AAE5828

TRAB
IC2002
L3

UCAB Universidad Católica Andrés Bello
CENTRO CULTURAL PADRE CARLOS G. PLAZAS
BIBLIOTECA CENTRAL - SALA DE PLANTA

UNIVERSIDAD CATOLICA ANDRES BELLO

APUNTES

DE

TOPOGRAFIA

POR

ING. JOHN H. LAMPE M

2002

INDICE

TEMA 1 Levantamientos topográficos.....1

TEMA 2 Sistema rectangular plano.....5

TEMA 3 Linea recta.....13

TEMA 4 Sistemas de medición.....20

TEMA 5 Triangulación.....27

TEMA 6 Teoría de los errores.....47

TEMA 7 Ajuste de poligonales.....63

TEMA 8 Cálculo de áreas.....74

TEMA 9 Ubicación.....87

TEMA 10 Cubicación.....98

TEMA 11 Replanteo.....105

ANEXO PROBLEMARIO

UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

Tema 1 Levantamientos topográficos

1.1 Definición de conceptos

La topografía, es el procedimiento utilizado para dibujar en un plano la superficie de una porción de terreno. Comprende todos sus detalles como ríos, quebradas, caminos, edificios, servicios, cada uno con su nombre respectivo. En el plano debe figurar una descripción de los símbolos que se utilizan para representar los detalles. Debe expresar también el contorno de la superficie mediante curvas de nivel.

1.2 Objetivos

Toda obra de ingeniería debe estar representada en un plano. La extensión de los detalles a consignar dependen del uso que se le vaya a dar, entre otros:

- Vialidad
- Urbanismo
- Mineros
- Agrícolas
- Turismo

1.3 Sistemas Representativos

Los sistemas que se utilizan para representar el terreno en un plano, tienen como objetivo proyectar la superficie de una esfera en un plano.

La tierra, es una esfera ligeramente achatada en los polos, siendo desigual la deformación en los polos Norte y Sur. Asumiendo la deformación igual en ambos polos, su forma es la de un elipsoide, producto de la revolución de una elipse que tiene un semieje mayor de aproximadamente 6.378 km y una excentricidad $\varepsilon = 0{,}0034$. Es un círculo casi perfecto.

Proyección rectangular plana

Se basa en asumir que una pequeña porción de terreno es una superficie plana, tangente a la esfera terrestre en un punto, la cual se puede proyectar sobre un sistema de ejes cartesianos. Entre más extensa sea esa porción, es mayor la deformación en los bordes de dicha porción. Los ejes se orientan de diversas maneras, según el uso que se le vaya a dar.

a) Orientado hacia el Norte verdadero mediante una observación astronómica. Esta orientación es necesaria para planos de obras públicas importantes, como carreteras, puertos, canales, presas y en general, cuando el plano tenga algún efecto legal.

b) Orientado hacia el Norte magnético, mediante brújula. Normalmente se utiliza para croquis, esquemas u otros usos secundarios. El Norte magnético no es fijo, sino que varía con el tiempo. Por esa razón, debe anotarse la fecha en la cual se realiza la observación.

c) Orientados arbitrariamente. Esta orientación se utiliza en construcciones de poca extensión, como en la construcción de un edificio, en el cual uno de los ejes cartesianos se hace coincidir con la fachada del edificio o con la dirección de la calle, para facilitar el replanteo de la obra. No obstante, este tipo de plano debe indicar su orientación con respecto al Norte, verdadero o magnético.

El origen de las coordenadas puede ser arbitrario, pero en obras importantes como carreteras, presas y otras similares, debe estar enlazado a un vértice de triangulación oficial, implantado por el Servicio Autónomo de Geografía y Catastro (SAGECAN), antigua Cartografía Nacional. En el caso de que esto no sea posible, deben determinarse las coordenadas geográficas de dicho origen, para que esas obras puedan incorporarse a los planos generales de la República.

El origen se sitúa generalmente en el centro de la obra para la cual se realiza el levantamiento y se le asignan valores arbitrarios. Generalmente se le asignan valores, de modo que no se produzcan coordenadas negativas en el área que ocupa la obra.

En este sistema, los cálculos geométricos hechos con las coordenadas de los puntos en el plano, obedecen a las reglas de la geometría plana.

Cuando la orientación es al Norte verdadero, las abscisas son paralelas a las latitudes. Las ordenadas también se asumen paralelas, pero en realidad no son así, porque los meridianos convergen hacia los polos. Entre los trópicos de Cáncer (23°27' de latitud Norte) y de Capricornio (23°27' de latitud Sur), esta convergencia es pequeña, siendo nula en el Ecuador. En Venezuela, situada entre las latitudes 6° y 11° Norte, esta convergencia es muy pequeña. En un levantamiento topográfico, cuya dirección predominante sea Este - Oeste y su orientación se verifique cada 5 km por medio de una Observación Solar, el error por la convergencia de los meridianos puede ajustarse de conjunto con el error angular. Si la orientación predominante es Norte - Sur, el error por la convergencia de meridianos es casi nulo.

Proyección UTM

La proyección Universal Traverse Mercator, abreviada UTM, consiste en la proyección de la esfera terrestre en un cilindro tangente a ella. La superficie de un cilindro puede proyectarse sobre un plano. (Data del siglo XVI y toma su nombre del geógrafo alemán homónimo)

En este sistema, la proyección de la esfera en un solo cilindro es confome sólo en la tangencia. Las deformaciones son muy grandes en los extremos. Por lo cual se utilizan 60 cilindros, que se denominan husos, y que abarcan cada uno 6° de longitud, comenzando en la longitud 180° al Oeste de Greenwich y rotando de izquierda a derecha. Así, el huso comprendido entre los 180° y 174° de longitud al Oeste de Greenwich, es el huso Nr. 1. Cada huso tiene un meridiano tangente en su centro, al cual se le asigna una abscisa de 500.000 metros. Las ordenadas comienzan en el ecuador al cual se le asigna una ordenada 0 para el hemisferio Norte y 10.000.000 para el hemisferio Sur. No se usa más allá de las latitudes 80° boreal y 84° austral porque en las regiones polares, la deformación de las áreas es muy grande. Cuando se identifica un lugar por sus coordenadas UTM, es necesario especificar el huso donde se encuentra, puesto que hay en la tierra otros 59 lugares con las mismas coordenadas.

Estando Venezuela entre las longitudes 60° y 74° de longitud al Oeste de Greenwich, se encuentra casi en su totalidad en los husos Nr. 19 y 20. Sólo hay una pequeña porción en el huso 18, en la frontera más al Oeste con la República de Colombia.

Su explicación no es parte de este curso, pero es el que más se utiliza en ingeniería y en navegación porque los azimutes medidos sobre el plano son conformes, aunque las distancias tienen un pequeño factor de corrección, que depende de la latitud. Con las coordenadas UTM no se pueden hacer cálculos geométricos según la geometría plana.

Otras Proyecciones

La proyección Cónico-Secante de Lambert consiste en la proyección de la esfera sobre un cono imaginario. Es la única aplicable a las regiones polares. No es parte de este curso.

En las proyecciónes UTM, la forma de las áreas en los extremos de los husos aparecen algo deformadas, tanto más cuanto más alejadas estén del ecuador. En algunos casos, se utilizan cilindros o conos oblícuos con respecto al eje terrestre, originando las llamadas proyecciones oblícuas. Tienen por objeto lograr que la forma de las áreas sea más conforme a la realidad. Sólo se utilizan en casos muy especiales.

1.4 Precisión de la Proyección

Ninguna medida es exacta. Todas tienen discrepancias con la realidad. Es necesario definir la precisión que deben tener las medidas a tomar, de acuerdo a la obra en la cual se va a utilizar el plano. El rango es muy variable y no tiene porqué ser el mismo para todas las medidas. En todo caso, es responsabilidad del ingeniero a cargo fijar dicha precisión y el rango de los errores aceptables.

1.5 Responsabilidad Profesional

La construcción de toda obra de ingeniería se apoya en un plano topográfico, en alguna medida. Una urbanización o una carretera se basan en gran medida en un plano topográfico. No así la construcción de un edificio. Como toda obra de ingeniería debe tener un profesional responsable, los vicios de construcción atribuibles a un plano topográfico defectuoso, son responsabilidad directa del ingeniero a cargo.

Por ello, es de su incumbencia la supervisión de todas las operaciones del levantamiento topográfico. Una parte importante de esta supervisión son las libretas de campo, en las cuales se anotan los datos obtenidos en el terreno. Estas libretas deben contener lo siguiente:

Cada libreta debe tener el nombre de la obra, la localidad y un índice de su contenido. Las hojas de las libretas deben ser numeradas. Al comienzo de cada dia de trabajo, se debe anotar la fecha y la hora, el nombre del operador, los instrumentos utilizados, incluido su serial, el tipo de operación que se realiza, el estado del tiempo, incluida la temperatura ambiental.

Hay diversos formatos para anotar los datos obtenidos. Una vez adoptado, debe permanecer invariable para cada operación, por todo el levantamiento. No se admiten borraduras. Cuando es necesario rectificar un número, se tacha, pero de manera que pueda leerse el número tachado. Es práctica común usar libretas distintas para cada tipo de operación. En algunos casos, se debe exigir que las anotaciones sean hechas con bolígrafo. No es buena práctica anotar los datos en el campo y luego pasarlos en limpio en el campamento. Este proceder se presta a errores de transcripción y el ingeniero a cargo no debe aceptarlo. Cuando las circunstancias lo requieran, es necesario acompañar las anotaciones con croquis.

Curso de Topografía
APUNTES

Tema 2.- Sistema rectangular plano

2.1 Orientación

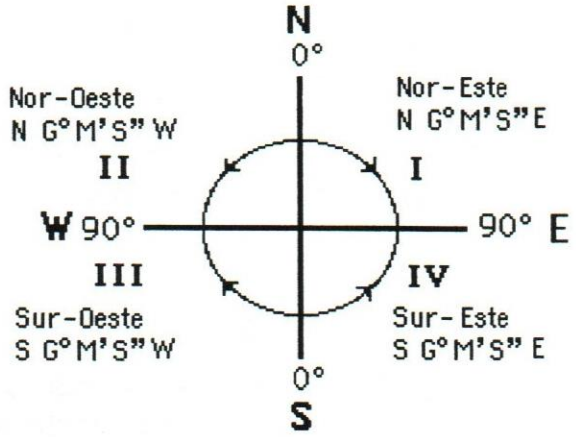
En un sistema rectangular plano, las lineas se orientan según ejes cartesianos, en el cual el eje de las Y corresponde a las coordenadas Norte, que son ordenadas y el eje de las X corresponde a las coordenadas Este, que son abscisas.

La orientación de las rectas se define por medio de un ángulo con respecto al eje Norte-Sur, de dos maneras distintas.

a) Mediante el Rumbo.

Los ángulos que definen la orientación de las rectas se miden desde el meridiano N -S. de la forma siguiente :

Rumbo N - E	Desde el Norte hacia el Este hasta 90°
Rumbo N - W	Desde el Norte hacia el Oeste hasta 90°
Rumbo S - E	Desde el Sur hacia el Este hasta 90°
Rumno S - W	Desde el Sur hacia el Oeste hasta 90°



Las funciones trigonométricas correspondientes a los rumbos son todas positivas. Por lo tanto, cuando se calculan coordenadas, se debe especificar el cuadrante donde está ubicada la recta para poder asignarle signo a dichas funciones. El cómputo de los rumbos sucesivos de los lados de una poligonal en base a los ángulos de deflexión medidos, no se hace en forma sencilla.

Consideremos como ejemplo el siguiente caso:

El lado de una poligonal tiene un rumbo de N 50° E. Para calcular el rumbo del próximo lado se miden ángulos de deflexión a la derecha.

a) Para 20° El próximo rumbo será 50 + 20 = N 70° E
b) Para 70° El próximo rumbo debe ser 180 - (50 + 70) = S 60° E
c) Para150° El próximo rumbo debe ser (50 + 150) - 180 = S 20° W

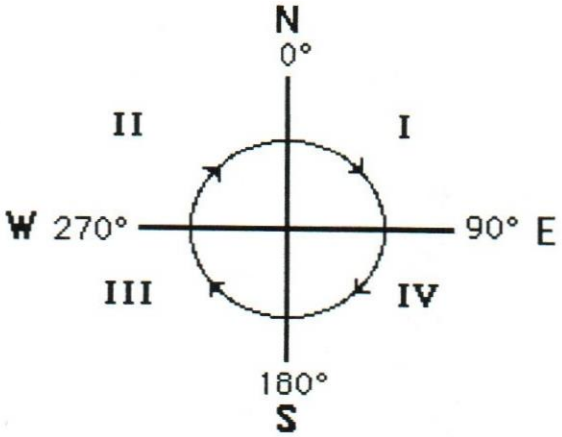
Si se miden a la izquierda, resulta:

d) Para 20° El próximo rumbo será 50 - 20 = N 30° E
e) Para 70° El próximo rumbo debe ser (70 - 50) = N 20° W
f) Para 150° El próximo rumbo debe ser 180 - (150 - 50) = S 80° W

Este sistema está en desuso desde hace mucho tiempo.

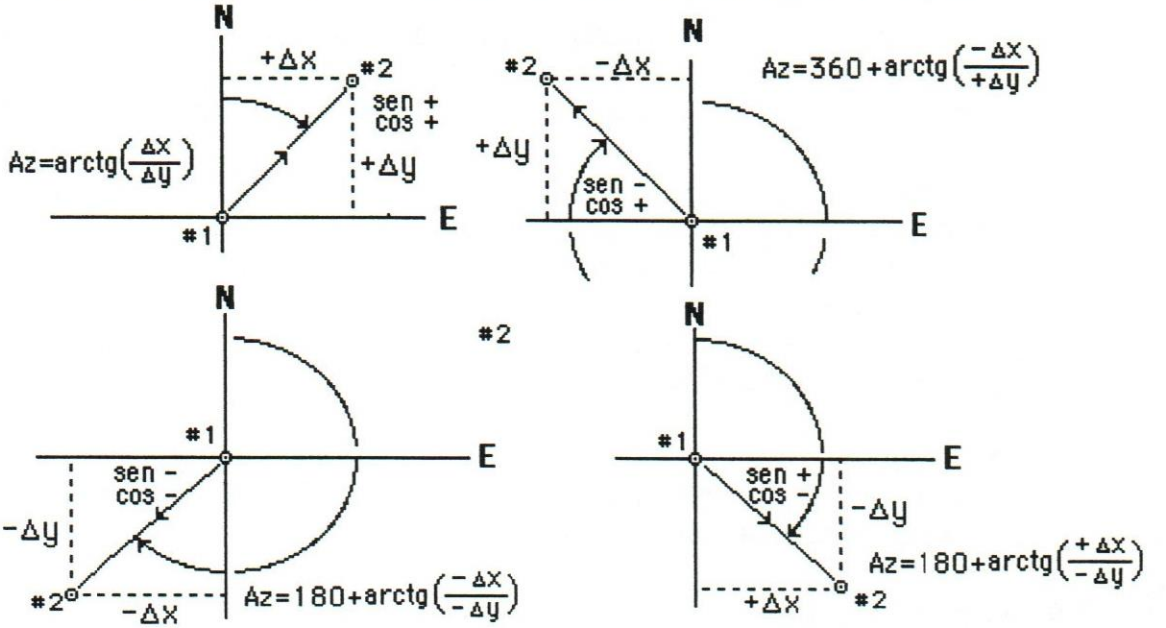
b) Mediante el azimut. (La Real Academia admite también el azimut escrito con c)

Los ángulos que definen la orientación de las rectas se miden desde el Norte en forma continua en el sentido de las agujas del reloj, desde 0° hasta 360°



Los signos del seno y del coseno de los azimutes concuerdan con la orientación de las rectas, lo cual facilita el cálculo de las coordenadas de los puntos. Los azimutes de los lados de una poligonal resultan de la suma sucesiva de los ángulos de deflexión. Los platos de los teodolitos y brújulas actuales tienen una sola escala, graduada azimutalmente. Por eso, las deflexiones medidas a la izquierda se leen en retroceso de 360° y entonces, todos los ángulos de deflexión resultan positivos, por lo que sólo deben sumarse. Cuando en esta sumatoria la suma es mayor a 360°, se debe restar dicha cantidad. Si la suma es negativa, deben sumarse 360°. Este procedimiento es especialmente adaptable para las computadoras.

Los azimutes se calculan a partir de las coordenadas de los extremos de una recta de acuerdo a los esquemas siguientes, según 3 reglas:



Cuando las diferencias entre las coordenadas Norte [$\Delta N=(N_2-N_1)$] y las coordenadas Este [$\Delta E=(E_2-E_1)$] son ambas positivas, el azimut que resulta es el arcotangente correspondiente a la fracción $\Delta E/\Delta N$. (Los subíndices indican la dirección de la recta)

Cuando en dicha fracción ΔN es negativa, para obtener el azimut, debe sumarse 180° al arcotangente resultante en <u>todos</u> los casos, independientemente del signo de ΔE

Cuando ΔN es positiva pero ΔE es negativa, para obtener el azimut, debe sumarse 360° al arcotangente resultante.

2.2 Definición de la escala de la cuadrícula

Los planos se dibujan sobre una cuadrícula., dibujada lo más perfectamente posible, porque desde ella se miden las coordenadas que se le asignan a puntos claves de un proyecto. Una cuadrícula muy deformada no representa la verdadera forma de las áreas levantadas.

Los lados de la cuadrícula se escogen según la escala del plano a dibujar. Generalmente se escoge una cuadrícula de 10 x 10 cm. porque hay en el mercado templetes para ello. También es corriente adoptar cuadrículas cuyos lados concuerden con las longitudes unitarias del sistema métrico decimal, de acuerdo a la escala del plano.

2.3 Origen de coordenadas

En un sistema de coordenadas planas, el origen de coordenadas puede ser arbitrario, y suele colocarse en el centro de la obra a representar, asignándole valores de manera que no resulten coordenadas negativas.

En obras importantes, este origen arbitrario debe estar enlazado a un vértice de triángulación nacional, que tenga coordenadas geográficas y cota sobre el nivel del mar. Tiene por objeto que las coordenadas rectangulares planas puedan convertirse a coordenadas UTM o geográficas, de manera que la obra pueda ser incorporada a los planos nacionales o estatales.

Es especialmente importante, cuando estas coordenadas tienen una implicación legal internacional, como los linderos de una concesión minera o la colocación de hitos en una frontera.

2.4 Acopio de Datos

Un levantamiento topográfico se realiza en 3 etapas sucesivas:

a) Poligonal base

La poligonal consiste en implantar en el campo, mediante marcas, una estructura, cuyas medidas sean confiables y desde la cual puedan acopiarse los detalles del terreno. Consiste en un polígono, cuyos lados y ángulos sean medidos con los métodos estipulados. Debe ser cerrada, de manera que puedan calcularse y ajustarse los errores de medición y así poder conocer la precisión obtenida.

Un polígono es cerrado cuando la medición de sus lados y ángulos termina en el mismo punto donde comenzaron. Pueden también terminar en un punto distinto, cuando se conozcan las coordenadas de dicho punto y éstas sean confiables.

Es recomendable que la longitud de los lados de la poligonal no difieran mucho entre si. Una sucesión de lados largos y cortos aumenta la incidencia de los errores accidentales que afectan la precisión por obtener.

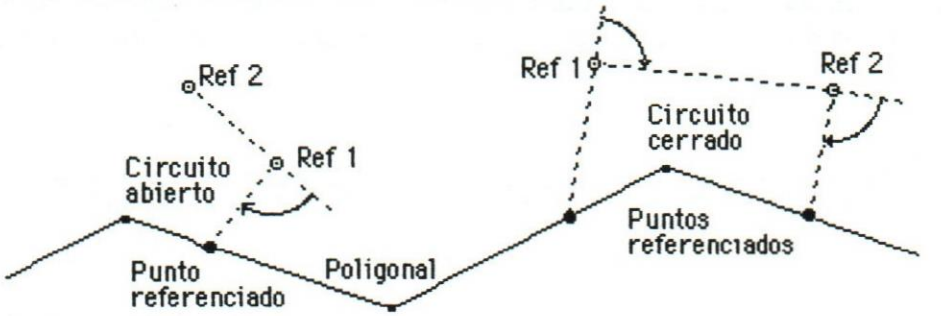
Los vértices de la poligonal base deben estar acotados mediante una nivelación cerrada. También deben ser acotados los puntos de los lados de la poligonal desde los cuales se tomen las secciones transversales o se levanten detalles por irradiación. En obras importantes, el origen de las cotas debe estar referido al nivel promedio del mar, desde de un banco de nivel oficial (BM). De no ser esto posible, debe determinarse su

cota mediante un barómetro, pero debe dejarse constancia de las circuntancias, como fecha, hora y el estado del tiempo.

Es necesario implantar Referencias, que son monumentos de concreto de carácter permanente, enlazados por medio de coordenadas y cotas a un vértice de la poligonal. Cada Referencia consta de dos monumentos, alejados de la poligonal base y preferiblemente fuera del área que pueda ser afectada por la construcción de la obra. Su objeto es poder reubicar las marcas de la poligonal, si llegan a perderse, y a replantear las obras que se proyecten en base a dicha polígonal. Cada par de Referencias deben situarse de manera que sean intervisibles entre sí. Se pueden implantar de 2 maneras :

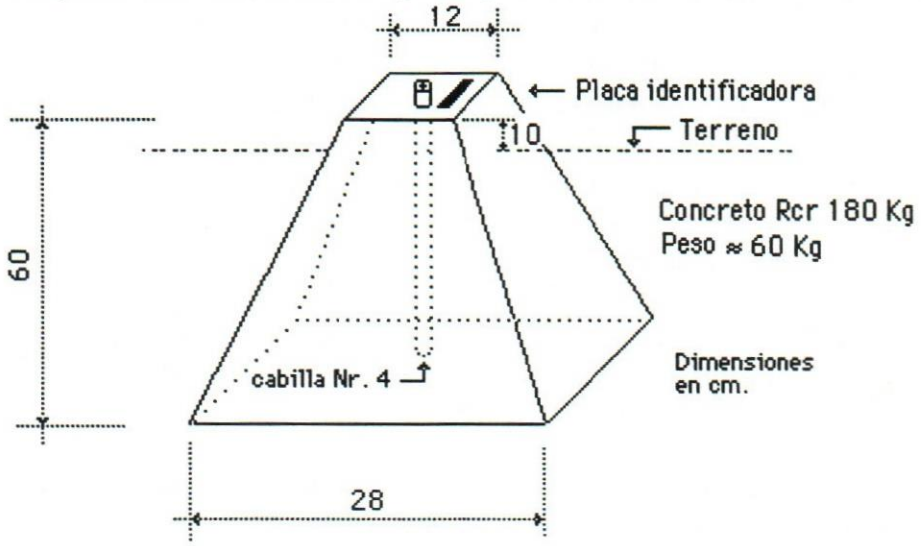
a) En circuito abierto, en el cual las medidas son independientes de las de la poligonal. Esta manera requiere de un cuidado muy especial en la obtención de dichas medidas.

b) En circuito cerrado, en el cual las medidas de las Referencias son solidarias con las de la poligonal ya ajustada, porque se cierra un circuito que a su vez debe ser ajustado.

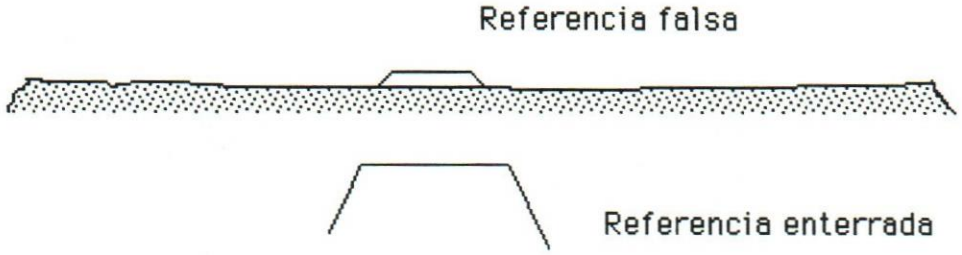


La forma como deben ser implantadas debe ser escogida o autorizada por el ingeniero a cargo.

El croquis muestra la forma de construir una Referencia según las normas oficiales. Esta forma puede sufrir alteraciones de acuerdo a las circunstancias, pero deben ser lo suficientemente sólidas para garantizar su permanencia, durante y después de la construcción de la obra.



En algunas ocasiones, para proteger las Referencias, se entierran a poca profundidad y se colocan sobre el terreno señales para su localización.



b) <u>El acopio de los detalles del terreno,</u>

El acopio de los detalles del terreno se realiza mediante secciones transversales basadas en la poligonal base. Con los puntos acotados de estas secciones se interpolan y dibujan las curvas de nivel para representar en un plano el contorno del terreno. El espaciamiento de las secciones lo determina las características propias del terreno y debe ser fijado por el ingeniero responsable.

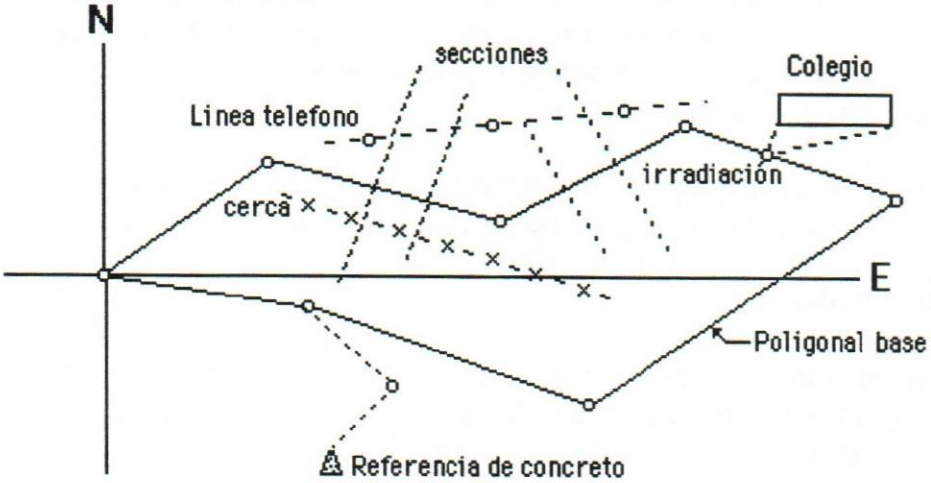
Estas secciones se toman generalmente normales al lado de la poligonal base donde se originan. De no ser así, debe especificarse el ángulo que forman con dicho lado.

Son poligonales abiertas, sin cierre. Se requiere que puedan ser vistas desde la poligonal base en toda su extensión. Si esto no es posible, es necesario hacer circuito cerrado con secciones vecinas para determinar su precisión.

c) <u>El acopio de las bienhechurías existentes</u>

Cuando las bienhechurías tengan cierta continuidad, como cercas, lineas eléctricas, tuberías, caminos etc.. pueden ser detectadas cuando las secciones las atraviesen.

Cuando las bienhechurías no puedan ser detectadas apropiadamente con las secciones, se procede a levantarlas con medidas irradiadas desde un punto de la poligonal base.



En todo caso, la forma de medir las secciones transversales y los puntos por irradiación, la fija el ingeniero responsable. Serán objeto de explicación en las clases de práctica por el profesor.

Las propiedades deben identificarse con su nombre propio, el del propietario o el del encargado. Si no es posible locarlizarlos, se debe dejar constancia de ello. Debe anotarse también si están en ocupadas o abandonadas.

Debe anotarse el uso de las bienhechurías, como cultivos, corrales, acueductos gasductos, poliductos y oleoductos, lineas eléctricas y telefónicas. Cuando una posteadura de éstas deba ser removida, debe anotarse el Nr. del poste, si lo tiene.

Si se levantan viviendas, debe dejarse constancia del tipo de construcción, cantidad de pisos, material de construcción, uso y estado general de la edificación, para poder apreciar su valor, en caso de una posible expropiación.

En general, un plano topográfico debe contener toda la información necesaria para su cabal comprensión y servir de base para la estimación del valor de las bienhechurías que eventualmente puedan ser afectadas por la obra que se pretenda construir.

2.5 Formato

Los planos deben ser dibujados en un formato previamente escogido. Los organismos oficiales han escogido cada uno sus propios formatos.

El formato de los planos debe ser práctico y manejable, tomando en cuenta que ellos serán usados en la obra, al aire libre. En una época, las copias de los planos destinados al constructor de la obra eran de fondo azul, muy cómodos, porque al sol, las letras blancas sobre fondo azul se destacaban muy bien. (Las llamaban Blue Prints.). Tienen la ventaja de que no se pueden hacer anotaciones para alterar el plano. Para algunos, esto se considera una desventaja.

Hoy se usan copias heliográficas, de fondo blanco y letras negras o azules, que destacan menos pero son más económicas. Es recomendable que estas copias tengan algo de fondo gris, para que el blanco no sea tan deslumbrante.

En el plano debe estar dibujada la ubicación de los vértices de la poligonal base y de las referencias. Debe contener una lista de las coordenadas y las cotas de dichas referencias.

Los símbolos mediante los cuales se representan los detalles, deben ser acordes con los adoptados oficialmente y estar descritos en cada plano.

Todo plano debe tener un título que describa la obra para la cual se realiza el levantamiento topográfico, el ingeniero responsable, las escalas y la **fecha**.

Si los planos originales han sufrido modificaciones, los planos modificados deben tener constancia de dichas modificaciones, la autoridad del que las ordenó y la **fecha**.

Es práctica común de ética profesional que si un plano debe ser modificado, se consulte al ingeniero originalmente responsable y se justifiquen las modificaciones acordadas.

UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

3.- Linea recta

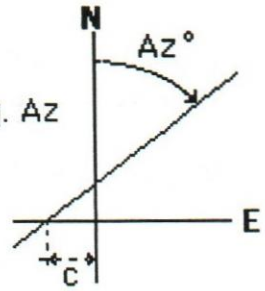
3.1 Formas usuales

La linea recta se define por medio de la ecuación general Ax+By+C = 0 Esta ecuación no se usa en topografía, porque la orientación de las rectas debe ser con respecto al Norte. Por lo cual, la ecuación general se transforma así :

$$x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} = 0 \; ; \; x = -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A} \; ; \; x = my + c$$

en la cual $m = -\frac{B}{A}$; Pendiente de la recta = tang. Az

$c = -\frac{C}{A}$ = Intercepto sobre el eje de las x



Esta expresión tiene la ventaja de que m es la tangente del azimut de la recta . El azimut, como el parámetro que indica la dirección de la recta, ofrece las siguientes ventajas:

a) Para obtener el azimut de un lado de la poligonal, a partir de otro lado de azimut conocido, se le suma el ángulo de deflexión.

b) El signo de los senos y cosenos es función del valor del azimut. Cuando los azimutes están muy cerca de los ejes cartesianos, el valor de esas funciones puede tener valores difíciles de manejar. Las calculadoras electrónicas pueden manejar esos números en notación exponencial. Sinembargo, si las distancias a las que se aplican esas funciones son muy grandes, puede que las cifras significativas no alcancen a dar la precisión requerida. Este caso es sólo teórico, ya que en la práctica, la ocurrencia de estos extremos es poco probable.

Si se usa la otra forma y = mx + c, debe tomarse en cuenta que m es la tangente de α, e igual a la cotangente del azimut. Los valores del seno y del coseno se invierten, como puede verse en la tabla siguiente :

Cuadrante		Angulo	Seno	Coseno
I	Azimut	35°	0,57	0,82
	α equiv	55°	0,82	0,57
II	Azimut	120°	0,87	- 0,50
	α equiv	330°	- 0,50	0,87
III	Azimut	200°	- 0,34	- 0,94
	α equiv	250°	- 0,94	- 0,34
IV	Azimut	320°	- 0,64	0,77
	α equiv	130°	0,77	- 0,64

3.2 Definición de la ecuación de la recta

Cuando es necesario calcular la ecuación de una recta, se hace con dos parámetros, que usualmente son los siguientes:

a) Mediante las coordenadas de 2 puntos :

$$x - x_1 = \frac{(x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1)}(y - y_1)$$

b) Mediante las coordenadas de un punto y el azimut de la recta :

$$x - x_1 = \text{tang } AZ(y - y_1)$$

c) Cuando se deba calcular la ecuación de una recta que represente una serie de puntos que no están alineados, se debe calcular la regresión lineal relativa a esos puntos, que deben ser más de tres. Para la forma x = my + c se tiene que :

$$m = \frac{\Sigma x_i y_i - \dfrac{\Sigma x_i \Sigma y_i}{n}}{\Sigma y_i^2 - \dfrac{(\Sigma y_i)^2}{n}} \quad ; \quad c = \left[\frac{\Sigma x_i}{n} - m\frac{\Sigma y_i}{n}\right]$$

Para la forma y = mx + c, deben intercambiarse los valores de las x con los de las y.

Si los valores de x e y son muy grandes, los coeficientes resultantes de la regresión no son confiables.

En este caso, puede trasladarse paralelamente el origen de coordenadas, para conseguir números más manejables.

Cuando solamente se dispone de tres puntos, es más cómodo verificar su alineación mediante un determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)$$

Si éste determinante es nulo, los 3 puntos están alineados. En realidad, lo que calcula es el área de un triángulo. Por consiguiente, entre menor sea el resultado, mejor alineados están los 3 puntos

Antes de aceptar el resultado de una regresión lineal, debe analizarse si los puntos están alineados en un rango aceptable, para lo cual debe calcularse el coeficiente de determinación de la recta.

Para la forma x = my + c :

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma x_i y_i - \frac{\Sigma x_i \Sigma y_i}{n}\right]^2}{\left[\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{n}\right]\left[\Sigma y_i^2 - \frac{(\Sigma y_i)^2}{n}\right]}$$

Al intercambiar los valores de x e y para la ecuación y = mx + c, el valor del coeficiente de determinación no se altera.

El valor de este coeficiente varía entre 1 y 0. Valores próximos a 1 indican un mejor alineamiento. Para valores menores a 0,80 deben encontrarse los puntos que más influyen en dicho coeficiente, porque en ellos puede haber un error accidental. Hay dos maneras de hacerlo.

Método gráfico

Se dibujan por coordenadas todos los puntos disponibles y se traza una regresión gráfica que se asemeje a la regresión deseada, tomando en cuenta todos los puntos. Se eliminan los puntos más alejados de dicha regresión y se vuelve a calcular. Usualmente el dibujo se hace con escalas deformadas para visualizar mejor las desviaciones. Este procedimiento es eficiente y rápido, pero exige una labor de dibujo.

Método matemático

Se calcula la regresión con todos los puntos disponibles. Se calculan las coordenadas según la ecuación resultante, dejando como fijos las abscisas o las ordenadas de acuerdo a la orientación general de la

regresión. Se eliminan los puntos originales que difieran mucho de las coordenadas calculadas y se recalcula nuevamente la regresión. Este procedimiento es programable, pero debe adoptarse un criterio mediante el cual se eliminan las coordenadas de los puntos indeseados.

3..3 Cálculo de coordenadas desde una recta

Es muy frecuente en el replanteo de una obra, el cálculo de las coordenadas de un punto, del cual se conocen la abscisa y la ordenada, medidas sobre una recta definida, a partir de un punto sobre esa misma recta, que es el origen de las distancias.

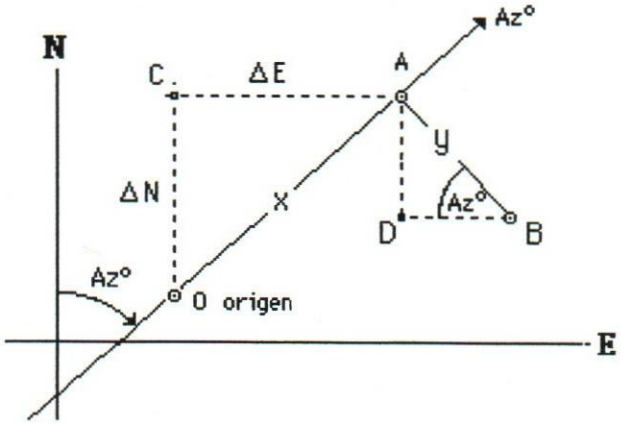
Se pueden calcular dichas coordenadas mediante esta ecuación general :

$$N_B = N_o + x.\cos(Az) - y.\mathrm{sen}(Az)$$
$$E_B = E_o + x.\mathrm{sen}(Az) + y.\cos(Az)$$

en la cual

N_o = Coordenada Norte del origen de las distancias
E_o = Coordenada Este del origen de las distancias
Az = Azimut de la recta
x = Abscisa sobre la recta
y = Ordenada normal a la recta

El desarrollo de esta expresión es como sigue:



$N_A = N_0 + OA \times \cos AZ$
$E_A = E_A + OA \times \mathrm{sen}\ AZ$

Las dos ecuaciones anteriores son las que se usan cuando se calculan las coordenadas de los vértices de una poligonal.

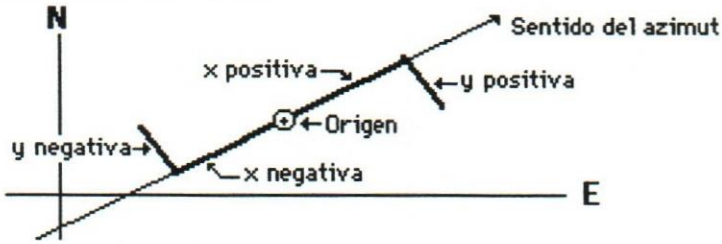
$N_B = N_A - AB \times \mathrm{sen}\ AZ$
$E_B = E_A + AB \times \cos AZ$

La dirección de la recta es la del azimut. Para darle un signo a las abscisas y ordenadas, se adopta la siguiente convención :

x es positiva si está delante del punto origen y negativa si está detrás. Si x es nulo, el origen es el pie de la normal a la recta.

y es positiva si está a la derecha de la recta y negativa si está a la izquierda, independientemente de si está delante o detrás del origen. Si y es nula, el punto calculado resulta sobre la recta.

Los senos y cosenos del azimut, adoptan su signo según el cuadrante donde se encuentre la recta.



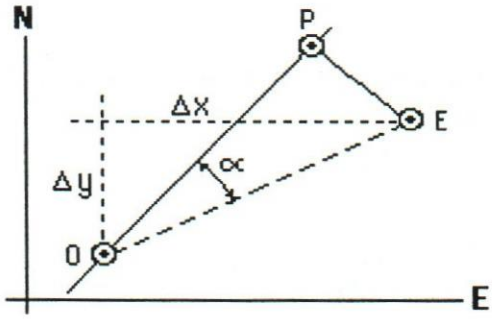
3.4 Punto externo a una recta

Es frecuente tener que calcular las coordenadas del pie de la normal de un punto externo a la recta, definida por un punto y su azimut.

$$\text{Azimut } \overline{OE} = \text{arcotangente } \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\text{Distancia } \overline{OE} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\alpha = Az_{OE} - Az_{recta}$$



$PE = OE \times \text{sen } \alpha$
$OP = OE \times \cos \alpha$

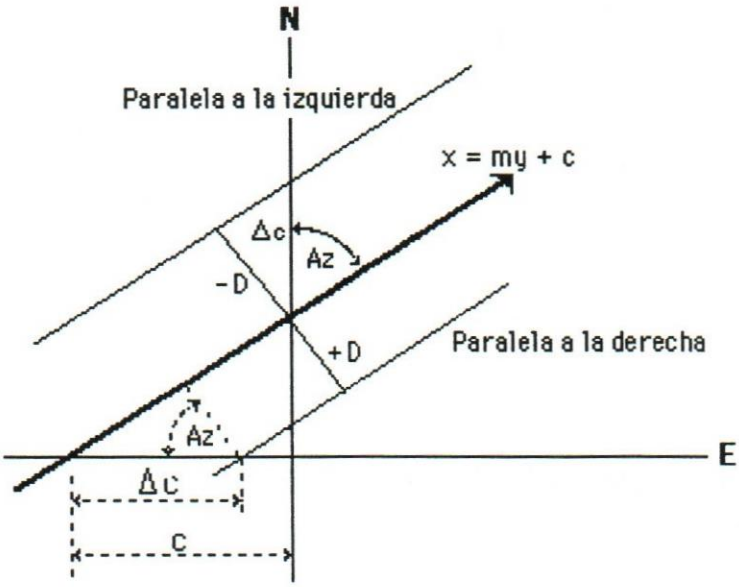
Pie de la normal en P

$NP = NO + OP \times \cos AZ_{recta}$
$EP = EO + OP \times \text{sen } AZ_{recta}$

3.5.- Rectas paralelas

Para calcular las ecuaciones de rectas paralelas, como los bordes de las aceras o de los hombrillos, sólo es necesario calcular la variación del término independiente de la ecuación del eje.

Siendo D la distancia normal entre las paralelas, positiva a la derecha o negativa a la izquierda según la dirección del azimut, se tiene :



Para ecuaciones del tipo x = my + c, la variación del término independiente resulta :

$$\Delta c = \frac{\pm D}{\cos(Az)}$$

El término independiente de la paralela es cp = c + Δc. El valor del intercepto se mide sobre el eje de las x

Para ecuaciones del tipo y = mx + c, la variación del término independiente es :

$$\Delta c = \frac{\pm D}{\operatorname{sen}(AZ)}$$

El término independiente de la paralela es cp = c - Δc. El intercepto se mide sobre el eje de las Y.

En ambos casos, el signo del término independiente calculado depende del signo de D.

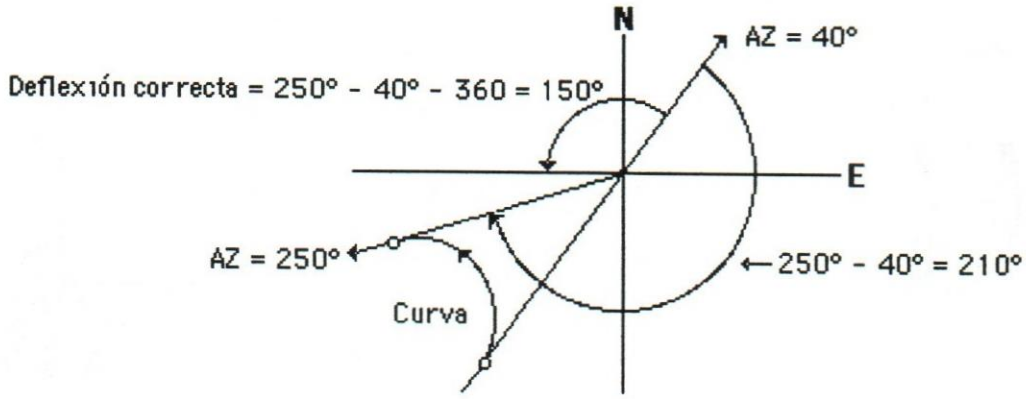
3.6 Angulo de deflexión entre 2 rectas

Cuando se conocen los azimutes de dos rectas, el ángulo de deflexión entre ellas se obtiene mediante una simple resta:

$$\Delta = Az_2 - Az_1$$

Si Δ resulta positivo, la deflexión es a la derecha. Si Δ es negativo, la deflexión es a la izquierda.

Cuando el valor absoluto de la diferencia obtenida es mayor de 180°, el resultado no es el correcto, como lo demuestra el gráfico siguiente:



El valor de la deflexión, con su signo correcto se obtiene así :

Sumando 360° a las diferencias negativas
Restando 360° a las diferencias positivas

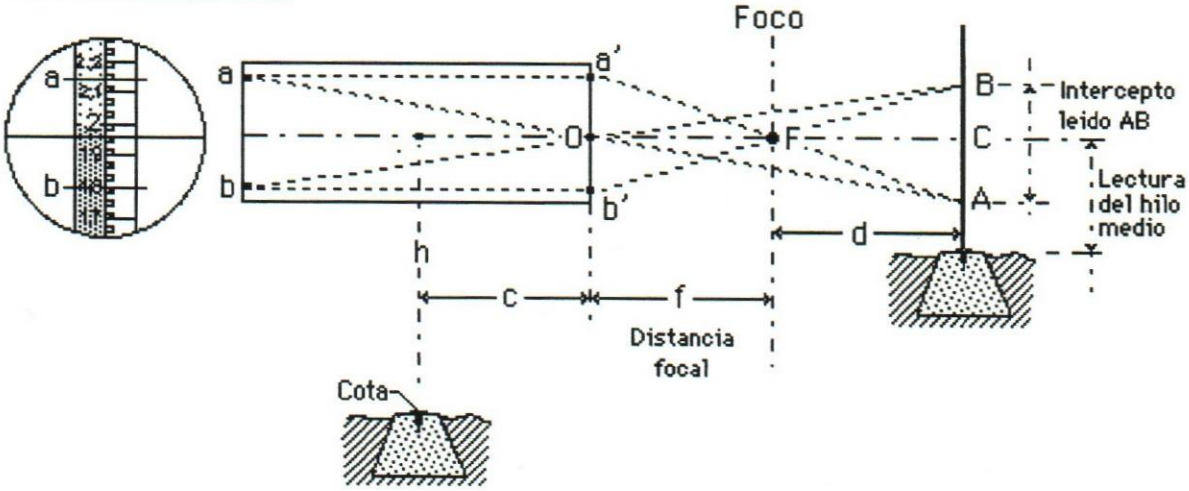
UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

Tema 4 Sistemas de medición

4.1 Taquimetría

La taquimetría consiste en un medio óptico para medir distancias y desniveles, mediante el uso del teodolito. Los procedimientos serán explicados por el profesor en las clases de práctica.

Visual Horizontal



Del esquema se deduce que los triángulos a'b'F y ABF son isósceles y semejantes, por lo que :

$$\frac{OF}{a'b'} = \frac{FC}{AB} \quad ; \quad FC = \frac{OF \times AB}{a'b'}$$

OF/a'b' es una constante para cada aparato y constituye el factor de escala entre el intercepto leído en la mira y la distancia horizontal. Es normal que esta constante llamada k, sea igual a 100.

El teodolito se centra sobre el punto. Por lo tanto, en una visual horizontal la distancia desde la estación ocupada hasta el punto visado es $D = AB \times 100 + (f + c)$. Los teodolitos modernos, de enfoque interno, se han diseñado de manera que $f + c = 0$

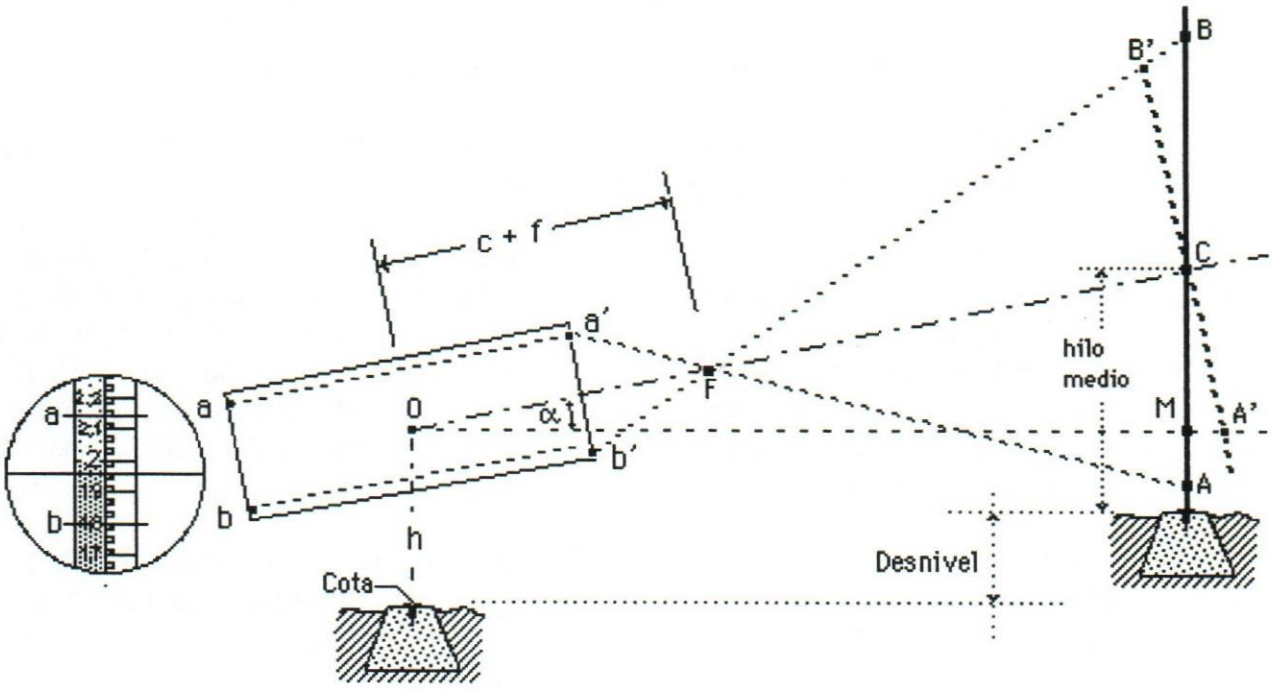
Desnivel

Como la visual se supone horizontal, el teodolito opera como un nivel montado y el desnivel se calcula en forma semejante.

Desnivel = Cota del punto + altura del aparato - lectura del hilo medio

Visual inclinada

Distancia inclinada = A'B' x k + (c + f)



Siendo el ángulo α muy pequeño, para todo efecto práctico se asume que, para distancias cortas, el ángulo en B' es recto y por lo tanto

$B'C = BC \times \cos\alpha$; $A'C = AC \times \cos\alpha$; $A'B' = AB \times \cos\alpha$

AB es el intercepto leído en la mira, con los hilos taquimétricos

Remplazando este valor en la distancia con la visual horizontal:

$OC = AB \times \cos\alpha \times k + (c + f)$ y proyectando OC a la horizontal, queda
$OM = AB \times \cos^2\alpha \times k + (c + f)\cos\alpha$; considerando (f + c) nulo, queda

$OM = AB \times \cos^2\alpha \times k$

Desnivel

$CM = OM \times \tan \alpha$; sustituyendo a OM por su valor y a la tangente por sen/cos, queda :
$CM = [AB \times \cos^2 \alpha \times k] \text{ sen } \alpha / \cos \alpha$. Simplificando por $\cos \alpha$
$\text{sen } \alpha \times \cos \alpha = (\text{sen } 2\alpha)/2$ y considerando a $(c + f) = 0$, queda
$CM = 0{,}5[AB \times k \times \text{sen } 2\alpha]$

El desnivel resulta entonces :

Desnivel = $0{,}5AB \times k \times \text{sen } 2\alpha + h$ - lectura del hilo medio

Las miras son generalmente de 4 mts de altura y marcadas cada centímetro, con los metros enteros destacados.

Teóricamente podrían medirse hasta casi 400 mts. Esto solamente es posible cuando el aire está muy claro y con poca refracción. Generalmente el rango utilizable está entre 100 y 200 metros. La práctica de leer la mitad del intercepto y luego multiplicarlo por 2 para medir distancias mayores a 400 metros no es aceptable, porque el telescopio del teodolito no tiene una definición adecuada para leer centímetros a esas distancias.

Como los interceptos sólo se pueden leer con precisión al centímetro, si el factor k es igual a 100, al calcular las distancias, estas quedan reducidas al metro entero.

En las distancias inclinadas, puede que resulten fracciones de metro al multiplicar el intercepto por las funciones trigonométricas. Estas fracciones no representan una medida real.

La taquimetría solamente se utiliza para la localización de detalles secundarios cuya ubicación precisa no es importante y para medir secciones transversales, en las cuales los desniveles no influyen mucho.

Las precisiones que se obtienen en la medición de poligonales sólo muy excepcionalmente exceden a 1: 1000, lo cual significa que puede haber un error de 1 metro en cada kilómetro medido.

En comparación, en las mediciones con cinta metálica de 50 m. se obtienen precisiones de 1 : 5.000 o más

4.2 Medición de distancias horizontales con cinta metálica

La cinta que se usa en topografía es una tira de acero templado de 25, 50 o 100 mts. de largo. Su manejo será explicado en detalle por el Profesor en las clases de práctica. Es importante lo siguiente :

a) La tensión en la cinta debe ser controlada con tensiómetros Las diferentes marcas vienen con indicación de la tensión normal a una temperatura dada.

b) En nuestro clima tropical, es necesario tomar la temperatura, porque al sol, puede tener variaciones de hasta 30° centígrados con respecto a la temperatura para la cual la cinta ha sido calibrada. Todas las cintas tienen especificado su coeficiente de dilatación para una determinada temperatura y un rango para el cual el coeficiente de dilatación especificado es válido.

c) Después de un uso prolongado, la cinta puede sufrir un alargamiento permanente debido a la fluencia del metal. Por lo tanto, debe compararse periódicamente con una cinta patrón calibrada para una tensión y temperatura precisas. Si la deformación es muy grande, es preferible desecharla. Hay un procedimiento mecánico para empatar cintas rotas. En este caso debe calibrarse la cinta, especificando el punto donde está el empate, puesto que el error que pueda producirse, no interviene en la porción antes del empate.

En ningún caso se permite el uso de cintas de tela o de plástico.

d) En lo posible, se debe mantener la cinta horizontal, mediante un nivel de burbuja. De ser necesario medir distancias inclinadas, debe obtenerse el desnivel entre las diferentes partes de que conste la medida, a fin de deducir, por trigonometría, la distancia horizontal. El profesor explicará los detalles de la operación en las clases de práctica.

e) Como en toda medición, puede haber errores accidentales y sistemáticos. Estos últimos pueden anularse, observando las reglas anteriormente descritas. La corrección de los errores accidentales es materia de un tema posterior.

4.3 Medición de distancias por medio de sistemas electrónicos

Consiste en un aparato emisor de un rayo laser, que se refleja en un prisma receptor. El aparato mide el tiempo de retorno, del cual se deduce electrónicamente la distancia.

Los aparatos pueden ser de dos tipos :

a) Aparato emisor de un rayo simple, que permite medir distancias.

b) Aparato emisor de un rayo rotatorio, que puede abarcar un área grande, lo cual facilita la colocación de estacas en una misma cota, para obtener curvas de nivel muy precisas y la medición de detalles por irradiación.

Las distancias inclinadas deben reducirse a la horizontal mediante el procedimiento descrito para las mediciones con cinta.

Las medidas que se obtienen tienen un error constante, muy pequeño, que es propio de cada aparato o sistema. Este error es independiente de la longitud medida, por lo que no es recomendable usar estos aparatos para medir distancias muy cortas.

4.4 Medición de ángulos

Los ángulos se miden con un teodolito, cuyo manejo será demostrado por el profesor en las clases de práctica. La precisión que se obtiene depende de lo siguiente :

a) El teodolito debe estar perfectamente nivelado y centrado sobre la estación.

b) Como el telescopio del teodolito puede invertirse, deben tomarse lecturas en ambas posiciones, con el objeto de anular el error que pueda producirse por un defecto en su colimación.

c) Es preferible que el teodolito esté a la sombra, bajo un parasol, pues las extremas temperaturas al sol, pueden modificar la horizontalidad del aparato.

d) Como regla práctica, el aparato debe instalarse de acuerdo a la estatura del operador, porque las posturas incómodas pueden inducir a lecturas con errores accidentales.

e) El jalón que se visa debe estar aplomado. Es recomendable hacer lecturas en la parte más baja visible del jalón, para minimizar cualquier error que se produzca por un jalón no bien aplomado. A veces se usa un lápiz, si puede distinguirse. Con los modernos radioteléfonos, es posible una comunicación apropiada entre el operador y el jalonero, que anteriormente se hacía a gritos.

f) No es recomendable medir ángulos en las horas más calientes del día, porque la refracción que producen las capas de aire caldeadas cerca del suelo, impiden visar el jalon apropiadamente.

4.5 Medición de desniveles

Los desniveles se miden mediante un nivel montado. La operación será demostrada por el profesor en las clases de práctica. Deben observarse las siguientes reglas:

a) El aparato debe estar perfectamente nivelado y bajo un parasol.

b) El nivel debe colocarse aproximadamente en la mitad de la distancia que haya entre los puntos donde están colocadas las miras. Esto tiene por objeto eliminar cualquier error sistemático que se produzca por una colimación defectuosa en el telescopio del nivel.

b) No debe intentarse una nivelación en las horas más calientes del día, porque la refracción en las capas de aire caliente cerca del suelo, impiden una lectura precisa de la mira, que debe estar bien aplomada. A tal efecto, debe anotarse en la libreta la hora de la operación.

Los desniveles también pueden calcularse mediante una nivelación trigonométrica, a partir de una distancia inclinada y el respectivo ángulo vertical. Para ello deben observarse las siguientes reglas :

a) La medición de la distancia debe hacerse 2 veces, cuesta arriba y cuesta abajo. Igualmente, los ángulos deben medirse también en ambos sentidos.

b) La lectura de los ángulos debe ser hecha en la misma oportunidad, simultáneamente si es posible.

c) Como en este procedimiento pueden producirse errores accidentales de cierta consideración, es recomendable realizar todas las mediciones por duplicado, aceptando como seguras el promedio aritmético, siempre y cuando se haya cumplido con el aparte (b). Si

la discrepancia entre ambas lecturas es significativa, debe hacerse de nuevo toda la operación.

d) En ninguna forma puede aceptarse que se use un teodolito con el círculo graduado del telescopio puesto a cero, como si fuera un nivel montado. Tal práctica, sólo aceptable en levantamientos taquimétricos, puede producir errores sistemáticos de consideración, porque la precisión de ambos aparatos es muy diferente.

4.6 Levantamientos topográficos con plancheta

La plancheta (Plain table en inglés) es un instrumento compuesto de una tabla que se atornilla a un trípode igual al de un teodolito, con una sola tuerca, para que pueda girar sobre su eje. Las distancias y desniveles se miden con una alidada, provista de un círculo vertical que permite obtener desniveles. Como el telescopio no gira, este círculo está provisto de un nivel auxiliar que se desliza sobre el círculo vertical. El telescopio tiene los hilos taquimétricos, con los cuales se pueden leer distancias horizontales.

Para poder anotar los detalles que se levanten, la poligonal base con su cuadrícula debe estar previamente dibujada en la cartulina, para que la mesa pueda orientarse con la alidada según un lado de la poligonal.

Cuando se levantan áreas pequeñas que no están apoyadas en una poligonal, la mesa puede orientarse al Norte mediante una brújula adosada a la alidada.

Los levantamientos topográficos con este aparato son esencialmente gráficos y su precisión es acorde. Su operación será explicada por el profesor en las clases de práctica.

Como los detalles se dibujan directamente en el campo, sobre una cartulina especial fija a la mesa, debe estar bajo un toldo o sombrilla. Es buena práctica "curar" dichas cartulinas exponiendolas algún tiempo a la intemperie, para provocar las deformaciones que puedan producirse en cartulinas "nuevas", antes de su uso.

UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

TEMA 5 Triangulación

5.1 Conceptos generales

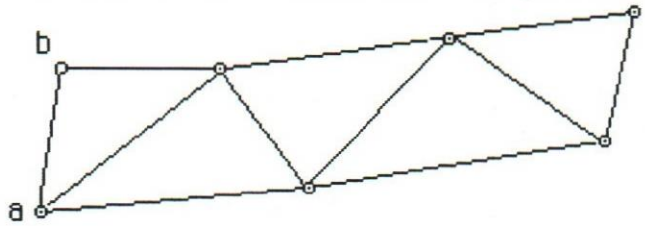
Un levantamiento topográfico puede apoyarse en una cadena de figuras geométricas, en las cuales la figura básica sea el triángulo. El triángulo es la figura geométrica más sólida, porque no se puede deformar ninguno de sus elementos sin afectar a todos los otros. Si un triángulo es muy achatado, la deformación de uno de sus elementos se refleja poco en los otros. Se considera que este triángulo no es muy sólido. Mas adelante se discutirá la solidez de esos triángulos.

