aac 4338

TESIS
IID 984
98

UNIVERSIDAD CATOLICA ANDRES BELLO

FACULTAD DE INGENIERIA

ESCUELA DE INGENIERIA INDUSTRIAL

"ESTUDIO ACERCA DE LA FACTIBILIDAD DE ADAPTACION DE ALGUNOS METODOS ESTADISTICOS AL CONTROL DE CALIDAD"

Este Jurado; una vez realizado el examen del presente trabajo ha evaluado su contenido con el resultado: SOBRESALIENTE

JURADO EXAMINADOR

Firma:	Firma:	Firma:
Nombre: FRANCISCO ARVELO	Nombre: TITO ZAMBRANO	Nombre: ELIAS GEORGES

REALIZADO POR: Alejandro Guzmán M.
Francisco J. Monteoliva M.

PROFESOR GUIA: Ingeniero Francisco Arvelo

FECHA: Abril de 1984

A Carmen de Guzmán, Blanca y mis hermanos.
A Angelina, Carmen, Cristina, Elda, Magaly, Milagros, Marcial, Francisco, Víctor y demás amigos sin los cuales la Universidad hubiera sido un esfuerzo algo aburrido.

Alejandro.

A la vida, que me ha dado tan estupenda familia y tan escogidos amigos.

Francisco José.

Agradecimientos:

Al Ingeniero Francisco Arvelo, por su apoyo, profesionalismo y contagioso espíritu de investigación.

A Diana, por realizar tan bello trabajo.

Al personal del laboratorio de materiales de la Universidad Católica Andrés Bello.

I N D I C E

SINOPSIS 1

CAPITULO I:

1.- Introducción 4
2.- Conceptos de pruebas de hipótesis 6
3.- Problemática de los métodos actuales utilizados para el control de la calidad 9
4.- Escalas de medición 12

CAPITULO II: "ENUMERACION Y ESTUDIO TEORICO DE LOS METODOS A EVALUAR"

1.- Introducción 14
2.- Procedimientos que utilizan datos de una población simple 16
2.1.- Prueba de los signos 16
Ejemplo 1 19
2.2.- Prueba de Wilcoxon 20
Ejemplo 2 24
2.3.- Método para proporciones 26
Ejemplo 3 30
3.- Procedimientos que utilizan datos de dos poblaciones independientes 31
3.1.- Inferencia acerca de parámetros de tendencia central 31
3.1.1.- Prueba de la mediana 31
Ejemplo 4 34
3.1.2.- Prueba rápida de Tukey 35
Ejemplo 5 39
3.1.3.- Prueba de la suma de los rangos o de Mann-Whitney-Wilcoxon 41
Ejemplo 6 45
3.2.- Inferencia acerca de la igualdad en parámetros de dispersión 47

3.2.1.- Prueba de Mood 47
Ejemplo 7 51
3.2.2.- Prueba de Sieguel-Tukey 52
Ejemplo 8 55
3.2.3.- Prueba de Moses 57
Ejemplo 9 60
4.- Procedimientos que utilizan datos de dos poblaciones relacionadas 62
4.1.- Prueba de los signos 62
Ejemplo 10 66
4.2.- Prueba de Wilcoxon para observaciones apareadas 67
Ejemplo 11 70
5.- Procedimientos que utilizan datos de "K" poblaciones independientes 71
5.1.- Prueba de Kruskall-Wallis 71
Ejemplo 12 73
5.2.- Extensión de la prueba de la mediana 74
Ejemplo 13 76
6.- Pruebas de correlación 78
6.1.- Pruebas de Cox y Stuart para tendencias . . . 78
Ejemplo 14 80
6.2.- Prueba de Spearman 81
Ejemplo 15 85
6.3.- Prueba de Kendall para correlación 86
Ejemplo 16 88
6.4.- Prueba de Friedman 90
Ejemplo 17 93
7.- Otras pruebas 95
7.1.- Prueba de secuencias 95
Ejemplo 18 97
7.2.- Límites de tolerancia 98

CAPITULO III: "INSTRUMENTACION AL CONTROL DE CALIDAD"

1.- Introducción 101

2.- Gráficos de control para las medianas 103
Formato tipo 2.2 105
3.- Prueba para la igualdad de medias de poblaciones independientes 107
3.1.- Prueba de la mediana 107
3.2.- Prueba de Mann-Whitney-Wilcoxon 108
Formato tipo 3.1.2 109
Formato tipo 3.2.2 111
4.- Prueba para la igualdad de medianas de poblaciones dependientes 114
Formato tipo 4.2 115
5.- Prueba de Kruskall-Wallis 117
Formato tipo 5.2 119
6.- Prueba para la unidad de parámetros de dispersión 121
6.1.- Prueba de Moses 121
Formato tipo 6.1.2 124
6.2.- Prueba de Siegel-Tukey 125
Formato tipo 6.2.2 127
7.- Pruebas de correlación 128
7.1.- Prueba de tendencias 128
Formato tipo 7.1.2 130
7.2.- Prueba de Spearman 132
Formato tipo 7.2.2 134
8.- Otras pruebas 136
8.1.- Prueba de secuencias 136
Formato tipo 8.1.2 139
Formato tipo 8.1.3. 140
8.2.- Determinación de especificaciones 142

CAPITULO IV: "EXPERIMENTACION"

1.- Introducción 146
Experimento Nº 1 147
Formato tipo 2.2 148

Experimento Nº 2 149
Formato tipo 3.1.2 150
Experimento Nº 3 151
Formato tipo 3.2.2 152
Experimento Nº 4 153
Formato tipo 6.1.2 154
Formato tipo 3.2.2 155
Experimento Nº 5 156
Formato tipo 6.2.2 157
Experimento Nº 6 158
Formato tipo 7.2.2 159
Experimento Nº 7 160
Formato tipo 7.1.2 161
Experimento Nº 8 162
Formato tipo 8.1.3 163
CONCLUSIONES 164
RECOMENDACIONES 168

APENDICE I:

Tabla 1.- Distribución de probabilidad binomial . . . 172
Tabla 2.- Curva normal 191
Tabla 3.- Distribución Chi-cuadrado 192
Tabla 4.- Valores críticos para la prueba de Wilcoxon . 193
Tabla 5.- Valores críticos para la prueba de Tukey . . 194
Tabla 6.- Cuartiles de la prueba Mann-Whitney-Wilcoxon 196
Tabla 7.- Cuartiles de la prueba de Spearman 199
Tabla 8.- Valores críticos para la prueba de Mood . . 200
Tabla 9.- Cuartiles para la prueba de Kruskall-Wallis . 203

APENDICE II:

Números al azar 204

BIBLIOGRAFIA 207

INDICE DE TABLAS

Tabla 3.1.- Límites para los gráficos de control de la mediana 106

Tabla 3.2.- Rangos de aceptación de la prueba de Mann-Whitney-Wilcoxon 112

Tabla 3.3.- Tabla de Wilcoxon 116

Tabla 3.4.- Valores críticos para la prueba de Kruskall-Wallia 120

Tabla 3.5.- Valores críticos para la prueba de tendencia . 131

Tabla 3.6.- Intervalos críticos para la prueba de Spearman. 135

Tabla 3.7.- Valores "V" para la prueba de secuencias. . . . 141

Tabla 3.8.- Tamaño de muestra para la determinación de especificaciones 144

SINOPSIS

El campo del control de la calidad es ante todo una extensión del universo estadístico, debido a que trabaja mediante una serie de inferencias acerca de una población muestreada.

El objetivo de esta tesis es presentar una serie de métodos estadísticos aplicables en varios campos del control de la calidad, los principios teóricos en que están basados y una instrumentación apropiada de aplicación de los mismos.

El propósito de presentar estos métodos no es el de conseguir una eficiencia superior al de los métodos tradicionalmente utilizados ni el de tratar de sustituirlos, sino el de solventar una serie de deficiencias que éstos presentan, no en si mismos sino en la forma en que son aplicados, pues éstos requieren de una serie de premisas que por lo general no son comprobadas antes de proceder a su aplicación en caso de que estas premisas no sean cumplidas no existe una metodología apropiada para el caso.

El trabajo será subdividido en cuatro capítulos concernientes a la metodología utilizada para alcanzar los objetivos prouestos.

En el primer capítulo se explican las causas de las deficiencias en la utilización de los métodos tradicionales en el control de la calidad y señalando cómo estos campos pueden ser subsanados por los métodos estadísticos propuestos en el trabajo, en el mismo capítulo se muestran ciertos principios estadísticos básicos sobre los contrastes de hipótesis, cuyo conocimiento se hace necesario para el cabal entendimiento del trabajo. En el segundo capítulo se presentan los métodos estadísticos propuestos después de haber realizado una escogencia inicial sobre la bibliografía existente que es casi en su totalidad en inglés, además de mostrar los métodos es explicado el basamento teórico que los sustenta. En el tercer capítulo se procede a mostrar la instrumentación propuesta de aquellos métodos del segundo capítulo que se

bas hechas los métodos detectaron la situación real de la muestra.

C A P I T U L O I

1.- INTRODUCCION

El trabajo que se presenta en este informe centra su interés en la existencia de algunos métodos estadísticos llamados no paramétricos, éstos métodos presentan actualmente un auge en su aplicación en ciencias tales como la psicología y otras ciencias sociales, debido a su fácil aplicación y sencillez de entendimiento.

Uno de los propósitos de la estadística es el de hacer inferencias (predecir, decidir) sobre algunas características de una población en base a la información obtenida de un grupo de elementos de esa población que se denomina muestra. Las expresiones matemáticas que determinan y cuantifican estas características se denominan parámetros estadísticos, estos parámetros quedan determinados si la población presenta ciertas condiciones, tales como tener una distribución de probabilidades. Por ello en la estadística tradicionalmente se ha hecho énfasis en el estudio de las distribuciones más comúnmente encontradas, tales como la distribución normal, la exponencial, la Poisson, etc., y la forma en como los parámetros estadísticos (varianza, media, mediana, etc.) quedan determinados en consecuencia.

Pero ¿qué ocurre si la población no presenta una distribución de probabilidad conocida como las anteriores, o si resulta excesivamente costoso o imposible el determinar si la población la presenta o no? A veces la población a muestrear es muy pequeña, o la experiencia previa con el tipo de datos utilizados no es significativa, y por lo tanto se imposibilita la comprobación.

En estos casos los métodos no paramétricos proveen de una técnica de análisis que permite conocer las características de la población que se buscan, con un mínimo en las suposiciones que se deben hacer de la población encuestada.

Muchas veces los métodos paramétricos se utilizan sin

el debido conocimiento de los principios que los rigen. Por falta de tiempo o personal calificado, estos métodos se aplican incluso sin saber si la población presenta la distribución de probabilidades en las que se apoya el método.

Los métodos no paramétricos por sus características ya mencionadas, pueden resolver este problema ya que no exigen sino un mínimo de condiciones y pruebas previas, y su instrumentación por lo general no es de gran dificultad.

En algunos experimentos la respuesta no resulta cuantificable, es decir pueden generar mediciones que son ordenables pero la posición de la respuesta en una escala es arbitraria. Esto suele ocurrir en estudios de consumo o al cuantificar criterios subjetivos, tales como el atractivo de un producto, la calidad de su olor, eac. Al contrario de los métodos tradicionales, los métodos no paramétricos también brindan utilidad para resolver estos casos.

2.- CONCEPTOS DE PRUEBAS DE HIPOTESIS

Para entender a cabalidad los procedimientos e implicaciones prácticas de los métodos que daremos a conocer, resulta necesario tener un concimiento preciso de ciertos conceptos estadísticos que determinan el diseño de un experimento.

El objetivo de una prueba estadística es probar una hipótesis acerca de uno o más parámetros de una población. La hipótesis a ser probada se denominará hipótesis nula y será denotada por el símbolo H_0. La hipótesis nula puede ser falsa o verdadera, si es falsa debe existir una hipótesis alternativa denotada por H_1, que debe ser verdadera.

Si queremos conocer cuándo una moneda no se encuentra alterada, la probabilidad de que al lanzarla al aire caiga del lado del sello debe ser igual a la probabilidad de que salga del lado cara. Así, las hipótesis correspondientes serían:

$$H_0: p = \tfrac{1}{2}$$
$$H_1: p \neq \tfrac{1}{2}$$

siendo p la probabilidad de que la moneda de que la moneda caiga del lado del sello, por ejemplo.

Una vez planteada la hipótesis nula y alternativa, se debe decidir de acuerdo a los resultados de una muestra qué acción se va a tomar. Se debe elegir una estrategia de decisión que lleve a aceptar o rechazar la hipótesis nula. Por ejemplo, en el caso de la moneda se puede rechazar la hipótesis nula ($p = \tfrac{1}{2}$), si al tomar una muestra menos de la cuarta parte o más de las tres cuartas partes de ella salieron sello, (si $\hat{p} \leq \tfrac{1}{4}$ o $\hat{p} \geq \tfrac{3}{4}$). En el ejemplo el espacio muestral "S" es el conjunto de posibles valores de p.

La estrategia divide al espacio "S" en dos subconjuntos S_0 y S_1; siendo S_0 el subconjunto de puntos del espacio muestral que lleva a aceptar a H_0, y S_1 el conjunto que lleva a rechazar

a H_0.

En el ejemplo, $S_0 = (p/(\frac{1}{4} \leq \hat{p} \leq \frac{3}{4})$, y

$S_1 = (p/(\hat{p} \leq \frac{1}{4}$ o $\hat{p} \geq \frac{3}{4}))$.

Así, una prueba de hipótesis es una función de decisión que lleva a aceptar o rechazar la hipótesis nula H_0.

Al subconjunto S_1 que hace rechazar a H_0 se le conoce como "región crítica" o "región de rechazo"; mientras a S_0 se le conoce como "región de aceptación", y a los límites que separan estas dos regiones se les conoce como valores críticos. En el ejemplo, los valores críticos son $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$.

Cuando una hipótesis es aceptada o rechazada con base a los resultados de una muestra, siempre exrste la posibilidad de tomar una decisión equivocada. Estos errores pueden ser de dos tipos, el error Tipo I, en el que se rechaza la hipótesis H_0 siendo verdadera, y el error Tipo II en el que se acepta H_0 siendo falsa.

Generalmente, las probabilidades de errores se representan por:

$$\beta = P(II) = P\ [S\ E\ S_0\ /H_0 \text{ es falsa}]$$

$$\alpha = P(I) = P\ [S\ E\ S_1\ /H_0 \text{ es verdadera}]$$

La probabilidad de cometer el error Tipo I (α) se conoce también como "nivel de significación del contraste". El hecho de que los resultados muestrales caigan en la región de contraste puede deberse a dos razones: a) que la hipótesis sea falsa, esperando así que la muestra no los compruebe, b) que siendo H_0 verdadera, los resultados de la muestra nos hagan pensar lo contrario, ésto sucede con probabilidad igual a α.

Así, un incremento en el tamaño de la región crítica aumenta a α, y simultáneamente disminuye a β, para un tamaño de muestra fijo. Y viceversa si la región crítica disminuye. Si se aumenta el tamaño de la muestra, se tiene más información y así

y decrecerán.

Con respecto a la muestra utilizada para realizar la prueba de hipótesis, debemos conocer el significado de ciertas exigencias que a veces deben cumplir, tales como el que la variable sea aleatoria, ésto quiere decir que pueda tomar cualquier valor de entre todos los contenidos de un intervalo. Si son varias las muestras puede exigirse que éstas sean mutuamente independientes, lo que implica que la probabilidad de que una muestra tome un valor específico no depende de los valores tomados por otra muestra.

3.- PROBLEMATICA EN LOS METODOS ACTUALES UTILIZADOS PARA EL CONTROL DE LA CALIDAD

Las pruebas utilizadas en el control de la calidad no son otra cosa sino la instrumentación específica de pruebas de hipótesis estadísticas. Esto es debido a que el control se basa en muestreos parciales de la población, conllevando así un mejoramiento en los costos y un nivel de riesgo probabilístico. Pero el hecho real es que las pruebas de hipótesis tradicionales suponen parámetros y regiones críticas en las que se requiere que la población encuestada cumpla con una distribución de proporciones específica. Esto en ciertos casos no se cumple, y lo que es peor, la condición no es comprobada o se comprueba una vez y no se reafirma en un tiempo prudencial, por lo que la prueba decide sobre parámetros y regiones irreales quizás, arrojando resultados no confiables. Se mostrarán ahora los principales casos a resolver en el control de la calidad:

A) Comparación de poblaciones.

En el campo industrial es muy común que exista una multiplicidad de factores que definen las cualidades de un producto, existe por lo tanto una gran probabilidad de que al menos uno de esos factores se altere momentáneamente, sea por ejemplo el caso de que una de las materias primas se deba conseguir de un proveedor no usual, por lo que la empresa se deba cerciorar de que las cualidades del nuevo material utilizado no son diferentes a la del material anteriormente utilizado; o el caso de que algún grupo de obreros es sustituido por un tiempo, siendo necesario saber si el producto es alterado en cierta forma o no.

En éstos y muchos otros casos el problema consiste en una comparación de poblaciones perfectamente definidas, y cuya apreciación se reduce en forma estadística a comparar principalmente valores centrales tales como la media, el grado de dispersión o la proporción en que una población cumple cierta propiedad de interés, en caso de que la poblacióin sólo sea posible clasificarla en forma nominal.

B) Tendencias

Otro tipo de casos al que se debe enfrentar el encargado del control de la calidad, es el de conocer el comportamiento del producto final ante variaciones de factores constitutivos, con el propósito de escoger el material o condiciones de producción, o en el caso en que ha de ser cambiado uno de los tratamientos o componentes, saber las consecuencias que se originarían, y así escoger el sustituto o grupo de sustitutos preferibles.

Más que conocer si existen cambios, estas pruebas tratan de comprobar si los cambios responden a una tendencia medible, la herramienta matamática que define esta situación responde a conocer si eexiste una correlación de datos casi siempre apareados en un intervalo dado.

S e conocerá así si cuando uno de ellos aumenta en magnitud, el otro también lo hace, si al aumentar uno el otro disminuye, o si ambas variables son independientes.

C) Control por especificaciones

En la mayoría de las ocasiones, el producto final de la fábrica se encuentra perfectamente definido en sus dimensiones y propiedades físico-químicas, estableciendo un margen de error aceptado. Ya que muchas veces no es posible controlar toda la población, se hace necesario recoger muestras que den un margen de seguridad a la empresa de que se cumplen estas especificaciones, a ésto se le denomina control. En ocasiones lo que se desea controlar es sólo el número de defectuosas que aparecen, ésto en caso de que la propiedad no es medible.

En general, la mayoría de las pruebas utilizadas para resolver estos casos suponen que la población presenta una distribución normal. Por ejemplo, en el caso del control por especificaciones se encuentran límites de control que no son otra cosa que los valores críticos de una prueba de hipótesis en la que se

supone normalidad, pero si esto en realidad no se cumple los resultados y límites de control de cartas tales como la ($\bar{x}$-R), que es usualmente utilizada, son falsos. Para comprobar la existencia de normalidad en una población se realiza una prueba x^2 de bondad de ajuste, pero esta prueba requiere de un número apreciable de datos, y la normalidad no sólo debe comprobarse una vez, sino que la dinámica de un proceso industrial requiere su comprobación cada cierto tiempo.

No queremos dar a entender con ésto que los métodos paramétricos son inferiores o no, sino que existen situaciones en que las condiciones que requieren no son cumplidas o es difícil o costoso comprobar su existencia, en esos casos los métodos paramétricos parecen ser los indicados para llenar ese vacío.

4.- ESCALAS DE MEDICION

Una de las ventajas que pueden presentar las pruebas no paramétricas sobre otras es que pueden ser aplicadas, por lo común, en varias escalas de medición, tales son:

Escala nominal: Esta escala distingue un objeto de otros básicamente con el nombre, tal es el caso de clasificar según si una pieza es buena o defectuosa, recién nacidos como masculinos o femeninos. También se suelen usar números arbitrarios para designar algún suceso; 1 pieza defectuosa, 0 pieza buena.

Escala ordinal: La escala próxima más precisa es la escala ordinal, ella permite clasificar ordenadamente una serie de elementos. Se clasifican los elementos en un continuo ordenándolos de "peores" a "mejores".

Escala de intervalo: Cuando los objetos o eventos pueden ser diferenciados uno de los otros, según su propia característica, pueden ser clasificados en una escala de Intervalo, en ella los valores son clasificados comparándolos con un cero arbitrario, tal es el caso de la escala centígrada de temperatura. Para iguales distancias entre pares de valores igual diferencias de las características de éstos.

C A P I T U L O II

"ENUMERACION Y ESTUDIO TEORICO DE LOS METODOS A EVALUAR"

1.- INTRODUCCION

En este capítulo se procederá a explicar el fundamento teórico de una gran variedad de métodos estadísticos no tradicionales llamados no paramétricos. De toda esta gama de métodos investigados en la bibliografía existente, se seleccionaron aquellos que presentaban interés para los fines de este trabajo. El ordenamiento de estos métodos presenta la siguiente clasificación basada en su utilización:

* Procedimientos que utilizan datos de una población simple. Estos incluyen aquellos con los cuales se puede inferir sobre hipótesis de parámetros de tendencia central, tales como la mediana y la media (en poblaciones simétricas), o sobre proporciones. Los métodos aquí presentados son la prueba de los signos, la prueba de Wilcoxon y la prueba binomial.

* Procedimientos que utilizan datos de dos poblaciones independientes. Estos incluyen aquellos que infieren hipótesis sobre parámetros de dispersión o tendencia central entre dos poblaciones independientes. Entre las pruebas de tendencia central se explican la prueba de la mediana, la prueba rápida de Tukey y la de suma de los rangos de Mann-Whitney-Wilcoxon. Entre las pruebas de dispersión se explican la prueba Mood, la de Siegel-Turkey y la prueba de Moses.

* Procedimientos que utilizan datos de dos poblaciones relacionadas. Se incluyen las pruebas que infieren sobre parámetros de tendencia central de este tipo de poblaciones. Las pruebas a explicar son la prueba de los signos y la prueba de Wilcoxon para observaciones apareadas.

* Procedimientos que utilizan datos de k poblaciones in

dependientes. Se refiere a pruebas de tendencia central. Las pruebas a explicar son la prueba de Kruskall-Wallis y la prueba de la mediana.

* Pruebas de correlación. En este tipo de pruebas se evalúa la dependencia existente entre dos o más poblaciones. Las pruebas que se explican son la prueba de Cox y Stuart, la prueba de Spearman, la prueba de Kendall y la prueba de Friedman.

* Otras.
  Se explican la prueba de secuencia y la de límites de tolerancia.

El planteamiento de los métodos está dividido de la siguiente manera:

1.- Suposición: se listan las suposiciones necesarias para que el test tenga validez, a la vez que se describen las características de los datos con los cuales se va a realizar la prueba.

2.- Hipótesis: se plantean las diferentes hipótesis que pueden ser probadas.

