiento (Ca) = $200 cada unidad.

x = número de unidades por pedido

La función a optimizar es el costo:

Costo total = Costo por pedidos + Costo por almacenamiento

Analizando cada costo:

Costo por pedidos = Cp . (Número de pedidos al año)

Costo por pedidos = 10000 (10000 / x)

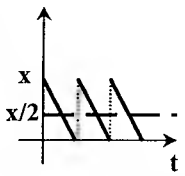
Número de pedidos al año es la cantidad demandada en el año entre el número de unidades por pedido.
Es razonable, ¿no?

Costo por almacenamiento = Ca . (x/2)

Costo por almacenamiento = 200. (x / 2)

Si el inventario es x el nivel promedio es x/2.

En la gráfica:



Como la venta es uniforme, al terminar cada lote llega uno nuevo.

(Esto es demuestra con el cálculo integral)

Luego,

$$C = 100{,}000{,}000 / x + 100\,x$$

$$C' = -100{,}000{,}000 / x^2 + 100 \quad ; \qquad C' = 0 \text{ si } x = 1000 \text{ ó } x = -1000$$

Comprobamos que x = 1000 es el valor que minimiza el costo:

$$C'' = 20{,}000{,}000 / x^3 \quad ; \qquad C'' > 0 \text{ para todo } x > 0$$

¿Porqué descartamos x = -1000?

Entonces, debe realizar 10 pedidos de 1000 unidades cada uno.

Ejemplo 32

Los gastos generales mensuales de fabricar mesas de plástico para exteriores, ascienden a Bs. 60.000.000, y el costo de material es de Bs.1000 por unidad. Si se fabrican al mes no mas de 450.000 unidades, el costo de la mano de

obra es de Bs. 400 por unidad, pero por cada unidad extra, el fabricante tiene que pagar una unidad y media por mano de obra. El fabricante puede vender 400000 unidades al mes a Bs. 7000 por unidad y estima que las ventas mensuales aumentarían en 10000 unidades por cada reducción del precio de Bs. 100. Hallar:

a) La función de costo total

b) La función de demanda

c) El número de unidades que se debe producir para obtener la máxima utilidad.

Solución

a) Si x es el número de unidades, el costo total es:

$$C(x) = \underbrace{60000000}_{\text{Gasto general mensual: no depende del nivel de producción}} + \underbrace{1000x}_{\text{Costo de material por unidad}} + \underbrace{\text{Costo por mano de obra}}_{\text{Este varía según el nivel de producción. Esto nos lleva a una función por partes.}}$$

Luego:

$$C(x) = \begin{cases} 60000000 + 1000x + 400x & \text{si} \quad x \leq 450000 \\ 60000000 + 1000x + 600x & \text{si} \quad x > 450000 \end{cases}$$

400 + ½ 400 = unidad y media

La función costo entonces queda como:

$$C(x) = \begin{cases} 60000000 + 1400x & \text{si} \quad x \leq 450000 \\ 60000000 + 1600x & \text{si} \quad x > 450000 \end{cases}$$

b) Se requiere la función de demanda:

Se sabe que $x = 400000$ unidades cuando $p = \text{Bs. } 7000$

$\Delta x = 10000$ cuando $\Delta p = -100$

Luego:

$$p - 7000 = -100 / 10000 .(x - 400000)$$

$$p = -0{,}01x + 11000$$

Recuerda que...

La función de demanda es de pendiente negativa.

c) La función a optimizar es la de utilidad:

$$U = I - C \qquad e \qquad I = p.x = -0{,}01x^2 + 11000x$$

Entonces:

$$U(x) = \begin{cases} -0{,}01x^2 + 11000x - 60000000 - 1400x & \text{si} \quad x \leq 450000 \\ -0{,}01x^2 + 11000x - 60000000 - 1600x & \text{si} \quad x > 450000 \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} -0{,}01x^2 + 9600x - 60000000 & \text{si} \quad x \leq 450000 \\ -0{,}01x^2 + 9400x - 600000000 & \text{si} \quad x > 450000 \end{cases}$$

Para hallar el valor máximo, derivamos:

Realice la gráfica de la función utilidad y observe el resultado.

En $x \leq 450000$ $\quad U'(x) = -0{,}02x + 9600$; $U' = 0$ si $x = 480000$

En $x > 450000$ $\quad U'(x) = -0{,}02x + 9400$; $U' = 0$ si $x = 470000$

Descartamos $x = 480000$ por estar fuera del dominio. Entonces *debe producir 470000 unidades mensuales para maximizar su utilidad.*

Ejemplo 33

Suponga que en un monopolio la ecuación de demanda de cierta mercancía importada viene dada por $p = 4 - 0{,}0002x$ donde x es el número de unidades importadas diariamente y p dólares es el precio de cada uno. Si el costo total por importar la mercancía es $(600 + 3x)$ y la utilidad debe ser máxima, determine:

a) Número de unidades que maximiza la utilidad.

b) Precio unitario

c) Utilidad máxima

d) Si el gobierno exige un impuesto de \$0,20 por cada unidad importada, ¿cuál sería la utilidad máxima?, ¿y el precio por unidad?

Solución

a) La función utilidad es:

$U = \text{Ingreso} - \text{Costo} = (4 - 0{,}0002x).x - 600 - 3x = -0{,}0002x^2 + x - 600$

Hallamos los números críticos:

$$U' = -0{,}0004x + 1 \quad ; \quad U' = 0 \text{ si } x = 2500 \text{ unidades}$$

Verificamos que x = 2500 unidades maximiza la utilidad:

$$U'' = -0{,}0004 \quad ; \quad U'' < 0 \text{ para cualquier valor de } x.$$

b) El precio unitario es:

$$p = 4 - 0{,}0002(2500) = 3{,}5 \quad ; \quad \$3{,}5 \text{ cada unidad}$$

c) La utilidad obtenida es:

$$U = -0{,}0002(2500)^2 + 2500 - 600 = 650 \quad ; \quad \$650 \text{ es la utilidad máxima}$$

c) Si se considera un impuesto de $0,20 por unidad importada la función utilidad cambia:

$$U = I - C = (4 - 0{,}0002x)\,x - (600 + 3x) - 0{,}20x$$

Se resta de las utilidades,
¿por qué?

