AAM6358
TRAB
E996
N6

UNIVERSIDAD CATOLICA "ANDRES BELLO"
DIRECCION GENERAL DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
POSTGRADO EN CIENCIAS ECONOMICAS

Universidad Católica Andrés Bello
BIBLIOTECA
Caracas

TECNICAS CUANTITATIVAS DE LA ECONOMIA

por

Jose Noguera Santaella

TRABAJO DE ASCENSO PRESENTADO
PARA OPTAR A LA CATEGORIA DE
"PROFESOR AGREGADO"

1996

A Nayibe, mi esposa

INDICE

PREFACIO.....I

CAPITULO 1. ALGEBRA LINEAL.....1

SECCION 1.1: ESPACIOS LINEALES.....1

SECCION 1.2: MATRICES.....5

SECCION 1.3: OPERACIONES ELEMENTALES.....8

SECCION 1.4: DETERMINANTES.....14

SECCION 1.5: TRANSFORMACIONES LINEALES.....17

SECCION 1.6: AUTOVALORES Y AUTOVECTORES.....17

CAPITULO 2. LEYES DE CRECIMIENTO.....26

SECCION 2.1: LA LEY EXPONENCIAL.....26

SECCION 2.2: EL MODELO DE DOMAR DE LA DEUDA PUBLICA
Y EL INGRESO.....28

SECCION 2.3: MODELO DE CRECIMIENTO DE HARROD-DOMAR.....29

SECCION 2.4: ALGEBRA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.....33

CAPITULO 3. ECUACIONES DIFERENCIALES.....38

SECCION 3.1: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS,
LINEALES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO.....39

SECCION 3.2: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS,
LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES.....50

SECCION 3.3: MODELO DE CRECIMIENTO DE HARROD-DOMAR.....59

SECCION 3.4: MODELO DE CRECIMIENTO DE SOLOW.....60

CAPITULO 4. ECUACIONES EN DIFERENCIA FINITA.....65

SECCION 4.1: ECUACIONES EN DIFERENCIA FINITA
DE N-ESIMO ORDEN, LINEALES, HOMOGENEAS,
DE COEFICIENTES CONSTANTES.....65

SECCION 4.2: ECUACIONES EN DIFERENCIA FINITA
DE SEGUNDO ORDEN, LINEALES NO HOMOGENEAS
CON COEFICIENTES CONSTANTES.....71

SECCION 4.3: INTERDEPENDENCIA ENTRE EL MULTIPLICADOR
Y EL PRINCIPIO DEL ACELERADOR.....74

CAPITULO 5. ESTABILIDAD.....83

SECCION 5.1: ESTABILIDAD DE ECUACIONES DIFERENCIALES.....84

SECCION 5.2: ESTABILIDAD DE ECUACIONES EN DIFERENCIA FINITA.....88

CAPITULO 6. SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS.....92

SECCION 6.1: CONVERSION DE ECUACIONES EN SISTEMAS DE ECUACIONES.....93

SECCION 6.2: SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES.....95

SECCION 6.3: SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIA.....98

SECCION 6.4: EL MODELO DE INSUMO-PRODUCTO DE LEONTIEF.....100

CAPITULO 7: PROGRAMACION LINEAL.....104

SECCION 7.1: EL PROBLEMA DE PROGRAMACION LINEAL.....104

SECCION 7.2: EL PROBLEMA DUAL.....124

CAPITULO 8: TEORIA DE JUEGOS.....129

SECCION 8.1: DEFINICIONES.....129

SECCION 8.2: JUEGOS CON PUNTOS DE SILLA.....132

SECCION 8.3: JUEGOS SIN PUNTOS DE SILLA O CON ESTRATEGIAS MIXTAS.....140

SECCION 8.4: COMENTARIOS FINALES.....143

CAPITULO 9: PROGRAMACION NO LINEAL.....151

SECCION 9.1: OPTIMIZACION DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES..151

SECCION 9.2: OPTIMIZACION CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD.....152

SECCION 9.3: OPTIMIZACION CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD..153

BIBLIOGRAFIA.....158

PREFACIO

Cuando entré a trabajar en el postgrado de economía de la Universidad Católica "Andrés Bello", se me asignó dictar el curso de Técnicas Cuantitativas para los estudiantes del postgrado de economía. La principal dificultad que encontré fue la hallar un texto apropiado tanto en nivel como en contenido para el curso. Si bién existían libros que fueran una buena aproximación, no existía uno que se adaptara en 100%. Los profesores que me precedieron dictando esta materia no tenían un texto básico por el cual guiaban todo el contenido. De allí surge la idea de escribir unas notas para los estudiantes que cumplan con este propósito.

Esta materia tiene el objetivo de dar al estudiante las herramientas matemáticas básicas para tomar un curso econometría con un nivel equivalente al contenido en el libro de Johnston y el de cursos de economía con orientación de economía matemática a un nivel intermedio de dificultad matemática. En cuanto al nivel matemático se refiere, su contenido es de matemáticas tradicionales a nivel intermedio y no se hacen aplicaciones en áreas afines de gran utilidad en la economía como las probabilidades y la estadística. Las notas contienen una cantidad de tópicos heterogéneos, aunque, en lo posible, se ha tratado de mantener una unidad en cuanto a su contenido y su hilación. Así, si bién se ha procurado escribir aplicaciones de todos los temas matemáticos que se tratan, el objetivo de las notas no son el de hacer un texto de teoría económica o economía matemática, sino el de escribir un texto de matemáticas para los interesados en estudiar economía con un enfoque matemático. Una vez aprobado este curso, el estudiante debe tener el nivel matemático adecuado para leer

una gran cantidad de papers corrientemente publicados en revistas económicas especializadas tales como American Economic Review, Econometrica o el Journal of Political Economy.

Las notas tienen como requisito haber realizado un curso de cálculo en una y varias variables y, preferiblemente aunque no indispensable, haber tomado cursos introductorios de teoría macro y microeconómica. El primer capítulo es dedicado al Algebra Lineal. En él se estudian los espacios lineales, el álgebra de matrices y sus operaciones elementales, determinantes, las transformaciones lineales, los autovalores y autovectores. Si bién en este primer capítulo no se hacen aplicaciones económicas, resulta básico para otros temas del texto y para los cursos de econometría. El segundo capítulo, dedicado a las leyes de crecimiento, se estudia la ley exponencial y se estudian dos aplicaciones, la primera el modelo de la deuda pública y el ingreso de Domar y la segunda al modelo de crecimiento de Harrod-Domar. Por último se estudia el álgebra básica de los números complejos.

El capítulo 3 se introducen las ecuaciones diferenciales y se hacen dos aplicaciones a la teoría de crecimiento: el modelo de Harrod-Domar y el modelo de Solow. En el capítulo 4 se introducen las ecuaciones en diferencia finita y se muestra como aplicación el clásico modelo de Samuelson de interdependencia entre el multiplicador y el principio del acelerador. El capítulo 5 se introduce el tema de la estabilidad de las ecuaciones y en el tema 6, los sistema de ecuaciones simultáneas; en este último se muestra como aplicación el sistema de equilibrio general de Leontief conocido como el modelo de insumo-producto, pero en un

CAPITULO 1

ALGEBRA LINEAL

SECCION 1.1: ESPACIOS LINEALES

DEFINICION: Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de números. Diremos que $\mathcal{F}$ es un cuerpo o campo si es cerrado bajo las operaciones de suma, resta multiplicación y división (excepto por cero).

EJEMPLO: 1) Los números reales son un cuerpo.

2) Los números complejos son un cuerpo.

3) Los enteros, los naturales e irracionales no son cuerpos.

DEFINICION: Sea $\mathcal{F}$ un cuerpo. Defino un vector como un conjunto ordenado de elementos de $\mathcal{F}$. El número de elementos del vector se llama "Orden del Vector".

DEFINICION: Sea $\bar{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un conjunto sobre un cuerpo $\mathcal{F}$, los elementos a_i se llaman componentes y los elementos de $\mathcal{F}$, escalares.

Si los componentes se escriben en forma de fila, el vector se llama vector fila. Si son escritos en forma de columna, se llama vector columna.

DEFINICION: Un vector cuyos elementos son todos cero se llama vector cero.

DEFINICION: Un vector que tiene un 1 en la i-ésima posición y cero en las demás se llama vector unidad y de denota por e_i.

EJEMPLO: El vector (0, 0, 0) es un vector cero y $e_2 = (0, 1, 0)$.

DEFINICION: Sea $\bar{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$; el escalar que se encuentra en la i-ésima posición se llama i-ésimo componente o i-ésima coordenada.

DEFINICION: Sean $\bar{v}_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{v}_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

dos vectores. Defino la suma $\bar{v}_1 + \bar{v}_2$ como

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (a_1+b_1,\ a_2+b_1, \ldots,\ a_n+b_n).$$

<u>EJEMPLO</u>: Si $\bar{v}_1 = (1,\ 2,\ 3)$ y $\bar{v}_2 = (4,\ 5,\ 6)$, entonces

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (1+4,\ 2+5,\ 3+6) = (5,\ 7,\ 9).$$

<u>DEFINICION</u>: Sea $\bar{v} = (a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n)$ un vector. Defino la multiplicación de un vector $\bar{v}$ por un escalar k como

$$k\bar{v} = (ka_1,\ ka_2, \ldots,\ ka_n).$$

<u>EJEMPLO</u>: Si $\bar{v} = (1,\ 2,\ 3)$ y $k = 4$, entonces

$$\bar{v} = (4\cdot 1,\ 4\cdot 2,\ 4\cdot 3) = (4,\ 8,\ 12).$$

<u>DEFINICION</u>: Sean $\bar{v}_1 = (a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n)$ y $\bar{v}_2 = (b_1,\ b_2, \ldots,\ b_n)$ dos vectores del mismo orden. Defino el producto escalar o interior $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2$ como

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

<u>DEFINICION</u>: Sea $\bar{v}$ un vector, se define la norma de $\bar{v}$ como,

$$|\bar{v}| = \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2.$$

<u>DEFINICION</u>: Un vector de norma uno se dice que está normalizado.

<u>EJEMPLO</u>: Si $\bar{v}_1 = (1,\ 2,\ 3)$ y $\bar{v}_2 = (4,\ 5,\ 6)$, entonces

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32.$$

Consideremos un cuerpo f. Defino un espacio lineal o vectorial V como un conjunto de vectores del mismo orden sobre f tales que si $\bar{v}_1,\ \bar{v}_2 \in V$ y $k \in f$, entonces

1) $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in V$; 2) $k\cdot\bar{v}_1 \in V$.

Esto quiere decir que un conjunto de vectores cerrados bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar es un espacio vectorial.

<u>DEFINICION</u>: Diremos que el vector $\bar{v}$ es combinación lineal de los vectores $\{\bar{v}_1,\ \bar{v}_2, \ldots,\ \bar{v}_n\}$ si existen escalares $\{k_1,\ k_2, \ldots,\ k_n\}$

no todos nulos tales que

$$\bar{v} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_n\bar{v}_n.$$

Observe que si $\bar{v}$ es una combinación lineal de $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$, entonces podemos escribir $\bar{v} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_n\bar{v}_n$, donde los k_i son escalares no todos nulos, por lo tanto podemos decir que existen escalares, no todos nulos tales que

$$a\bar{v} + a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \ldots + a_n\bar{v}_n = 0$$

donde $a = 1$, $a_1 = -k_1$, ..., $a_n = -k_n$. Esto nos induce a realizar la siguiente definición:

<u>DEFINICION</u>: Diremos que un conjunto de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ son linealmente dependientes si existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$ no todos nulos tales que

$$k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_n\bar{v}_n = 0.$$

<u>EJEMPLO</u>: Si $\bar{v}_1 = (1, 2, 3)$ y $\bar{v}_2 = (2, 4, 6)$ entonces $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son lineqalmente dependientes ya que

$$\bar{v}_1 - \tfrac{1}{2}\bar{v}_2 = (1, 2, 3) - \tfrac{1}{2}(2, 4, 6) = \bar{0}.$$

Observe asimismo que $\bar{v}_1$ es una combinación lineal de $\bar{v}_2$ ya que $\bar{v}_1 = \tfrac{1}{2}\bar{v}$.

<u>DEFINICION</u>: Diremos que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ son conjunto de vectores linealmente independientes si no son linealmente dependientes, es decir si

$$k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_n\bar{v}_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

<u>EJEMPLO</u>: Si $\bar{v}_1 = (1, 4, 3)$, $\bar{v}_2 = (2, 3, 1)$ y $\bar{v}_3 = (-1, 1, 2)$ entonces

$$k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (k_1+2k_2-k_3,\ 4k_1+3k_2+k_3,\ 3k_1+k_2+2k_3) = \bar{0}$$

$$\Longrightarrow \quad k_1+2k_2-k_3 = 0;\quad 4k_1+3k_2+k_3 = 0;\quad 3k_1+k_2+2k_3) = 0.$$

$\Longrightarrow$ $k_2 = -k_1$, $k_3 = -k_1$. Por lo tanto, si $k_1 = 1$,

entonces $k_2 = k_3 = -1$ y $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 - \bar{v}_3 = 0$ y $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ son vectores linealmente dependientes.

<u>EJEMPLO</u>: Si $\bar{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 2)$ y $\bar{v}_3 = (1, 2, 0)$, entonces $k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3 = 0$

$$\Longrightarrow \quad (k_1+k_3,\ k_1+k_2+2k_3,\ k_1+k_2) = \bar{0}$$

$$\Longrightarrow \quad k_1+k_3 = 0,\ k_1+k_2+2k_3 = 0,\ k_1+k_2 = 0,$$

$$\Longrightarrow \quad k_1 = k_2 = k_3 = 0.$$

Por lo tanto los vectores son linealmente independientes.

<u>DEFINICION</u>: Defino el espacio generado por los vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$, L, como el conjunto de todas las combinaciones lineales $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$. A este conjunto lo denotaremos por $L = \text{gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$.

<u>TEOREMA</u>: El espacio generado por los vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es un espacio lineal.

<u>prueba</u>: Tenemos que ver que si $\bar{u}, \bar{v} \in L = \text{gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$, entonces $k\bar{u} \in L$ para todo $k \in \mathcal{f}$, ya que si $\bar{u} \in L$, entonces $\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_n\bar{v}_n$ y $k\bar{u} = kk_1\bar{v}_1 + kk_2\bar{v}_2 + \ldots + kk_n\bar{v}_n$, donde cada kk_i es un escalar.

Por otra parte, $\bar{u} + \bar{v} \in L$, ya que si $\bar{u} = k'_1\bar{v}_1 + k'_2\bar{v}_2 + \ldots + k'_n\bar{v}_n$ y $\bar{v} = k''_1\bar{v}_1 + k''_2\bar{v}_2 + \ldots + k''_n\bar{v}_n$ entonces

$$\bar{u} + \bar{v} = (k_1' + k_1'')\bar{v}_1 + \ldots + (k'_n + k''_n)\bar{v}_n.$$

Ahora si $k_i = k'_i + k''_i$, entonces k_i es un escalar y $\bar{u} + \bar{v} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_n\bar{v}_n$, donde los k_i son escalares; por lo tanto $\bar{u} + \bar{v} \in L$ y L es un espacio lineal.

<u>DEFINICION</u>: Sea $\mathbf{V}$ un espacio lineal. Diremos que el conjunto de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una base de $\mathbf{V}$ si

1) $\mathbf{V} = \text{gen}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$;

2) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

<u>DEFINICION</u>: Sea **V** un espacio lineal y $\beta = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ una base para **V**. Defino la dimensión de **V** como el número de vectores de la base β. Denotaremos a dimensión de **V** por dim(**V**). Así, en este caso, dim(**V**) = n.

SECCION 1.2: MATRICES

Se puede definir una matriz **M** como un conjunto ordenado de vectores del mismo orden. Sean

$$\bar{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}),$$

$$\bar{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}),$$

$$\bar{v}_1 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$$

vectores del mismo orden, entonces

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{bmatrix}$$

es una matriz donde cada fila es un vector.

Considere ahora los vectores

$$\bar{w}_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}),$$

$$\bar{w}_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}),$$

$$\bar{w}_1 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}),$$

entonces la matriz **M** está escrita como un conjunto ordenado de columnas. Cada columna de **M** es un vector.

<u>DEFINICION</u>: Si una matriz **M** tiene m filas y n columnas diremos que **M** es una matriz de orden mxn y se denota por $\mathbf{M}_{mxn}$. Si m = n se dice que la matriz es cuadrada.

También se denota la matriz **M** por $[a_{ij}]_{mxn}$, donde a_{ij} es el elemento que está en la i-ésima fila y la j-ésima columna.

<u>DEFINICION</u>: Sean $A = [a_{ij}]_{mxn}$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{mxn}$ dos matrices del mismo orden, entonces defino la suma de matrices **A + B** como una matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{mxn}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + c_{ij}$.

<u>EJEMPLO</u>: Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{entonces,}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

<u>DEFINICION</u>: Sea $A = [a_{ij}]_{mxn}$ una matriz, defino la multiplicación de una matriz por un escalar k como $k \cdot \mathbf{A} = [k \cdot a_{ij}]_{mxn}$.

<u>EJEMPLO</u>: Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad y \quad k = 2, \text{ entonces}$$

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

<u>DEFINICION</u>: Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mxr}$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{rxn}$. Defino la multiplicación o el producto de matrices $\mathbf{A}\bar{x}\mathbf{B}$ como una matriz **C** tal que

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\bar{x}\mathbf{B} = [\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}]_{mxn}.$$

<u>EJEMPLO</u>: Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{entonces,}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 & 1\cdot 4 - 5\cdot 2 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot(-1) + 5\cdot 2 + 6\cdot 3 & 4\cdot 4 - 5\cdot 5 + 6\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 24 & 27 \end{bmatrix}.$$

Observe que, en general, $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}$. Compruebe ésto calculando $\mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{A}$ en este ejemplo. Más aun, puede ser que para dos matrices cualesquiera **A** y **B**, el producto $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{B}$ no existe porque el número de columnas de **A** es distinto al número de filas de **B**.

<u>DEFINICION</u>: Sea $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ una matriz tal que $a_{ij} = 0$ para todo i, j, entonces diremos que **A** es la matriz cero de orden mxn y es denotada por **O**.

Observe que $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$, para toda matriz **A**.

<u>DEFINICION</u>: Una matriz identidad es aquella que tiene la forma

$$\mathbf{I}_n = [\delta_{ij}]_n,$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. El término δ_{ij} se llama *Delta de Kronecker*. Observe que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{I}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$, para toda matriz **A**.

<u>DEFINICION</u>: Una matriz escalar es una matriz de la forma $\tau\mathbf{I}$, donde τ es un número real.

<u>EJEMPLO</u>:

$$5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>DEFINICION</u>: Una matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal son escalares cualesquiera y los demás son todos ceros se llama Matriz Diagonal. Si únicos elementos no nulos están ordenados como bloques de submatrices cuadradas a los largo de la diagonal principal, se dice que la matriz es diagonal a bloques.

<u>EJEMPLO</u>:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

<u>DEFINICION</u>: La traza de una matriz cuadrada **A** es la suma de los elementos de su diagonal principal y se denota tr(**A**).

<u>TEOREMA</u>: $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$ y $tr(\mathbf{ABC}) = tr(\mathbf{CAB}) = tr(\mathbf{BCA})$.

prueba: ejercicio.

DEFINICION: Una matriz es triangular superior (inferior) si todos los elementos por debajo (encima) de la diagonal son cero.

DEFINICION: La matriz traspuesta de **A**, denotada por $\mathbf{A}^t$, es aquella que se obtiene al intercambiar filas por columnas, es decir, si $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, entonces $\mathbf{A}^t = [a_{ji}]_{n\times m}$.

EJEMPLO:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ entonces } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observe que la multiplicación de matrices cumple con la propiedad asociativa, es decir

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\bar{\times}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\bar{\times}\mathbf{B})\times\mathbf{C}.$$

DEFINICION. Una matriz **A** cuadrada simétrica es definida positiva si para cualquier vector $\bar{v} \neq \bar{0}$, se tiene que $\bar{v}\cdot\mathbf{A}\cdot\bar{v} \geq 0$, y se dice que es definida negativa si $\bar{v}\cdot\mathbf{A}\cdot\bar{v} \leq 0$.

SECCION 1.3: OPERACIONES ELEMENTALES

Considere una matriz $\mathbf{A} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)^t$ como un conjunto de vectores fila. Llamaremos *operaciones elementales* a las siguientes:

1) Intercambiar dos filas. Así

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_j \\ \bar{v}_i \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix}.$$

Observe que esta operación no altera la dimensión del espacio generado por las filas.

2) La multiplicación de una fila por un escalar no nulo. Así

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ k\bar{v}_j \\ \bar{v}_i \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix}.$$

Esta operación tampoco altera la dimensión del espacio generado por los vectores fila de la matriz $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$.

3) Sumar a una fila el resultado de multiplicar otra fila por un escalar k ($k \neq 0$). Así

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_i \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_i + k\bar{v}_j \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix}.$$

Esta operación tampoco altera la dimensión del espacio generado por los vectores fila.

Considere la siguiente matriz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tratemos de convertir a la matriz **A** en la identidad mediante operaciones elementales. Así, primero sumamos la 1º y la 3º fila y la colocamos en la 3º fila, y multiplicamos la 1º por -3, la sumamos a la 2º fila y la colocamos en la 2º fila, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -15 & -8 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

luego, multiplicando la 2º fila por -1/15 se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -8/15 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

podemos ahora multiplicar la 2º fila por -5, sumarla a la 3º fila y dejar el resultado en la 3º fila, y luego multiplicar la 2º fila por -4, sumarla a la 1º fila y dejar el resultado en la 1º fila. Esto nos dá

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 13/15 \\ 0 & 1 & 8/15 \\ 0 & 0 & 7/15 \end{bmatrix},$$

por último, multiplico la 3º fila por 3/7, luego multiplico la 3º fila por -8/15, la sumo a la 2º fila y lo dejo en la 2º fila, y multiplico la 3º fila por -13/15, lo sumo a la 1º fila y lo dejo en la 1º fila obtenemos la matriz identidad.

Es fácil ver que los vectores fila de la matriz (1, 4, 3), (3, -3, 1) y (-1, 1, 2) son linealmente independientes.

Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

se puede comprobar que los vectores fila son linealmente dependientes. Si tratamos de llevar a la matriz **A** a la identidad mediante operaciones elementales obtendremos

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este caso la matriz no puede llegar a la identidad. Esto

nos induce a hacer las siguiente definición:

DEFINICION: Dada una matriz cuadrada **A** y tratemos de reducirla, mediante operaciones elementales, a una matriz de la forma:

1) Cada elemento por encima de la diagonal principal es cero;

2) cada elemento de la diagonal es cero o uno;

3) si los elementos de la diagonal son nulos, toda la fila es nula;

4) Si el elemento que pertenece a la diagonal es uno, el resto de la columna es cero.

La matriz puesta de esta forma a partir de la matriz **A** se llama *forma canónica de Hermite* o *forma hermítica*.

En los dos ejemplos anteriores, las matrices fueron reducidas a su forma hermítica.

DEFINICION: Defino el rango o característica de una matriz como el número máximo de vectores fila linealmente independientes.

De manera que la matriz **A** tiene el mismo rango de su matriz Hermítica **H** y el rango de **H** es el número de filas no nulas.

El método mediante el cual se convierte una matriz **A** en su forma hermítica **H** se llama método de Gauss-Jordán.

Matrices Inversas.

DEFINICION: Sea **A** una matriz cuadrada. Defino la inversa de **A** como una matriz **B** tal que **AB** = **BA** = **I**. A la inversa de **A** se denota por A^{-1}.

El método de Gauss-Jordán también sirve para encontrar la inversa de una matriz. Para hallar A^{-1} hacemos lo siguiente: escribimos una matriz ampliada $[A|I]$ y tratamos llevamos **A** a su forma hermítica, y las mismas operaciones que aplicamos a **A** las

aplicamos a I. Si A tiene inversa al final obtendremos la matriz $[I|A^{-1}]$. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} -1/4 & 3/8 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

El lector podrá comprobar que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 3/8 \\ 1/2 & -1/4 \end{bmatrix},$$

<u>DEFINICION</u>: Si la matriz A tiene inversa, entonces se dice que A es una matriz no singular.

<u>Equivalencia</u>.

<u>DEFINICION</u>: A es una matriz elemental si se puede obtener mediante operaciones elementales a partir de la identidad, es decir, si su forma hermítica es la identidad.

Analicemos las operaciones elementales y veamos que éstas se pueden escribir como producto de matrices elementales. La primera operacion elemental es el intercambio de dis filas, por ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

se obtiene de la identidad intercambiando filas, por lo tanto es

una matriz elemental. Observe también que

$$E_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Así la operacion elemental de intercambiar filas equivale a multiplicar la matriz **A** por una matriz como E_1 por la izquierda. El lector puede comprobar que si multiplica **A** por E_1 por la derecha, entonces el resultado es el de interambiar columnas.

La segunda operación elemental, multiplicar una fila por una constantes, se puede expresar también como una multiplicación de matrices elementales. Veamos. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ entonces } \begin{bmatrix} k & 2k \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

resulta de multiplicar la primara fila por k.

La matriz

$$E_2 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

es elemental porque resulta de la multiplicación de la identidad por k. Pero,

$$E_2 \cdot A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2k \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la operación de multiplicar una fila de **A** por una constante puede verse como la multiplicación por la izquierda de una matriz elemental.

La última operación elemental consiste en sumar a una fila, el resultado de multiplicar otra por k. Así, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ entonces } A \approx \begin{bmatrix} 1+3k & 2+4k \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Si

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces E_3 se obtiene de la identidad multiplicando la 2º fila por k y sumando el resultado a la 1º fila. Por lo tanto E_3 es una matriz elemental. Pero

$$E_3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3k & 2+4k \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, la 3º operación elemental se puede obtener mediante la multiplicación de una matriz elemental.

De esta manera, hemos visto que si **H** es la forma hermítica de **A**, entonces **H** puede expresarse como el producto por la izquierda de **A**, de un número finito de matrices elementales. Así,

$$E_n \cdot E_{n-1} \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A = H.$$

Si hacemos $B = E_n \cdot E_{n-1} \cdots E_2 \cdot E_1$, entonces **B** es una matriz elemental y $B \cdot A = H$, donde **B** es una matriz no singular.

<u>DEFINICION</u>: Diremos que dos matrices **A** y **B** son equivalentes si existen matrices elementales **P** y **Q** tales que

$$P \cdot A \cdot Q = B.$$

SECCION 1.4: DETERMINANTES.

En esta sección nos limitaremos a explicar algunos métodos para calcular determinantes.

<u>DEFINICION</u>: Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

una matriz cuadrada de orden 2, defino el determinante de **A** como

$$\det(\mathbf{A}) = ad - bc.$$

EJEMPLO:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 4\cdot 1 - 2\cdot 3 = -2.$$

DEFINICION: Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

defino el determinante de **A** como

$$\det(\mathbf{A}) = aei + cdh + bfg - ceg - bdi - afh.$$

EJEMPLO:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 7\cdot 6 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot 4\cdot 9 - 1\cdot 6\cdot 8 = 0.$$

Considere el determinante de tercer orden

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

se define por *Menor Complementario del Elemento* a_{ij}, al determinante que se obtiene al suprimir en la matriz **A**, la fila i y la columna j. El menor complementario de a_{ij} se denota por $|A_{ij}|$.

EJEMPLO:

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}.$$

$$|A_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}.$$

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}.$$

DEFINICION: Se define el *Adjunto del Elemento* a_{ij} y se denota por

A_{ij} o $adj(a_{ij})$ como $A_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$, es decir, menos uno elevado a la i+j por el menor complementario de a_{ij} ($|A_{ij}|$).

EJEMPLO:

$$A_{31} = (-1)^{3+1}|A_{31}| = |A_{31}| = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22};$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}|A_{22}| = |A_{22}| = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31};$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}|A_{23}| = -|A_{23}| = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}.$$

Por último, se puede demostrar, aunque no lo haremos, que un determinante se puede calcular utilizando sus adjuntos. Por ejemplo, considere el determinante de la matriz **A**, en el ejemplo anterior. Se puede verificar que este es la suma de los elementos de una fila cualquiera de la matriz multiplicados por sus respectivos adjuntos.

EJEMPLO:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 2\cdot A_{12} + 3\cdot A_{13}$$

$$= 1\cdot|A_{11}| + 2\cdot|A_{12}| + 3\cdot|A_{13}|$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = 0.$$

Por último, enunciaremos un teorema sobre determinantes: el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, es decir $|\mathbf{ABC}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{C}|$.

Aplicación de los Determinantes. Los determinantes son una herramienta útil para saber si un sistema de ecuaciones homogéneo tiene una solución no trivial.

Si $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{0}$ un sistema de ecuaciones homogéneo, tendrá una solución única si $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Este teorema nos resulta de mucha utilidad para saber si un

conjunto de vectores son linealmente independientes. ¿Porqué?.

<u>EJEMPLO</u>:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = 0 \\ 4X + 6Y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ entonces $\det(\mathbf{A}) = 2\cdot 6 - 3\cdot 4 = 0$.

Por lo tanto el sistema tiene infinitas soluciones.

SECCION 1.5: TRANSFORMACIONES LINEALES.

<u>DEFINICION</u>: Sea **A** una matriz de orden mxn. Sea $T: IR^m \dashrightarrow IR^n$, una función. Diremos que T es una transformación lineal si es de la forma $T\bar{x} = \bar{x}\mathbf{A}$, donde $\bar{x}$ es un vector fila de orden m.