El levantamiento topográfico de un área extensa, por medio de una cadena de triángulos, tiene la ventaja de que solamente es necesario medir cuidadosamente un lado de la cadena, llamada linea base, y todos los ángulos restantes. Es especialmente adaptable a terrenos colinosos o montañosos, en los cuales es muy laborioso medir distancias inclinadas con cinta. Así se obtienen varios puntos con coordenadas y los azimutes entre ellos, que sirvan de base a un levantamiento topográfico más detallado.

El método de la triangulación se basa en la posibilidad de medir ángulos con gran precisión, en puntos accesibles, sin necesidad de medir las distancias entre sus vértices.

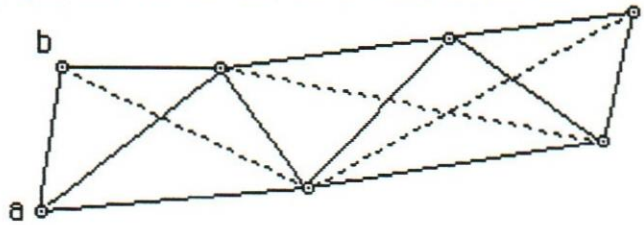
Actualmente, la triangulación puede sustituirse por la trilateración, por la facilidad para medir distancias por medio de rayos laser.

Una cadena de triangulación consiste en una sucesión de triángulos en la cual el lado de un triángulo es parte de otro adyacente. Los vértices de los triángulos se denominan vértices de triangulación.

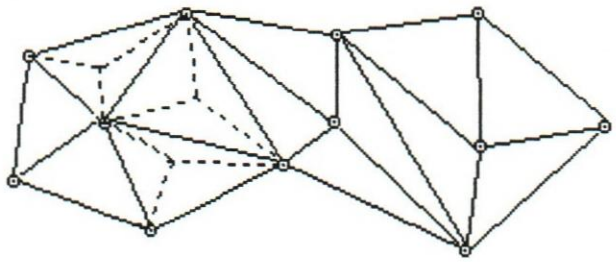


En una figura como la del esquema, si se mide con precisión el lado ab y todos los ángulos internos de cada uno de los cinco triángulos de la cadena, es factible calcular la longitud de todos los otros lados de dichos triángulos. Si se dispone del azimut del lado ab y se le asignan coordenadas a uno de sus puntos, es posible calcular también las coordenadas de todos los otros vértices y los azimutes de los lados de la cadena.

En cadenas de más alta precisión, la figura anterior se transforma en cuadriláteros, midiendo los ángulos que forman las diagonales. Esta cadena es más sólida que la cadena de simples triángulos, pero más laboriosa de ajustar, como se verá más adelante.



En ocasiones, cuando se deben cubrir áreas muy extensas, se escoge una cadena más compleja, pero en todas ellas la figura básica es el triángulo.



Una vez implantada en el terreno una cadena de figuras, pueden medirse poligonales apoyadas en dos de sus vértices, tomándolos como confiables, para ajustar dichas poligonales. Desde ellas es que se levantan los detalles del terreno que conforman los planos topográficos.

5.2 Escogencia del tipo de cadena

El tipo de cadena se escoge de acuerdo a la extensión del área a cubrir y de la precisión que se requiera.

En un sistema rectangular plano, todas la medidas, incluyendo estas figuras, obedecen a las reglas de la geometría plana.

En las grandes cadenas de triangulación, que cubren toda una región o un país, cuyos lados a veces son de muchos kilómetros, debe considerarse la esfericidad de la tierra. La suma de los ángulos de un triángulo esférico no suman 180° sino que tienen un exceso esférico. Este tipo de triangulación pertenece a la Geodesía. El Ingeniero Civil es solamente usuario de la Geodesía, pero no está involucrado en ella y por lo tanto esa materia no es objeto de un Curso de Topografía para ellos. Hay la carrera de Ingenieros Geodestas.

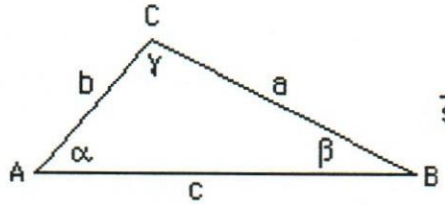
Cuando se planea una cadena de triangulación, generalmente se ubican los vértices en una carta geográfica a escala muy pequeña, 1:25.000 o menor. Su ubicación se basa principalmente en tres aspectos :

a) Su intervisibilidad
b) Su accesibilidad
c) La solidez de los triángulos resultantes

Al escoger la posición de los vértices, se conoce de antemano la configuración de sus triángulos. Por eso es posible escoger de antemano figuras lo más sólidas posibles.

5.3 Solidez de las figuras

El cálculo de la longitud de los lados de un triángulo de la cadena, se hace según la ley de los senos, según la cual, la longitud de los lados de un triángulo están en proporción directa con los senos de los ángulos opuestos a ellos.



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Al calcular los lados con ángulos cercanos a 0° y 90°, los senos tienden a cero o a ∞ . Por esa razón pueden producirse errores muy grandes, por lo cual dichos ángulos no son deseables en una figura de la cadena. En la práctica, se han obtenido resultados satisfactorios con ángulos mayores a 30°

Muchos de los ángulos medidos en el campo no son utilizados en el cálculo de los lados, por lo que estos ángulos si pueden estar en el rango indeseable mencionado, sin menoscabo de la precisión de los resultados.

Considerando el cuadrilátero CEFD de la figura, el lado CD ha sido calculado a partir de la linea AB. Entonces, el lado CF del triángulo CDF se calcula usando el lado CD conocido, con los ángulos 80° y 77° (57+20).

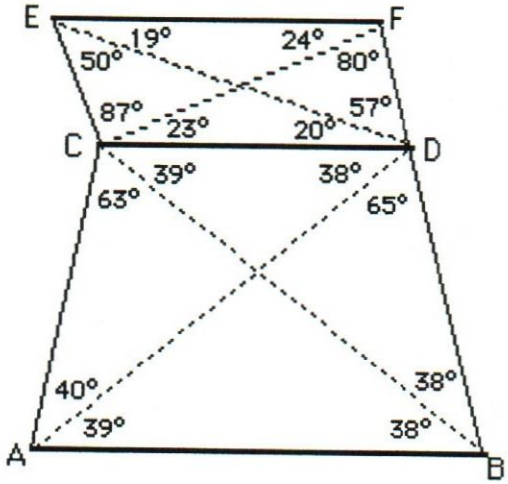


Figura sin escala

A continuación, el lado EF del triángulo CEF se calcula a partir del lado CF y con los ángulos 87° y 69° (50+19). Por lo tanto ninguno de los ángulos usados es menor de 30°

5.4 Solidez de una figura

Para determinar la solidez relativa de una figura, se calcula un factor R, basado en el cálculo de probabilidades, así :

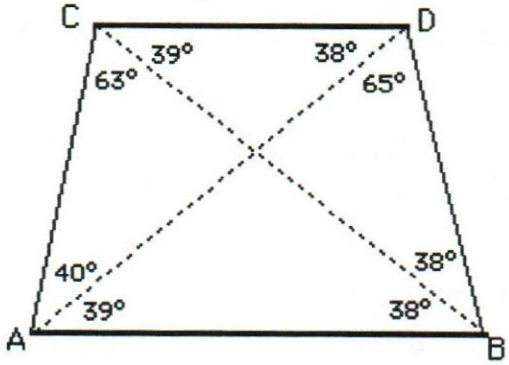
n = Número total de lados de la figura, incluído el lado conocido.
m = Número total de lados observados en ambas direcciones, incluído el lado conocido, si se observó.
s = Número total de estaciones posibles.
z = Número total de estaciones que fueron ocupadas.
d = Número de estaciones observadas en ambos sentidos, excluído el lado conocido.
δ_A = Diferencia logarítmica para una variación de 1" en el seno del ángulo opuesto al lado conocido, expresado en unidades del sexto decimal de su logaritmo.
δ_B = Diferencia logarítmica para una variación de 1" en el seno del ángulo opuesto al lado por calcular, expresado en unidades del sexto decimal de su logarítmo.

$$c = (m - z + 1) + (n - 2s + 3)$$

$$R = \frac{(d - c) \times \Sigma \left[\delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A \times \delta_B\right]}{d}$$

La sumatoria $\sum[\delta_A^2 + \delta_B^2 + \delta_A \times \delta_B]$ está en una tabla más adelante

En el cuadrilátero ABDC de la figura anterior, sea AB el lado conocido



n = AB + BD + DC + CA + BC + AD = 6
m = (AD + DA) + (BC + CB) + (DC + CD) = 6 (No incluye el lado conocido)
s = A + B + D + C = 4
z = A + B + D + C = 4
d = (AC+CA) + (BD+DB) + (CD+DC) + (AD+DA) + BC+CB) = 10
C = (6 - 4 + 1) + (6 - 2x4 + 3) = 4

El cálculo de la longitud del lado CD se puede hacer a través de dos triángulos ACB y ACD, siendo AB el lado conocido. Se estima la solidez de la figura así:

Por el triángulo ACB		Por el triángulo ACD	
Angulo opuesto a AB	= 63°	Angulo opuesto a AC	= 38°
Angulo opuesto a CD	= 38°	Angulo opuesto a CD	= 40°
Valor tabulado	= 10	Valor tabulado	= 19

$R = (10 - 4)(10 + 19)/10 \approx 17$

El concepto de la solidez de una figura no es un valor preciso sino una evaluación de la confiabilidad de ella.

a) Los ángulos se miden con transportador sobre la figura propuesta.
b) Estos ángulos no tienen porqué ser compensados para que sumen 360° (Los ángulos internos de un cuadrilátero deben sumar 360°)
c) Se toman los valores más próximos en la tabla, sin necesidad de interpolar.

Entre menor sea el valor de R, más sólida es la figura. No deben aceptarse valores mayores de 25 para triangulaciones normales de 2do o 3er orden.

A título informativo, se explica la forma como se calculan los valores de las tablas, que se encuentran a continuación:

En el caso anterior de 63° y 38° , se toman los ángulos más próximos tabulados , 65° y 40°

sen 65° = 0,90630779 log = -0,04272429
sen 65°00'01" = 0,90630984 log = -0,04272331
0,00000098

sen 40° = 0,64278761 log = -0,19193250
sen 40°00'01" = 0,64279132 log = -0,19192999
0,00000251

$0{,}98^2 + 2{,}51^2 + 0{,}98 \times 2{,}51 = 9{,}72 \approx 10$

FACTORES PARA DETERMINAR LA SOLIDEZ DE FIGURAS

Valores de $(\delta_A^2 + \delta_B \times \delta_A + \delta_B^2)$ para varias combinaciones de angulos A y B

G°	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
10	428	359																			
12	359	295	253																		
14	315	253	214	187																	
16	284	225	187	162	143																
18	262	204	168	143	126	113															
20	245	189	153	130	113	100	91														
22	232	177	142	119	103	91	81	74													
24	221	167	134	111	95	83	74	67	61												
26	213	160	126	104	89	77	68	61	56	51											
28	206	153	120	99	83	72	63	57	51	47	43										
30	199	148	115	94	79	68	59	53	48	43	40	33									
35	188	137	106	85	71	60	52	46	41	37	33	27	23								
40	179	129	99	79	65	54	47	41	36	32	29	23	19	16							
45	172	124	93	74	60	50	43	37	32	28	25	20	16	13	11						
50	167	119	89	70	57	47	39	34	29	26	23	18	14	11	9	8					
55	162	115	86	67	54	44	37	32	27	24	21	16	12	10	8	7	5				
60	159	112	83	64	51	42	35	30	25	22	19	14	11	9	7	5	4	4			
65	155	109	80	62	49	40	33	28	24	21	18	13	10	7	6	5	4	3	2		
70	152	106	78	60	48	38	32	27	23	19	17	12	9	7	5	4	3	2	2	1	
75	150	104	76	58	46	37	30	25	21	18	16	11	8	6	4	3	2	2	1	1	1
80	147	102	74	57	45	36	29	24	20	17	15	10	7	5	4	3	2	1	1	1	0
85	145	100	73	55	43	34	28	23	19	16	14	10	7	5	3	2	2	1	1	0	0

Continuación.....

FACTORES PARA DETERMINAR LA SOLIDEZ DE FIGURAS

Valores de $(\delta_A^2 + \delta_B \times \delta_A + \delta_B^2)$ para varias combinaciones de angulos A y B

G°	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
90	143	98	71	54	42	33	27	22	19	16	13	9	6	4	3	2	1	1	1	0	0
95	140	96	70	53	41	32	26	22	18	15	13	9	6	4	3	2	1	1	0	0	0
100	138	95	68	51	40	31	25	21	17	14	12	8	6	4	3	2	1	1	0	0	0
105	136	93	67	50	39	30	25	20	17	14	12	8	5	4	2	2	1	1	0	0	
110	134	91	65	49	38	30	24	19	16	13	11	7	5	3	2	2	1	1	1		
115	132	89	64	48	37	29	23	19	15	13	11	7	5	3	2	2	1	1			
120	129	88	62	46	36	28	22	18	15	12	10	7	5	3	2	2	1				
125	127	86	61	45	35	27	22	18	14	12	10	7	5	4	3	2					
130	125	84	59	44	34	26	21	17	14	12	10	7	5	4	3						
135	122	82	58	43	33	26	21	17	14	12	10	7	5	4							
140	119	80	56	42	32	25	20	17	14	12	10	8	6								
145	116	77	55	41	32	25	21	17	15	13	11	9									
150	112	75	54	40	32	26	21	18	16	15	13										
152	111	75	53	40	32	26	22	19	17	16											
154	110	74	53	41	33	27	23	21	19												
156	108	74	54	42	34	28	25	22													
158	107	74	54	43	35	30	27														
160	107	74	56	45	38	33															
162	107	76	59	48	42																
164	109	79	63	54																	
166	113	86	71																		
168	122	98																			
170	143																				

5.5 Mediciones

La linea base es el lado inicial de una cadena de figuras, a partir de la cual se calculan los lados de ella, una vez medidos todos sus ángulos.

La seguridad de todo el proceso estriba en la precisión con la que se mida esta linea base. Todas las precauciones deben ser observadas. Tensión, horizontalidad, temperatura y comparación con cintas patrón.

Actualmente, esta medición se facilita mediante modernos aparatos con rayos laser.

Los ángulos deben medirse con la mayor precisión posible. En estas mediciones se debe aplicar lo expuesto en la teoría de los errores accidentales. Deben medirse repetidamente. No es aceptable que se le puedan asignar pesos aleatorios a ningún ángulo para ajustar resultados muy disímiles en las repeticiones. Ellos deben ser medidos en iguales circunstancias. (Ver Tema 6 siguiente)

5.6 Ajuste de la triangulación

En el ajuste de una cadena de triángulos, se comienza por ajustar cada uno de los triángulos que la conforman.

Los triángulos sobre la esfera terrestre no son planos sino esféricos, por lo cual debe tomarse en cuenta el exceso esférico. Este se calcula así :

$$\text{Exceso esférico } \varepsilon = \frac{a_1 b_1 \operatorname{sen}\alpha_1 (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varnothing)^2}{2a^2(1 - e^2)\operatorname{sen} 1''}$$

en la cual a_1 y b_1 y α_1 son dos lados del triángulo y el ángulo inscrito.

$\varnothing$ es la latitud media de la figura.

a es el semieje mayor de la tierra (6.378.388 mts según el esferoide internacional).

e^2 = excentricidad correspondiente a dicho esferoide = 0,00676817

En la expresión anterior hay un factor común a todos los cálculos :

$$m = \frac{(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varnothing)^2}{2a^2(1 - e^2)\operatorname{sen} 1''}$$

el cual ha sido tabulado para los diferentes elipsoides terrestres que han sido medidos, teniendo como argumento las latitudes.

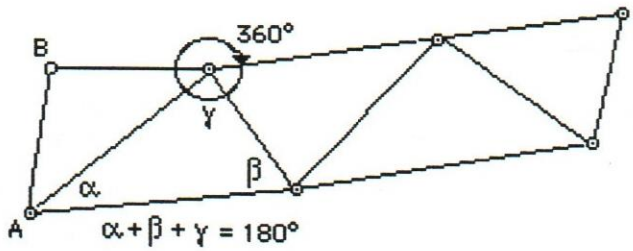
De estas expresiones se deduce que si el área de un triángulo es pequeña, el error por exceso esférico es insignificante. Se estima que para un área de 30 km^2, el exceso esférico es de 1", que debe repartirse en 3 ángulos. Los lados para esa área serían de 5900 mts, suponiendo que dicha área corresponda a un triángulo casi equilátero. Visuales de casi 6 km son poco frecuentes y bastante incómodas, por lo que usualmente no se presentan. En estos casos, el exceso esférico puede ignorarse, ya que su valor será siempre mucho menor que los errores accidentales que puedan cometerse al medir los ángulos. Sólo se aplica en las grandes cadenas continentales que abarcan áreas muy grandes.

5.7 Ajuste de una cadena de triángulos

En las cadenas de 1er orden, el ajuste se hace simultáneamente por el método de los mínimos cuadrados. Usualmente, el Ingeniero Civil no está involucrado en el cálculo de dichas cadenas. En las cadenas de 2do o 3er orden, la cadena se ajusta en 2 etapas :

a) El ajuste por estación, que consiste en hacer que la suma de los ángulos alrededor de un vértice sea 360° .

b) El ajuste por figura, que consiste en hacer que la suma de los ángulos en cada triángulo sea 180° .

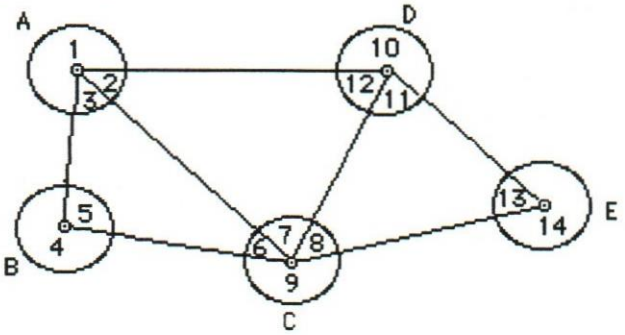


Este método de cálculo presupone que todos los ángulos son medidos en la misma forma y circunstancias. En caso contrario, debe adoptarse el método de las lecturas ponderadas que se expone en el Tema 6 siguiente, asignando a cada lectura un determinado peso, como cuando en cada lectura se han hecho diferente número de repeticiones. No es admisible la adopción de pesos aleatorios.

La precisión del ajuste depende de la precisión con que se haya medido la linea base AB y los ángulos, porque al calcular un triángulo en base a otro adyacente, los errores se trasladan.

Ejemplo

Considerando la cadena de triángulos del esquema, en el cual, por comodidad, los ángulos aparecen numerados :



AJUSTE POR ESTACION

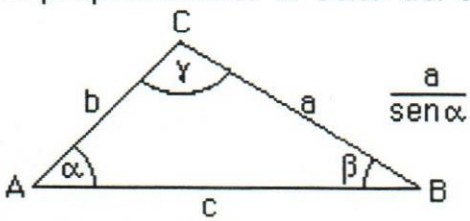
Estación	Angulo	Lectura	Ajuste
A	1	240°19'00"	240°18'50"
	2	73°31'10"	73°31'00"
	3	46°10'20"	46°10'10"
		360°00'30"	360°00'00"
B	4	267°12'20"	267°12'25"
	5	92°47'30"	92°47'35"
		359°59'50"	360°00'00"
C	6	41°02'00"	41°01'55"
	7	63°10'40"	63°10'35"
	8	74°43'10"	74°43'05"
	9	181°04'30"	181°04'25"
		360°00'20"	360°00'00"
D	10	260°33'00"	260°32'50"
	11	56°09'00"	56°08'50"
	12	43°18'30"	43°18'20"
		360°00'30"	360°00'00"
E	13	49°07'50"	49°07'50"
	14	310°52'10"	310°52'10"
		360°00'00"	360°00'00"

AJUSTE POR FIGURAS

Triángulo	Angulo Nr.	Angulo ajustado por estaciones	Angulo ajustado por figura
ABC	3	46°10'10"	46°10'16"
	5	92°47'35"	92°47'42"
	6	41°01'55"	41°02'02"
		179°59'40"	180°00'00"
ACD	2	73°31'00"	73°31'02"
	7	63°10'35"	63°10'37"
	12	43°18'20"	43°18'21"
		179°59'55"	180°00'00"
CDE	8	74°43'05"	74°43'10"
	11	56°08'50"	56°08'55"
	13	49°07'50"	49°07'55"
		79°59'45"	180°00'00"

En este ejemplo, los ángulos son precisos hasta el segundo y los errores se reparten también en segundos enteros. Cuando el error a repartir no resulta en segundos enteros, se reparte en números enteros y el segundo adicional se le asigna aleatoriamente a cualquiera de ellos. Cuando el ajuste se hace con un programa de computación, éste reparte el error en segundos fraccionados, pero como las fracciones se redondean, la asignación es automática.

La longitud de los lados se calcula con la ley de los senos, según la cual los lados son proporcionales al seno del ángulo opuesto



$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Si se supone que en la figura anterior el lado AB es de 300 mts, se calcula el lado AC por 2 rutas posibles :

AC = 300 x sen92°47'42" / sen41°02"02" = 456,4215
BC = 300 x sen46°10'06" / sen41°02'02" = 329,6597
AC = 329,6597 x sen92°47'42" / sen46°19'16" = 456,4215

Se calcula luego el lado DC en base a la longitud calculada del lado AC y finalmente el lado DE, en base a la longitud calculada del lado DC.

El procedimiento es fácilmente programable, por lo que, en levantamientos topográficos que deben abarcar áreas muy extensas, este método es superior al de una poligonal base.

5.8 Ajuste de un cuadrilátero

Al calcular el lado de un cuadrilátero que es adyacente a otro, éste sirva de base para el cálculo del siguiente, por lo cual los errores que se cometan, se trasladan.

El ajuste de un cuadrilátero debe cumplir con 5 condiciones, 4 por razones geométricas y 1 por razón trigonométrica.

Condiciones geométricas

1) La suma de los ángulos alrededor de cada estación debe ajustarse de manera que sea 360°.

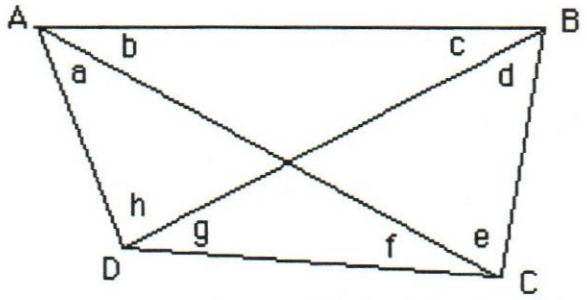
2) La suma de los ángulos interiores de un polígono cerrado debe ser igual a (n - 2)180°, en la cual n es el número de lados. Como sólo trataremos con un cuadrilátero, dicha suma debe ser igual a 360°.

3) La suma de los ángulos interiores de cada triángulo debe ser 180°.

4) Los ángulos opuestos por el vértice que resultan en la intersección de las diagonales, deben ser iguales.

Condición trigonométrica

5) Debe satisfacerse la condición trigonométrica por la cual los senos de los ángulos de cada triángulo sean proporcionales a las longitudes de los lados opuestos a ellos (Ley del seno). En este ajuste se requiere que, al calcular la longitud de un lado a partir de otro conocido, el resultado sea igual, por cualquiera de las cuatro posibles rutas para realizar el cálculo, como se verá más adelante.



Condición Geométrica

Cuando se han medido los ángulos de un cuadrilátero, (8 en total) resultan 4 triángulos superpuestos, en la figura ABC, ACD, ABD y BCD. En cada uno de ellos, la suma de sus ángulos debe ser igual a 180°.

En el triángulo ABC	$b + c + d + e = 180°$	Ecuación Nr. 1
En el triángulo ACD	$a + f + g + h = 180°$	Ecuación Nr. 2
En el triángulo ABD	$a + b + c + h = 180°$	Ecuación Nr. 3
En el triángulo BCD	$d + e + f + g = 180°$	Ecuación Nr. 4

Además, la suma de todos ellos debe ser igual a 360°

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 360° \quad \text{Ecuación Nr. 5}$$

Los ángulos opuestos por el vértice en las diagonales deben ser iguales

$$b + c = f + g \quad \text{Ecuación Nr. 6}$$
$$d + e = a + h \quad \text{Ecuación Nr. 7}$$

Se observa que la ecuación 6 es igual a la diferencia entre las ecuaciones 2 y 3 y la ecuación 7 es igual a la diferencia entre las ecuaciones 2 y 4.

Si tres de estas ecuaciones se satisfacen, necesariamente se satisfacen también las otras cuatro.

De estas 7 ecuaciones, las más convenientes son las Nr. 5, 6 y 7 porque involucran a todos los ángulos.

El procedimiento es como sigue :

Condición geométrica :

a) Se ajustan los ángulos alrededor de cada estación de manera que sumen 360°.

b) Con los ángulos así ajustados, se plantea la ecuación 5 y se resta el resultado de 360°. Se divide la diferencia entre 8 y se ajustan los 8 ángulos por igual.

c) Se aplican a la ecuación 6 los ángulos ajustados en la ecuación 5 y se divide la diferencia por 4. La corrección se suma a cada uno de los ángulos de la pareja cuya suma sea menor y se resta a cada uno de los ángulos de la pareja cuya suma sea mayor. Se procede igual con los ángulos de la ecuación 7.

De esta manera, el resultado de la ecuación 5 no se altera y se satisface la condición geométrica para el ajuste del cuadrilátero.

Condición trigonométrica

Si en el cuadrilátero del esquema anterior, se conoce la longitud del lado AB y se debe calcular la longitud del lado CD, se pueden elegir 4 rutas diferentes :

a) Con el triángulo ABC, se calcula la diagonal AC y luego, con esa diagonal se resuelve el triángulo ACD para calcular el lado CD.

b) Con el mismo triángulo ABC, se calcula el lado BC y luego, con ese lado se resuelve el triángulo BCD para calcular el lado CD.

c) Con el triángulo ABD, se calcula la diagonal BD y luego, con esa diagonal se resuelve el triángulo BCD para calcular el lado CD.

d) Con el mismo triángulo ABD, se calcula el lado AD y luego, con ese lado se resuelve el triángulo ACD para calcular el lado CD.

La escogencia de la ruta se debe basar en la solidez de la cadena de triángulos que la conforman. Como el proceso es programable en computadora, es práctica común calcular el lado requerido por las 4 rutas posibles y aceptar el promedio como valor más probable.

Supongamos que se elige la ruta (d) del esquema anterior. Resulta entonces

$$AD = AB\frac{sen(c)}{sen(h)} \; ; \; CD = AD\frac{sen(a)}{sen(f)} = AB\frac{sen(a)\times sen(c)}{sen(f)\times sen(h)}$$

Si se sigue la ruta (b), se tiene :

$$BC = AB\frac{sen(b)}{sen(e)} \; ; \; CD = BC\frac{sen(d)}{sen(g)} = AB\frac{sen(b)\times sen(d)}{sen(e)\times sen(g)}$$

Igualando estas dos ecuaciones para CD, se obtiene la <u>ecuación 8</u>

$$\frac{sen(a)\times sen(c)}{sen(f)\times sen(h)} = \frac{sen(b)\times sen(d)}{sen(e)\times sen(g)} \quad ; \quad \frac{sen(a)\times sen(c)\times sen(e)\times sen(g)}{sen(f)\times sen(h)\times sen(b)\times sen(d)} = 1$$

Se plantea esta ecuación con los logaritmos de los senos, porque así se obtiene una ecuación igualada a 0, más fácil de programar :

<u>Ecuación 8</u>

$$[\log sen(a) + \log sen(c) + \log sen(e) + \log sen(g)] -$$
$$[\log sen(f) + \log sen(h) + \log sen(b) + \log sen(d)] = 0$$

Los ángulos, ya ajustados por geometría, se aplican a esta ecuación 8 y se encuentra la diferencia entre las dos sumas de los logaritmos. Se pueden usar varios sistemas para ajustar esta diferencia. El método de los mínimos cuadrados daría el valor seguro más probable para estos ángulos, pero es demasiado elaborado para las cadenas que se utilizan usualmente en Ingeniería Civil.

El método que se describe a continuación, produce resultados suficientemente seguros para todo efecto práctico :

1) Se tabulan los logaritmos de los senos de los ángulos ajustados.

2) Se obtiene la diferencia entre las dos sumas de logaritmos de la ecuación 8 y se divide por 8 para obtener el promedio, que llamamos A, expresado en unidades del sexto decimal de su logaritmo.

3) Se tabulan las diferencias logarítmicas para una variación de +1" en cada ángulo y se suman sus valores absolutos, se divide por ocho para obtener el promedio que llamamos B, expresado en unidades del sexto decimal de su logaritmo.

4) La relación A/B es la corrección en segundos que se aplica a cada ángulo. Se suma esta corrección a los ángulos cuya suma de logaritmos sea menor y se resta a los ángulos cuya suma de logaritmos sea mayor.

   Debe tomarse en cuenta que los senos de los ángulos mayores de 90° decrecen a medida que el ángulo aumenta. La ocurrencia de ángulos obtusos en un triángulo, aunque posible, no es probable, si se ha escogido la forma del cuadrilátero correctamente, por su solidez. No obstante, de ocurrir esto, el procedimiento descrito se aplica igualmente, siendo el error que se introduce insignificante.