Luego,

$$U = -0{,}0002x^2 + 0{,}80x - 600$$

$$U' = -0{,}0004x + 0{,}80 \quad ; \qquad U' = 0 \text{ si } x = 2000 \text{ unidades}$$

Calculamos la utilidad máxima y el precio unitario:

U = \$200 ; p = \$3,6

¿Ha notado que con el impuesto disminuye el número de unidades?.

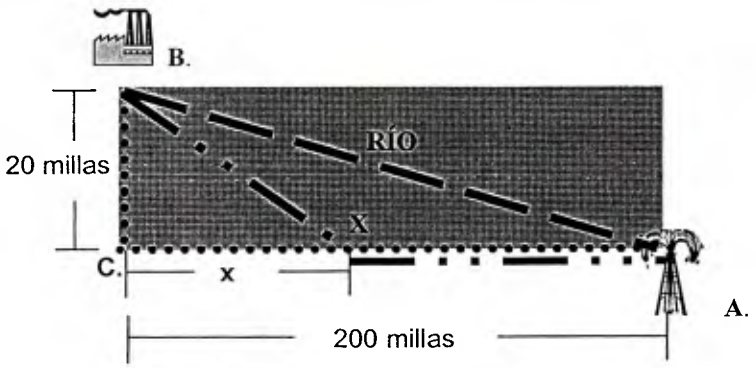
¿Qué otras observaciones podría realizarse con respecto a la utilidad y el precio?. Analice los resultados.

Ejemplo 34

Una compañía petrolera planea construir un oleoducto para llevar petróleo crudo desde un pozo hasta un punto donde se embarcarán en tanques y serán transportados a las refinerías. En la figura se presentan las posiciones relativas al sitio de perforación A y el punto de destino B. Los puntos A y B se hallan en lados opuestos de un río que tiene 20 millas de ancho. El punto C se encuentra a 200 millas al sur de A a lo largo del río. Los costos de construcción son de Bs. 500000 por milla en tierra y Bs. 1000000 por milla bajo el agua. ¿Cuál sería la ruta que reduce el costo de construcción al mínimo?. ¿Cuál es ese costo?.

Solución

En la figura se puede observar tres rutas posibles:



1. En línea recta de A a B:
2. De A a C, luego C a B:
3. De A hasta un punto X, luego de X a B:

Si tomamos la ruta 1, todo el oleoducto debe pasar por debajo del agua. Si bien es la ruta más corta, no necesariamente es la más económica, ya que el costo por debajo del agua es mucho mayor que por tierra.

La ruta 2 utiliza la menor distancia posible por debajo del agua pero es la mayor por tierra, y probablemente no sea la más económica, aunque no deja de ser una opción.

La ruta 3 consiste en ubicar un punto X ideal que minimice el costo. Para hallar este punto es necesario hallar Costo total en función de la distancia x.

$$C(x) = 1000000\underbrace{\sqrt{x^2+400}}_{\text{Distancia de X a B}} + 500000\underbrace{(200-x)}_{\text{Distancia de A a X}}$$

Derivamos:

$$C'(x) = \frac{1000000x}{\sqrt{x^2 + 400}} - 500000\,; \qquad C'(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = 11{,}54 \text{ millas}$$

Desde el punto A : 200 – x = 188,46 millas.

Es decir, debe pasar por 188,46 millas por tierra desde A, y luego por agua hasta B.

El Costo del oleoducto resulta ser:

$$C(x) = 1000000\,[\,(11{,}46)^2 + 400]^{1/2} + 500000.\,(188{,}46)$$

$$C = \text{Bs. } 117320508$$

EJERCICIOS PROPUESTOS IV. G

1. Un club de excursionistas de la universidad está organizando un viaje a una isla del Caribe. El precio del viaje es de $ 100 si 50 o menos personas es inscriben para la excursión. Por cada excursionista después de 50, el precio que se cobra a todos disminuye en $1. Por ejemplo, si se inscriben 51 personas, cada persona pagará $99. Sea x el número de excursionistas después de 50:

   a) Determine la función que expresa el precio por persona *p* en función de x.

b) En la parte (a) ¿existe restricción en el dominio?.

c) Formule la función I = h(x) que exprese el ingreso total en función de x.

d) ¿Cuántos excursionistas se deben inscribir para obtener el ingreso máximo?

e) ¿Cuál es el ingreso máximo?

f) ¿Qué precio por boleto produce el ingreso máximo?

g) ¿Podría el club generar más ingresos aceptando 50 o menos personas?

2. El departamento de policía PTN compra nuevos carros de patrulla a $22000. El departamento estima que los costos promedio de capital y operación son una función de x, el número de millas que recorrerá el carro de patrulla. El valor de recuperación de una unidad (en dólares) se expresa por medio de la función $S(x)=19000 - 0{,}12x$. El costo promedio de operación, expresado en dólares por milla, se estima mediante la función $C(x) = 0{,}0000006x + 0{,}18$.

a) Determine cuántas millas deberá recorrer el carro de patrullas antes de su sustitución si el objetivo es minimizar los costos promedio de capital y de operación por milla.

b) ¿Cuál es el costo mínimo por milla?

c) ¿Cuál se espera que sea el valor de recuperación?