<u>EJEMPLO</u>: Si

$$T\bar{x} = [x\ y]\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 4y \\ 3x + 6y \end{bmatrix}$$

<u>TEOREMA</u>: Si $T: IR^m \dashrightarrow IR^n$ es una transformación lineal entonces

1) $T(\tau\bar{x}) = \tau\cdot T\bar{x}$; 2) $T(\bar{x} + \bar{y}) = T\bar{x} + T\bar{y}$.

<u>prueba</u>: $T(\tau\bar{x}) = (\tau\bar{x})\cdot\mathbf{A} = \tau(x\mathbf{A}) = \tau\cdot T\bar{x}$.

Además, $T(\bar{x} + \bar{y}) = (\bar{x} + \bar{y})\mathbf{A} = \bar{x}\mathbf{A} + \bar{y}\mathbf{A} = T\bar{x} + T\bar{y}$.

SECCION 1.6: AUTOVALORES Y AUTOVECTORES.

<u>DEFINICION</u>: Sea $T\bar{x} = \bar{x}\mathbf{A}$ una transformación lineal, $T: IR^n \dashrightarrow IR^n$. Se dice que $\bar{v} \in IR^n$, $(\bar{v} \neq \bar{0})$, es un autovector, vector propio o vector característico de T (o de **A**) si existe $\tau \in IR$ tal que

$$T(\bar{v}) = \tau\cdot\bar{v} \text{ o } \bar{v}\cdot\mathbf{A} = \tau\cdot\bar{v}.$$

Al escalar τ se le llama autovalor, valor propio, valor

característico o raíz característica de T (o de A).

<u>TEOREMA</u>: Sea $T\bar{x} = \bar{x}A$ una transformación lineal, entonces τ es un autovalor de **A** si y solo si $\det(A - \tau I) = 0$.

<u>prueba</u>: Si τ es una autovalor de T entonces existe $\bar{v} \in IR^n$ tal que

$$\bar{v}A = \tau\bar{v} \implies \bar{v}A - \tau\bar{v} = \bar{0}$$

$$(1) \qquad \implies \bar{v}(A - \tau I) = \bar{0}.$$

Pero (1) tiene solución única si $\det(A - \tau I) \neq 0$ y en este caso $\bar{v} \neq \bar{0}$. Por lo tanto, para que existe un autovector es una condición necesaria y suficiente que $\det(A - \tau I) = 0$.

Dado que $T\bar{x} = \bar{x}A$, los autovalores de **A** podemos encontrarlos resolviendo la ecuación $\det(A - \tau I) = 0$.

La ecuación $\det(A - \tau I) = 0$ se llama ecuación característica.

<u>EJEMPLO</u>: Sea

$$T\bar{x} = [x \ y] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ entonces}$$

$$A - \tau I = \begin{bmatrix} 2-\tau & 3 \\ 3 & 2-\tau \end{bmatrix}$$

$\implies \det(A - \tau I) = (2-\tau)^2 - 9 = \tau^2 - 4\tau - 5 = 0$, es la ecuación característica y los autovalores son $\tau_1 = -1$ y $\tau_2 = 5$.

Existe un teorema muy importante, el Teorema de Cayley-Hamilton, el cual dice que toda matriz **A** satisface su polinomio característico. Así, en el ejemplo anterior tendríamos que

$$A^2 - 4A - 5I = \bar{0}.$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Veamos ahora como encontrar los autovectores. Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

su ecuación característica es

$$|A - \tau I| = (1 - \tau)(2 - \tau)(3 - \tau) = 0.$$

y las raices características $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $\tau_3 = 3$. Veamos cuales son los autovectres para $\tau_1 = 1$. Tenemos que

$$(A - \tau_1 I)\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que $\det(A - \tau_1 I) = 0$, $\bar{x}$ tiene infinitos posibles valores. Resolviendo el sistema tenemos que

$$x = -z, \quad y = z.$$

Por lo tanto, si hacemos $z = t$, tenemos que $y = t$, $x = -t$,

$$\Longrightarrow \quad (x, y, z) = (-t, t, t) = t(-1, 1, 1).$$

Así, el vector $(-1, 1, 1)$ es una base del espacio de autovectores con autovalor τ_1.

Analogamente podemos encontrar una base para los autovectores con autovalor $\tau_2 = 2$ y $\tau_3 = 3$. Así

$$\tau_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \bar{v}_1 = t(-1, 1, 1)$$

$$\tau_2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad \bar{v}_2 = t(1, 1, 0)$$

$$\tau_3 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \bar{v}_3 = t(1, 1, 1).$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la matriz de los autovectores, ordenados por columna. A la matriz **P** se le llama *Matriz Modal* de **A**.

DEFINICION: Diremos que dos matrices A y B son *semejantes* si existe una matriz no singular P tal que

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = B.$$

TEOREMA: Si A y B son semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico y los mismos autovalores.

prueba: Sea $P^{-1}\cdot A\cdot P = B$, donde P es no singular, entonces

$$|B - \tau I| = |P^{-1}\cdot A\cdot P - \tau I| = |P^{-1}\cdot A\cdot P - \tau P^{-1}\cdot I\cdot P|$$

$$= |P^{-1}(A - \tau I)P| = |P^{-1}|\cdot|A - \tau I|\cdot|P| = |A - \tau I|\cdot|P^{-1}P|$$

$$= |A - \tau I|.$$

Por lo tanto B y $P^{-1}\cdot A\cdot P$ tienen en mismo polinomio característico y los mismos autovalores.

TEOREMA: Si B es semanjante a A entonces det(B) = det(A).

prueba: Si $P^{-1}\cdot A\cdot P = B$, donde P es no singular, entonces

$$|B| = |P^{-1}\cdot A\cdot P| = |P^{-1}|\cdot|A|\cdot|P| = |A|\cdot|P^{-1}P| = |A|.$$

TEOREMA: Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces A es semajante a D, la matriz diagonal que contiene los autovalores de A en la diagonal. Además, si P es la matriz modal de A, entonces

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = D.$$

prueba: Sea $P = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)$ la matriz modal de A, entonces

$$(A - \tau I)\bar{v}_i = \bar{0} \quad y \quad A\bar{v}_i = \tau_i\bar{v}_i \quad \text{para todo } i\in\{1,..,n\}.$$

Si D es la matriz diagonal de los autovalores, entonces

$$D = (\tau_1\bar{e}_1, \tau_2\bar{e}_2, \ldots, \tau_n\bar{e}_n).$$

Así $P\cdot D = (\tau_1\cdot P\cdot\bar{e}_1, \tau_2\cdot P\cdot\bar{e}_2, \ldots, \tau_n\cdot P\cdot\bar{e}_n)$, pero $P\cdot\bar{e}_i = \bar{v}_i$, y asi $PD = (\tau_1\cdot\bar{v}_1, \tau_2\cdot\bar{v}_2, \ldots, \tau_n\cdot\bar{v}_n)$.

Por otra parte, $AP = A(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n) = (Av_1, Av_2, \ldots, Av_n)$ pero $Av_i = \tau_i\bar{v}_i$, así $AP = (\tau_1\cdot\bar{v}_1, \tau_2\cdot\bar{v}_2, \ldots, \tau_n\cdot\bar{v}_n)$.

$\Longrightarrow \quad PD = AP \quad \Longrightarrow \quad D = P^{-1}\cdot A\cdot P.$

EJEMPLO: Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

habiamos visto que los autovalores son $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 2$, $\tau_3 = 3$ y

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz modal. Por el método de Gauss-Jordán podemos ver que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

de esta forma

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{bmatrix}$$

TEOREMA: Si **A** es una matriz de orden n y $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ son sus autovalores, entonces $\det(A) = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_n$.

prueba: Sea **D** la matriz diagonal de los autovalores de **A** y **P** la matriz modal, entonces

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D \implies \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det(A) = \det(D) = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdots \tau_n.$$

EJEMPLO: En el ejemplo anterior, el lector puede probar que $\det(A) = \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 = 6$.

Transformaciones Ortogonales.

DEFINICION: Una matriz **A** es ortogonal si $A^t \cdot A = A \cdot A^t = I$, es decir si $A^{-1} = A^t$.

TEOREMA: Si **A** es una matriz ortogonal entonces la norma de cualquier vector fila es uno.

prueba: Si **A** es ortogonal entonces $A \cdot A^t = I$. Considere el vector

fila $\bar{v}$, entonces el elemento a_{ii} de $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^t$ es el producto escalar del i-ésimo vector fila de **A**, $\bar{v}$, por el i-ésimo vector columna de $\mathbf{A}^t$, $\bar{v}$. Así $a_{ii} = \bar{v}\cdot\bar{v} = |\bar{v}|^2 = 1 \implies |\bar{v}| = 1$.

<u>TEOREMA</u>: Si **A** es una matriz ortogonal entonces el producto escalar de dos filas distintas es cero.

<u>prueba</u>: Si **A** es ortogonal entonces $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^t = \mathbf{I}$. Así si $i \neq j$, el término a_{ij} de $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^t$ es cero, pero $a_{ij} = \bar{v}_i\cdot\bar{v}_j = 0$.

<u>DEFINICION</u>: Una matriz es simétrica si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$ y que es idempotente si $\mathbf{AA} = \mathbf{I}$.

<u>TEOREMA</u>: Sea **A** una matriz cuadrada tal que la norma de cada vector es uno y el producto escalar de dos filas distintas cualesquiera es cero, entonces **A** es ortogonal.

<u>prueba</u>: Sea $\mathbf{A} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)^t$ una matriz de orden n tal que cada vector fila tiene norma uno y el producto escalar de dos filas distintas es cero, entonces: 1) $|\bar{v}_i| = \bar{v}_i\cdot\bar{v}_j = 1$, para todo i; 2) $\bar{v}_i\cdot\bar{v}_j = 0$ si $i \neq j$. Por lo tanto $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^t = (\delta_{ij})$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Por lo tanto, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^t = \mathbf{I}$.

<u>TEOREMA</u>: Suponga que **A** es una matriz real y simétrica, entonces la matriz modal **P**, una vez normalizada, es ortogonal si todos los autovectores de **A** son distintos.

<u>prueba</u>: Sean $\bar{v}_i$ y $\bar{v}_j$ dos vectores distintas de **P**, entonces

$$\mathbf{A}\bar{v}_i = \tau\bar{v}_i = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{A}\bar{v}_j = \tau\bar{v}_j = 0.$$

Ahora $\tau\bar{v}_i{}^t\bar{v}_j = (\mathbf{A}\bar{v}_i)^t\bar{v}_j = \bar{v}_i{}^t\mathbf{A}^t\bar{v}_j = \bar{v}_i{}^t\mathbf{A}\bar{v}_j$ (**A** simétrica)

$$= \bar{v}_i{}^t(\mathbf{A}\bar{v}_j) = \bar{v}_i{}^t(\tau_j\bar{v}_j) = \tau_j(\bar{v}_i{}^t\bar{v}_j),$$

por lo tanto $\tau\bar{v}_i{}^t\bar{v}_j = \tau_j(\bar{v}_i{}^t\bar{v}_j) \implies (\tau_i - \tau_j)\bar{v}_i{}^t\bar{v}_j = 0$.

Ahora si $\tau_i \neq \tau_j$ si $i \neq j \implies \bar{v}_i{}^t\bar{v}_j = 0$ y si $i = j$, como las filas de **P** están normalizadas, tenemos que $\bar{v}_i{}^t\bar{v}_j = 1$. Por lo tanto $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{-1}$ y **P** es una matriz ortogonal.

EJEMPLO: Sea

$$T\bar{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)\cdot\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$T\bar{x} = \bar{x}^t\cdot\mathbf{A}\cdot\bar{x}$ ==> $|\mathbf{A} - \tau\mathbf{I}| = \tau(1-\tau)(3-\tau) = 0$

==> $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 3$, $\tau_3 = 0$ son los autovalores de **A**. Los vectores característicos son

$$\tau_1 = 1 \implies \bar{v}_1{}^t = (0,\ -1,\ 1)$$

$$\tau_2 = 3 \implies \bar{v}_2{}^t = (2,\ 1,\ 1)$$

$$\tau_3 = 0 \implies \bar{v}_3{}^t = (-1,\ 1,\ 1).$$

Así, la matriz modal es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Normalizando los vectores fila obtenemos

$$\bar{v}_1{}^t = (0,\ -1/2^{1/2},\ 1/2^{1/2})$$

$$\bar{v}_2{}^t = (2/6^{1/2},\ 1/6^{1/2},\ 1/6^{1/2})$$

$$\bar{v}_3{}^t = (-1/3^{1/2},\ 1/3^{1/2},\ 1/3^{1/2}).$$

y la matriz modal ortogonal que buscamos es

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 2/6^{1/2} & -1/3^{1/2} \\ -1/2^{1/2} & 1/6^{1/2} & 1/3^{1/2} \\ 1/2^{1/2} & 1/6^{1/2} & 1/3^{1/2} \end{bmatrix}.$$

Compruebe el lector que $\mathbf{P}^t\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{D}$, donde **D** es la matriz de los autovectores.

TEOREMA: Una matriz cuadrada simétrica es definida positiva si y solo si todos sus autovalores son positivos y es definida negativa si y solo si todos sus autovales son negativos.

prueba: Sea $\mathbf{A}_{m\times m}$ una matriz definida positiva y $\mathbf{M}_{m\times n}$ una matriz

de rango m. Si $\bar{y}$ un vector de dimensión n, entonces $M\bar{y}$ es un vector de dimensión m y por lo tanto $(M\bar{y})^t A(M\bar{y}) \geq 0$, es definida positiva. Ahora, $(M\bar{y})^t A(M\bar{y}) = \bar{y}^t(M^t AM)\bar{y}$, y así $\bar{y}^t(M^t AM)\bar{y}$ también es definido positivo. Como $\bar{y}$ es un vector cualquiera, $M^t AM$ es una matriz definida positiva.

En particular, si **M** es la matriz modal, entonces $M^t AM = D$, la matriz de los autovectores, es definida positiva. Si el autovector τ ubicado en la i-ésima fila y la i-ésima columna de **D** es negativo, entonces $\bar{e}_i{}^t D\bar{e}_i$ es negativo y **D** no sería definida positiva (contradicción). Por lo tanto, todos los autovalores son no negativos.

Por otra parte, si todos los autovectores son no negativos, entonces $\bar{e}_i{}^t D\bar{e}_i \geq 0$ para todo i, y como $\{\bar{e}_i\}$ es una base, entonces para cualquier vector $\bar{v}$, $\bar{v}_i{}^t D\bar{v}_i \geq 0$ y $A = M^t DM$ es definida positiva.

<u>PROBLEMAS</u>.

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 0 \\ -13 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 14 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -5 & -4 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$E = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 0 \\ 3 & 14 & 18 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

ordinaria es una función $y = f(t)$ que contiene a todas las soluciones posibles de dicha ecuación.

Por ejemplo, si $y' = 2t$ entonces $y = t^2 + C$ es una solución general, mientras que $y = t^2 + 1$ es la solución particular que ocurre si $C = 1$. Observe que para que ocurra esta solución particular basta que se dén un número de condiciones suficientes para determinar las constantes de carácter general que aparecen en la solución. En el ejemplo que presentamos basta presentar la condición $y(0) = 1$. Este tipo de condiciones se llaman **condiciones iniciales.**

En este tema solo estudiaremos los siguientes tipos de ecuaciones:

1) ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y primer grado;

2) ecuaciones diferenciales ordinaria lineales de primer orden;

3) Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes

SECCION 3.1: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO

Estas son ecuaciones que pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} = F(y, t). \tag{1}$$

Método de Separación de Variables

Si $F(y, t)$ puede escribirse de la forma $F(y, t) = fty)/g(y)$, entonces

$$\frac{dy}{dt} = f(y)/g(t).$$

$$\Longrightarrow \quad g(y)\cdot dy = f(t)\cdot dt$$

(2) $$\Longrightarrow \quad \int g(y)\cdot dy = \int f(t)\cdot dt + C,$$

donde C es una constante arbitraria. La expresión (2) nos dá una solución general de la ecuación (1).

<u>EJEMPLO 1</u>: $(t^2 + 4)\cdot y' = ty$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{t}{t^2 + 4}dt \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{t}{t^2 + 4}dt$$

$$\Longrightarrow \ln(y) = \tfrac{1}{2}\ln(t^2 + 4) + C_1$$

$$\Longrightarrow \ln(y) - \ln(t^2 + 4)^{1/2} - \ln(C) = 0, \text{ donde } C_1 = \ln(C),\ C > 0;$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{y}{C(t^2 + 4)^{1/2}}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{C(t^2 + 4)^{1/2}} = 1$$

$\Longrightarrow \quad y = C(t^2 + 4)^{1/2}$ es la solución general.

PROBLEMAS:

1.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de variables separables:

a) $yy' = t$

b) $y' = (t^2 + 2)/3y^2$

c) $(2 + t)y' = 2y$

d) $ty' = y$

e) $yy' = \text{sen } t$

f) $(1 - 4t^2)^{1/2}y' = 1$

g) $yy' - e^t = 0;\ y(0) = 4$

h) $t^{1/2} + y^{1/2}y' = 0;\ y(1) = 4$

i) $y(t + 1) + y' = 0;\ y(1) = 4$

j) $tyy' - \ln t = 0;\ y(1) = 0$

k) $(1 + t^2)y' - (1 + y^2) = 0$

l) $(1 - t^2)y' - (1 - y^2)^{1/2} = 0$

m) $dP - kPdt = 0;\ P(0) = P_o$

n) $dT + k(T - 70)dt = 0$

Ecuaciones Con Coeficientes Homogéneos

Suponga que la ecuación diferencial

(3) $$f_1(t, y)\cdot dt + f_2(t, y)\cdot dy = 0$$

tiene coeficientes homogéneos del mismo orden, es decir que

$$f_1(\tau t, \tau y) = \tau^n f_1(t, y) \quad y \quad f_2(\tau t, \tau y) = \tau^n f_2(t, y),$$

entonces mediante el cambio de variables $y = vt$, podemos convertir a la ecuación (3) en una ecuación que puede ser resuelta por el método de variables separables.

Si $y = vt$ entonces $dy = v \cdot dt + t \cdot dv$, por lo tanto

$$f_1(t, vt) \cdot dt + f_2(t, vt) \cdot (v \cdot dt + t \cdot dv) = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{f_1(t, vt)}{f_2(t, vt)} + v\right)dt + t \cdot dv = 0$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{f_1(1, v)}{f_2(1, v)} + v\right)dt + t \cdot dv = 0. \tag{4}$$

La ecuación (5) se puede se puede resolver por el método de variables separables.

<u>EJEMPLO 2</u>: Si $t^2 + 2tyy' - y^2 = 0$ entonces, reagrupando obtenemos que $(t^2 - y^2)dt + 2ty \cdot dy = 0$.

Si hacemos $f_1(t, y) = t^2 - y^2$ y $f_2(t, y) = 2ty$ podemos observar que f_1 y f_2 son funciones homogéneas de grado 2. Veamos, $f_1(\tau t, \tau y) = (\tau t)^2 - (\tau y)^2 = \tau^2(t^2 - y^2) = \tau^2 f_1(t, y)$; y además $f_2(\tau t, \tau y) = 2\tau t \tau y = \tau^2 \cdot 2ty = \tau^2 \cdot f_2(t, y)$.

Si hacemos $y = vt$, $dy = (v \cdot dt + t \cdot dv)$ y sustituimos, obtenemos

$$(t^2 - v^2 t^2)dt + 2vt^2 \cdot (v \cdot dt + t \cdot dv) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{dt}{t} + 2v\frac{dt}{1 + v^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dt}{t} + \int 2v\frac{dv}{1 + v^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \ln(t) + \ln(1 + v^2) = C1$$

$$\Longrightarrow \ln[t(1+v^2)] = C1 \quad \Longrightarrow t(1+v^2) = e^{C1} = C2$$

$$\Longrightarrow t = C2/(1+v^2).$$

Sustituyendo $v = y/t$ y haciendo $C = 1/C2$ obtenemos que la solución general es

$$t^3 + ty^2 = t^2C.$$

PROBLEMAS:

1.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de coeficientes homogéneos:

a) $2ty' = t + y$ b) $yy' = 2t + y$

c) $2tyy' = t^2 + y^2$ d) $(t + y)y' = t - y$

e) $(t^2 - y^2)y' = ty$ f) $t \cdot dy = (3t + 2y) \cdot dt$

g) $t \cdot dy - (2te^{-y/t} + y)dt = 0$ h) $-y^2dt + t(t+y)dy = 0$

i) $[t \sec(t/y) + y]dt - t \cdot dy = 0;\ y(1) = 0.$

Ecuaciones Diferenciales Exactas

Dada una función de dos variables $F = F(t, y)$, su diferencial total es

$$dF = \frac{\delta F}{dt}dt + \frac{\delta F}{dy}dy$$

Si igualamos esta ecuación a cero nos encontramoes que

$$\frac{\delta F}{dt}dt + \frac{\delta F}{dy}dy = 0. \tag{5}$$

Una ecuación diferencial que tenga la forma de la ecuación (5) se llama **Ecuación Diferencial Exacta,** ya que su lado derecho es **exactamente** el diferencial de la función $F = F(t, y)$.

Ahora, en general, si nos encontramos con una ecuación de la forma

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0, \tag{6}$$

¿como sabemos si se trata de una ecuación diferencial exacta?.

De los cursos de cálculo de varias variables sabemos que dada una funcion de dos $F = F(t, y)$, las derivadas cruzadas respecto a las dos variables t e y son iguales, indistintamente del orden en que se calculen, es decir

$$\frac{\delta^2 F}{\delta t \delta y} = \frac{\delta^2 F}{\delta y \delta t}, \tag{7}$$

por lo tanto tenemos que si la ecuación (6) es una ecuación exacta, es de la forma de la ecuación (5) y así

$$M(t, y) = \frac{\delta F}{dt} \quad y \quad N(t, y) = \frac{\delta F}{dy},$$

por lo tanto, aplicando (7) obtenemos,

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta^2 F}{\delta t \delta y} = \frac{\delta^2 F}{\delta y \delta t} = \frac{\delta N}{\delta t};$$

asi, para saber si (6) es una ecuación exacta lo que debemos hacer es verificar si se cumple la condición

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta t}. \tag{8}$$

Observe que, puesto que M y N son funciones de t e y, la ecuación diferencial (6) será una ecuación diferencial de primer grado y primer orden. Por lo tanto puesto que la ecuación (6) es la diferencial total de una función $F = F(t, y)$, podemos escribir (6) de la forma

$$dF(t, y) = 0. \tag{9}$$

Si integramos (9) obtenemos que la solución de la ecuación (6) es de la forma $F(t, y) = C$, donde C es una constante. En lo que queda de sección vamos a establecer un método que nos permita encontrar la función $F(t, y)$ para la ecuación $M \cdot dt + N \cdot dy = 0$.

Para comenzar, sabemos que $M = \delta F/\delta t$, por lo que F será la integral indeterminada de M respecto a t, así

$$F(t, y) = \int M(t, y) \cdot dt + \emptyset(y).$$

Puesto que M es el resultado de la derivada parcial de F respecto a t, para encontrar F debemos integral parcialmente M respecto a t. El término $\emptyset(y)$ aparece porque al derivar F respecto a t, toda función que dependa solamente de y se hace cero. Por lo tanto, para hallar la solución de la ecuación diferencial (6) solo nos falta hallar $\emptyset(y)$.

Como $N = \delta F/\delta y$, tenemos que

$$N(t, y) = \frac{\delta(\int M(t, y) \cdot dt)}{\delta y} + \emptyset'(y),$$

de donde

$$\emptyset(y) = \int \frac{\delta(\int M(t, y) \cdot dt)}{\delta y} dy - \int N(t, y) \cdot dy.$$

Este procedimiento se explica mejor mediante un ejemplo.

<u>EJEMPLO 3</u>: Resolver la ecuación exacta $ty^2 \cdot dt + t^2 y \cdot dy = 0$.

Hacemos $M = ty^2$ y $N = t^2 y$, pero $\delta M/\delta y = 2ty = \delta N/\delta t$, por lo tanto la ecuación es exacta.

Aplicando el método sabemos que

$$F(t, y) = \int M \cdot dt = \int ty^2 dt = \tfrac{1}{2} t^2 y^2 + \emptyset(y).$$

Ahora, $N = \delta F/\delta y \implies N = t^2 y + \emptyset'(y) \implies \emptyset'(y) = N - t^2 y$

$\implies \emptyset(y) = \int N - t^2 y dy = \int t^2 y - t^2 y \, dy = \int 0 \, dy = C$ (constante).

Por lo tanto la solución general es

$$F(t, y) = \tfrac{1}{2} t^2 y^2 + C.$$

PROBLEMAS:

1.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

a) $(2t - 3y)dt + (2y - 3t)dy$ b) $ye^t dt + e^t dy = 0,\ y(0) = 5$

c) $(3y^2 + 10ty^2)dt + (6ty - 2 + 10t^2y)dy = 0$

d) $2\cos(2t - y)dt - \cos(2t - y)dy = 0,\ y(\pi/4) = 0$

e) $(4t^3 - 6ty^2)dt + (4y^3 - 6ty)dy = 0$

f) $2y^2e^{ty^2}dt + 2tye^{ty^2}dy = 0$

g) $-y\cdot dt/(t^2+y^2) + t\cdot dy/(t^2+y^2) = 0,\ y(1) = 1$

h) $te^{-t^2-y^2}dt + ye^{-t^2-y^2}dy = 0$

i) $[y/(t - y)]^2dt + [t/(t - y)]^2dy = 0$

j) $e^y(t\cos(ty) + \operatorname{sen}(ty))\cdot dy + ye^y\cos(ty)\cdot dt = 0$

factores integrantes

En ocaciones se puede convertir una ecuación diferencial de primer orden no exacta en una ecuación exacta multiplicando ambos miembros de la igualdad por una función particular. Esta función particular se denomina **factor integrante.**

EJEJMPLO: Considere la ecuación diferencial $y^2dt + tydy = 0$. Esta ecuación no es exacta porque si $M = y^2$ y $N = ty$, tenemos que

$$\delta M/\delta y = 2y \neq \delta N/\delta t = y,$$

pero si multiplicamos dicha ecuación por el término t, obtenemos

$$ty^2\cdot dt + t^2y\cdot dy = 0$$

que es la ecuación exacta que resolvimos en el ejemplo anterior.

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas

Estas son ecuaciones de la forma

$$y' + P(t)y = 0.$$

Por lo tanto podemos escribir que

$$dy/dt = -P(t)y,$$

$$\Longrightarrow\ dy/y = -P(t)\cdot dt$$

$$\Longrightarrow \int (1/y)\cdot dy = -\int P(t)\cdot dt$$

$$\Longrightarrow \ln(y) = -\int P(t)\cdot dt + C1.$$

Por lo tanto la solución general es,

$$y = C\cdot e^{-\int P(t)dt},$$

donde $C = e^{C1}$, es una constante.

<u>EJEMPLO</u> <u>4</u>: Resuelva la ecuación $y' + ty = 0$.

$$y' + ty = 0 \Longrightarrow dy/y = -t\cdot dt$$

$$\Longrightarrow \ln(y) = -t^2/2 + C1$$

$$\Longrightarrow y = C\cdot e^{-t^2/2},$$

es la solución general.

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Primer Orden No Homogéneas

Son de la forma $y' + P(t)\cdot y = Q(t)$. Esta ecuación puede escribirse también de la forma

(10) $$dy + [P(t)y - Q(t)]\cdot dt = 0.$$

Para encontrar la solución general de esta ecuación, trataremos de encontrar un factor integrante. Sea $I(t)$ el factor integrante de la ecuación (10) , entonces

(11) $$I(t)\cdot dy + I(t)\cdot[P(t)y - Q(t)]\cdot dt = 0.$$

Puesto que (11) es una ecuación exacta, hacemos

$$M = I(t) \text{ y } N = I(t)\cdot[P(t)y - Q(t)].$$

El criterio de exactitud nos dice que $\delta M/\delta t - N/\delta y = 0$. Por lo tanto

$$I'(t) - P(t)\cdot I(t),$$

que es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden. Por lo tanto, el factor integrante es

$$A \cdot e^{\int P(t)dt} \tag{12}$$

donde A es una constante cualquiera. Como quiera que nos sirve cualquier solución particular de (12) como factor integrante podemos usar como tal a la expresión

$$e^{\int P(t)dt} \tag{13}$$

Así, considere la ecuación diferencial de primer orden lineal y no homogénea

$$dy + [P(t)y - Q(t)] \cdot dt = 0,$$

entonces multiplicando por el factor integrante obtenemos

$$e^{\int P(t)dt} dy + e^{\int P(t)dt} [P(t)y - Q(t)] \cdot dt = 0. \tag{14}$$

La ecuación (14) es exacta, por lo que solo tenemos que aplicarle el procedimiento para resolver ecuaciones exactas.

$$F(t, y) = \int e^{\int P(t)dt} dy + \emptyset(t) = ye^{\int P(t)dt} + \emptyset(t)$$

esto implica que

$$\delta F/\delta t = P(t)ye^{\int P(t)dt} + \emptyset'(t) = e^{\int P(t)dt} [P(t)y - Q(t)] = N$$

$$\Longrightarrow \emptyset'(t) = -e^{\int P(t)dt} Q(t)$$

integrando obtenemos que

$$\Longrightarrow \emptyset(t) = -\int Q(t) \cdot e^{\int P(t)dt} dt$$

Así, la solución general de la ecuación (10) es

$$ye^{\int P(t)dt} - \int Q(t) \cdot e^{\int P(t)dt} dt = A, \tag{15}$$

donde A es una constante. Despejando y(t) de (15) obtenemos que

$$(16) \qquad y(t) = e^{-\int P(t)dt}\left(A + \int Q(t)\cdot e^{\int P(t)dt}\,dt\right).$$

La ecuación (16) nos dá la solución general de (10) en función de t.