3.- Estadístico: se explica o deduce la manera como comprobar la relevancia de la prueba.

4.- Regla de decisión: en el Apéndice se presentan las tablas de la distribución del estadístico, con ellas se pueden determinar los valores críticos de la prueba correspondientes o el nivel de significancia; si el valor obtenido de la prueba es mayor o igual que el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula H_0 en favor de la hipótesis alternativa H_1 , al nivel de significancia señalado.

2.- PROCEDIMIENTOS QUE UTILIZAN DATOS DE UNA POBLACION SIMPLE

En esta sección se explican algunos procedimientos utilizados para inferir acerca de hipótesis de parámetros de tendencia central, como la mediana o la media (poblaciones simétricas).

2.1.- Prueba de los signos

Esta prueba recibe este nombre porque, como veremos a continuación, convierte los datos del análisis en una serie de signos más (+) y menos (-), a continuación se determina si la posibilidad de lo sucedido está dentro o fuera de la significancia elegida para la prueba.

2.1.1.- Suposiciones:

- La muestra tomada para el análisis proviene de una población de mediana desconocida (en el caso que se conozca la simetría de la población, la prueba también es válida para la media de la población).

- La variable de interés es medida por lo menos en una escala ordinal, siendo también continua.

- Los "n" valores serán designados por x_1, x_2, ... , x_n.

2.1.2.- Hipótesis:

A.- Dos colas: $H_0 : M=M_0$ $H_1 : M \neq M_0$

B.- Una cola : $H_0 : M \leq M_0$ $H_1 : M > M_0$

C.- Una cola : $H_0 : M \geq M_0$ $H_1 : M < M_0$

Seleccione un nivel de significancia α .

2.1.3.- Estadístico:

Compare cada una de las observaciones con el valor de M_0, si es mayor asigne un signo más (+); si es menor, un signo menos (-). Totalice los signos más (+) y menos (-), los empates descártelos del estudio.

Si la hipótesis nula H_0 es verdadera, si la mediana de la población es igual a M_0 se espera que el número de signos menos (-) observados sea igual al número de signos más (+). En caso de observar un número suficientemente pequeño de signos más (+) o menos (-) se rechaza la hipótesis nula A. Si observamos un número suficientemente pequeño de signos menos (-) se rechaza la hipótesis nula B. Y si observamos un número suficientemente pequeño de signos más (+) rechazamos la hipótesis nula C. Por lo tanto el estadístico para la hipótesis A es el número de signos más (+) o menos (-), para la hipótesis B es el número de signos menos (-) y para la hipótesis C el número de signos más (+).

2.1.4.- Regla de decisión:

La regla de decisión es característica para cada hipótesis.

A.- Rechace H_0 al nivel de significancia α, si la probabilidad de observar como máximo la cantidad de signos más (+) o menos (-) es menor o igual que $\alpha/2$.

B.- Rechace H_0 al nivel de significancia α, si la probabilidad de observar como máximo la cantidad de signos menos (-) es menor que o igual que α.

C.- Rechace H_0 al nivel de significancia α. si la probabilidad de observar como máximo la cantidad de signos más (+) es menor o igual que α.

Para calcular la probabilidad de que ocurra como máximo la cantidad observada, se podría pensar en una muestra de signos más (+) o menos (-) tomados al azar de una población de las mismas características, como se puede intuir este es el caso de una población binomial con parámetro $p= 0.5$ si H_0 es cierta, esto significa que la probabilidad de obtener en una muestra al azar un signo más (+) es igual a la de obtener un signo menos (-). Supongamos que S es una variable aleatoria, el número de signos de interés dados por la hipótesis y que "s" sea el valor observado del estadístico, entonces podemos calcular:

$$P\ (S \leq s/n,\ 0.5)$$

la probabilidad que S sea menor o igual que "s", dada la muestra aleatoria de tamaño "n" con una probabilidad de signos igual a 0.5.

Otra forma de realizar la prueba es encontrar en la Tabla 1 del Apéndice el valor crítico que arroja un valor $\alpha/2$ (en el caso de dos colas) o α (en el caso de una cola), si "s" es menor que ese valor, rechazamos H_0 en favor de H_1 .

$$P\ (S \leq S'/n,\ 0.5) \leq \alpha/2 \text{ (dos colas)}$$

Decisión: $S' \geq$ número de signos observados, se rechaza H .

Ejemplo 1

Un inspector de alimentos examina 15 piezas de jabón para determinar el porcentaje de impurezas extrañas. Se registran los siguientes datos:

2.4; 2.3; 1.7; 2.3; 1.2; 1.1; 3.6; 3.1; 1.0; 4.2; 1.6; 2.5; 2.4; 2.3.

Pruebe la hipótesis dé que el porcentaje promedio de impurezas en el jabón es de 2.5 %. Use un nivel de significancia cercano al 1 %.

Resolución:

H_0 : M= 2.5 Prueba de dos colas. n=14
H_1 : M≠ 2.5

Observación	2.4	2.3	1.7	1.7	2.3	1.2	3.6	3.1
Signo	-	-	-	-	-	-	+	+
Observación	1.0	4.2	1.6	2.5	2.4	2.3		
Signo	-	+	-	0	-	-	n=13	

número de signos más (+) = 3
número de signos menos (-) = 10

Entrando en la Tabla 1 del Apéndice encontramos:

s=3
n=10

$P(S \leq s/10.\ 0.5) = P(0/10, 0.5) + P(1/10, 0.5) + P(2/10, 0.5) + P(3/10, 0.5) = 0.001 + 0.0098 + 0.0439 + 0.1172 = 0.1719$

$P(S \leq s/10, 0.5) = 0.1719 > \alpha/2\ (0.005)$

Decisión: Se acepta H_0 .

2.2.- Prueba de Wilcoxon

Como se pudo observar la prueba de los signos sólo mide si hay diferencia pero no lo cuantifica. La prueba de Wilcoxon presenta la ventaja de que sí cuantifica la diferencia.

2.2.1.- Suposiciones:

- La muestra tomada para el análisis es una muestra al azar de tamaño "n" proveniente de una población simétrica de mediana desconocida.
- La variable de interés es continua.
- La escala de medición es por lo menos un intervalo.
- Las observaciones son independientes.

2.2.2.- Hipótesis:

A.- $H_0 : M = M_0$ $\quad H_1: M \neq M_0$

B.- $H_0 : M \geq M_0$ $\quad H_1: M < M_0$

C.- $H_0 : M \leq M_0$ $\quad H_1: M > M_0$

Seleccione un nivel de significancia α.

2.2.3.- Estadístico:

Para obtener el estadístico de la prueba es necesario realizar el siguiente procedimiento:

1º Reste de cada observación la mediana a la cual se refiere la hipótesis:
$Di = Xi - M_0$
Si alguna observación es igual a M_0, elimínelo del análisis, ajustando el tamaño "n" de la muestra.

2º Ordene las diferencias de mayor a menor sin tomar en cuenta el signo, en

caso de que dos o más de las diferencias obtengan el mismo rango, asigne a cada uno el valor medio de los rangos que ocuparían. Por ejemplo si las tres diferencias más pequeñas son iguales, asigne a cada una de ellas el siguiente rasgo:

$$\frac{1 + 2 + 3}{3} = 2$$

3º Asigne a cada rango el signo de la diferencia.

4º Obtenga la suma de los rangos con signos positivos llamándolo T+, también hágalo con la suma de las diferencias negativas y llámelo T−.

Si H_1 es cierta no se deberían esperar grandes diferencias entre T+ y T−, por lo tanto un valor suficientemente pequeño de T+ o T− servirá para rechazar H_0 en cada uno de los casos:

A.- Sólo con tomar cualquiera de los valores de T+ o T−, se puede calcular la probabilidad de que ocurra como máximo esa suma de rangos entre todas las sumas posibles (n!).

B.- Con un valor suficientemente pequeño de T+, se puede rechazar H_0 en favor de H_1. El estadístico es T+.

C.- De igual manera con un valor suficientemente pequeño de T− se puede rechazar la hipótesis H_0 en favor de H_1. El estadístico es T−.

2.2.4.- Regla de decisión:

Los valores críticos de la prueba de Wilcoxon se pueden hallar en la Tabla 4 del Apéndice, entrando con los valores de n y α (al final de esta sección se explicará como han sido hallados estos valores de "d").

La regla de decisión para la prueba de Wilcoxon depende de las diferentes hipótesis.

A.- Se rechaza H_0 al nivel de significancia α si el valor de T+ o T- es menor o igual que el valor "d" presentado en la Tabla 4. Alternativamente se puede entrar en la Tabla con el valor calculado de T y encontrar la probabilidad de que ocurra, comparando después este valor con el nivel de significancia α asignado a la prueba.

B.- Rechace H_0 al nivel de significancia α si T+ es menor o igual que el valor tabulado de "d".

C.- Rechace H_0 al nivel de significancia α si T- es menor o igual que el valor tabulado de "d".

2.2.4.1.- Cálculo del valor de "d"

Llamemos D el estadístico que es la suma de los posibles valores que tomen "n" números ordinales y "d" el valor que toma el estadístico en la prueba en específico, lo que se hace en la prueba de Wilcoxon es calcular:

$$P\ (D \leq d/n)$$

y compararlo con el nivel de significancia α (en el caso de una cola) o $\alpha/2$ en el caso de dos colas.

Cuando se usa el método alternativo de las tablas se está hallando el valor "d" que arroja aproximadamente un nivel de significancia α.

$$P\ (D \leq d'/n) \geq \alpha \text{ o } \alpha/2 \text{ (dos colas)}$$

y comparar ese valor d' con T+ o T- en el caso de A (dos colas), T+ en el caso B (una cola) y con T- en el caso C (una cola), rechazando la hipótesis nula H_0 si el valor calculado de T es mayor que el valor crítico de "d" hallado en la tabla.

Ejemplo 2

Un test para medir el conocimiento de 25 estudiantes de primaria arrojó los siguientes resultados:

80; 68; 30; 67; 70; 62; 69; 65; 53; 29; 65; 68; 62; 56; 46; 48; 39; 72; 36; 69; 40; 61; 54; 53; 25.

¿Se puede concluir con estos datos que la media de la población es menor que 70? $\alpha = 0.005$

Hipótesis

$H_0 : M \geq M_0$ $\alpha = 0.005$

$H_1 : M < M_0$ Hipótesis B

Observación	80	68	30	67	70	62	69	65
Di=Xi-Mi	+10	-2	-40	-3	0	-8	-1	-5
Rangos	12	4	22	6	Des.	9.5	1.5	7.5
Observación	53	29	65	68	62	56	46	48
Di=Xi-Mi	-17	-41	-5	-2	-8	-14	-24	-22
Rangos	15.5	23	7.5	4	9.5	13	18	17
Observación	39	72	36	69	40	61	54	53
Di=Xi-Mi	-31	+2	-34	-1	-30	-9	-16	-17
Rangos	20	4	21	1.5	19	11	14	15.5
Observación	25							
Di=Xi-Mi	-45							
Rangos	24							

Di=Xi-Mi	+10	-2	-40	-3	0	-8
Rango	+12	-4	-22	-6	Des.	-9.5
Di=Xi-Mi	-1	-5	-17	-41	-5	-2
Rango	-1.5	-7.5	-15.5	-23	-7.5	-4
Di=Xi-Mi	-8	-14	-24	-22	-31	+2
Rango	-9.5	-13	-18	-17	-20	+4
Di=Xi-Mi	-34	-1	-30	-9	-16	-17
Rango	-21	-1.5	-19	-11	-14	-15.5
Di=Xi-Mi	-45					
Rango	-24					

Estadístico: (B) T+=16

Decisión: d=62. Se rechaza H_0 al 0.5 % de significancia.

2.3.- Métodos para proporciones

Otro de los parámetros que presentan interés en el campo de la investigación o del control de calidad es la proporción; en una industria se quiere saber si en un proceso existe tal proporción de defectuosos, un analista puede querer saber si cierta proporción de la población tiene necesidad de servicio gratuito de salud.

Cuando no es posible, poco práctico o costoso muestrear sobre la población, se puede tratar de probar una hipótesis, tomando una muestra pequeña al azar.

2.3.1.- Prueba binomial:

Supongamos que una población tiene solamente dos tipos de elementos: tipo A y B, considere que "p" es la proporción de elementos tipo A y que q=1-p es la proporción de elementos tipo B. Si tomamos una muestra de tamaño "n" al azar de la población en estudio, la distribución binomial permite calcular la probabilidad de que la muestra contenga un número específico de elementos tipo A (o tipo B) siempre y cuando se obedezcan ciertas suposiciones.

Si denotamos "r" como el número de elementos tipo A en la muestra, se puede encontrar la probabilidad de hallar esos "r" elementos tipo A mediante la fórmula binomial:

$$P(r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} \qquad \text{donde} \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

de igual manera se puede hallar la probabilidad de que se encuentren como máximo "r" elementos del tipo A:

$$P(R \leq r) = \sum_{x=0}^{x=r} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

o la probabilidad que se encuentren como mínimo "r" elementos del tipo A:

$P(R > r) = 1 - P(R < r)$

Afortunadamente la Tabla 3 del Apéndice facilita esta tarea.

2.3.1.1.- Suposiciones:

- Los datos son "n" resultados de una prueba binomial (Bernoulli).

- Las "n" pruebas son independientes.

- La probabilidad "p" del suceso es constante para cada prueba (se utilizó p para denotar la proporción de elementos que tienen la característica en la muestra al azar).

2.3.1.2.- Hipótesis:

Se utiliza p_0 para denotar la proporción sobre la cual se realizó la hipótesis

A.- $H_0 : p = p_0$ $\quad H_1 : p \neq p_1$

B.- $H_0 : p \leq p_0$ $\quad H_1 : p \geq p_1$

C.- $H_0 : p \geq p_0$ $\quad H_1 : p \leq p_1$

seleccione un nivel de significancia α.

2.3.1.3.- Estadístico:

El estadístico de la prueba será S, el número de elementos que tienen la característica en la muestra.

2.3.1.4.- Regla de decisión:

La regla de decisión aplicada

para cada caso es la siguiente:

A.- Para cualquier valor suficientemente largo o corto de S rechazar H_0, en consecuencia dividiremos α en dos mitades, después se entra en la Tabla 1 con n y p_0 y se busca el número S_1 el cual:

$P(r \leq s_1) \approx \alpha/2$

y el número S_2 el cual:

$P(r \geq s_2) \approx \alpha/2$

En otras palabras entre en la Tabla 1 del Apéndice con "n" y "p_0", sume los valores que allí aparecen hasta que sean aproximadamente igual a $\alpha/2$, localice el valor de "r" en la columna izquierda, llámelo s_1. Para encontrar S_2 comience por la última probabilidad para "n" y "p_0" y sume hasta que el valor sea aproximadamente igual a $\alpha/2$, reste uno (1) para hallar s_2. Rechace H_0 si S es menor o igual que s_1 o mayor o igual que s_2.

B.- Un valor suficientemente largo de S no permite rechazar H_0; entre en la Tabla 1 con "n" y "p_0" y encuentre el valor s que:

$P(r > s) = \alpha$

Rehace H_0 si S es mayor que s.

C.- Un valor suficientemente pequeño de S nos permite rechazar H_0; entre en la Tabla 1 con "n" y "p_0" y encuentre el valor s que (de igual forma que para hallar S_2 en la hipótesis A):

$P\ (r \leq S) = \alpha$

Rehace H_0 si S es mayor que s.

De no poderse aplicar con exactitud el método antes explicado, encuentre la probabilidad de lo sucedido en el experimento mediante las fórmulas de la sección 2.1.

Ejemplo 3

Cinotti y Patti encontraron una cavidad subcapsular en los ojos de 11 de 25 pacientes diabéticos. Si este dato satisface las suposiciones requeridas para un test binomial, y si se puede considerar a los sujetos como una muestra aleatoria, ¿se puede concluir que la proporción de la población con esa condición es mayor que 0.27?

Hipótesis:

H_0: $p \leq 0.27$ H_1: $p > 0.27$ $\alpha = 0.05$

Estadístico:

S=11

Decisión:

Entrando en la Tabla 1 del Apéndice con n=25 y $P_0 = 0.27$ para hallar s. Acumulando desde la última probabilidad, se encuentra que r= 11 es el valor arrojado para $\alpha = 0.05$. Se resta 1 de r para así tener s=11-1=10, el valor crítico del estadístico.

Decisión: Como $S > s$ $(11 > 10)$

Se rechaza H_0 al 0.5 % de significancia.

3.- PROCEDIMIENTOS QUE UTILIZAN DATOS DE DOS POBLACIONES INDEPENDIENTES

Los procedimientos que a continuación se van a examinar están basados en dos poblaciones independientes. Independientes en dos sentidos: primero los elementos que han sido seleccionados en la primera muestra no dependen en ningún sentido de los que se tomen en la segunda muestra, segundo en cada una de las muestras cada no depende de los otros elementos elegidos, en otras palabras existe independencia entre cada una de las poblaciones y también lo hay en la misma muestra.

El objetivo de la inferencia es estimar la diferencia existente entre alguno de los parámetros de las poblaciones, como podría ser el caso de la media, la mediana o la varianza. Son pruebas con los mismos objetivos que la "t" de Student para igualdad de medias o la F de Snedecor para la igualdad de varianzas, las cuales no se pueden o deben realizar si la población no cumple con ciertas suposiciones (como lo es la normalidad).

3.1.- Inferencia acerca de parámetros de tendencia central.

En esta sección se plantean algunos métodos sencilos para inferir hipótesis acerca de parámetros de localización, las pruebas serán presentadas según su orden de dificultad.

3.1.1.- Prueba de la mediana:

La más sencilla de las pruebas que cumplen con el objetivo antes señalado es ésta. La prueba sólo puede ser usada en hipótesis de una cola.

3.1.1.1.- Estadístico:

Primero intentemos explicar la lógica de la prueba. Si dos poblaciones tienen la misma madiana, se puede esperar

que en cada una de las muestras la mitad de las observaciones esté por encima y la mitad por debajo. Para realizar la prueba se estima la mediana mediante la media aritmética de todas las observaciones.

A continuación se pueden clasificar los valores muestrales de las dos poblaciones según dos criterios: a) si pertenecen a la población 1 o 2, b) si estar por encima o por debajo de la media común, formando la siguiente tabla:

	Muestra		
	1	2	total
por debajo	A	B	A+B
por encima	C	D	C+D
	$A+C=n_1$	$B+D=n_2$	$N=n_1+n_2$

A: número de observaciones de la muestra 1 con un valor menor de la media.
B: número de observaciones de la muestra 2 con un valor menor de la media.
C: número de observaciones de la muestra 1 con un valor mayor de la media.
D: número de observaciones de la muestra 2 con un valor mayor de la media.

Si H_0 es cierto se puede esperar que aproximadamente la mitad de las observaciones para cada una de las muestras esté por encima de la media y la otra mitad por debajo. Si las proporciones observadas difieren mucho de lo que se espera de H_0, se rechaza la hipótesis nula

H_0. La probabilidad de ocurrencia de este suceso está dada por la distribución hipergeométrica:

$$P\ (A,B) = \frac{\binom{n_1}{A}\ \binom{n_2}{B}}{\binom{N}{A+B}}$$

Para evaluar H_0 es necesario realizar el tedioso cálculo de la distribución hipergeométrica o usar tablas de ella. Un procedimiento matemático alternativo es hallar el valor crítico mediante una aproximación a la normal.

$$T = \frac{A/n_1 - B/n_2}{\sqrt{\hat{p}\ (1-\hat{p})\ (1/n_1+1/n_2)}}$$

donde $\hat{p} = (A+B)/N$.

3.1.1.2.- Regla de decisión

Se rechaza H_0 al nivel de significancia α si el valor encontrado es menor o igual, en valor absoluto, al valor arrojado por la distribución normal para el nivel de significancia α. La Tabla de la distribución normal es la número 2 del Apéndice.

Ejemplo 4

Según investigaciónes el sodio tiene un efecto depresivo y el calcio un efecto aumentador de la actividad en los pollos, ésta es medida según el picoteo y por los movimientos generales del cuerpo. Los datos que se presentan a continuación son de 17 aves a las que se registra la actividad por 22 días que fueron alimentadas con bajo contenido de sodio (0.004 %) y 15 aves que fueron alimentadas con un contenido normal (0.15 %).¿Se puede concluir con estos datos que las dos poblaciones son diferentes?

Ares alimentados con baja cantidad de sodio. (1)	0 0 0 2 17 58 67 67 68 74 79 85 92 95 97 150 181
Ares de control (2)	0 0 0 0 0 8 13 13 20 33 34 57 60 64 78

media= 47.25

H_0: las medias son iguales.

H_1: las medias son diferentes.

	Muestra 1	Muestra 2	
encima	12	4	16
debajo	5	11	16
	17	15	32

$$\hat{p} = \frac{12 + 4}{32} = 0.5$$

$$T = \frac{12/17 - 4/15}{\sqrt{0.5\ (0.5)\ (1/17 + 1/15)}} \qquad T = 2.47$$

Buscando en la distribución normal para $\alpha = 0.05$ el valor crítico es $\pm$ 1.96. Como T=2.47 es mayor que el valor crítico, se acepta H_0.

3.1.2.- Prueba rápida de Tukey:

Esta prueba está basada en el factor que nos dice la intuición cuando comparamos dos grupos, cuanto menos estén solapados dos grupos, se puede afirmar con más veracidad que las poblaciones difieren.

3.1.2.1.- Suposiciones:

- Los datos consisten en observaciones x_1, x_2, ..., x_n e y_1, y_2, ..., y_m. Estas son dos muestras al azar de tamaño n y m, si n y m son diferentes designe "n" como el tamaño de las dos.

- La escala de medición es por lo menos ordinal.

- Las variables aleatorias son continuas.

3.1.2.2.- Hipótesis:

A.- Dos colas: H_0 : Las dos muestras provienen de poblaciones idénticas.

H_1 : Los valores de x tienden a ser mayores que los y o viceversa.

B.- Una cola: H_0 : Las dos poblaciones provienen de poblaciones idénticas.

H_1 : Los valores de x tienden a ser mayores que los de y.

C.- Una cola: H_0 : Las dos muestras provienen de poblacio

nes idénticas.

H_1 : Los valores de x tienden a ser menores que los de y.

3.1.2.3.- Estadístico:

El estadístico que se va a emplear depende de la hipótesis que se esté considerando.

A.- Dos colas:

Sea T el estadístico en el caso de dos colas, para obtener el valor de T, dadas n observaciones de la muestra 1 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y m observaciones de la muestra 2 $y_1, y_2, \ldots, y_m$ realice los siguientes pasos:

1º Localice el valor mayor y el menor en las dos muestras combinadas.

2º Si las dos ocurren en la misma población, no se puede concluir que las medias de ambas poblaciones difieren, asigne el valor cero al estadístico, en caso contrario continúe.

3º Localice el valor mayor y el menor en la muestra 1.

4º Localícelos también en la muestra 2.