   Este procedimiento no altera las ecuaciones 5, 6 y 7 del ajuste geométrico.

EJEMPLO :

Para un cálculo con programas en computadora, es necesario que los ángulos se anoten según un orden previamente establecido en el programa.

Supongamos que éstos son los ángulos de un cuadrilátero, tabulados como en la figura anterior y previamente ajustados en cada vértice.

Ajuste por la ecuación 5

a)	38°44'06"	El orden de anotación corresponde al esquema anterior.
b)	23°44'38"	
c)	42°19'09"	
d)	44°52'01"	
e)	69°04"21"	
f)	39°37'48"	
g)	26°25'51"	
h)	75°12'14"	
	360°00'08"	

La suma de los ángulos tiene un exceso de 8". Se resta 1" a cada uno de los ángulos.

Ajuste por la ecuación Nr. 6 $b + c = f + g$

Con los ángulos ajustados por la ecuación 5 :

b =	23°44'37" - 2"	=	23°44'35"
c =	42°19'08" - 2"	=	42°19'06"
	66°03'45"		66°03'41"
f =	39°37'47" + 2"	=	39°37'49"
g =	26°25'50" + 2"	=	26°25'52"
	66°03'37"		66°03'41"

La diferencia de 8" se divide entre 4 y se corrigen los 4 ángulos por 2", sumando la corrección a los ángulos f y g, y restándola a los ángulos b y c. Así se corrige el error , sin afectar la ecuación 5 .

Ajuste por la ecuación Nr 7 $d + e = a + h$

d =	44°52'00" - 0,5"	=	44°51'59",5
e =	69°04'20" - 0,5"	=	69°04'19",5
	113°56'20"		113°56'19"
a =	38°44'05" + 0,5"	=	38°44'05",5
h =	75°12'13" + 0,5"	=	75°12'13",5
	113°56'18"		113°56'19"

La diferencia encontrada de 2" se divide entre 4, siendo la corrección de 0,5" , la cual se aplica con el mismo criterio que en la ecuación 6 .

Ajuste por la ecuación Nr. 8

Los ángulos ajustados por la condición geométrica, se aplican a la ecuación 8, tabulando los logaritmos de dichos ángulos y su variación por +1"

			log sen()+1"	Dif
(a)	log seno(38°44'05",5)	= 9,796 37822	9,796 38085	2,63
(c)	log seno(42°19'06")	= 9,828 17581	9,828 17812	2,31
(e)	log seno(69°04'19",5)	= 9,970 36108	9,970 36189	0,81
(g)	log seno(26°25'52")	= 9,648 47855	9,648 48279	4,24
		9,243 39366		
(b)	log seno (23°44'35")	= 9,604 91233	9,604 91711	4,79
(d)	log seno (44°51'59",5)	= 9,848 47094	9,848 47306	2,12
(f)	log seno (39°37'49")	= 9,804 70568	9,804 70822	2,54
(h)	log seno (75°12'13",5)	= 9,985 35466	9,985 35521	0,56
		9,243 44360		20,00

Se calcula el valor absoluto de la diferencia entre las sumas de los logaritmos, expresada en su sexto decimal y se divide entre 8 :

9,243 44360 - 9,243 39366 = 0,000 04995 ≈ 49,95 / 8 = 6,24 = A

Se calcula la suma de las diferencias entre los logaritmos y los aumentados en 1", expresados en su sexto decimal y se divide entre 8

20 / 8 ≈ 2,5 = B

La corrección resulta entonces de 6,24 / 2,5 ≈ 2,5" , que se le suman a los ángulos a, c, e y g por ser la suma de sus logaritmos la menor y se le resta a los ángulos b, d, f y h, por ser la suma de sus logaritmos la mayor.

Los ángulos corregidos se suelen presentar en forma de tabla :

Ang.	Lecturas	Ajuste por Geometría		Ajuste por Trigonometría
		Ecuación 5	Ecuaciones 6 y 7	
a	38°44'06"	38°44'05"	38°44'05",5	38°44'08"
b	23°44'38"	23°44'37"	23°44'35"	23°44'32",5
c	42°19'09"	42°19'08"	42°19'06"	42°19'08",5
d	44°52'01"	44°52'00"	44°51'59",5	44°51'57"
e	69°04'21"	69°04'20"	69°04'19",5	69°04'22"
f	39°37'48"	39°37'47"	39°37'49"	39°37'46",5
g	26°25'51"	26°25'50"	26°25'52"	26°25'54",5
h	75°12'14"	75°12'13"	75°12'13",5	75°12'11"
Σ	360°00'08"	360°00'00"	360°00'00"	360°00'00"

Cálculo de las distancias

Se calcula la distancia CD del ejemplo anterior con AB = 500 mts.

RUTA A

Con ABC se calcula AC = 500 x sen(c + d)/sen(e) = 534.6659
Con ACD se calcula CD = 534,6659 x sen(a)/sen(g + h) = 341,5732

RUTA B

Con ABC se calcula BC = 500 x sen(b)/sen(e) = 215,5298
Con BCD se calcula CD = 215,5298 x sen(d)/sen(g) = 341,5732

RUTA C

Con ABD se calcula BD = 500 x sen(a + b)/sen(h) = 458.6258
Con BCD se calcula CD = 458,6258 x sen(d)/sen(e + f) = 341,5732

RUTA D

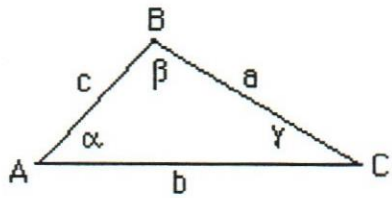
Con ABD se calcula AD = 500 x sen(c)/sen(h) = 348,1756
Con ACD se calcula CD = 348,1756 x sen(a)/sen(f) = 341,5732

Se observa que los resultados son precisos hasta el 4° decimal

5.9 Trilateración

La trilateración es muy semejante a la triángulación, con la diferencia de que la longitud de todos los lados de sus figuras se miden por medio de aparatos de rayos laser, sin necesidad de medir ángulos.

Conocidos los tres lados de un triángulo, es posible calcular sus ángulos interiores mediante la ley del coseno. Estos ángulos son necesarios para calcular los azimutes de los lados y posteriormente las coordenadas de los vértices.



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b \times c} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a \times c} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a \times b}$$

Los métodos de ajuste difieren un poco de los usados en triángulación, pero todos se basan en el cálculo de probabilidades. No son objeto de este curso.

UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

6 Teoría de los Errores

6.1 Introducción

Toda cantidad medida contiene errores de magnitud desconocida, debido a varias causas. Por lo tanto, ninguna medida es exacta. Debe obtenerse un valor que esté dentro de un rango que permita usarla en forma segura.

Por lo tanto, el ingeniero debe tener claro el concepto de los rangos aplicables en cada caso, porque dichos rangos inciden directamente en el costo de un levantamiento topográfico, que debe estar en concordancia con los requerimientos o la importancia de la obra que se va a proyectar sobre los planos producidos con ese levantamiento. El conocimiento de dichos rangos permite apreciar la incidencia de los errores en la calidad de los planos que se obtienen.

Se entiende por una medida segura, aquella que produce un valor que esté dentro del rango escogido previamente. En cambio, una medida precisa es aquella que se obtiene mediante un procedimiento muy elaborado, o en la forma como se presentan los resultados hechos con los cálculos de dichas medidas.

De lo expuesto se deduce que una medida puede ser segura, pero no precisa. También puede resultar al revés. Por ejemplo, una distancia puede ser medida al milímetro con cinta de acero que se tiene como precisa, pero puede resultar no segura por varias causas, como un defecto en la cinta, una lectura imprecisa de los ángulos verticales para su reducción a la horizontal, un nivel de burbuja defectuoso con el cual se pone la cinta horizontal, un manejo deficiente de la plomada con la cual se miden los intervalos, una aplicación incorrecta del coeficiente de dilatación por una apreciación poco precisa de la temperatura, entre otros.

6.2 Causas de los errores

Los errores se producen por tres causas principales :

a) Por imperfecciones o falta de ajuste y mantenimiento en los instrumentos que se utilizan para medir. Por ejemplo, una cinta de acero puede no tener la longitud correcta, o un nivel no estar ajustado. Se denominan errores instrumentales y producen errores sistemáticos

b) Por las limitaciones humanas en la percepción de factores que influyen en la precisión de las mediciones. Por ejemplo, apreciación visual de la fracción decimal en la lectura del vernier de un arco circular, apreciación incorrecta en la tensión de una cinta de acero, lectura de ángulos con un jalón que no esté vertical etc. Se denominan errores humanos, su variedad es muy grande y producen errores accidentales.

c) Por razones ambientales. Por ejemplo, cambios notables de temperatura durante un día de trabajo sin que se hayan registrado, cambios en la luminosidad que afecte la refracción. Producen errores accidentales.

Se debe presumir que los errores se cometen sin intención. No obstante, puede haber mistificación de los resultados intencionalmente, como cuando se adulteran las medidas para perjudicar deliberadamente un trabajo o cuando los datos de campo se modifican de tal manera que al ajustarlos, resulten errores dentro de los rangos exigidos, para ocultar incompetencia profesional.

6.3 Errores sistemáticos

El error acumulado de un error sistemático constante es la suma de los errores cometidos en cada medición. Así, el lado de una poligonal medida con una cinta alargada, el error total será directamente proporcional a la longitud en exceso de dicha cinta.

Ejemplo :

Se ha medido el lado de una poligonal con una cinta de acero, cuya longitud nominal es de 50 mts. Al comparar esta cinta con la cinta patrón normal, se encuentra que la cinta empleada tiene 50,01 mts. Si la longitud medida fué de 548,13 mts, la longitud real se calcula así

El error en cada cintada es de 50,01 - 50 = 0,01 m . El error total será:

(548,13/50) x 0,01 = 0,11 m

La longitud correcta es de 548,13 + 0,11 = 548,24 mts

Si en esa misma cinta se descubre luego que le faltan 10 cm en su extremo final, la corrección sería :

Cantidad de cintadas 548,13/50 = 10,96 ; 10 cintadas completas
Error en cintadas completas = 10 x 0,1 = 1,00
La longitud total del lado es entonces 500 + 1 + 48,24 = 549,24 metros

Si después de calcular la distancia corregida por el alargamiento de la cinta, se descubre que la cinta se habia roto en la marca de 27,30 mts, y al empatar la cinta se han perdido 10 cms, la distancia correcta se calcula así :

Cintadas completas 548,24/50 = 10 Pero como en la fracción de 48,24 está comprendido el empate :

48,24/27,3 = 1,77 > 1, las cintadas con el error del empate serán 11 y por lo tanto, la distancia corregida será :

548,24 - 11 x 0,1 = 547,14 metros

Pero si la distancia medida con la cinta anterior es de 518,13 metros, la distancia correcta será de :

Cintadas completas 518,13/50 = 10

En la fracción de 18,13 mts no está comprendido el error del empate porque 18,13/27,3 = 0,66 < 1 , las cintadas completas son sólo 10 y la distancia correcta será de

518,13 + (518,13/50) x 0,01 - 10 x 0,01 = 517,234 mts

Los errores sistemáticos pueden variar a lo largo de una medición, de acuerdo a varios motivos. En tal caso, el error total cometido es la suma algebráica de los errores cometidos en cada medición.

Ejemplo :

Una poligonal de tres lados, se ha medido con la cinta de 50 mts del ejemplo anterior, así:

Lado A	321,46 mts
Lado B	538,75 "
Lado C	436,08 "
Total	1.296,29 mts

Por efecto de las variaciones de la temperatura, la longitud de la cinta en los tres tramos, por coeficiente de dilatación, ha variado así:

Lado A	50,01 + 0,01 = 50,02	Error = 50,02 - 50 = 0,02
Lado B	50,01 - 0,02 = 49,99	Error = 49.99 - 50 = - 0,01
Lado C	50,01 + 0,02 = 50,03	Error = 50,03 - 50 = 0,03

El error total acumulado será entones :

Lado A	(321,46/50) x 0,02	= 0,13
Lado B	(538,75/50) x -0,01	= - 0,11
Lado C	(436,08/50) x 0,03	= 0,26
	Total	= 0,28

La longitud real de la poligonal es de 1.296,29 + 0,28 = 1,296, 57 mts

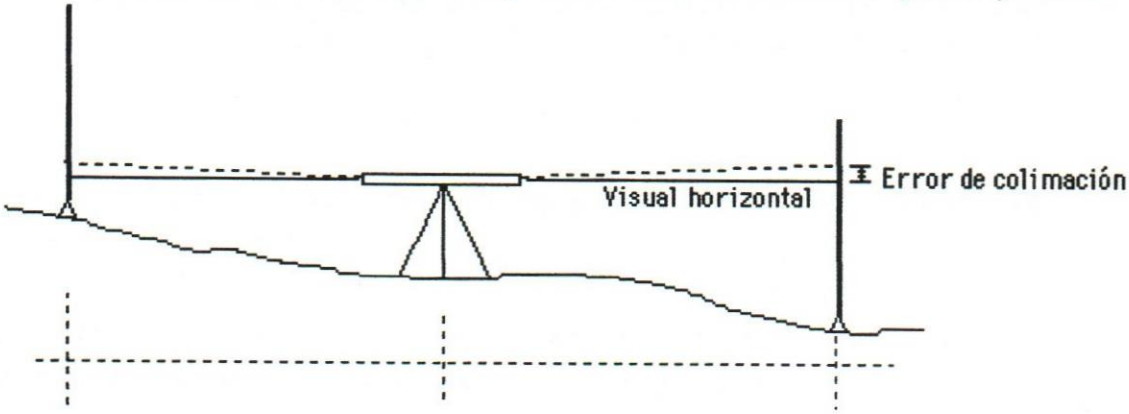
Lo expuesto se refiere al mismo tipo de mediciones. No pueden considerarse conjuntamente mediciones de longitudes con medidas de ángulos o de desniveles.

La ocurrencia de los errores sistemáticos obedecen a una ley. El conocimiento de dicha ley es imprescindible para corregirlos.

En la lectura de ángulos, puede suceder un error sistemático por un desajuste en la linea de colimación en el telescopio del teodolito. Tal error puede corregirse mediante la doble lectura con el telescopio directo e invertido, tomando como segura, el promedio aritmético de ambas lecturas, si la discrepancia no es muy grande. Esta discrepancia individual no debe ser mayor que la mitad de la lectura mínima directa en el círculo graduado. En el caso de que la discrepancia sea mayor, esa lectura debe descartarse y repetirse. Un teodolito mal nivelado también produce este tipo de error. Cuando el aparato está expuesto al sol, el calor puede provocar dilataciones diferenciales que lo desnivelen. Por ello, debe usarse una sombrilla que lo proteja. Algunas veces es

conveniente volver a centrar y nivelar el aparato. Si la discrepancia persiste, debe ajustarse el aparato.

En las nivelaciones, el error sistemático de colimación puede compensarse procurando que las distancias entre el nivel y las distancias a las miras adelante y atrás sea lo mas semejante posible.



Es posible detectar el error de colimación de un nivel, moviendo el aparato a un sitio muy próximo a una de las estaciones de cambio. La discrepancia con la lectura hecha en la posición anterior no debe ser mayor que el doble de la lectura directa *mínima en la* mira, que es de un centímetro. Si se tiene cuidado de montar el nivel aproximadamnte equidistante entre las estaciones de cambio, el error de colimación no influye en la seguridad del desnivel medido. No obstante, no es buena práctica trabajar con un nivel desalineado, porque pueden producirse errores que no se detecten.

En las mediciones taquimétricas, al igual que en la comparación de una cinta de acero con otra cinta patrón, los números y las divisiones de la mira deben ser comprobados minuciosamente. Debe tomarse en cuenta que este tipo de error no se puede detectar al observar la mira por el telescopio del aparato, porque generalmente sólo se puede ver una pequeña porción de la misma. La mayor parte de las miras se pueden doblar con una o tres bisagras, que si no están bien firmes, producen errores de observación en los interceptos leídos.

6.4 Errores accidentales:

Los errores accidentales, como su nombre lo indica, son errores de medición puntuales, cuyos efectos no se acumulan, pero si se reflejan en el error total del trabajo. Estos errores pueden tener signos contrarios en las varias mediciones y puede suceder que se anulen.

Se puede demostrar por medio del cálculo de probabilidades que los errores accidentales tienden a aumentar en proporción a la raíz cuadrada del número de oportunidades en las cuales se pudo cometer.

Se concluye entonces que, en una serie de medidas independientes pero relacionadas, los errores accidentales inciden menos en el error total, que los errores sistemáticos de la misma magnitud.

De acuerdo a la ley de probabilidades, debe tenerse presente que :

a) Los errores pequeños son más frecuentes que los errores grandes.
b) Errores muy grandes no ocurren sin ser detectados.
c) Los errores pueden ser positivos o negativos.
d) El valor más seguro de una medición es el promedio aritmético de una cantidad muy grande de observaciones de la misma medida hechas en las mismas circunstancias.

6.5 Corrección de los errores accidentales

Los errores accidentales no obedecen a una ley que permita una corrección sencilla. Por lo tanto, para reducirlos a un valor aceptable, es necesario utilizar técnicas de observación que se exponen a continuación.

Discrepancia:

Toda medición debe ser hecha por lo menos dos veces. Si la discrepancia entre ambas medidas es pequeña, se puede aceptar como segura el promedio aritmético de ambas. Esto aplica, tanto a mediciones de longitud como a la lectura de ángulos.

En las mediciones taquimétricas, las lecturas deben hacerse en cada estación, hacia adelante y hacia atrás . La práctica muy común de hacer lecturas saltando una estación y leer en retroceso la estación saltada para economizar tiempo, puede producir errores accidentales graves, sin posibilidad de ser detectados.

En las observaciones solares o estelares, la serie de ángulos necesarios deben ser leídos en un tiempo muy breve, porque en las fórmulas que se utilizan, se presume que la variación de la declinación del astro es uniforme en el tiempo, lo cual no es cierto.

Cuando se realizan nivelaciones trigonométricas (Cálculo de desniveles con las distancias medidas inclinadas y los ángulos verticales correspondientes) , las lecturas deben hacerse en ambos sentidos y deben ser hechas en un tiempo lo más breve posible (Si posible, con dos observadores simultáneamente) de manera que las condiciones de luminosidad, temperatura y humedad sean semejantes.

Cuando se hace una nivelación, ella debe ser cerrada (Debe terminar en el mismo punto donde comenzó). De ser factible, las distancias entre los puntos de cambio deben ser razonablemente semejantes.

La nivelación de cierre debe ser hecha por un recorrido distinto al de la principal y en lo posible, las distancias entre los puntos de cambio deben ser semejantes a los de la nivelación principal.

Hay una práctica muy común de hacer el cierre de la nivelación, moviendo el aparato un metro o dos de su posición y tomar otras lecturas adelante y atrás con las miras en las mismas estaciones de cambio. Tal práctica, aunque teóricamente correcta, induce a error, porque necesariamente las lecturas son muy semejantes y pueden producirse errores humanos y de cálculo de alguna importancia.

Por lo expuesto, se deduce que los errores sistemáticos pueden reducirse a una cantidad insignificante. Los errores accidentales también pueden reducirse a cantidades seguras, mediante la aplicación de diversas técnicas en la lectura y ajuste de las mediciones.

En algunos ambientes, se le pide al topógrafo anotar en la libreta de campo, las condiciones ambientales, como sol, lluvia, nublado, neblina, terreno llano, pantanoso, inclinado, tipo de vegetación, el viento etc... En muchos casos se le exige la anotación de la hora, porque el cansancio tiene una marcada influencia en la producción de errores accidentales.

Debe tomarse en cuenta que la libreta de campo es un documento de fe pública, que se toma en cuenta para cualquier problema legal que pueda derivarse de un plano topográfico.

Se concluye entonces que el verdadero valor de una medida no puede conocerse. Lo importante es lograr un valor que pueda producir un resultado seguro, de acuerdo al rango de precisión requerido para cada tipo de trabajo.

6.6 Ajuste de los errores accidentales

El ajuste de los errores accidentales consiste en derivar de las medidas tomadas en el campo un valor confiable. En esos ajustes no se toman en consideración los errores sistemáticos, ya que debe suponerse que ellos han sido tomados en cuenta y reducidos a un valor insignificante. El ajuste se refiere solamente a los errores accidentales. En este ajuste están comprendidos los restos de los errores sistemáticos no compensados.

De acuerdo al cálculo de probabilidades, el valor probable de una serie de medidas es aquella que, calculada por el método de los mínimos cuadrados, tiene una mejor aproximación al valor verdadero de ella.

Si se mide una misma cantidad varias veces en las mismas circunstancias, el valor más probable de ella es el promedio aritmético de dichas medidas. Entre más lecturas se hagan, más seguro es el resultado.

Cuando se miden varias cantidades distintas, pero relacionadas, y cuya suma debe ser igual a una cantidad predeterminada, el valor más probable es aquel que se corrige, asignándole a cada valor una corrección igual al error total, dividido por el número de lecturas que se hayan hecho, independientemente del valor intrínseco de dichas lecturas. En topografía, esta regla solamente es aplicable a la suma de ángulos.

Por ejemplo, si alrededor de un punto se miden 3 ángulos horizontales, que deben sumar 360° , el error se ajusta así :

130°15'20"	- 10"	130°15'10"
142°37'30"	- 10"	142°37'20"
87°07'40"	- 10"	87°07'30"
360°00'30"	- 30"	360°00'00"

En este modo de repartir un error, puede haber un error mayor en una lectura particular que en las otras. Tal caso no es probable que ocurra si todas las lecturas se han hecho en las mismas circunstancias y se han repetido el mismo número de veces en cada una.

Supongamos que se han medido los ángulos de deflexión en una poligonal, cuyos azimutes inicial y final son 37°00'00" y 44°00'00", determinados por medio de observaciónes solares. Los ángulos medidos son :

	37°00'00"		
1	14°40'00"	-0°05'	14°35'00"
2	17°45'00"	-0°05'	17°40'00"
3	-16°25'00"	-0°05'	-16°30'00"
4	-8°40'00"	-0°05'	-8°45'00"
	44°20'00"		44°00'00"

En la suma de los ángulos medidos se han encontrado 20' en exceso a la suma que debería resultar. Este error, dividido por el número de oportunidades que hubo para cometer un error (4 en total), se resta a cada una de los ángulos medidos. El valor individual de cada uno de los ángulos ajustados es el valor más probable de ellos .

Si este modo de repartir el error se estuviera haciendo en distancias medidas con una determinada cinta de acero, es obvio que el método no puede aplicarse sino a las distancias parciales, que sean todas menores o iguales a la longitud de la cinta utilizada, porque en cada cintada puede haberse cometido un error.

Si la distancia medida es el resultado de varias cintadas, en la repartición del error debe aplicarse un factor que incluya el número de veces que se utilizó la cinta para cada una de las distancias medidas (Se supone ajustado el error sistemático de la medición)

Actualmente, cuando las distancias se han medido con rayos laser, este método si puede aplicarse al ajuste de las distancias porque, al igual que en los ángulos, la oportunidad de cometer un error accidental es una sola para cada medición.

6.7 Determinación del error probable

En una serie de lecturas de la misma distancia, hechas en las mismas circunstancias, si se obtienen valores distintos para cada lectura, el valor probable de dicha distancia es el promedio aritmético de dichas lecturas. Con las diferencias entre cada lectura y dicho promedio, se puede determinar el error probable mediante el método de los mínimos cuadrados, desarrollado según el cálculo de probabilidades. El ingeniero es solamente usuario de dicho método y por lo tanto se omite el desarrollo de las fórmulas que se utilizan.

Supongamos que se han medido los ángulos de deflexión en una poligonal, cuyos azimutes inicial y final son 37°00'00" y 44°00'00", determinados por medio de observaciónes solares. Los ángulos medidos son :

	37°00'00"		
1	14°40'00"	-0°05'	14°35'00"
2	17°45'00"	-0°05'	17°40'00"
3	-16°25'00"	-0°05'	-16°30'00"
4	-8°40'00"	-0°05'	-8°45'00"
	44°20'00"		44°00'00"

En la suma de los ángulos medidos se han encontrado 20' en exceso a la suma que debería resultar. Este error, dividido por el número de oportunidades que hubo para cometer un error (4 en total), se resta a cada una de los ángulos medidos. El valor individual de cada uno de los ángulos ajustados es el valor más probable de ellos .

Si este modo de repartir el error se estuviera haciendo en distancias medidas con una determinada cinta de acero, es obvio que el método no puede aplicarse sino a las distancias parciales, que sean todas menores o iguales a la longitud de la cinta utilizada, porque en cada cintada puede haberse cometido un error.

Si la distancia medida es el resultado de varias cintadas, en la repartición del error debe aplicarse un factor que incluya el número de veces que se utilizó la cinta para cada una de las distancias medidas (Se supone ajustado el error sistemático de la medición)

Actualmente, cuando las distancias se han medido con rayos laser, este método si puede aplicarse al ajuste de las distancias porque, al igual que en los ángulos, la oportunidad de cometer un error accidental es una sola para cada medición.

6.7 Determinación del error probable

En una serie de lecturas de la misma distancia, hechas en las mismas circunstancias, si se obtienen valores distintos para cada lectura, el valor probable de dicha distancia es el promedio aritmético de dichas lecturas. Con las diferencias entre cada lectura y dicho promedio, se puede determinar el error probable mediante el método de los mínimos cuadrados, desarrollado según el cálculo de probabilidades. El ingeniero es solamente usuario de dicho método y por lo tanto se omite el desarrollo de las fórmulas que se utilizan.

Ejemplo:

Se han realizado 10 lecturas taquimétricas para una misma distancia, con los siguientes resultados :

Lectura	| d |	d^2
2,467	0,002	0,000004
2,460	0,005	0,000025
2,469	0,004	0,000016
2,465	0,000	0,000000
2,461	0,004	0,000016
2,471	0,006	0,000036
2,463	0,002	0,000004
2,466	0,001	0,000001
2,460	0,005	0,000025
2,468	0,003	0,000009
24,650	$\sum$ 0,032	$\sum$ 0,000136

Promedio aritmético de las lecturas = 24,650 / 10 = 2.465

Por la fórmula (1), $E = 0{,}6745\sqrt{\frac{0{,}000136}{9}} = \pm\, 0{,}00262$

La precisión obtenida es 2,465/0,00262 $\approx$ 1 : 940 que está en el rango aceptable para mediciones taquimétricas.

El error probable en el promedio aritmetico es :

Por la fórmula (2), $Em = \frac{0{,}00262}{\sqrt{10}} = 0{,}00083$

Lo cual indica que este promedio aritmético es un valor confiable.

Cuando una lectura tenga una diferencia exagerada con respecto al promedio debe desecharse, porque en ella es probable que haya ocurrido un error accidental fuera de los normal. Solamente el ingeniero a cargo puede decidir las lecturas que deben desecharse.

El error probable en la suma de lecturas que tengan todas el mismo error probable, es igual al error probable de una observación multiplicada por la raíz cuadrada del número de lecturas (Oportunidades de error) $Es = E\sqrt{n}$

Si se mide una distancia de 545,35 mts con una cinta de 50 mts, en la cual se acepta un error probable de 0,01, el error probable de la medición será :

Error probable = $0{,}01\sqrt{(545{,}35 / 50)} = 0{,}033$ mts

El error probable admisible, que debe fijar el ingeniero, permite formar criterio acerca del método para obtener las lecturas, con un considerable ahorro de tiempo y costos.

Los métodos descritos son aplicables solamente a lecturas que tengan la misma confiabilidad. Para ello se requiere lo siguiente :

a) Que todas las lecturas sean hechas por el mismo operario y su equipo.
b) Que todas las lecturas sean hechas con el mismo instrumento.
c) Que el instrumento no haya tenido ajustes en el curso de las lecturas.
d) Que el medio ambiente se haya mantenido razonablemente uniforme.

En caso de que estas condiciones no se cumplan, es prudente hacer los cálculos teniendo en cuenta que todas las lecturas pueden tener diferentes grados de confiabilidad.

6.8 Lecturas con diferentes grados de confiabilidad

Para manejar lecturas que tengan diferentes grados de confiabilidad, es necesario asignarle **peso** a cada grupo de ellas.

Por ejemplo, si se ha medido repetidamente un ángulo sin las circunstancias mencionadas anteriormente, pero puede suponerse que todas ellas han sido hechas con el mismo cuidado y que una medición se repitió 2 veces, otra se repitió tres veces y la última se repitió 4 veces, es obvio que la tercera serie tiene 2 veces más peso que la primera serie.

En general, puede asumirse que la confiabilidad de una medición es proporcional al número de repeticiones con las que se haga. El peso es comparativo, no absoluto, algunas veces es meramente subjetivo, y por ello su adopción exige una larga experiencia en el ingeniero que los adopte, un buen conocimiento de la competencia del personal a su cargo, de los instrumentos de que dispone y un buen conocimiento de las condiciones ambientales en las que se realizó cada parte del trabajo.

Si se conoce el error probable en vez del número de lecturas, el peso puede estimarse de la siguiente manera:

Suponiendo que todas las lecturas han sido hechas con el mismo cuidado, los pesos varían directamente proporcionales al número de repeticiones y que los errores probables promedio varían inversamente proporcionales a la raíz cuadrada del número de lecturas. Por lo tanto, se deduce que los pesos son inversamente proporcionales al cuadrado de los errores probables correspondientes.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{E_2^2}{E_1^2}$$

En la cual P son los pesos asignados, y E los errores probables correspondientes. Para cualquier número de medidas, esta ecuación puede escribirse así :

$$P_1 \times E_1^2 = P_2 \times E_2^2 = P_3 \times E_3^2 \ldots\ldots$$

6.9 Ajuste de lecturas ponderadas

Si se conocen los pesos, adoptados por alguno de los procedimientos descritos, se pueden determinar los valores más probables. Se presentan dos casos, el de la misma cantidad y el de las cantidades relacionadas :

a) Ajuste de las lecturas de la misma cantidad

Una medida para la cual se han hecho lecturas con diferentes grados de confiabilidad, el valor más probable es el promedio ponderado de dichas lecturas. Este promedio se obtiene, multiplicando cada lectura por su peso y dividiendo la suma de esos productos por la suma de los pesos aplicados.