<u>EJEMPLO 5</u>: Resuelva la ecuación $ty' - 2y = t^2$.

La ecuación la podemos escribir como

$$(17) \qquad y' - (2/t)y = t.$$

Sea $P(t) = -2/t$ y $Q(t) = t$, entonces sabemos que $e^{\int P(t)dt}$ es un factor integrante. Pero, $\int P(t)dt = \int(-2/t)dt = -2\ln(t)$. Por lo tanto el factor integrante es $I(t) = e^{\ln(1/t^2)} = 1/t^2$. Multipliquemos (17) por $1/t^2$, entonces

$$(1/t^2)y' - (2/t^3)y = 1/t$$

$$(18) \qquad \Longrightarrow \quad (1/t^2)dy - (2y/t^3 + 1/t)dt = 0.$$

La ecuación (18) es exacta y aplicando el procedimiento para resolver ecuaciones exactas visto anteriormente se verifica que

$$y = t^2\ln(t) + Ct^2$$

es la solución general de la ecuación.

PROBLEMAS:

1.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

a) $y' + y/t = 3t + 4$ b) $y' + 2y/t = 3t + 1$

c) $y' = e^t - y$, $y(0) = 3/2$ d) $y' + 2y = \text{sen } t$, $y(\pi/2) = 2/5$

e) $y' - y = \cos t$, $y(0) = ½$ f) $y' + 2ty = 2t$, $y(0) = -1$

g) $(3y + \text{sen } 2t)dt - dy = 0$ h) $[(y - 1)\text{sen } t]dt = dy$

i) $(t - 1)y' + y = t^2 - 1$ j) $y' + 5y = e^{5t}$

Ecuaciones de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es una ecuación diferencial de la

forma

(17) $$y' + R(t)y = T(t)y^m.$$

Esta ecuación tiene la virtud de que, mediante un procedimiento relativamente simple, puede convertirse en una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea.

Si multiplicamos (17) por y^{-m}, obtenemos

$$y^{-m}y' + R(t)y^{1-m} = T(t).$$

Si hacemos el cambio de variable $z = y^{1-m}$, entonces

(18) $$\frac{dz}{dt} = (1 - m)\cdot y^{-m}\cdot\frac{dy}{dt}$$

==> $$\frac{1}{1 - m}\cdot\frac{dz}{dt} = y^{-m}\cdot\frac{dy}{dt}$$

==> $$\frac{1}{1 - m}\cdot\frac{dz}{dt} + R(t)\cdot z = T(t)$$

==> (19) $$z'(t) + (1 - m)\cdot R(t)\cdot z(t) = (1 - m)\cdot T(t).$$

La ecuación (19) es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden y primer grado, que ya aprendimos a resolver en los párrafos anteriores.

<u>EJEMPLO 6</u>: Resuelva la ecuación $y' + (2/t)y = -ty^2$.

Esta es una ecuación de Bernoulli. Por lo tanto multiplicamos ambos lados de la ecuación por y^{-2}, resultando

(20) $$y^{-2}y' + (2/t)y^{-1} = -t.$$

Si multiplicamos (20) por t y hacemos el cambio de variable $z = y^{-1}$ entonces $z' = -y^{-2}y'$ y nos queda

$$==> \ -tz' + 2z = -t^2,$$

(21) $$==> \ tz' - 2z = t^2,$$

que es la ecuación que aparece en el ejemplo 5.

PROBLEMAS:

1.- Resuelva las siguientes ecuaciones del tipo Bernoulli:

a) $y' + 2ty = ty^2$ b) $y' + y/t = ty^2$

c) $y' + y/t = ty^{1/2}$ d) $y' - y = t^3y^{1/3}$

e) $yy' - 2y^2 = e^t$

SECCION 3.2: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

El Caso Homogéneo

Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales homogéneas con coeficientes constantes de orden n son aquellas que pueden escribirse de la forma

(22) $$c_oy + c_1y' + c_2y'' + \ldots + c_ny^{(n)} = 0,$$

donde c_o, c_1, c_2,..., c_n son números reales.

Observe que si hago $y = Ce^{rt}$, entonces

(23) $$y' = rCe^{rt},\ y'' = r^2Ce^{rt},\ldots,\ y^{(n)} = r^nCe^{rt}.$$

Si sustituimos (23) en (22) obtenemos que

$$c_oCe^{rt} + c_1rCe^{rt} + c_2r^2Ce^{rt} + \ldots + c_nr^nCe^{rt} = 0$$

$$\Longrightarrow\ Ce^{rt}(c_o + c_1r + c_2r^2 + \ldots + c_nr^n) = 0$$

$$\Longrightarrow\ Ce^{rt} = 0 \ \text{ó}\ c_o + c_1r + c_2r^2 + \ldots + c_nr^n = 0,$$

pero como $Ce^{rt} \neq 0$ para toda t, necesariamente debe suceder que

(24) $$c_o + c_1r + c_2r^2 + \ldots + c_nr^n = 0.$$

La ecuación (24) es conocida como la **ecuación característica** de la ecuación diferencial (22) y nos dá todas las posibles soluciones de r para las que $y = Ce^{rt}$ es solución de (22).

Las raices de la ecuación característica (24) se llaman **raices características** pueden ser todas distintas, estar repetidas algunas de ellas o ser números complejos. Analizaremos cada

caso por separado.

CASO RAICES DIFERENTES. En este caso la ecuación característica tiene n soluciones distintas $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Por lo tanto para cada r_i tenemos que $y_i = C_i e^{r_i t}$ es solución particular de (22), donde C_i es una constante. De esta manera la solución general de (22) es

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \ldots + C_n e^{r_n t}.$$

<u>EJEMPLO 7</u>: Resuelva la ecuación $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.

La ecuación característica de esta ecuación diferencial es

$$r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0;$$

las raices de esta ecuación son $r_1 = 1$, $r_2 = -2$ y $r_3 = -1$. Por lo tanto la solución general es

$$y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-1t}.$$

Observe que para encontrar una solución particular, necesitamos tres (3) condiciones iniciales.

CASO RAICES REPETIDAS. Considere la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = 0 \tag{25}$$

con condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. La ecuación característica de (25) es

$$r^2 - 2r + 1 = 0;$$

esta ecuación tiene una sola raiz característica repetida: $r = 1$. Si aplicamos el mismo criterio que en el caso en que todas las raices caracteristicas son distintas para hallar la solución general, obtendríamos como solución: $y = C \cdot e^{t}$. Pero como tenemos dos condiciones iniciales, sabemos entonces que

$$y(0) = 0 = C \quad y \quad y(1) = 1 = C \cdot e,$$

por lo tanto tendriamos que $C = 0$ y que $C = e^{-1}$, lo que nos dá una solución inconsistente y por lo tanto la solución $y = C \cdot e^{t}$ no

es la solución general de la ecuación (25). Para encontrar la solución general tenemos entonces que hallar otros término que satisfaga (25) y que sea linealmente independiente de $y = C \cdot e^t$. Una expresión que satisface este requisito es $y = C \cdot te^t$. Por tanto podemos decir que la solución general en este caso es

(26) $$y = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot te^t.$$

En general se puede probar que si una raíz característica r está repetida $m+1$ $(0 \leq m < n)$ veces, entonces

$$y = C_0 \cdot e^t + C_1 \cdot te^t + \ldots + C_m \cdot t^m e^t,$$

es una solución particular de (22).

Probaremos este resultado para una ecuación de segundo orden. Considere la ecuación diferencial

(27) $$y'' + ay' + by = 0.$$

Su ecuación característica será

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Como hemos supuesto que existe una raiz repetida entonces, si $r = r_1$ es esa solución tenemos que

$$(r - r_1)^2 = r^2 + ar + b = 0$$

$$\Longrightarrow \quad r^2 - 2r_1 r + r_1 = r^2 + ar + b = 0$$

(28) $$\Longrightarrow \quad a = -2r_1 \quad y \quad b = r_1^2.$$

Ahora, si $y = C_1 e^{rt} + C_2 te^{rt}$, entonces

$$y' = e^{rt}(C_1 r + C_2 + C_2 rt) \qquad y$$

$$y'' = e^{rt}(C_1 r^2 + 2C_2 r + C_2 r^2 t).$$

Sustituyendo en (27) y reordenando los términos obtenemos

$$e^{rt}[C_1(r^2 + ar + b) + tC_2(r^2 + ar + b) + C_2(2r + a)] = 0$$

pero $r^2 + ar + b = 0 \Longrightarrow e^{rt}C_2(2r + a)] = 0$. Ahora $e^{rt} \neq 0$ para toda t y C_2 es un número arbitrario, por lo tanto $2r + a = 0$, lo

que implica que $a = -2r$, que es la igualdad (28). Esto demuestra el teorema.

Observe que (26) será solución de (25) si y solo si la solución de la ecuación característica está repetido, de forma tal que $a = -2r$.

<u>EJEMPLO 8</u>: Si $y'' + 2y' + y = 0$, entonces la ecuación característica será $r^2 + 2r + 1 = 0$ y las raiz característica será $r = 1$ (única). Por lo tanto la solución general será

$$y = C_1e^t + C_1te^t$$

<u>EJEMPLO 9</u>: Si $y''' + 3y'' - y = 0$, entonces la ecuación característica será $r^3 + 3r^2 - 4 = 0$. Las raices características serán:

$$r_1 = -2,\ r_2 = -2,\ r_3 = 1.$$

Por lo tanto la solución general será

$$y = C_1e^{-2t} + C_1te^{-2t} + C_3e^t.$$

CASO RAICES COMPLEJAS. El caso de raices características complejas nos interesará solo cuando las ecuación diferencial sea de 2° orden, pero antes de analizar el caso complejo demostraremos los siguientes teoremas:

TEOREMA: Considere la ecuación diferencial

(29) $$\alpha y'' + \beta y' + \tau y = 0.$$

Si las raices de la ecuación característica de (29) son complejos conjugados, de forma que $r_1 = a + ib$ y $r_2 = a - ib$; entonces, la solución general de la ecuación (29) puede escribirse de la forma

$$y = e^{at}[C_1\cos bt + C_2 i\,\mathrm{sen}\, bt],$$

donde C_1 y C_2 son constantes cualesquiera.

prueba: La ecuación característica de la ecuación (29) es

$$\alpha r^2 + \beta r + \tau = 0$$

y sus raices características son de la forma

$$r_1,\ r_2 = \tfrac{1}{2}[-\beta \pm (\beta^2 - 4\alpha\tau)^{1/2}].$$

Por lo tanto para que r_1 y r_2 sean complejos tiene que suceder que $\beta^2 - 4\alpha\tau < 0$, por lo tanto r_1 y r_2 son complejos conjugados y pueden escribirse de la forma

$$r_1,\ r_2 = \tfrac{1}{2}[-\beta \pm i(4\alpha\tau - \beta^2)^{1/2}].$$

Si denotamos $a = -\tfrac{1}{2}\beta$ y $b = (4\alpha\tau - \beta^2)^{1/2}$, entonces podemos escribir las raices características como

$$r_1 = a + ib, \quad r_2 = a - ib.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (29) es

$$\Longrightarrow \quad y = C_3e^{(a + ib)t} + C_4e^{(a - ib)t}$$

$$\Longrightarrow \quad y = e^{at}(C_3e^{ibt} + C_4e^{-ibt})$$

$$\Longrightarrow \quad y = e^{at}[C_3\mathrm{cis}(bt) + C_4\mathrm{cis}(-bt)]$$

$$\Longrightarrow \quad y = e^{at}[C_3(\cos bt + i\,\mathrm{sen}\, bt) + C_4(\cos bt - i\,\mathrm{sen}\, bt)],$$

$$\Longrightarrow \quad y = e^{at}[(C_3 + C_4)\cos bt + (C_3 - C_4)i\,\mathrm{sen}\, bt].$$

Si hacemos $C_1 = C_3 + C_4$ y $C_2 = C_3 - C_4$, entonces

$$\Longrightarrow \quad y = e^{at}[C_1\cos bt + C_2 i\,\mathrm{sen}\, bt],$$

lo que demuestra el teorema.

XXXXXX

<u>EJEMPLO</u>: Si $y'' + y = 0$, entonces la ecuación característica es

$$r^2 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow r_1 = i, \quad r_2 = -i,$$

por lo tanto la solución general es

$$y = e^t[C_1\cos t + C_2\mathrm{sen}\, t].$$

El Caso no Homogéneo

Estas son ecuaciones de la forma

$$y'' + ay' + by = R(t).$$

TEOREMA: Considere la ecuación diferencial

(30) $$y'' + ay' + by = R(t),$$

la solución general de la ecuación (30) es de la forma

$$y = y_h + y_p$$

donde y_h es la solución de la ecuación homogénea

$$y'' + ay' + by = 0,$$

y y_p es una solución particular de (30).

Prueba Definamos el operador funcional

$$L(f) = f(t)'' + af(t)' + bf(t),$$

entonces $L(f) = R(t)$ sería la ecuación diferencial (30).

El operador $L(f)$ es un operador lineal. Para probar esto solo hay que ver que $L(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1L(f_1) + c_2L(f_2)$. Veamos.

$$L(c_1f_1 + c_2f_2) = (c_1f_1 + c_2f_2)'' + a(c_1f_1 + c_2f_2)' + b(c_1f_1 + c_2f_2)$$

$$= (c_1f_1)'' + (c_2f_2)'' + a(c_1f_1)' + a(c_2f_2)' + b(c_1f_1) + b(c_2f_2)$$

$$= c_1f_1'' + c_2f_2'' + ac_1f_1' + c_2f_2' + bc_1f_1 + bc_2f_2$$

$$= c_1f_1'' + ac_1f_1' + bc_1f_1 + c_2f_2'' + c_2f_2' + bc_2f_2$$

$$= c_1(f_1'' + af_1' + bf_1) + c_2(f_2'' + af_2' + bf_2)$$

$= c_1L(f_1) + c_2L(f_2)$. lo que prueba la linealidad de $L(f)$.

Sean $y_1 = f_1(t)$, $y_2 = f_2(t)$ don funciones cualesquiera que sean soluciones de (30), entonces

$$L(y_1) = L(y_2) = R(t)$$

$$\Longrightarrow L(y_1) - L(y_2) = R(t) - R(t) = 0$$

$$\Longrightarrow L(y_1 - y_2) = 0,$$

y por lo tanto $(y_1 - y_2)$ es solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Sea $y_h = y_1 - y_2$. Puesto que $(y_1 - y_2)$ son soluciones cualesquiera, entonces sea y_1 la solución general de (30), entonces tendríamos que $y = y_1$; y sea y_2 una solución particular cualquiera $y_2 = y_p$. De esta manera tenemos que

$$y_h = y - y_p \quad ==> \quad y = y_h + y_p,$$

lo que demuestra el teorema.

XXXXXX

Del teorema anterior aprendimos que la solución general de (30) es la suma de la solución general de la ecuación homogénea $L(f) = 0$ y una solución particular de $L(f) = R(t)$. La solución general de la ecuación homogénea (y_h) ya sabemos como hallarla. Lo que no sabemos es como encontrar una solución particular, y_p, de (30). Existen varios métodos pero aquí solo estudiaremos el método de los coeficientes indeterminados. Veamos en que consiste dicho método:

Si $y'' + ay' + by = R(t)$ es la ecuación diferencial que queremos resolver, seleccionamos una solución particular que sea "similar" a $R(t)$. Así si

$R(t) = Ct^n$ seleccionamos $y_p = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$;

$R(t) = Ce^{rt}$ seleccionamos $y_p = Ae^{rt}$, y si

$R(t) = C\cos(\alpha t)$ o $C\text{sen}(\alpha t)$ seleccionamos $y_p = A\cos \alpha t + B\text{sen}\, \alpha t$,

pero si un término de y_p coincide con un término de y_h entonces multiplico y_p por la mínima potencia de t que evita la duplicación. Luego de encontrar el candidato a y_p lo sustituyo en la ecuación original y encuantro los coeficientes. Veamos algunos ejemplos que ilustren el método.

<u>EJEMPLO</u>: Resuelva la ecuación $y'' -3y' + 2y = t^2$.

La solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h = C_1e^t + C_2e^{2t}.$$

Como $R(t) = t^2$, el candidato a solución particular es

$$y_p = a_0 + a_1t + a_2t^2,$$

por lo tanto,

$$y_p' = a_1 + 2a_2t, \quad y_p'' = 2a_2.$$

Sustituyendo en la ecuación original obtenemos que

$$2a_2 - 3(a_1 + 2a_2t) + 2(a_0 + a_1t + a_2t^2) = t^2$$

$$\Longrightarrow \quad a_2t^2 + (2a_1 - 6a_2)t + (2a_0 - 3a_1t + 2a_2) = t^2$$

$$(31) \quad \begin{cases} 2a_2 = 1 \\ 2a_1 - 6a_2 = 0 \\ 2a_0 - 3a_1 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema de ecuaciones (31) es

$$a_0 = 7/2, \; a_1 = 3/2, \; a_2 = 1/2,$$

por lo tanto la solución particular es

$$y_p = 7/2 + 3t/2 + t^2/2,$$

y la solución general de la ecuación es

$$y = C_1e^t + C_2e^{2t} + 7/2 + 3t/2 + t^2/2.$$

<u>EJEMPLO</u>: Resuelva la ecuación $y'' - 2y' = t + 2e^t$.

La solucion de la ecuación homogénea es

$$y_h = C_1 + C_2e^{2t}.$$

Ahora $R(t) = t + 2e^t$, por lo que la elección de y_p sería

$$y_p = (A + Bt) + Ce^t,$$

pero el término constante A aparece repetido en y_h, por tanto multiplico por t, y así el candidato a solución particular se convierte en

$$y_p = (At + Bt^2) + Ce^t,$$

$$\Longrightarrow \quad y_p' = A + 2Bt + Ce^t, \qquad y_p'' = 2B + Ce^t.$$

Sustituyendo obtenemos

$$(2B + ce^t) - 2(A + 2Bt + Ce^t) = t + 2e^t$$

$$\Longrightarrow \quad (2B - 2A) - 4Bt - Ce^t = t + 2e^t$$

$$\Longrightarrow \quad 2B - 2A = 0; \quad -4B = 1; \quad -C = 2$$

$$\Longrightarrow \quad A = B = -1/4, \quad c = -2$$

por lo tanto la solución particular es

$$y_p = -(1 + t)/4 - 2e^t$$

y la solución general es

$$y = C_1 + C_2e^{2t} -(1 + t)/4 - 2e^t.$$

<u>EJEMPLO</u>: Resuelva la ecuación $y''' + 4y' = 5te^t$.

La solución homogénea es

$$y_h = C_1 + C_2\cos 2t + C_3\operatorname{sen} 2t,$$

pero $R(t) = 5te^t$, por lo tanto

$$y_p = (A + Bt)e^t, \qquad y_p' = (A + Bt)e^t + Be^t,$$

$$y_p'' = (A + Bt)e^t + 2Be^t, \quad y_p''' = (A + Bt)e^t + 3Be^t.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial obtenemos

$$(A + Bt)e^t + 3Be^t + 4(A + Bt)e^t + 4Be^t = 5te^t$$

$$\Longrightarrow (5A + 7B)e^t + 5Bte^t = 5te^t$$

$$\Longrightarrow 5A + 7B = 0, \quad 5B = 5,$$

$$\Longrightarrow \quad A = -7/5, \quad B = 1.$$

Por lo tanto, $y_p = -7e^t/5 + te^t$, y la solución general es

$$y = C_1 + C_2\cos 2t + C_3\operatorname{sen} 2t -7e^t/5 + te^t.$$

PROBLEMAS:

1.- Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - 3y' + 2y = 2t$ b) $y'' - 2y' - 3y = t^2 + 1$

c) $y'' + y = t^3$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

d) $y'' + 4y = 4$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

e) $y'' + 2y' = 2e^t$ f) $y'' - 9y = 5e^{3t}$

g) $y'' - 10y' + 25y = 5 + 6e^t$ h) $16y'' - 8y' + y = 4(t + e^t)$

i) $y'' + y' = 2 \operatorname{sen} t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$

j) $y'' + y' - 2y = 3 \cos 2t$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$

k) $y'' + 9y = \text{sen } 3t$ l) $y''' - 3y' + 2y = 2e^{-2t}$

m) $y'' + 4y' + 5y = \text{sen } t + \cos t$

n) $y''' - y'' = 4t^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$

o) $y' - 4y = te^t - te^{4t}$, $y(0) = 1/3$.

SECCION 3.3: EL MODELO DE CRECIMIENTO DE HARROD-DOMAR

Cuando analizamos el modelo de Harrod-Domar en el capítulo anterior, llegamos a la relación

$$\frac{1}{s}\frac{dI}{dt} = \frac{1}{v} I, \tag{32}$$

donde s es la propensión al ahorro y v, las unidades de capital necesarias para producir una unidad de producto, I la inversión y t el tiempo.

La ecuación (32) se puede expresar como la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden:

$$I'(t) - (s/v)T(t) = 0, \quad I(0) = I_o \tag{33}$$

Si resolvemos (32) como una ecuación diferencial tendríamos que la ecuación característica es

$$r - s/v = 0 \tag{34}$$

por lo que la raiz característica es $r = s/v$ y la solución general será

$$I(t) = I_o e^{st/v}, \tag{35}$$

que es la solución que habíamos obtenido anteriormente.

Versión Dinámica del Modelo de Harrod-Domar.

Hasta ahora hemos supuesto que, en el modelo de Harrod-Domar, la propensión al ahorro (s) y las unidades de capital necesarias para producir una unidad de producto (v) permanecen constantes, supuesto poco realista. ¿Como se altera el modelo si s y

v varían en el tiempo, es decir que $s = s(t)$ y $v = v(t)$? Esto significaría que la ecuación (32) se transforma en

$$\frac{1}{s(t)} \frac{dI}{dt} = \frac{1}{v(t)} I, \tag{36}$$

$$\Longrightarrow \quad I' - (s(t)/v(t)) \cdot I = 0$$

$$\Longrightarrow \quad I(t) = I_o e^{\int_o^t [s(t)/v(t)]\, dt} \tag{37}$$

La solución (37) difiere de la solución (35) en el término $\int_o^t [s(t)/v(t)]\, dt$. La diferencia está en que cuando s/v varían en el tiempo, el crecimiento de la inversión también debe variar en el tiempo.

SECCION 3.4: MODELO DE CRECIMIENTO DE SOLOW.

El modelo de Harrod-Domar supone una función de producción de coeficientes fijos, lo que no permite la sustitución del capital por trabajo (o viceversa).

Suponga que puede haber sustitución de capital por trabajo y que la función de producción tiene rendimientos a escala constantes, entonces es homogénea de grado uno; es decir, si $Q = F(K, L)$ es la función de producción donde **Q** es el producto, **K** el capital y **L** la cantidad de trabajo entonces para todo τ,

$$F(\tau K, \tau L) = \tau F(K, L), \tag{38}$$

esto significa que si la cantidad de factores se duplica el producto resultante también se duplicará.

En particular si $\alpha = 1/L$ entonces

$$q = Q/L = \alpha F(K, L) = F(\alpha K, \alpha L) = F(K/L, 1) = f(k)$$

Así, podemos escribir el *producto per cápita*, q (= Q/L), como una función del *capital per cápita*, k (= K/L), por lo tanto

(39) $$Q_t = L_t \emptyset(k)$$

Cuando un trabajador aumenta su destreza, puede hacer el trabajo de varios trabajadores principiantes; ésto puede interpretarse como si una empresa contratara a más de un trabajador. Esto nos conduce a expandir, antes de continuar, la definición de cantidad de trabajo, incluyendo en esta definición, no solo el número de horas de trabajo sino también un elemento de mejoramiento técnico.

Sea s la propensión al ahorro, suponga que la mano de obre crece a una tasa Ω y que τ es el crecimiento de las unidades "efectivas" de trabajo por persona. Suponga que hay pleno empleo entonces

(40) $$K' = dK/dt = s \cdot Q,$$

(41) $$L_t = L_o \cdot e^{(\Omega+\tau)t}$$

es decir que el crecimiento del capital es igual al ahorro (pleno empleo de capital) y la fuerza de trabajo crece a una tasa de $\Omega+\tau$. Si sustituimos (39) y (41) en (40) obtenemos

(42) $$K' = s \cdot L_o \cdot e^{(\Omega+\tau)t} \cdot \emptyset(k).$$

Por otra parte, $k = K/L$, entonces

$$K_t = k \cdot L_t = k \cdot L_o \cdot e^{(\Omega+\tau)t}$$

$$\Longrightarrow K' = dK/dt = L_o \cdot e^{(\Omega+\tau)t} dk/dt + k \cdot \Omega+\tau \cdot L_o \cdot e^{(\Omega+\tau)t}$$

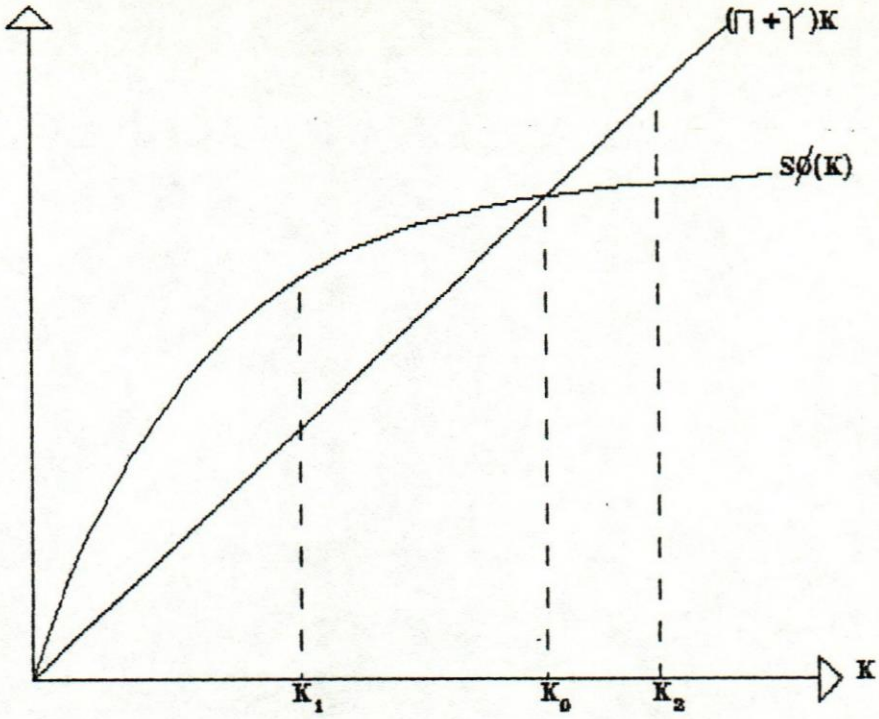
(43) $$\Longrightarrow K' = L_o e^{(\Omega+\tau)t} \cdot k' + k \cdot \Omega+\tau \cdot L_o \cdot e^{(\Omega+\tau)t}.$$

igualando (42) y (43) y dividiendo por $L_o e^{(\Omega+\tau)t}$ obtenemos

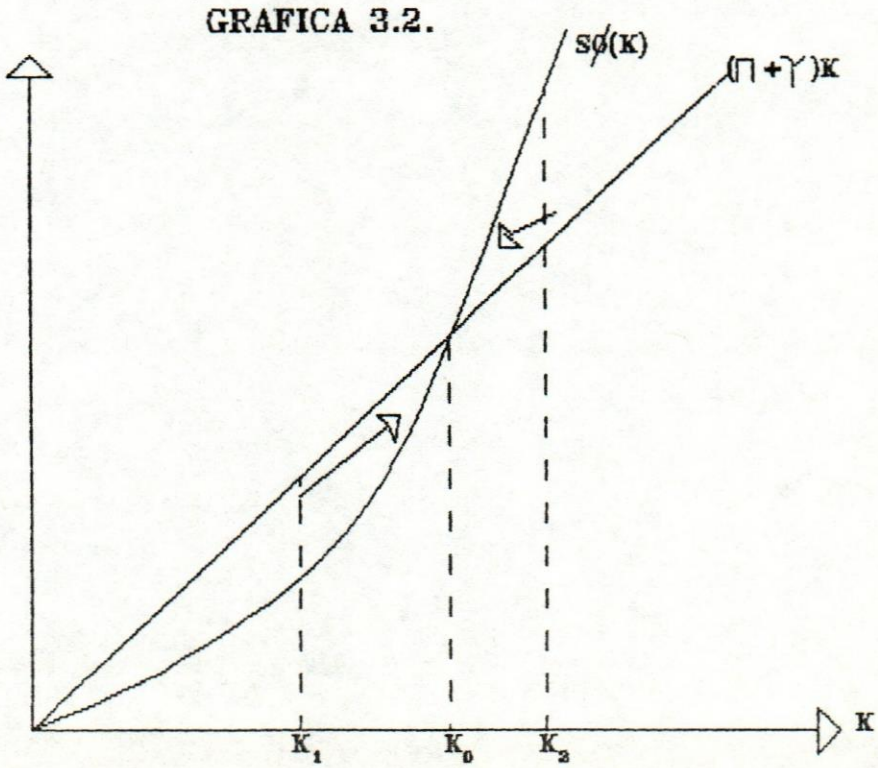
(44) $$k' + k(\Omega+\tau) = s\emptyset(k),$$

que nos representa, mediante una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, un modelo del comportamiento del capital per capita a largo plazo. Si por métodos econométricos podemos

GRAFICA 3.1.