5º Considere la muestra que contiene el menor valor en las dos muestras combinadas, cuente los valores de este grupo que son menores que el valor menor de la otra muestra.

6º Considere la muestra que contiene el mayor valor de la combinación de ambas muestras, cuente el número de valores que son mayores que el valor mayor de la otra muestra.

7º La suma de los valores obtenidos en los pasos 5 y 6, es el valor del estadístico T.

B.- Una cola:

Para rechazar H_0 es necesario, pero no suficiente, que el mayor valor de la combinación de ambas muestras sea un valor de x, si esto ocurre siga los pasos realizados en el procedimiento de dos colas A, dele el nombre de T_1.

C.- Una cola:

Para rechazar H_0 es necesario pero no suficiente que el menor valor de la combinación sea un valor de x, si esto ocurre siga los pasos realizados en el proce-

miento de dos colas A, dele el nombre de T_2.

3.1.2.4.- Regla de decisión:

A.- Rechace H_0 al nivel de significancia α si T es mayor o igual que 7, 10, o 13, α =0.05, 0.01 o 0.001 respectivamente.

B.C.- Rechace H_0 al nivel de significancia α si T es mayor o igual que 7, 10 o 13 para los respectivos niveles α 0.025, 0.005 y 0.0005.

La Tabla 5 del Apéndice tiene los valores críticos del estadístico para niveles de significancia de 2.5 %, 0.5 % y 0.05 % en el caso de una cola y 5 % 1 % y 0.1 % para el caso de dos colas.

3.1.2.5.- Empates:

Existen dos tipos de empate:el primero ocurre cuando el mayor o el menor valor en los dos grupos combinados ocurre en las dos poblaciones. En este caso asigne cero al valor del estadístico. El segundo caso ocurre cuando la población que contiene el mayor o menor valor en la muestra combinada, combine a su vez un valor igual al mayor o menor de la otra población. En este caso sume ½ al valor del estadístico T cada vez que esto ocurra.

Ejemplo 5

Singh y Prasad estudiaron la conformidad social y el auto estima en estudiantes una vez graduados. Este parámetro se midió puntuando en base a 100 puntos como máximo. Ellos encontraron que el score medio en una muestra de 100 conformistas no difería de una muestra de 100 no conformistas mediante la prueba t-Student a un nivel de confianza del 1 %. Supongo que el experimento se repitió con otros sujetos con los siguientes resultados:

Conformistas 1	48	55	56	49	41	55	44	53	42	50
No conformistas 2	59	58	48	57	59	45	59	68	61	

¿Se puede concluir con estos datos que las poblaciones son diferentes? (α=0.01).

Hipótesis:

H_0: Las dos muestras provienen de diferentes poblaciones.

H_1: Los valores de x son mayores que los de y o viceversa.

1º) mínimo valor (1)=41
máximo valor (2)=68

2º)-3º) *mínimo valor (1)=41
máximo valor (1)=56

4º) mínimo valor (2)=48
*máximo valor (2)=68

muestra 1	muestra 2
41	
42	
44	
	45
48	48
49	
50	
53	
55	
55	
56	
	57
	58
	59
	59
	59
	61
	68

5º) Valores de 1 que son menores que el menor de 2=3

6º) Valores de 2 que son mayores que el mayor de 1=7

7º) T=10

<u>Decisión</u>: Para α=0.01 valor crítico 10.

$T \geq 10$ Rechace H_0.

3.1.3.- Prueba de la suma de los rangos o de Man-Whitney-Wilcoxon test.

Esta prueba está en cierto modo basada en la prueba de Wilcoxon presentada en el punto 1.2 de este capítulo, difiere en que la probabilidad del evento no se calcula sobre toda la población sino sobre la población de interés. Básicamente consiste en ordenar los valores de las dos muestras en estudio de mayor o menor, asignarle a cada valor su respectivo rango y calcular la probabilidad de que la suma de los rangos de una de las poblaciones obtenga ese valor sobre todos los posibles valores que podría tener en esa misma población.

3.1.3.1.- Suposiciones

- Los datos consisten en una muestra al azar de observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la población 1 y una muestra al azar de observaciones $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de la población 2.

- Las dos poblaciones son independientes.

- La variable en observación es continua.

- La escala de medición es por lo menos ordinal.

- La distribución de las dos poblaciones difieren solamente con respecto a la localización.

3.1.3.2.- Hipótesis:

Estas hipótesis son válidas siempre y cuando la última de las suposi

ciones se cumpla.

A.- Dos colas: H_0: Las poblaciones tienen idénticas distribuciones.

H_1: Las poblaciones difieren en la localización.

B.- Una cola: H_0: Las poblaciones tienen idénticas distribuciones.

H_1: Los valores de x tienden a ser menores que los de y.

C.- Una cola: H_0: Las poblaciones tienen distribuciones idénticas.

H_1: Los valores de x tienden a ser mayores que los de y.

3.1.3.3.- Estadístico

Se mezclan las dos muestras y se ordenan los valores de menor a mayor. A las observaciones iguales se les asigna la media de los rangos que tomarían. Sume los valores de los rangos obtenidos para la población 1. Si la mediana de la población 1 es mayor que la de la población 2, se espera que la suma de los rangos de la población 1 sea mayor que los de la población 2, al contrario si la suma de los rangos de la población 2 es mayor que la suma para la población 1,

la mediana de la población 2 será mayor que la de la población 1.

$$T = S - \frac{m(m+1)}{2}$$

donde S es la suma de los rangos en la población 1.

La probabilidad de este evento se encuentra contando los casos en los que S toma el valor encontrado sobre todas las sumas posibles para una población de tamaño m (Población 1) ordenado en otra de tamaño m+n (Población 1+Población 2).

3.1.3.4.- Regla de decisión

La selección de una decisión depende de las diferentes hipótesis planteadas:

A.- Se rechazó H_0 si hay un valor suficientemente grande o suficientemente pequeño de T, rechace H_0 al nivel de significancia α si el valor encontrado de T es menor que $\omega_{\alpha/2}$ o mayor que $\omega_{1-\alpha/2}$, donde $\omega_{\alpha/2}$ es el valor crítico de T en la Tabla 6 del Apéndice y $\omega_{1-\alpha/2}$ está dado por:

$$\omega_{1-\alpha/2} = n.m - \omega_{\alpha/2}$$

B.- Se rechaza H_0 con un valor suficientemente pequeño de T, rechace H_0 al nivel de

significancia α si el valor encontrado es menor que $\omega\alpha$, el valor crítico de T obtenido de la Tabla 6 del Apéndice.

C.- Rechace H_0 si el valor encontrado es mayor que $\omega_1 1-\alpha/2$.

Ejemplo 6

Newmark ha reportado los resultados de un experimento para probar la validez del factor predictivo PRIS con sujetos que recibieron una modificación en la conducta. Los sujetos fueron separados en dos grupos: mejorados y no mejorados. La tabla muestra el poder predictivo PRIS para cada sujeto después de la terapia.

Sujetos mejorados

Sujeto	Score (x)	Rango
1	11.9	27
2	11.7	26
3	9.5	25
4	9.4	24
5	8.7	23
6	8.2	22
7	7.7	21
8	7.4	19.5
9	7.4	19.5
10	7.1	18
11	6.9	17
12	6.8	16
13	6.3	14
14	5.0	9.5
15	4.2	7
16	4.1	6
17	2.2	2

Sujetos no mejorados

Sujeto	Score (y)	Rango
1	6.6	15
2	5.8	13
3	5.4	12
4	5.1	11
5	5.0	9.5
6	4.3	8
7	3.9	5
8	3.3	4
9	2.4	3
10	1.7	1

Hipótesis

H_0: Las dos poblaciones son idénticas.

H_1: Las dos poblaciones difieren con respecto a la mediana.

Estadístico:

$T_x = 296.5$

$$T = 296.5 - \frac{17\,(17+1)}{2} = 143.5$$

Decisión

La Tabla 4 muestra $\omega\alpha/2=46$ para $n=17$ $m=10$ y $\alpha/2=0.025$ $\omega_{1-\alpha/2} = (17)(10)-46=124$. Como 143.5 es mayor que 124, se rechaza H_0 y se concluye que las dos poblaciones difieren con respecto a la mediana.

3.2.- Inferencia acerca de la igualdad en parámetros de dispersión

Después de la mediana los segundos en importancia son los parámetros de dispersión tal como la varianza o la desviación estandar. En los métodos explicados aquí σ se utiliza no sólo como la varianza o la desviación estandar, sino que es más que eso, cualquier parámetro de dispersión.

En esta sección se explican dos métodos: en el primero, la prueba de Mood, es necesario que las dos poblaciones tengan la misma mediana; el segundo no depende de esta suposición.

3.2.1.- Prueba de Mood

Esta prueba calcula la dispersión de una de las poblaciones, alrededor de la media de los rangos de las dos poblaciones juntas, si los valores de una de las poblaciones están muy dispersos con respecto a la otra, el valor del estadístico será corto, en caso contrario tendrá un valor grande.

3.2.1.1.- Suposiciones

- Los datos consisten en dos muestras al azar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de dos poblaciones 1 y 2 respectivamente, donde $n \leq m$.

- La distribución de las poblaciones es continua.

- Las dos muestras son independientes.

- Los datos son medidos por lo menos en una escala ordinal.

- Las dos poblaciones son idén

ticas excepto por la posible diferencia entre la dispersión.

3.2.1.2.- Hipótesis

Llamemos los parámetros de dispersión σ_1 y σ_2.

A.- Dos colas: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ $H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$

B.- Una cola: $H_0: \sigma_1 \leq \sigma_2$ $H_1: \sigma_1 > \sigma_2$

C.- Una cola: $H_0: \sigma_1 \geq \sigma_2$ $H_1: \sigma_1 < \sigma_2$

Como ya se mencionó, el símbolo σ puede ser interpretado como cualquier parámetro de dispersión.

3.2.1.3.- Estadístico

El estadístico es M.

$$M = \Sigma \left(r_i - \frac{N+1}{2}\right)^2$$

donde N=n+m y r_i es el rango de i-esima observación x en el ordenamiento de los valores de x e y combinados. En la ecuación N+1/2 es la media de los rangos asignados a los valores x e y combinados y ordenados de mayor a menor, enconces la cantidad entre paréntesis es la desviación de cada una de las observaciones con respecto al rango medio, es similar a $\Sigma (x_i - \bar{x})^2$ en el cálculo de la desviación estandar. Si los valores de y están más separados que los de x (esto es $\sigma_1 < \sigma_2$) M tiende a ser pequeño, en cambio si los valores de x están más dispersos que los de y (esto es $\sigma_1 > \sigma_2$) M tiende a ser grande.

Por ejemplo:

Observaciones yyxxxyy rango 1234567
entonces M=2

pero si:
Observaciones xyyyyxx rango 1234567
entonces M=22

En resumen, valores suficientemente pequeños de M redundan en rechazar H_0 en los casos A y C, valores suficientemente grandes de M redundan en rechazar H_0 en el caso B.

El objetivo de esta prueba es encontrar cuándo M es suficientemente grande o pequeño como para rechazar H_0.

3.2.1.4.- Regla de decisión

La Tabla 8 del Apéndice da los valores críticos de la prueba de Mood para niveles de significancia de α =0.005, 0.01, 0.025, 0.050.

Para un nivel de significancia dado y valores de "m" y "n" la Tabla 9 da varios valores, cada celda para una columna de α, posee 4 entradas; la primera M', el número con el cual, cuando H_0 es cierta, la probabilidad de observar un valor menor o igual que M' es igual a α'. La segunda entrada es α', la probabilidad exacta de observar un valor de M menor o igual que M', cuando H_0 es cierta. La tercera entrada es M", el número con el cual, cuando H_0 es cierta, la probabilidad de observar un valor menor o

igual a M" es α". La cuarta entrada es α", la probabilidad exacta de observar un valor de M menor o igual a M".

La regla de decisión para cada uno de los casos es:

A.- Para la prueba de dos colas, rechace H_0 al nivel aproximadamente igual a α si (1) el valor obtenido de H es menor o igual que H' (o H") para α' (o α") comprendido en la columna de $\alpha/2$ o (2) si el valor obtenido de H es mayor o igual que H" (o H') para α ' (o α") comprendido en la columna de $1-\alpha/2$.

B.- Rechace H_0 a un nivel de significancia aproximadamente igual a α si el valor obtenido de $H \geq H'$ (o H") para α' (o α") comprendido en la columna debajo de $1-\alpha$

C.- Rechace H_0 a un nivel de significancia aprosimadamente igual a α si el valor obtenido de $H \leq H'$ (o M") para α ' (o α ") comprendido debajo de la columna de α.

Ejemplo 7

Los siguientes datos representan los tiempos de proyección de las películas producidas por dos compañías cinematográficas:

Comp. 1 (x)	102	86	98	109	92		
Comp. 2 (y)	81	165	97	134	92	87	114

¿Se puede asegurar qué la dispersión de ambas poblaciones difiere? (α =0.01)

Hipótesis

H_0: $\sigma_1 = \sigma_2$

H_1: $\sigma_1 \neq \sigma_2$

81	86	87	92	92	97	98	102	109	114	134	165
1	2	3	4.5	4.5	6	7	8	9	10	11	12

$$\frac{N+1}{2} = \frac{12+1}{2} = 6.5$$

$$M= (1-6.5)^2 +(3-6.5)^2 +(4.5-6.5)^2 +(6-6.5)^2+(10-6.5)^2 +(11-6.5)^2 +(12-6.5)^2$$

M= 109.5

Desición:

m=5
n=7
α =0.01

De la Tabla 5 del Apéndice tenemos que para aceptar H_0

$$\underset{F(0.01)}{17.25} < M < \underset{F(0.99)}{103.25}$$

Como M no está dentro del intervalo se rechazó H_0 al1% de significancia.

NOTA: Walpole mediante la prueba F-Snedecon rechazó H_0 al 10 % de significancia.

3.2.2.- Prueba de Siegel-Tukey

El procedimiento del método que a continuación se presenta, permite medir la diferencia existente entre el grado de dispersión de dos poblaciones, formando un grupo único en orden creciente y procediendo luego a ranquear alternativamente desde las extremas hasta la mediana.

3.2.2.1.- Suposiciones

- Las dos muestras de variables aleatorias deben ser mutuamente independientes.

- Las poblaciones deben presentar la misma mediana.

- Un número excesivo de empates invalida a la prueba.

3.2.2.2.- Hipótesis

A.- H_0: VAR (x) = VAR (y)
H_1: VAR (x) $\neq$ VAR (y)

B.- H_0: VAR (x) $\leq$ VAR (y)
H_1: VAR (x) $>$ VAR (y)

C.- H_0: VAR (x) $\geq$ VAR (y)
H_1: VAR (x) $<$ VAR (y)

3.2.2.3.- Estadístico

Se agrupan las dos muestras en una y se ordenan los datos en forma creciente. S e procede a asignar el rango 1 al menor valor, el rango 2 al mayor, el 3 al segundo mayor, el 4 al segundo menor y así alternativamente asignando rangos de dos en dos y siguiendo hacia el medio del

grupo. El orden combinado de la muestra tiene los rangos:

1, 4, 5, 8, 9, ... (n+m)..., 7, 6, 3, 2.

En caso de empates, se asignará a cada valor el promedio de los valores correspondientes en caso de no haber existido el empate. A la suma de los rangos de los valores de x se le denominará S, y al estadístico a utilizar T definido como:

$$T= \sum_{i=1}^{n} R(x_i) - \frac{n(n+1)}{2} = S - \frac{n(n+1)}{2}$$

Si los valores de x_i e y_j son independientes y fueran idénticamente distribuidos, los arreglos de orden para x e y no tendrían preferencias y cada valor de x_0 de y tendría la misma probabilidad de caer en un lugar dado. Así los posibles arreglos existentes para los n valores de x serían $\binom{n+m}{n}$, y cada uno de estos arreglos tendría la misma probabilidad de ocurrir. Ya que S es la suma de n variables, para valores de n y m grandes puede aplicarse el Teorema del Límite Central, y así S se considera próximo a una normal cuya media y varianza son:

$$E(S) = \frac{n(n+m+1)}{2}$$

$$VAR(S) = \frac{n(n+m+1)m}{12}$$

ya que T es igual a S menos una constante:

$$E(T)=E\left[S-\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{n.m}{2}$$

$$VAR\ (T)=VAR(S)$$

Así, los cuartiles de T son:

$$w_p=\frac{nm}{2}+x_p\sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}$$

3.2.2.4.- <u>Regla de decisión</u>

A.- Para un nivel de significancia fijo (α), si T excede el cuartil ($1-\alpha/2$) o si T es menor al cuartil ($\alpha/2$) se rechaza H_0.

B.- H_0 se rechaza si T es menor al cuartil α.

C.- H_0 se rechaza si T es mayor al cuartil ($1-\alpha$).

Ejemplo 8

En una clase de bachillerato los alumnos fueron catalogados según su procedencia rural (x_i) o urbana (y_i) y se les realizó una prueba física; se quiere saber si la dispersión de los resultados de la prueba es la misma en cada grupo. Las calificaciones de la prueba ya ordenadas y asignados los rangos se encuentran en el siguiente cuadro:

x	y	Rango	x	y	Rango	x	y	Rango
	1.0	1		6.2	33		11.3	31
	1.8	4	6.3		36	11.4		30
	2.1	5		6.4	37		11.8	27
	2.4	8		6.7	40.5	12.5		26
	2.6	9		6.7	40.5		12.6	23
2.7		12	7.3		44		12.7	22
	3.2	13		7.6	45	12.9		19
	3.6	16		7.9	48		14.2	18
	4.0	17		8.3	47		14.8	14.5
4.2		20	9.0		46	14.8		14.5
	5.0	21		9.1	43		15.3	11
	5.6	25.66		9.9	42		16.0	10
	5.6	25.66		10.6	36.5	16.1		7
5.6		25.66		10.6	36.5		16.9	6
	5.9	29	10.6		36.5		17.7	3
	6.1	32		10.6	36.5		18.6	2

La suma de los rangos de x es:

$$S= (12+20+25,66+36+44+46-36.5+30+26+19+14.5+7)= 316.66$$

ya que n=12:

$$T= S- \frac{n(n+1)}{2} = 316.66- \frac{12.13}{2} = 238.66$$

Para un valor de $\alpha = 0.05$, los cuartiles correspondientes del nivel crítico son:

$$w_{.025} = \frac{nm}{2} + x_{.025} \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}$$

(m=36) entonces $w_{.025} = 133.7$
$w_{.975} = 298.3$

Así, H_0 es aceptada.

(Los valores de x_p se hallan en la Tabla 2)

3.2.3.- Prueba de Moses

Otra prueba para inferir hipótesis acerca de parámetros de dispersión es la prueba de Moses, ésta tiene como ventaja sobre las anteriores que no supone igualdad en los parámetros de tendencia central.

3.2.3.1.- Suposiciones

- Los datos consisten en dos muestras al azar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de poblaciones 1 y 2 respectivamente.

- La distribución de las poblaciones son iguales y de la misma forma.

- Las dos muestras son independientes.

3.2.3.2.- Hipótesis

A.- Dos colas: $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$
$H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$

B.- Una cola: $H_0: \sigma_1 \geq \sigma_2$
$H_1: \sigma_1 < \sigma_2$

C.- Una cola: $H_0: \sigma_1 \leq \sigma_2$
$H_1: \sigma_1 > \sigma_2$

3.2.3.3.- Estadístico

Para obtener el estadístico hay que seguir el siguiente procedimiento:

1º) Divida las observaciones de la población x en m_1 subgrupos al azar de tamaño K.

2º) Divida las observaciones de la población y en m_2 subgrupos al azar de

tamaño K.

Se recomienda que K sea tan grande como sea posible sin ser mayor que 10.

3º) Para cada subgrupo obtenga la suma del cuadrado de cada elemento con respecto a la media del subgrupo.

4º) Aplique la prueba de Mann-Whitney Wilcoxon con los valores de los subgrupos de x e y.

El estadístico es:

$$T=S-\frac{m_1(m_1+1)}{2}$$

Donde m_1 es el número total de subgrupos para las observaciones de x, y S es la suma de los rangos asignados a desviación de los subgrupos de x.

3.2.3.4.- Regla de decisión

Para un nivel de significancia dado existen tres (3) reglas de decisión según la hipótesis.

A.- Rechace $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ si el valor hallado de T es menor o igual de $\omega\alpha/2$ o mayor que $\omega_{1-\alpha/2}$ donde $\omega\alpha/2$ es el valor crítico dado por la Tabla 6 del Apéndice y $\omega_{1-\alpha/2} = m_1 \times n_1 - \omega\alpha/2$.

B.- Rechace $H_0: \sigma_1 \geq \sigma_2$ si el valor hallado de T es menor o igual que $\omega\alpha$, donde $\omega\alpha$ es el valor dado por la Ta

bla 6.

C.- Rechace $H_0 : \sigma_1 \leq \sigma_2$ si el valor hallado de T es menor o igual que $\omega_{1-\alpha}$ dado por la Tabla 6 y la ecuación $\omega_{1-\alpha} = m_1 \times n_1 - \omega_\alpha$.

Ejemplo 9

La industria Plastiven posee dos líneas para fabricar el mismo juguete, el ingeniero de planta desea saber si los tiempos unitarios de producción presentan la misma dispersión.

(α =0.05)

Línea 1(x) 26 30 32 17 21 27 44 35 14 18 18
17 23 29 16 13 36 23 24 34 52 35

Línea 2(y) 47 66 51 44 80 65 58 65 61 51 56
76 58 61 48 55 68 59 60 59

Hipótesis

$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$

$H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$

Estadístico

Tome el número de observaciones para cada subgrupo K=4, las 24 observaciones de x forman n=6 subgrupos y las 21 de y forman m=5 subgrupos, descartando una observaión de y obtenemos:

Subgrupo(x)	Observaciones	media	$(x_i-\bar{x})^2$
1	26, 32, 35, 24	29.25	78.75
2	26, 36, 18, 23	25.75	172.75
3	18, 16, 30, 13	19.25	166.75
4	35, 27, 29, 28	27.25	38.75
5	52, 17, 14, 17	25	978.00
6	21, 44, 23, 34	30.50	341.00

Subgrupo(y)	Observaciones	media	$(y_i-\bar{y})^2$
1	60, 58, 48, 61	56.75	106.75
2	80, 58, 58, 61	64.25	336.75
3	64, 56, 51, 51	55.50	113.00
4	55, 44, 66, 65	57.50	317.00
5	59, 76, 68, 47	62.50	465.00

Subgrupo (x)	Rango	Subgrupo(y)	Rango
38.75	1		
78.75	2		
		106.75	3
		113.00	4
166.75	5		
172.75	6		
		317.00	7
		336.75	8
341	9		
		465	10
978	11		
	34		

$$T = 34 - \frac{6 \quad 7}{2} = 13$$

Decisión

La Tabla 6 da valores críticos de 4 y 26.