3. Un fabricante de raquetas de tenis ha determinado que el costo total (en miles de Bs.) por la producción de x raquetas por día está dado por $C(x) = 400 + 4x + 0{,}0001x^2$. Cada raqueta debe venderse a un precio de p (en miles de Bs.) donde p

se relaciona con x mediante la ecuación de demanda p = 10 – 0,0004x. Si es posible vender todas las raquetas fabricadas, ¿cuál es el nivel diario de producción que rinde la ganancia máxima para el fabricante?

4. El valor presente de una propiedad adquirida por un inversionista está dado por la función $P(t) = 80000e^{\sqrt{t}/2-0,09t}$, $0 \leq t \leq 8$, P(t) se mide en dólares y t es el tiempo en años desde el presente. Determine el tiempo óptimo para que el inversionista venda la propiedad. ¿Cuál es el valor presente óptimo de la propiedad?

5. La compañía C.K.L. produce y vende mermeladas marca Rik. Se espera embotellar y vender 200000 frascos con 500cc de mermelada. La compañía solicita los frascos a la compañía A.C.R. quien los importa y distribuye. El costo por solicitar un embarque de frascos es de Bs. 20000 y el costo de almacenamiento de cada frasco vacío por un año es de Bs.40. Determine cuantos pedidos debe Realizar C.K.L. y cuántos frascos deben llegar en cada embarque si hay que minimizar los costos de surtido y almacenamiento. (Suponga que cada embarque se utiliza por completo antes de llegar el siguiente)

6. Las autoridades de tránsito de una ciudad operan con una línea de metro subterránea que atraviesa toda la ciudad de este a oeste. En la actualidad un promedio de 6000 pasajeros utilizan el metro entre las 6:00 a.m y las 8:00 a.m. diariamente, pagando una tarifa de Bs. 300 por viaje. Las autoridades están pensando en un aumento de tarifa a Bs.350 para obtener mayores ingresos y

solicitan un estudio a una empresa consultora. Según esta empresa, por cada aumento de Bs.50 en la tarifa, la cantidad de pasajeros en ese horario se reducirá a 1000 por día. ¿Cuál sería entonces la recomendación de la empresa?

7. Se construirá una cisterna con capacidad de 324 m^3 de agua. Deberá tener una base cuadrada con cuatro lados verticales, todos fabricados con concreto, y una tapa superior de acero. Si la unidad de área de acero cuesta el doble que la de concreto, determine las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo total de construcción.

8. La función de costo total de una fábrica está dada por $C(x)=10 + 28x - 5x^2 + x^3/3$ y la demanda del producto está dada por $p = 2750 - 5x$, donde p y x denotan el precio en dólares y la cantidad respectiva se grava con $222 de impuesto para cada unidad producida, que el fabricante añade a su costo. Determine el nivel de producción (después de creado el impuesto) necesario para maximizar las utilidades. Muestre que la producción después del impuesto es menor que la producción antes del impuesto que maximiza las utilidades.

9. Un material se demanda a una tasa de 10000 unidades por año; el precio al costo del material es de $2 por unidad; el costo de volver a llenar el almacén del material por orden, sin importar el tamaño de la orden (x) es de $40 por orden, el costo de almacenar el material por un año es del 10% del valor de las existencias

(x/2). C es el costo anual de acomodar y tener almacenado el material. Encuentre el tamaño económico del lote.

10. Un banco quiere recortar sus costos laborales reduciendo el número de sus cajeros pero espera una pérdida de negocios debido al descontento de los clientes por el tiempo de espera. Supongamos que el salario de los cajeros es de $80 diarios y la pérdida de utilidad por tener únicamente n cajeros es 5000 / (n + 1) dólares diarios. Determine el valor de n que minimiza la suma de sus pérdidas más el costo del salario.

11. La cantidad x de un artículo que puede venderse al mes a un precio p está dada por $x = 100(5 - p)$. La cantidad que los proveedores ofrecerán a un precio p_1 es $x_1=200(p_1 - 1)$. Si existe un impuesto t por cada artículo (de modo que $p_1 = p - t$), determine la cantidad x que se vende al mes si el mercado está en equilibrio. Encuentre el valor de t que da el máximo impuesto total por mes al gobierno.

12. Una compañía de electricidad requiere pasar un cableado de alta tensión desde un centro de investigaciones marinas, situado mar adentro, hasta una central que se construye en la costa cercana. La distancia del centro de investigación al punto más cercano P sobre la costa es de 20 km y la distancia a lo largo de la costa de P hasta la central es de 50 km. El costo por km bajo el agua es tres veces mayor que por tierra. ¿Qué distancia debe pasar el cable por tierra para minimizar los costos?

13. Un minorista en computadoras vende 30000 modelos personales anualmente. El costo de cada nuevo pedido es de $1200 sin importar su tamaño y el costo de almacenaje de cada computadora es de $2 anuales. Más aún, solamente se puede almacenar 5000 computadoras a la vez. ¿Cuántas veces al año debe reordenar para minimizar su costo total?.

14. Para reunir dinero, el club Pequeño Líbano organizó una campaña para recoger botellas de vidrio para reciclar y destinar los fondos a un hogar para niños abandonados. Como el proyecto comenzó hace 80 días, el club ha recolectado 24000 kg de vidrio. La compañía ofrece en la actualidad Bs1 por kg, pero como las botellas se acumulan con mayor rapidez de lo que puede reciclarse, la compañía planea reducir en Bs. 1 cada día el precio que pagará por 100Kg de vidrio. Suponga que el club puede continuar la recolección de botellas al mismo ritmo y que los costos de transporte impiden que la compañía haga más de un viaje. ¿Cuál es el momento más indicado para que el club culmine su proyecto y entregue las botellas?