GRAFICA 3.2.



estimar $\Omega+\tau$, s y $\emptyset k$), obtendríamos una solución concreta de (44). Veamos que implicación de política tiene la ecuación (44).

Suponga que la producción tiene rendimientos marginales decrecientes y que $k' = 0$, entonces la relación capital-trabajo no varia en el tiempo y la relación capital-trabajo permanecerá estable. Así $(\Omega+\tau)k = s\emptyset(k)$. Por lo tanto $k = k_o$ en la gráfica 3.1. Este se dice que es el punto de equilibrio a largo plazo. Suponga que por cualquier motivo, k disminuye hasta k_1, entonces $k' > 0$, es decir la relación capital-trabajo de pleno empleo está creciendo. Esto sucede en este caso porque la cantidad de capital está crecientdo más rápido que la cantidad de trabajo, lo que hace que aumente la productividad del trabajo y el producto potencial crezca, por consiguiente hacia su equilibrio de largo plazo. Contrariamente, si $k > k_o$ ($k = k_2$ por ejemplo), entonces el capital está creciendo más lentamente que la fuerza de trabajo lo que hace que disminuya k ($k' < 0$) y la productividad q, disminuyendo así el producto potencial.

Suponga ahora que se trata de una economía muy pobre y que la producción tiene, por consiguiente, rendimientos marginales crecientes (gráfica 3.2.). Si $k < k_o$, entonces $(\Omega+\tau)k > s\emptyset(k)$ y el capital estará creciendo más lento que la fuerza de trabajo, lo que hace que disminuya k y por consiguiente la productividad y el producto potencial y la economía tenderá a autoempobrecerce. En este caso ¿Cuales serán las soluciones de política económica que tienen los gobiernos? responda esta pregunta como ejercicio.

PROBLEMAS:

1.- Demostrar que si el capital crece a una tasa θ, la inversión neta debe crecer también a una tasa θ.

2.- Haga el análisis de convergencia de la relación capital per cápita a largo plazo cuando la economía tiene rendimientos marginales crecientes.

3.- En la pregunta anterior, si la economía cae en un proceso de autoempobrecimiento, que opciones de política puede tener el gobierno.

CAPITULO 4

ECUACIONES EN DIFERENCIA FINITA

Frecuentemente en economía, las variables son funciones discretas del tiempo, dada las dificultades que implica realizar mediciones contínuas. Este capítulo lo dedicaremos a estudiar variables discretas dependientes del tiempo, en el supuesto de que cadea intervalo de tiempo es el mismo.

Sea x una variable económica cualquiera, si x_t es el valor de x en el período t. Así $\{x_o, x_1, x_2, \ldots\}$ es una sucesión.

DEFINICION. Se llama **Ecuación en Diferencias Finitas** a aquella que expresa una relación entre la variable dependiente x en el período de tiempo t, con ella misma en otros períodos.

Si el tiempo t = 0 es el menor período de tiempo que aparece en la ecuación, definimos como **orden** de una ecuación en diferencias finitas el mayor período de tiempo que aparece en la ecuación. Por ejemplo, la ecuación en diferencias finitas

$$x_{t+2} - 2x_{t+1} - x_t = 0$$

tiene orden 2.

DEFINICION. Una solución de la ecuación en diferencias finitas $f(x, t) = 0$ es una función $x_t = x(t)$ tal que cada valor de x satisface la ecuación en cada período de tiempo.

SECCION 4.1: ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS DE N-ESIMO ORDEN, LINEALES, HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Estas son ecuaciones de la forma:

(1) $a_n x_{t+n} + a_{n-1} x_{t+n-1} + \ldots + a_2 x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = 0.$

En el caso de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes, cuando teníamos un caso parecido a éste, lo resolvíamos haciendo la sustitución $x = e^{mt}$. En el

caso de las ecuaciones en diferencias finitas hacemos $x_t = \beta^t$, donde β es una constante. Así

$$a_n\beta^{t+n} + a_{n-1}\beta^{t+n-1} + \ldots + a_2\beta^{t+2} + a_1\beta^{t+1} + a_0\beta^t = 0$$

$$\beta^t(a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + a_2\beta^2 + a_1\beta^1 + a_0) = 0,$$

pero como $\beta^t \neq 0$ para todo $\beta \neq 0$, entonces

(2) $$a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + a_2\beta^2 + a_1\beta^1 + a_0 = 0.$$

La ecuación (2) se llama ecuación característica de (1), sus raices se llaman raices características y, al igual que en el caso de las ecuaciones diferenciales, pueden ocurrir tres situaciones: a) que todas las raices sean reales y distintas, b) que existan raices repetidas y, c) que existan raices complejas.

Si todas las raices características sean reales y distintas entocnes hay n raices $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, y la solución general vendrá dada por

(3) $$x_t = C_n\beta_n{}^t + C_{n-1}\beta_{n-1}{}^t + \ldots + C_2\beta_2{}^t + C_1\beta_1{}^t.$$

<u>EJEMPLO</u>: Resuelva la ecuación $x_{t+2} - 3x_{t+1} + 2x_t = 0$.

La ecuación característica de esta ecuación es

$$\beta^2 - 3\beta + 2 = 0$$

y las raices característica son $\beta_1 = 1$ y $\beta_2 = 2$. Por lo tanto la solución general es

$$x_t = C_1 1^t + C_2 2^t$$

$$x_t = C_1 + C_2 2^t.$$

Puesto que para conseguir una solución particular, en el caso anterior, se necesitan dos condiciones iniciales, si las raices características son iguales, es decir que $\beta = \beta_1 = \beta_2$, se busca una solución particular que sea independiente de $C \cdot \beta^t$. Esta solución es $C \cdot t \cdot \beta^t$. La prueba de ésto es análoga al del caso de

las ecuaciones diferenciales. Así, la solución general de la ecuación es:

$$x_t = C_1\beta^t + C_2 t\beta^t.$$

Si la raiz se repitiera tres veces, la solución general sería

$$x_t = C_1\beta^t + C_2 t\beta^t + C_3 t^2\beta^t$$

y así sucesivamente.

<u>EJEMPLO</u>: Resuelva la ecuación $x_{t+3} - 5x_{t+2} + 8x_{t+1} - 4_t = 0$.

La ecuación característica es

$$\beta^3 - 5\beta^2 + 8\beta^1 - 4 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (\beta - 2)^2(\beta - 1) = 0,$$

por lo tánto la solución general es

$$x_t = C_1 2^t + C_2 t 2^t + C_3.$$

Un caso de particular interés es aquel en que las raices características son números complejos conjugados.

Considere una ecuación en diferencias finitas con raices características β_1 y β_2 que sean números complejos conjugados, entonces x_t es un número complejo que no necesariamente es tiene parte imaginaria, es decir, que puede ser que x_t sea una función real. Veamos el siguiente teorema.

TEOREMA: Sea $x_t = C_1\beta_1{}^t + C_2\beta_2{}^t$ la solución general de una ecuación en diferencias finitas, β_1 y β_2 números complejos conjugados y C_1 y C_2 números complejos conjugados también, entonces x_t es una solución real.

Prueba:

Suponga que las raices características β_1 y β_2, son complejos conjugados entonces

$$\beta_1 = a + ib = P \cdot \text{cis}\theta$$

$$\beta_2 = a - ib = P \cdot cis(-\theta),$$

donde $P = (a^2 + b^2)^{1/2}$, $\theta = arctg(b/a)$, y la solución general es entonces

$$x_t = C_1\beta_1{}^t + C_2\beta_2{}^t.$$

Suponga que $C_1 = m + in$ y que $C_2 = m - in$, donde m y n son números reales, entonces

$$C_1\beta_1{}^t = C_1 \cdot P^t \cdot cis(t\theta) \qquad y \qquad C_2\beta_2{}^t = C_2 \cdot P^t \cdot cis(-t\theta),$$

por lo tanto

$$x_t = P^t[(C_1 + C_2)\cos(t\theta) + i(C_1 - C_2)sen(t\theta)]$$

$$==> \quad x_t = P^t[d_1 \cdot \cos(t\theta) + id_2 \cdot sen(t\theta)],$$

donde $d_1 = C_1 + C_2$ y $C_2 = C_1 - C_2$.

Ahora,

$$d_1 = C_1 + C_2 = m + in + m - in = 2m \qquad y$$

$$id_2 = i(C_1 - C_2) = i(m + in - m + in) = 2ni^2 = -2n,$$

por lo tanto

$$x_t = P^t[2m \cdot \cos(t\theta) - 2n \cdot sen(t\theta)]$$

es una solución real.

XXXXXXX

TEOREMA: Sea $x_t = C_1\beta_1{}^t + C_2\beta_2{}^t$ la solución general de una ecuación en diferencias finitas, β_1 y β_2 números complejos conjugados y C_1 y C_2 números complejos conjugados también, entonces x_t puede escribirse de la forma

$$x_t = A \cdot P^t \cdot \cos(t\theta + B),$$

donde A, P, θ, B son números reales.

Prueba: Si C_1 y C_2 son números complejos conjugados entonces

$$C_1 = m + in = k \cdot cis(B)$$

$$C_2 = m - in = k \cdot cis(-B),$$

donde $k = (m^2 + n^2)^{1/2}$ y $B = \text{arctg}(m/n)$.

En el teorema anterior probamos que

$$x_t = P^t[2m \cdot \cos(t\theta) - 2n \cdot \text{sen}(t\theta)],$$

donde $m = k \cdot \cos B$ y $n = k \cdot \text{sen}B$. Por lo tanto

$$x_t = P^t[2k \cdot \cos B \cdot \cos(t\theta) - 2k \cdot \text{sen}B \cdot \text{sen}(t\theta)]$$

$$\Longrightarrow x_t = P^t 2k \cdot [\cos B \cdot \cos(t\theta) - \text{sen}B \cdot \text{sen}(t\theta)]$$

$$\Longrightarrow x_t = A \cdot P^t \cos(t\theta + B),$$

donde $A = 2k$, lo que demuestra el teorema.

XXXXXXX

<u>EJEMPLO</u>: Si $x_{t+2} - 2x_{t+1} + 2x_t = 0$, entonces la ecuación característica es

$$\beta^2 - 2\beta + 2 = 0$$

y las raices características son

$$\beta_1 = 1 + i, \quad \beta_2 = 1 - i$$

$$\Longrightarrow \beta_1 = 2^{t/2}\text{cis}(\pi/4) \quad \text{y} \quad \beta_2 = 2^{t/2}\text{cis}(-\pi/4)$$

$$\Longrightarrow x_t = 2^{t/2}[C_1\cos(\pi t/4) + iC_2\text{sen}(\pi t/4).$$

Interpretación Geométrica de las Soluciones.

Vimos que si β_1 y β_2 son las raices características entonces

$$x_t = C_1\beta_1{}^t + C_2\beta_2{}^t,$$

donde C_1 y C_2 son números complejos. ¿Cual es el comportamiento geométrico de x_t cuando t tiende a infinito?, ¿Cual es su trayectoria temporal? Puesto que la gráfica de x_t predominará la forma del sumando dominante entre $C_1\beta_1{}^t$ y $C_2\beta_2{}^t$, solo bastará con estudiar el factor $C \cdot \beta^t$ para conocer la forma de x_t. Considere el caso cuando $C > 0$ y $\beta > 1$, (Gráfico 4.1.a.); en este caso x_t es una función crece en forma exponencial y x_t diverge (tiende a infinito). En el gráfico 4.1.b., consideramos $C > 0$ y $0 < \beta < 1$; aquí x_t se convierte en una función decreciente y converge a

Grafico 4.1.a

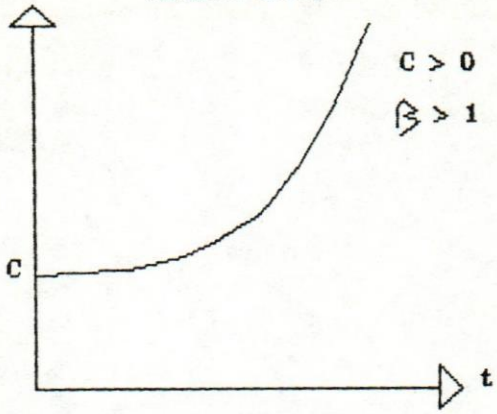


Grafico 4.1.b

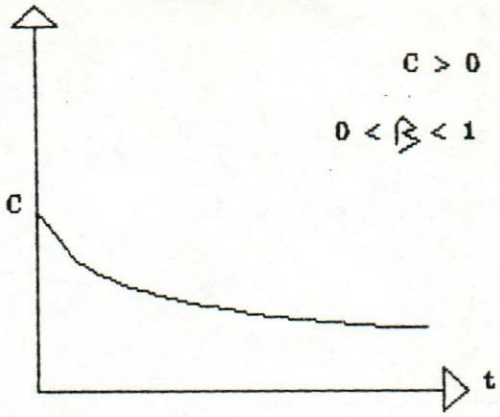


Grafico 4.1.d

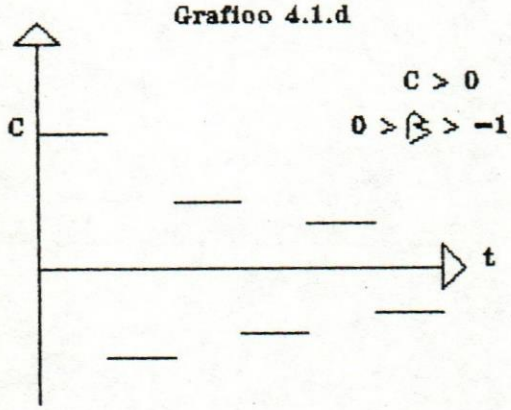


Grafico 4.1.c

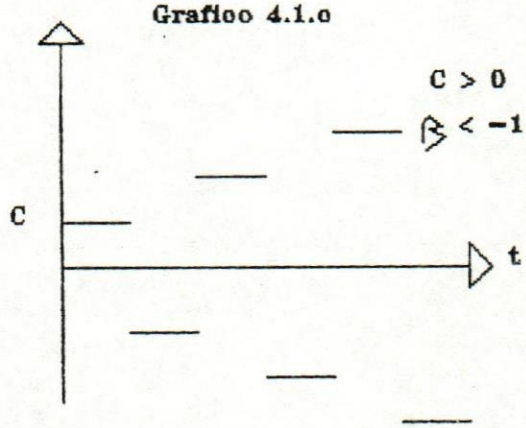


Grafico 4.1.e

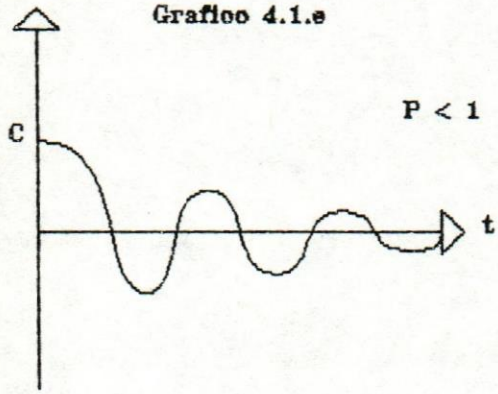


Grafico 4.1.f

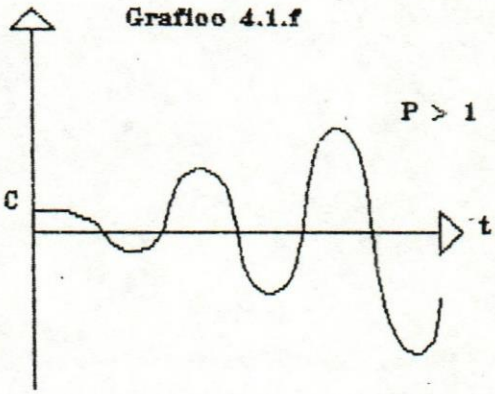
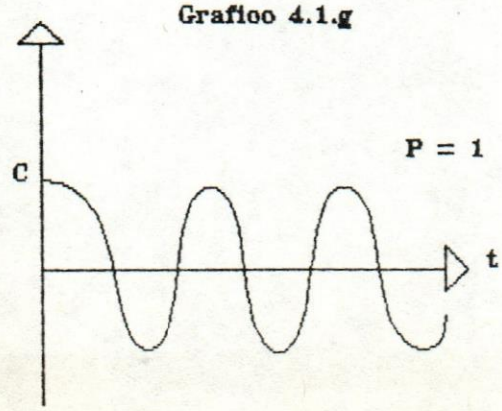


Grafico 4.1.g



cero.

En el gráfico 4.1.c., tomamos $C > 0$ y $0 > \beta > -1$; en este caso x_t converge a cero pero oscilando alrrededor de él; pero sí $C > 0$ y $\beta < -1$, x_t también oscilará (gráfico 4.1.d.) pero su límite tiende a infinito por lo que diverge.

Si β_1 y β_2 son complejos conjugados y C_1 y C_2 también son complejos conjugados, entonces $x_t = A \cdot P^t \cos(t\theta + B)$, donde A, P, θ y B son números reales y $P > 0$. Así la trayectoria temporal de x_t es una oscilación que converge (gráfico 4.1.e) si $P < 1$ y diverge si $P > 1$ (gráfico 4.1.f). Si $P = 1$, la trayectoria temporal de x_t será un movimiento armónico simple (gráfico 4.1.g).

SECCION 4.2: ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS DE N-ESIMO ORDEN, LINEALES, NO HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Estas son ecuaciones de la forma:

(4) $a_n x_{t+n} + a_{n-1} x_{t+n-1} + \dots + a_2 x_{t+2} + a_1 x_{t+1} + a_0 x_t = g(t)$.

Al igual que en el caso de las ecuaciones diferenciales se puede probar que la solución general de ésta ecuación en diferencias finitas es la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular:

solución general = solución homogénea + solución particular.

Ya sabemos como hallar la solución general de una ecuación en diferencias homogénea. Veamos ahora como encontrar la solución particular. Para ello estudiaremos dos casos por separados que son los que nos van a interesar.

<u>CASO 1</u>: Analizamos la ecuación $x_{t+1} - Ax_t = B$.

La ecuación homogénea es $x_{t+1} - Ax_t = 0$ y su ecuación

característica es $m - A = 0$. Por lo tanto la raíz característica es A y la solución de la ecuación homogénea es $x_h = C \cdot A^t$.

Para encontrar la solución particular x_p, podemos utilizar el método de los coeficientes indeterminados estudiado en el capítulo anterior. Para ello hacemos $x_p = K$, (K constante).

Si x_p es igual a una constante K, entonces $x_{t+1} = x_t = K$, por lo tanto tenemos que si $A \neq 1$, entonces

(5) $$K - AK = B \quad ==> \quad K = B/(1 - A).$$

Así la solución general es

$$x_t = C \cdot A^t + B/(1 - A).$$

Si $A = 1$, la solución de la ecuación homogénea se convierte en $x_h = C$ y el primer término de (5) queda indefinido y se necesita otra solución particular. En este caso recurrimos al viejo truco de hacer $x_t = Kt$. Así $x_{t+1} = K \cdot (t+1)$. Por lo tanto tenemos que

$$K \cdot (t+1) - A \cdot K \cdot t = B \quad ==> \quad K = B.$$

Por lo tanto la solución general es

$$x_t = C + Bt.$$

<u>EJEMPLO</u>: Resuelva la ecuación $x_{t+1} - 2x_t = 3$.

La ecuación característica es $m - 2 = 0$ con raíz característica 2 y la solución de la ecuación homogénea es $x_h = C \cdot 2^t$.

La solución particular x_p será $x_p = K$, (K constante). Por lo tanto $x_{t+1} = x_t = K$,

$$==> \quad K - 2K = 3 \quad ==> \quad K = -3.$$

Así la solución general es

$$x_t = C \cdot 2^t - 3.$$

<u>Caso 2</u>: En este caso estudiaremos ecuaciones de la forma

(6) $$a_2x_{t+2} + a_1x_{t+1} + a_0x_t = g(t).$$

Como sabemos la solución general es la suma de la solución general de la ecuación homogénea y una solución particular. La solución homogénea ya sabemos como hallarla y la solución particular podemos encontrarla por el método de los coeficientes indeterminados.

<u>EJEMPLO</u>: Resuelva la ecuación

(7) $$x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t = 5^t + 2t.$$

La solución general de la ecuación homogénea es

$$x_h = C_1 + C_2 \cdot 3^t.$$

La solución particular para el término 5^t es $x_p = C \cdot 5^t$ y para $2t$ es $x_p = A_o + A_1 t$. Ahora el término constante A_o aparece repetido en la solución homogénea (C_1). Por lo tanto la solución particular para $2t$ es $x_p = A_o t + A_1 t^2$. La solución particular que tamaremos es entonces la suma de las dos soluciones particulares:

$$x_p = C \cdot 5^t + A_o t + A_1 t^2.$$

(8) $$\Longrightarrow \quad x_{p,t+1} = C \cdot 5^{t+1} + A_o(t+1) + A_1(t+1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad x_{p,t+2} = C \cdot 5^{t+2} + A_o(t+2) + A_1(t+2)^2.$$

Sustituyendo (8) en (7) y reagrupando se obtiene

$$A_o - 4A_1 t + 8C5^t = 5^t + 2t$$

$$\Longrightarrow \quad A_o = 0, \quad -4A_1 = 2, \quad 8C = 1,$$

$$\Longrightarrow \quad A_o = 0, \quad A_1 = -1/2, \quad C = 1/8.$$

Por lo tanto la solución particular es

$$x_p = -t^2/2 + 5^t/8$$

y la solución general

$$x_t = C_1 + C_2 \cdot 3^t - t^2/2 + 5^t/8.$$

PROBLEMAS:

1.- Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencia finita:

a) $x_{t+1} + 4y_t = 7$ b) $x_{t+1} - 3x_t = -1$

c) $x_{t+1} - 5x_t = 3$ d) $x_{t+1} - 5x_t = 4^t$

e) $x_{t+2} - 5x_{t+1} + 6x_t = 4^t$ f) $x_{t+2} + 5x_{t+1} - 6x_t = 2^t$

g) $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 2^t$ h) $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = 3^t$

i) $x_{t+2} - 6x_{t+1} + 9x_t = t^2$ j) $x_{t+2} + 5x_{t+1} + 6x_t = t$

k) $x_{t+2} + 5x_{t+1} + 4x_t = 4^t$ l) $x_{t+2} + 4x_{t+1} + x_t = 2^t + t^2$

m) $x_{t+2} - 2x_{t+1} - 3x_t = 5$ n) $x_{t+2} - x_t = 4$

o) $x_{t+2} + x_{t+1} + 2x_t = t^2$ p) $x_{t+2} + 6x_{t+1} + 11x_t = t$.

SECCION 4.3: INTERDEPENDENCIA ENTRE EL MULTIPLICADOR Y EL PRINCIPIO DEL ACELERADOR.

Existen numerosas aplicaciones de las ecuaciones en diferencia finita a la economía. En este capítulo solo consideraremos una, la cual está basada en un artículo de Paul A. Samuelson intitulado "Interactions Between The Multiplier Analisys And The Principle of Aceleration", publicado en 1.939 en la "Review of Economic Statistic".

En el capítulo anterior cuando estudiamos el modelo de crecimiento de Solow, vimos que el producto potencial varia en el tiempo a causa de mejoras tecnologicas, aumentos en la relación capital/trabajo, etc. En esta sección veremos que, si el gasto público se mantiene constante, el nivel de producto no siempre registra el mismo nivel que el producto potencial sino que su trayectoria temporal puede ir oscilando alrrededor de él, tal como se observó a lo largo del siglo pasado en los paises de Europa y los Estados Unidos.

Considere una economía cerrada. Sea Y el Ingreso Nacional, C

el gasto de Consumo Privado, I la Inversión Neta Privada y G el Gasto Público, entonces sabemos de los cursos de macroeconomía que en cualquier período t,

(9) $$Y_t = C_t + I_t + G_t.$$

Sea α la propensión al consumo, entonces la función de consumo en el tiempo t puede escribirse como

(10) $$C_t = C_o + \alpha Y_{t-1} \quad (0 < \alpha < 1)$$

donde se considera que el consumo inducido depende del ingreso con un período de rezago.

Por otra parte, el principio del acelerador establece que la inversión debe ser proporcional al crecimiento del consumo para satisfacer los requerimientos de demanda. Así

$$I_t = I_o + \beta[C_t - C_{t-1}] \qquad \beta > 0,$$

$$==> \qquad I_t = I_o + \beta[\alpha Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}], \qquad \beta > 0$$

(11) $$==> \qquad I_t = I_o + \alpha\beta Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2}, \qquad \beta > 0.$$

A β se le llama el "Acelerador de la Inversión", I_o la inversión autónoma y $G_t = G_o$ el gasto público (constante). Las ecuaciones (9), (10) y (11) nos dan un sistema de ecuaciones dinámico que nos permite describir la trayectoria temporal del producto:

$$Y_t = C_t + I_t + G_o.$$

$$C_t = C_o + \alpha Y_{t-1}, \qquad 0 < \alpha < 1;$$

$$I_t = I_o + \alpha\beta Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2}, \qquad \beta > 0.$$

Sustituyendo (9) y (10) en (11) obtenemos

$$Y_t = C_o + \alpha Y_{t-1} + I_o + \alpha\beta Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} + G_o$$

$$==> \quad Y_t = \alpha Y_{t-1} + \alpha\beta Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-2} + A_o,$$

donde A_o es el gasto autónomo ($= C_o + I_o + G_o$). Supongamos que, por comodidad, el gasto autónomo es igual a la unidad, $A_o = 1$ y que las condiciones iniciales son $Y_o = 0$ y $Y_1 = 1$, entonces sustituyendo y despejando obtenemos que

(12) $$Y_t - \alpha(1+\beta)Y_{t-1} + \alpha\beta Y_{t-2} = 1, \quad Y_o = 0, \; Y_1 = 1,$$

entonces la ecuación en diferencias (12) nos describe la trayectoria temporal del producto Y_t, la cual podemos obtener explícitamente resolviendo la ecuación. Como sabemos su solución general es la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular.

La ecuación característica de la ecuación homogénea (12) es

(13) $$r^2 - \alpha(1+\beta)r + \alpha\beta = 0.$$

Si r_1 y r_2 son las raices características entonces,

$$r_1 = \tfrac{1}{2}\{\alpha(1+\beta) + [\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta]^{1/2}\} \quad (14)$$

$$r_2 = \tfrac{1}{2}\{\alpha(1+\beta) - [\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta]^{1/2}\},$$

observe que $r_1 > r_2$ y que la solución general de la ecuación homogénea es

$$Y_t = A_1 r_1^{\,t} + A_2 r_2^{\,t},$$

donde A_1 y A_2 son constantes. Puesto qque A_o es constante, la solución particular es $Y_t = C_3$. Sustituyendo en (12) obtenemos

$$C_3 - \alpha(1+\beta)C_3 + \alpha\beta C_3 = 1$$

$$\Longrightarrow \quad C_3 = 1/(1-\alpha), \quad 0 < \alpha < 1,$$

y así la solución general de (12) es

(15) $$Y_t = A_1 r_1^{\,t} + A_2 r_2^{\,t} + 1/(1-\alpha).$$

Observe que $1/(1-\alpha)$ es la expresión del multiplicador del gasto autónomo. La ecuación (15) nos dá la trayectoría temporal del producto Y_t, ahora lo que nos interesa es estudiar (15) para averiguar que forma tiene esa trayectoria temporal.

Observe que

(16) $$r_1 + r_2 = \alpha(1+\beta)$$

(17) $$r_1 r_2 = \alpha\beta.$$

Por lo tanto,

$$(1 - r_1)(1 - r_2) = 1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2 = 1 - \alpha(1+\beta) + \alpha\beta$$

(18) $$\Longrightarrow \quad (1 - r_1)(1 - r_2) = 1 - \alpha.$$

Puesto que $0 < \alpha < 1$, tenemos que

(19) $$0 < (1 - r_1)(1 - r_2) < 1.$$

Las raices caracteristicas r_1, r_2 pueden ser ambas reales y distintas, reales e iguales o complejas. Examinamoes cada caso por separado.

<u>CASO 1: RAICES REALES Y DIFERENTES.</u>

Las raices serán reales y diferentes solo si $\alpha^2(1+\beta)^2 > 4\alpha\beta$, es decir si $\alpha > 4\beta/(1+\beta)^2$.

Puesto que α, β son ambas mayores que cero, $\alpha\beta > 0$, por lo que $r_1 r_2 > 0$, si r_1, r_2 son reales entonces r_1 y r_2 tienen ambas el mismo signo, pero $\alpha(1+\beta) > 0$ implica que $r_1 + r_2 > 0$, por lo que r_1 y r_2 tienen que ser ambas mayores que cero. A pesar de que r_1 y r_2 son ambas positivas, pueden presentarse cinco combinaciones distintas:

(i) $0 < r_2 < r_1 < 1$,

(ii) $0 < r_2 < r_1 = 1$,

(iii) $0 < r_2 < 1 < r_1$,

(iv) $1 = r_2 < r_1$,

(v) $1 < r_2 < r_1$.