Ejemplo:

Se han hecho varias lecturas de un mismo ángulo, con el mismo cuidado pero con diferente número de repeticiones por lo que el peso de cada una de las lecturas es proporcional al número de repeticiones. Así :

1	47°37'40"	1 repetición	x 1	47°37'40"
2	47°37'22"	4 repeticiones	x 4	47°37'88"
3	47°37'30"	9 repeticiones	x 9	47°37'270"
			14	398"

El valor más probable ponderado es 398" / 14 = 28" 47°37'28"

Si las repeticiones son otras, se tiene :

1	47°37'40"	2 repeticiónes	x 1	47°37'40"
2	47°37'22"	4 repeticiones	x 2/4	47°37'11"
3	47°37'30"	8 repeticiones	x 2/8	47°37'02",25
			1,75	53,25

53,25/1,75 = 30",43 Valor más probable ponderado = 47°37'30"

Soló se han multiplicado los segundos porque alli estaba la diferencia

Ejemplo:

Se han corrido nivelaciones por 4 rutas diferentes para calcular el desnivel entre dos puntos y a cada una de ellas se le asigna un error probable.

Si a la primera corrida se le asigna un peso de 1, los pesos de las otras pueden ser calculados con la proporción anotada anteriormente:

		E	P	
1	721,05	±0,02	1	721,05
2	721,37	±0,04	0,25	180,34
3	720,62	±0,05	0,16	115,30
4	721,67	±0,10	0,04	28,87
			1,45	1045,56

$P_2 = 0{,}02^2/0{,}04^2 = 0{,}25$
$P_3 = 0{,}02^2/0{,}05^2 = 0{,}16$
$P_4 = 0{,}02^2/0{,}10^2 = 0{,}04$

El valor más probable ponderado es 1045,56 / 1,45 = 721,08

Para calcular el error probable según el valor probable ponderado se utiliza la fórmula anterior :

$$Em = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma P \times d^2}{\Sigma P \times (n-1)}}$$

		| d |	d^2	P	P x d^2
1	721,05	0,03	0,0009	1	0,0009
2	721,37	0,29	0,0841	0,25	0,0210
3	720,62	0,46	0,2116	0,16	0,0339
4	721,67	0,59	0,3481	0,04	0,0139
				1,45	0,0697

$$Em = 0{,}6745 \sqrt{\frac{0{,}0697}{1{,}45(4-1)}} = 0{,}0854$$

b) Ajuste de lecturas relacionadas

Cuando la suma de varias lecturas que tienen diferentes pesos deba ser igual a un determinado valor, los valores más probables son las lecturas leídas, ajustadas cada una en una proporción adecuada a las discrepancias o al error total . Estas correcciones son inversamente proporcionales a los pesos :

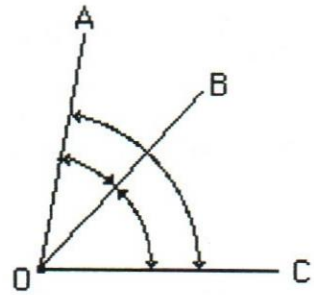
$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

Para cualquier número de lecturas relacionadas, la ecuación anterior es:

$$P_1 \times C_1 = P_2 \times P_2 = P_3 \times C_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ejemplo :

Los ángulos AOB y BOC y el ángulo total AOC se han medido en las mismas circunstancias, pero cada uno con diferentes repeticiones. (AOB + BOC = AOC)



			Peso
1	23°46'00"	1 repetición	1,00
2	59°14'27"	4 repeticiones	0,25
3	83°01'07"	5 repeticiones	0,20
			1,45

La discrepancia entre la suma de los ángulos y el que los relaciona es :

(23°46'00" + 59°14'27") - 83°01'07" = -0°00'40"

Por lo tanto, los ángulos corregidos son

1 23°46'00" + 40" x 1/1,45 = 23°46'28"
2 59°14'27" + 40" x 0,25/1,45 = 59°14'34"
83°01'02"

3 83°01'07" - 40" x 0,20/1,45 = 83°01'02" Resultado verificado

Siendo las correcciones inversamente proporcionales a los pesos y estos a su vez son inversamente proporcionales a los cuadrados de los errores probables, se concluye que las correcciones son directamente proporcionales a los cuadrados de los errores probables :

$$\frac{C_1}{E_1^2} = \frac{C_2}{E_2^2}$$

Ejemplo :

Las lecturas de 3 ángulos medidos alrededor de un punto deben sumar 360° . Los errores probables asignados, son los siguientes :

AOB	130°15'20"	±2"
BOC	142°37'30"	±4"
COA	87°07'40"	±6"
	360°00'30"	

AOB	2"	1	1	30 x 1 / 14 =	2"
BOC	4"	2	4	30 x 4 / 14 =	9"
COA	6"	3	9	30 x 9 / 14 =	19"
			14		30"

Por lo tanto, los valores más probables para los ángulos medidos, son los siguientes :

AOB	130°15'20"	- 2"	= 130°15'18"
BOC	142°37'30"	- 9"	= 142°37'21"
COA	87°07'40"	- 19"	= 87°07'21"
			= 360°00'00"

Si en cambio se conoce el número de repeticiones con las cuales se han medido los ángulos internos de un triángulo, el ajuste se calcula así:

40°25'12"	4 repeticiones	Peso	= 1
109°16'20"	2 repeticiones	Peso 4/2	= 2
30°18'40"	5 repeticiones	Peso 4/5	= 0,8
180°00'12"			3,8

40°25'12" - 12 x 1/3,8	40°25'09"
109°16'20" - 12 x 2/3,8	109°16'14"
30°18'40" - 12 x 0,8/3,8	30°18'37"
	180°00'00"

UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

Tema 7 Ajuste de poligonales cerradas

7.1 Introducción

Una poligonal es cerrada cuando la medición de sus lados y ángulos termina en el mismo punto donde comenzó. Para ello se requiere que este punto inicial tenga coordenadas asignadas arbitrariamente o por otra forma cualquiera y que el primer lado tenga un azimut. Estos datos son necesarios para que, al compararlos con los calculados con las medidas tomadas en el campo, puedan calcularse los errores cometidos en las mediciones.

El ajuste de las mediciones en un polígono cerrado se realiza por sus condiciones geométricas y analíticas. Para ello, se asume que todas las distancias y ángulos han sido corregidos por errores sistemáticos y accidentales. Además, todas las distancias han sido reducidas a la horizontal.

7.2 Ajuste por condición geométrica

La suma de los ángulos de deflexión de un polígono cerrado debe ser igual a (n - 2) x180°, siendo n el número de vértices.

El error encontrado se reparte por partes iguales en todos los ángulos, por segundos enteros. En el caso de que la corrección no sea un número entero de segundos, se asigna a cada ángulo una corrección entera y el exceso de un segundo se le asigna aleatoriamente a cualquiera de ellos.

Cuando el ajuste se calcula mediante una computadora, el error se reparte uniformemente entre todos los ángulos, aún cuando la corrección sea con fracciones de segundo, ya que la computadora redondea automáticamente cada ángulo.

Los azimutes ajustados se calculan sumando en progresión aritmética al azimut inicial los ángulos de deflexión ajustados. Todos los ángulos de deflexión se suman, puesto que los ángulos medidos a la izquierda, se leen en retroceso a 360° . Por ej. si un ángulo a la izquierda es de 15° , se leerá 345° en el teodolito.

En la sumatoria de los ángulos de deflexión al azimut inicial, cada vez que dicha suma sea mayor de 360° se le resta dicha cantidad.

7.3 Ajuste por la condición analítica

Las sumas de las proyecciones de los lados de un polígono cerrado deben ser nulas.

Las proyecciones se calculan así :

Proyección Norte PN = Longitud del lado x coseno del azimut
Proyección Este PE = Longitud del lado x seno del azimut

El signo de cada proyección depende del signo del seno y el coseno del azimut, que son relativas al cuadrante donde esté ese azimut. Los errores son :

Error $\pm\Delta N = \sum PN$; Error $\pm\Delta E = \sum PE$

Si no hay error horizontal ΔN y ΔE son nulos.

El error de cierre horizontal es $E = \sqrt{(\Delta N^2 + \Delta E^2)}$. Si L es la suma de los lados del polígono, la precisión del cierre es:

Precisión = L/E que se expresa como quebrado 1 : Precisión

7.4 Ajuste del error horizontal en poligonales cerradas

El error horizontal se ajusta según 3 reglas.

1) Regla del Tránsito:

Según esta regla, los errores ΔN y ΔE se reparten en las proyecciones calculadas, en proporción al valor de ellas.

Se suman los valores absolutos de las proyecciones. Se divide el error por esa suma. Los factores de corrección resultantes deben tener signo contrario al de los errores calculados ΔN y ΔE.

Factor de ajuste para las proyecciones Norte $= -(\pm\Delta N/\sum [\,|PN|\,])$
Factor de ajuste para las proyecciones Este $= -(\pm\Delta E/\sum [\,|PE|\,])$

A cada proyección se le suma el producto del valor absoluto de ella por el factor de ajuste correspondiente:

Proyección Norte corregida = $\pm PN + |PN| \times$ factor N
Proyección Este corregida = $\pm PE + |PE| \times$ factor E

2) Regla del Compás :

Según esta regla, los errores se reparten en las proyecciones proporcionalmente a la longitud de los lados correspondientes. Los factores de corrección N y E se obtienen dividiendo el error entre la longitud total de la poligonal. El signo del factor de corrección es contrario al signo de los errores ΔN y ΔE.

Factor de ajuste para las proyecciones Norte $= -(\pm \Delta N/\sum (L))$
Factor de ajuste para las proyecciones Este $= -(\pm \Delta E/\sum (L))$

A cada proyección se le suma el producto del factor de ajuste por su distancia correspondiente.

Proyección Norte ajustada = $\pm PN + L \times$ factor Norte
Proyección Este ajustada = $\pm PE + L \times$ factor Este

3) Regla de Crandall

Esta regla es una aplicación de la distribución por mínimos cuadrados, desarrollada por el Prof. Crandall y adoptada universalmente.

Para ajustar la poligonal, es necesario calcular estos parámetros :

a) La sumatoria de los productos de las proyecciones dividida por la longitud de sus lados respectivos $\sum [PN \times PE/L]$

b) La sumatoria del cuadrado de las proyecciones Norte, dividida por la longitud del lado respectivo $\sum [PN^2/L]$

c) La sumatoria del cuadrado de las proyecciones Este, dividida por la longitud del lado respectivo $\sum [PE^2/L]$

Con estos 3 parámetros se calculan los factores de corrección A y B :

$$A = \frac{\Delta E \times \Sigma[PN \times PE/dist] - \Delta N \times \Sigma[PE^2/dist]}{(\Sigma PN^2/dist)(\Sigma PE^2/dist) - (\Sigma PN \times PE/dist)^2}$$

$$B = \frac{\Delta N \times \Sigma[PN \times PE/dist] - \Delta E \times \Sigma[PN^2/dist]}{(\Sigma PN^2/dist)(\Sigma PE^2/dist) - (\Sigma PN \times PE/dist)^2}$$

Estos parámetros se aplican a la corrección de cada proyección, así :

$$PN\ ajustada = \pm PN + A \times PN^2/dist + B \times PN \times PE/dist$$

$$PE\ ajustada = \pm PE + A \times PN \times PE/dist + B \times PE^2/dist$$

En las ecuaciones para el cálculo de los parámetros A y B, los denominadores de ambas son iguales.

En todos los casos se debe verificar que las sumas de las proyecciones ajustadas sea nula. Las coordenadas de los vértices de la poligonal se obtienen sumando en progresión aritmética las proyecciones ajustadas, comenzando por las coordenadas del 1er vértice.

El ingeniero responsable es quién fija la regla para ajustar los errores, según los siguientes criterios, que se basan principalmente en la calidad de los instrumentos de medición utilizados.

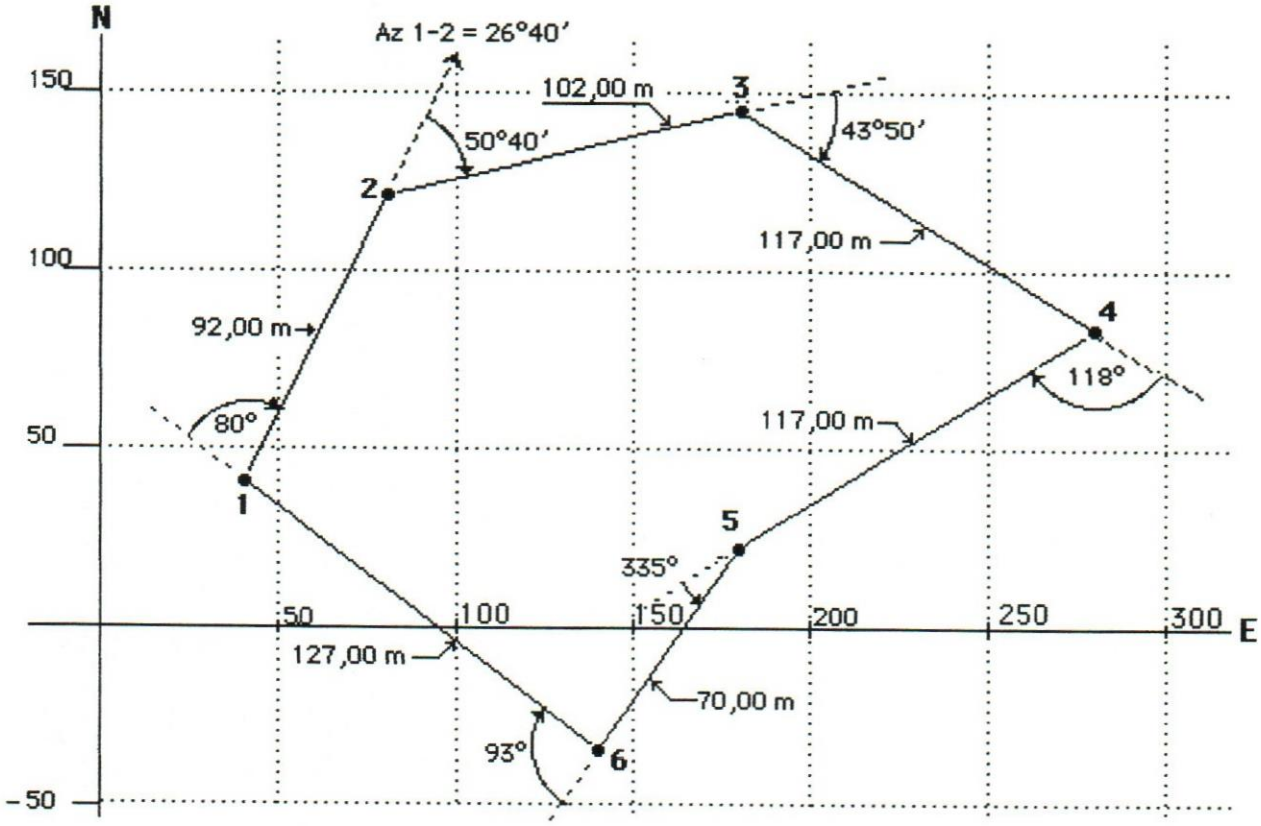
1) Se debe aplicar la regla del Tránsito cuando se considere que la medición de las distancias es más confiable que la de los ángulos.

2) Se debe aplicar la regla del Compás cuando se considere que la medición de los ángulos es igualmente confiable que la de las distancias.

3) Se aplica la regla de Crandall cuando se desea una repartición del error bien equilibrada.

Los 3 métodos de cálculo son programables, por lo que, actualmente, es preferible la regla de Crandall. Los ejemplos a continuación, han sido calculados con Excel.

Ejemplo numérico . Poligonal cerrada
Datos de campo



Este ejemplo se aplica a las 3 reglas de ajuste mencionadas.

UCAB Curso de Topografia Ajuste poligonales cerradas por la regla del Tránsito

Est	Dist Horiz.	Deflexión	Deflexión Ajustado	Azimut Ajustado	Proyecciones calculadas		Proyecciones ajustadas		Coordenadas ajustadas	
					N-S	E-W	N_S	E-W	N	E
1	92,00			26°40'	82,214	41,290	81,779	41,279	40,000	40,000
2	102,00	50°40'	50°35'	77°15'	22,511	99,485	22,392	99,458	121,779	81,279
3	117,00	43°50'	43°45'	121°00'	-60,259	100,289	-60,578	100,262	144,171	180,737
4	117,00	118°00'	117°55'	238°55'	-60,405	-100,202	-60,725	-100,228	83,593	280,999
5	70,00	335°00'	334°55'	213°50'	-58,146	-38,975	-58,454	-38,985	22,868	180,771
6	127,00	93°00'	92°55'	306°45'	75,987	-101,759	75,586	-101,786	-35,586	141,787
1		80°00'	79°55'	26°40'					40,000	40,000
Σ	625,00	720°30'			1,902	0,128	0,000	0,000		

Error angular = 720°30' - 4*180° = 0°30'

Para distribuir en 6 vértices . Corrección -5' por vértice

Error horizontal N-S = 1.902 ;

Error horizontal E-W = 0,128

Σ = |Proy(N-S)| = 359,522 ; Factor FN -1,902/359,522 = -0,00529

Σ = |Proy(E-W)| = 481,990 ; Factor FE -0,128/481,990 = -0,000266

Proyecciones (N-S) ajustadas = ±PN + |PN| x factor de corrección FN

Proyecciones (E-W) ajustadas = ±PE + |PE| x factor de corrección FE

Precisión = 625√(1,902^2 + 0,128^2) = 1 : 328

Apuntes de Topografía por J. Lampe

UCAB Curso de Topografia Ajuste poligonales cerradas por la regla del Compás

Est	Dist Horiz.	Deflexión	Deflexión Ajustada	Azimut Ajustado	Proyecciones calculadas		Proyecciones ajustadas		Coordenadas ajustadas	
					N-S	E-W	N-S	E-W	N	E
1	92,00			26°40'	82,214	41,290	81,934	41,271	40,000	40,000
2	102,00	50°40'	50°35'	77°15'	22,511	99,485	22,201	99,464	121,934	81,271
3	117,00	43°50'	43°45'	121°00'	-60,259	100,289	-60,615	100,265	144,135	180,735
4	117,00	118°00'	117°55'	238°55'	-60,405	-100,202	-60,761	-100,225	83,520	280,999
5	70,00	335°00'	334°55	213°50'	-58,146	-38,975	-58,359	-38,989	22,758	180,774
6	127,00	93°00'	92°55'	306°45'	75,987	-101,759	75,600	-101,786	-35,601	141,786
1		80°00'	79°55'	26°40'					40,000	40,000
Σ	625,00	720°30'			1,902	0,128	0,000	0,000		

Error angular = 720°30' - 4*180° = 0°30' para distribuir en 6 vértices. Corrección -5' por vértice

Error horizontal N-S = 1,902 ; Factor de corrección FN = -1,902/625 = -0,003043 ; PN ajustada =± PN + dist x FN
Error horizontal E-W = 0,128; Factor de corrección FE = -0,128/625 = -0,000205 ; PE ajustada = ±PE + dist x FE

Precisión = 625√(1,902^2 + 0,128^2) = 1 : 328

Apuntes de Topografía por J. Lampe

UCAB Curso de Topografia Ajuste poligonales cerradas por la regla de Crandall

Est	Dist Horiz.	Deflexión	Deflexión Ajustada	Azimut Ajustado	Proyecciones calculadas		Proyecciones ajustadas		Coordenadas ajustadas	
					N-S	E-W	N_S	E-W	N	E
1	92,00			26°40'	82,214	41,290	81,627	40,994	40,000	40,000
2	102,00	50°40'	50°35'	77°15'	22,511	99,485	22,477	99,336	121,627	80,994
3	117,00	43°50'	42°45'	121°00'	-60,259	100,289	-60,528	100,736	144,104	180,330
4	117,00	118°00'	117°55'	238°55'	-60,405	-100,202	-60,644	-100,596	83,576	281,066
5	70,00	335°00'	334°55'	213°50'	-58,146	-38,975	-58,530	-39,232	22,932	180,470
6	127,00	93°00'	92°55'	306°45'	75,987	-101,759	75,598	-101,238	-35,598	141,238
1		80°00'	79°55'	26°40'					40,000	40,000
Σ	625,00	720°30'			1,902	0,128	0,000	0,000		

Error angular = 720°30' - 4*180* = 0°30' para distribuir en 6 vértices . Corrección -5' por vértice

Σ = PN x PE/dist = 30,423 ; PN ajustada = ±PN +A x PN^2/dist + B x PN x PE/dist

Σ = PN^2/dist = 234,424 ; PE ajustada = ±PE + A x PN x PE/dista + B x PE^2/dist

Σ = PE^2/dist= 390,576 Precisión = 625√(1,902^2 + 0,128^2) = 1 : 328

A = (0,128 x 30,423 - 1,902 x 390,576)/(234,424 x 390,576 - 30,423^2) = - 0.00815

B = (1,902 x 30,423 - 0,128 x 234,424)/(234,424 x 390,576 - 30,423^2) = 0,00031

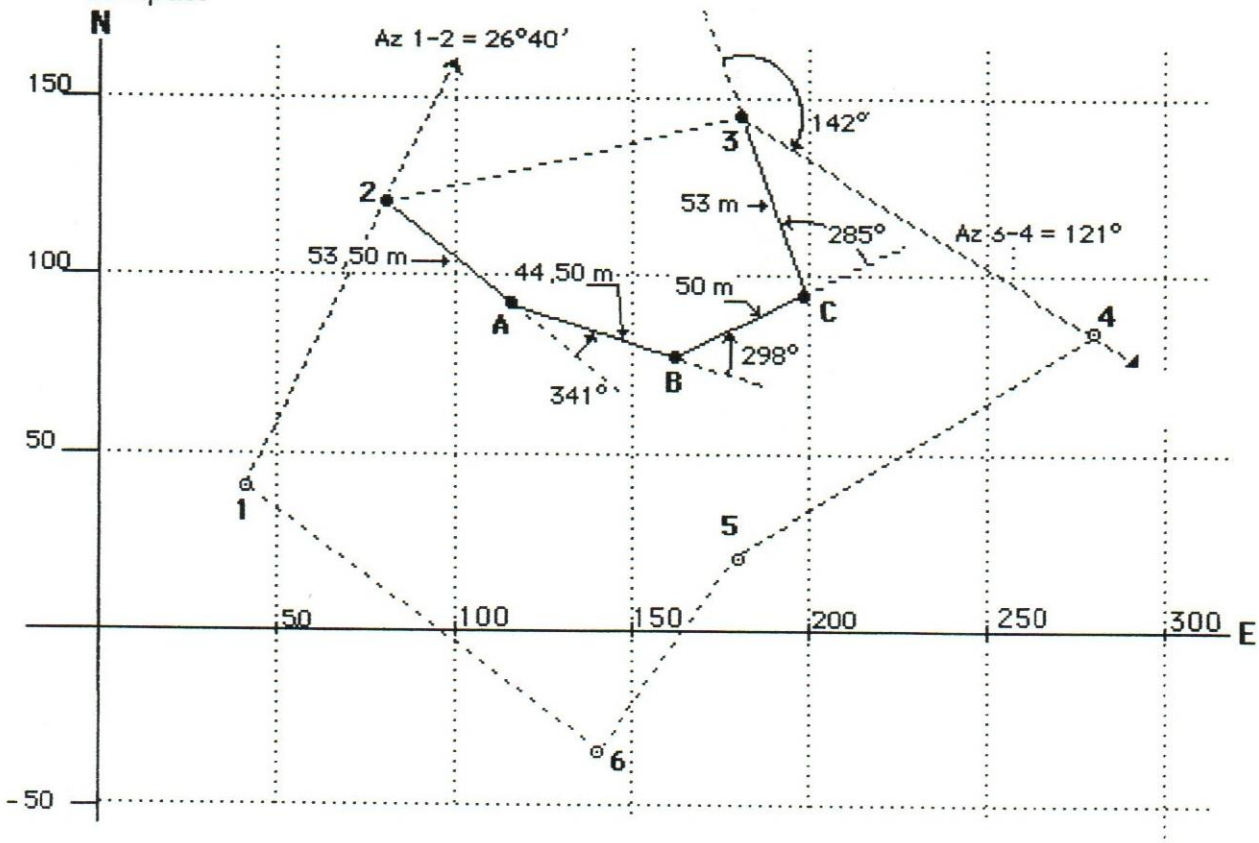
Apuntes de Topografia por J. Lampe

7.5 Ajuste del error horizontal en poligonales abiertas

Una poligonal se dice abierta, cuando las mediciones de ángulos y distancias no terminan en el mismo punto. Se requiere que los puntos inicial y final tengan coordenadas y azimutes previamente calculados y sean confiables, como cuando se enlazan con una poligonal dos vértices de una cadena de triangulación.

En estos casos, los errores angulares se ajustan de acuerdo a esos azimutes previos y los errores horizontales se computan de acuerdo a las diferencias entre las coordenadas previas, por cualquiera de las 3 reglas mencionadas anteriormente.

Se recomienda analizar el ejemplo numérico siguiente, basado en la poligonal cerrada del ejemplo anterior, ajustada según la regla del compás.



UCAB Curso de Topografia Ajuste poligonal abierta por la regla del Compás

Est	Dist Horiz.	Deflexión	Deflexión Ajustada	Azimut Ajustado	Proyecciones calculadas		Proyecciones ajustadas		Coordenadas ajustadas	
					N	E	N	E	N	E
1				26°40'						
2	53,50	108°	108°04'	134°44'	-37,654	38,006	-37,579	38,023	121,934	81,271
A	44,50	341°	341°04'	115°48'	-19,368	40,064	-19,305	40,077	84,355	119,294
B	50,00	298°	298°04'	53°52'	29,483	40,382	29,554	40,398	65,050	159,372
C	53,00	285°	285°04'	338°56'	49,458	-19,051	49,531	-19,034	94,605	199,770
3		142°	142°04'	121°00'					144,136	180,736
4										
Σ	201,00	120°40'			21,919	99,401	22,201	99,464		

Error angular = 120°40' - 121° = -0°20' para distribuir en 4 vértices . Corrección +4' por vértice

Error horizontal N-S = 22,201 - 21,919 = + 0,282 ; Factor de corrección FN = 0,282/201 = + 0,001303
Error horizontal E-W = 99464 - 99,401 = + 0,063 ; Factor de corrección FE = 0,063/201 = + 0,000313
Proyecciones N-S ajustadas = ±PN + dist x FN ; Proyecciones E-W ajustadas = ±PE + dist x FE

Precisión = 201√(0,282^2 + 0,063^2) ≈ 1 : 700

ΔN = 144,136 - 121,034 = 22,201 Coordenadas Nr, 2 y 3 previamente calculadas
ΔE = 180,736 - 81,271 = 99,464 Coordenadas Nr 2 y 3 previamnte calculadas

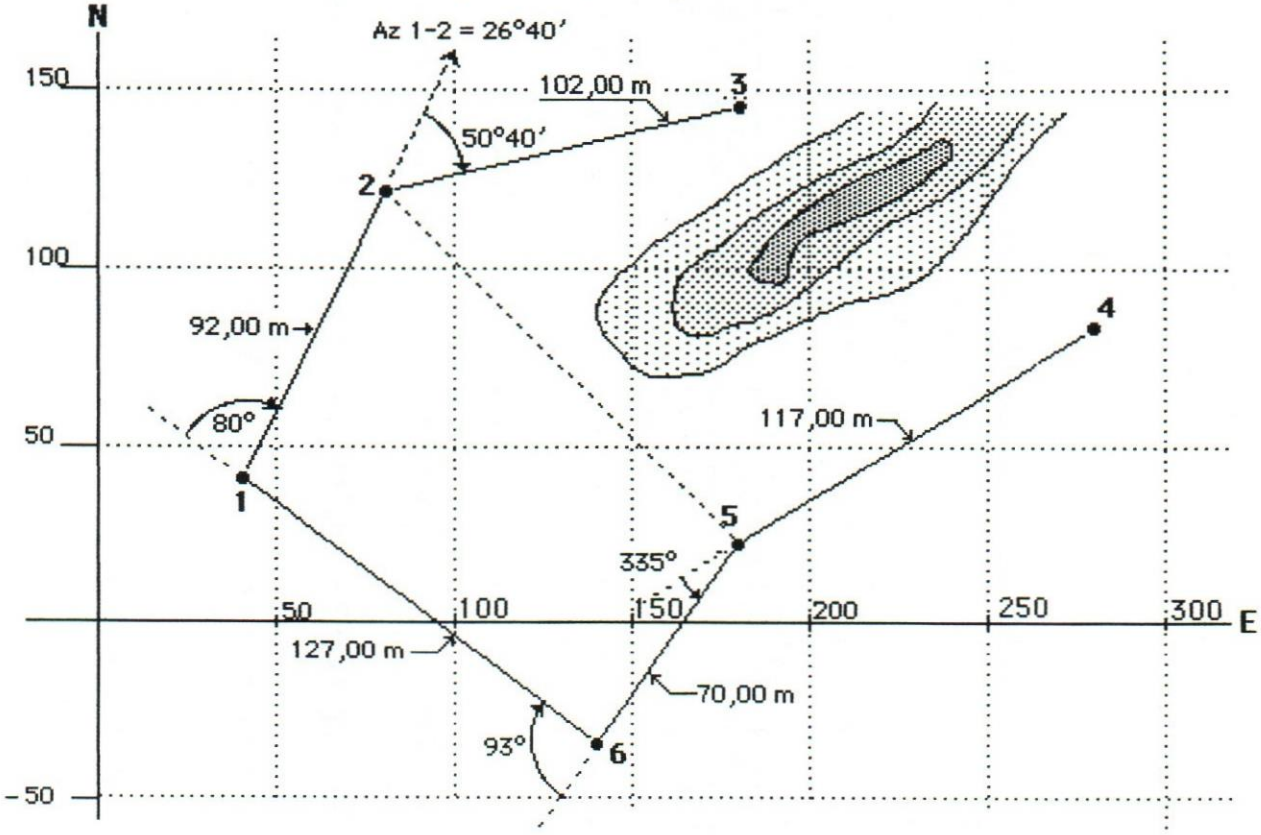
7.6 Ajuste de poligonales incompletas

Una poligonal se dice incompleta cuando no ha sido posible medir uno de sus lados por algún obstáculo insalvable. Sólo es admisible la falta de un lado.