15. La empresa C.K.L. ha recibido un pedido para fabricar 10000 sillas de plástico para un colegio que lo utilizará en su auditorio. La empresa dispone de 15 máquinas, cada una diseñada para producir 8 sillas por hora. El costo para poner en funcionamiento cada máquina es de Bs. 20000, una vez funcionando, sólo requiere de un supervisor que vigile el proceso de fabricación que es automatizado, a este supervisor se le paga Bs. 1600 por hora.

a) ¿Cuántas máquinas serán necesarias utilizar para mantener un costo mínimo?

b) ¿Cuánto ganará el supervisor en este proceso si se usa el número óptimo de máquinas?

c) ¿Cuál es el costo de poner en marcha el número óptimo de máquinas?

16. La fábrica de lámparas Luz Bella vende lámparas a un precio de $6 cada una. A éste precio, los consumidores han comprado 3000 lámparas por mes. La fábrica desea aumentar el precio y estima que por cada incremento de $1 en el precio, venderá 1000 lámparas menos cada mes. Si el costo de producir las lámparas es de $4 cada uno, ¿a qué precio deberá vender las lámparas para generar la máxima utilidad posible?.

17. La empresa C.K.L. ha recibido un pedido de un organismo internacional, para fabricar 400000 medallas conmemorativas del aniversario de la llegada del hombre a la Luna. La empresa posee 20 máquinas diseñadas para producir 200 medallas por hora, el costo de poner en marcha es de $80 por máquina, y el costo total de operación es de $5,76 por hora. ¿Cuántas máquinas se necesitarán para minimizar los costos de producción?

18. Inversiones A.C.R. produce dos tipos de carritos de juguete a control remoto, uno costoso (Súper Todo Terreno 4x4) y uno más económico (Deportivo) en unidades de y cientos y x cientos respectivamente. Se conoce que los niveles de

producción x e y están relacionados de manera que $y = (82 - 10x) / (10 - x)$ para $0 \leq x \leq 8$ y que la fábrica recibe por la venta del Súper Todo Terreno 4x4 el doble de lo que recibe por la venta del Deportivo. Hallar el nivel de producción de ambos juguetes que maximiza el ingreso, suponiendo que se vende toda la producción.

19. Una empresa competitiva recibe un precio p por cada unidad de su producción, paga un precio w por cada unidad de su única materia prima, y tiene unos costos fijos de Cf. Su producción cuando usa x unidades de materia prima es $f(x) = x^{1/2}$:

a) Hallar la función ingreso, costo total y beneficio de la empresa.
b) ¿Cuál sería el nivel de producción que maximiza el beneficio?
c) Compruebe si realmente el beneficio se hace máximo según b)
d) ¿Cómo cambiarían los resultados si $f(x) = x^2$?

20. La compañía Inversiones AloK-2 fabrica abrigos a un costo mensual de $C(x)=200+4x-0{,}01x^2$ y los vende al precio de $p(x) = 10 - 0{,}0001x$ dólares, siendo x el número de abrigos fabricados cada mes. En estas condiciones su producción máxima es de 300 unidades, pero la demanda para exportación ha aumentado por lo que decide invertir más recursos para aumentar el nivel de producción a 450 unidades al mes. Con esta cantidad, su costo cambia a $C(x) = 800 + 3x - 0{,}01x^2$ para $300 < x \leq 450$. ¿Cuál sería el nivel de producción que maximiza la utilidad?

RESPUESTAS IV.G.

1. (a) $p = 100 - x$, (b) $0 \leq x \leq 100$, (c) $I = 5000 + 50x - x^2$, (d) 75, (e) \$5625, (f) \$75, (g) no;

2. (a) 70710,68 millas, (b) \$0,385, (c) \$10514,72;

3. 6000 raquetas;

4. t = 7,72 años; \$160,208;

5. 45; 44,721;

6. No aumentar

7. 6m x 6m x 9m;

8. X = 50;

9. X = 2000;

10. n = 7 ;

11. X = 200(4 – t)/3; t = 2;

12. X = 42,9 km

13. 6 veces;

14. Dentro de 10 días;

15.(a)10 máquinas, (b) Bs. 200000 , (c) Bs. 200000.

16. \$6,50 por lámpara;

17. 12 máquinas;

18. 400 Deportivo y 700 Súper Todo Terreno ;

19. (a) $I = px^{1/2}$, $C = wx + Cf$, $B = px^{1/2} - wx - Cf$, (b) $x = p^2/4w^2$, (c) $B'' < 0$, (d) No tiene máximo.

20. $U(x) = \begin{cases} 0{,}009x^2 + 6x - 200 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 300 \\ 0{,}009x^2 + 7x - 800 & \text{si} \quad 300 \leq x \leq 450 \end{cases}$

Utilidad máxima: U(450) = \$4172,50

- **Análisis Marginal**

En la unidad III se analizó la definición de la derivada, básicamente, como una pendiente entre dos puntos de la curva que se hacen muy próximos.

Es decir, si $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, podemos interpretar a la derivada como una medida de la variación que afecta a *y* por una pequeña variación en *x*. Por lo que se conoce también como *tasa de cambio* o *razón de cambio*.

Entonces:

Razón de cambio : f'(x) = dy / dx

La derivada vista como una razón de cambio tiene infinidad de aplicaciones en diversas ciencias como la física y la ciencia económica. En economía, la razón de cambio nos permite medir, de manera aproximada, como varía una función por un pequeño cambio en su variable.

El ***ANALISIS MARGINAL*** es el estudio de la razón de cambio de cantidades económicas, cuando varía en una unidad.

Veamos entonces el significado de los siguientes términos:

- *Costo marginal*: es el costo extra ocasionado al producir una unidad adicional.

  Es decir,

$$C'(q) \approx C(q + 1) - C(q) = \Delta C$$

Es *aproximado* ya que al derivar estamos considerando un $\Delta q \rightarrow 0$, y según la definición de la función marginal, $\Delta q = 1$

- *Ingreso Marginal*: es el ingreso extra que se obtiene al vender una unidad adicional.

$$I'(q) \approx I(q+1) - I(q) = \Delta I$$

- *Beneficio Marginal:* es el beneficio extra logrado al vender una unidad adicional.

$$B'(q) \approx B(q + 1) - B(q) = \Delta B$$

Ejemplo 36

La compañía C.K.L. produce televisores de 19". Suponga que su costo semanal, en dólares, es $C(x) = 8000 + 200x - 0{,}2x^2$, para una producción máxima de 400 televisores por semana.

a) ¿Cuál es la razón de cambio del costo total con respecto a x, cuando x=250?

b) ¿Cuál es el costo real de la producción del televisor 251?