Si sucede (i), tenemos que

$$0 < r_1 r_2 < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \alpha\beta < 1, \; 0 < \alpha < 1;$$

en este caso la trayectoria temporal convergerá al punto de equilibrio de largo plazo $Y = 1/(1-\alpha)$ de manera no oscilante. Esta situación se ubica en la zona A de la gráfica 4.2.

Si sucede (ii), entonces de (18)

$$0 = (1 - r_1)(1 - r_2) = 1 - \alpha \implies \alpha = 1.$$

Esta posibilidad es imposible ya que la propensión marginal al consumo nunca es igual a uno.

Si sucede (iii), tenemos que $1 - r_1 < 0$, $1 - r_2 < 0$, por lo que $(1 - r_1)(1 - r_2) = 1 - \alpha < 0$, lo que implica que $\alpha > 1$, lo cual es imposible.

Si sucede (iv), entonces $0 = (1 - r_1)(1 - r_2) = 1 - \alpha$, que implica que $\alpha = 1$, lo cual es imposible.

Por último si sucede (v), entonces

$$r_1 r_2 > 1 \implies \alpha\beta > 1,\ 0 < \alpha < 1;$$

contrariamente al subcaso (i), aqui la trayectoria temporal será divergente, pero no tendrá oscilaciones. Esta situación se ubica en la zona B de la gráfica 4.2.

Observe entonces que de las cinco posibilidades solo dos, la (i) y la (v) se pueden dar en la realidad, y lo que divide una posibilidad de la otra es el hecho de que pertenezcan a una de las dos áreas divididas por la curva $\alpha\beta = 1$.

<u>CASO 2: RAICES REALES REPETIDAS</u>.

Este caso se dará si y solo si $\alpha^2(1+\beta)^2 = 4\alpha\beta$, es decir cuando $\alpha = 4\beta/(1+\beta)^2$. De esta manera $r = r_1 = r_2 = \alpha(1+\beta)/2 > 0$.

En este caso solo se pueden presentar tres subcasos:

(vi) $0 < r < 1$;

(vii) $r = 1$;

(viii) $r > 1$.

Si sucede (vi), entonces

$$0 < r_1 r_2 = r^2 < 1 \quad ==> \quad \alpha\beta < 1, \; 0 < \alpha < 1;$$

aquí la trayectoria temporal convergerá al punto de equilibrio de largo plazo $Y = 1/(1-\alpha)$ sin oscilaciones. Esta situación se ubica en la zona C de la gráfica 4.2.

Si sucede (vii) entonces $0 = (1 - r)^2 = 1 - \alpha \quad ==> \quad \alpha = 1$, lo cual es imposible, y por último si sucede (viii) entonces

$$r^2 > 1 \quad ==> \quad \alpha\beta > 1, \; 0 < \alpha < 1;$$

y la trayectoria temporal será divergente sin oscilaciones. Esta última situación se ubica en la zona D de la gráfica 4.2.

Al igual que en el caso de raices reales y distintas, pueden existir dos subcasos posibles, (vi) y (viii), y lo que divide una posibilidad de la otra es la curva $\alpha\beta = 1$.

<u>CASO 3: RAICES COMPLEJAS</u>.

Si r_1 y r_2 son raices complejas entonces son complejos conjugados y $(\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta) < 0$, por lo que $\alpha < 4\beta/(1+\beta)^2$. En este caso la solución tendrá sentido económico si y solo sí la solución general es real. Analicemos entonces la solución general en este caso. Para ello comenzamos por estudiar los coeficientes A_1 y A_2 de la solución general $Y_t = A_1 r_1^{\,t} + A_2 r_2^{\,t} + 1/(1-\alpha)$.

Dado que $Y(0) = 0$ y $Y(1) = 1$, entonces

$$Y(0) = A_1 + A_2 + 1/(1-\alpha) = 0(21)$$

$$Y(1) = A_1 r_1 + A_2 r_2 + 1/(1-\alpha) = 1;$$

por lo que

$$A_1 = (r_2 - \alpha)\cdot Q, \qquad A_2 = (\alpha - r_1)\cdot Q,$$

donde $Q = \dfrac{1}{(1-\alpha)(r_1 - r_2)}$ no es un número real.

Puesto que $\alpha < 4\beta/(1+\beta)^2$, $r_1 = \frac{1}{2}\{\alpha(1+\beta) + [\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta]^{\frac{1}{2}}\}$ y $r_2 = \frac{1}{2}\{\alpha(1+\beta) - [\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta]^{\frac{1}{2}}\}$.

Sean $a = \frac{1}{2}\alpha(1+\beta)$ y $b = \frac{1}{2}[4\alpha\beta - \alpha^2(1+\beta)^2]^{\frac{1}{2}}$, entonces

$$r_1 = a + bi \quad y \quad r_2 = a - bi.$$

Sea $P = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ y $\theta = \text{arctg}(b/a)$, entonces

$$r_1 = P\text{cis}\theta = Pe^{i\theta} \quad y \quad r_2 = P\text{cis}(-\theta) = Pe^{-i\theta}$$

y la solución general será

$$Y_t = A_1P^te^{it\theta} + A_2P^te^{-it\theta} + 1/(1-\alpha)$$

$$\Longrightarrow \quad Y_t = P^t[(A_1 + A_2)\cdot\cos(t\theta) + i(A_1 - A_2)\cdot\text{sen}(t\theta)] + 1/(1-\alpha).$$

Ahora, $A_1 = (r_2 - \alpha)\cdot Q$ y $A_2 = (\alpha - r_1)\cdot Q$, por lo tanto

(21) $\quad A_1 + A_2 = Q(r_1 - r_2)$ es un núumero real;

$$A_1 - A_2 = Q(r_1 + r_2 - 2\alpha) = (a - bi + a + bi - 2\alpha)$$

$$\Longrightarrow \quad A_1 - A_2 = 2Q(a - \alpha).$$

Pero $Q^{-1} = (1-\alpha)(r_1-r_2) = 2ib(1-\alpha)$, de aquí que

(22) $$i(A_1 - A_2) = \frac{2i(a - \alpha)}{2ib(1-\alpha)} = \frac{a - \alpha}{b(1 - \alpha)}$$

que es un número real. Por lo tanto, si llamamos $d_1 = A_1 + A_2$ y $d_2 = i(A_1 - A_2)$, entonces

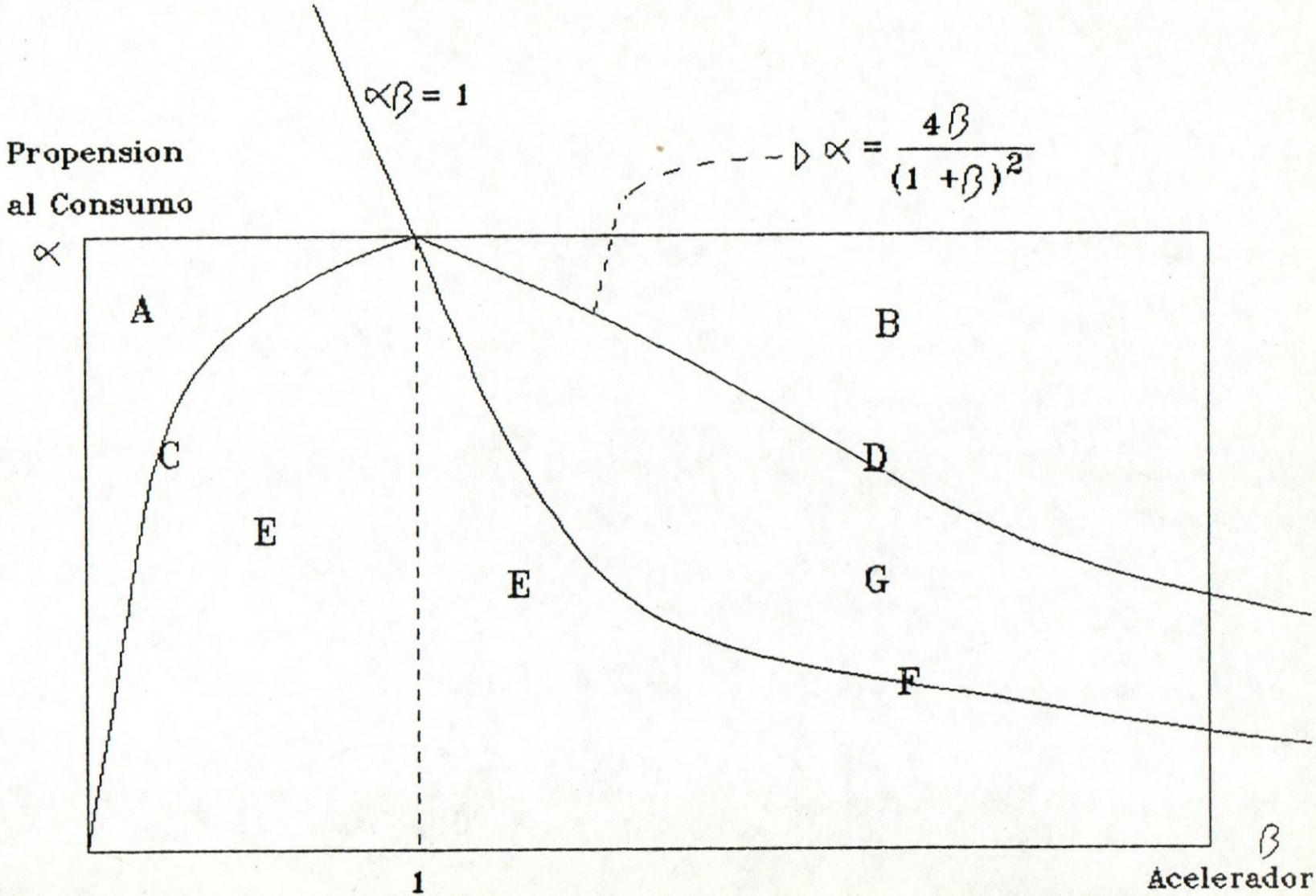
(23) $$Y_t = P^t[d_1\cdot\cos(t\theta) + d_2\cdot\text{sen}(t\theta)] + 1/(1-\alpha)$$

es la solución general y es una función real. Pero habiamos visto que (23) se puede escribir de la forma

(24) $$Y_t = A\cdot P^t\cdot\cos(t\theta + B) + 1/(1-\alpha),$$

por lo que la convergencia de la trayectoria temporal del producto $Y(t)$, estará dada por la magnitud del radio P. Así $Y(t)$ tendrá una trayectoria oscilatoria y convergente si $0 < P < 1$, oscilatoria y divergente explosiva si $P > 1$ y una movimiento armónico simple si $P = 1$. Estudiemos entonces la forma de P.

GRAFICA 4.2.


$\alpha\beta = 1$
$\alpha = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$
Propension
al Consumo
α
A
B
C
D
E
E
G
F
1
β
Acelerador

$$P = (a^2 + b^2)^{1/2} \implies P^2 = [\tfrac{1}{2}\alpha(1+\beta)]^2 + [\tfrac{1}{2}(4\alpha\beta - \alpha^2(1+\beta)^2)]^2$$

$$\implies P = (\alpha\beta)^{1/2}. \tag{25}$$

Así, en el caso complejo también aparecen tres subcasos:

(ix) $P < 1 \implies \alpha\beta < 1$,

(x) $P = 1 \implies \alpha\beta = 1$,

(xi) $P > 1 \implies \alpha\beta > 1$.

En el caso (ix), la trayectoria temporal será oscilatoria y convergente, en el caso (x) será un movimiento armónico simple y en el caso (xi) la trayectoria oscilatoria y explosiva. Estos casos corresponden a las regiones E, F y G respectivamente de la gráfica 4.2. Los 11 subcasos posibles son representados en esta última gráfica.

PROBLEMAS

1.- Estudie la trayectoria temporal del producto en caso de que el gasto autónomo permanezca constante (= 1) y de que la propensión marginal al consumo y el acelerador de la inversión sean respectivamente:

a) $\alpha = 0,7$; $\beta = 3,5$ b) $\alpha = 0,85$; $\beta = 1,5$

c) $\alpha = 0,4$; $\beta = 0,9$ d) $\alpha = 0,2$; $\beta = 2,5$

2.- ¿Los resultados del análisis hechos en este capítulo varían si el gasto autónomo se toma con un valor distinto de uno?

CAPITULO 5

ESTABILIDAD

En economía, la idea de equilibrio ha jugado un papel muy importante en su historia. Analicemos ciertas ideas sobre este concepto.

Considere un péndulo como el que aparece en la gráfica 5.1. Tanto el punto A como el punto B se encuentran en equilibrio. Si ninguna fuerza se aplica a esos puntos, éstos permanecerán en equilibrio. Observe que para que exista equilibrio la velocidad en ese punto debe ser cero, de lo contrario estaría cambiando de posición. Por lo tanto $x'(t) = 0$. Por otra parte, puede ser que pasado un instante de tiempo la velocidad aumente y habría así un cambio de posición; esto indica que para que un punto sea de equilibrio la aceleración debe ser cero, es decir $x''(t) = 0$. Esto nos conduce a la siguiente definición.

DEFINICION: Se dice que un variable contínua x está en equilibrio si $x'(t) = x''(t) = 0$.

La definición anterior se puede extender de la siguiente forma:

DEFINICION: Se dice que un variable contínua x tiene un valor de equilibrio si $x^{(n)}(t) = \ldots = x''(t) = x'(t) = 0$.

Por otra parte, si al punto A se le aplica una fuerza que lo saque del equilibrio, entonces este commenzará a oscilar y, a largo plazo, tenderá a regresar a su punto de partida. En este caso decimos que el punto A es un punto de equilibrio estable. Sin embargo, si al punto B se le aplica una fuerza que lo saque del equilibrio, éste no retornará jamás a su punto de origen. En este caso se dice que el equilibrio es inestable. Esta reflexión

nos conduce a la siguiente definición:

<u>DEFINICION</u>: Sea x_o un valor de equilibrio de una variable continua x. Se dice que x_o es un punto de equilibrio estable si

$$\lim_{t \to \infty} x = x_o.$$

SECCION 5.1. ESTABILIDAD DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Considere la ecuación diferencial

$$(1) \qquad a_n y^{(n)} + \dots \; a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Suponga que esta ecuación describe el comportamiento de una variable y, entonces los puntos de equilibrio de y serán aquellos para los que $y^n = \dots = y'' = y' = 0$. Esto quiere decir que el punto de equilibrio de y es el punto $y = 0$.

Por los capítulos anteriores sabemos que la solución general de (1) es $y = C_1 \cdot e^{r_1 t} + \dots + C_n \cdot e^{r_n t}$, donde $r_1, \dots, r_n$ son las raices características de (1), son números reales y todos distintos. El punto $y = 0$ será estable si y solo si $y \to 0$ cuando $t \to \infty$, es decir

$$\lim_{t \to \infty} C_1 \cdot e^{r_1 t} + \dots + C_n \cdot e^{r_n t} = 0.$$

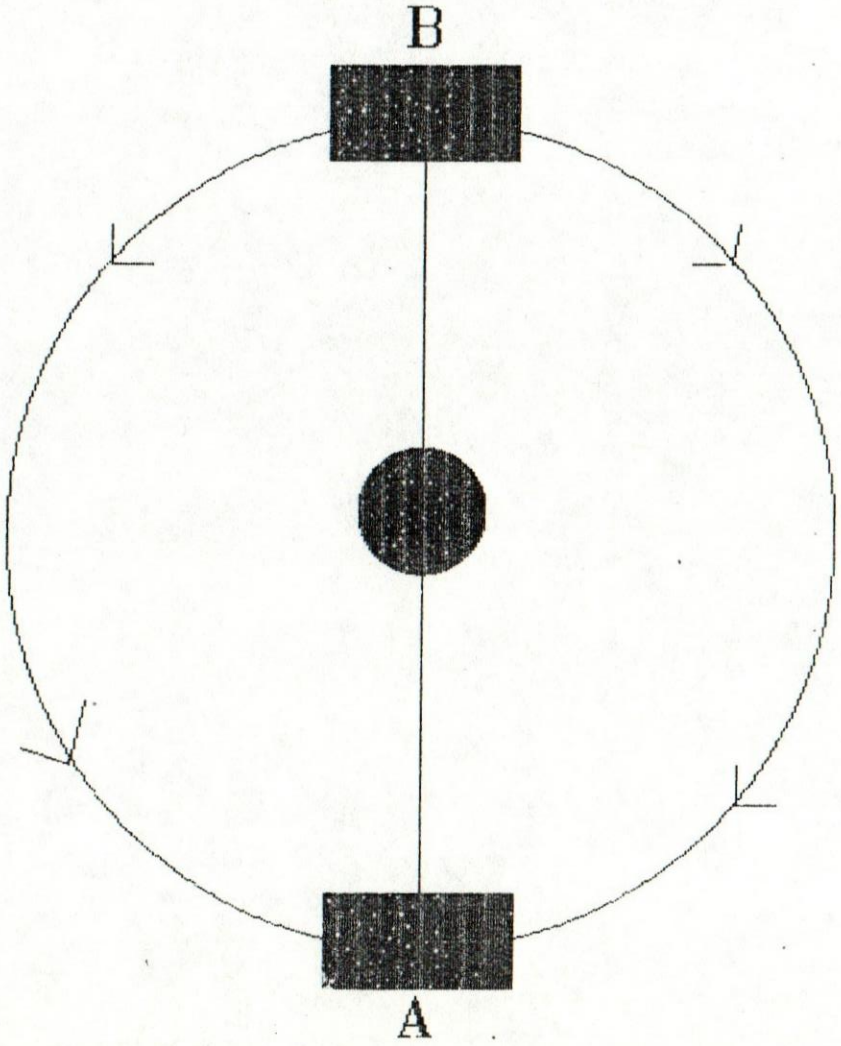
y esto sucederá si y solo si $r_1, \dots, r_n$ son todos menores que cero. Este análisis sigue siendo válido aún cuando existan raices repetidas (¿porque?).

Si las raices fueran complejas, entonces la solución es de la forma:

$$y = e^{at}(C_1 \cdot \cos bt + C_2 \cdot \operatorname{sen} bt)$$

donde $r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$. En este caso $\lim y = 0$ si y solo $t \to \infty$ si $a < 0$. Note que en cualquier caso, el problema de la estabilidad de (1) se reduce a saber si **la parte real de todas**

Grafico 5.1



las raices características son menores que cero y la estabilidad de la variable cuyo comportamiento es descrito por una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes se limita al estudio de las soluciónes de su ecuación característica. Cuando las ecuaciones características son ecuaciones de 2° grado, no existe ningún problema para conocer la estabilidad del sistema ya que es fácil hallar las raices de una ecuación de 2° grado. El problema se presenta cuando tenemos ecuaciones características de grado mayor que dos, porque en estos casos puede resultar muy complicado hallar las raices. El teorema de Routh, si bién no nos dá un método para resolver ecuaciones, proporciona un instrumento muy eficaz para saber si una ecuación tiene raices reales positivas o no. La demostración de este teorema escapa de los alcances de este libro por lo que nos conformaremos solamente con escribir su enunciado.

El Teorema de Routh.

TEOREMA (ROUTH): Sea $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ siendo $a_o > 0$ entonces, las partes reales de las raices de $f(x)$ son negativas si y solo si $\sigma_i > 0$, para toda $i \leq n$, donde

$$\sigma_1 = |a_1|, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente.

El teorema de Routh nos brinda un instrumento muy poderoso para estudiar la estabilidad de la ecuación (1) ya que si todos los determinantes σ_i son mayores que cero, entonces las raices características serán todas negativas y el sistema será estable.

<u>EJEMPLO</u>: Estudie la estabilidad de $y''' + 3y'' + 3y' - 4y = 0$.

En este caso $a_o = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $a_3 = -4$.

$$\sigma_1 = |a_1| = |3| = 3 > 0$$

$$\sigma_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13 > 0$$

$$\sigma_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 20$$

Como todos los σ_i son mayores que cero, las partes reales de las raices características son negativas y el sistema es estable.

<u>EJEMPLO</u>: Estudie la estabilidad de $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$.

En este caso $a_o = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = -5$, $a_3 = 6$.

$$\sigma_1 = |a_1| = |-2| = -2 < 0,$$

como σ_1 es negativo, sabemos que existen al menos una raiz característica con parte real no negativa y por lo tanto el sistema es inestable.

Si en vez de la ecuación (1) estudiamos la ecuación

$$a_n y^{(n)} + \dots \; a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = K, \tag{2}$$

donde K es una constante, el punto de equilibrio será $y = K/a_0$, que es la solución particular de la ecuación (2).

Puesto que la solución general de (2) es la suma de la solución homogénea más la solución particular, entonces la trayectoria de y a lo largo del tiempo es el punto de equilibrio (la solución particular) más una *desviación del equilibrio* (solución homogénea). Así, para estudiar la estabilidad del sistema (2), basta con estudiar la estabilidad de la ecuación homogénea, pero el punto de equilibrio será en este caso la solución particular de la ecuación.

PROBLEMAS:

1.- Estudiar la estabilidad de las siguientes ecuaciones:

a) $y''' - 2y'' + 3y' - 4y = 0$ b) $y''' + 3y'' - 3y - 6y = 0$

c) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 5$ d) $y''' - 8y'' + 7y = 8$

e) $y''' + 3y' - y = 4$ f) $y''' - y'' - y' - y = 10$

g) $y''' + 3y'' - 3y' + 4y = 4$ h) $y''' - 3y'' - y - 2y = 7$

i) $y''' + 2y'' - 2y' + 7y = 1$ j) $y''' - 3y'' + 2y + y = 6$

SECCION 5.2: ESTABILIDAD DE ECUACIONES EN DIFERENCIA FNIITA

La idea de estabilidad expresada para variables continuas se puede adaptar perfectamente para variables discretas.

<u>DEFINICION</u>: Se dice que un variable discreta x_t está en equilibrio si $x_t = x_{t+1} = \dots = x_{t+n} = x_o$. En este caso se dice que x_o es un punto de equilibrio de x.

<u>DEFINICION</u>: Sea x_o un punto de equilibrio de una variable discreta x_t. Se dice que x_o es un punto de equilibrio estable si

$$\lim_{t \to \infty} x = x_o.$$

Considere la ecuación en diferencias

$$a_n y_{t+n} + \dots \; a_2 y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = 0. \tag{3}$$

Si esta ecuación describe el comportamiento de la variable y_t, entonces sus puntos de equilibrio serán aquellos tales que

$$y_{t+n} = \dots \; y_{t+2} = y_{t+1} = y_t = K$$

$$\Longrightarrow K(a_n + \dots \; a_2 + a_1 + a_0) = 0,$$

pero como $a_n + \dots \; a_2 + a_1 + a_0$ no necesariamente es cero, $K = 0$ y el punto de equilibrio es $y_t = 0$.

En los capítulos anteriores vimos que la solución general de (3) es $y = C_1 \cdot \beta_1^{\,t} + \dots + C_n \cdot \beta_n^{\,t}$, donde $\beta_1, \dots, \beta_n$ son las raices características de (3), son números reales, distintos dos a dos.

El punto de equilibrio y = 0 será estable si y solo si y-->0 cuando t-->∞, es decir

$$\lim_{t \to \infty} C_1 \cdot \beta_1^{\,t} + \ldots + C_n \cdot \beta_n^{\,t} = 0$$

si y solo si $\beta_1, \ldots, \beta_n$ son todos menores que uno en valor absoluto, es decir $|\beta_1| < 1, \ldots, |\beta_n| < 1$. Este análisis sigue siendo válido en caso de que existan raices repetidas (¿porque?).

En el caso de raices complejas en la ecuación de 2° orden, la solución es de la forma:

$$y = A \cdot P^t \cdot \cos(\theta t + B),$$

por lo tanto el sistema será estable si $|P| < 1$, y el problema de la estabilidad se limita a saber si el módulo de las raices características es menor que la unidad. Note que si las raices características son reales su modulo es igual al valor absoluto, por lo que en cualquier caso el problema de la estabilidad se limita a saber si el módulo de las raices características es menor que la unidad.

Al igual que en el caso de las ecuaciones diferenciales, cuando las ecuaciones características son de 2° grado, el problema de conocer la estabilidad del sistema es fácil de resolver, pero si la ecuación característica es de grado mayor que dos, puede resultar muy complicado hallar las raices y resolver el problema de estabilidad. El teorema de Schur proporciona un método para determinar si los módulos de las raices características son menores que la unidad. La demostración de este teorema escapa de los alcances de este libro y solo escribiremos su enunciado.

El Teorema de Schur.

TEOREMA (SCHUR): Sea $f(x) = a_0 x^n + \ldots \; a_{n-2} y^2 + a_{n-1} y^1 + a_n$

siendo $a_o > 0$ entonces, el modulo de las raices de f(x) son menores que uno si y solo si $\sigma_i > 0$, para toda $i \leq n$, donde

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdot & a_n & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & \cdot & 0 & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & \cdot & a_0 & a_1 \\ a_{n-1} & a_n & \cdot & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdot & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdot & 0 & a_n & a_{n-1} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & 0 & 0 & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdot & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & 0 & a_0 & a_1 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdot & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente.

El teorema de Schur es un instrumento muy poderoso para el estudio de estabilidad de la ecuación (3), pués, si todos los determinantes σ_i son mayores que cero, los módulos de las raices características serán todos menores que uno y el sistema será estable.

<u>EJEMPLO</u>: Estudie la estabilidad de $3y_{t+2} + 3y_{t+1} - 4y_t = 0$, aplicando el teorema de Schur.

En este caso $a_o = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = -4$.

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -7 < 0 \qquad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & \cdot & -4 & 3 \\ 3 & 3 & \cdot & 0 & -4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -4 & 0 & \cdot & 3 & 3 \\ 3 & -4 & \cdot & 0 & 3 \end{vmatrix} = -616 < 0$$

Como σ_1 y σ_2 son negativos, el modulo de al menos una raiz es mayor que uno y por lo tanto el sistema no es estable. En este

ejemplo hubiera bastado con calcular σ_1, aunque calculamos σ_2 por razones de conveniencia didáctica.

Si en vez de la ecuación (3) estudiamos la ecuación

(4) $$a_n y_{t+n} + \dots a_2 y_{t+2} + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = K$$

donde K es una constante, entonces el punto de equilibrio será

$$y = K/(a_n + \dots a_2 + a_1 + a_0) = 0$$

que es la solución particular de la ecuación (4).

La solución general de (4) es la suma de la solución homogénea y una solución particular, por lo que, al igual que en caso de las ecuaciones diferenciales, la trayectoria de y es el punto de equilibrio (solución particular) más una desviación (solución homogénea), por lo que para estudiar la estabilidad de (4), basta estudiar la estabilidad de la ecuación homogénea.

PROBLEMAS:

1.+ Estudiar la estabilidad de las siguientes ecuaciones:

a) $y_{t+3} - 2y_{t+2} + 3y_{t+1} + 4y_t = 0$

b) $y_{t+3} + 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - 6y_t = 0$

c) $y_{t+3} + 7y_{t+2} + 4y_{t+1} - 2y_t = 3$

d) $y_{t+3} - 2y_{t+2} + 3y_t = 2$

e) $y_{t+3} + 9y_{t+1} + y_t = 4$

f) $y_{t+3} + y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t = 10$

g) $y_{t+3} + 3y_{t+2} + 3y_{t+1} + 4y_t = 4$

h) $y_{t+3} + 3y_{t+2} + 6y_t - 2y_t = 3$

i) $y_{t+3} - 2y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 1$

j) $y_{t+3} + 3y_{t+2} - 2y_t + y_t = 6$

CAPITULO 6

SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS

Sabemos del capítulo dos que el problema de encontrar la solución general de una ecuación diferencial ordinaria lineal de coeficientes constantes

(1) $$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_o y = 0$$

se reduce a encontrar las raices del polinomio característico

(2) $$a_n r^n + \ldots + a_1 r + a_o = 0.$$

Luego aprendimos, en el capítulo tres, a encontrar la solución de ecuaciones en diferencias lineaqles de coeficientes constantes, utilizando métodos análogos.

Muchos problemas económicos pueden modelarse utilizando ecuaciones diferenciales o en diferencias uniecuacionales. Sin embargo, la cada vez mayor interconexión entre las variables económicas hace que estos modelo tengan aplicaciones muy limitadas. Una gran cantidad de problemas económicos interesantes pueden modelarse utilizando sistemas de ecuaciones diferenciales o en diferencias. Incluso, las ecuaciones diferenciales o en diferencias de grado mayor que uno pueden convertirse en un sistema de ecuaciones de primer grado y resolverlas como tales; un sistema de éste tipo se llama "Sistema de Ecuaciones Simultáneas". Por tanto el problema de encontrar la solución general de un sistema de ecuaciones simultáneas es más general que el de encontrar la solución de la ecuación como (1) y de gran interés para el estudio de la economía matemática. Puesto que una ecuación diferencial o en diferencias de orden mayor que dos puede convertirse en un sistema de ecuaciones simultáneas de primer orden, en este capítulo solo trataremos con el estudio de dichos sistemas.

SECCION 6.1: CONVERSION DE ECUACIONES EN SISTEMAS DE ECUACIONES

Para aprender a transformar la ecuación diferencial (1) en un sistema de ecuaciones simultáneas de primer orden, usaremos un ejemplo.