En este caso, no hay propiamente un ajuste, puesto que todos los errores posibles se cargan al lado faltante. A fin de minimizar su incidencia, es recomendable medir varias veces los ángulos y distancias de los demás lados.

En casos de extrema necesidad. es preferible rodear el obstáculo con una poligonal auxiliar, a un mayor costo de la operación. También se puede acortar el circuito abierto, como cuando se enlazan los vértices # 2 y #5 del ejemplo propuesto.

Se calculan las coordenadas y los azimutes de los extremos sin ajuste y luego se calculan analíticamente los datos del lado faltante. Se recomienda analizar el ejemplo que sigue.



UCAB Curso de Topografia Ajuste poligonales incompletas

Est	Dist Horiz.	Deflexión	Azimut Calculado	Azimut Ajustado	Proyeccion calculada		Proyeccion ajustada		Coordenadas ajustadas	
					N	E	N	E	N	E
1	92,00		26°40'		82,214	41,290			40,000	40,000
2	102,00	50°40'	77°20'		22,511	99,485			122,214	81,290
3	117,239		121°37'05"		-61,463	99,836			144,725	180,775
4	117,00	118°00'	238°40'		-60,842	-99,936			83,262	280,611
5	70,00	335°00'	213°40'		-58,259	-38,805			22,420	180,675
6	127,00	93°00'	306°40'		75,839	-101,870			-35,839	141,870
1		80°00'	26°40'						40,000	40,000
Σ					0,000	0,000				

Se omiten la distancia 3 - 4 y el ángulo de deflexión 2-3-4 (Aparato estacionado en el vértice 3)

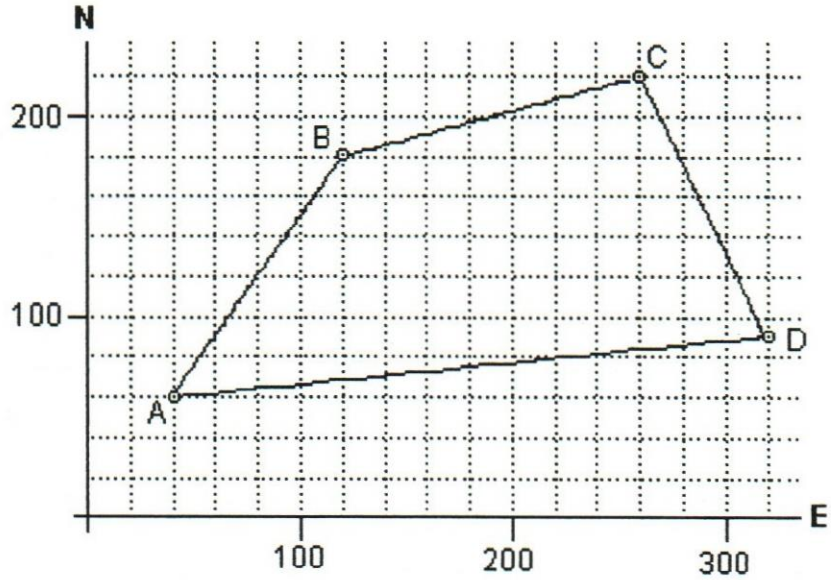
Longitud 3-4 = √[(83,262 - 144,725)^2 + (280,611 - 180,775)^2] = 117,239

Azimut 3 - 4 = arcseno 180 + (99,936/-61,463) = 121°37'05"

UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

Tema 8 Cálculo de áreas

Cuando se calcula el área inscrita en un polígono, se supone que éste ya está ajustado angular y linealmente. Este tema se expone mejor con ejemplos numéricos.



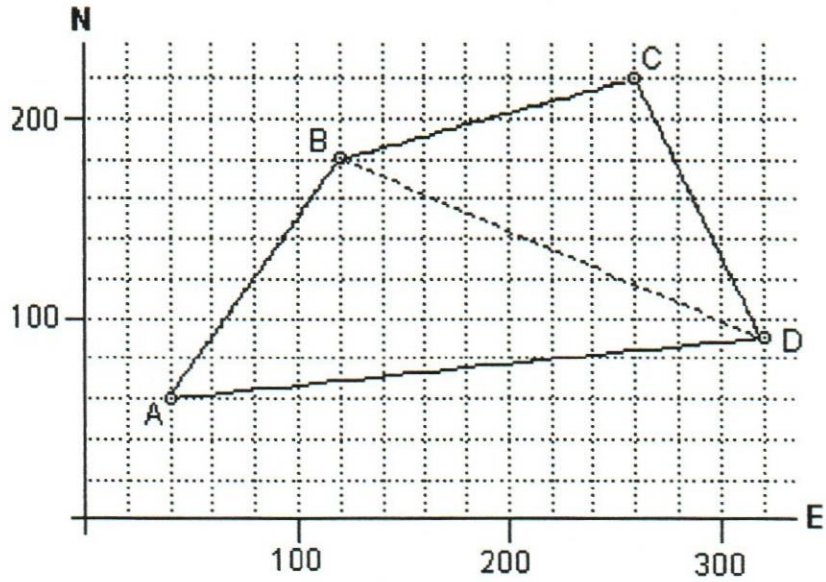
Datos de un polígono ajustado para usar en los ejemplos numéricos :

	N	E	Dist	Aziumt	Ang. int.
A	60	40			50°11'40"
			144,2221	33°41'24"	
B	180	120			139°38'07"
			145,6022	74°03'17"	
C	220	260			98°49'48"
			143,1782	155°13'29"	
D	90	320			71°20'25"
			281,6026	263°53'04"	
A	60	40			

Se ha usado un polígono de 4 vértices por brevedad, pero los métodos expuestos se aplican también a polígonos cerrados de cualquier número de lados.

8.1 Por partición en figuras geométricas

El área del polígono se divide en figuras geométricas, cuyas áreas puedan ser calculadas en una forma simple, como triángulos, paralelogramos, trapezoides etc.



Las áreas de los triángulos ABD y BCD se calculan así:

ABD = 0,5(144,2221 x 281,6026 x sen 50°11'40") = 15.600
BCD = 0,5(145,6022 x 143,1782 x sen 98°49'48") = 10.300

Area ABCD = 15.600 + 10.300 = 25.900

También se pueden calcular a partir de las coordenadas de sus vértices :

$$ABD = 0{,}5\begin{vmatrix} 60 & 40 & 1 \\ 180 & 120 & 1 \\ 90 & 320 & 1 \end{vmatrix} = 60(120-320)-180(40-320)+90(40-120) = 15.600$$

$$BCD = 0{,}5\begin{vmatrix} 180 & 120 & 1 \\ 220 & 260 & 1 \\ 90 & 320 & 1 \end{vmatrix} = 180(260-320)-220(120-320)+90(120-260) = 10.300$$

15.600 + 10.300 = 25.600

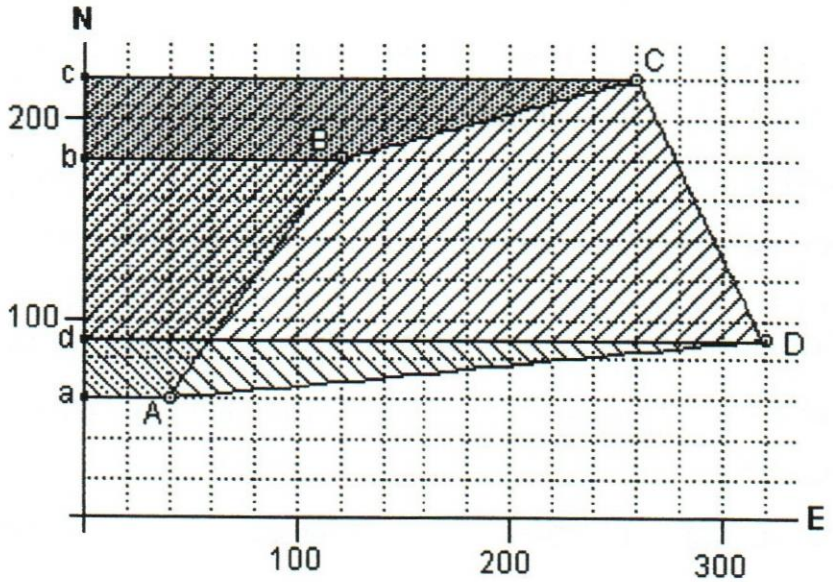
(Como comprobación pueden calcularse las áreas de ABC y ACD)

8.2 Por el método de la Doble Distancia Meridiana.

En este método, el área inscrita en la poligonal se divide en trapezoides, cuyas caras paralelas sean a su vez paralelas a uno de los ejes de coordenadas. Las alturas de dichos trapezoides resultan paralelas al otro eje.

Es el único método práctico para calcular áreas de polígonos con muchos lados. Tiene la ventaja de ser fácilmente programable.

Si se escoge que las caras paralelas del trapezoide sean paralelas al eje de las X, el desarrollo del método es como sigue :



En el esquema, el área doble del trapezoide aABb es (bB + aA)*(b - a), pero bB y aA corresponden a las coordenadas Este de los puntos A y B y a y b corresponden a sus coordenadas Norte. Sustituyendo en la expresión del área anterior los valores de sus coordenadas, se tiene :

aABb = (120 + 40)(180 - 60) = 19.200
bBCc = (260 + 120)(220 - 180) = 15.200
cCDd = (320 + 260)(90 - 220) = - 75.400
dDAa = (40 + 320)(60 - 90) = -10.800
= -51.800

Como en el cálculo de las áreas de los trapezoides no se toma el promedio de las bases, el área resultante es el doble de la requerida. De allí el nombre del método. El área resulta entonces de -25.900.

El signo del resultado depende del sentido que se adopte al calcular. Pero como un área no puede ser negativa, se toma el valor absoluto del resultado.

La suma de las distancias meridianas se realiza sistemáticamente del posterior al anterior, según el sentido en que se recorra la poligonal, cualquiera que él sea. Igual regla se sigue para las diferencias de las ordenadas. Es importante observar esta regla, porque de ella depende el signo de los sumandos.

Para derivar una regla práctica, fácilmente programable, se sustituyen los valores anteriores por sus denominaciones literales :

aABb = (EB+EA)(NB-NA)= EBxNB - EBxNA+EAxNB-EAxNA = EB(NB-NA)+EA(NB- NA)

bBCc = (EC+EB)(NC-NB) = ECxNC - ECxNB+EBxNC-EBxNB = EC(NC-NB)+EB(NC - NB)

cCDd =(ED+EC)(ND-NC) = EDxND-EDxNC+ECxND-ECxNC = ED(ND-NC)+EC(ND-NC)

dDAa =(EA+ED)(NA-ND)= EAxNA-EAxND+EDxNA-EDxND = EA(NA-ND) + ED(NA - ND)

Sacando las meridianas por factor común, simplificando y remplazando en las ecuaciones los valores de sus coordenadas, se obtiene :

EA(NA-ND+NB-NA) = EA(NB-ND) = 40(180-90) = 3600

EB(NB-NA+N-NB) = EB(NC-NA) = 120(220-60) =19.200

EC(NC-NB+ND-NC) = EC(ND-NB) " = 260(90-180) = -23.400

ED(ND - NC + NA - ND) = ED(NA - NC) = 320(60 - 220) = - 51.200

La mitad de la suma algebráica resulta 25.900.

De lo cual se deduce la siguiente <u>regla práctica</u>:

Cada coordenada Este se multiplica por la diferencia entre la coordenada Norte que la <u>precede</u> y la coordenada Norte <u>anterior</u> a ella. La mitad de la suma algebráica de los productos será el área inscrita en el polígono. El orden de precedencia es lo que produce el signo de los sumandos y de la suma.

Es necesario respetar esta secuencia porque, en el ejemplo propuesto, todas las coordenadas son positivas, pero esto no siempre es así.

Hay otra manera de ordenar las coordenadas para un cálculo sistemático, que se utiliza principalmente cuando el polígono no tiene muchos vértices. Se disponen las coordenadas en forma de quebrados, siendo indiferente si las coordenadas Norte o Este están en el numerador, así:

$$\frac{60}{40} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\searrow}} \frac{180}{120} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\searrow}} \frac{220}{260} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\searrow}} \frac{90}{320} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\searrow}} \frac{60}{40}$$

El ultimo quebrado se repite para cerrar el circuito

Se multiplican los numeradores por los denominadores y viceversa en el orden indicado por las flechas, tomando como positivos los productos de arriba hacia abajo y como negativos los productos de abajo hacia arriba :

60 x 120	= 7.200	40 x 180	= 7.200
180 x 260	= 46.800	120 x 220	= 26.400
220 x 320	= 70.400	260 x 90	= 23.400
90 x 40	= 3.600	320 x 60	= 19200
	= 128.000		= 76.200

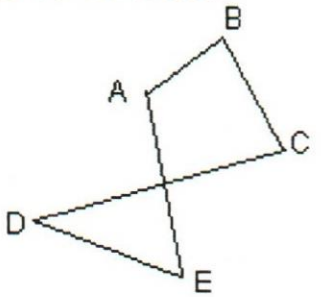
El área será entonces 0,5(128.000 - 76.200) = 25.900

Los números del ejemplo son todos positivos. Si esto no es así, el signo de los productos puede verse afectado.

Por los signos de las coordenadas en los quebrados, el resultado puede ser positivo o negativo. Pero como el área de un polígono es siempre positiva, debe tomarse el valor absoluto del resultado.

El signo del área resultante también puede verse afectado por el sentido en que se hagan los cálculos. Igualmente, al disponer las coordenadas en forma de quebrados, cuando la posición de las coordenadas se invierte.

Cuando la poligonal forma lazos independientes, como en la figura siguiente, el resultado no es correcto.



No hay forma matemática práctica para detectar este problema. Cuando se sospeche que la poligonal forma lazos independientes, la única manera práctica de detectarlos es dibujar en forma somera sus vértices. Identificadas las intersecciones, se pueden calcular sus coordenadas. Será necesario plantear las ecuaciones de los lados que intersecan a partir de las coordenadas de sus vértices.

Con ellas, pueden calcularse las áreas de los lazos por separado.

8.3 Partición de un área en varios lotes :

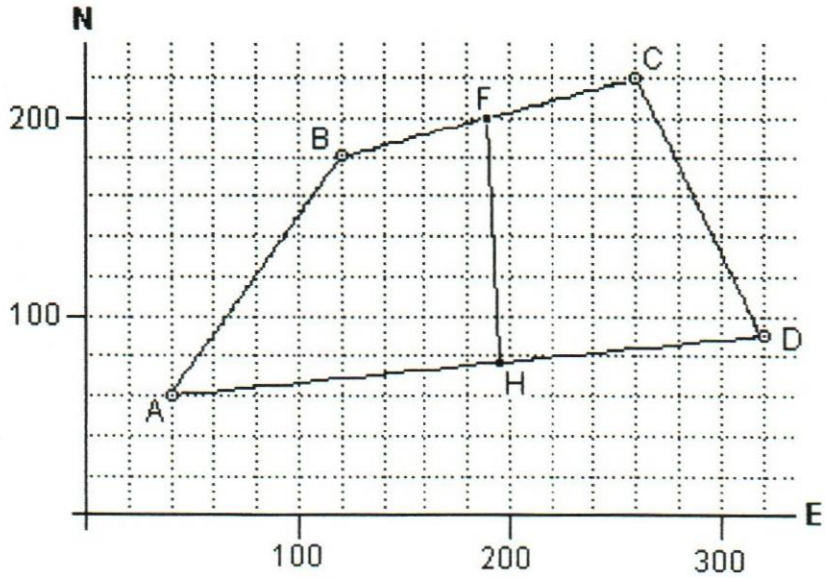
La partición de un área en varios lotes, que deban o no tener una determinada proporción entre ellos, se presenta frecuentemente en procesos legales. El área debe estar inscrita en un polígono cerrado y ajustado, de manera que se conozcan las coordenadas de sus vértices.

Para dividir un área, deben primero adoptarse los criterios con los cuales se va a efectuar dicha división. Generalmente se presentan 2 modalidades :

a) Se adopta un criterio sobre la posición del punto F y otro criterio sobre la proporción en la cual se va a dividir el área original.

b) Se adopta un criterio sobre la posición de los puntos F y H.

Los ejemplos que se desarrollan a continuación, se calculan con los datos de la poligonal cerrada que está al comienzo de este tema



Ejemplo Nr. 1

Se desarrolla el ejemplo en base a la modalidad (a), con los siguientes criterios

El punto F debe estar en el centro del lado B-C

El área original de 25.900 m^2 debe ser dividida en 2 partes iguales de 12.950 m^2 c/u

Se calcula la posición del punto F :

NF = (180 + 220)/2 = 200 EF = (120 + 260)/2 = 190

Se plantea el área del cuadrilátero ABFH, en el cual las coordenadas del punto H son las incógnitas

$$\frac{60}{40} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\!\!\!\searrow}} \frac{180}{120} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\!\!\!\searrow}} \frac{200}{190} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\!\!\!\searrow}} \frac{y}{x} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\!\!\!\searrow}} \frac{60}{40} = 12.950 \times 2 = 25.900$$

60 x 120	= 7.200	40 x 180	= -7.200
180 x 190	= 34.200	120 x 200	= -24.000
	= 200x		= -190y
	= 40y		= - 60x

Sumando estos resultados, se obtiene una ecuación de 1er grado con 2 incógnitas que debe ser igual al doble del área inscrita en el polígono de la porción correspondiente.

140x -150y +10.200 = 25.900 y simplificando por 10 queda

14x - 15y = 1.570

De igual forma, se calcula el área del cuadrilatero FCDH

$$\frac{200}{190} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\!\!\!\searrow}} \frac{220}{260} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\!\!\!\searrow}} \frac{90}{320} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\!\!\!\searrow}} \frac{y}{x} \overset{+}{\underset{-}{\nearrow\!\!\!\searrow}} \frac{200}{190} = 12.950 \times 2 = 25.900$$

200 x 260	= 52.000	190 x 220	= -41.800
220 x 320	= 70.400	260 x 90	= -23.400
	= 90x		= -320y
	= 190y		= -200x

Sumando estos resultados, se obtiene la ecuación siguiente :

-110x-130y+57.200 = 25.900 ; se simplifica por 10 y se multiplica por -1

<u>11x + 13y = 3.130</u>

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones, se obtienen las coordenadas del punto H. Como en este caso los coeficientes no tienen un mínimo común múltiplo, es más cómodo resolver el sistema por determinantes.

$$S = \begin{vmatrix} 14 & -15 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} = 14 \times 13 + 11 \times 15 = 347$$

$$x = \begin{vmatrix} 1570 & -15 \\ 3130 & 13 \end{vmatrix} = 1570 \times 13 + 3130 \times 15 = 67.360$$

$$y = \begin{vmatrix} 14 & 1570 \\ 11 & 3130 \end{vmatrix} = 14 \times 3130 - 11 \times 1570 = 26.550$$

Con lo cual :

E(H) = 67.360/347 = 194,121
N(H) = 26.550/347 = 76,513

Al sustituir estos valores en las sumatorias de las cuales se derivaron las ecuaciones, estas deben dar 12.950.

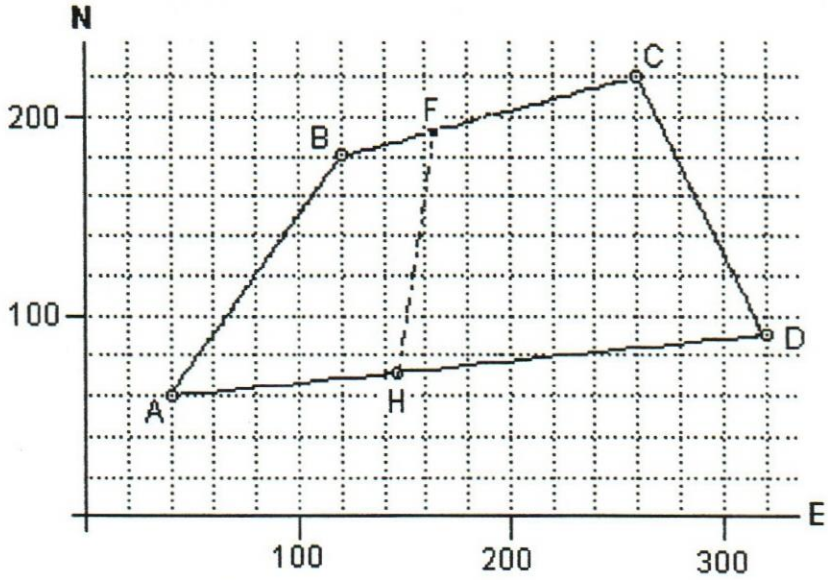
60 x 120	= 7.200	40 x 180	= 7.200
180 x 190	= 34.200	120 x 200	= 24.000
200 x 194,121	= 38.824,20	190 x 76.513	= 14.537,47
40 x 76,513	= <u>3.060,53</u>	60 x 194,121	= <u>11.647,26</u>
	= 83.282,73		= 57,384,73

83.282,73 - 57.384,73 = 25.900 25,900 / 2 = 12.950 LQQD

Ejemplo Nr. 2

Se desarrolla el ejemplo en base a la modalidad (a), con los siguientes criterios :

El punto F debe estar del vértice B, a 1/3 de la distancia B-C
El área del cuadrilátero ABFH debe ser 1/3 del área total de 25.900 m^2



Utilizando el mismo polígono del ejemplo Nr. 1, se calculan primero las coordenadas del punto F.(Se aplica la regla para dividir una distancia a partir de las coordenadas de sus extremos)

NF = (180 + 220 x 0,5)/(1 + 0,5) = 193,3333
EF = (120 + 260 x 0,5)/(1 + 0,5) = 166,6667

Con estos datos, se plantea el área del cuadrilatero ABFH, teniendo en cuenta que ésta debe ser igual a 25.900/3 = 8.633,3333

$$\frac{60}{40} \overset{+}{-}\!\nearrow \frac{180}{120} \overset{+}{-}\!\nearrow \frac{193,33}{166,66} \overset{+}{-}\!\nearrow \frac{y}{x} \overset{+}{-}\!\nearrow \frac{60}{40} = 8.633,333 \times 2 = 17.266,667$$

60 x 120	= 7.200	40 x 180	= -7.200
100 x 166,66	= 30.000	120 x 193,33	= -23.200
	= 193,33x		= -166,66y
	= 40y		= -60x

133,33x - 126,667y + 6800 = 17.266, 667

multiplicando por 0,3 y simplificando por 2 queda 20x - 19y -1570 = 0

Igualmente se calcula el área del cuadrilátero FCDH, que debe ser igual a 25.900 x 2/3 = 17.266,6667

$$\frac{193,33}{166,66} \overset{+}{\underset{-}{\times}} \frac{220}{260} \overset{+}{\underset{-}{\times}} \frac{90}{320} \overset{+}{\underset{-}{\times}} \frac{y}{x} \overset{+}{\underset{-}{\times}} \frac{193,33}{166,66} = 17.266,667 \times 2 = 34.533,333$$

193,33 x 260	= 50.266,66	166,66 x 220	= -36.666,667
220 x 320	= 70.400	260 x 90	= -23.400
	= 90x		= -320y
	= 166,66y		= -193,33x

-103,33x - 153,33y + 60.600 - 34.533,33 = 0

multiplicando por -0,3 y simplificando queda <u>31x + 46y = 7820</u>

No teniendo los coeficientes un mínimo común múltiplo, es más cómodo resolver el sistema por determinantes :

$$S = \begin{vmatrix} 20 & -19 \\ 31 & 46 \end{vmatrix} = 20 \times 46 + 31 \times 19 = 1.509$$

$$x = \begin{vmatrix} 1.570 & -19 \\ 7.820 & 46 \end{vmatrix} = 1.570 \times 46 + 7.820 \times 19 = 220.800$$

$$y = \begin{vmatrix} 20 & 1,570 \\ 31 & 7.820 \end{vmatrix} = 20 \times 7.820 - 31 \times 1.570 = 107730$$

E(H) = 220.800/1.509 = 146,322
N(H) = 107.730/1.509 = 71,392

Si se remplazan estos valores de x e y en las sumatorias con la cuales se obtuvieron las ecuaciones, se comprueba que las igualdades planteadas se cumplen.

Si posteriormente se desea dividir el área del polígono FCDH en otra proporción cualquiera, se repite el procedimiento, pero usando las coordenadas de los puntos F y H.

Este procedimiento puede repetirse todas las veces que sea necesario para dividir el área del polígono original en tantas porciones como sea necesario. Es fácilmente programable.

Ejemplo Nr. 3

Se desarrolla el ejemplo con la modalidad (a), adoptando el criterio de que el punto F debe estar a 72 m del punto B y que el polígono debe ser dividido en 2 partes iguales.

Con esta distancia, las coordenadas del punto B y el azimut B-C, se calculan las coordenadas del punto F :

NF = 180 + 72 x cos 74°03'17" = 199,7798
EF = 120 + 72 x sen 74°03'17" = 189,2298

Calculadas estas coordenadas, el cálculo se realiza en forma semejante al ejemplo Nr. 1 o al Nr. 2

Ejemplo Nr. 4

Se desarrolla el ejemplo con la modalidad (b), adoptando el criterio de que el punto F debe estar a 72 m del punto B, entre B y C y el punto H debe estar a 140 m del punto A, entre A y D

Se calculan las coordenadas del punto F, con 72 m , las coordenadas del punto B y el azimut B-C

NF = 180 + 72 x cos 74°03'17" = 199,7798
EF = 120 + 72 x sen 74°03'17" = 189,2298

Se calculan las coordenadas del punto H, con 140 m, las coordenadas del punto A y el azimut A-D (Inverso al que aparece en el cuadro de datos inicial)

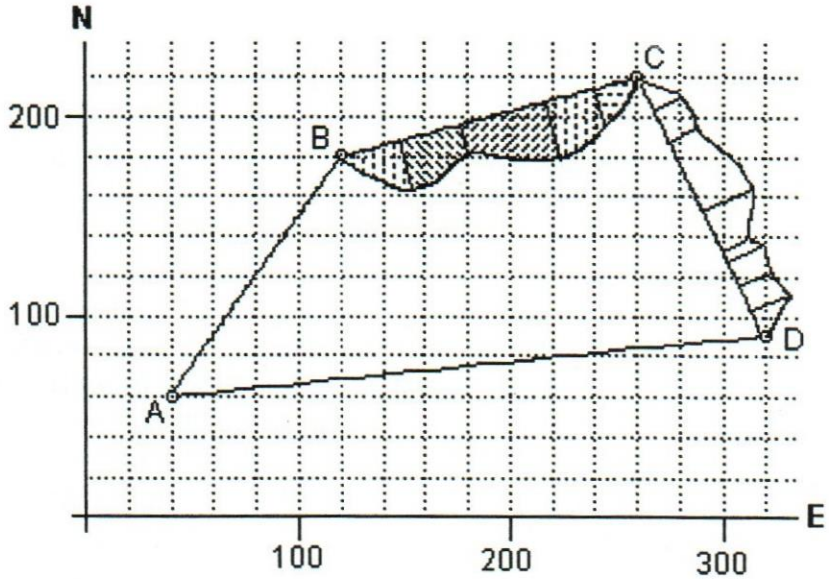
NH = 60 + 140 x cos 83°53'04" = 74,9148
EH = 120 + 140 x sen 83°53'04" = 179,2033

Con las coordenadas de los punto F y H. se calculan por cualquier método las áreas de los cuadrláteros ABFH y FCDH, verificando que la suma de ellas sea igual al área del cuadrilátero original ABCD.

Los métodos descritos para dividir áreas, aplican a polígonos de cualquier número de lados, si previamente se han definido los criterios con los cuales se va a realizar la partición.

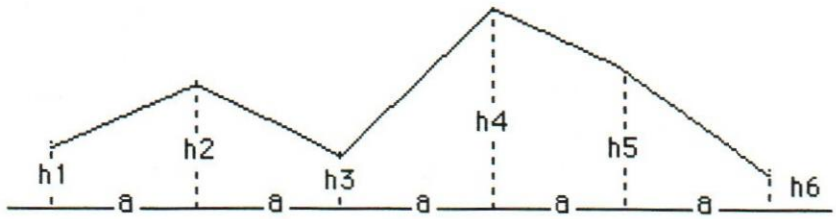
8.4 Cálculo de áreas con bordes irregulares

Cuando un terreno tiene bordes irregulares, se inscribe en él una poligonal de lados rectos y, desde esos lados rectos se levantan abscisas y ordenadas hasta las irregularidades, escogiendo éstas de manera que los tramos del borde irregular entre ellas sean lo más uniforme posible.



Para calcular el área irregular, se asume que cada parte es un trapezoide, con las ordenadas siendo sus caras paralelas y su altura es la diferencia entre las abscisas medidas desde un punto cualquiera, en este ejemplo desde el punto B y desde el punto C.

Muchos calculistas prefieren levantar las ordenadas a intervalos regulares, para facilitar el cálculo. En este caso, estos intervalos deben ser lo suficientemente cortos para garantizar la mayor precisión posible en el resultado.