Solución

a) La razón de cambio viene dada por la derivada de C(x):

$$C'(x) = 200 - 0{,}4x$$

Si $x = 250$; $C'(250) = 200 - 0{,}4(250) = 100$; $C' = \$100$

b) El costo real de producir el televisor 251 viene dado por

$$C(251) - C(250) =$$

$$8000 + 200(251) - 0.2(251)^2 - 8000 - 200(250) + 0{,}2(250)^2 = 99{,}8$$

Luego, $C(251) - C(250) = \$99{,}8$

Observa que la diferencia entre el costo real y el costo marginal es de apenas \$0,2 ; por lo que bien vale la pena utilizar la razón de cambio para este análisis.

¿Por qué habrá una pequeña diferencia entre el costo marginal y el costo real?. Analice.

NOTA

¿Ya observaste que el adjetivo *marginal* para los economistas, es sinónimo de *derivada de?*

Además es útil conocer el siguiente término:

- *Costo Promedio:* es el costo medio por unidad.

$$\overline{C(x)} = C(x) / x$$

- *Ingreso Promedio:* es el ingreso medio por unidad.

$$\overline{I(x)} = I(x) / x$$

Ejemplo 36

La compañía C.K.L. mencionada en el ejemplo 35, decidió aumentar su producción por lo que su costo total por semana cambia a

$$C(x) = 5000 + 40x - 0{,}08x^2 + 0{,}0001x^3,$$

$C(x) = 50000 + 100x + 0{,}2x^2$

se desea averiguar:

a) ¿En qué nivel de producción el costo medio es mínimo?

b) ¿En qué nivel de producción el costo medio es igual al costo marginal?

Solución

a) Hallamos el costo medio:

$$\overline{C(x)} = 50000 / x + 100 + 0{,}2x$$

Luego,

$$\overline{C'(x)} = -50000 / x^2 + 0{,}2 \quad ; \quad \overline{C'(x)} = 0 \quad \text{si} \quad x = 500$$

El nivel de producción que minimiza el costo promedio por unidad es 500.

b) Para hallar el nivel de producción donde el costo medio es igual al marginal:

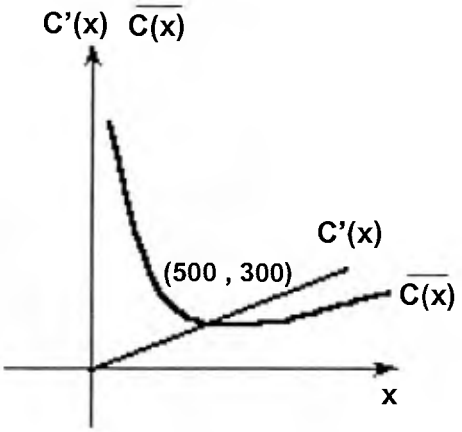
$$\overline{C(x)} = C'(x)$$

$$50000 / x + 100 + 0{,}2x = 100 + 0{,}4x$$

$$x = 500$$

¿No te parece curioso que el nivel de producción común para el costo medio y marginal sea el que minimice el costo medio?. ¿Será casualidad?

Si ubicamos en los mismos ejes el costo medio y el costo marginal:



Para x = 500, el costo medio es mínimo, y justo allí, el costo marginal corta a la curva de costo medio.

Entonces,

El costo medio es mínimo en el mismo nivel de producción donde el costo medio es igual al costo marginal.

¿Esta afirmación siempre se cumple?, demuéstrelo derivando $\overline{C(x)} = C(x)/x$ y hallando los números críticos.

Ejercicio 37

Si la compañía C.K.L. vende los televisores a un precio de $p = 1000 - 0{,}4x$, siendo el costo total de producción $C(x) = 50000 + 100x + 0{,}2x^2$. Determine el nivel de producción que genera la máxima utilidad.

Solución

Se sabe que

$I(x) = p.x = 1000x - 0{,}4x^2$ y $C(x) = 50000 + 100x + 0{,}2x^2$

Además, $U(x) = I(x) - C(x)$

Anteriormente se han resuelto este tipo de problemas, hallando U(x) y derivando, pero veamos qué sucede si derivamos a partir de $U(x) = I(x) - C(x)$:

$$U'(x) = I'(x) - C'(x)$$

$$U'(x) = 0 \quad \text{si} \quad I'(x) = C'(x)$$

Entonces, la utilidad es máxima cuando el ingreso marginal y el costo marginal son iguales.

Luego,

$I'(x) = C'(x)$

$1000 - 0{,}8x = 100 + 0{,}4x$

$x = 750$ unidades.

Para que sea un máximo: $U''(x) < 0$, es decir: $I''(x) < C''(x)$, lo que se cumple en este ejemplo.

Entonces,

La utilidad es máxima cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal y además, la derivada del ingreso marginal es menor que la derivada del costo marginal.

- **Elasticidad precio de la demanda**

Suponga que se desea averiguar lo que sucede con la demanda de carne y huevos si su precio varía y que, según ciertos estudios, al aumentar el kg de carne en Bs.100, disminuye su demanda en 5 kg por año. Así mismo, al disminuir el precio de la docena de huevos en Bs. 10 su demanda aumenta en ½ docena al año. ¿Cuál es más sensible a la variación de precios?, ¿la carne o los huevos?.