Considere la ecuación diferencial

$$x''' - 2x'' + 3x' - 5x = 5, \tag{3}$$

si establecemos la relación

$$y = x'$$

obtenemos que

$$y' = x'' \qquad y'' = x'''$$

por lo tanto (3) se convierte en

$$y'' - 2y' + 3x - 5y = 5; \qquad y = x'.$$

Ahora tenemos una sistema de dos ecuaciones con dos incognitas, aunque una de las ecuacioneses de grado dos. Repetiendo la operación anterior, hacemos $z = y'$, $z' = y''$ entonces

$$\begin{aligned} x' - y &= 0 \\ y' - z &= 0 \\ z' - 2z + 3x - 5y &= 5. \end{aligned} \tag{4}$$

De esta manera hemos convertido una ecuación diferencial de orden tres en un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden. La complicación que surge ahora es que el sistema de ecuaciones simultáneas (4), si bién contiene tres ecuaciones diferenciales de primer orden, éstas a su vez contienen tres incognitas, por lo que los métodos vistos en los capítulos anteriores no nos son de utilidad.

Observe que un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{Ax'} + \mathbf{Bx} = \mathbf{b},$$

donde **A** y **B** son matrices de orden (m x n), **b** es un vector columna de (n x 1) **x** es el vector de las variables x_i y x' es el vector de sus derivadas.

Un tratamiento análogo al dado a las ecuaciones diferenciales lineales como (1) para convertirlas en sistemas de ecuaciones simultáneas, es aplicable a las ecuaciones en diferencias del mismo tipo. Considere la ecuación en diferencias

(5) $$x_{t+3} + 5x_{t+2} - 3x_{t+1} - x_t = 4$$

estableciendo las relaciones

$$x_{t+1} = y_t \qquad y_{t+1} = z_t$$

entonces

(6) $$\begin{aligned} x_{t+1} &= y_t \\ y_{t+1} &= z_t \\ z_{t+1} + 5z_t - 3y_t - x_t &= 4, \end{aligned}$$

son un sistema de ecuaciones en diferencias simultáneas.

Observe que en los sistemas de ecuaciones simultáneas (4) y (6), si bién ambos contienen solo ecuaciones diferenciales y en diferencias respectivamente de primer orden, todas contienen más de dos variables por lo que los métodos vistos en los capítulos anteriores no funcionan para estos problemas.

Al igual que en el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas, los sistema de ecuaciones en diferencias simultáneas puede escribirse en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{Ax_{t+1}} + \mathbf{Bx_t} = \mathbf{b},$$

donde **A** y **B** son matrices de orden (m x n), **b** es un vector columna de (n x 1) **x** es el vector de las variables x_i y x' es el vector

de sus derivadas.

PROBLEMAS:

1.- En cada caso, convierta la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones simultáneas de primer orden:

a) $y'' + 3y' - 4y = 2\text{sen}2t$ b) $y'' - 4y' = \cos t$

c) $y'' + 3y + 2y = t^2$ d) $3y^{(iv)} - 5y''' + y = e^{-t}$

e) $y'' + 4y' - 5y = 0$ f) $y'' - 4y' + 2y = 8$

2.- En cada caso, convierta la ecuación en diferencias en un sistema de ecuaciones simultáneas de primer orden:

a) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 6$ b) $4y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 6t$

c) $y_{t+3} + y_{t+1} + 8y_t = t^2$ d) $5y_{t+2} - 4y_{t+1} + 7y_t = \cos t$

e) $y_{t+3} - 3y_{t+2} + 5y_t = t^2 + t$ f) $y_{t+2} + 2y_{t+1} - 2y_t = 3t^2$

SECCION 6.2: SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Cuando resolvimos en el capítulo dos las ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes vimos que la solución general de éstas consta de la suma de la solución de la ecuación homogénea más una solución particular. En esta sección verremos que la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneas tienen un método de resolución análogo.

TEOREMA 1: Considere el sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas

(7) $$\mathbf{Ax' + Bx = b},$$

entonces la solución general de ésta ecuación viene dada por la suma de la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{Ax' + Bx = 0}$, x_h, más una ecuación particular, x_p.

Prueba: Sea $L(x) = \mathbf{Ax' + Bx}$, un operador lineal, entonces tenemos

que $L(x) = \mathbf{b}$ es el sistema (7). Es fácil verificar que L es lineal (hagalo!).

Suponga que x_1 y x_2 son soluciones de (7), entonces

$$L(x_1) = L(x_2) = \mathbf{b}$$

$$\Longrightarrow \quad L(x_1) - L(x_2) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

$$\Longrightarrow \quad L(x_1 - x_2) = \mathbf{0},$$

y por lo tanto $(x_1 - x_2)$ es solución del sistema $L(x) = \mathbf{0}$.

Sea $x_h = x_1 - x_2$, entonces x_h es la solución general de la ecuación homogénea $L(x) = \mathbf{0}$. Puesto que x_1 y x_2 son soluciones cualesquiera de (7), suponga que $x = x_1$ es la solución general de (7) y que $x_p = x_2$ es una solución particular, entonces obtenemos el resultado de nuestro teorema:

$$x = x_h + x_p.$$

XXXXX

Primero nos dedicaremos a resolver el problema de encontrar la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{A}x' + \mathbf{B}x = \mathbf{0}$.

Sea $x = \mathbf{a}e^{mt}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector columna de $(m \times 1)$, entonces $x' = m\mathbf{a}e^{mt}$ y tenemos que

(8) $$m\mathbf{A}\mathbf{a}e^{mt} + \mathbf{B}\mathbf{a}e^{mt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (m\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{a} = 0.$$

Puesto que $\mathbf{a}$ en (8) debe de ser una solución distinta de la trivial, tenemos que

$$\det\,(m\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 0.$$

Las soluciones de m nos darán los datos suficientes para encontrar la solución dela ecuación homogenea. Si $\mathbf{A}$ es la matriz Identidad, entonces m representa los autovalores de B.

Para encontrar la solución particular podemos utilizar el métodos de los coeficientes indeterminados que vimos en los capítulos anteriores.

Ilustremos todo ésto mediante un ejemplo. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$(9)\qquad \begin{aligned} y' + 2x' - 2y + x &= 10 \\ y' - x' + y - x &= 5. \end{aligned}$$

El sistema (9) puede escribirse en forma matricial así:

$$(10)\qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Si hacemos $y = me^{rt}$, $x = ne^{rt}$, entonces tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} re^{rt} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} e^{rt} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$(11)\qquad \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que m y n son los coeficientes de x e y, deben ser distintos de cero, por lo tanto debe suceder que

$$\det \begin{bmatrix} r-2 & 2r+1 \\ r & -r-1 \end{bmatrix} = 0.$$

Esto será verdad si y solo si $r^2 - 1 = 0$. Por lo tanto r tiene valores $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ y las soluciones generales de la ecuación homogénea es

$$(12)\qquad y = m_1e^t + m_2e^{-t}; \quad x = n_1e^t + n_2e^{-t}.$$

La solución particular puedo hallarla mediante el método de los coeficientes indeterminados. Según esto encuentro un candida-

to a solución particular, en este caso tomo una constante

$$y = a, \qquad x = b.$$

En este caso, las derivadas son $y' = x' = 0$, por lo tanto la ecuación (10) se convierte en

$$(13) \qquad \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix},$$

La solución de (13) es $(a, b) = (-15, -20)$ y por lo tanto la solución general es

$$(14) \qquad y = m_1e^t + m_2e^{-t} - 15; \qquad x = n_1e^t + n_2e^{-t} - 20.$$

SECCION 6.3: SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIA

Los sistemas de ecuaciones en diferencia simultáneas tienen un método de resolución análogo al de los sistemas de ecuaciones diferenciales simultáneos. Ilustraremos ésto mediante un ejemplo.

Encontraremos la solución del sistema homogéneo y luego le sumaremos una solución particular. Considere el sistema de ecuaciones en diferencia.

$$(15) \qquad \begin{aligned} y_{t+1} + x_{t+1} - 7y_t + 2x_t &= 8 \\ y_{t+1} - x_{t+1} + y_t - x_t &= 5. \end{aligned}$$

El sistema (15) puede escribirse como:

$$(16) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t+1} \\ x_{t+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Si hacemos $y_t = mr^t$, $x_t = nr^t$, entonces tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} r^{t+1} + \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} r^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dividiendo por r^t y sacándo (m, n) de factor común obtenemos

$$(17)\quad \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Puesto que m y n son los coeficientes de x_t e y_t, deben ser distintos de cero, por lo tanto debe suceder que

$$\det \begin{vmatrix} r-7 & r+2 \\ r+1 & -r-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto será verdad si y solo si $3r + 4 = 0$. Por lo tanto r tiene valores repetidos $r_1 = r_2 = -4/3$ y las soluciones generales de la ecuación homogénea es

$$(18)\quad y_t = m_1(-4/3)^t + m_2(-4/3)^t; \qquad x_t = n_1(-4/3)^t + n_2(-4/3)^t.$$

Usanado el método de los coeficientes indeterminados, podemos encontrar la solución particular. Encuentro un candidato a solcuión particular, en este caso tomo una constante

$$y_t = a, \qquad x_t = b,$$

obteniendo que

$$(19)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$(20)\quad ==> \quad \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix},$$

resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos que

$$a = -31/6, \qquad b = -23/3$$

y la solución general es

$$(21)\quad \begin{aligned} y_t &= m_1(-4/3)^t + m_2(-4/3)^t - 31/6; \\ x_t &= n_1(-4/3)^t + n_2(-4/3)^t - 23/3 \end{aligned}$$

PROBLEMAS:

Para cada uno de los ejercicios de la sección 6.1, resuelva la ecuación como un sistema de ecuaciones simultáneas.

SECCION 6.4: EL MODELO-INSUMO PRODUCTO DE LEONTIEF

El modelo insumo-producto de Leontief trata de determinar el nivel de producción que debe alcanzar cada industria de la economía para que se satisfaga la demanda total de cada producto.

Comencemos el análisis adoptando haciendo las siguientes hipótesis: 1) cada industria produce una mercancia homogénea; 2) cada industria utiliza una relación fija de insumo para obtener una unidad de producto; 3) Existen rendimientos constantes a escala y 4) no existen excesos de demanda. Si denotamos por a_{ij} es la cantidad fija del i-ésimo insumo necesario para producir una unidad del j-ésimo producto y si los precios son conocidos, podemos medir a_{ij} en bolívares, de manera que se necesitan a_{ij} bolívares del i-ésimo insumo para producir una unidad del j-ésimo producto. El término a_{ij} se denomina *coeficiente de insumo*. Si suponemos que los precios de todos los productos es la unidad, entonces a_{ij} representa la porción de i-ésimo bién que utiliza el j-ésimo producto.

En una economía con n industrias podemos agrupar a los coeficientes de insumo de toda la economía en una matriz

$$\mathbf{A} = [a_{ij}],\ i,j \in \{1,..,n\}.$$

En todas las economías, además de las n industria existen sectores, tales como las familias, que realizan una demanda pero que no necesitan comprar ningún insumo. Este tipo de demanda la llamaremos *demanda final* y los insumos utilizados, tales como la mano de obra, se llaman *insumo primario*. Un modelo con estas

características se dice que es un *modelo abierto*.

En los modelos abiertos, la suma de los coeficientes de insumo de cada columna de la matriz **A** debe ser menor que el precio del producto ya que en éstos no se incluyen los costos de los insumos primarios. De manera que si esta suma es mayor que el precio, entonces el costo unitario del producto es mayor que el precio del mercado y, por lo tanto, no se justifica, económicamente, su producción.

Denotemos por d_i la demanda final de i-ésimo bién y por x_i la producción total de la i-ésima industria, entonces si $\mathbf{X} = [x_i]$ y $\mathbf{D} = [d_i]$ son vectores de orden (nx1), **X** representa el vector de producción de la economía, tanto de bienes finales como de insumos, y **D** representa el vector de la demanda final de la economía, por los tanto **AX** representa la porción del producto total que se utiliza en la producción de otros bienes de la economía. Si suponemos que no existen excesos de demanda, entonces **AX + D** mide la producción de la economía, es decir

$$\mathbf{AX} + \mathbf{D} = \mathbf{X},$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{X} - \mathbf{AX} = \mathbf{D}$$

$$\Longrightarrow \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{D},$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{TX} = \mathbf{D}.$$

A la metriz **T** se denomina *matriz tecnológica*. Si queremos determinar el nivel de producción de la economía, entonces podemos despejar **X** y así,

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{D} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}.$$

Análisis Dinámico Insumo-Producto. El análisis realizado hasta ahora no toma en consideración los problemas del tiempo. Si

tomamos alguna consideraciones adicionales, podemos darle al análisis insumo-producto un carácter dinámico que nos permita, mediante la resolución de un sistema de ecuaciones en diferencias o diferenciales como los ya vistos, conocer la trayectoría temporal del producto y la estabilidad del equilibrio.

Suponga que existe un desfase en la producción de manera tal que el nivel de producción en el período t+1 es determinado por la demanda total en el período anterior, t, entonces

$$X_{t+1} = AX_t + D_t,$$

$$(22) \qquad ==> \qquad X_{t+1} - AX_t = D_t.$$

De modo que (22) es un sistema de ecuaciones en diferencias que mediante un enfoque de insumo-producto de Leontief nos dá a su vez la trayectoria temporal del producto y la estabilidad del sistema.

El sistema determinado por la ecuación (22) también puede surgir de un supuesto distinto; $(AX_t + D_t)$ es el vector de demanda de la econonía y X_t es el vector de la oferta, de modo que

$$(23) \qquad (AX_t + D_t) - X_t = X_{t+1} - X_t$$

es el exceso de demanda de la economía y será incremento en el producto por ajuste para el siguiente período. Observe que (23) puede obtenerse de (22) restando X_t en cada lado de la ecuación.

El enfoque expresado mediante la ecuación (23) puede expresarse en términos contínuos utilizando derivadas en lugar de diferencias. Así,

$$X'(t) = AX(t) + D_t - X(t)$$

$$==> \qquad IX' + (I - A)X = D.$$

Observe que la estabilidad del equilibrio en todos los casos

está dado por la forma de las raíces características.

PROBLEMAS:

1.- Suponga que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3/10 & 4/10 \\ 3/10 & 2/10 \end{bmatrix}$ Y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} e^{t/10} \\ 2e^{t/10} \end{bmatrix}$ son la matriz de los coeficientes de insumo y el vector de demanda final respectivamente. Suponga que el ajuste en la producción es contínuo y retrasado. Encontrar la trayectoría temporal del producto.

2.- Resuelva el problema 1 en el caso en que el ajuste en la producción es discreto.

3.- En un mercado con n mercancias, todas las funciones de demanda, oferta y excesos de demanda (Q_{di}, Q_{si} y $E_i = Q_{di} - Q_{si}$, para $i = 1,..,n$), pueden ser consideradas como funciones de los n precios $P_1,...,P_n$, en el supuesto de que éstas son funciones lineales, tenemos que

$$E_i = a_{i0} + a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + ... + a_{in}P_n;\ i = 1,...,n.$$

En notación matricial tenemos que

$$\mathbf{E} = \mathbf{a} + \mathbf{AP}.$$

a) ¿Cuales de estos cuatro últimos simbolos son escalares y cuales son sus respectivas dimensiones?

b) Suponga que todos los precios son funciones del timepo y que $dP_i/dt = \alpha_i E_i$ $(i = 1,...,n)$. ¿Cual es la interpretación económica de este último conjunto de ecuaciones?

c) Escribir el sistema de ecuaciones diferenciales que muestra que P' es una función lineal de los n precios.

d) Realizar el mismo análisis de los puntos b) y c) en caso de que el ajuste sea discreto.

La tabla 7.1 muestra el análisis de sensitividad del lado derecho para todas las restricciones. Observe que las restricciones (3) y (4) tiene "infinito" como cota superior. Esto es debido a su caracter de recursos abundantes, mientras que las restricciones (1) y (2) son acotadas tanto superior como inferiormente, esto también es debido a su caracter de recurso escaso.

La pregunta 3) es la referente a que si tengo la opción de escoger cual recurso aumentar, ¿Cual recurso incrementar?. La respuesta de esta pregunta se conoce con el nombre de "precio de sombra". Para ello resolverla tomamos el incremento máximo que sobre el valor de la función objetivo produce el aumento en la disponibilidad del recurso y lo dividimos entre el máximo incremento permitido premitido del recurso que se analiza. Esto nos dará la riqueza adicional de incrementar el recurso escaso en una unidad. Por ejemplo en el recurso (2) sería:

inc. max. sobre la función objetivo = 5,33

inc. max. permitido = 1 (7 - 6)

riqueza por unidad adicional de recurso 2 = 5,33/1 = 5,33.

El análisis de riqueza por unidad se resume en la tabla 7.2.

TABLA 7.2.

RESTRICCION	MAXIMO CAMBIO EN V	CAMBIO EN RESTRICCION	RIQUEZA UNITARIA
(1)	0,33	1	0,33
(2)	5,33	4	1,33
(3)	0	-3	0
(4)	0	-0,66	0

El último análisis de sensitividad trata de responder la

pregunta ¿Cuánto pueden cambiar los coeficientes de la función objetivos sin que cambie la solución óptima? y ¿Cuanto puede un coeficiente cambiar sin revertir su status de abundante o escaso?. Variaciones en los coeficientes cambian la pendiente de la función objetivo (gráfica 7.4). El coeficiente del cemento para exteriores (c_e) puede variar hasta que la pendiente alcance a la pendiente de la restricción (1) o (2). Puesto que la pendiente de la restricción (1) es 1/2 y el coeficiente $c_i = 2$ entonces hacemos $c_e/2 = 1/2$, por lo que el mínimo valor de c_e es 1. Análogamente hallamos el máximo valor de c_e igualando $c_e/2$ a la pendiente de (2), así $c_e/2 = 2$. por lo que el máximo valor de c_e es 4.

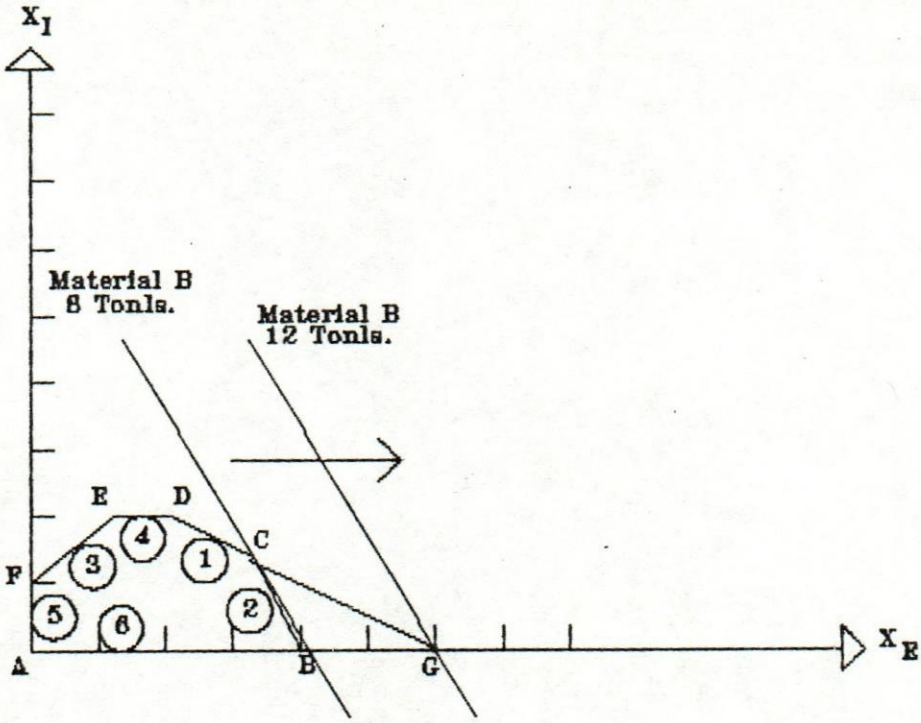
Así, el rango de c_e para que el punto óptimo permanezca invariante es $1 < c_e < 4$. Analogamente si calculamos este rango para c_i nos queda que $1,5 < c_i < 6$.

PROBLEMAS:

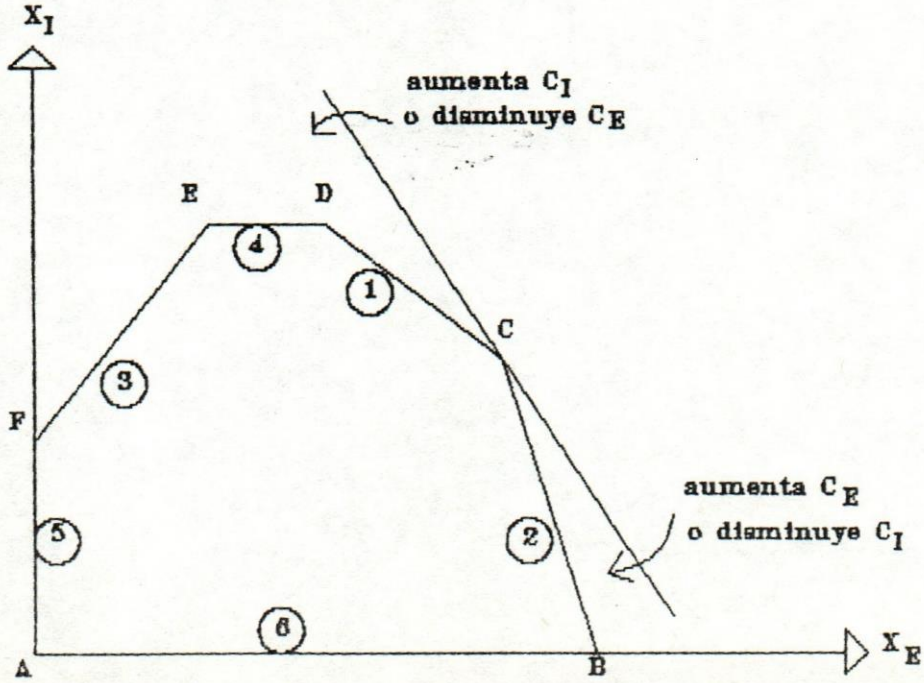
1.- Una compañia de productos electrónicos fabrica dos modelos de radios en dos lineas de producción diferentes. La capacidad diaria de la primera linea es de 60 radios y el de la segunda, 75 radios. Cada unidad del primer modelo usa 10 piezas de cierto componente electrónico mientras que cada unidad del segundo modelo requiere 8 piezas del mismo componente. La disponibilidad máxima diaria del componente especial es de 800 piezas. El beneficio por unidad de los modelos 1 y 2 es de Bs. 30 y Bs. 20 respectivamente. Determine la producción diaria óptima para cada modelo y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

2.- Una compañia puede publicitar sus productos mediante el uso de la radio local y las estaciones de TV. Su presupuesto de pu-

GRAFICA 7.3



GRAFICA 7.4



blicidad es de Bs. 50.000 mensual. Cada minuto de propaganda de radio cuesta Bs. 50 y el de TV, Bs. 1000. La compañia le gustaría usar la radio al menos dos veces más que la TV. La experiencia pasada muestra que cada minuto de propaganda de TV generará 25 veces más ventas que cada minuto de propaganda de radio. Determine la colocación óptima del presupuesto mensual de propaganda en radio y TV y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

3.- Dos productos son fabricados mediante un procedimiento de uso secuencial de tres máquinas distintas. El tiempo de uso de cada máquina es limitado a 10 horas diarias. El primer producto requiere un tiempo de producción en la primera, segunda y tercera máquinas de 10, 6 y 8 minutos respectivamente y su beneficio es de Bs. 2, mientras que el tiempo de producción del segundo producto es de 5, 20 y 15 minutos respectivamente y produce un beneficio de Bs. 3. Encuentre la combinación de producción óptima de los dos productos y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

4.- Una compañia fabrica dos productos A y B. El volumen de venta del producto A es al menos el 60% del total de las ventas. Ambos productos usan la misma materia prima, cuya disponibilidad diaria es de 100 kg. Los productos A y B usan este material a una tasa de 2Kg y 4 Kg. por unidad respectivamente. El precio de venta de los dos productos es de Bs.20 y Bs.40 por unidad. Determine la asignación óptima de disponibilidad de materia prima para ambos productos y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

5.- Una compañia prduce dos tipos de sombreros. Cada sombrero del primer tipo requiere dos veces más tiempo de trabajo que el del segundo tipo. Si todos los sombreros que se produjeran fueran del segundo tipo, la compañia puede producir un total de 500 sombreros diarios. El mercado limita las ventas diarias a 150 y 200 sombreros del primero y segundo tipos respectivamente. El beneficio para un sombrero del primer tipo es de Bs.8 y del segundo tipo Bs.5. Determine el númeo de sombreros que debe producir la empresa para maximizar su beneficio y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

6.- Un empresario tiene la opción de invertir su dinero en dos planes. El plan A garantiza que cada bolívar invertido ganará 70 céntimos por año y el plan B garantiza que cada bolívar invertido ganará bs. 2 por dos años. En el plan B solo se permiten inversiones por periodos de dos años. Como el empresario deberá invertir bs. 100.000 para maximizar sus ganancias en tres años. Haga el correspondiente análisis de sensitividad.

7.- Cuatro productos son procesados sucesivamente en dos máquinas. El tiempo de producción por hora por unidad es tabulado en el siguiente cuadro:

TIEMPO POR UNIDAD (HRS.)

MAQUINA	PRODUCTO 1	PRODUCTO 2	PRODUCTO 3	PRODUCTO 4
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

El costo total de producir una unidad de cada producto esta

basado directamente sobre el tiempo de máquina. Asuma que el costo por hora por máquina es de Bs.10 y Bs.15 respectivamente. El total de horas presupuestadas para todos los productos en las máquinas 1 y 2 es de 500 y 380. Si el precio unitario para los productos 1, 2, 3 y 4 es de bs. 65, 70, 55 y 45, cuales deberán ser los niveles de produccion que maximicen el beneficio y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

8.- Una fábrica produce tres modelos (I, II y III) de un cierto producto. Ella usa dos tipos de materias primas (A y B), de los cuales 4000 y 6000 unidades son disponibles, respectivamente. El requisito de materia prima por unidad de los tres modelos está dado por la siguiente tabla:

REQUISITOS POR UNIDAD DE MODELO

MATERIA PRIMA	I	II	III
A	2	3	5
B	4	2	7

El tiempo de trabajo para cada unidad del modelo I es dos veces más que el de II y tres veces más que el de III. La fuerza de trabajo total puede producir el equivalente a 1500 unidades del modelo I. Un muestreo del mercado indica que la demanda mínima para los modelos es de 200, 200 y 150 unidades respectivamente. Sin embargo, la proporción del número de unidades producidas es de 3:2:5. Asuma que el beneficio por unidad de los modelos I, II y III es de Bs. 30, 20 y 50 respectivamente. Determine el número de unidades de cada producto que maximiza el beneficio. Haga el correspondiente análisis de sensitividad.

9.- Considere el problema de asignar tres tipos de aviones a cuatro rutas. La tabla de abajo dá los datos pertinentes:

TIPO DE AVIONES	CAPACIDAD (PASAJEROS)	NUMERO DE AVIONES	NUMERO DE RUTAS 1	2	3	4
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
Número diario de pasajeros			100	200	90	120

Los costos de operación asociados están dados abajo:

COSTO DE OPERACION POR VIAJE

PARA CADA TIPO DE RUTA.

TIPO DE AVION	1	2	3	4
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
COSTO PENADO POR CLIENTE PERDIDO	40	50	45	70

Distribuya los aviones con el objeto de maximizar los beneficios y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

10.- Dos aleaciones son hechas de cuatro diferentes metales I, II, III y IV, de acuerdo a las siguientes especificaciones: la aleación A tiene a lo sumo 80% de I y 30% de II y como mínimo 50% de IV, mientras que la aleación B contiene entre 40% y 60% de II, al menos 30% de III y a lo sumo 70% de IV.

Los cuatro metales son extraidos de tres diferentes minerales:

MINERAL	CANTIDAD MAXIMA(TNS)	COMPONENTES I	II	III	IV	OTROS	PRECIO Bs/ton.
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

Asuma que el precio de venta de las aleaciones A y B son de Bs. 200 y Bs. 300 por toneladas respectivamente. Formule el problema como un modelo PL, resulevalo y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

11.- Un apostador realiza un juego en el que requiere colocar su dinero entre cuatro posibles elecciones. El juego tiene tres posibles resultados. La siguiente tabla da las correspondientes ganancias (pérdidas) por bolívar depositado en cada una de las cuatro posibles elecciones para los tres posibles resultados.

RESULTADO	GANANCIA POR BOLIVAR DEPOSITADO EN CADA ELECCION 1	2	3	4
1	-3	4	-7	15
2	5	-3	9	4
3	3	-9	10	-8

Asuma que el apostador tiene un total de Bs. 500, con los cuales el puede jugar solamente una vez. El resultado exacto del juego no es conocido a priori y para enfrentar esta incertidumbre el jugador decide hacer la colocación que maximizaría las mínimas ganancias. Formule el problema como un modelo PL y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

12.- Un molino agrícola produce alimento para vacas, ovejas y pollos. Esto se hace mezclando los siguientes ingredientes principales: Maiz, piedra caliza, frijol de soya y comida de pescado. Estos ingredientes contienen los siguientes nutrientes: vitaminas, proteinas, calcio y grasa cruda. A continuación se resume el contenido de los nutrientes en cada kg. de los ingredientes:

	NUTRIENTE			
INGREDIENTE	VITAMINAS	PROTEINA	CALCIO	GRASA CRUDA
Maiz	8	10	6	8
Piedra Caliza	6	5	10	6
Frijol de Soya	10	12	6	6
Comida de Pescado	4	8	6	9

Se hace un pedido al molino para que produzca 10, 6 y 8 toneladas métricas de alimentos para vacas, ovejas y pollos respectivamente. Debido a la escacez de los ingredientes solo se dispone de una cantidad limitada de ellos, a saber, 6 ton. de maiz, 10 ton. de piedra caliza, 4 ton. de frijol de soya y 5 ton. de comida de pescado. El precio por kilogramo por ingrediente es de Bolívares 20, 12, 24 y 12 respectivamente. A continuación se resumen las unidades mínima y máxima que se permiten de los distintos nutrientes por cada kilogramo de alimento para vacas, ovejas y pollos.