$4 < T < 16$ no se puede rechazar H_0. Se concluye que las poblaciones no difieren con respecto a la dispersión.

4.- Procedimientos que utilizan datos de dos poblaciones relacionadas

En la sección anterior se explicaron algunos métodos para realizar hipótesis con poblaciones independientes. En esta sección se propondrán algunos métodos para realizar hipótesis con poblaciones dependientes o relacionadas, antes de explicarlos, es necesario aclarar qué se entiende por poblaciones relacionadas; datos como éstos aparecen en la forma de "antes" y "después de" o "pre" y post", experimentos en los cuales ambas mediciones se han tomado sobre el mismo sujeto, antes y después de cierto efecto o manipulación. Se pueden generar poblaciones relacionadas apareando sujetos con ciertas características, una parte de ellos recibe un tratamiento, a la vez que la otra parte recibe un tratamiento diferente o ninguno sirviendo así de patrón o placebo.

Por último hay que señalar que los dos métodos presentados aquí se basan íntegramente uno en la prueba de los signos presentada en la sección 1.1 y el otro en la prueba de Wilcoxon presentada en la sección 1.2..

4.1.- Prueba de los signos

La prueba de los signos es especialmente apropiada para el caso en que tengamos los datos medidos en una escala ordinal, porque en cada par de mediciones se puede observar cual es la mayor, o la menor (según sea el caso). En caso contrario es preferible utilizar una prueba más potente.

La explicación lógica del método ya fue dada en la sección 1.1.

4.1.1.- Suposiciones

- Los datos consisten en una muestra al azar de n pares de mediciones $(x_1, y_1,), \ldots,$

(x_n, y_n) donde cada par es tomado sobre el mismo sujeto o sujetos que han sido apareados con respecto a una o más variables.

- Los n pares de mediciones son independientes.

- La escala de medición es por lo menos ordinal, con lo que se puede determinar cual de los dos miembros es mayor.

- La variable en estudio es continua.

4.1.2.- Hipótesis

A.- Dos colas: H_0: La mediana de la población de las diferencias (x_i-y_i)Di es cero.

H_1: La mediana de la población de las diferencias es diferente de cero.

B.- Una cola: H_0: La mediana de la población de las diferencias es mayor o igual que cero.

H_1: La mediana de la población de las diferencias es menor que cero.

C.- Una cola: H_0: La mediana de la población de las diferencias es menor o igual que cero.

H_1: La mediana de la población de las diferencias es mayor que cero.

4.1.3.- Estadístico

Para cada par de observaciones (x_i, y_i) registre el signo de la diferencia obtenida de

restar y de x. Si ocurre algún empate descarte este par de observaciones del análisis y reduzca "n" en la cantidad necesaria.

A.- Si H_0 es cierto, se espera que la cantidad de signos más (+) sea igual a la de menos (-), entonces un número suficientemente pequeño de signos más (+) o menos (-) nos llevará a rechazar H_0.

B.- Un número suficientemente pequeño de signos menos (-) nos llevará a rechazar H_0. El estadístico para esta hipótesis es el número de signos menos.

C.- Un mínimo suficientemente pequeño de signos más (+) nos permite rechazar H_0. El estadístico es el número de signos más (+).

4.1.4.- Regla de decisión

En la sección 1.1 se discutió que esta prueba era un experimento binomial, así que las diferentes hipótesis pueden ser planteadas en términos de la probabilidad de signos más (+) o de signos menos (-).

A.- H_0: $P(+)=P(-)=0.5$ H_1: $P(+)\neq P(-)\neq 0.5$

B.- H_0: $P(+)\leq P(-)$ H_1: $P(+)>P(-)$

C.- H_0: $P(+)\geq P(-)$ H_1: $P(+)<P(-)$

H_0 depende de la magnitud de que

$P(K\leq k|\ n,\ 0.50)$

si K es una variable binomial con probabilidad 0.5 y k es el número observado de signos más (+) o menos (-) según sea el caso.

En la Tabla 1 del Apéndice se pueden encontra estos valores.

Decisión: A.- Dos colas: rechace H_0 si:

$$P(K \leq k/n\ 0.5) \leq \alpha/2$$

B,C.- Una cola: rechace H_0 si:

$$P(K \leq k/n\ 0.5) \leq \alpha$$

Ejemplo 10

En un experimento sobre la contaminación del aire se comparan dos tipos de instrumentos para medir la cantidad de monoxido de azufre en la atmósfera. Las siguientes cifras se anotaron durante dos semanas. Los distintos instrumentos arrojan diferentes resultados (α = 0.01).

Día	Inst. A (y)	Inst. B (x)	Signo
1	0.96	0.87	+
2	0.82	0.74	+
3	0.75	0.63	+
4	0.61	0.55	+
5	0.89	0.76	+
6	0.64	0.70	-
7	0.81	0.69	+
8	0.68	0.57	+
9	0.65	0.53	+
10	0.84	0.88	-
11	0.59	0.51	+
12	0.94	0.79	+
13	0.91	0.84	+
14	0.77	0.63	+

Hipótesis

H_0: $M_A = M_B$

H_1: $M_A \neq M_B$

$\alpha = 0.01$

número de signos más (+)=12

número de signos menos (-)=2

$P(K \leq 2/14, 0.5) = P(0|14, 0.5) + P(1|14, 0.5) + P(2|14, 0.5)$

$= 0.001 + 0.009 + 0.056 = 0.0660 > \alpha/2$

Se acepta H_0.

4.2.- Prueba de Wilcoxon para observaciones apareadas

La prueba de los signos sólo demarca si una observación es mayor que la otra, pero no cuantifica cuánto, entonces si los datos están medidos en una escala que contenga más información que una ordinal, la prueba de Wilcoxon debe ser utilizada ya que utiliza mejor la información. Si se puede cuantificar las diferencias, entre los n pares de observaciones, entonces se puede ordenar éstas de mayor a menor para así tener una prueba semejante a la propuesta en la sección 1.2.

4.2.1.- Suposiciones

- Los datos del análisis consisten en n pares de observaciones (x_i, y_i), de cada una de ellas tendremos una diferencia Di obtenida de restar $y_i - x_i$.

- Las diferencias representan una variable aleatoria continua.

- Las diferencias son independientes.

- Son medidas por lo menos en una escala ordinal.

4.2.2.- Hipótesis

A.- Dos colas: H_0: La mediana de la población de las diferencias es igual a cero.

H_1: La mediana de la población de las diferencias es diferente de cero.

B.- Una cola: H_0: La mediana de la población de las diferencias es menor o igual que cero.

H_1: La mediana de la población de las diferencias es mayor

que cero.

C.- Una cola: H_0: La mediana de la población de las diferencias es mayor o igual que cero.

H_1: La mediana de la población de las diferencias es menor que cero.

4.2.3.- Estadístico

El procedimiento para obtener el valor del estadístico es el siguiente:

1º) Obtenga cada una de las siguientes diferencias:

$Di=y_i-x_i$

2º) Ordene de mayor a menor el valor absoluto de las diferencias obtenidas.

3º) Asigne a cada rango el valor de su respectiva diferencia.

4º) Halle:

T+= suma de rangos con signo positivo
T-= suma de rangos con signo negativo

T+ o T- es el estadístico dependiendo de la hipótesis alternativa.

Empates: Existen dos tipos de empates. El primero cuando $x_i=y_i$; elimine ese par de observaciones del análisis y ajuste el valor de n. El segundo cuando varios valores de Di tienen el mismo rango; en este caso asigne el valor medio de los diferentes rangos que pueden ser asignados. Por ejemplo si tres valores están:

Di	4	4	4
Rango	5	5	5

$\left(\frac{4+5+6}{3}= 5\right)$

4.2.4.- Regla de decisión

A.- Un valor suficientemente pequeño de T+ o suficientemente pequeño de T-, puede causar el rechazo de H_0. Como en la sección 1.2 se puede llamar T al estadístico. Rechace H_0 al nivel de significancia α si T es menor o igual que "d" para "n" y dado en la Tabla 4 del Apéndice. Rechazando H_0 se puede concluir que la mediana de la población de las diferencias es cero, esto en términos prácticos implica que si rechazamos H_0 concluimos que el tratamiento tiene efecto. Si no rechazamos H_0 concluimos que el tratamiento puede no tener un efecto.

B.- Un valor pequeño de T- puede causar el rechazo de H_0, se puede hacer esto si el valor de T- es menor o igual que "d" dado "n" y α, valor obtenido de la Tabla 4 del Apéndice.

C.- Un valor pequeño de T+ puede causar el rechazo de H_0, se puede hacer esto si el valor de T+ es menor o igual que "d" dado "n" y α, valor obtenido de la Tabla 4 del Apéndice.

Ejemplo 11

Los pesos de cuatro personas antes de fumar y después de fumar son los siguientes:

	1	2	3	4	
Antes	66	80	69	52	x
Después	71	82	68	56	y

¿Se puede asegurar que al dejar de fumar el peso aumenta? (α = 0.05)

Hipótesis

H_0 : $M_A \leq M_B$

H_1 : $M_A > M_B$

α=0.05

Estadístico

1º) Di 5 2 -1 +4

2º,3º) Rango 4 2 -1 +3

4º) T+ = +9

T- = -1

Decisión

De la Tabla 2 del Apéndice para n=4 puede encontrar que la probabilidad de hallar un valor menos que 1 es menor que 0.125 Por lo tanto no se puede rechazar H_0 al 1 % de confianza (se acepta H_0).

5.- PROCEDIMIENTOS QUE UTILIZAN DATOS DE K POBLACIONES INDEPENDIENTES

5.1.- Prueba de Kruskall-Wallis

Esta prueba es diseñada para analizar K muestras independientes de diferentes tamaños; el tamaño de cada muestra se denotará como n_i, y a N como la suma total del número de datos.

5.1.1.- Suposiciones

- Todas las K muestras aleatorias son mutuamentes independientes.
- Todas las variables x_{ij} son continuas.
- Las K poblaciones presentan una función de distribución idéntica.

5.1.2.- Hipótesis

H_0: Las medias de las K poblaciones son idénticas.

H_1: Al menos una de las poblaciones no presenta la misma media.

5.1.3.- Estadístico

Las N variables se colocan en orden creciente, y a la menor se le asigna el rango 1, el rango 2 a la segunda menor y así sucesivamente hasta llegar al mayor valor. Llamaremos R_i a la suma de la muestra i, así:

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R(x_{ij})$$

Una vez hallados los K R_i se halla el estadístico T:

$$T = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{[R_i - n_i(N+1)/2]^2}{n_i} =$$

$$= \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3\,(N+1)$$

Para grandes valores de N, la distribución de T está basada en el hecho de que R_i es la suma de n_i variables aleatorias, y por el Teorema del Límite Central:

$$E(R_i) = \frac{n_i(N+1)}{2}$$

$$VAR\ (R_i) = \frac{n_i(N+1)\ (N-n_i)}{12}$$

Así, $\left[\frac{R_i - E(R_i)}{VAR(R_i)}\right]^2$ es aproximadamente distribuida como una x^2 de 1 grado de libertad, pero ya que la sumatoria de los R_i una constante, las variables R_i no son independientes. Pero al dividir la sumatoria de las variables x^2 por $\frac{N}{N-n_i}$, el resultado es el valor de T, y este valor es aproximadamente igual al de una variable x^2 con (k-1) grados de libertad.

5.1.4.- Regla de decisión

Para valores de k mayores que 2 y n_i mayores que 5, se refuta H_0 si T excede el cuartil $(1-\alpha)$ de una x^2 con (k-1) grados de libertad. La tabla para una variable chi-cuadrada es la Tabla 3. Para valores de n_i menores y un valor k=3, se encuentran los cuartiles en la Tabla 9 del Apéndice I.

Ejemplo 12

Se utilizaron cuatro métodos diferentes de cultivo para la producción del maíz, estos métodos se utilizaron en varios terrenos siendo los resultados de la eficiencia por acre en cada caso:

Método	1	2	3	4
	90	84	94	81
	92	89	95	80
	91	91	96	81
	96	88	93	79
	89	83	91	77
	89	84	100	81
	94	83	101	82
	91	81		78
	83	90		
		91		
n_i:	9	10	7	8

entonces N=34

Una vez ordenados los datos en forma conjunta y proceder a asignarles rangos, los resultados fueron:

Método	1		2		3		4	
	Obs.	Rango	Obs.	Rango	Obs.	Rango	Obs.	Rango
	83	11	81	6.5	91	23	77	1
	89	17	83	11	93	27	78	2
	89	17	83	11	94	28.5	79	3
	90	19.5	84	13.5	95	30	80	4
	91	23	84	13.5	96	31.5	81	6.5
	91	23	88	15	100	33	81	6.5
	92	26	89	17	101	34	82	9
	94	28.5	90	19.5			81	6.5
	96	31.5	91	23				
			91	23				
R_i:		196.5		153.0		207.0		38.5

Así, el valor de T obtenido es 25,46. El valor de una variable x^2 con (k-1)=3 grados de libertad y un nivel de confianza (α)=0.05, es de 7.815 ya que (25,46 > 7,815), la hipótesis es rechazada.

5.2.- Extensión de la prueba de la mediana

En la sección 3.1.1 se explicó el test de la mediana para realizar la hipótesis de que dos poblaciones tienen la misma media. En esta sección se extenderá la prueba para más de dos poblaciones.

5.2.1.- Suposiciones

- Cada muestra es una al azar de una población de tamaño n_i de c poblaciones.
- Las observaciones son en todo sentido independientes.
- La escala de medición es por lo menos ordinal.
- Si las poblaciones tienen la misma media, entonces la probabilidad de hallar valores mayores o menores que la media es la misma para cada elemento de cada población.

5.2.2.- Hipótesis

H_0: Las c poblaciones tienen la misma mediana.

H_1: Por lo menos una de las c poblaciones tiene diferente mediana.

5.2.3.- Estadístico

Al igual que en la sección 3.1.1, se obtiene la media común de todas las poblaciones y se acomodan u ordenan de acuerdo si están por debajo o por encima de la media común.

Se forma la siguiente tabla:

	muestra					
	1	2	3	...	c	total
menor que la media	O_{11}	O_{12}	O_{13}		O_{1c}	a
mayor o igual que la media	O_{21}	O_{22}	O_{23}		O_{2c}	b
	n_1	n_2	n_3		n_c	N

Realizar la hipótesis nula que las muestras de las poblaciones tienen la misma mediana es igual a preguntarse que las poblaciones son homogéneas con respecto a las proporciones que caen por encima y por debajo de la media común a la población. Esta es la aplicación de una tabla de contingencia, para calcular la probabilidad de este evento, se utiliza una prueba chi-cuadrado de homogeneidad.

5.2.4.- Regla de decisión

Si el valor del estadístico x^2 chi-cuadrado calculado excede al valor tabulado en la Tabla 3 para c-1 grados de libertad y α, rechace H_0.

Ejemplo 13

Un ingeniero desea conocer como varía la absorción media de humedad en el concreto tomando cinco mezclas diferentes de concreto. Las muestras se exponen a la humedad durante 48 horas. Se decide que de cada mezcla se van a probar 6 muestras requeriéndose en total de 30 muestras para la prueba. Se puede asegurar que los diferentes tipos de concreto tienen la misma capacidad de absorción de agua (α =0.05)

Absorción de humedad en mezclas de concreto.

Mezcla (% de peso)

1	2	3	4	5
551	595	639	417	563
457	580	615	449	631
450	508	511	517	522
731	583	573	438	656
499	633	648	415	613
632	517	677	555	679

media común = 561.8

Mezcla

	1	2	3	4	5	total
por encima	2	4	5	0	5	16
por debajo	4	2	1	6	1	14
	6	6	6	6	6	30

$$x^2 = \frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(4-3)^2}{3} + \frac{(5-3)^2}{3} + \frac{(0-3)^2}{3} + \frac{(4-3)^2}{3} +$$

$$\frac{(2-3)^2}{3} + \frac{(1-3)^2}{3} + \frac{(6-3)^2}{3} + \frac{(1-3)^2}{3} = 8.67$$

Regla de decisión

El valor que arroja la Tabla 3 para un α =0.05 es y (5-1)=4 grados de libertad.

x 0.05= 9.488

Como 8.67 < 9.488 no se puede rechazar H_0 y se concluye que la absorción media de agua en el concreto es la misma.

6.- PRUEBAS DE CORRELACION

6.1.- Pruebas de Cox y Stuart para tendencias

Esta prueba aparea números de límites o posiciones opuestas, y realiza una prueba de comparación de signos. Si existe una tendencia en la muestra tomada, un miembro de cada par tendría una mayor probabilidad a ser mayor que el otro miembro.

6.1.1.- Suposiciones

1.- Las variables x_1, x_2, ..., x_n tomadas al azar, son mutuamente independientes.

2.- Las medidas de las variables deben tener al menos un nivel ordinal.

6.1.2.- Hipótesis

A.- H_0: No existen tendencias.
H_1: Existe tendencia, sea positiva o negativa.

B.- H_0: No hay tendencia positiva.
H_1: Hay tendencia positiva.

C.- H_0: No hay tendencia negativa.
H_1: Hay tendencia negativa.

6.1.3.- Estadístico

Los datos obtenidos se disponen en el orden en que son observados. Se procede a agrupar en pares a las variables según el siguiente patrón:

$$(x_1, x_{1+c}), (x_2, x_{2+c}), \ldots. (x_{n'-c}, x_{n'})$$

donde n'=número total de datos, y c=n'/2 si n'es

par, o c=(n'+1)/2 si n' es impar (en caso de ser n' impar, la variable que caiga en la mitad de la prueba es eliminada).

Ordenados y apareados ya los datos, se le asignará a cada par el valor "+" si $x_i < x_{i+c}$; y si $x_i > x_{i+c}$ se le asignará al par el valor "-", eliminándose los empates.

Como puede observarse, si el propósito es resolver una situación en la cual la hipótesis tipo es la A, para que no hayan tendencias la probabilidad de que haya un valor "+" debe ser igual al de que haya uno "-".

Así, si llamamos a p la probabilidad de que exista un valor "+", la hipótesis puede sustituirse como:

$H_0 : p = ½$

$H_1 : p \neq ½$

Si existiese una gran cantidad relativa de valores "+", se puede pensar que los datos se encuentran ordenados de tal forma que obedecen a la existencia de una tendencia positiva.

Por ello el estadístico utilizado será T= número total de pares que les haya sido asignado el valor "+".

6.1.4.- Regla de decisión

En cada hipótesis, la regla es la misma que se realiza en la prueba de los signos.

Ejemplo 14

En un cierto comercio se quiere saber si las ventas después de dos años se encuentran en disminución. De esta manera la hipótesis a ser probada será:

H_0: Las ventas no decrecen.

H_1: Las ventas van decreciendo.

Para que exista sentido en la comparación, la existencia de tendencia debe basarse en la venta de los meses similares de ambos años, por ello los datos se agrupan de esa forma.

Mes	año 1	año 2	mes	año 1	año 2
Enero	14.600	14.200	Julio	92.800	98.100
Febrero	12.200	10.500	Agosto	74.400	80.000
Marzo	104.000	123.000	Septiem.	75.400	75.600
Abril	220.000	190.000	Octubre	51.700	48.800
Mayo	110.000	138.000	Noviem.	29.300	27.100
Junio	86.000	98.100	Diciem.	16.000	15.700

Como puede observarse, sólo en cinco meses en el segundo año las ventas superan a las del primer año, por ello T=5.

Si vamos a la Tabla 1 , donde n=12 y p=½ se encuentra que $P(T \leq S) = 0.3872$; por ello aceptamos H_0.

6.2.- Prueba de Spearman

Con esta prueba es posible hallar una medida de la correlación lineal existente entre dos variables.

6.2.1.- Suposiciones

1.- Las muestras tomadas al azar, son mutuamente independientes.

2.- Un número excesivo de empates (término a definir en forma posterior) invalida a la prueba.

6.2.2.- Hipótesis

A.- H_0: x_i e y_i no son dependientes.

H_1: x_i e y_i son dependientes.

B.- H_0: x_i e y_i no son dependientes.

H_1: x_i e y_i presenta correlación positiva o negativa.

6.2.3.- Estadístico

Se denominará $R(x_i)$ al rango que ocupe x_i al ser comparado con los otros valores de x, así $R(x_i)=1$ si x_i es el menor de todos los x de la muestra, se asignarán los valores a cada x_i hasta llegar a $R(x_i)=n$, en donde x_i será el mayor valor de todos las x. De igual forma se procederá a ranquear a los valores de la variable y. En caso de empates, se asignará a cada variable el promedio de los rangos que les serían asignados en caso de no existir el empate.

El estadístico utilizado en esta prueba está basado en el coeficiente r de Pearson, que halla la relación existente entre la variabili-

caso de no existir el empate.

dad causada en la variable y causada por el cambio en el valor de x, y la variabilidad total observada en la muestra. Así el coeficiente se define como:

$$r = \frac{S_{x,y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 . \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

Al ser los datos reemplazados por los rangos que les son asignados en esta prueba, el coeficiente pierde la dependencia de la función distribución que exista entre x e y, a este coeficiente se le denomina ρ de Spearman.

Si son utilizados rangos:

$$\bar{R}(x) = 1/n \sum_{i=1}^{n} R(x_i) = 1/n \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} . \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

De igual forma:

$$\bar{R}(y) = \frac{n+1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [R(x_i) - \overline{R(x)}]^2 = \sum_{i=1}^{n} (i - \frac{n+1}{2})^2 = \frac{n(n^2-1)}{12}$$

y:

$$\sum_{i=1}^{n} [R(y_i) - \overline{R(y)}]^2 = \frac{n(n^2-1)}{12}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1):

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{n} [R(x_i) - R(y_i)]^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6T}{n(n^2-1)}$$

Los valores de ρ están comprendidos entre -1 y 1, si él factor toma estos valores extremos la correlación se considerará perfectamente lineal y de forma negativa o positiva en forma respectiva. Si los valores de x se encuentran ordenados al azar respecto a los valores de y, entonces el valor de ρ se acercará o será igual a cero.

6.2.4.- Regla de decisión

A un nivel de confianza α fijado, la hipótesis A es refutada si excede el cuartil $(1-\alpha/2)$, o si es menor que el cuartil $\alpha/2$. La hipótesis nula en B se refuta si ρ excede al cuartil $(1-\alpha)$ si se prueba una correlación positiva, o si es menor a este cuartil para la correlación negativa.

La tabla de cuartiles se construye a partir de conocer todos los posibles valores de ρ al combinar todos los resultados a un valor de n fijo. Supongamos 3 pares de valores (n=3), para una combinación de $R(x_i)=(1,2,3)$ pueden existir todas estas combinaciones de $R(y_i)$:

i	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$R(x_i)$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$R(y_i)$	1	2	3	1	3	2	2	1	3	2	3	1	3	1	2	3	2	1
$\sum_{i=1}^{3} [R(x_i) - R(y_i)]^2$	0			2			2			6			6			8		

se procede después a cambiar la combinación de $R(x_i)$ y se combina con todos los casos posibles de $R(y_i)$, hasta que se acaben todas las posibilidades (36 casos para n=3). En cada caso se hallan los valores de ρ, y de allí ya resulta fácil hallar los cuartiles que se requieren. La tabla de cuartiles de esta prueba es la Tabla 7.