No es fácil conocer la respuesta ya que estos productos se miden en unidades distintas. Por ello los economistas han desarrollado el concepto de *ELASTICIDAD*, que nos permite medir el cambio de una variable en función de un cambio de la variable independiente, sin necesidad de utilizar las unidades.

Existen muchas aplicaciones de la elasticidad, sin embargo, aquí sólo consideraremos la *elasticidad precio de la demanda.*

Elasticidad precio de la demanda:

Si q representa cantidad demandada y p el precio unitario entonces

Elasticidad precio de la demanda : $\eta = \dfrac{\text{cambio porcentual de q}}{\text{cambio porcentual de p}} = \dfrac{dq/q}{dp/p}$

RECUERDA QUE...

Cambio porcentual = dy / y .(100)

(véase Unidad III)

Luego, η (se lee eta) indica el cambio porcentual en la cantidad demandada por una variación del 1% en el precio.

η siempre es negativa ya que la cantidad demandada disminuye si el precio aumenta. Por ello se toma el valor absoluto.

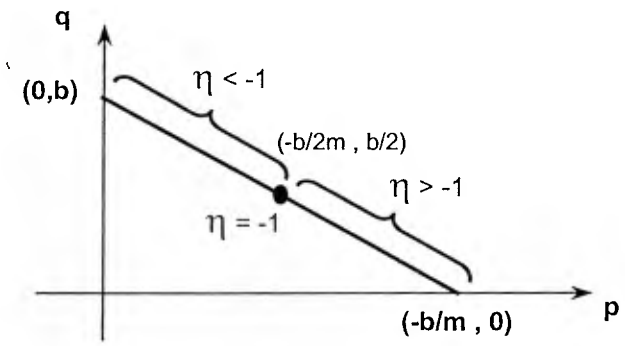
También se puede expresar como

$$\eta = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} \qquad \text{o bien} \qquad \eta = \frac{dq/dp}{q/p} = \frac{\text{función marginal}}{\text{función promedio}}$$

Ahora bien, considere la función de demanda q = mp + b, siendo q la cantidad demandada y p el precio entre $0 \leq p \leq -b / 2m$.

Además, dq / dp = m y q / p = m + b / p

Entonces:



- Si p = -b/2m, $|\eta| = 1$ ⟶ *Elasticidad Unitaria:* el cambio porcentua en el precio y la cantidad demandada son aproximadamente iguales.

- Si p < -b/2m, $|\eta| < 1$ ⟶ *Elástica:* el cambio de 1% en el precio hace que el cambio en la cantidad demandada sea notable.

- Si p > - b/2m, $|\eta| > 1$ ⟶ *Inelástica:* el cambio de 1% en el preci hace que el cambio en la cantidad demandada sea poco significativa.

¿Por qué η = -1 en el punto medio del intervalo de precio?

(Considere la función de demanda lineal)

Ejemplo 38

Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 120 - 0{,}1p^2$ para $0 \leq p \leq 1200^{1/2}$.

a) Determine a qué precio la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria.

b) ¿Qué sucede con la cantidad demandada si p = 10, p = 20 y p = 30?

c) Halle la función ingreso y el precio que maximiza el ingreso.

d) ¿Qué relación existe entre los resultados de (a), (b) y (c)?

Solución

a) Hallamos la elasticidad :

$$\eta = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q} = -0{,}2p\frac{p}{120-0{,}1p^2}$$

Igualando la elasticidad a –1, y despejando p resulta que

$$|\eta| = 1 \quad \text{si} \quad p = 20$$

Luego, $|\eta| < 1$ si $0 \leq p < 20$. *Es inelástica*

$|\eta| > 1$ si $20 < p \leq 1200^{1/2}$. *Es Elástica*

b) Analizamos qué sucede en cada nivel de precio:

Si p = 10 $\eta = -0{,}2(10)(10) / (120 - 0{,}1(10)^2) = -0{,}18$

Por cada aumento del 1% en el precio, la cantidad demandada disminuye en 0,18%, a este nivel de precio.

Si $p = 20$ $\eta = -1$

Por cada aumento del 1% en el precio, la demanda disminuye de la misma manera.

Si $p = 30$ $\eta = -0{,}2(30)(30) / (120 - 0{,}1(30)^2) = 6$

Por cada aumento del 1% en el precio, la cantidad demandada disminuye 6%, a ese nivel de precio.

c) El ingreso es: $I(p) = (120 - 0{,}1p^2)\,p = 120p - 0{,}1p^3$

Para hallar el precio que maximiza el ingreso:

$I'(p) = 120 - 0{,}3p^2$; $I'(p) = 0$ si $p = 20$

c) El ingreso es máximo cuando la elasticidad es unitaria.

Si $0 \leq p < 20$, donde la demanda es inelástica,

$I'(p) > 0$, *el ingreso es creciente.*

Si $20 < p \leq 1200^{1/2}$, donde la demanda es elástica,

$I'(p) < 0$, *el ingreso es decreciente.*

¿Tiene sentido estos resultados?
¿Por qué?
(Sugerencia: realice la gráfica de I(p)?

EJERCICIOS PROPUESTOS IV.H

1. Las funciones costo e ingreso totales de un producto vienen dado por:

$$I(q) = 100q - 0{,}01q^2 \quad y \qquad C(q) = 25000 + 40q + 0{,}005q^2$$

a) A partir del análisis marginal determine el nivel de producción que maximiza la utilidad.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

2. Para la empresa A.K.L., el costo total de fabricar cartuchos de tinta para impresoras es $C(x) = 1000000 + 15000x + 2{,}5x^2$ en Bs., por semana.

a) Determine el nivel de producción que minimiza el costo promedio.

b) ¿Cuál es el costo mínimo por unidad?

c) ¿Cuál es el costo total?

3. Una función de demanda se define mediante $p(x) = 20 + 4x - x^2/3$.

a) Hallar el ingreso total y el ingreso marginal.

b) ¿En qué intervalo aumenta el ingreso total?

c) ¿Para qué nivel de producción es máximo el ingreso marginal?