	NUTRIENTE							
PRODUCTO (alimentos para)	VITAMINAS		PROTEINA		CALCIO		GRASA CRUDA	
	min	max	min	max	min	max	min	max
vacas	6	∞	6	∞	7	∞	4	8
ovejas	6	∞	6	∞	6	∞	4	6
pollos	4	6	6	∞	6	∞	4	6

Encuentre la mezcla alimenticia de forma tal que el costo sea mínimo y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

13.- El personal técnico de un hospital desea elaborar un sistema computarizado para planear menúes. Para empezar, deciden planear el menú del almuerzo. El menú se divide en tres grandes categorias: vegetales, carne y postre. Se desea incluir en el menú al menos el equivalente a una porción de cada categoria. A continuación se resume el costo por ración de algunos artículos sugeridos, así como su contenido en carbohidratos, vitaminas, proteinas y grasas.

	CARBOHIDRATOS	VITAMINAS	PROTEINAS	GRASA	COSTO DE RACION
VEGETALES					
Chicharos	1	3	1	0	10
Ejotes	1	5	2	0	12
Quimbobó	1	5	1	0	13
Maiz	2	6	1	2	9
Macarrones	4	2	1	1	10
Arroz	5	1	1	1	7
CARNES					
Pollo	2	1	3	1	60
Res	3	8	5	2	120
Pescado	3	6	6	1	80
POSTRES					
Naranja	1	3	1	0	28
Manzana	1	2	0	0	42
Pudín	1	0	0	0	15
Gelatina	1	0	0	0	12

Supongase que los requerimietnos mínimos de comida de carbohidratos, vitaminas, proteinas y grasas son 5, 10, 10 y 12 respectivamente. Formule el problema como un modelo PL. Resuelvalo y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

14.- Una compañia desea planificar la producción de dos de sus artículos que tienen demanda de temporada en un período de 12 meses. La demanda mensual del artículo 1 es de 100.000 unidades durante los meses de octubre, noviembre y diciembre; de 10.000 unidades durante los meses de enenro, febrero, marzo y abril; y de 50.000 unidades durante los meses de octubre a febrero y de 15.000 durante los meses restantes. Supongase que el costo por unidad para producir los artículos 1 y 2 es de B.s 50 y Bs. 80 respectivamente, siempre y cuando se fabriquen antes de junio. Después de junio, los costos por unidad se reducen a 45 y 70 debido a la instalación de un mejor sistema de fabricación. El número total de unidades de los artículos 1 y 2 que pueden fabricarse durante cualquier mes particular no puede ser mayor de 120.000. Además, cada unidad del artículo 1 ocupa 2 m^3 cúbicos de almacén y cada unidad del artículo 2 ocupa 4 m^3. Suponga que el espacio de almacen disponible es de 150.000 m^3 y que el costo de arrendamiento por m^3 es de bs. 10. Formule el problema de planeación de producción de tal manera que la producción total y los costos de inventario sean mínimos. Resuelvalo y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

15.- Alfredo tiene Bs. 2.200 para invertir durante los siguientes

5 años. Al principio de cada año puede invertir su dinero en depósitos a plazo fijo de 1 o 2 años. El banco paga el 8% de interés en depósitos a plazo fio de un año y el 17% (total) en depósitos a plazo fijo a dos años. Además, al principio del segundo año, la compañia URDIS C.A. ofrecerá certificados a tres años. Estos certificados tendrán una ganancia total del 27%. Si Alfredo reinvierte su dinero disponible cada año, formule un programa lineal que le muestre como maximizar su ganancia total al final del quinto año. Resuelvalo y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

16.- Una refinería puede comprar dos tipos de petróleo: crudo ligero y crudo pesado. El costo por barril de estos tipos de petróleo es de Bs. 11 y Bs. 9 respectivamente. De cada tipo de petróleo se producen por barril las siguientes cantidades de gasolina, kerosene y combustible para reactores.

	GASOLINA	KEROSENE	COMBUSTIBLE PARA REACTORES
Crudo Ligero	0,4	0,2	0,35
Crudo Pesado	0,32	0,4	0,2

Observe que durante el proceso de refinamiento se piuerden el 5% y el 8% del crudo respectivamente. La refinería tiene un contrato para entregar un millón de berriles de gasolina, 400.000 barriles de kerosene y 25.000 barriles de combustible para reactores. Formular como un programa lineal el problema de encontrar el numero de barriles de cada tipo de petróleo crudo que satisfacen la demanda y que minimizan el costo total. Resuelvalo y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

17.- Una compañia produce un ensamblado que consiste de un bastidor, una barra y un cojinete. La compañia fabrica las barras y los bastidores pero tiene que comprar los cojinetes a otro fabricante. Cada barra debe procesarse en una máquina de forja, un torno y un esmeril. Estas operaciones requieren de 0,5 horas, 0,2 horas y 0,3 horas por barra, respectivamente. Cada bastidor requiere de 0,8 horas de trabajo de forja, 0,1 en el taladro, 0,3 en la fresadora y 0,5 en el esmeril. La compañia tiene 5 tornos, 10 esmeriles, 20 máquinas de forja, 3 taladros y 6 fresadoras. Supóngase que cada máquina opera un máximo de 2.400 horas por año. Formular como un programa lineal el problema de encontrar el número máximo de componentes ensamblados que se pueden producir. Resuelvalo y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

18.- Una compañia fabricante de aparatos de televisión tiene que decidir entre el número de televisores a color y en blanco y negro que debe producir. Una investigación del mercado indica que se pueden vender a los más 1000 unidades a color y 4000 unidades en blanco y negro. El número máximo de horas-hombre disponibilibles es de 50.000 por mes. Un televisor a color requiere de 20 horas hombre y uno en blanco y negro requiere de 15 horas hombre. La ganancia por unidad de los televisores a color y en blanco y negro es de bs. 60 y 30 respectivamente. Se desea encontrar el número de unidades de cada tipo de televisor que la compañia debe producir para maximizar su ganancia. Haga el correspondiente análisis de sensitividad.

19.- Un barrio de 10 acres en Caracas se va a demoler y el Concejo Municipal debe decidir sobre el nuevo plan de desarrollo. Se van a considerar dos proyectos habitacionales: viviendas a bajo costo y viviendas a medio costo. Se pueden construir de 20 a 15 unidades por acre, de estos dos tipos de vivienda respectivamente. Los costos por unidad de vivienda a bajo y medio costo son de Bs. 500.000 y 1.000.000. Los límites superior e inferior establecidos por el municipio sobre el número de viviendas de bajo costo son 60 y 100, y el de medio costo debe estar entre 30 y 70. El mercado potencial combinado máximo para las viviendas se estima que es de 150 (que es menor que la suma de los límites individuales debido al traslape entre los dos mercados). Se desea que la hipoteca total comprometida al nuevo plan de desarrollo no exceda a Bs. 100 millones. Finalmente, el asesor de la obra sugirió que el número de viviendas de bajo costo sea al menos 50 unidades mayor que la mitad del número de viviendas a medio costo. Resuelva el problema de maximizar el número de viviendas que debenm construirse y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

20.- Un gerente de producción está planeando la programación de tres productos en cuatro máquinas. Cada producto se puede manufacturar en cada una de las máquinas. A continuación se resumen los costos de producción por unidad (en Bs.).

	MAQUINA			
PRODUCTO	1	2	3	4
1	4	4	5	7
2	6	7	5	6
3	12	10	8	11

En seguida se resume el tiempo (en horas) requerido para producir cada unidad de producto en cada una de las máquinas:

	MAQUINA			
PRODUCTO	1	2	3	4
1	0.3	0.25	0.2	0.2
2	0.2	0.3	0.2	0.25
3	0.8	0.6	0.6	0.5

Supongase que se requiren 4000, 5000 y 3000 unidades de los productos, y que las horas másquina disponibles son 1500, 1200, 1500 y 2000 respectivamente. Formular el problema como un modelo PL. Resuelvalo y haga el correspondiente análisis de sensitividad.

SECCION 7.2: EL PROBLEMA DUAL.

El modelo PL consta de una función objetivo y un conjunto de restricciones las cuales constan de las restricciones de no negatividad y las demás restricciones. Existe un forma particular de escribir el problema PL que llamaremos "forma canónica". Un modelo PL en forma canónica es aquel que tiene la siguiente forma:

(6) Mininimizar $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

sujeto a: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = 1,\ldots,m.$

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; \ldots, \; x_n \geq 0.$

Demostraremos ahora que todo problema PL puede escribirse en forma canónica. Para esto analizaremos separadamente las partes del modelo PL.

<u>Función Objetivo</u>: Un modelo PL puede tener un objetivo de maximización o minimización. Si el problema es de minimización, entonces la función objetivo ya está escrita en forma canónica, pero

si el problema es de maximización, podemos convertirla en forma canónica minimizando el negativo de la función objetivo original, es decir, si la función objetivo es

$$\text{Maximizar} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

podemos convertir ésto en un problema de minimización tomando como función objetivo

$$\text{Mininimizar} \quad -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n.$$

<u>Restricciones</u>: Las restricciones de un modelo PL pueden tener una de las siguientes formas:

a) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$

b) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$

c) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$

d) $x_i \geq 0$

e) $x_i \leq 0$

f) x_i sin restricciones.

Si la restricción tiene la forma a), ya está escrita en forma canónica. Si la restricción tiene la forma b), podemos escribirla en forma canónica multiplicando toda la desiguealdad por -1, obteniendo

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \geq b_i.$$

Si la restricción está escrita en la forma c), la podemos escribir en forma canónica escribiendo las siguientes dos restricciones

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

Si la restricción está escrita en la forma d), esta es la restricción de no negatividad y por lo tanto ya está escrita en forma canónica, pero si está escrita enla forma e), podemos es-

cribirla en la forma d) definiendo una nueva variable

$$y_i = - x_i,$$

de esta forma la restricción e) se convierte en

$$y_1 \geq 0.$$

Por último, si la restricción está escrita en la forma f), definimos dos nuevas variables: la parte positiva de x_i, la cual denotaremos x_i^+ y la parte negativa de x_i, la cual denotaremos por x_i^-, de forma que $x_i = x_i^+ - x_i^-$, donde $x_i^+ \geq 0$ y $x_i^- \geq 0$.

<u>EJEMPLO</u>: Escribir es siguiente modelo PL en forma canónica:

$$\begin{aligned} &\text{max. } 2x - 2y \\ &\text{s.a. } -3x + 2y \leq 8 \quad (a) \\ &\qquad 9x - 5y \geq 6 \quad (b) \\ &\qquad 5x - 3y = 4 \quad (c) \\ &\qquad x \leq 0; \text{ y sin restricciones.} \end{aligned}$$

Puesto que el problema es de maximización, redefino la función objetivo de la siguiente manera:

$$\text{min. } - 2x + 2y.$$

La restricción (a) la reescribimos de la siguiente manera:

$$3x - 2y \geq 8$$

La restricción (b) ya está escrita en la forma deseada. La restricción (c) la convertimos en dos restricciones de la siguiente manera:

$$5x - 3y \geq 4$$

$$- 5x + 3y \geq - 4.$$

Por último, tenemos que $x \leq 0$ y la variable "y" no tiene restricciones. Por lo tanto, hacemos $x_1 = - x$, $y = y^+ - y^-$, por lo tanto

$$x_1 \geq 0,\ y^+ \geq 0,\ y^- \geq 0.$$

Sustituyendo estas últimas en las restricciones anteriores obtenemos el modelo PL en forma canónica:

(7) minimizar $-2x_1 + 2y^+ - 2y^-$

sujeto a:

$$3x_1 - 2y^+ + 2y^- \geq 8$$
$$9x_1 - 5y^+ + 5y^- \geq -6.$$
$$5x_1 - 3y^+ + 3y^- \geq 4$$
$$-5x_1 + 3y^+ - 3y^- \geq -4$$
$$x_1 \geq 0$$
$$y^+ \geq 0$$
$$y^- \geq 0.$$

<u>El Problema Dual</u>: Para todo problema PL existe otro problema PL, el cual llamaremos "el problema dual", al cual está intimamente relacionado. Puesto que todo PL puede escribirse en forma canónica, nos contentaremos con describir un método para hallar el problema dual a un modelo PL escrito en forma canónica. Considere el siguiente modelo PL:

(8) Mininimizar $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$

sujeto a: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i,\quad i = 1,\ldots,m.$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0.$$

Defino el problema dual del modelo PL como

(9) Maximizar $b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$

sueto a: $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \leq b,\quad j = 1,\ldots,n.$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ \ldots,\ y_m \geq 0.$$

Al problema (8) lo llamaremos "primal". Por ejemplo, el dual del problema lineal (7) es el siguiente:

Maximizar $8y_1 - 6y_2 + 4y_3 - 4y_4$

sujeto a:

$$9y_1 + 3y_2 + 5y_3 - 5y_4 \geq -2$$

$$-2y_1 - 5y_2 - 3y_3 + 3y_4 \geq 2$$

$$5y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 3y_4 \geq -2$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$y_3 \geq 0$$

$$y_4 \geq 0.$$

Por último veremos un teorema muy importante sobre dualidad.

<u>TEOREMA DE DUALIDAD</u>: Si uno de los problemas tiene solución óptima, entonces ambos problemas tienen soluciones óptimas y los dos valores objetivos óptimos son iguales.

La demostración de éste teorema no es sencilla por lo que la obviaremos. Sin embargo, el lector interesado puede remitirse a Bazaraa, M.y Jarvis, J. en "Programación Linear y lujo en Redes". Este teorema nos será de gran utilidad para probar un teorema importante sobre teoría de juegos en el siguiente capítulo.

<u>PROBLEMAS</u>:

1.- En cada uno de los problemas de la sección 7.1., encontrar el problema dual, resolverlo y comprobar el teorema de dualidad.

CAPITULO 8

TEORIA DE JUEGOS

SECCION 8.1: DEFINICIONES

Cuando dos jugadores se enfrentan en un juego particular, el objetivo de cada uno es ganar el juego obteniendo para sí el mejor resultado posible. Existen gran cantidad y variedad de juegos, tales como el ajedrez, el dominó, los dados o el bridge. Todos estos juegos tienen la siguiente característica: cada uno consta de un número finito de reglas y procedimientos para jugar. Esto último nos conduce a una definición natural de juego.

DEFINICION: Un juego es un conjunto de reglas y procedimientos donde participan dos o más jugadores con el objetivo de obtener cada uno para sí el mayor beneficio.

Usualmente, cuando un ciudadano normal piensa en un juego, piensa en una diversión. Ahora, dada esta definición de juego, podemos también interpretar como un juego cosas que no son tan divertidas como el control de un mercado por parte de dos duopolistas o duopsonistas o un conflicto bélico en el Golfo Pérsico. Ejemplos de este tipo de juegos los veremos más adelante.

Según la definición que acabamos de dar, un juego puede implicar confrontación entre jugadores y ésto es lo que sucede en gran cantidad de ellos. Sin embargo, ésto no elimina la posibilidad de establecer alianzas coyunturales entre jugadores para maximizar beneficios. Por ejemplo, en el caso del duopolio, puede suceder que un acuerdo entre los duopolistas le conduzca a cada uno de ellos a obtener mejores beneficios que en caso de confrontación. En este capítulo nos interesaremos solo por lo juegos de confrontación.

oportunidad de ganar el título, mientras se encuentra en su lecho de enfermo escribe una carta a los árbitros explicando su ausencia, a la vez que le envía un voluminoso paquete en el que especifica cual sería su movimiento en cada jugada posible. Suponga asimismo que al segundo jugador también se lesiona y hace exactamente lo mismo. El árbitro entonces puede, con los dos paquetes en la mano, realizar la partida exactamente de la misma forma como si la realizaran los dos jugadores personalmente obteniendo el mismo resultado. De esta manera el juego se realiza obteniendo determinado resultado. Cuando cada jugador hace su paquete, está escribiendo todas las estrategias posibles, y éstas, por muy numerosas que sean son un número finito. Si a cada una de estas estrategias la llamamos jugada, podemos ver que un juego finito lo podemos convertir en un juego de una jugada.

Los juegos pueden variar también de acuerdo a la cantidad de información existente. Por ejemplo en el ajedrez, cada jugador sabe las jugadas previas del otro, mientras que en los dados no. En el dominó, existe un factor de azar cuando se reparten las piedras, pero una vez hecho ésto el azar desaparece. En todo caso, nos interesaremos en aquellos juegos con **una sola jugada en los que las decisiones de los jugadores se realizan de manera simultánea.**

Otra clasificación de los juegos es el número de jugadores. Existen juegos con dos jugadores o más de dos jugadores. **Aquí solo nos interesaremos por juegos finitos con dos jugadores,** aunque comentaremos algunas características de otros tipos de juegos.

Existen cierto tipo de juegos en los que la confrontación

lleva a situaciones en las que la ganancia de uno de los jugadores es la pérdida de todos los demás. Esto nos conduce a realizar la siguiente definición.

DEFINICION. Un juego es de suma-cero si la suma de la ganancia de todos los jugadores es cero, es decir, los beneficios (positivos) de todos los jugadores ganadores es igual a la pérdida (positiva) de todos los jugadores que perdieron.

Es indudable que todos los juegos de suma-cero son juegos de confrontación.

Aquellos juegos en los que ésto no sucede se dicen que son juegos de no suma-cero. Un tipo particular de juegos que nos interesarán son los juegos de suma constante. Estos son aquellos en los que la suma de la ganancia de todos los jugadores es una constante particular. Indudablemente que los juegos de suma-cero son una caso particular de los juegos de suma-constante, aunque los demás juegos de suma constante son juegos de no suma-cero.

En conclusión, en este capítulo nos interesaremos por los juegos de estrategia finitos con dos jugadores de suma-constante.

SECCION 8.2: JUEGOS CON PUNTOS DE SILLA

Analicemos un juego particular entre dos apostadores I y II. Cada apostador posee dos cartas: una de corazón y una de trébol, y que cada uno debe sacar una carta. Si las dos cartas que aparecen son de corazón II le paga bs. 8 mil a I; si las dos cartas son de trébol I le paga bs. 8 mil a II; si I saca corazón y II trébol, II le paga bs. 5 mil a I y, por último, si I saca trébol y II corazón, I le paga bs. 5 mil a II. El problema que se presenta es cual estrategia debe utilizar un jugador particular.

Para resolver este juego construiremos la siguiente matriz:

$$
(1) \qquad \begin{array}{cc} & \text{II} \\ & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \text{I} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Si llamamos "1" a la estrategia de sacar un corazón y "2" a la estrategia de sacar un trébol, tenemos que el elemento (1,1) de la matriz (1) nos dice que II le paga bs. 8 mil a I si ambos sacan la cara con el corazón. El elemento (2,2) dice que I le paga a II bs. 8 mil si ambos juegan trébol (II le paga - 8 mil a I) y así sucesivamente. La matriz (1) se llama la matriz de beneficios para el jugador I. Esta matriz es usualmente llamada también "matriz de pagos" o "matriz de ganancias".

Evidentemente que este es un juego de suma-cero y una característica de éstos juegos es que la solución del juego no depende exclusivamente de un jugador sino que también depende del otro jugador. Aquí nos interesaremos por encontrar la estrategia óptima para el jugador I. Para ello suponga que el jugador II es un jugador excelente, es decir, que para cada estrategia de I, II usará su mejor estrategia. Si esto es así, Si I juega saca un corazón (estrategia 1), entonces II sacará un trébol (estrategia 2), que es la que le produce a II una mínima pérdida de 5. Por el contrario, si I saca trébol (estrategia 2), entonces II sacará un corazón (estrategia 1) donde su mínima pérdida es -8; entonces uno deberá escoger entre dos posibles resultados: 5 y -8. Evidentemente que de sus dos posibles resultados tomará aquel que le dé el mayor beneficio, en este caso jugará la estrategia 1 que le proporciona una ganancia de 5. Una estrategia de este tipo se

conoce con el nombre de "MAXIMIN", porque escoge el máximo entre los beneficios mínimos esperados para cada estrategia posible. Si $a_{i,j}$ es el elemento de la fila i y la columna j de la matriz (1), entonces I escogerá al maximin $\{a_{i,j}\}$.

Por otra parte, si el jugador II supone que I también es un jugador excelente y por lo tanto siempre escogerá su mejor jugada, actuará de la misma manera que I. En este caso, puesto que (1) es una matriz de beneficios para I, es una matriz de pérdidas para II y por lo tanto II escogerá la estrategia que haga mínimice el beneficio de I, es decir, escogerá el mínimo entre las máximas pérdidas esperadas para cada estrategia posible. La estrategia del jugador II se conoce con el nombre de "MINIMAX" y el jugador II escogerá al minimax $\{a_{i,j}\}$.

Analizando el problema con mayor detalle, se observa que I escoge como estrategia el máximo entre los mínimos de cada fila y II escoge el mínimo entre los máximos de cada columna.

$$
(2) \qquad \begin{array}{cc|cc|c}
 & & \multicolumn{2}{c}{\text{II}} & \text{mínimos} \\
 & & 1 & 2 & \text{de fila} \\
\hline
\text{I} & 1 & 8 & 5 & 5 \\
 & 2 & -5 & -8 & -8 \\
\hline
 & \text{máximos de columna} & 8 & 5 &
\end{array}
$$

De (2) se observa que los mínimos de fila I escoge el máximo, es decir

$$\text{maximin } a_{i,j} = \max \{ 5, -8 \} = 5 = a_{1,2}$$

por lo tanto I escoge la estrategia 1.

Por otra parte, de los máximos de columna II escoge el mínimo, es decir

$$\text{minimax } a_{i,j} = \min \{ 8, 5 \} = 5 = a_{1,2}$$

y el jugador II escoge la estrategia 2.

Puesto que I escoge la estrategia 1 y II escoge la estrategia 2, el **valor del juego** será 5, es decir que II le pagará a I bs. 5.000. Si el juego se repite, cada jugador volverá a escogerla misma estrategia, ya que el juego ha dado el resultado que cada jugador espera. Puesto que I y II siempre utilizarán la misma estrategia, se dice que utilizan "estrategias puras".

Observe que en este juego

$$\text{maximin } \{a_{i,j}\} = \text{minimax } \{a_{i,j}\} = a_{1,2} = 5.$$

Veremos más adelante que no todos los juegos tienen esta característica. Esto nos conduce a la siguiente definición.

<u>DEFINICION</u>: Sea A un matriz de beneficios para un juego con dos personas de suma-cero. Una elemento de A, $a_{i,j}$, tal que

$$\text{maximin } A = \text{minimax } A = a_{i,j}$$

se llama "punto de ensilladura" o "punto de silla".

Una variedad de los juegos de suma-cero que pueden resolverse de la misma manera son los juegos de suma constante. Veamos un ejemplo.

<u>EJEMPLO 1</u>: Suponga que en un mercado popular existen solo vendedores, A y B, que venden pantalones, por simplicidad suponga que cada pantalón tiene el mismo precio. Supongan que el Concejo Municipal le da a cada vendedor dos opciones para ubicar su tienda. Le informan al vendedor A que se puede ubicar su tienda en la acera norte o en la acera sur y al vendedor B que la puede ubicar en la acera este o en la oeste. Un muestreo sobre el mercado indica que en cada jornada se venden quinientos pantalones y que los compradores buscan una tienda o la otra dependiendo

de la ubicación de éstas, según la siguiente matriz de beneficios para el vendedor A:

$$
(3) \qquad A \begin{array}{c} \\ \text{norte} \\ \text{sur} \end{array} \overset{B}{\begin{array}{cc} \text{este} & \text{oeste} \\ \end{array}} \begin{bmatrix} 200 & 150 \\ 300 & 250 \end{bmatrix}
$$

Como se puede observar, lo que deja de vender I, lo venderá II, por lo tanto, para cada combinación de estrategia, lo que deja de vender A, lo venderá B, y el beneficio de B será el complemento de la venta de A sobre los 500 pantalones, es decir:

$$
(4) \qquad B \begin{array}{c} \\ \text{norte} \\ \text{sur} \end{array} \overset{A}{\begin{array}{cc} \text{este} & \text{oeste} \\ \end{array}} \begin{bmatrix} 300 & 350 \\ 200 & 250 \end{bmatrix}
$$

como puede observarse, la suma de los beneficios de ambos siempre resultará en 500 pantalones. Este tipo de juegos se llama juegos de suma-constante.

Puesto que A venderá más mientras B venda menos, este es un juego de confrontación en el que A tratará de maximizar sus ventas a costa de B. El vendedor A tratará de maximizar sus ventas, ocurriendo que, lo que el deje de vender lo venderá B. Por otra parte, el vendedor B hará lo mismo y la maximización de las ventas de B será la minimización de las ganancias de A. La solución de este juego es, por lo tanto, análoga a la solución de un juego de suma-cero. Si suponemos que los dos jugadores manejan la misma información, entonces A usará la estrategia del maximin y B la del minimax, entonces

$$
(5) \qquad \begin{array}{cc} & \text{B} \\ & \begin{array}{ccc} \text{este} & \text{oeste} & \text{mínimos de fila} \end{array} \\ \text{A} \begin{array}{c} \text{norte} \\ \text{sur} \\ \text{máximos de columna} \end{array} & \begin{bmatrix} 300 & 350 \\ 200 & 250 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 300 \\ 200 \\ \\ \end{array} \\ & \begin{array}{cc} 300 & 350 \end{array} \end{array}
$$

Como puede observar el lector,

maximin A = max { 300, 200 } = 300 = min { 300, 350 } = minimax B

por lo que el juego tiene un punto de silla cuando el vendedor A se ubica al norte y el vendedor B se ubica al este. El valor del juego es, en este caso, 300.

Veamos ahora el siguiente ejemplo:

<u>EJEMPLO 2</u>: Considere un juego entre dos jugadores de suma-cero en el que la matriz de beneficio es la siguiente:

$$
(6) \qquad \begin{array}{cc} & \text{II} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \text{I} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 10 \\ -2 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} \end{array}
$$

En este caso observe que el jugador II nunca jugará la estrategia 4, ya que en cualquier caso si juega la estrategia 3 tendrá menores pérdidas. En este caso diremos que la estrategia 3 **domina** a la estrategia 4. De la misma forma, la estrategia 1 domina la estrategia 3 del jugador II. Por otra parte la estrategia 1 del jugador I domina a la estrategia 3 ya que en cualquier caso I gana más jugando 1 que jugando 3.

Puesto que I nunca jugará 3 y II nunca jugará 3 y 4, porque son estrategia dominadas, podemos eliminarlas de la matriz de

beneficios sin alterar el valor del juego. De esta manera la matriz de beneficio se convierte en

$$
(7) \qquad \begin{array}{cc|cc|c}
 & & & \text{II} & \\
 & & 1 & 2 & \text{mínimos de fila} \\
\hline
\text{I} & 1 & 0 & 5 & 0 \\
 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
\hline
 & \text{máximos de columna} & 3 & 5 &
\end{array}
$$

Si intentamos solucionar este juego, observamos que si I usa el maximin y II el minimax como estrategia, entonces

$$\text{maximin } A = \max \{ 0, 1 \} = 0 \neq 3 = \min \{ 3, 4 \} = \text{minimax } A.$$

Por lo tanto este juego no posee ún punto de silla, ya que los dos jugadores no han alcanzado los resultados esperados. Este tipo de juegos los analizaremos en la próxima sección.

SECCION 8.3: JUEGOS SIN PUNTOS DE SILLA O CON ESTRATEGIAS MIXTAS

Considere el juego cuya matriz de pagos es la matriz (7), la cual reescribimos a continuación:

$$
(8) \qquad \begin{array}{cc|cc|c}
 & & & \text{II} & \\
 & & 1 & 2 & \text{mínimos de fila} \\
\hline
\text{I} & 1 & 0 & 5 & 0 \\
 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
\hline
 & \text{máximos de columna} & 3 & 5 &
\end{array}
$$

Como observamos en la sección anterior, si I usa el maximin como estrategia y II usa el minimax, entonces I escogerá la estrategia 2 y II escogerá la estrategia 1. El jugador I espera ganar 1 y el jugador II espera perder 3, pero el valor del juego es 3, por lo que II acierta y I predijo mal el resultado.

Si el juego se repite, el jugador I volverá a escoger la

estrategia 2, ya que no puede aumentar sus beneficios, pero el jugador II no, ya que observará, puesto que I escoge la estrategia 2, si él escoge la estrategia 2 reducirá sus pérdidas a 1,por lo que cambia de estrategia y el resultado del juego será 1.

Si el juego se repite por tercera vez, II repetirá la estrategia 2 la cual le dio buenos resultados, pero I pensará que si II juega la estrategia 2 y si el cambia de estrategia y juega la estrategia 1, ganará 5 en vez de ganar 1, por lo que cambia de estrategia.