Ejemplo 15

Utilizando el mismo caso de la prueba de Cox y Stuart, al ranquear los valores los resultados fueron:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R(x_i)$	2	1	10	12	11	8	9	6	7	5	4	3
$R(y_i)$	2	1	10	12	11	9	8	7	6	5	4	3
$[R(x_i) - R(y_i)]^2$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

entonces $T=4$

En este caso:

H_0: Existe independencia entre las ventas en los dos años.

H_1: Sí existe dependencia.

Si $T=4$ entonces $\rho = 1 - \frac{6.4}{12(144-1)} = 0.986$

El cuartil para $\alpha = 0.01$ es $p=0.995$, y el valor de ρ es 0.7273; ya que ρ excede este valor ($0,986 > 0,7273$) H_0 es refutada y así x_i e y_i se consideran dependientes.

6.3.- Prueba de Kendall para correlación

6.3.1.- Suposiciones

1.- Las muestras tomadas al azar, son mutuamente independientes.

2.- El nivel de medidas debe se al menos ordinal.

6.3.2.- Hipótesis

A.- H_0: x_i e y_i no son linealmente dependientes.

H_1: x_i e y_i son linealmente dependientes.

B.- H_0: x_i e y_i no son linealmente dependientes.

H_1: x_i e y_i son dependientes linealmente en forma positiva o en la negativa.

6.3.3.- Estadístico

Los pares de datos se acomodaron de acorde al orden creciente de x; si ambos miembros de uno de los pares es mayor que los respectivos miembros de otro par se llamarán acordes, y si esto no ocurre se llamarán desacordes. En caso de empates no se hará d nominación alguna. Al número total de acordes se llamará N_a, y N_d al número total de pares desacordes.

El estadístico a utilizar será entonces:

$$\tau = \frac{N_a - N_d}{n(n-1)/2}$$

Donde $n(n-1)/2$ es igual a $\binom{n}{2}$, o el total

de pares posibles comparados. Si todos los pares resultan acordes, el valor de τ será 1.0; y si todos son desacordes su valor será -1.0.

6.3.4.- Regla de decisión

A un nivel de confianza α, la hipótesis H_0 es rechazada si excede el cuartil $(1-\alpha/2)$ o si ρ es menor al cuartil $\alpha/2$ de su respectiva tabla. Para las hipótesis del tipo B los cuartiles serán $(1-\alpha)$ o α, según el caso.

Ejemplo 16

Se dan las medidas de agresividad de varios hermanos y se quiere saber si hay relación entre la agresividad del nacido primogénito y la del segundo hijo. Los datos son:

(n=12)

Primogénito	x_i	86	71	77	68	91	72	77	91	70	71	88	87
2º hijo	y_i	88	77	76	64	96	72	65	90	65	80	81	72

Por la mecánica del método, los datos se agruparán ahora según el orden creciente de x_i, hallando los pares acordes y desacordes para cada par.

(x_i, y_i)	Pares acordes	Pares desacordes
(68,64)	11	0
(70,65)	9	0
(71,77)	4	4
(71,80)	4	4
(72,72)	5	1
(77,65)	5	0
(77,76)	4	1
(86,88)	2	2
(87,72)	3	0
(88,81)	2	0
(91,90)	0	0
(91,96)	0	0

Sumando los pares acordes y los desacordes:

$N_a=49$ y $N_d=12$

Así, el valor de es:

$$\tau = \frac{49 - 12}{12 \quad 11/2} = 0.5606$$

Así, la hipótesis de independencia es rechazada.

6.4.- Prueba de Friedman

Esta prueba permite conocer si existe correlación entre cualidades de varias poblaciones llamadas usualmente "tratamientos", realizando observaciones independientes de cada una de ellas, denominadas "bloques".

6.4.1.- Suposiciones

- Las "b" pruebas tomadas son mutuamente independientes.

- Dentro de cada bloque o prueba, las observaciones deben ser fácilmente arregladas de acuerdo a un criterio claro de interés, impidiendo así la aparición excesiva de empates.

6.4.2.- Hipótesis

A.- H_0: Los tratamientos dan efectos idénticos.

H_1: Al menos uno de los tratamientos tiende a tener efectos distintos que los otros.

6.4.3.- Estadístico

Al número total de pruebas se le llamará "b", cada prueba o bloque evaluará a "K" tratamientos. La variable x_{ij} corresponderá a la prueba i, y estará asociada al tratamiento j.

Se asignarán rangos a las variables de cada prueba o bloque siendo $R(x_{ij})$ el rango de la variable x_{ij} que variará de 1 a K. El valor 1 se asignará a la menor variable del bloque, y se asignará K a la mayor. Se denominará R_j a la suma ***de los rangos del tratamiento j.***

Así el estadístico T de Friedman a utili

zar se define como:

$$T = \frac{12}{bK(K+1)} \sum_{j=1}^{K} [R_j^2 - 3b(K+1)]$$

La utilización de este estadístico se basa en el hecho de considerar que R_j es la suma de "b" variables independientes $R(x_{ij})$, sorteadas al azar. Por ello:

$$E\ [R(x_{ij})] = \frac{K+1}{2}$$

$$VAR\ [R(x_{ij})] = \frac{(K+1)(K-1)}{12}$$

De esta forma:

$$E(R_j) = E[\sum_{i=1}^{b} R(x_{ij})] = \sum_{i=1}^{b} E\ [R(x_{ij})] = \frac{b(K+1)}{2}$$

$$VAR(R_j) = \frac{b(K+1)(K-1)}{12}$$

Para valores grandes de b, el Teorema del Límite Central justifica aproximar una distribución normal a:

$$\frac{R_j - E(R_j)}{\sqrt{VAR(R_j)}}$$

Así, podemos usar la distribución x con K grados de libertad a la variable

$$T' = \sum_{j=1}^{K} \frac{[R_j - E(R_j)]^2}{VAR(R_j)}$$

Pero los R_j son dependientes entre sí, ya que su suma es conocida. Para salvar este escollo, Friedman en 1937 sugirió multiplicar a T' por (K-1/K), que es asintóticamente equivalente a una variable x^2 con (K-1) grados de libertad, si b es grande. Así el resultado es T:

$$T = \sum_{j=1}^{K} \frac{(K-1)}{K} \frac{[R_j - E(R_j)]^2}{VAR\ (R_j)}$$

6.4.4.- Regla de decisión

A un nivel α de confianza, la hipótesis se considera rechazada si T excede al cuartil $(1-\alpha)$ de la distribución x^2 con (K-1) grados de libertad.

La tabla de los cuartiles de una variable chi-cuadrada es la Tabla 3.

Ejemplo 17

A diez personas escogidas al azar se les propuso que expresaran sus preferencias sobre cuatro tipos de caramelos, basándose en su color y en su apariencia tanto del producto como del envoltorio. Se asignará rango 4 al preferido y rango 1 al menos preferido. Los resultados de la prueba fueron:

Caramelo / Personas	1	2	3	4
1	4	1	3	2
2	2	4	1	3
3	3	1	2	4
4	3	1	2	4
5	4	2	3	1
6	3	1	2	4
7	4	2	3	1
8	4	3	2	1
9	4	2	1	3
10	2	3	4	1
R_j	33	20	23	24

La hipótesis a probar es:

H_0: Los cuatro tipos de caramelos tienen igual aceptación .

H_1: Al menos uno de los tipos de caramelos no tienen igual aceptación.

El valor del estadístico es así:

$$T= \frac{12}{10 \times 4 \times (5)} \times [(33)^2+(20)^2+(23)^2+(24)^2] -150 = 5.64$$

Para un nivel de significancia α=0.05, el cuartil 0.95 es 7.815 y ya que (5.64 < 7.815) la hipótesis H° es aceptada.

7.- OTRAS PRUEBAS

7.1.- Prueba de secuencias

Supongamos un suceso que ocurre periódicamente y que a su vez su resultado pueda medirse por dos categorías (verdadero y falso, por ejemplo). La prueba que se explica a continuación estudia estos casos y detecta si existe aleatoriedad en el suceso o si por el contrario esta aleatoriedad no ocurre y el proceso está fuera de control.

7.1.1.- Suposiciones

1.- Las muestras tomadas al azar son mutuamente independientes.

2.- Las muestras pueden ser claramente clasificadas en dos categorías bajo un criterio claro.

7.1.2.- Hipótesis

H_0: La secuencia obedece a un patrón aleatorio.

H_1: La secuencia no obedece al patrón aleatorio.

7.1.3.- Estadístico

Supongamos un evento donde cada elemento pueda tener uno de dos valores, por ejemplo A y B y la observación del evento arroja el siguiente resultado:

AAAAABBAAABBBAAA

Como puede observarse, existen cinco ocasiones en que el evento cambia de resultado, a este número de cambios lo llamaremos racha (R) y será el valor que medirá la aleatoriedad del pro

ceso ya que si el número de rachas es excesivo o muy pequeño al ser comparado con el número de eventos A y eventos B, entonces puede suponerse que la aleatoriedad no existe. Al número de eventos A lo llamaremos n_1 y al número de eventos B n_2. El valor de R variará entre 2 y $2n_1+1$, para $n_2 < n_1$. Al número total de datos se llamará N, donde N es igual a (n_1+n_2).

La distribución de R obedece a una función normal con media y varianza:

$$E(R) = 1 + \frac{2n_1n_2}{N}$$

$$VAR(R) = \frac{\sqrt{2n_1n_2(2n_1n_2-N)}}{\sqrt{N^2(N-1)}}$$

Así, al estandarizar el estadístico para hallar los cuartiles será:

$$z = \frac{R-(2n_1n_2/N)-1}{\frac{\sqrt{2n_1n_2(2n_1n_2-N)}}{\sqrt{N^2(N-1)}}}$$

7.1.4.- Regla de decisión

A un nivel de significancia α fijo, H_0 es rechazado si z es menor al cuartil $\alpha/2$ o si excede al cuartil $(1-\alpha/2)$ de una normal.

Ejemplo 18

Un juez federal debe decidir si el contratista de una empresa tiene preferencias para asignar trabajos según el color del empleado, en una ciudad donde el 50% de la población es blanca y el 50% es negra. La asignación de trabajo en orden durante una semana según el trabajador fue:

NBBBNNBBNBBNNBNBBBNB

De esta manera N=20, n =12 y n =8, el número de cambios fue R=12. El valor de z es así:

$$z = \frac{12-1-2 \times 8 \times 12/20}{\dfrac{\sqrt{2\times12\times8\times(2\times8\times12-20)}}{\sqrt{20^2(20-1)}}} = 0.32$$

Ya que para una distribución normal, y a un nivel de $\alpha = 0.05$

$W_{0.025} = -1.96$

$W_{0.975} = 1.96$

entonces H_0 es aceptada, las muestras son independientes.

7.2.- Límites de tolerancia

Los límites de tolerancia son valores que forman intervalos dentro de los cuales se puede tener un grado de seguridad de que un porcentaje q de una población pertenezca a él.

7.2.1.- Suposiciones previas

- La muestra a tomar debe ser hecha al azar.

- La escala de medidas debe ser al menos ordinal.

7.2.2.- Estadístico a utilizar

El objetivo de esta prueba es el hallar un valor N que señale el número de medidas a tomar de una población, de tal forma que un porcentanje q de la población se encuentra con una probabilidad de $(1-\alpha/2)$ entre los valores máximos y mínimos de la muestra tomada, $x^{(1)}$ y $x^{(N)}$.

Para hallar el valor de N se sigue el siguiente razonamiento:

p (al menos q% de la población es $\leq x^{(N)}) \geq (1-\alpha/2)$ resulta lo mismo que decir P (el cuartil q es $\leq x^{(N)}$), que en forma de notación estadística es igual a:

$$P\ (x_q \leq x^{(N)}) = (1-\alpha/2)$$

Si la población es tomada al azar, la probabilidad responde a:

$$P\ (x_q \leq x^{(N)}) \geq \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N}{i} q^i (1-q)^{N-i}$$

Para determinar la cola inferior se si-

gue el mismo procedimiento, así:

$$P\ (x^{(1)} \leq x_{-q}) \geq \quad [(1-\alpha/2) = \sum_{i=0}^{1} \binom{N}{i}\ q^{N-i}(1-q)^{i}]$$

A través del tanteo si se fija el valor de y el de q_1 el valor de N al ser despejado se acerca a:

$$N \approx \tfrac{1}{4}\ x_{1-}\ \left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \tfrac{1}{2}$$

Siendo $x_{1-\alpha}$ un cuartil de una variable x con 4 grados de libertad.

CAPITULO III

"INSTRUMENTACION AL CONTROL DE CALIDAD"

1.- INTRODUCCION

Este capítulo versa sobre la instrumentación en las principales áreas del control de calidad (citadas en el Capítulo I) de algunos de los métodos expuestos en el capítulo precedente.

A pesar de haber cubierto todos los fines expuestos en el Capítulo II, se ha hecho una selección de los métodos a instrumentar. Esta selección se ha realizado según dos criterios;el primero la facilidad de aplicación por parte del usuario de la metodología expuesta en este capítulo, el segundo la mayor facilidad que tenga alguna prueba sobre otra afin para cumplir con los objetivos propuestos. Aún así, existen casos en los cuales se deja la selección al usuario (una vez explicadas claramente las diferencias entre los métodos propuestos),tal es el caso de la sección 3 (prueba de la mediana y prueba de Mann-Whitney-Wilcoxon) la sección 6 (prueba de Moses y prueba de Siegel-Tukey) y la sección 7 (prueba de tendencias y prueba de Spearman).

En este capítulo también se presentan tablas específicas para los métodos instrumentados. Estas tablas, con excepción del método para determinación de especificaciones no paramétricas, dan los valores críticos de las pruebas para un nivel de significancia del 1%.

Una recomendación para el usuario es la necesidad de seleccionar al azar las observaciones de la población en estudio, no hacerlo significa sesgar la muestra, o sea, forzar la muestra a ciertas situaciones diferentes del azar que la prueba no puede determinar. Esta situación no es particular de la estadística no paramétrica, sino que es general de cualquier tema estadístico,dado el objetivo de esta ciencia.

Para poder cumplir con este objetivo se ha incluido en el Apéndice B una tabla de números al azar, junto con la explicación para su uso.

La presentación de cada sección está dividida así:

1.- Introducción: señalando en cual sección del Capítulo II está basada la instrumentación.

2.- Instrumentación propuesta: en la que se señalan los pasos a seguir para realizar la prueba, dando una decisión que es función del tamaño de la muestra elegida.

3.- Formato tipo: se presenta un formato para realizar la prueba bajo la única suposición de tamaños máximos de muestra.

4.- Tablas: en la mayoría de los casos se presentar tablas que señalan los diferentes niveles de decisión bajo las suposiciones antes expuestas.

2.- GRAFICA DE CONTROL PARA LA MEDIANA

Esta gráfica de control está basada en la prueba de los signos expuesta en la sección 2.1 del Capítulo II. La gráfica de control es usada para verificar periódicamente si un proceso está centrado con respecto a un valor histórico de la mediana o con respecto a la especificación de la mediana.

El control se verifica tomando de manera periódica una muestra de tamaño n, sea diariamente en el caso de producción continua o en cada lote en el caso de producción por pedidos.

Como ya se mencionó la prueba se puede utilizar con dos fines: primero para verificar si el proceso está centrado con respecto a un valor histórico, segundo para verificar si el proceso cumple con unas especificaciones establecidas por el fabricante. En el primero de los casos será necesario tener una serie de valores del proceso para etimar la mediana de la población; el procedimiento es como sigue: disponga de n observaciones (por lo menos 50) de la población, ordénelos de menor a mayor, la mediana cerca de la cual se va a realizar la hipótesis es la observación que ocupa el medio de las observaciones ordenadas (si n es par, el valor de la mediana es la media aritmética de los valores que ocupan el puesto n/2 y n/2+1, en caso de que n sea impar la mediana es el valor n/2 +1). Hay que señalar que si se conoce la simetría de la población se debe prescindir de la mediana, puesto que la hipótesis es válida para la media de la población, estimándose ésta por medio de la media aritmética de una serie histórica de valores.

2.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Seleccione el fin que se persigue con el gráfico.

Paso 2: Llame $\bar{x}$ al valor de la tendencia central que se quiere estudiar.

Paso 3: Compare los valores de cada subgrupo con $\bar{x}$, si la observación es mayor asigne un signo más(+), si es menor un signo menos (-).

Paso 4: Sume en cada subgrupo los signos obtenidos. Llámelos S_1 (para 1 de 1 a K observaciones).

Paso 5: Construcción de la gráfica de control.

En la Tabla 3.1 aparecen los valores del límite inferior y superior para un tamaño de subgrupo "n".

LS (Límite superior)= Valor columna a.
LI (Límite inferior)= Valor columna b.
LC (Línea central) = n/2 (tome el menor entero resultante de la división).

Paso 6: En una escala apropiada coloque el límite superior (LS), la línea central (LC) y el límite inferior (LI), colocando a la derecha de la gráfica el valor correspondiente a cada línea.

Paso 7: Una vez construida la gráfica de control coloque cada valor de S_L en la correspondiente abcisa (en el 1, el valor de S_1 para el primer día o primer lote, según sea el caso; en el 2 el valor de S_2 y así sucesivamente).

Paso 8: Si alguno(s) de los puntos colocados en la gráfica se sale de los límites superior (LS) o inferior (LI) de control, el proceso está fuera de control y debe ser chequeado.

Paso 9: Anote otras observaciones como tendencia o corridas al pie del formato.

NOTA: En el caso de que en algún subgrupo ocurra un empate entre la observación y $\bar{x}$, descarte esta observación del análisis y sustitúyala por otra tomada al azar de la población en estudio.

2.2.- FORMATO TIPO

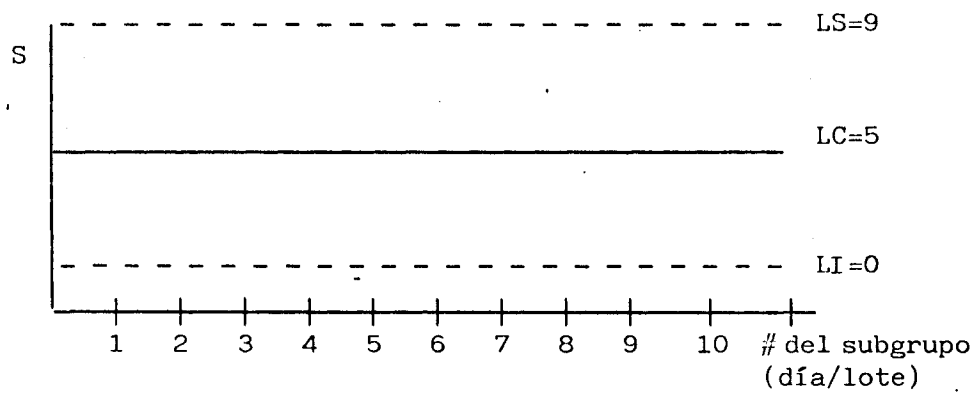
Este formato está diseñado para un tamaño de muestra n=10 y K=10.

Subgrupo		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	Valor											S_1 =
	Signo											
2	Valor											S_2 =
	Signo											
3	Valor											S_3 =
	Signo											
4	Valor											S_4 =
	Signo											
5	Valor											S_5 =
	Signo											
6	Valor											S_6 =
	Signo											
7	Valor											S_7 =
	Signo											
8	Valor											S_8 =
	Signo											
9	Valor											S_9 =
	Signo											
10	Valor											S_{10} =
	Signo											

(PASO 5) Tabla 3

LS=9
LI=0
LC=5

(PASO 6)



(PASO 7) Coloque en las ordenadas el valor de S correspondiente al subgrupo. Remarque con un círculo los valores de la gráfica que sean mayores que LS o menores que LC.

OBSERVACIONES: _____

_____

Tabla 3.1.- LIMITES PARA LOS GRAFICOS DE CONTROL DE LA MEDIANA

n	lím.sup.(a)	lím.inf.(b)	n	lím.sup.(a)	lím.inf.(b)
3	3	-1	27	20	6
4	4	-1	28	21	7
5	5	-1	29	22	7
6	6	-1	30	22	7
7	7	-1	31	23	8
8	7	0	32	23	8
9	8	0	33	24	9
10	9	0	34	25	9
11	10	0	35	25	9
12	10	1	36	26	10
13	11	1	37	26	10
14	12	1	38	27	11
15	12	2	39	28	11
16	13	2	40	28	11
17	14	2	41	29	12
18	14	3	42	30	12
19	15	3	43	30	13
20	16	3	44	31	13
21	16	4	45	32	13
22	17	4	46	32	14
23	18	4	47	32	14
24	18	5	48	33	15
25	19	5	49	34	15
26	20	6	50	35	15

3.- PRUEBA PARA LA IGUALDAD DE MEDIAS DE POBLACIONES INDEPENDIENTES

Las dos pruebas que a continuación se presentan tienen como objetivo detectar la igualdad de la mediana entre dos poblaciones independientes. Los fundamentos teóricos de ambas pruebas se encuentran en la sección 3.1 del Capítulo II (3.1.1 Prueba de la mediana y 3.1.3 Prueba de Mann-Whitney-Wilcoxon).

Existen ciertas diferencias entre ambas pruebas: primero hay que citar que la prueba de la mediana es de más fácil aplicación que la prueba de Mann-Whitney-Wilcoxon; segundo está comprobado (*) que la prueba de Mann-Whitney-Wilcoxon, aún siendo más trabajosa, detecta mejor que la prueba de la mediana la igualdad entre las medianas de ambas poblaciones, ya que no sólo chequea si es mayor o menor que un valor dado, como la prueba de la mediana, sino que cualifica asignándole un rango a la diferencia entre cada observación y ese valor. Por lo tanto dejemos a la selección del usuario la instrumentación de cualquiera de las dos pruebas aquí presentadas.

3.1.- Prueba de la mediana

3.1.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Seleccione el tamaño de la muestra uno (1) n_1 y el tamaño de la muestra dos (2) n_2.

Paso 2: Tome al azar n_1 observaciones de la población 1, llámelos x y n_2 observaciones de la población 2, llámelos y.

Paso 3: Calcule la media aritmética o gran media de las $n_1 + n_2$ observaciones.

(*) Esta comprobación se encuentra en cualquiera de las bibliografías citadas en este trabajo.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_j}{n_1 + n_2}$$

Paso 4: Encuentre el número de observaciones de la muestra uno que son mayores que la gran media, llámelo A.

Paso 5: Encuentre el número de observaciones de la muestra dos que son mayores que la gran media, llámelo B.