4. El costo total, en miles de Bs., por producir x franelas viene dado por $C(x)=0{,}001x^2 + 100x + 4000$. Encuentre el nivel de producción que minimice el costo promedio.

5. La empresa C.K.L. produce frascos de pasta de tomate de 500cc. El costo total, en miles de Bs, viene dado por $C(x)=0{,}000002x^3 + 5x + 400$. Calcule:

a) El nivel de producción que minimiza el costo promedio.

b) El nivel de producción donde el costo promedio es igual al costo marginal.

c) Interprete los resultados de (a) y (b).

6. Suponga que el ingreso total por vender software para empresas, viene dado por $I(x) = 2x^2 + 68x - 128$, en miles de Bs.

a) ¿En qué nivel de ventas el ingreso medio es igual al ingreso marginal?

b) Analice lo que sucede con el ingreso cuando el nivel de ventas es mayor y cuando es menor al resultado en (a).

7. La ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 200 - 2p^2$ (para $0 \leq p \leq 10$).

a) ¿En qué nivel de producción la elasticidad es unitaria?.

b) Si $p = 6$, ¿qué sucede con la elasticidad precio de la demanda?,¿y con el ingreso?.

8. El precio al que puede venderse x miles de unidades de lámparas de jardín viene dado por $p = 1{,}0625 - 0{,}0025x$, y el costo total es $C(x) = (x^2 + 1) / (x + 3)$.

a) Determine en qué nivel de producción se maximiza la utilidad.

b) Determine en qué nivel de producción se minimiza el costo medio por unidad.

9. Suponga que el ingreso total, en Bs., que se obtiene por la venta de computadoras personales, es $I(x) = -2x^2 + 68x - 10$, donde x es cientos de unidades. Su costo total de producción es $C(x) = 110 + 47x - 9x^2 + 0{,}09x^3$, en miles de Bs.

a) ¿En qué nivel de producción se minimiza el costo promedio?

b) ¿En qué nivel de producción se maximiza la utilidad?

10. La compañía C.K.L. importa y vende maquinarias para la fabricación de artículos de plástico. La ecuación de demanda de es $p = 600 - 2q^2$.

a) Exprese la elasticidad de la demanda en función de las unidades (q) y determine en qué nivel es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria.

b) ¿Cuántas unidades debe vender para maximizar el ingreso?.

c) ¿Qué relación hay entre las respuestas (a) y (b)?.

RESPUESTA IV.H

1. a) 2000 unidades, b) $35000;

2. a) 20000 unidades, b) Bs. 16000, c) Bs. 32000000;

3. b) (0, 10), c) 4 unidades;

4. 4. 2000 unidades;

5. a) 464 unidades, b) 464 unidades;

6. 8 unidades;

7. a) 5, 77 ; b) $|\eta| > 1$, el ingreso disminuye.

8. a) 17300 , b) 1387;

9. a) 647, b) 640;

10. a) $q = 10$ para $|\eta| = 1$; b) $q = 10$

4.9 MISCELÁNEA DE EJERCICIOS

☑ Indique si los siguientes planteamientos son verdadero o falso. Justifique su respuesta.

1. Una función continua definida en un intervalo cerrado alcanza un valor máximo en ese intervalo.

2. Una función cuadrática no tiene punto de inflexión.

3. Si $f'(0) = 0$ y $f''(0) > 0$ para $x \geq 0$ entonces f es creciente en $[0, \infty)$

4. La gráfica de $y = (3x^2 + 2x) / x$ tiene una asíntota oblicua en $y = 3x + 2$

5. Si $f'(x) = 0$ para toda (a,b) entonces f es creciente en (a,b).

☑ Resolver

6. Halle los extremos relativos de

$$f(x) = \begin{cases} 1/4(x2 + 6x + 8) & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ -1/6(x2 + 4x - 12) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad , \qquad \text{en } [-2, 2]$$

7. Esboce la gráfica de una función f con las siguientes características: f es continua, $f(-2) = 3$; $f(2) = -1$, $f'(x) = 0$ en $x > 2$, $f''(x) < 0$ para $x < 2$.

8. Realice el estudio completo de la curva $f(x) = (x-1) / (1 + 3x^2)$

9. Realice el estudio completo de la curva $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2x|$

10. Una agencia de viajes promociona una excursión en avión a una isla del Caribe. Ha cotizado un precio de $500 por persona si 100 ó menos se inscriben en la excursión. Por cada persona que exceda de 100 el precio que se cobra a todos disminuye en $5. Si x es el número de personas que exceden de 100:

a) Determine la función que exprese el precio por persona p en términos de x.

b) ¿Existe restricción en el dominio?

c) ¿Cuántas personas se deben inscribir para obtener el ingreso máximo?

d) ¿A qué precio se debe vender cada boleto para obtener el ingreso máximo?

e) ¿Cuál es el ingreso máximo?

11. La función de costo para un producto es $C(x) = ax^2 + bx + c$, donde x es el número de unidades producidas y vendidas y C es Bs.

a) Determine la función utilidad.

b) Determine x que maximiza la utilidad.

c) ¿Qué restricciones aseguran que x maximiza la utilidad?

12. El alcalde de esta ciudad está planeando construir una instalación para el tratamiento de desperdicios sólidos. Para ello necesita un pozo cilíndrico con capacidad de 2 millones de metros cúbicos. Los costos de construcción para la base se estiman en Bs. 30000 por m^2 y las paredes en Bs. 50000 por m^2. ¿Qué dimensiones debe tener el pozo para que el costo de construcción sea mínimo?