Como puede observarse, este juego no tiene como solución una estrategia pura, por lo que los jugadores deberán combinar estrategia para maximizar sus ganancias. Suponga que el juego se repite muchas veces, entonces cada jugador puede combinar sus estrategias aleatoriamente de forma que sus beneficios al final sean máximos. Una estrategia de este tipo se dice que es una "Estrategia mixta".

Suponga que el jugador I tiene m estrategia, que el jugador II tiene n estrategias, que

$$
(9) \qquad I \quad \begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{array}
\begin{array}{c} \text{II} \\ \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}
$$

es la matriz de beneficios del jugador I y que éste decide jugar su i-ésima estrategia con una probabilidad r_i, entonces el jugador I puede pensar de la siguiente manera: si el jugador II escoge siempre su j-ésima estrategia, entonces el valor esperado

de las beneficios de I será

$$E_j = r_1a_{1j} + r_2a_{2j} + \dots + r_ma_{mj}.$$

Puesto que II siempre escogerá su mejor estrategia, I sabe que II escogerá la estrategia que haga que E_j sea mínimo y el resultado del juego será

$$V = \min \{E_1, E_2, \dots , E_n\}.$$

Así, el problema del jugador I consiste en escoger el conjunto de probabilidades $\{ r_1, r_2, \dots r_m \}$ que maximicen el valor de V.

Por otra parte, el jugador II tiene un problema similar. Si para cada jugada escoge una estrategia j con probabilidad s_j y si I escoge siempre la i-ésima estrategia, la pérdida esperada será

$$F_i = s_1a_{i1} + s_2a_{i2} + \dots + s_na_{in}.$$

Puesto que I escogerá la estrategia que haga que F_i máximo, el resultado del juego será pérdida para II de

$$W = \max \{F_1, F_2, \dots , F_n\}$$

y el problema de II es escoger las combinaciones $s_1, s_2, \dots, s_n$ que hagan que W sea mínimo. Veremos que ambos juegos pueden resolverse utilizando la programación lineal como herramienta.

<u>La Solución del Juego para el Jugador I</u>. Como habíamos antes observado, el objetivo del jugador I es escoger el conjunto de probabilidades $\{ r_1, r_2, \dots r_m \}$ que maximicen el valor de V. Por lo tanto podemos escribir la función objetivo para el jugador I como

(10) $$\max.\ G = V + 0 \cdot r_1 + 0 \cdot r_2 + \dots + 0 \cdot r_m.$$

Como los r_i son probabilidades, tenemos que una restricción natural es que

(11) $$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = 1.$$

Por otra parte, las probabilidades son todas mayores o iguales a cero, por lo tanto otra restricción es

(12) $$r_1 \geq 0,\ r_2 \geq 0,\ \ldots,\ r_m \geq 0.$$

Por último, existe la restricción de que cada E_j debe ser mayor o igual a V, es decir

(13) $$E_j = r_1a_{1j} + r_2a_{2j} + \ldots + r_ma_{mj} - V \geq 0,\ j = 1..n.$$

Las ecuaciones (10), (11), (12) y (13) nos dan el modelo de programación lineal que buscamos:

(14) $$\max.\ G = V + 0 \cdot r_1 + 0 \cdot r_2 + \ldots + 0 \cdot r_m$$

sujeto a:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = 1$$

$$E_j = r_1a_{1j} + r_2a_{2j} + \ldots + r_ma_{mj} - V \geq 0,\ j = 1..n.$$

$$r_1 \geq 0,\ r_2 \geq 0,\ \ldots,\ r_m \geq 0.$$

<u>La Solución del Juego para el Jugador II</u>. El Problema del jugador II consiste en minimizar W. Por lo tanto su función objetivo es

(15) $$\min.\ P = W + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \ldots + 0 \cdot s_m.$$

Las restricciones para el problema del jugador II son similares que las del jugador I. Su objetivo es encontrar la probabilidades $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tales que W sea mínima. Como los s_i son probabilidades entonces

(16) $$s_1 + s_2 + \ldots + s_m = 1$$

es una restricción del problema.

Además, por ser probabilidades tenemos que

(17) $$s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ \ldots,\ s_n \geq 0.$$

Por último, cada F_i debe ser menor o igual a W, es decir

(18) $$F_i = s_1a_{i1} + s_2a_{i2} + \ldots + s_na_{in} - W \leq 0,\ i = 1..m.$$

Las ecuaciones (15), (16), (17) y (18) nos dan el modelo de

programación lineal que optimiza la estrategia de II:

(19) $\min. P = W + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + \ldots + 0 \cdot s_m$

sujeto a:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_m = 1$$

$$s_1 a_{i1} + s_2 a_{i2} + \ldots + s_n a_{in} - W \leq 0, \; i = 1..m.$$

$$s_1 \geq 0, \; s_2 \geq 0, \; \ldots, \; s_m \geq 0.$$

Como puede observarse, los modelos de programación lineal (14) y (19) son duales entre sí, por lo que $G = P$ y $V = W$.

<u>EJEMPLO 3</u>: Considere la matriz de beneficios del ejemplo 2:

(20)
$$\begin{array}{cc} & \text{II} \\ \text{I} & \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Sean r_1 y r_2 las estrategia mixtas para el jugador I y s_1 y s_2 son las estrategias mixtas para el jugador II, entonces el problema de optimizar la estrategia mixta para el jugador I es

(21) $\max. G = V + 0 \cdot r_1 + 0 \cdot r_2$

sujeto a:

$$r_1 + r_2 = 1$$

$$-2r_1 + 4r_2 - V \geq 0$$

$$3r_1 + r_2 - V \geq 0$$

$$r_1 \geq 0, \; r_2 \geq 0.$$

La solución de este programa lineal es $r_1 = 0{,}25$, $r_2 = 0{,}75$ y $V = 1{,}75$. Por tanto, la estrategia mixta óptima para el jugador I, que le garantiza un máximo beneficio es jugar la estrategia pura 1 con probabilidad 0,25 y la estrategia mixta 2 con probabilidad 0,75. Si hace ésto, obtendrá un beneficio esperado de 1,75.

Por otra parte, el jugador II podrá encontrar su estrategia mixta óptima resolviendo el siguiente programa lineal:

(22) $\min. P = W + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2$

sujeto a:

$$s_1 + s_2 = 1$$

$$-2s_1 + 3s_2 - W \leq 0$$

$$4s_1 + s_2 - W \leq 0$$

$$s_1 \geq 0, \; s_2 \geq 0.$$

El resultado es $s_1 = 0{,}25$, $s_2 = 0{,}75$ y $W = 1{,}75$, lo que indica que la estrategia mixta óptima para el jugador II consiste en jugar la estrategia pura 1 con probabilidad 0,25 y la estrategia pura 2 con probabilidad 0,75. La mínima pérdida esperada será de 1,75. Como puede el lector observar, $V = W = 1{,}75$. Esta solución es el valor del juego.

SECCION 8.4: COMENTARIOS FINALES

El análisis hecho hasta ahora se limita a los juegos entre dos personas de suma constante. Sin embargo, existen una gran variedad de juegos de gran interés que no son de suma constante y que incluyen a más de dos personas. Por ejemplo, en el problema del duopolio, si existen tres jugadores, en vez de una guerra entre los tres puede ser más conveniente la formación de coaliciones entre dos de ellos para enfrentar al tercero en vez de una guerra entre tres. Este tipo de situaciones no se presentan en los juegos de dos personas. Por otra parte, si los juegos no son de suma cero o de suma constante, puede darse el caso de que lo más conveniente sea la coalición, si de esa forma ambos ganan más que si se produce un enfrentamiento. El tratamiento de estos

tipos de juegos escapan de los alcances de este curso y su tratamiento no resulta sencillo en lo absoluto, por lo que a los lectores interesados los remitimos a la bibliografía existente.

Como un ejemplo final de juegos de no suma-constante, expondremos un famoso juego conocido con el nombre del dilema del prisionero: Suponga que dos prisioneros que cometieron el mismo delito son llevados ante el juez y éste les brinda una oportunidad, les dice que si ambos confiesan la verdad, cada uno cumplirá 20 años de condena y si ambos dicen una mentira cada uno cumplirá una pena de 10 años, pero si uno de ellos dice la verdad y el otro no, el que dijo la verdad saldrá en libertad mientras que el otro cumplirá una pena de 10 años. Es evidente que éste no es un juego de suma constante para ninguno de los prisioneros.

PROBLEMAS:

En cada uno de los casos encuentre las estrategias óptimas para los jugadores y el valor del juego:

1.- Considere un juego de una jugada en la cual A pide 1, 2 o 3, y B selecciona una carta entre los cuatro ases de la baraja, enumerados de la siguiente forma: 1, pique; 2, corazones; 3, diamantes; 4, tréboles; se define la matriz de beneficios de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

2.- Suponga que dos personas deciden jugar el conocido juego de "pares o nones". El jugador gana si es pares y pierde si es nones. Los pagos se efectúan de la siguiente manera: el ganador

recibirá del perdedor la suma de los dedos de los jugadores. Suponga que el juego se realizará cien veces.

3.- Considere un mercado con duopolio. La empresa 1 puede elegir entre producir 100 o 200 unidades del producto y la empresa B tiene el mismo dilema. Las ganancias obtenidas por las dos empresas siempre son de cien mil bolívares. Las ganancias obtenidas por la empresa 1 vienen dadas por la siguiente matriz de pagos:

$$\begin{array}{cc} & \text{II} \\ \text{I} & \begin{bmatrix} 30 & 50 \\ 80 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

Encuentre la estrategia óptima para ambos jugadores.

4.- Supongamos que el mercado potencial para dos duopolistas que tienen que decidir donde colocar sus oficinas de venta, está constituido por consumidores distribuidos uniformemente a los largo de una carretera trazada en línea recta. La demanda es completamente inelástica y los consumidores irán a comprar a la oficina de ventas más cercana. Supongamos que la carretera tiene cuatro millas y que cada empresa tiene cinco estrategias posibles: puede colocarse en uno de los dos extremos, o en la milla 1, o en el 2, o en la 3. Supongamos que los beneficios son sus respectivas participación en el mercado. a) ¿Es este un juego de suma-cero? b) ¿Cuales son las estrategias óptimas para los duopolistas?

5.- Considere una empresa cuya preocupación principal es su posición en el mercado, medida por su participación en el mismo. El instrumento que se considera para influir su participación en el mercado es el importe del presupuesto de publicidad, que puede

ser pequeño, mediano o grande y las consecuencias de las diversas decisiones posibles dependen de la publicidad de las demás empresas las cuales pueden también ser pequeño, mediano o grande, según la siguiente matriz de pagos:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{peq.} & \text{med.} & \text{gra.} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \text{peq.} \\ \text{I} \quad \text{med.} \\ \text{gra.} \end{array} & \begin{bmatrix} 75 & 65 & 60 \\ 85 & 75 & 70 \\ 90 & 80 & 75 \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

¿Cual deberá ser la política publicitaria de la empresa?.

6.- La empresa de Castillo & Heredia fabrica un amplificador que tiene una fidelidad extraordinaria por encima de los 10 mil ciclos, que depende fundamentalmente de un pequeño condensador inaccesible. Esto le cuesta a Castillo & Heredia normalmente 50 bolívares, pero si tienen que sustituir uno defectuoso, el costo asciende a bs. 500.

Naturalmente esta empresa tiene varias alternativas: conoce un procedimiento de prueba que le descubre un defecto tres veces de cada cuatro y cuyo costo es de bs. 50. Conoce otro que tiene una seguridad absoluta y de costo despreciable, pero que 9 de cada 10 veces termina con la rotura de los condensadores buenos. Y puede comprar un condensador de calidad superior a un precio de bs. 200 de completa garantía, comprometiéndose el fabricante de dicho condensador a reemplazar el que resulte defectuoso y cargar con los gastos de su sustitución. ¿Que estrategia debe escoger la compañía?

7.- La empresa A se está defendiendo contra los propósitos de arruinarla que tiene la empresa B. La empresa A tiene la elección

de subir los precios, dejarlos como están o bajarlos. La empresa B tiene las tres mismas opciones. Las ventas brutas de la empresa A en el caso de cada uno de los casos aparecen en la tabla siguiente:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} & B & \\ \text{aum.} & \text{cons.} & \text{dism.} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \text{aum.} \\ A \quad \text{cons.} \\ \text{dism.} \end{array} & \begin{bmatrix} 90 & 100 & 110 \\ 110 & 100 & 90 \\ 120 & 100 & 80 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

¿Como deberían obrar ambas empresas?

8.- Dos compañías fabricantes de automóviles, A y B, prevén que tendrán que fusionarse en uno o dos años. Los directores de ambas empresas perciben que su preocupación a corto plazo es prepararse para las negociaciones alcanzando unos beneficios por acción lo más favorable posibles en comparación con la otra empresa. Asó, obtenido dividiendo los beneficios por acción de A sobre los de B y los directores de B quieren hacer lo contrario. Las estrategias posibles para cada empresa consisten en fabricar automóviles de 4 modelos distintos, variando éstos en su potencia y las consecuencias sobre el cociente descrito se da en la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Potencia de autos de B} \\
\text{Potencia de autos de A} & \begin{array}{cccc} 250 & 275 & 300 & 325 \end{array} \\
\begin{array}{c} 250 \\ 275 \\ 300 \\ 325 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.3 & 0.8 \\ 0.9 & 0.6 & 0.4 & 0.7 \\ 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

9.- Considere el juego de Morra de dos dedos. Cada jugador

muestra 1 o 2 dedos y simultáneamente adivina el número de dedos de su oponente. El jugador que adivine correctamente cobra al otro la suma total de dedos mostrados por los dos jugadores, sino adivina no gana nada. Resuelva el juego para ambos jugadores.

10.- Suponga que en la guerra del Golfo Pérsico el Gral. Perry de las fuerza de EUA y el Gral. Kaufaty de las fuerzas de Irak están tratando de tomar dos localizaciones estratégicas. El número de regimientos disponibles para el Gral. Perry y el Gral. Kaufaty son 3 y 2 respectivamente. Ambos distribuirán sus regimientos entre las dos localizaciones. Dado n_1 y n_2 el número de regimientos asignados por Perry a las localizaciones 1 y 2 respectivamente. También, sean m_1 y m_2 las respectivas localizaciones de Kaufaty. El pago de Perry es computado como sigue. Si $n_1 > m_1$, Perry recibe $m_1 + 1$ y si $n_2 > m_2$, recibe $m_2 + 1$. Por el contrario, si $n_1 < m_1$ pierde $n_1 + 1$ y si $n_2 < m_2$ pierde $m_2 + 2$. Si el número de regimientos son iguales cada uno obtiene cero. Resuelva el problema.

11.- Dos compañías, A y B, promueven dos productos que compiten entre sí. Cada producto controla el 50% del mercado, pero a causa de recientes modificaciones en los dos productos las compañías están preparando lanzar nuevas campañas publicitarias. Si ninguna compañía hace publicidad, el mercado quedará como está. Sin embargo, si una compañía lanza una campaña publicitaria, la otra compañía perderá un porcentaje proporcional de sus compradores. Un sondeo del mercado dice que el 50% de los compradores potenciales son alcanzados por la TV, 30% por el periódico y 20% por la radio. ¿Cual será la estrategia publicitaria de cada empresa?

12.- Un inversionista dispone de bs. 10 millones para invertir anualmente y pide consejo a su corredor de bolsa. El agente le presenta la tabla de abajo, dándole los rendimientos probables de tres clases de inversiones en tres climas políticos posibles, pero sin sugerirle alguna decisión. ¿Cual deberá ser la inversión?

$$\begin{array}{r} \\ \text{bonos} \\ \text{Ind. Militar} \\ \text{Emp. mercantiles} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{guerra} & \text{tensión internac.} & \text{paz} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 29.000 & 30.000 & 32.000 \\ 180.000 & 60.000 & -20.000 \\ 20.000 & 70.000 & 120.000 \end{bmatrix} \end{array}.$$

13.- En cada juego, elimine las estrategias dominadas y resuelva el juego de la manera más corta e interprete sus resultados:

a) $\begin{bmatrix} 15 & 10 & 0 & -6 \\ 3 & 14 & 18 & 9 \\ 1 & 5 & 14 & 20 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 14 & 8 & 12 \\ 7 & 5 & 14 & -3 \\ 1 & 19 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 10 & 40 & 150 & 90 \\ 5 & 12 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & 3 \\ 6 & -9 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} -1 & 9 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 10 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 7 \\ 7 & -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

i) $$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

j) $$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ -5 & -2 & 10 & -3 \\ 7 & 4 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

k) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

l) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

CAPITULO 9

PROGRAMACION NO LINEAL

SECCION 9.1. OPTIMIZACION DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

DEFINICION: Un máximo local, $\bar{x}_o \in \mathbb{R}^n$, de una función real $z = f(\bar{x})$ definida sobre $\mathbb{R}^n$, es aquel que para todo entorno lo suficientemente pequeño $\bar{h}$ de $\bar{x}$, se tiene que

$$f(\bar{x}_o + \bar{h}) \leq f(\bar{x}_o);$$

analogamente, se dice que es un mínimo si $f(\bar{x}_o + \bar{h}) \leq f(\bar{x}_o)$.

Si en lugar de algún entorno lo suficientemente pequeño, $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_o)$ para todo $\bar{x}_o \in D$, donde D es el dominio de f, decimos que $\bar{x}_o$ es un máximo global. Analogamente se define un mínimo global.

Considere la función

$$z = f(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

para que la función tenga un máximo en $\bar{x}_o$, entonces el diferencial de la función en $\bar{x}_o$ es cero, es decir que $dz = df(\bar{x}_o) = 0$.

Si denotamos por $d\bar{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, el diferencial del vector $\bar{x}$ y por $\nabla f = (\delta f/\delta x_1, \ldots, \delta f/\delta x_n)$ al gradiente de f, entonces tenemos que

$$dz = \nabla f \cdot d\bar{x}^t = 0,$$

es una condición necesaria para que exista un máximo o un mínimo. Sin embargo, sabemos que puede ocurrir que $dz = 0$ pero que el punto donde se cumpla esta condición no sea un máximo o un mínimo. Esto nos induce a realizar la siguiente definición.

DEFINICION: Sea $z = f(\bar{x})$ una función real definida sobre $\mathbb{R}^n$. Se entiende por un punto crítico aquel en el que $dz = 0$.

Es evidente que todo punto máximo o mínimo es un punto

crítico pero que lo contrario no es necesariamente cierto.

tenemos entonces que en los puntos críticos

$$dz = \nabla f \cdot d\bar{x}^t = 0$$

(1) $$\Longrightarrow \nabla f = \bar{0},$$

puesto que $d\bar{x}$ es distonto de cero. Así, la condición (1) es una condición necesaria para la existencia de un máximo o un mínimo. Ahora, (1) implica que

$$\delta f/\delta x_1 = 0,\ \delta f/\delta x_2 = 0,\ \ldots,\ \delta f/\delta x_n = 0.$$

PROBLEMAS:

1.- En cada uno de los siguientes ejercicios, encontrar los puntos críticos:

(a) $z = x^2 + xy + 2y^2 + 3$ (b) $z = -x^2 + xy - y^2 + 2x + y$

2.- Sea $z = ax^2 + by^2 + c$, considere los puntos críticos en cada uno de los siguientes casos:

(a) $a>0,\ b>0$; (b) $a<0,\ b<0$ (c) a y b opuestos en signo.

SECCION 9.2: OPTIMIZACION CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD.

En la seción anterior consideramos el problema de encontrar los puntos máximos (mínimos) de la función $z = f(\bar{x})$ a lo largo del todo el dominio de la función. En esta sección consideraremos el problema de encontrar el máximo (mínimos) de la función sujeto a una restricción de igualdad, es decir hallar

max. (min) $z = f(\bar{x})$

sujeto a $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{0}$,

donde el vector $\bar{g}$ contiene al conjunto de restricciones.

En este caso, el problema consiste en encontrar los puntos críticos que cumplan con las restricciones de igualdad.

Un método para resolver éste problema es el de los multipli-

cacdores de Lagrange. Este consiste en redefinir la función objetivo e introducir unas variables adicionales, τ_i, llamadas "multiplicadores de Lagrange" y luego resolver el problema sn restricciones. De esta manera se define la función

$$L = f(\bar{x}) - \bar{\tau}(\bar{g}(\bar{x}) - \bar{b})^t, \tag{2}$$

donde $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$.

Si resolvemos el problema de encontrar los puntos críticos de (2), tenemos que $\nabla L = \bar{0}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} &\delta f/\delta x_i - \tau_i \cdot \delta g/\delta x_i = 0, \quad i = 1,\ldots,n. \\ &\bar{g}(\bar{x}) - \bar{b} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

La segunda de las condiciones (3) garantiza que la solución cumple con la restricciones.

PROBLEMAS:

1.- Encuentre los puntos críticos de la función $z = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a la restricción $4x + y^2 + 2z - 14 = 0$.

SECCION 9.2: OPTIMIZACION CON RESTRICCIONES DE DESIGUALDAD.

En esta sección veremos que el método lagrangeano explicado en la sección anterior puede ser extendido a restricciones de desigualdad.

Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{max. } z = f(\bar{x}) \\ &\text{s.a. } \bar{g}(\bar{x}) \leq \bar{0}. \end{aligned}$$

Las condiciones de nonegatividad pueden incluirse dentro de las condiciones $\bar{g}(\bar{x}) \geq \bar{0}$, como $-\bar{x} \geq \bar{0}$.

La restricción de desigualdad puede ser convertida en ecuaciones mediante la utilización de variables de holgura con valores no negativos. Si denotamos las variables de holgura por

$$\bar{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

y denotamos

$$\bar{s}^2 = (s_1^2, s_2^2, \ldots, s_n^2)$$

el problema de optimización se convierte en

$$\max.\ z = f(\bar{x})$$

$$\text{s.a. } \bar{g}(\bar{x}) + \bar{s}^2 = \bar{0}.$$

y podemos escribir una función lagrangeana

$$\max.\ L = f(\bar{x}) - \bar{\tau}[\bar{g}(\bar{x}) + \bar{s}^2].$$

Como $\bar{s}^2 \geq \bar{0}$ tenemos que cada variable de holgura es positiva, por lo tanto $\delta L/\delta s_i \leq 0$, y $\bar{g}(\bar{x}) \leq \bar{0}$. Por otra parte

$\delta L/\delta s_i = -\tau_i \implies -\tau_i \leq 0$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$.

$\implies \tau_i \geq 0$

Por lo que

(4) $$\bar{\tau} \geq \bar{0}$$

es una condición necesaria para un máximo de la función L.

Tomando derivadas parciales de L respecto a $\bar{x}$, $\bar{s}$ y $\bar{\tau}$, se obtiene

(5) $$\delta L/\delta \bar{x} = \nabla(f\bar{x}) - \bar{\tau}\nabla g(\bar{x}) = \bar{0};$$

(6) $$\delta L/\delta s_i = -2\tau_i s_i = 0, \qquad i = 1,\ldots n.$$

(7) $$\delta L/\delta \tau = -(g(\bar{x}) + \bar{s}^2) = \bar{0}.$$

De la ecuación (6) tenemos que si $\tau_i > 0$, entonces $s_i^2 = 0$; ésto quiere decir que el recurso i-ésimo es escaso. Por otra parte, si $s_i^2 > 0$ entonces $\tau_i = 0$ y el recurso no es escaso. Así, el valor de τ_i nos dá un criterio para conocer la escacez de un recurso.

Por último, de (7) obtenemos

(8) $$-g(\bar{x}) = \bar{s}^2$$

(9) $$\implies g(\bar{x}) \leq \bar{0}$$

y de las ecuaciónes (6)

(10) $$\tau_i s_i^2 = 0.$$

Sustituyendo (8) en (9) y multiplicando por -1 obtenemos

(11) $$\tau_i g_i(\bar{x} = 0.$$

El análisis expuesto nos conduce a las *Condiciones Necesarias de Kuhn-Tucker*, las cuales escribimos en el siguiente teorema:

<u>TEOREMA</u>: Son condiciones necesarias para un punto crítico $\bar{x}$ y $\bar{\tau}$, llamadas condiciones necesarias de Kuhn-Tucker, las siguientes:

$$\bar{\tau} \geq \bar{0}$$

$$\nabla(f\bar{x}) - \bar{\tau}\nabla g(\bar{x}) = \bar{0}$$

$$\tau_i g_i(\bar{x} = 0.$$

$$g(\bar{x}) \leq \bar{0}.$$

Se puede comprobar que las condiciones de Kuhn-Tucker expuestas en el teorema anterior son también condiciones necesarias si se satisfacen ciertas condiciones adicionales sobre concavidad y convexidad.

<u>TEOREMA</u>: Las condiciones necesarias de Kunh-Tucker son también condiciones suficientes en el caso de un problema de maximización si la función objetivo es una función concava y el espacio de soluciones es un conjunto convexo. En el problema de minimización también las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker son condiciones suficientes si la función objetivo es una función convexa y el espacio de solución es un conjunto convexo.

<u>EJEMPLO</u>: Considere el problema

$$\max.\ x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{s.a. } 2x + y - 5 \leq 0$$

$$x + z - 2 \leq 0$$

$$1 - x \leq 0$$

$$2 - y \leq 0$$

$$- z \leq 0.$$

Las condiciones de Kuhn-Tucker son las siguientes:

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5 \leq 0$$

$$(2x, 2y, 2z) - (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tau_1(2x + y - 5) = 0$$

$$\tau_2(x + z - 2) = 0$$

$$\tau_3(1 - x) = 0$$

$$\tau_4(2 - y) = 0$$

$$\tau_5(- z) = 0.$$

$$x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0.$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $\tau_1 = \tau_2 = \tau_5 = 0$, $\tau_3 = -2$, $\tau_4 = -4$. Como la función f es concava y el espacio de soluciones es un conjunto convexo, el punto crítico es un máximo global restringido.

PROBLEMAS:

1.- Pruebe que las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker para un problema de minimización son

$$\bar{\tau} \leq \bar{0}$$

$$\nabla(f\bar{x}) - \bar{\tau}\nabla g(\bar{x}) = \bar{0}$$

$$\tau_i g_i(\bar{x} = 0.$$

$$g(\bar{x}) \leq \bar{0}.$$

2.- Suponga que la ecuación lagrangeana hubiera sido formulada

como

$$\max.\ L = f(\bar{x}) - \bar{\tau}[\bar{g}(\bar{x}) + \bar{s}^2];$$

¿Como altera este cambio las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker?

3.- Escriba las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker para los siguientes problemas:

a) $\max.\ x^3 - y^2 + xz^2$

s.a. $x + y^2 + z = 5$

$5x^2 - y^2 - z \geq 0$

$x,\ y,\ z \geq 0.$

b) $\max.\ x^4 + y^2 + 5xyz$

s.a. $x^2 - y^2 + z^3 \leq 10$

$x^3 + y^2 + 4z^2 \geq 20$

BIBLIOGRAFIA

Allen, R.G.D. (1938): Mathematical Analysis for Economits, 1º ed., MacMillan & Co., Ltd.

Allen, R.G.D. (1967): Mathematical Economics, 2º ed., MacMillan & Co., Ltd.

Allen, R.G.D. (1969): Teoría Macroeconómica. Ed. Aguilar.

Apostol, T., (1974): Mathematical Analysis, 2º ed., Addison-Wesley.

Baumol, W.J. (1970): Economic Dynamics: An Introduction, 3º ed., MacMillan & Co., Ltd.

Baumol, W.J. (1977): Teoría Economica y Analisis de Operaciones. 4o. ed., Prentice-Hall.

Bazaraa, M. & Jarvis, J. (1977): Linear Programming and Network Flows, Wiley.

Burmeister, E., y A. R. Dobell. (1970): Mathematical Theories of Economic Grrowth, MacMillan & Co., Ltd.

Chiang, A. (1987): Métodos Fundamentales de la Economía Matemática, 3º ed., McGraw Hill.

Churchill, R. V., J.W. Brown & R.F. Verhey. (1974): Complex Variables and Applications, 3º ed. McGraw-Hill.

Coddington, E. A., y N. Levinson. (1955): Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill.

Dorfman, R., P. Samuelson y R.M. Solow. (1964): Programación Lineal y Analisis Económico, Aguilar.

Goldberg, S. (1958): Introduction to Difference Equations, John Wiley & Sons, Inc.

Henderson, J. & Quandt, R. (1980): Teoría Microeconómica, Una Aproximación Matemática. Ed. Ariel. 3o. edición.

Hoffman, K. y R. Kunze. (1973): Algebra Lineal, 2º ed. Prentice Hall.

Johnston, J. (1984): Econometrics Methods, 3º Edición, McGraw-Hill.

López Casuso, R. (1982). La Programación lineal y las Decisiones Económicas, 2o. ed., UCAB.

Luce, R. y H. Raiffa, (1957): Games and Decisions, Wiley.

Nomizu, K. (1966): Fundamentals of Linear Algebra. McGraw-Hill.

Novales, A. (1988): Econometría, 1º Edición, McGraw-Hill.

Samuelson, P.A. (1970): Fundamentos de Análisis Económico, Ed. El Ateneo.

Sargent, T., (1987): Macroeconomic Theory, 2º ed., Academic Press.

Taha, A., (1986): Operations Research. 3o. ed., McGraw-Hill Books Co., N.Y.

Yamane, T. (1977): Matemáticas para economistas, 3o. ed., Ariel.