Paso 6: Halle $p = \frac{A+B}{n_1+n_2}$

Paso 7: Calcule el valor de T según:

$$T = \frac{(A/n_1)-(B/n_2)}{\sqrt{p(1-p)\,[(1/n_1)+(1/n_2)]}}$$

Paso 8: Si el valor absoluto de T es mayor o igual que 2.495, las dos poblaciones tienen medianas diferentes. En caso contrario las medianas de ambas poblaciones son iguales.

3.2.- Prueba de Mann-Whitney-Wilcoxon

3.2.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Seleccione el tamaño n_1 de la muestra uno y el tamaño n_2 de la muestra dos.

Paso 2: Tome n_1 observaciones de la muestra uno, llámelas x. Tome n_2 observaciones de la muestra dos, llámelas y.

Paso 3: Ordene todas las observaciones de menor a mayor sin perder de vista a cual de las poblaciones pertenece.

3.1.2.- FORMATO TIPO

Este formato está diseñado para 15 muestras para n_1 y n_2.

	(1) x	(2) mayor que $\bar{\bar{x}}$		(3) y	(4) mayor que $\bar{\bar{x}}$
1			1		
2			2		
3			3		
4			4		
5			5		
6			6		
7			7		
8			8		
9			9		
10			10		
11			11		
12			12		
13			13		
14			14		
(n_1) 15			(n_2) 15		

$\Sigma x=$ A= $\Sigma y=$ B=

A: número de elementos de la población 1 que son mayores que $\bar{\bar{x}}$.

B: número de elementos de la población 2 que son mayores que $\bar{\bar{x}}$.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\Sigma x + \Sigma y}{30} =$$

(PASO 6): Calcule $p = \frac{A+B}{30} =$

(PASO 7): Calcule el valor de T

$$T = \frac{(A/15)-(B/15)}{\sqrt{0.133(1-p)p}} =$$

Si T en valor absoluto es mayor que 2.495, las dos poblaciones tienen madianas diferentes.

Paso 4: Sume los rangos pertenecientes a la población uno. A la suma llámela S.

Paso 5: Calcule el estadístico T.

$$T=S-\frac{n_1(n_1+1)}{2}$$

Paso 6: Si el valor de T cae dentro del intervalo dado por la Tabla 3.2 acepte que las medianas de las dos poblaciones son iguales. En caso contrario si T es mayor que el valor más grande o menor que el valor más pequeño, las medianas de las dos poblaciones son diferentes.

NOTA: En el caso de empates asigne al rango el valor medio de los rangos. Ejemplo:

Observación	empate	empate	empate
Rango que tendría	4	4	4
Rango	3	4	5

$$\text{Rango}=\frac{3+4+5}{3}=4$$

Ver sección 3.1.3.3 Capítulo II.

3.2.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para n_1 =15 muestras y n_2 =10 muestras.

	Observación	Señal	Rango
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			

S=

Señal: Marque una flecha cuando la muestra pertenece a la población x y coloque el rango correspondiente en la columna "Rango".

T= S-120

Si T en valor absoluto cae en el intervalo (30/120). Las dos poblaciones tienen medianas iguales.

Tabla 3.2.- RANGO DE ACEPTACION DE LA PRUEBA DE MANN-WHITNEY-WILCOXON

m_1: tamaño de la población 1.

m_2: tamaño de la población 2.

m_1 \ m_2	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0/4	0/6	0/8	0/10	0/12	0/14	0/16	1/18	1/20
3	0/6	0/9	0/12	0/15	0/18	0/21	0/24	1/26	1/29
4	0/8	0/12	0/16	0/20	1/23	1/27	2/30	2/34	3/37
5	0/10	0/15	0/20	1/24	2/28	2/33	3/37	4/41	5/45
6	0/12	0/18	1/23	2/28	3/33	4/38	5/43	6/48	7/53
7	0/14	0/21	1/27	2/33	4/38	5/44	7/49	8/55	10/60
8	0/16	0/24	2/30	3/37	5/43	7/49	8/56	10/62	12/68
9	0/18	1/23	2/34	4/41	6/48	8/48	10/62	12/64	14/76
10	0/20	1/29	3/37	5/45	7/53	10/60	12/68	14/76	17/83
11	0/22	1/32	3/39	6/49	8/58	11/66	14/74	17/82	19/91
12	0/24	2/34	4/44	7/53	10/62	13/71	16/80	19/89	22/98
13	0/26	2/37	4/48	8/57	11/67	14/77	18/86	21/96	22/105
14	0/28	2/50	5/52	8/62	12/72	16/82	19/93	23/103	27/113
15	0/30	3/42	6/54	9/56	13/77	17/88	21/99	25/110	30/120
16	0/32	3/45	6/58	10/70	14/72	19/75	23/105	28/116	32/128
17	0/34	3/48	7/61	11/74	16/86	20/99	25/111	30/123	35/135
18	0/36	3/51	7/65	12/78	17/91	22/104	27/117	32/130	38/142
19	1/18	4/34	8/49	13/63	18/96	23/110	29/123	34/137	40/150
20	1/19	4/56	9/71	14/86	19/101	25/115	31/129	37/143	43/157

Tabla 3.2.- (Continuación)

m_1 \ m_2	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	0/22	0/24	0/26	0/28	0/30	0/32	0/34	0/36	1/37	1/39
3	1/32	2/34	2/37	2/40	3/42	3/45	3/48	3/51	4/53	4/54
4	3/39	4/44	4/48	5/51	6/54	6/58	7/61	7/65	8/88	9/91
5	6/49	7/53	8/57	8/62	9/66	10/70	11/74	12/78	13/82	14/86
6	8/58	10/62	11/67	12/72	13/77	14/82	16/86	17/91	18/96	19/101
7	11/66	13/71	14/77	16/82	17/88	19/93	20/99	22/104	23/110	25/115
8	14/74	16/80	18/86	19/93	21/99	23/105	25/111	27/117	29/123	31/129
9	17/82	19/89	21/96	23/103	25/110	28/116	30/123	32/130	34/137	37/143
10	19/91	22/98	25/105	27/113	30/120	32/128	35/135	38/141	40/150	43/157
11	22/99	25/107	28/115	31/123	34/131	37/139	40/147	43/155	46/163	49/171
12	25/107	28/116	32/124	35/133	38/142	42/150	45/159	48/168	52/176	55/185
13	28/115	32/124	35/184	39/143	43/152	46/162	50/171	54/180	58/189	61/199
14	31/123	35/133	39/143	43/153	47/163	51/173	55/183	59/193	64/202	68/212
15	34/131	38/142	43/152	47/163	52/173	56/184	61/194	65/205	70/215	74/226
16	37/139	42/150	46/162	51/173	56/184	61/195	66/206	71/217	75/229	80/240
17	40/147	45/159	55/166	55/183	61/194	66/206	71/218	76/230	82/241	87/253
18	43/155	48/168	59/175	59/193	65/205	71/217	76/230	82/242	88/254	93/267
19	46/163	52/176	64/183	64/202	70/215	75/229	82/241	88/254	94/267	100/280
20	49/171	55/185	68/192	68/212	74/226	80/240	87/253	93/267	100/280	106/294

4.- PRUEBA PARA LA IGUALDAD DE MEDIANAS DE POBLACIONES DEPENDIENTES

La prueba que a continuación se presenta tiene como finalidad verificar la igualdad entre las medianas de dos poblaciones dependientes (en la sección 4 del Capítulo II se explica con claridad qué se entiende por poblaciones dependientes). El fundamento teórico de esta prueba se encuentra en la sección 4.2 del Capítulo II (4.2 Prueba de Wilcoxon para observaciones apareadas).

4.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Seleccione n el número de observaciones apareadas para el análisis. Los pares son (x,y).

Paso 2: Obtenga para cada par de observaciones la diferencia entre el valor de y y el de x. Llámelo Di.

$Di = Yi - Xi$

Paso 3: Ordene de menor a mayor el valor absoluto de las diferencias obtenidas en el paso anterior.

Paso 4: Asigne a cada rango el signo de la diferencia correspondiente.

Paso 5: Halle T+, la suma de los rangos con signo positivo, llámelo simplemente T.

Paso 6: Rechace la igualdad entre las medias de la población x e y si el valor hallado de T es menor o igual que el valor de d hallado en la Tabla 3.3 para un valor de n.

4.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para n=20 pares de observaciones (x,y).

	Pob. x	Pob. y	$Di=y_i-x_i$	Rango Di	Rango	Señal	Rangos positivos
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

T=

Señal: Marque una flecha (o cualquier marca) aquí si el rango tiene signo positivo. Si T es menor que 38 (Tabla 3.4 para n=20) las dos poblaciones tienen medianas iguales.

Tabla 3.3.- TABLA DE WILCOXON:

n: tamaño de la muestra

d: valor crítico de rechazo.

n	d
5	0
6	0
7	0
8	1
9	2
10	4
11	6
12	8
13	10
14	13
15	16
16	20
17	24
18	28
19	33
20	38

Para valores de n mayores que veinte halle

$$z = \frac{\sqrt{T-0.5-n(n+1)/4}}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$$

y compare con $z_{0.05}$ en una tabla de la distribución normal.

5.- PRUEBA DE KRUSKALL-WALLIS

La mayoría de las pruebas hasta ahora descritas se remiten a la comparación de sólo dos poblaciones, por ello se presentará la siguiente prueba cuyo fundamento teórico se muestra en la sección del Capítulo II.

Para efectuar una implementación que no resulte sumamente complicada, se consideró que el tamaño de muestra efectuado en cada una de las K poblaciones a comparar es el mismo.

5.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Escoja al azar n valores de cada una de las poblaciones a muestrear. n debe ser mayor que 2.

Paso 2: Llame K al número de poblaciones a muestrear.

Paso 3: Reúna los valores y colóquelos en orden creciente sin perder de vista cual es la población a la que pertenecen. Puede colocar una señal diferente a cada dato según la población.

Paso 4: Una vez ordenados, asigne rangos a cada valor. Asigne el rango uno al menor valor, rango dos al segundo menor valor, y así sucesivamente hasta llegar al mayor valor, con rango n.

Paso 5: Sume los rangos respectivos de cada población y llámelos R. Eleve cada uno de estos valores al cuadrado, así obtendrá R_1^2 , R_2^2 , R_3^2... hasta R_K^2.

Paso 6: Sume todos los valores de R, llame a esta suma S.

$$S = \sum_{i=1}^{K} R_i^2$$

Paso 7: Entre a la Tabla 3.4 con el valor de n y el valor de K. Anote el valor que se encuentra en la casilla correspondiente. Si el valor de S es mayor al valor de la casilla, se considereará que al menos una población no presenta la misma mediana.

5.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para un número de poblaciones (K) igual a cuatro y un tamaño de de muestra (n) igual a seis.

K=4
n=6

	Datos por población	Datos en orden	Señal	Rango
Pob. 1				
Pob. 2				
Pob. 3				
Pob. 4				

R_1 = _____ R_1^2 = _____

R_2 = _____ R_2^2 = _____

R_3 = _____ R_3^2 = _____

R_4 = _____ R_4^2 = _____

S= _____

Valor crítico= 25902

Señal Pob. 1: "1"
Señal Pob. 2: →
Señal Pob. 3: O
Señal Pob. 4: x

Si el valor de S es mayor al crítico al menos una de las poblaciones no presenta la misma mediana.

Tabla 3.4.- VALORES CRITICOS PARA LA PRUEBA DE K POBLACIONES

n \ K	3	4	5	6	7
3	815	1963	3676	6163	9564
4	2422	5652	10679	18018	28097
5	5598	13009	24721	41884	65525
6	11321	25902	49420	83975	131666
7	20269	46580	89140	151798	238400
8	33684	77679	149000	254157	399659
9	52850	122217	234862	401150	631441
10	79212	183598	353345	604174	951796
11	114379	265607	511813	875920	1380834
12	160119	372415	718384	1230377	1940723
13	218364	508578	981923	1682826	2655689
14	291208	679034	1312046	2249850	3552015
15	380905	889105	1719120	2949321	4658044

6.- PRUEBAS PARA LA IGUALDAD DE PARAMETROS DE DISPERSION

Las dos pruebas que a continuación se presentan tienen como objetivo detectar la igualdad en cualquiera de los parámetros de dispersión de dos poblaciones independientes (σ, desviación estandar S, etc.).

El fundamento teórico de ambas se encuentra en la sección 3.2 del Capítulo II (3.2.2. Prueba de Siegel-Tukey y 3.2.3. Prueba de Moses).

La diferencia entre ambas, aparte de la mayor o menor dificultad que pueda presentar alguna, está en que la prueba de Siegel-Tukey supone que las dos poblaciones difieren sólo con respecto al parámetro de dispersión, en cambio la prueba de Moses no requiere de esta suposición. Así que queda el usuario en libertad de usar cualquiera de ambas pruebas, pero cuando exista la certeza de que las poblaciones sólo difieren con respecto al parámetro de dispersión; se recomienda utilizar la prueba de Siegel-Tukey dado que es de menor complicación, en cuanto a la instrumentación, que la prueba de Moses.

6.1.- Prueba de Moses

6.1.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Seleccione el tamaño de la población 1 y desígnele con n_1, hágalo con la población 2 y llámelo n_2.

Paso 2: Seleccione al azar n_1 observaciones de la población 1, llámelas x, y n_2 observaciones de la población 2, llámelas y.

Paso 3: Divida las observaciones de la población 1 en m_1 subconjuntos al azar de tamaño 4. El valor de m_1 está dado por

$$m_1 = \frac{n_1}{4}$$

tomando el menor entero que arroje la división, (desechando así un valor al azar de las observaciones).

Paso 4: Divida las observaciones de la población 2 en m_2 subconjuntos al azar de tamaño 4 de igual forma que en el paso 3.

Paso 5: Encuentre la media aritmética para cada uno de los subgrupos y llámela $\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_{m_1}$ e $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{m_1}$.

Paso 6: Para cada subgrupo m_1 halle la sumatoria del cuadrado de la resta de cada variable con la media del subgrupo.

$$\sum_{i=1}^{i=4} (x_{ij}-\bar{x}_j)^2 \quad \text{para } j \text{ entre } 1 \text{ y } m_1$$

llámelos "suma de cuadrados".

Paso 7: Para cada subgrupo m_2 realice el procedimiento del paso 6.

$$\sum_{i=1}^{i=4} (y_{ij}-\bar{y}_j)^2 \quad \text{para } j \text{ entre } 1 \text{ y } m_2$$

llámelos "suma de cuadrados".

Paso 8: Ordene todas la "sumas de cuadrados" de menor a mayor sin perder de vista a que población pertenece.

Paso 9: Asígnele a cada observación el rango que le toca empezando con 1 para la menor de todas las "sumas cuadradas" y terminando con $m_1 + m_2$ para la mayor de todas las "sumas de cuadrados".

Paso 10: Sume los rangos asignados a la

población 1(x). Llámelo S.

Paso 11: Halle el siguiente valor

$$T = S - \frac{m_1(m_1 + 1)}{2}$$

Paso 12: Con el valor calculado de T, y los valores de n_1 y n_2 , entre en la Tabla 3.2. Si el valor calculado de T está entre los dos valores allí presentados, las poblaciones tienen igual parámetro de dispersión. Si el valor de T se sale de ellos, las poblaciones tienen distintos parámetros de dispersión.

NOTA 1: El cálculo de $\Sigma (x_i - \bar{x})^2$ se puede simplificar al hallar $\bar{x}$ y s mediante una calculadora de bolsillo puesto que:

$$\Sigma (x_i - \bar{x})^2 = (K-1)s^2$$

NOTA 2: El caso de empates en la asignación de rangos soluciónelo de igual forma que en la prueba de Mann-Whitney-Wilcoxon.

6.1.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para n_1=20 observaciones y n_2=20 observaciones.

	Pob.1(x)	$x-\bar{x}_n$ (b)	(col b)^2 (c)		Pob.2 (y)	$y-\bar{y}_n$ (d)	(col c)^2 (e)
1				1			
	Σx_1		Σ=		Σy_1		Σ=
2				2			
	Σx_2		Σ=		Σy_2		Σ=
3				3			
	Σx_3		Σ=		Σy_3		Σ=
4				4			
	Σx_4		Σ=		Σy_4		Σ=
5				5			
	Σx_5		Σ=		Σy_5		Σ=

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{4} \qquad \bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{4}$$

Paso 1: Coloque las observaciones de la población 1 al azar, en la columna x.

Paso 2: Coloque las observaciones de la población 2 al azar, en la columna y.

Paso 3: Calcule la media aritmética para cada subgrupo.

Paso 4: Reste cada valor de x (o y) de $\bar{x}_n$ (o $\bar{y}_n$) colóquelo en la columna b (o d).

Paso 5: Eleve cada resto al cuadrado columna c (o e).

Paso 6: Sume todos los valores de la columna c y e.

Paso 7: Llévelos a un formato de Mann-Whitney-Wilcoxon.

Paso 8: Halle el valor de T para las sumas cuadradas de la población 1(x).

Paso 9: Si el valor de T cae entre (1/24) las dos poblaciones tienen el mismo parámetro de dispersión.

6.2.- Prueba de Siegel-Tukey

6.2.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Escoja al azar m_1 datos de la primera población, llámelos x. Escoja al azar m_2 datos de la segunda población, llámelos y.

Paso 2: Reúna los datos de las dos poblaciones y vaya colocándolos en orden creciente en la primera columna de una tabla de la siguiente forma:

Datos	Señal	Rango
Dato 1		1
Dato 2		4
Dato 3		5
⋮		
x_j		$R(x_j)$
⋮		
y_j		$R(y_j)$
⋮		
x_i		$R(x_i)$
⋮		
		3
Dato $(m_1 + m_2)$		2

Al mismo tiempo que se van colocando los datos en la tabla, cada vez que aparezca un dato x coloque una flecha o símbolo de su preferencia en la segunda columna. Si el dato pertenece al grupo de los y, deje la segunda columna en blanco.

Paso 3: Una vez colocados los datos y las flechas correspondientes asigne los rangos de cada valor en la tercera columna de la Tabla según el siguiente criterio, al primer valor de la columna 1 asígnele el rango 1, al último valor de la primera columna asígnele el rango 2, al penúltimo valor el rango 3, al segundo valor el rango 4, al tercer valor el rango 5, al antepenúltimo valor el rango 6, y así sucesivamente asignando rangos de dos en dos en forma alternada hasta llegar al centro.

Paso 4: Sume los valores de los rangos señalados por flechas, a este valor se le llamará S.

Paso 5: Halle el valor de T por la ecuación:

$$T = S - \frac{m_1(m_1+1)}{2}$$

Paso 6: Con los valores de m_1 y m_2 entre en la Tabla 3.2 anote los dos valores que encuentre. Si el valor de T está entre estos dos valores (sin ser igual a uno de ellos) considere que las dos poblaciones presentan la misma varianza, en caso contrario las varianzas serán diferentes.

6.2.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para un tamaño de muestra m_1 y m_2 iguales a diez.

$m_1=10$ y $m_2=10$

Datos ordenados	Señal	Rango	R(x)
		1	
		4	
		5	
		8	
		9	
		12	
		13	
		16	
		17	
		20	
		19	
		18	
		15	
		14	
		11	
		10	
		7	
		6	
		3	
		2	
			S=

Señal Población x:
T= S-21

Intervalo crítico (17/83).

Si el valor de T está entre los valores críticos, las dos poblaciones tienen el mismo parámetro de dispersión.

7.- PRUEBAS DE CORRELACION

7.1.- Prueba de tendencias

La prueba de Cox y Stuart está definida de tal forma que resulta propicia para realizar pruebas de correlación en poblaciones simples, especialmente al comprobar la existencia de tendencias, que no son otra cosa que la correlación de una población con respecto al tiempo.

Entre los campos en los que esta prueba se puede aplicar encontramos: la comprobación de tendencias en datos utilizados en gráficas de control tradicionales, en las que generalmente no se detecta científicamente este tipo de anomalía, también la prueba puede utilizarse para comprobar si el rendimiento de trabajo varía linealmente en un intervalo de tiempo, etc.

La base teórica que sustenta esta prueba se localiza en el Capítulo II, sección 6.1.

7.1.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Seleccione un número N de datos a muestrear. N debe ser mayor de 5.

Paso 2: Escoja al azar los N datos, manténgalos en el orden en que son sacados. x_1 será el primer dato tomado y x_n el último.

Paso 3: Halle el valor de m. Si N es par m=N/2, si N es impar m=(N+1)/2.

Paso 4: Busque el dato que corresponde al puesto "m" y márquelo, si N es impar tache el dato.

Paso 5: Agrupe los datos en pares, de la siguiente forma, (x_1, x_{1+m})*, (x_2, x_{2+m}), (x_3, x_{3+m}), ..., (x_{n-m}, x_n), y anótelos

* El dato x_{1+m} es el siguiente al que fue marcado o tachado.

en la primera columna de una tabla de la siguiente forma:

Pares	"x"
(x_1, x_{1+m})	
(x_2, x_{2+m})	
(x_3, x_{3+m})	
. . .	
(x_{N-m}, x_N)	
SUMA —	

Paso 6: En la segunda columna de la tabla anote con una "x" los casos en que el primer valor del par es menor al del segundo valor. Al final de esta columna anote el valor del total de x marcadas, a este valor lo llamaremos "SUMA".

Paso 7: Con el valor de N entre en la tabla 3.5 y anote los dos valores que se encuentran bajo N y en la fila A. Si el valor de SUMA se encuentra entre estos dos valores (sin ser iguales), los datos no presentan tendencia, en caso contrario la tendencia existe.

Comentarios:

- Si en vez de querer comprobar la simple existencia de tendencia en los datos, se quiere hallar si el tipo de tendencia es positiva, el procedimiento a seguir es el mismo hasta el paso 6 (inclusive), pero al entrar en la Tabla con el valor de N,

7.1.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para un tamaño de población (N) igual a dieciocho.

N= 18

m= 18/2 = 9

Pares		Marca
(x_1, x_{10})		
(x_2, x_{11})		
(x_3, x_{12})		
(x_4, x_{13})		
(x_5, x_{14})		
(x_6, x_{15})		
(x_7, x_{16})		
(x_8, x_{17})		
(x_9, x_{18})		+

Suma= _____

Marca: Coloque una X cuando el primer valor del par es menor que el segundo valor.

Valores críticos: (0/8)

Si la suma cae dentro del intervalo no existe tendencia.