Area = a[h1 + 2h2 + 2h3 + 2h4 + 2h5 + h6]/2

Las ordenadas extremas pueden ser nulas o no. En el caso de que sean nulas, sus áreas correspondientes se calculan como triángulos.

Los bordes irregulares pueden estar a ambos lados de la poligonal inscrita. Para aplicar la expresión anterior, se le debe aplicar signo a las alturas h, según estén por dentro o por fuera del lado de la poligonal que les sirve de base.

Por ser el procedimiento muy simple y por razones de escala, no se presenta un ejemplo numérico. En el caso de bordes irregulares, tampoco es necesaria una precisión muy rigurosa.

En este procedimiento, no es posible aplicar el método descrito para dividir una superficie en áreas determinadas. En caso necesario, debe implantarse en el campo una poligonal convencional, cuyos lados sigan lo más de cerca posible las irregularidades del borde, aún cuando esto resulte en lados muy cortos.

UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

TEMA 9 Ubicación

9.1 Introducción

Toda obra de ingeniería debe estar ubicada en un plano de mayor extensión que los propios, para indicar su posición en relación al entorno. Estos planos suelen llamarse planos de ubicación. Por ejemplo, un edificio debe ser ubicado en el plano de la urbanización o con las calles adyacentes, una industria grande debe estar ubicada en los planos municipales y un desarrollo agrícola en los planos territoriales.

Estos planos sirven a las autoridades que tienen la potestad de otorgar los permisos de construcción, para verificar el uso conforme de la tierra. Los planos de ubicación abarcan extensiones de acuerdo a la obra.

9.2 En el entorno urbano

En zonas urbanas, los planos de ubicación se limitan al entorno cercano, como urbanizaciones, calles limítrofes y otros puntos conocidos, de modo que sirvan de referencia para identificar la obra en los Registros Oficiales.

9.3 En el entorno rural

En el entorno rural, donde las referencias solían ser vagas y no permanentes, la ubicación debe hacerse según sistemas que permitan la reconstrucción de los linderos en forma segura. Esta ubicación sólo se logra refiriendo los linderos a un sistema apoyado en la geografía. Hay varias maneras de lograr esta referencia.

a) Método gráfico.

Se dispone de cartas geográficas a escala 1:25.000 para casi todo el territorio nacional. Esos planos tienen señaladas las coordenadas UTM y geográficas. A esta escala, 100 metros equivalen a 4 milímetros, con lo cual se pueden tener lecturas directas de hasta 25 mts y apreciadas hasta la mitad. Como un minuto de latitud equivale a 1857 metros aprox. y se pueden hacer lecturas directas de hasta 1 segundo, equivalente a 1,2 mm, se obtienen lecturas de aprox. 30 metros. Para todo propósito práctico, estas precisiones son suficentes.

UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

TEMA 9 Ubicación

9.1 Introducción

Toda obra de ingeniería debe estar ubicada en un plano de mayor extensión que los propios, para indicar su posición en relación al entorno. Estos planos suelen llamarse planos de ubicación. Por ejemplo, un edificio debe ser ubicado en el plano de la urbanización o con las calles adyacentes, una industria grande debe estar ubicada en los planos municipales y un desarrollo agrícola en los planos territoriales.

Estos planos sirven a las autoridades que tienen la potestad de otorgar los permisos de construcción, para verificar el uso conforme de la tierra. Los planos de ubicación abarcan extensiones de acuerdo a la obra.

9.2 En el entorno urbano

En zonas urbanas, los planos de ubicación se limitan al entorno cercano, como urbanizaciones, calles limítrofes y otros puntos conocidos, de modo que sirvan de referencia para identificar la obra en los Registros Oficiales.

9.3 En el entorno rural

En el entorno rural, donde las referencias solían ser vagas y no permanentes, la ubicación debe hacerse según sistemas que permitan la reconstrucción de los linderos en forma segura. Esta ubicación sólo se logra refiriendo los linderos a un sistema apoyado en la geografía. Hay varias maneras de lograr esta referencia.

a) Método gráfico.

Se dispone de cartas geográficas a escala 1:25.000 para casi todo el territorio nacional. Esos planos tienen señaladas las coordenadas UTM y geográficas. A esta escala, 100 metros equivalen a 4 milímetros, con lo cual se pueden tener lecturas directas de hasta 25 mts y apreciadas hasta la mitad. Como un minuto de latitud equivale a 1857 metros aprox. y se pueden hacer lecturas directas de hasta 1 segundo, equivalente a 1,2 mm, se obtienen lecturas de aprox. 30 metros. Para todo propósito práctico, estas precisiones son suficentes.

b) Observaciones astronómicas.

Se puede calcular la latitud y longitud de un punto, con observaciones a un astro, como el sol, los planetas o algunas estrellas. Estos cálculos no son objeto de este curso, pero sucintamente son así:

Se puede obtener la latitud mediante la observación del Sol en elongación (Punto más alto de su carrera). Con esa altura y la declinación del astro para la hora de la observación, la latitud se calcula así :

latitud = 90° - angulo vertical + declinación

La hora de la observación es necesaria porque la declinación tabulada está en función de las 0^h de Greenwich, que debe reducirse a la de la hora local de la observación.

Se puede calcular la longitud mediante esa misma observación, porque un astro en elongación está pasando por su meridiano, y en ese momento es el mediodia local. Si se dispone de un reloj calibrado a la hora de Greenwich, por diferencia horaria se calcula la longitud, sabiendo que cada hora de diferencia equivale a 15° de longitud. (360/24)

En Venezuela, que estamos entre los 6° y 10° de latitud norte, es muy difícil observar el sol en elongación porque está casi en el zenit. Por otra parte, la estrella polar está muy cerca del horizonte y sólo puede observarse con el cielo muy despejado.

Conociendo la diferencia horaria con Greenwich y la hora local, se puede calcular el tiempo que falta para que el Sol alcance el zenit y con ella cálcular la declinación.

Con los instrumentos normales de que dispone el Ingeniero Civil, estas observaciones no producen una precisión mayor que la señalada en el aparte (a) anterior.

c) Global Positioning System (GPS)

Este moderno aparato permite obtener la latitud y longitud de un punto mediante lecturas hechas a uno o varios satélites artificiales. No es frecuente que se disponga de un aparato con lecturas superiores a un 1", por lo que deben hacerse varias lecturas y aceptar el promedio aritmético. No produce precisiones mayores que las apuntadas en el aparte (a) anterior.

El GPS es muy valioso cuando no se dispone de cartas a escala 1:25.000. También es valioso para la actualización de estas cartas, porque permite localizar en ellas las bienhechurías o desarrollos hechos posteriormente a la fecha de su elaboración. Así se ahorra la repetición de los procesos aerofotogramétricos, lentos y muy costosos.

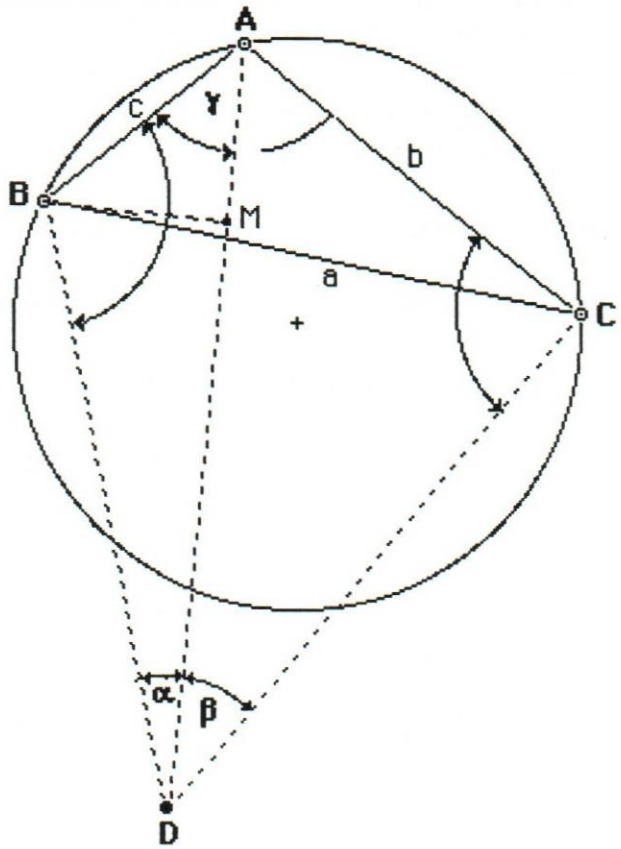
9.4 Ubicación geodésica

Se puede calcular la ubicación de un punto de la poligonal base, si se dispone de un vértice de triangulación oficial a una distancia razonable, enlazándolo con una poligonal cerrada y ajustada.

Si se dispone de 3 de estos vértices, visibles desde el punto que desea localizarse y de los cuales se conozcan sus coordenadas, se puede lograr su ubicación, midiendo los ángulos a ellos, como se explica a continuación.

9.5 Problema de los 3 puntos o Pothenot. Solución analítica

El problema consiste en calcular las coordenadas del punto D, donde está ubicado el operador, cuando sólo se dispone de las coordenadas de otros 3 puntos visibles, A, B y C .



Para que el problema tenga solución, el ángulo BAC debe ser $\neq \alpha + \beta$

Si el ángulo BAC = $\alpha + \beta$, el punto D está en el círculo que circunscribe a los puntos A, B y C y el problema es indeterminado. Los ángulos α y β son medidos en el campo.

Es más práctico exponer el método con un ejemplo numérico

Ejemplo numérico

Coordenadas de A	N = 1.700	E = 900
Coordenadas de B	N = 1.500	E = 500
Coordenadas de C	N = 1.300	E = 1.400

$\alpha = 18°$; $\beta = 28°$

Cálculos

Se debe resolver primero el triángulo ABC

Azimut B-A = atan (900 -500)/(1700 - 1500) = 63°26'06"
Dist. B-A = $\sqrt{(400^2 + 200^2)}$ = 447,214, (Lado c del triángulo ABC)

Azimut A-C = 180° + atan (1400 - 900)/(1300 - 1700) = 128°39'35"
Dist. A-C = $\sqrt{500^2 + 400^2)}$ = 640,312 (Lado b del triángulo ABC)

El ángulo BAC se calcula por diferencia de azimutes

BAC = (63°26'06" - 128°39'35") + 180° = 114°46' 31'

Como 114°46' 31' es ≠ 18° + 28° , el problema tiene solución.

Debe tomarse en cuenta que entre menor sea la diferencia, menos preciso será el cálculo.

El problema del Pothenot tiene varias soluciones. Generalmente se usa el método aplicado por el U.S. Coastal and Geodetic Survey, reporte 1894, porque es sistemático y fácil de programar en computadoras.

Para su aplicación deben calcularse algunos parámetros auxiliares :

s = 180° - 0,5(BAC + α + β)
Ø = atan [(c x sen β)/(b x sen α)]
tan Δ = cot(Ø + 45°) x tan s
Para tan Δ > 0 el ángulo ABD = s + Δ ; ángulo ACD = s - Δ
Para tan Δ < 0 el ángulo ABD = s - Δ ; àngulo ACD = s + Δ

Los parámetros correspondientes al ejemplo son :

s = 180° - 0,5(114°46'31" + 18° + 28°) = 99°36'45"
Ø = atan(447,214 x sen 28°)/(640,312 x sen 18°) = 46°41'51"
tan Δ = cot (46°41'51" + 45°) x tan 99°36'45" = 0,1750
Δ = 9°55'33" > 0°

Angulo ABD = 99°36'45" + 9°55'33" = 109°32'18"
Angulo ACD = 99°36'45" - 9°55'33" = 89°41'11"

Con estos ángulos quedan resueltos los triángulos ABD y ACD puesto que se conocen un lado y 2 ángulos de cada uno de ellos.

Triángulo ABD

γ = 180° - (109°32'18" + 18°) = 52°27'42"
h = 447,214 x sen 52°27'42" = 354,6161 (Distancia BM del esquema)

Cateto AM = 447,214 x cos 52°27'42" = 272, 4839
Cateto DM = 354,6161 x cot 18° = 1.091, 3961

Distancia AD = 1,091,3961 + 272,4839 = 1.363,880

azimut BD = 63°26'06"+ 109°32'18" = 172°58'24"
azimut AD = 172°58'24" + 18° = 190°58'24"

Coordenadas de D

N = 1.700 + 1.363,880 x cos 190°58'24" = 361,058
E = 900 + 1.363,880 x sen 190°58'24" = 640,382

Triángulo ACD :

Para comprobación, se resuelve el problema con el triángulo ACD

γ = 180° - (89°41'11" + 28°) = 62°18'49"
h = 640,312 x sen 62°18'49" = 566,999

Cateto = 640,312 x cos 62°18'49" = 297,509

Dist = 566,999 x cot 28° = 1.066,369

Distancia AD = 1.066,360 + 297,509 = 1.363,88 **LQQD**

9.6 Orientación astronómica

La poligonal base de un levantamiento topográfico debe estar orientada hacia el Norte verdadero. Esta orientación se calcula mediante una observación solar, porque la declinación del Sol con respecto al ecuador está tabulada para todos los dias del año vigente, en publicaciones oficiales. Las tablas dan la declinación para las 0^h de Greenwich, pero puede calcularse la declinación local para cualquier hora, conociendo la variación de ella en 24^h , que también está tabulada.

Las técnicas de la observación serán demostradas por el profesor en las clases de práctica.

El Sol se mueve en el cielo según una trayectoria que se desvía continuamente del ecuador terrestre. Estas desviaciones se denominan Declinaciones. Esta aparente trayectoria se llama la Eclíptica.

a) Variación de la declinación durante el año:

La Eclíptica es la curva descrita por la intersección del plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, con el Ecuador Terrestre. Como el eje de la Tierra no es normal al plano de su órbita, al rotar ella sobre su eje, la declinación del Sol varía con respecto al Ecuador terrestre. La Eclíptica define las estaciones.

La Eclíptica corta al Ecuador en los Equinoccios, en los cuales la declinación solar es nula pero su variación diaria es máxima. El tiempo entre dos Equinoccios se llaman Solsticios, uno de Verano y otro de Invierno. Cada Solsticio tiene un punto llamada Coluro en la cual la declinación es máxima pero su variación es nula. La declinación en los Coluros no puede ser mayor de 23°27', que es la latitud de los Trópicos de Cancer (Al Norte) y de Capricornio (Al Sur). (Ver anexos al final de este tema) Las variaciones de la declinación durante el año, se producen así :

En el Solsticio de Invierno:

≈21-Marzo	Equinoccio de Primavera	declinación 0°
≈21-Junio	Coluro de Primavera	declinación +23°27'
≈21-Sept	Equinoccio de Otoño	declinación 0°

En el Solsticio de verano:

≈21-Dic	Coluro de Otoño	declinación -23°27'
≈21-Marzo	Equinoccio de Primavera	declinación 0°

En el hemisferio Norte, el día más largo del año coincide con el Coluro de Primavera y el día más corto con el Coluro de Otoño. En el hemisferio Sur es al revés.

Si el año tuviese 360 dias exactos, el dia 24 horas exactas y el eje de la tierra no tuviera Precesión, las Declinaciones serían idénticas todos los dias de todos los años y las fechas de los Equinoccios también.

Como esto no es así, las casas especializadas publican todos los años un Efemérides que contiene las Declinaciones diarias para 0^h Greenwich del Sol y de otros astros, para ese año.

El Gobierno de los Estados Unidos publica anualmente el "The American Efemerides and Nautical Almanac" en el cual también se encuentran las variaciones diarias de las Declinaciones del Sol y otras estrellas, que se usan normalmente para la navegación. (Ver anexos al final de este tema)

b) Análisis de la influencia de la hora

Cuando el Sol está en elongación, pasa por el meridiano local. En ese momento es el mediodía local. Por convenio internacional se han adoptado horas oficiales que varían en una hora cada 15° de longitud, siendo la hora 0^h la correspondiente a medianoche del meridiano 0° , que pasa por el Observatorio de Greenwich en Inglaterra.

Para convertir las horas oficiales a las equivalentes en el meridiano de Greenwich, las que están al Oeste se les suma la diferencia y las que están al Este debe restarse la diferencia.

Venezuela está entre los 60° y 74° de longitud Oeste, por lo que a la hora oficial se le deben sumar 4 horas (60/15 = 4 horas), para convertirla a la hora del meridiano de Greenwich.

De acuerdo a esas Longitudes, la hora oficial de Venezuela coincide con la hora local sólo en la región del Delta del Orinoco 60°/15 = 4 horas

En cambio, en el extremo Oeste, en el Estado Zulia, la diferencia horaria con Greenwich es de 74°/15 = 4^h56^m.

Antes de entrar en el convenio horario internacional, la hora oficial de Venezuela era 4^h30^m más temprano que en Greenwich.

Para analizar la influencia de la hora en el cálculo de un azimut, supongamos como ejemplo una observación hecha a las 9^h30^m hora oficial de Venezuela para condiciones extremas, en las cuales las variaciones diarias de la declinación son máximas ≈ 0°23'27" (Promedio en los dos Equinoccios).

Hora de Greenwich según la horal oficial = 13^h30^m, para la cual, la corrección de la declinación es de $13^h30^m \times 0^h23^m27^s/24$ = 0°13'11"

Hora de Greenwich según la hora local promedio = $9^h30^m + 4^h28^m = 13^h58^m$ siendo la corrección de la declinación $13^h58^m \times 0^h23^m27^s/24$ = 0°13'39"

Hora de Greenwich según la hora local extrema = $9^h30^m + 4^h56^m = 14^h26^m$ siendo la corrección de la declinación $14^h56^m \times 0^h23^m27^s/24$ = 0°14'35"

Se observa que las diferencias en la corrección varían entre 0,5' y 1'. Como la declinación entra en el cálculo con su coseno, la variación de los resultados es pequeña y menores que los errores que puedan cometerse en la lectura de un ángulo vertical en el circulo de un teodolito. Por esta razón el uso de la hora oficial en los cálculos del azimut es aceptable.

Para el cálculo de azimutes con gran precisión, es preferible obtener la diferencia horaria local con Greenwich, tomando en cuenta la hora local de la estación que se obtiene dividiendo su longitud por 15. Esta longitud puede obtenerse leyendola de los planos 1 : 25.000.

c) <u>Ejemplo de cálculo de la declinación</u>

Fecha = 9 - Febrero - 1972

Hora oficial promedio	= 9^h30^m	
Diferencia con 0^h Greenwich	= 4 horas	
Hora observación Greenwich	= 9,5 + 4 = 13,5	≈ 13^h30^m
Declinación 0^h Greenwich	= -15°01'35"	≈ -15, 0263889
Declinación a las 24^h GW	= -14°42'28",1	≈ -14,7078056

<u>Variación en 24 horas</u>

-14,7078056 -15, 0263889 = + 0,3185833 ≈ 0°19'06",9
Variación por hora = + 0,3185833/24 = 0,0132743 ≈ 0°00'47",8
Corrección = 0,0132743 x 13,50 = 0,1792031 ≈ 0°10'45",1
Declinación = -15,0263889 + 0,1792031 = -14,8471858 ≈ -14°50'49",9

d) Cálculo del azimut al Sol :

Para el cálculo del azimut al Sol, debe medirse la altura promedio del mismo, a la hora promedio oficial de la observación. Esta altura (Angulo vertical) debe ser corregida por efecto de lo siguiente :

La refracción	= Que depende del ángulo vertical medido.
El paralaje	= Porque el ángulo vertical se mide desde la superficie de la tierra, pero el teodolito se apunta al centro del Sol.
La temperatura	= Porque afecta la refracción.
La cota de la estación	= Porque afecta al paralaje

Estos factores de corrección se pueden considerar constantes en el tiempo y también están tabulados en los Efemérides mencionados anteriormente.

Supongamos los siguientes datos adicionales :

Latitud de la Estación	= 10°30'
Altura promedio del Sol	= 30°
Factor por refracción	= -1,66
Factor por paralaje	= 0,13
Cota de la estación	= 300 mts , Factor 0,98
Temperatura	= 30° ; Factor 0,935

Altura corregida: = 30°+[(-1,66x0,98x0,935)-0,13]/60 = 29°58'20",9

Con la declinación, la latitud y la altura, se calcula el coseno del azimut:

$$\cos Z = \frac{\text{senD} - (\text{senA} \times \text{senL})}{\cos A \times \cos L} = \frac{-0{,}2562420 - (0{,}49958401 \times 0{,}18223553)}{0{,}86612720 \times 0{,}9835491}$$

cosZ = -0,40772530 ; azimut al Sol = 114°03'43",2

Si la observación solar se realiza en las mañanas (Entre 8^h30^m y 10^h30^m) , cosZ cae en los cuadrantes I y IV y el azimut al Sol resultante debe estar aproximadamente entre 60° y 120° (El Sol está al ESTE)

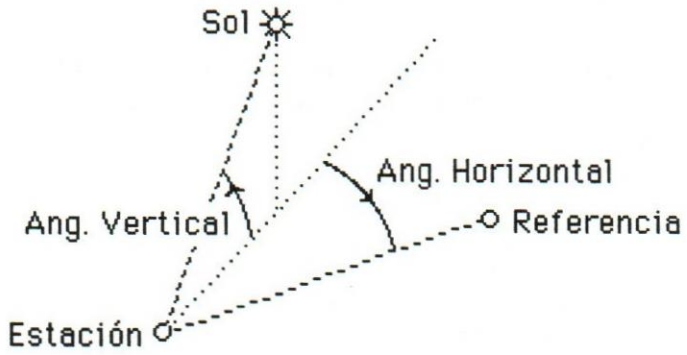
Si la observación solar se realiza por las tardes (Entre 14^h30^m y 16^h30^m) cosZ cae en los cuadrantes II y III, y el azimut al Sol resultante debe estar aproximadamente entre 240° y 300° (El Sol está al OESTE)

En observaciones solares matutinas , para ± cosZ , azimut al Sol= acosZ

Por las tardes, para cosZ positivo, azimut al Sol = acosZ + 180°

Para cosZ negativo, azimut al Sol = 360° - acosZ

También debe haberse medido el ángulo horizontal desde la estación a otro punto fijo en el terreno. Para calcular el azimut de la linea entre ambos, se suma este ángulo al azimut solar calculado, lo cual es el objetivo de todo el ejercicio



UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

Tema 10 Cubicación

10.1 Conceptos generales

La cubicación del movimiento de tierra es una operación aritmética sencilla, pero de mucha responsabilidad, por las grandes cantidades de dinero que normalmente están involucradas.

Antes de programar y presupuestar un movimiento de tierras, el ingeniero a cargo debe disponer de un exhaustivo Informe Geotécnico del área por intervenir. Dicho Informe debe abarcar básicamente los siguientes puntos :

a) La composición del suelo hasta más abajo de la cota a la cual el área involucrada deba ser intervenida. No son aceptables meras interpolaciones de sondeos espaciados. Deben estar identificadas las arenas, gravas, arcillas y su tipo, las rocas y su morfología. Debe indicar la presencia de minerales perniciosos como esquistos grafitosos.

b) Las características geofísicas del suelo, como coeficiente de compactación, índice de plasticidad y permeabilidad. Es importante el conocimiento de los buzamientos y orientación general de los estratos y diaclasas.

Los métodos más usados para medir los volúmenes de tierra son por medio de una cuadrícula o por medio de perfiles transversales.

10.2 Cubicación por medio de una cuadrícula :

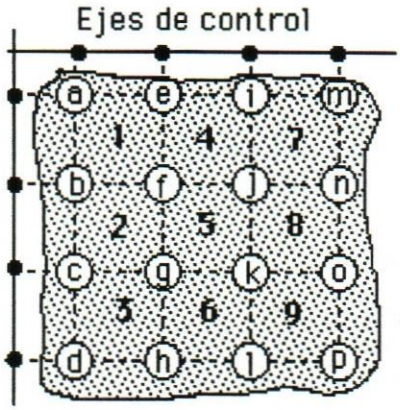
Este método es ideal para grandes áreas, como explotaciones de minerales a cielo abierto, urbanizaciones, instalaciones industriales, vasos para represas y otras semejantes.

Consiste en la implantación en el terreno de dos ejes ortogonales situados fuera del área a ser intervenida, que sirvan de control y apoyo, estaqueados de acuerdo a la longitud de los lados de la cuadrícula adoptada y nivelados sus nodos. La longitud de dichos lados debe fijarla el ingeniero a cargo, de acuerdo a las características de la obra y del terreno.

Después de extraído el material, se vuelve a replantear la cuadrícula y se nivela. El volúmen del material removido (o amontonado) se calcula a partir de las diferencias de cotas entre ambas nivelaciones.

Este método es cómodo para evaluar el progreso de una obra, ya que pueden calcularse los volúmenes parciales en lapsos de tiempo pre-establecidos.

Supongamos una cuadrícula como la del esquema :



Si llamamos a la diferencia de las cotas entre 2 nivelaciones por la letra que identifica cada nodo, se tiene que el volúmen excavado (o amontonado) en cada cuadro es igual al promedio de las diferencias de cota medidas en sus esquinas, multiplicado por el área de cada cuadro.

Promedio de diferencias de cota en nodos del cuadro 1 = (a+b+e+f)/4
" " " " " " " " cuadro 2 = (b+c+f+g)/4
" " " " " " " " cuadro 3 = (c+d+g+h)/4
" " " " " " " " cuadro 4 = (e+f+i+j)/4
" " " " " " " " cuadro 5 = (f+g+j+k)/4
" " " " " " " " cuadro 6 = (g+h+k+l)/4
" " " " " " " " cuadro 7 = (i+j+m+n)/4
" " " " " " " " cuadro 8 = (j+k+n+o)/4
" " " " " " " " cuadro 9 = (k+l+o+p)/4

El volúmen excavado (o amontonado) será la suma de estos volúmenes parciales.

Al hacer la sumatoria, se observa que las diferencias de cota en los nodos de las esquinas a, d, m, p aparecen una sola vez, las diferencias de cotas en los nodos laterales b, c, e, i, n, o h, l aparecen 2 veces y

las diferencias de cota en los nodos interiores f, g, j, k aparecen 4 veces

De allí se deduce la siguiente regla práctica, cualquiera que sea la cantidad de cuadros, aún cuando la cuadrícula no sea cuadrada :

- Se suman las diferencias de cota en los nodos de las esquinas
- Se suman las diferencias de cota en los nodos de los lados y se multiplica por 2
- Se suman las diferencias de cota en los nodos interiores y se multiplica por 4

Se suman estos 3 resultados y se divide entre 4. Este cociente debe multiplicarse por el área de un cuadro. Las unidades de las cotas y las de la cuadrícula deben ser las mismas.

Este método es fácilmente programable en computadoras. Si se conserva el registro de las cotas originales, cada vez que se anoten las cotas de una nueva nivelación, se obtiene el volúmen acumulado hasta la fecha y por diferencia, el volúmen movido en un lapso de tiempo determinado.

Esta manera de controlar el movimiento de tierras es muy útil cuando el ingeniero a cargo deba establecer un cronograma de pagos.

10.3 Cubicación por medio de secciones transversales

Este método se aplica generalmente cuando el área intervenida es una faja larga y estrecha, como para una carretera, ferrocarriles, acueductos, oleoductos, tendidos eléctricos y otros semejantes.

Este tipo de levantamiento se apoya generalmente en una poligonal cerrada, la cual es estaqueada y nivelada a intervalos regulares.

El método consiste en levantar y dibujar perfiles transversales en cada una de las estacas niveladas, agregar a ellos la sección típica de la obra a construir y calcular el área resultante. La cubicación se realiza aplicando la fórmula del prismoide a las áreas sucesivas, según la cual el volúmen comprendido entre 2 secciones consecutivas es igual al promedio de sus áreas multiplicada por la distancia entre ellas.

Para obtener volúmenes aceptables con este método, es necesario que las secciones sean tomadas a intervalos pequeños, que no haya

cambios bruscos en el perfil entre ellas y que sean razonablemente paralelas entre sí. El intervalo regular entre ellas la fija el ingeniero responsable, de acuerdo a las condiciones topográficas, usualmente entre 20 y 40 metros. No obstante, debe tomarse una sección adicional en cualquier cambio brusco del perfil entre 2 estacas del intervalo regular.

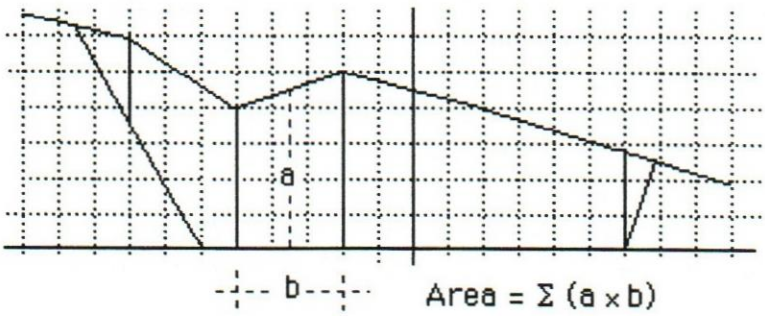
En una carretera, cuando las curvas tienen radios muy pequeños, los volúmenes obtenidos por la fórmula del prismoide deberían corregirse por curvatura. No obstante, los radios de curvatura usados normalmente no son lo suficientemente pequeños como para justificar el cálculo, bastante laborioso, de dichas correcciones.

El cálculo del área de una sección puede hacerse de varios modos, pero es el ingeniero a cargo el que decide el método a usar.

a) Por medio de un planímetro polar, que en esencia es un integrador mecánico.

b) Por medio de un moderno planímetro electrónico, en serie con una computadora que contenga el programa apropiado.