13. Un fabricante ofrece un plan de incentivo salarial a los empleados que trabajan con un producto en particular. El tiempo promedio para elaborar cada unidad es de 15 horas. A los empleados se les paga Bs. 1200 por hora hasta un máximo de 15 horas, por unidad trabajada. Existe un incentivo para los empleados que terminen una unidad en menos de 15 horas, por cada hora de ahorro el sueldo aumenta en Bs. 300. Si x es el número de horas para elaborar una unidad, determine:

a) La función $S = f(x)$, donde S es el sueldo por hora, en Bs.

b) El tiempo, en horas, que maximiza el sueldo de un empleado, al elaborar una unidad.

c) El sueldo máximo por hora.

d) El sueldo máximo por unidad.

e) Compare la respuesta (d) con el sueldo de los que elaboran una unidad en 15 horas o más.

14. El costo total de fabricar q unidades mensuales es $C=1000000+15000q+2,5q^2$ y la capacidad máxima de producción es 1000 unidades por mes. Calcular:

a) ¿Cuántas unidades minimizan el costo promedio?

b) ¿Cuál es el costo promedio mínimo?

c) ¿Cuál es el costo total en el nivel de producción que minimiza el costo promedio?

15. El costo de inventario depende del pedido y almacenamiento según la siguiente función: $C = (Q / x).\ s + (x / 2).\ r$, donde Q es el número de unidades vendidas, r es el costo por almacenar cada unidad, s es el costo de cada pedido y x es el número de unidades por pedido. Determine el tamaño del pedido que hace mínimo al costo suponiendo que las ventas se producen a un ritmo constante.

16. El costo de producción de x unidades es $C(x) = x^2/4 + 62x + 125$, y la función de demanda es $p = 75 - x/3$. Determine:

a) El número de unidades que maximiza el beneficio.

b) El número de unidades que minimiza el costo.

c) El nivel de producción para que la demanda sea elástica, inelástica y de elasticidad unitaria.

17. La cantidad de relojes de pulso Rolay, demandada por mes se relaciona con el precio mediante $p = 50 / (0{,}01x^2 + 1)$ para $0 \leq x \leq 20$, donde p es miles de Bs., y x es miles de unidades.

a) Obtenga el Ingreso medio y el ingreso marginal.

b) ¿Para qué número de unidades el ingreso medio es igual al ingreso marginal?

c) Halle el ingreso marginal para 2000 relojes e interprete.

18. La demanda semanal de televisores 25" a color marca Acmy es $p = 600-0{,}05x$ para $0 \leq x \leq 12000$, donde p es precio al mayor, en $, y x es la cantidad demandada. El costo es $C(x) = 0{,}0000002x^3 - 0{,}03x^2 + 400x + 80000$.

a) ¿Cuál es la función ingreso y la función utilidad?

b) ¿Cuáles son los ingresos, costos y utilidades marginales?

c) Calcule C'(2000), I'(2000) y U'(2000) e interprete.

d) Trace la gráfica de C(x), I(X) y U(x) sobre el mismo sistema de coordenadas, e interprete.

e) Halle el costo promedio por unidad.

f)Calcule el costo promedio para 5000 y 10000 unidades e interprete.

19. Una plantación de naranjas tiene una producción promedio de 36 guacales de 25 naranjas cada uno por árbol, si la densidad de árboles es 22 por 4000 m^2. Por cada aumento unitario en la densidad de árboles, la producción se reduce a 2 guacales por árbol. ¿Cuántos árboles se deben plantar para maximizar la producción?.

20. La fábrica de galletas C.K.L. vende sus galletas surtidas Delys en envases de 1Kg., la demanda estimada es de 1000000 de unidades. El costo por iniciar una nueva producción es de Bs. 500000 y el de fabricación es de Bs. 500 por caja. El costo de almacenamiento es de Bs. 400 por caja durante un año. Si la demanda es uniforme y la producción es instantánea, ¿cuántas cajas deben producirse cada vez para minimizar los costos?

BIBLIOGRAFÍA

Arya, L. y Lardner, R. (1992). Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Economía. (3° ed) México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

Ayres, F. y Mendelson, E. (1991). Cálculo diferencial e integral. (Serie Shaum). (3°ed.). España: McGraw Hill.

Budnick, F. (1990). Matemáticas aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales. (3° ed). México: McGraw-Hill .

Dávila, A., Navarro, P. y Carvajal, J. (1996). Introducción al Cálculo. Caracas: McGraw Hill.

Fleming, W. y Varberg, D. (1991). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. (3° ed.) México: Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.

Haeussler, E. y Paul, R.(1997).Matemáticas para Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida.(8° ed). México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

Hoffmann, L. y Bradley, G.(1998). Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales. (6° ed). Santafé de Bogotá, Colombia: Mc Graw - Hill.

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (1995). Cálculo. Volúmen 1. (5° ed). Madrid, España: Mc Graw Hill.

Lehmann, C. (1982) Geometría Analítica. (6° ed.). México: Editorial Limusa.

Leithold, L. (1996). El cálculo con Geometría Analítica. (6° ed.). México: Harla

Nicholson, W. (1997). Teoría Microeconómica. Principios básicos y aplicaciones. (6°ed). Madrid, España: Mc GraW Hill.

Página de Jesús Escudero Martín.(1999). Matemáticas. [Documento en línea]. Disponible en: http://platea.pntic.mec.es/~jescuder . [Consulta: 25 / 10 / 99]

Purcell, E. y Varberg, D. (1992). Cálculo con geometría analítica. (6° ed). México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

Sobel, M. y Lerner, N. (1998). Precálculo (5° ed.). México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

Swokowski, E. (1982). Cálculo con geometría analítica. (2° ed). California, EE.UU: Wedsworth Internacional Iberoamericana.

Sydsaeter, K. Y Hammond, P. (1996). Matemáticas para el Análisis Económico. España: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

Tan, S.T. (1998). Matemáticas para Administración y Economía. México: International Thomson Editores.

Universidad Simón Bolivar. (1997). Matemáticas I. Caracas: Autor.