Tabla 3.5.- VALORES CRITICOS PARA LA PRUEBA DE TENDENCIA

N		6,7	8,9	10,11	12,13	14,15	16,17	18,19
Valores críticos	A	-1 3	-1 4	-1 5	-1 6	-1 7	0 7	0 8
	B	3	4	5	6	6	7	8
N		20,21	22,23	24,25	26,27	28,29	30,31	32,33
Valores críticos	A	0 9	0 10	1 10	1 11	1 12	2 12	2 13
	B	9	9	10	11	11	12	13
N		34,35	36,37	38,39	40,41	42,43	44,45	46,47
Valores críticos	A	2 14	3 14	3 15	3 16	4 16	4 17	4 18
	B	13	14	14	15	16	16	17
N		48,49	50,51	52,53	54,55	56,57	58,59	60,61
Valores críticos	A	5 18	5 19	6 20	6 20	7 21	7 22	7 22
	B	18	18	19	20	20	21	22
N		62,63	64,65	66,67	68,69	70,71	72,73	74,75
Valores críticos	A	8 23	8 23	9 24	9 25	9 25	10 26	10 26
	B	22	23	23	24	25	25	26
N		76,77	78,79	80,81	82,83	84,85	86,87	88,89
Valores críticos	A	11 27	11 28	11 28	12 29	12 30	13 30	13 31
	B	26	27	28	28	29	29	30
N		90,91	92,93	94,95	96,97	98,99	100,101	-
Valores críticos	A	13 32	14 32	14 33	15 33	15 34	15 35	-
	B	31	31	32	32	33	34	-

Para valores de N mayores que 101, los valores críticos del tipo de la fila A pueden encontrarse por la ecuación:

Límite superior = $\frac{1}{2}$ $(N+w\times\sqrt{N})$

Límite inferior = $\frac{1}{2}$ $(N-w\times\sqrt{N})$

Siendo w los cuartiles de una distribución normal estandar.

Para el valor de la fila B, límite= $\frac{1}{2}$ $(N+w\times\sqrt{N})$

7.2.- Prueba de Spearman

La prueba que muestra a continuación se basa en fundamentos teóricos explicados en la sección 6 del Capítulo II. El propósito de esta prueba es el de comprobar la existencia de correlación o dependencia entre dos poblaciones, y cuantificar su grado. Por ello recomendamos el mantener en archivo el resultdo de cada prueba, a fin de conocer el comportamiento de las dos variables en el tiempo, y frente a otros factores.

Hemos escogido la prueba de Spearman, pues resulta más sencilla de instrumentar, ya que la asignación de rangos es simple, si se compara con la prueba de Kendall.

7.2.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Escoja al azar N datos de cada una de las dos poblaciones a muestrear. A los datos de la primera población llámelos x, a los de la segunda llámelos y. N debe ser al menos igual a 5.

Paso 2: Sin perder el conocimiento del orden de apareamiento original, asigne un rango a cada uno de los valores de la población x según el orden creciente de magnitud. Al menor valor asígnele el rango 1, al segundo menor valor el rango 2 y así sucesivamente hasta llegar al mayor valor con rango N.

Paso 3: Realice el mismo procedimiento del paso 2 con la población y.

Paso 4: Para cada par de datos (x_i, y_i) calcule el valor $[R(x_i)-R(y_i)]^2 = T_i$

Paso 5: Sume los N valores calculados, llame a ese valor S.

$$S = \sum_{i=1}^{N} T_i$$

Paso 6: Con el valor de N entre a la Tabla 3.6. Anote los dos valores que se encuentran en la casilla contigua a la derecha.

Paso 7: Si el valor de S se encuentra entre estos dos valores, considere que no existe correlación entre estas dos poblaciones, en otro caso la correlación existe.

Paso 8: Si existe correlación entre ambas poblaciones, halle el valor ρ .

$$\rho = 1 - \frac{6S}{n(n^2-1)}$$

Este valor le servirá de utilidad para controlar y llevar cuenta del grado de correlación entre estas dos poblaciones.

Comentarios:

- En caso de que en una de las poblaciones dos o más variables tengan el mismo valor, asígneles como rango el promedio de los rangos que tuvieran en caso de no existir empate.

- El valor de ρ varía entre 1 y -1. Si se acerca al valor 1 la correlación se considera positiva, si se acerca al valor -1 se considera negativa.

7.2.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para una prueba con un número de datos por población (N) gual a dieciocho.

N=18

Datos x	R (x)	Datos y	R (y)	$[R(x)-R(y)]^2$
				+

S=_____

Intervalo crítico: (390/1548).

Para que no exista correlación S debe estar entre ambos datos.

$$\rho = 1 - \frac{6S}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6S}{5814} = _____.$$

Tabla 3.6.- INTERVALOS CRITICOS PARA LA PRUEBA DE SPEARMAN

N	S		N	S		N	S	
5	0	80	19	476	1804	33	3259	7981
6	2	68	20	574	2086	34	3609	8709
7	6	106	21	686	2394	35	3985	9480
8	12	156	22	810	2732	36	4386	10295
9	22	218	23	950	3098	37	4814	11153
10	36	294	24	1104	3496	38	5268	12058
11	56	384	25	1274	3926	39	5751	13010
12	78	494	26	1472	4388	40	6262	14009
13	110	618	27	1666	4886	41	6804	15058
14	148	762	28	1890	5418	42	7376	16156
15	194	926	29	2134	5986	43	7979	17306
16	250	1110	30	2398	6592	44	8615	18509
17	314	1318	31	2627	6646	45	9248	19765
18	390	1548	32	2391	7293			

8.- OTRAS PRUEBAS

8.1.- Prueba de secuencias

En el campo del control de la calidad es normal la utilización de gráficas que permiten detectar la aparición de sucesos no usuales en la producción que se reflejan en las características del producto, un ejemplo de ello es la utilización de gráficas "p" o "pn" que se basan en la aparición de productos defectuosos en una cantidad no usual. Pero esta gráfica presenta una serie de insuficiencias, como el no poder detectar si ese número no usual de productos defectuosos es causado por el azar o por un factor no aleatorio, como tampoco es capaz de mostrar la aparición de productos defectuosos en forma periódica.

La prueba que se muestra a continuación se basa en principios teóricos que se encuentran en la sección 7.1. del Capítulo II.

Si consideramos que los dos sucesos de las secuencias son la aparición de productos defectuosos y la de no defectuosos, el número de rachas mostrará la forma en que se agrupan los productos defectuosos. Un número peqeuño de rachas será causado por razones no aleatorias sin duda, por el contrario si existe periodicidad en la aparición del producto defectuoso, el número de rachas tenderá a ser mayor de lo normal.

Debido a que un proceso industrial continuo el número de defectos debe ser por lo general peqeuño, en forma relativa, por lo tanto consideramos que el número de muestras a tomar debe ser alto.

8.1.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Escoja al azar N datos en secuencia. N debe tener un valor de 100, 150 o 200.

Paso 2: Anote el puesto que ocupa cada

una de las piezas defectuosas según van apareciendo en la secuencia. Al número total de piezas defectuosas llámelo D.

Paso 3: Subraye cada uno de los puestos anotados, si los puestos corresponden a números consecutivos marque una sola línea conjunta para subrayarlos.

Paso 4: Cuente el número de líneas seguidas que subrayan los puestos. A este número lo denominaremos L.

Paso 5: Calcule R según la ecuación:

$$R = (2L + 1)$$

Paso 6: Realice este procedimiento todos los días en un período de tiempo dado.

Paso 7: Calcule $\bar{R}$:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^{K} R_i/K$$

Siendo K el número de días del período de tiempo en el que se toman las muestras.

Paso 8: Calcule el promedio de piezas defectuosas en el período, que es igual a:

$$\bar{D} = \sum_{i=1}^{K} D_i/K$$

Si el valor de $\bar{D}$ es mayor que 17 o menor que 2 la prueba se desecha.

Paso 9: Con el valor de N y cada valor de D entre en la Tabla 3.7. Anote el valor que se encuentra en la casilla correspondiente, llámelo V.

Paso 10: Calcule los valores de LI y LS, para cada valor de V encontrado.

$LI = (\bar{R} - V)$

$LS = (\bar{R} + V)$

Paso 11: Construya una carta de control, teniendo el eje y los valores R y el eje x el número de la muestra, tomadas todos los días. Trace una línea horizontal con el valor de $\bar{R}$, y para cada muestra trace los segmentos LS y LI.

Paso 12: Coloque en la carta los valores de R correspondientes a cada muestra. Si los puntos están sobre LS o LI, considere que el proceso está fuera de control.

NOTA:

- Se recomienda la construcción de la carta por períodos mensuales.

- En caso de que el puesto ocupado por la pieza defectuosa sea el 1 o el puesto N, el valor de R será:

$R = 2L$

8.1.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para la toma de datos con un valor de

N = 100 y de D =5

N = 100

D = 5

Puesto de la pieza defectuosa					

L = Nº de líneas seguidas = _____

R = (2 × L+ 1) = _____

V = 2.3

8.1.3.- FORMATO TIPO

Formato tipo para la recopilación de datos para un tamaño de muestra N=100 en un período de 10 días.

N=100

R_i	D_i	V_i	$\bar{R}+V=$ LS	$\bar{R}-V=$ LI

$$\sum_{i=1}^{10} R_i = _____$$

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{10} R_i}{10} = _____$$

Tabla 3.7.- VALORES DE "V" PARA LA PRUEBA DE SECUENCIAS

N \ D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
100	0.3	0.9	1.4	1.8	2.3	2.8	3.2	3.7	4.1	4.5	4.9	5.3	5.7
150	0.3	0.7	1.1	1.5	1.9	2.3	2.7	3.1	3.5	3.8	4.2	4.6	4.9
200	0.3	0.6	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.0	3.4	3.7	4.0	4.3
N \ D	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
100	6.1	6.4	6.8	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.0	9.3	9.6	9.8
150	5.3	5.6	5.9	6.3	6.6	6.9	7.2	7.5	7.8	8.1	8.4	8.7	9.0
200	4.7	5.0	5.3	5.6	5.9	6.2	6.5	6.8	7.1	7.3	7.6	7.9	8.2

8.2.- Determinación de especificaciones

En algunas ocasiones en el campo industrial existe la problemática de determinar las especificaciones que debe tener un producto, ya que no se encuentra normalizado o es un producto nuevo cuyas especificaciones no suponen un peligro potencial para el comprador.

En este orden de ideas, se mostrará a continuación una forma simple para determinar las especificaciones requeridas, basada en los principios de construcción de límites de tolerancia explicados en la sección 7.2 del Capítulo II.

La prueba considera que las especificaciones se basan en la probabilidad que presenta la maquinaria o sistema de producción de fabricar un producto entre ciertos límites que serán las normas a aplicar, y tomando en cuenta que los valores fuera de estos límites serán los concernientes a productos defectuosos.

8.2.1.- Instrumentación propuesta

Paso 1: Escoja, tomando en cuenta la exigencia del mercado, grado de competencia y seguridad requerida por el producto, el porcentaje de productos que deben ser considerados no defectuosos . Llame a este porcentaje q.

Paso 2: Escoja el porcentaje de seguridad para que se cumpla lo dicho en el paso 1. Llame a este porcentaje S.

Paso 3: Entre con los valores de q y S a la Tabla 3.8. Anote el valor que se encuentra en la casilla correspondiente, llame a este valor N.

Paso 4: Escoja al azar N productos de su línea de fabricación y mida la caracte-

rística cuyas especificaciones desean ser determinadas.

Paso 5: Anote los valores máximo y mínimo de la muestra tomada. Estos valores serán las especificaciones a considerar para la característica del producto.

Tabla 3.8.- TAMAÑOS DE MUESTRA PARA DETERMINACION DE ESPECIFICACIONES.-

S \ q	99.5	99.0	98.0	97.5	95.0
99.9	1843	920	458	366	181
99.5	1483	740	369	294	146
99.0	1325	662	330	263	130
98.0	1183	581	290	231	115
97.5	1111	555	277	221	110

CAPITULO IV

"EXPERIMENTACION"

1.- INTRODUCCION

En este capítulo se mostrará la experimentación realizada sobre algunos de los métodos cuya instrumentación fue propuesta en el capítulo anterior.

Los datos tomados para estas pruebas fueron hallados en el laboratorio de materiales de la Universidad Católica Andrés Bello y en el departamento de Control de Calidad de la empresa Convepal. Algunos métodos no fueron aplicados ya que su realización conllevaría un tiempo muy largo de plazo para llevarlos a cabo, o simplemente porque como en el caso de la prueba de Kruskall- Wallis el método es sólo una extensión de la prueba de Mann-Whitney-Wilcoxon.

Los experimentos serán mostrados en el orden en que fueron mostrados los métodos en el capítulo de instrumentación. Debe mencionarse que las poblaciones eran conocidas de antemano, de tal forma que los resultados dieron información sobre la confiabilidad de las pruebas.

EXPERIMENTACION Nº 1

Uno de los más comunes clientes del laboratorio de materiales de la Universidad Católica Andrés Bello es la constructora Agripa. Esta envía al laboratorio periódicamente muestras de las mezclas de concreto que utiliza en sus obras. El laboratorio realiza ensayos de compresión en diferentes intervalos de tiempo para así comprobar cómo aumenta la resistencia a la compresión con el tiempo de fraguado.

En este experimento se utilizará la instrumentación propuesta en el Capítulo III, sección 2 para comprobar si el proceso de mezcla del concreto se está realizando centrado sobre la tendencia conocida del proceso. No se realiza el control sobre una especificación pues en el momento de realizar la prueba el tiempo de fraguado (7 días) nos impide conocer la especificación central del proceso.

En la etapa de solución se ha encontrado la mediana, tal como indica la sección 2 del Capítulo III para estos casos, siendo 194 kg/cm^2 . Se han tomado las muestras de diferentes meses entre el período de abril de 1983 y enero de 1984 (en total 100 datos).

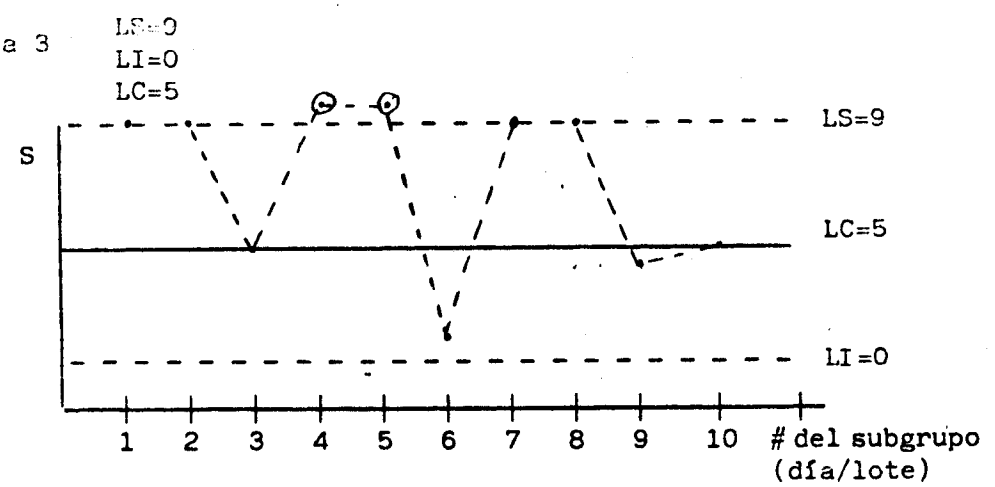
2.2.- FORMATO TIPO

Este formato está diseñado para un tamaño de muestra n=10 y K=10.

Subgrupo		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	Valor	224	198	198	203	214	193	201	203	206	214	S_1 = 9
	Signo	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	
2	Valor	207	200	205	209	205	204	204	209	147	208	S_2 = 9
	Signo	+	+	+	+	+	+	+	+	−	+	
3	Valor	174	192	188	211	183	180	212	214	225	247	S_3 = 5
	Signo	−	−	−	+	−	−	+	+	+	+	
4	Valor	232	211	209	232	222	232	218	239	235	234	S_4 = 10
	Signo	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
5	Valor	207	225	224	206	209	203	208	215	232	223	S_5 = 10
	Signo	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	
6	Valor	159	172	199	178	160	156	172	173	150	164	S_6 = 1
	Signo	−	−	+	−	−	−	−	−	−	−	
7	Valor	205	196	204	214	188	212	229	224	227	216	S_7 = 9
	Signo	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	
8	Valor	226	215	211	232	231	207	169	224	227	216	S_8 = 9
	Signo	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	
9	Valor	190	170	192	213	191	178	188	195	213	207	S_9 = 4
	Signo	−	−	−	+	−	−	−	+	+	+	
10	Valor	128	131	196	203	295	138	131	201	205	138	S_{10} = 5
	Signo	−	−	+	+	+	−	−	+	+	−	

(PASO 5) Tabla 3

(PASO 6)



(PASO 7) Coloque en las ordenadas el valor de S correspondiente al subgrupo. Remarque con un círculo los valores de la gráfica que sean mayores que LS o menores que LC.

OBSERVACIONES: Gráfica para control del proceso (Mediana = 194 Kg/cm²)

EXPERIMENTO Nº 2

En la empresa Convepal llegan como materia prima una gran variedad de papeles que deben ser periódicamente controlados por el departamento de calidad. En este experimento se procederá a comparar las medianas del peso básico en gramos por metro cuadrado (gr/m^2) de dos tipos de papeles distintos como son el papel Pouch y el TWS producidos por diferentes empresas lo que asegura que los valores tomados de ambas poblaciones totalmente independientes. Los dos tipos de papeles medidos presentan una especificación de 40 gr/m^2 por lo que los resultados de la prueba a realizar deben confirmar la igualdad de las medias. Para realizar el experimento se procedió a medir el peso básico de 15 papeles de cada población escogidos al azar.

El método a aplicar será la prueba de la mediana explicada en la sección 3.1 del Capítulo III.

A continuación se presenta el formato una vez instrumentado.

3.1.2.- FORMATO TIPO

Este formato está diseñado para 15 muestras para n_1 y n_2.

	(1) x	(2)mayor que $\bar{\bar{x}}$		(3) y	(4)mayor que $\bar{\bar{x}}$
1	38.1		1	40.4	
2	42.6	✓	2	41.4	✓
3	41.9	✓	3	39.8	
4	39.4		4	40.6	✓
5	38.3		5	41.3	✓
6	37.5		6	39.7	
7	42.1	✓	7	40.0	
8	40.7	✓	8	41.0	✓
9	38.8		9	40.6	✓
10	42.6	✓	10	39.2	
11	39.4		11	43.5	✓
12	41.3	✓	12	43.1	✓
13	40.3	✓	13	42.3	✓
14	39.1		14	40.6	✓
(n_1) 15	41.1	✓	(n_2) 15	37.6	

$\Sigma x = 603.2$ A= 8 $\Sigma y = 611.1$ B= 9

A: número de elementos de la población 1 que son mayores que $\bar{\bar{x}}$.

B: número de elementos de la población 2 que son mayores que $\bar{\bar{x}}$.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\Sigma x + \Sigma y}{30} = \frac{603.2 + 611.1}{30} = 40.5$$

(PASO 6): Calcule $p = \frac{A+B}{30} = \frac{8+9}{30} = 0.57$

(PASO 7): Calcule el valor de T

$$T = \frac{(A/15)-(B/15)}{\sqrt{0.133(1-p)p}} = \frac{(8/15)-(9/15)}{\sqrt{0.133(0.57)(0.36)}} = 0.36$$

Si T en valor absoluto es mayor que 2.495, las dos poblaciones tienen madianas diferentes.

Las dos poblaciones tienen medias iguales.

EXPERIMENTO Nº 3

Para aplicar la prueba de Mann-Whitney-Wilcoxon para comparación de medianas de dos poblaciones independientes explicada en la sección 3.2 del Capítulo III, se utilizarán los mismos datos del experimento Nº 2 pues cumplen con los requisitos de independencia y toma de datos al azar requeridos por esta prueba. De esta forma será posible realizar ciertas comparaciones entre ambas pruebas .

A continuación se presenta el formato una vez instrumentado.

3.2.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para n_1=15 muestras y n_2=10 muestras.

	Observación	Señal	Rango
1	37.5	→	1
2	37.6		
3	38.1	→	3
4	38.3	→	4
5	38.8	→	5
6	39.1	→	6
7	39.4	→	7.5
8	39.4	→	7.5
9	39.7		
10	39.8		
11	40.0		
12	40.3	→	12
13	40.4		
14	40.6		
15	40.6		
16	40.7	→	16
17	41.0		
18	41.1	→	18
19	41.3		
20	41.3	→	19.5
21	41.4		
22	41.9	→	22
23	42.1	→	23
24	42.6	→	24
25	42.6	→	25

S= 193.5

Señal: Marque una flecha cuando la muestra pertenece a la población x y coloque el rango correspondiente en la columna "Rango".

T= S-120

Si T en valor absoluto cae en el intervalo (30/120). Las dos poblaciones tienen medianas iguales.

T= 193.5 - 120

T= 73.5

$30 < T < 120$

Las dos poblaciones tienen medianas iguales.

EXPERIMENTO Nº 4

El laboratorio de ensayo de materiales de la U.C.A.B. recibe para comprobar la resistencia a la compresión probetas de concreto. Entre los usuarios del laboratorio se encuentran dos asiduos clientes que por razones obvias llamaremos cliente 1 y 2. Haciendo uso de la instrumentación propuesta en el Capítulo III sección 6.1 se tratará de comprobar si la dispersión en la resistencia a la compresión de los dos fabricantes varía, para así comprobar cual de los dos tiene más precisión al realizar la colada.

Ya que las probetas provienen de productos diferentes, las dos poblaciones son por lo tanto mutuamente independientes. Además para garantizar que el muestreo es hecho al azar se utilizó la tabla de números al azar explicada en el Apéndice II de este trabajo.

Para realizar la prueba fueron tomados 20 datos de cada población, aprovechando así el formato propuesto en la sección 6.1 que trata la instrumentación de la prueba de Moses.

A continuación se presenta el formato una vez instrumentado.

6.1.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para n_1=20 observaciones y n_2=20 observaciones.

	Pob.1(x)	$x-\bar{x}_n$ (b)	(col b)^2 (c)
1	289	53.25	2835.56
	218	17.75	315.63
	232	3.75	14.06
	204	31.75	1008.06
	Σx_1 943	—	Σ= 4172.59
2	275	24.5	600.25
	237	13.5	182.25
	232	-18.5	342.25
	226	24.5	600.25
	Σx_2 1002	—	Σ= 1725.00
3	266	38.5	1482.25
	201	26.5	702.25
	216	11.5	132.25
	227	0.5	0.25
	Σx_3 910	—	Σ= 2317
4	272	34.75	1207.57
	225	12.25	150.62
	229	8.25	68.07
	223	14.25	203.06
	Σx_4 949	—	Σ= 1628.75
5	261	20	400
	230	11	121
	224	17	289
	249	8	64
	Σx_5 964		Σ= 874

	Pob.2 (y)	$y-\bar{y}_n$ (d)	(col c)^2 (e)
1	287	20	400
	274	7	49
	241	26	676
	266	1	1
	Σy_1 1068	—	Σ= 1126
2	268	9	81
	294	35	1225
	260	1	1
	214	45	2025
	Σy_2 1036	—	Σ= 3332
3	250	18	324
	303	35	1225
	275	7	49
	244	24	576
	Σy_3 1072	—	Σ= 2174
4	282	4.5	20.25
	257	20.5	420.25
	284	6.5	42.25
	287	9.5	90.25
	Σy_4 1110	—	Σ= 573.0
5	294	16.5	272.25
	275	2.5	6.25
	264	13.5	182.25
	278	6.5	0.25
	Σy_5 1110	—	Σ=

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{4} \qquad \bar{y}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{4}$$

Paso 1: Coloque las observaciones de la población 1 al azar, en la columna x.