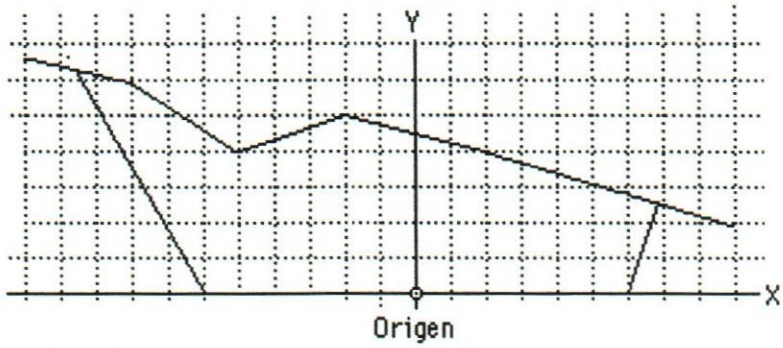
c) Dividiendo gráficamente el área en figuras geométricas, cuyas áreas puedan ser calculadas fácilmente.



En la figura, se ha supuesto la sección dividida en trapezoides y triángulos. Para facilitar el cálculo, se divide el área en trapezoides espaciados uniformemente. En este caso, el cálculo se realiza sumando el promedio de las bases (a) de cada trapezoide y multiplicando luego esa suma por el espaciamiento común (b). El procedimiento es esencialmente gráfico. Siempre podrá haber pequeñas porciones que deberán calcularse aparte. Este método es muy popular porque puede realizarlo personal sin entrenamiento especial.

d) Superponiendo a las secciones un papel cuadriculado transparente y contando los cuadrítos dentro de la sección. También puede ser hecho por personal sin entrenamiento especial.

e) Por medio de una aplicación del método de la doble distancia meridiana. Para ello, se adopta como eje de las ordenadas el eje geométrico de la sección y como origen el centro nivelado de ella.

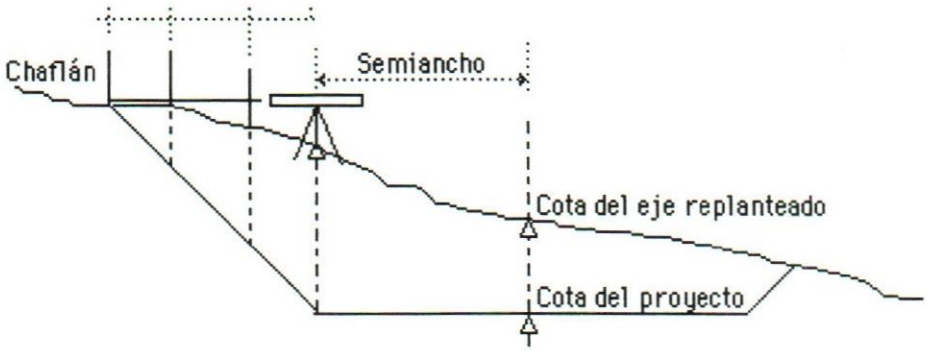


Se obtienen gráficamente las coordenadas de todos los puntos del contorno de la sección y se calcula el área según el método expuesto en el Tema 8 (página 80) de estos Apuntes. Es práctica común restar a las cotas un valor entero, para reducir a pocos dígitos las ordenadas.

3.4 Chaflanes

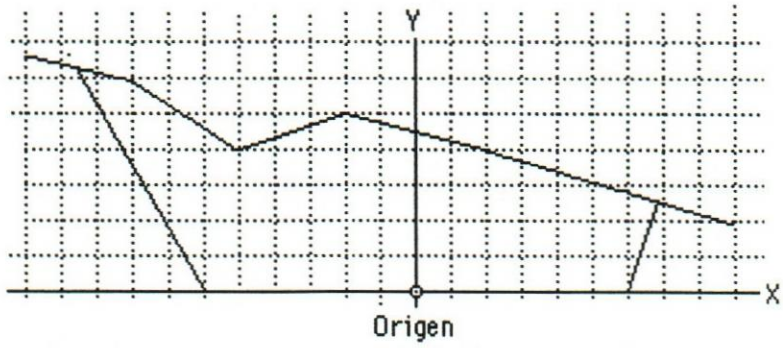
El chaflán o estacas de talud, son marcas que se implantan en el terreno para indicar el punto donde debe comenzarse la excavación en una ladera o el comienzo de un relleno. Los datos necesarios para implantar un chaflán son :

a) Cota en el eje del proyecto del punto replanteado
b) Ancho de la explanación
c) Pendiente del talud



d) Superponiendo a las secciones un papel cuadriculado transparente y contando los cuadritos dentro de la sección. También puede ser hecho por personal sin entrenamiento especial.

e) Por medio de una aplicación del método de la doble distancia meridiana. Para ello, se adopta como eje de las ordenadas el eje geométrico de la sección y como origen el centro nivelado de ella.

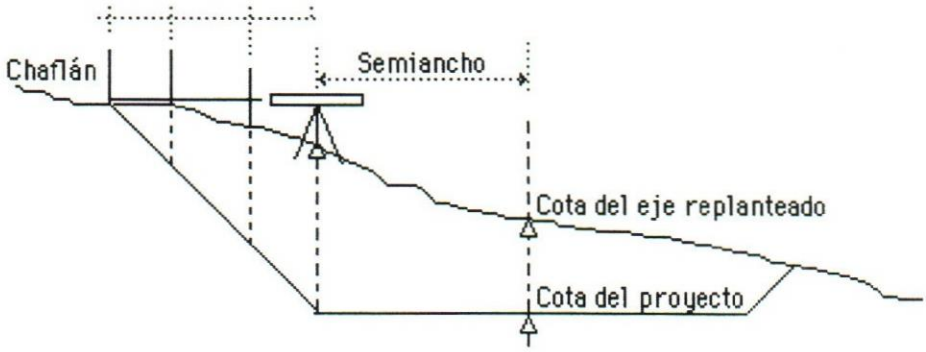


Se obtienen gráficamente las coordenadas de todos los puntos del contorno de la sección y se calcula el área según el método expuesto en el Tema 8 (página 80) de estos Apuntes. Es práctica común restar a las cotas un valor entero, para reducir a pocos dígitos las ordenadas.

3.4 Chaflanes

El chaflán o estacas de talud, son marcas que se implantan en el terreno para indicar el punto donde debe comenzarse la excavación en una ladera o el comienzo de un relleno. Los datos necesarios para implantar un chaflán son :

a) Cota en el eje del proyecto del punto replanteado
b) Ancho de la explanación
c) Pendiente del talud



El procedimiento es como sigue :

1.- Desde el eje replanteado en el terreno, se coloca una estaca en la vertical del extremo de la explanación y se calcula alli la cota del terreno con un nivel. Se calcula por diferencia la profundidad de la excavación en ese punto.

2.- Se estaciona un nivel en dicha estaca y se van calculando cotas en el terreno, alejando la mira. Como estas distancias son cortas, suele usarse un nivel de mano.

3.- Como se conoce la pendiente del talud, se calculan las cotas sobre él, para cada distancia medida en el terreno. Por diferencia, se calcula la profundidad de la excavación en cada punto.

4- A medida que se aleja la mira, esa profundidad va disminuyendo, si la pendiente del talud es mayor que la del terreno. Cuando esa profundidad sea nula, se ha encontrado la posición del chaflán.

5.- Si la pendiente del terreno es mayor que la del talud, no es posible colocar un chaflán.

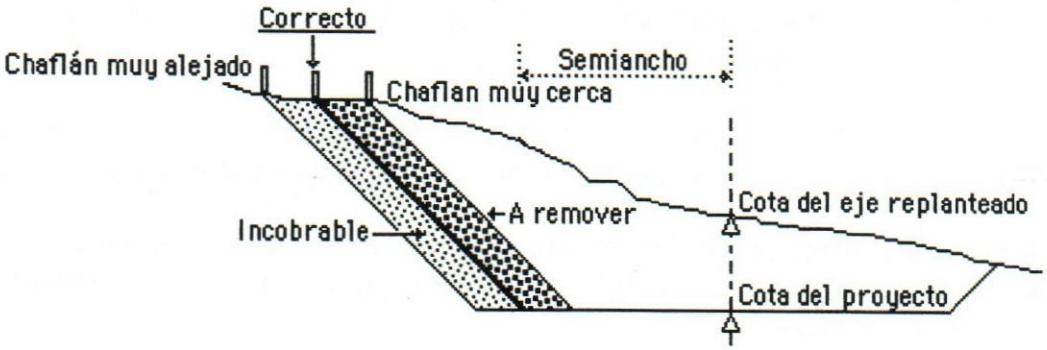
Para la colocación de chaflanes en el pie de un terraplén, la operación es igual, pero considerando que las cotas en el talud disminuyen en vez de aumentar. El procedimiento debe ser explicado por el profesor de prácticas en el terreno.

Si se cuenta con secciones transversales confiables, algunos veces se opta por medir gráficamente la distancia a la que se debe colocar el chaflán del eje replanteado. El procedimiento debe ser aprobado por el ingeniero a cargo.

No es posible enfatizar suficientemente, la importancia que tiene la colocación correcta de los chaflanes.

Si se colocan demasiado alejados, se produce una excavación mayor que la presupuestada, que generalmente es incobrable.

Si se colocan demasiado cerca, al terminar la excavación, el extremo del talud excavado no produce el ancho de explanación proyectada. La reparación de este error es muy costoso y generalmente es el ingeniero responsable quién carga con ellos.



Más costosa aún es la reparación de los taludes excavados con un deficiente control de su pendiente. Es deber del ingeniero residente de la obra vigilar la excavación.

UCAB
Curso de Topografía
APUNTES

Tema 11 Replanteo

11-1 Conceptos Generales

Se entiende por replanteo, la implantación de marcas en el terreno que sirvan de base para la construcción de una obra, previamente proyectada. Generalmente los puntos básicos de un proyecto se definen matemáticamente por sus coordenadas, en un sistema rectangular plano.

La labor del Topógrafo es implantar dichas marcas en el terreno, de acuerdo a los planos que le suministre el ingeniero a cargo de la obra.

No obstante, como la responsabilidad final es la del ingeniero, éste debe estar familiarizado con los métodos para la implantación de dichas marcas.

Debe contarse con unas Referencias sólidamente implantadas, con coordenadas y cotas relacionadas con las del proyecto. Estas Referencias, ya descritas en el Tema 2 de estos Apuntes, deben abarcar todo el proyecto y a su vez, estar fuera del área que deba ser intervenida para la construcción de la obra.

11.2 Replanteo de lineas rectas

Las lineas rectas se replantean con un teodolito estacionado en un punto de origen, generalmente definido por sus coordenadas. Debe contarse con otra referencia para orientar el aparato, ya sea por el azimut u otro punto con coordenadas.

Cada tramo de la recta debe ser verificado por cualquier error de colimación del aparato. La técnica usual es la de usar una estaca con una cabeza plana en la cual se puedan hacer marcas, con el telescopio en posición directa e invertida. Se debe dejar una marca permanente, usualmente una tachuela especial, clavada en el medio entre las dos marcas anteriores.

Si las rectas son muy largas, como es el caso de ferrocarriles o carreteras, deben tomarse todas las previsiones para garantizar la

rectitud de esa recta, especialmente si deben replantearse en tramos sucesivos.

Las obras mencionadas se construyen en una faja de terreno previamente adquirido o expropiado y es preciso que su ubicación sea la planeada dentro de esa faja, que se llama "Derecho de Via".

11.3 Replanteo de curvas circulares

Por medio de abscisas y ordenadas desde la tagente :

El comienzo de la curva (TC) se replantea desde una Referencia y con el telescopio del teodolito orientado según la tangente al círculo en ese punto, se miden abscisas y ordenadas desde el TC, de acuerdo al radio de la curva.

Se escoge la longitud del arco según la progresiva que se replantea

$Ø = L / R$ (El ángulo al centro del arco resultante está en radianes)
Abscisas $= R \times \text{sen}Ø$
Ordenadas $= R(1 - \cos Ø)$

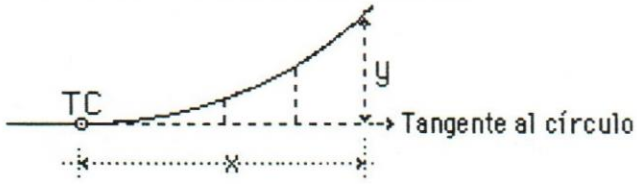
Las abscisas se miden con cinta desde el TC y las ordenadas se miden normales a la tangente, usualmente con una escuadra de agrimensor.

Este método tiene las siguientes ventajas:

a) Es simple de calcular.
b) Los errores no se trasladan porque los cálculos y las medidas son independientes para cada punto.
c) Los errores grandes son fáciles de detectar
d) Se tiene control sobre las progresivas a replantear

Tiene las siguientes desventajas

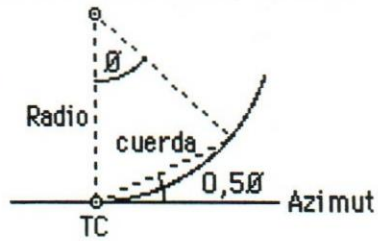
e) Requiere de una gran cantidad de picas por deforestar
f) No se abre una pica por el eje que debe nivelarse
g) Es incómodo en terrenos montañosos



La otra manera de replantear una curva circular, es aprovechando que el ángulo de deflexión entre la tangente a un arco de círculo y su cuerda es la mitad del ángulo al centro de dicho arco.

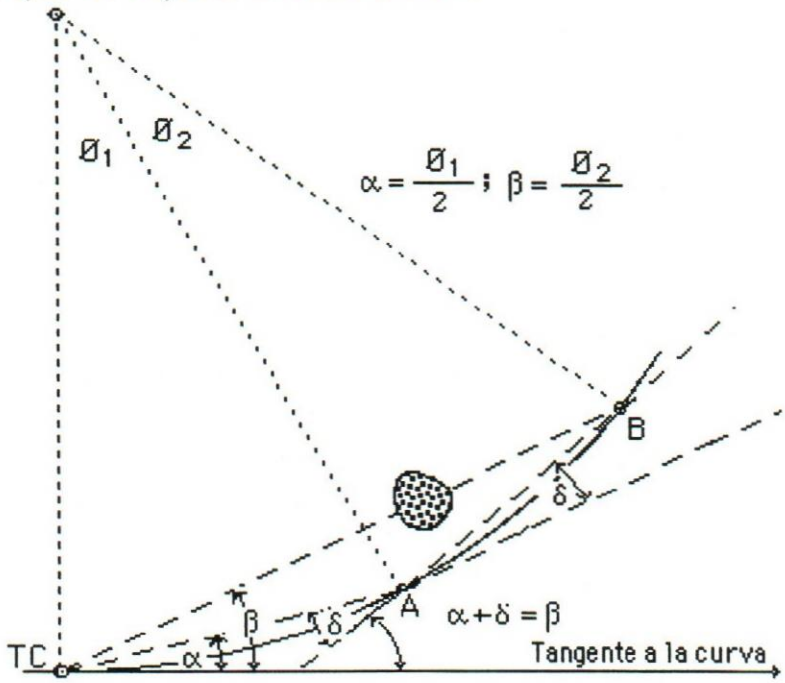
$\emptyset = R/L$ en radianes

Cuerda = $2R \times sen(\emptyset/2)$



De modo que si se calcula el ángulo al centro de un arco de longitud conocida y luego se calcula la longitud de la cuerda, se puede replantear cualquier punto desde el origen en el TC de la curva.

Puede suceder que parte de la curva no pueda ser replanteada desde el TC, porque se interponga un obstáculo. En este caso, el resto de la curva puede replantearse desde el último punto colocado, usando la técnica que se expone a continuación:



Para replantear el punto A del esquema, se debe orientar el teodolito según la tangente al círculo con lectura en 180° en su plato horizontal y luego se gira el telescopio hasta alcanzar el ángulo α, que es la mitad del ángulo al centro $\emptyset_1$. Se mide según esa visual la cuerda correspondiente previamente calculada. Se observa que se

tiene pleno control de las progresivas de los puntos replanteados, puesto que la longitud del arco se escoge a voluntad.

Como el plato horizontal del teodolito está graduado azimutalmente, los ángulos de deflexión a la izquierda se leen en retroceso de 360 (360 - α)

Si al continuar el replanteo, el punto B puede verse desde el TC, se gira el telescopio hasta alcanzar la lectura del ángulo β y se mide la cuerda AB desde A. Se continúa hasta que la visual llegue al final de la curva o que un obstáculo interrumpa la visual.

Si el punto B no puede verse desde el TC, se puede replantear de dos maneras:

a) Se estaciona el teodolito en el punto A y se orienta hacia el TC con lectura en 180°. Luego se voltea el telescopio y se mide el ángulo de deflexión que le correspondería al punto B, como si el punto A fuera el origen, que sería δ y que resulta para la longitud del arco AB. Se completa luego el replanteo midiendo según la visual, la cuerda correspondiente al arco AB, desde A.

   Tiene la ventaja de que, si el replanteo se hace por arcos iguales, los ángulos δ son todos iguales, con excepción del primero y el último, si se replantean progresivas múltiplos de una cantidad escogida como por ejemplo, cada 20 metros.

b) Se estaciona el teodolito en A y se orienta hacia el TC, pero conservando en el plato el ángulo α previamente medido. Se gira el telescopio hasta alcanzar la lectura del angulo β. En realidad lo que se hace es sumar los ángulos α y δ.

   El procedimiento será explicado en detalle por el Profesor en las prácticas de campo.

Tiene la ventaja de que se pueden calcular todas las deflexiones de las progresivas de los puntos que se van a replantear, como si fuera posible replantearlos todos desde el TC de la curva, evitándose así engorrosos cálculos en el campo, que pueden producir errores. El replanteo se hace por el eje de la obra, evitándose la apertura de picas innecesarias. Esta modalidad se conoce como el del "Replanteo Sistemático". Es el único práctico en terrenos montañosos.

Tiene la desventaja de que los errores accidentales de medición se acumulan. Si la curva es muy larga, a veces es necesario replantear puntos de control por coordenadas, para verificar la operación. Es práctica común replantear por coordenadas el centro del arco.

11.4 Replanteo de espirales clotoides

La geometría de la clotoide se estudia en los cursos de vialidad. Se exponen a continuación las fórmulas más corrientes para el cálculo de sus elementos.

$Rc \times Le = A^2$ siendo Rc el radio de la curva, Le es la longitud del arco de espiral seleccionado y A, que es una constante que define la escala de la espiral.

$Ø = Le/2Rc$;Ø es el ángulo al centro del arco de espiral en radianes.

Las abscisas y ordenadas sobre la tangente se deben calcular mediante un desarrollo en serie, cuyos términos generales son los siguientes :

$$y = L\left(\frac{Ø}{3} - \frac{Ø^3}{42} + \frac{Ø^5}{1320} - \cdots\cdots\right) = \sum L\left(\frac{Ø^{(2n-1)} \times (-1)^{(n+1)}}{(4n-1)(2n-1)!}\right)$$

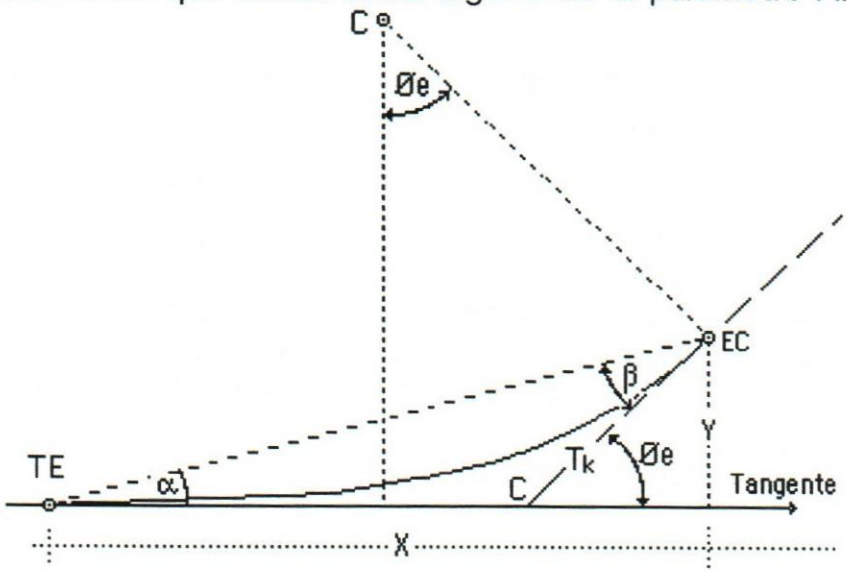
$$x = L - L\left(\frac{Ø^2}{10} - \frac{Ø^4}{216} + \frac{Ø^6}{9360} - \cdots\right) = \sum L - L\left(\frac{Ø^{(2n-2)} \times (-1)^n}{(4n-3)(2n-2)!}\right)$$

Tienen la ventaja de que convergen muy rápidamente. Generalmente sólo son necesarios los 2 primeros términos para obtener unos valores suficientemente precisos.

Los métodos para el replanteo de una espiral clotoide difieren poco de los usados para el replanteo de las curvas circulares. Ellos son:

11.4 a Por medio de abscisas y ordenadas desde la tangente a la espiral.

Tiene las mismas ventajas y desventajas del método similar para curvas circulares. Sinembargo, como las ordenadas sobre la tangente no son muy largas, produce menos picas que deforestar. Tiene la ventaja de que existen tabulaciones de las abscisas y ordenadas que tienen como argumento el parámetro A.



11,4 b Por medio de la espiral de 10 puntos.

Es un replanteo por medio de deflexiones y cuerdas, dividiendo la espiral en 10 arcos iguales. Este método aprovecha el hecho de que la clotoide es una figura homotética*, con lo cual se facilita el cálculo de las deflexiones.

*(Una figura homotética es aquella cuya forma depende de un solo factor de escala, como el círculo, el cuadrado, el triángulo equilátero etc)

El ángulo al centro de un arco de espiral es proporcional a la relación entre el cuadrado de la longitud de la porción de arco que se replantea y la longitud total del arco de espiral.

$$Ø = \frac{L^2}{2 \times R_c \times L_e} \quad y \quad Ø_e = \frac{L_e}{2 \times R_c}$$

Si la porción es un décimo de la longitud del arco de espiral total, se tiene que :

Para $L = 0{,}10L_e$; $\emptyset = \dfrac{(0{,}10L_e)^2}{2 \times R_c \times L_e} = 0{,}01\emptyset_e$

Para $L = 0{,}20L_e$; $\emptyset = \dfrac{(0{,}20L_e)^2}{2 \times R_c \times L_e} = 0{,}04\emptyset_e$ y asi sucesivamente

Con los ángulos al centro pueden calcularse los ángulos de deflexión, porque al dividir y/x resulta que:

$\alpha = \dfrac{\emptyset}{3} - C$, siendo $C = 0{,}0031\emptyset^3 + 0{,}0023\emptyset \times 10^{-5}$

El factor de corrección C, que es el resto de la división entre las series correspondientes, es muy pequeño y puede despreciarse. Para todo efecto práctico, el ángulo de deflexión es la tercera parte del ángulo al centro de la espiral. Esta modalidad presupone que toda la espiral puede replantearse desde el origen de ella.

Tene las siguientes ventajas:

a) Las deflexiones son simples de calcular.
b) Todas las cuerdas son iguales, siendo despreciable la diferencia entre el arco y la cuerda.
c) Puede dividirse la espiral en tantas porciones como se requiera, pero la división en 10 partes se encuentra tabulada, para un rango de Parámetros usuales.

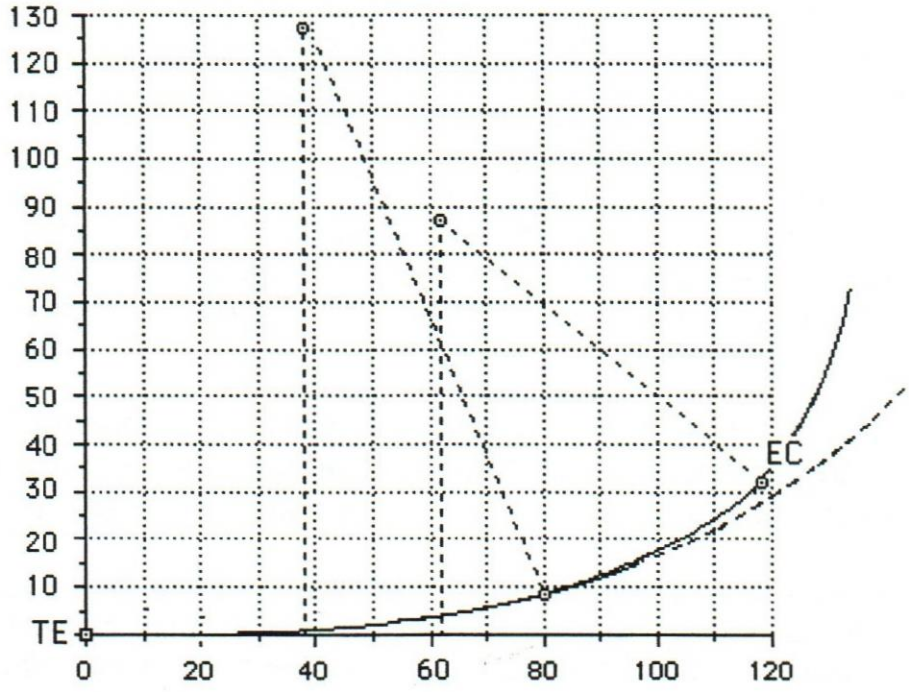
Tiene las siguientes desventajas:

a) Todas las señaladas para el replanteo sistemático en curvas circulares.
b) Cualquier obstáculo que impida ver el extremo de la espiral debe ser removido.

11.4 c Por medio del replanteo sistemático

Se debe tomar en cuenta que para cada punto en la espiral, hay un radio circular tangente a ella, derivado de la expresión. $R \times Le = A^2$. De las propiedades analíticas de la clotoide se deriva que la pendiente de sus tangentes varía directa y linealmente proporcional a su longitud y por lo tanto, el círculo tangente a ella en un punto cualquiera también lo es a la tangente de la espiral y diverge de ella a una rata constante. Por lo tanto, los ángulos de deflexión son la

suma del ángulo de deflexión de la espiral y el ángulo de deflexión correspondiente al círculo tangente.



La mejor manera de exponer este tipo de replanteo es por medio de un ejemplo numérico:

<u>Ejemplo :</u>

Se debe replantear la espiral de una curva de radio circular R = 200 que tiene al comienzo una espiral de Le = 80, siendo la progresiva del TE = 3+728

El ángulo al centro de la espiral es: Øe = 80/400 = 0,2 = 11°27'33"

Por lo tanto, los ángulos de deflexión son :

$$\alpha = \frac{11°27'33''}{3}\left(\frac{L}{L_e}\right)^2 - C \quad \text{siendo C negligible}$$

En esta expresión, la única variable es L, por lo que tiene un factor común :

$$f = \frac{11°27'33''}{3 \times 80^2} = 0{,}000597$$

Si la espiral sólo puede verse desde el TE hasta la progresiva 3+770, en ese trayecto el cálculo se dispone así, porque siendo el radio del circulo tangente en el TE ∞ , sus ángulos de deflexión son nulos :

Progresiva	L	$L^2 \times 0{,}000597$	α
3+728			
3+740	12	0,085944	0°05'09"
3+760	32	0,611156	0°36'40"
3+770	42	1,052811	1°03'10"

A partir de esa progresiva, los ángulos de deflexión deben recalcularse tomando en cuenta que en esa progresiva 3+770, el círculo tangente a la espiral si tiene un ángulo de deflexión que debe sumarse al ángulo de deflexión de la espiral. El cálculo se dispone así :

a) Se calcula el ángulo β de la figura anterior para orientar el teodolito según la tangente en 3+770. Se tiene que $\alpha + \beta = Øe$, pero $Øe = 3\alpha$, resultando $\beta = 2\alpha$ por lo cual β = 2 x 1°03'10" = 2°06'20"

b) Se estaciona el teodolito en la progresiva 3+770. Con el ángulo 2°06'20" fijo en el plato, se orienta el telescopio hacia el TE y luego se gira el teodolito hasta la lectura cero. De este modo, la visual queda en la tangente a la espiral y a su círculo tangente en ese punto.

c) El ángulo de deflexión siguiente es la suma del ángulo de deflexión del arco de espiral y la del círculo.

d) Se calcula el radio del círculo tangente a la espiral en ese punto, tomando en cuenta que el arco de espiral es 3770 - 3728 = 42 metros : R=(200 x 80)/42 = 380,95238

(El producto del radio por la espiral es constante a todo lo largo de ella, Re x Le = R x L)

e) Se calcula el factor común para los ángulos de deflexión correspondientes a ese círculo tangente. (El ángulo de deflexión de un arco de círculo es la mitad de su ángulo al centro)

$$\text{factor común} = \frac{180}{2 \times \pi \times 380{,}952381} = 0{,}0752007$$

f) El cálculo se dispone así :

Progresiva	L	$L^2 \times 0{,}000597$	$L \times 0{,}0752007$	Σ	α
3+770					
3+780	10	0,05970	0,75201	0,81171	0°48'42"
3+800	30	0,53730	2,25602	2,79332	2°47'36"
3+808	38	0,86207	2,85763	2,85763	3°43'11"

Este método tiene todas las ventajas anotadas para el replanteo sistemático de las curvas circulares.

Tiene también todas sus desventajas. Además, los cálculos son laboriosos, sobre todo si deben hacerse en el campo. Si mediante una inspección ocular se pueden prever los obstáculos que puedan obstruir la visual, pueden llevarse al campo las deflexiones ya calculadas.

Si es posible, es preferible remover el obstáculo. En todo caso, es el ingeniero a cargo el que decide cual método debe usarse y la forma de llevarlo al campo.

Como este procedimiento es programable, actualmente es frecuente que se lleven al campo todos los ángulos de deflexión ya calculados, como si hubiera que ocupar todas las progresivas. En el terreno se usa el cálculo que se pueda aplicar.