Paso 2: Coloque las observaciones de la población 2 al azar, en la columna y.

Paso 3: Calcule la media aritmética para cada subgrupo.

Paso 4: Reste cada valor de x (o y) de $\bar{x}_n$ (o $\bar{y}_n$) colóquelo en la columna b (o d).

Paso 5: Eleve cada resto al cuadrado columna c (o e).

Paso 6: Sume todos los valores de la columna c y e.

Paso 7: Llévelos a un formato de Mann-Whitney-Wilcoxon.

Paso 8: Halle el valor de T para las sumas cuadradas de la población 1(x).

Paso 9: Si el valor de T cae entre (1/24) las dos poblaciones tienen el mismo parámetro de dispersión.

3.2.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para n_1=15 muestras y n_2=10 muestras.

	Observación	Señal	Rango
1	460.75		
2	573.00		
3	874.00	→	3
4	1126.00		
5	1469.00	→	5
6	1628.75	→	6
7	2174		
8	2317	→	8
9	3332		
10	4172.59	→	10
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			

S= 32

Señal: Marque una flecha cuando la muestra pertenece a la población x y coloque el rango correspondiente en la columna "Rango".

T= S-120

Si T en valor absoluto cae en el intervalo (30/120). Las dos poblaciones tienen medianas iguales.

T= 32 - 120

T = 88

30 < T < 120

Las dos poblaciones tienen igual parámetro de dispersión.

EXPERIMENTO Nº 5

Además de la prueba de Moses, la prueba de Siegel-Tukey cuya instrumentación está explicada en la sección 6.2 del Capítulo III. también resulta apta para comprobar si el grado de dispersión de dos poblaciones es el mismo. Por ello esta prueba será aplicada sobre la misma población muestreada en el experimento Nº 4, siendo así posible realizar comparaciones entre ambas pruebas.

En este caso el número de datos tomados por población fue de 10.

A continuación se presenta el formato una vez instrumentado.

6.2.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para un tamaño de muestra m_1 y m_2 iguales a diez.

$m_1=10$ y $m_2=10$

Datos ordenados	Señal	Rango	R(x)
201	→	1	1
204	→	4	4
214		5	
218	→	8	8
226	→	9	9
232	→	12	12
237	→	13	13
241		16	
250		17	
260		20	
264	→	19	19
266	→	18	18
268		15	
274		14	
275	→	11	11
284		10	
287		7	
289	→	6	6
		3	
		2	
			S= 101

Señal Población x:
T= S-21

T= 101-21 = 80 17 < T < 83

Intervalo crítico (17/83).

Si el valor de T está entre los valores críticos, las dos poblaciones tienen el mismo parámetro de dispersión.

Los dos fabricantes tienen la misma dispersión en la resistencia a la compresión del concreto.

EXPERIMENTO Nº 6.

En el laboratorio de materiales de la Universidad Católica Andrés Bello está siendo probado un método innovador para medir el esfuerzo de compresión de cilindros de concreto. El método consiste en aplicar ultrasonido a través de la muestra y medir el tiempo en microsegundos en que la señal atraviesa el cilindro. Hasta los momentos se han realizado preubas con propósitos didácticos, pero se desea conocer el grado de correlación existente entre los resultados del ensayo mecánico y el ensayo mediante la utilización de ultrasonido. Para ello utilizaremos la prueba de correlación de Spearman, cuya instrumentación está explicada en la sección 7.2 del Capítulo III. La prueba supuestamente debe mostrar un grado de correlación alto, esto supone que el valor absoluto de ρ debe estar cercano a 1.

De entre todas las pruebas hechas en el año, fueron tomados al azar los resultados de 18 muestras. Los valores de la prueba mecánica (kg/cm^2) son llamados x, los tomados con ultrasonido (en microsegundos) son llamados y. Los resultados se encuentran en la siguiente tabla.

7.2.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para una prueba con un número de datos por población (N) gual a dieciocho.

N=18

Datos x	R (x)	Datos y	R (y)	$[R(x)-R(y)]^2$
393	17	68.2	7	100
240	8	67.5	5.5	6.25
155	3	74.5	16	169
377	16	67.2	4	144
138	1	74.8	17.5	272.25
420	18	67.5	5.5	156.25
255	12	66.4	2	100
207	6	73.6	15	81
160	4	71.7	12	64
246	10	70.8	11	1
299	14	67.1	3	121
151	2	74.8	17.5	240.25
242	9	69.7	9	0
190	5	72.5	14	81
368	15	65.0	1	196
227	7	70.0	10	9
249	11	68.4	8	9
281	13	72.1	13	0 +

S= 1,750.00

Intervalo crítico: (390/1543).

Para que no exista correlación S debe estar entre ambos datos.

$$\rho = 1 - \frac{6S}{n(n-1)} = 1 - \frac{6S}{5814} = \underline{-0.81}.$$

EXPERIMENTO Nº 7

Sobre los mismos datos del experimento número 6, será aplicada la prueba de Cox y Stuart explicada en la sección 7.1 del Capítulo III.

Aplicando el procedimiento que se muestra en los comentarios de la misma sección, los datos se ordenan según el orden creciente de la variable x. Ya que en el experimento Nº6 los datos fueron ranqueados sólo hay que seguir ése mismo orden.

A diferencia de la prueba de Spearman esta prueba no da un grado de correlación cuantitativo que permita comparar ambos resultados, siendo solamente posible tomar conclusiones sobre la aceptación o no de que existe correlación.

El resultado de la prueba se encuentra en la tabla que se enseña a continuación.

7.1.2.- FORMATO TIPO

Formato tipo para un tamaño de población (N) igual a dieciocho.

N= 18

m= 18/2 = 9

Pares		Marca
(x_1, x_{10})	(74.8, 70.8)	
(x_2, x_{11})	(74.8, 68.4)	
(x_3, x_{12})	(74.5, 66.4)	
(x_4, x_{13})	(71.7, 72.1)	X
(x_5, x_{14})	(72.5, 67.1)	
(x_6, x_{15})	(73.6, 65.0)	
(x_7, x_{16})	(70.0, 67.2)	
(x_8, x_{17})	(67.5, 68.2)	X
(x_9, x_{18})	(69.7, 67.5)	+

Suma= 2

Marca: Coloque una X cuando el primer valor del par es menor que el segundo valor.

Valores críticos: (0/8)

Si la suma cae dentro del intervalo no existe tendencia.

$0 < \text{suma} < 8 \Rightarrow$ No existe tendencia.

EXPERIMENTO Nº 8

De los registros del año 1983 sobre los resultados de los ensayos de esfuerzo en cilindros de concreto efectuados en el laboratorio de materiales de la Universidad Católica Andrés Bello fueron tomados siete lotes de a cien datos cada uno. Cada lote está constituido por datos en secuencia para así poder aplicar la prueba cuya instrumentación está explicada en la sección 8.1 del Capítulo III de este trabajo.

De esta forma, se logra que los datos simulen una producción por lotes de la empresa Arpiga, qu es la productora de los cilindros.

Las poblaciones muestreadas son independientes puesto que corresponden a siete meses distintos en los que se realizaron los ensayos. Los resultados de la prueba se encuentran en la siguiente tabla.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Como se ha visto a lo largo de este trabajo los métodos estadísticos no paramétricos deben ser tomados en cuenta para la resolución de problemas de control de calidad, pues ofrece soluciones a una serie de casos para los que generalmente no existe una metodología consistente o para los que simplemente no existe ningún método estadístico tradicional (tal es el caso de la prueba de corridas o la de tendencias).

Se dijo en el Capítulo I que estos métodos no pretenden desplazar de su campo de acción en el control de calidad a los métodos estadísticos tradicionales. Lo que sí pretenden es tener su propio campo de acción, pues en ocasiones, los tradicionales son utilizados en situaciones que son incongruentes con las condiciones necesarias para su uso, situaciones en las que las pruebas aquí propuestas pueden ser aplicadas, al ser las suposiciones previas de ellas pocas y simples por lo que pueden realizarse casi sin temor a irrespetar alguna ley o teorema rígido que despoje de validez a los resultados de la prueba.

Se desprende de la instrumentación propuesta que una vez definidos los formatos de trabajo casi todos los métodos presentan características que hacen fácil su aplicación en el campo del control de calidad. Más aún, al observar los pasos de la instrumentación y tablas a utilizar mostradas en el tercer capítulo, resalta la sencillez de los métodos aquí propuestos: la facilidad para ordenar los datos, la fácil asignación de rangos, la comparación de las observaciones con un valor fijo para asignar un signo más (+) o un signo menos (-), la inexistencia de cálculos complejos y la utilización de tablas cuyos datos de entrada son escogidos incluso antes de proceder a la toma de datos, para así simplificar al máximo su utilización, tanto como las reglas de decisión a tomar. Por otro lado no resulta difícil comprender la lógica propia del método, pues en su mayoría

los estadísticos que se utilizan se basan en razonamientos simples propios de cualquier agrupación de datos y no en distribuciones de la población a veces desconocidas o difíciles de visualizar.

La experimentación realizada demuestra que es posible afirmar que de cumplirse los requisitos necesarios para aplicar los métodos tradicionales de control, se cumplen también los requisitos para realizar las pruebas que se presentan en este trabajo. La aleatoriedad de la toma de muestras resulta ser también una condición indispensable en las pruebas tradicionales, la escogencia del número de observaciones para la prueba resulta ser menos estricta en las no paramétricas, proporcionando así una flexibilidad al usuario que le permite escoger un número de datos acordes a sus necesidades y disponibilidades. No se requieren conocimientos profundos de estadística para su aplicación, ni siquiera en el campo de las probabilidades: un conteo, una ordenación o la demarcación de un símbolo son tareas que no requieren el concurso de una persona altamente preparada. Sólo en las pruebas de Moses y la de la mediana podría requerirse personal algo más calificado para poder realizarlas, siendo el cálculo más complicado el de potencias cuadradas. Tampoco los gráficos de control propuestos resultan ser más complejos que los tradicionalmente utilizados e incluso los aquí presentados utilizan tablas que hacen más fácil su instrumentación.

La experimentación realizada en el cuarto capítulo dio resultados acordes con los objetivos propios de cada prueba ya que los resultados de los mismos, con excepción del experimento Nº 7, proporcionará situaciones ya conocidas, siendo posible afirmar que el grado de confiabilidad de estas pruebas parece ser alto.

De la instrumentación planteada para la prueba de igualdad de medianas de poblaciones independientes (experimentos 2 y 3), sólo podemos concluir la facilidad de aplicación de la prueba de la mediana con respecto a la de Mann-Whitney-Wilcoxon. En cuan

to a las pruebas para la igualdad de parámetros de dispersión (experimentos 4 y 5) sólo se observa la más fácil aplicación de la prueba de Siegel-Tukey que la de Moses, ya que los cálculos y ordenamientos son muchommenos cuantiosos.

En los experimentos 6 y 7 se puede observar que la prueba de Spearman para correlación parece ser más sensitiva que la de Cox y Stuart, por lo que esta última parece requerir un número mayor de datos para tener un alto grado de confiabilidad, aún cuando su instrumentación es más sencilla. Además la prueba de Spearman presenta la ventaja de proporcionar un factor que mide el grado de correlación entre las dos poblaciones. Se recomienda la utiización de la prueba de Cox y Stuart como herramienta para detectar tendencias en los tradicionales gráficos de control ($\bar{x}$ - R).

La prueba de secuencias aparte de plantearse como un método estadístico en sí mismo para el control de calidad, se puede utilizar como apoyo de los gráficos de control de defectuosas "pn", pues proporciona mayor información sobre las causas de la pérdida de control, además de detectar la repetición periódica de resultados no apropiados.

La facilidad con que se instrumentan, la sencillez de entendimiento, el grado de confiabilidad que parecen tener, la posibilidad de utilizarlas con la infraestructura existente en los departamentos de control de calidad usuarios de los métodos tradicionales, así como la adaptación de estos métodos a situaciones concretas para la industria, son elementos más que suficientes para afirmar que existe la factibilidad para la adaptación de los métodos aquí propuestos al control de calidad.

Claro está, la aceptación por parte del medio industrial venezolano de estos métodos, requiere del empuje y el aval de un organismo nacional competente dentro del área de control de calidad y la normalización.

RECOMENDACIONES

RECOMENDACIONES

La Comisión Venezolana de Normas Industriales COVENIN es el organismo más apropiado para el estudio y divulgación de estos métodos, ya que por su carácter fomentador del control de calidad debe estar interesada en al apoyo a los nuevos campos de la tecnología venezolana. Para poder hacerlo sería necesario que este organismo realizara un plan como el que se muestra a continuación.

La primera parte del plan debería ser la asignación de un grupo de técnicos de COVENIN para el estudio con profundidad de los temas aquí propuestos, con él se trataría de determinar de manera cierta la confiabilidad de los métodos experimentando más extensamente con ellos. También será necesario realizar una clasificación de las situaciones específicas en las que son utilizables, para así acotar las fronteras entre el campo de acción de los métodos tradicionales y los nuevos propuestos en este trabajo, con esto (ya con objetivos más ambiciosos pero necesarios) se estaría en posición de hacer una clasificación de las industrias que utilizan métodos estadísticos para el control de calidad según la adopción de uno o de ambos métodos a la vez. Un buen comienzo para la delimitación sería recomendar la utilización de los métodos aquí propuestos a las industrias que cumplan con las siguientes características:

a) situaciones en las que es imposible o muy costoso determinar la distribución de probabilidad de la población en estudio.

b) cuando existe la certeza que la función de distribución de la población es libre o no es la requerida para utilizar los métodos tradicionales.

c) cuando el costo de verificación de suposiciones tales como normalidad (en caso de que se realicen) resulte mayor al beneficio que arroje la utilización del control.

Una vez hecho el estudio COVENIN dispondrá de elementos suficientes para determinar campos concretos de aplicación en control de calidad en la industria nacional. También debe ser capaz, dada su asociación con organismos internacionales, de mantener actualizada la información concerniente a la estadística no paramétrica, su difusión, avances y mejoras. Así este organismo podrá avalar y difundir los métodos propuestos en este trabajo, incluso podrá proporcionar a ciertas empresas reacias al control de calidad métodos que son más sencillos y que no requieren de ninguna especialización aparte de la necesaria para instrumentar los tradicionales. Con esto COVENIN podría promocionar una tecnología nacional, nueva e innovadora.

APENDICE I

Tabla 1.- DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD BINOMIAL

$$P(r|n,p) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

n = 1

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9900	.9800	.9700	.9600	.9500	.9400	.9300	.9200	.9100	.9000
1	.0100	.0200	.0300	.0400	.0500	.0600	.0700	.0800	.0900	.1000
	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.8900	.8800	.8700	.8600	.8500	.8400	.8300	.8200	.8100	.8000
1	.1100	.1200	.1300	.1400	.1500	.1600	.1700	.1800	.1900	.2000
	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.7900	.7800	.7700	.7600	.7500	.7400	.7300	.7200	.7100	.7000
1	.2100	.2200	.2300	.2400	.2500	.2600	.2700	.2800	.2900	.3000
	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.6900	.6800	.6700	.6600	.6500	.6400	.6300	.6200	.6100	.6000
1	.3100	.3200	.3300	.3400	.3500	.3600	.3700	.3800	.3900	.4000
	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.5900	.5800	.5700	.5600	.5500	.5400	.5300	.5200	.5100	.5000
1	.4100	.4200	.4300	.4400	.4500	.4600	.4700	.4800	.4900	.5000

n = 2

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9801	.9604	.9409	.9216	.9025	.8836	.8649	.8464	.8281	.8100
1	.0198	.0392	.0582	.0768	.0950	.1128	.1302	.1472	.1638	.1800
2	.0001	.0004	.0009	.0016	.0025	.0036	.0049	.0064	.0081	.0100
	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.7921	.7744	.7569	.7396	.7225	.7056	.6889	.6724	.6561	.6400
1	.1958	.2112	.2262	.2408	.2550	.2688	.2822	.2952	.3078	.3200
2	.0121	.0144	.0169	.0196	.0225	.0256	.0289	.0324	.0361	.0400
	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.6241	.6084	.5929	.5776	.5625	.5476	.5329	.5184	.5041	.4900
1	.3318	.3432	.3542	.3648	.3750	.3848	.3942	.4032	.4118	.4200
2	.0441	.0484	.0529	.0576	.0625	.0676	.0729	.0784	.0841	.0900
	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.4761	.4624	.4489	.4356	.4225	.4096	.3969	.3844	.3721	.3600
1	.4278	.4352	.4422	.4488	.4550	.4608	.4662	.4712	.4758	.4800
2	.0961	.1024	.1089	.1156	.1225	.1296	.1369	.1444	.1521	.1600
	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.3481	.3364	.3249	.3136	.3025	.2916	.2809	.2704	.2601	.2500
1	.4838	.4872	.4902	.4928	.4950	.4968	.4982	.4992	.4998	.5000
2	.1681	.1764	.1849	.1936	.2025	.2116	.2209	.2304	.2401	.2500

FUENTE: Wayne, Daniel. Applied Nonparametric Statics.

n = 3

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9704	.9412	.9127	.8847	.8574	.8306	.8044	.7787	.7536	.7290
1	.0294	.0576	.0847	.1106	.1354	.1590	.1816	.2031	.2236	.2430
2	.0003	.0012	.0026	.0046	.0071	.0102	.0137	.0177	.0221	.0270
3	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0007	.0010

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.7050	.6815	.6585	.6361	.6141	.5927	.5718	.5514	.5314	.5120
1	.2614	.2788	.2952	.3106	.3251	.3387	.3513	.3631	.3740	.3840
2	.0323	.0380	.0441	.0506	.0574	.0645	.0720	.0797	.0877	.0960
3	.0013	.0017	.0022	.0027	.0034	.0041	.0049	.0058	.0069	.0080

	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.4930	.4746	.4565	.4390	.4219	.4052	.3890	.3732	.3579	.3430
1	.3932	.4015	.4091	.4159	.4219	.4271	.4316	.4355	.4386	.4410
2	.1045	.1133	.1222	.1313	.1406	.1501	.1597	.1693	.1791	.1890
3	.0093	.0106	.0122	.0138	.0156	.0176	.0197	.0220	.0244	.0270

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.3285	.3144	.3008	.2875	.2746	.2621	.2500	.2383	.2270	.2160
1	.4428	.4439	.4444	.4443	.4436	.4424	.4406	.4382	.4354	.4320
2	.1989	.2089	.2189	.2289	.2389	.2488	.2587	.2686	.2783	.2880
3	.0298	.0328	.0359	.0393	.0429	.0467	.0507	.0549	.0593	.0640

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.2054	.1951	.1852	.1756	.1664	.1575	.1489	.1406	.1327	.1250
1	.4282	.4239	.4191	.4140	.4084	.4024	.3961	.3894	.3823	.3750
2	.2975	.3069	.3162	.3252	.3341	.3428	.3512	.3594	.3674	.3750
3	.0689	.0741	.0795	.0852	.0911	.0973	.1038	.1106	.1176	.1250

n = 4

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9606	.9224	.8853	.8493	.8145	.7807	.7481	.7164	.6857	.6561
1	.0388	.0753	.1095	.1416	.1715	.1993	.2252	.2492	.2713	.2916
2	.0006	.0023	.0051	.0088	.0135	.0191	.0254	.0325	.0402	.0486
3	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0008	.0013	.0019	.0027	.0036
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.6274	.5997	.5729	.5470	.5220	.4979	.4746	.4521	.4305	.4096
1	.3102	.3271	.3424	.3562	.3685	.3793	.3888	.3970	.4039	.4096
2	.0575	.0669	.0767	.0870	.0975	.1084	.1195	.1307	.1421	.1536
3	.0047	.0061	.0076	.0094	.0115	.0138	.0163	.0191	.0222	.0256
4	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0007	.0008	.0010	.0013	.0016

	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.3895	[illegible]	.3515	.3336	.3164	.2999	.2840	.2687	.2541	.2401
1	.4142	.4176	.4200	.4214	.4219	.4214	.4201	.4180	.4152	.4116
2	.1651	.1767	.1882	.1996	.2109	.2221	.2331	.2439	.2544	.2646
3	.0293	.0332	.0375	.0420	.0469	.0520	.0575	.0632	.0693	.0756
4	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0046	.0053	.0061	.0071	.0081

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.2267	.2138	.2015	.1897	.1785	.1678	.1575	.1478	.1385	.1296
1	.4074	.4025	.3970	.3910	.3845	.3775	.3701	.3623	.3541	.3456
2	.2745	.2841	.2933	.3021	.3105	.3185	.3260	.3330	.3396	.3456
3	.0822	.0891	.0963	.1038	.1115	.1194	.1276	.1361	.1447	.1536
4	.0092	.0105	.0119	.0134	.0150	.0168	.0187	.0209	.0231	.0256

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.1212	.1132	.1056	.0983	.0915	.0850	.0789	.0731	.0677	.0625
1	.3368	.3278	.3185	.3091	.2995	.2897	.2799	.2700	.2600	.2500
2	.3511	.3560	.3604	.3643	.3675	.3702	.3723	.3738	.3747	.3750
3	.1627	.1719	.1813	.1908	.2005	.2102	.2201	.2300	.2400	.2500
4	.0283	.0311	.0342	.0375	.0410	.0448	.0488	.0531	.0576	.0625

n = 5

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9510	.9039	.8587	.8154	.7738	.7339	.6957	.6591	.6240	.5905
1	.0480	.0922	.1328	.1699	.2036	.2342	.2618	.2866	.3086	.3280
2	.0010	.0038	.0082	.0142	.0214	.0299	.0394	.0498	.0610	.0729
3	.0000	.0001	.0003	.0006	.0011	.0019	.0030	.0043	.0060	.0081
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.5584	.5277	.4984	.4704	.4437	.4182	.3939	.3707	.3487	.3277
1	.3451	.3598	.3724	.3829	.3915	.3983	.4034	.4069	.4089	.4098
2	.0853	.0981	.1113	.1247	.1382	.1517	.1652	.1786	.1919	.2048
3	.0105	.0134	.0166	.0203	.0244	.0289	.0338	.0392	.0450	.0512
4	.0007	.0009	.0012	.0017	.0022	.0028	.0035	.0043	.0053	.0064
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003

	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.3077	.2887	.2707	.2538	.2373	.2219	.2073	.1935	.1804	.1681
1	.4090	.4072	.4043	.4003	.3955	.3898	.3834	.3762	.3685	.3602
2	.2174	.2297	.2415	.2529	.2637	.2739	.2836	.2926	.3010	.3087
3	.0578	.0648	.0721	.0798	.0879	.0962	.1049	.1138	.1229	.1323
4	.0077	.0091	.0108	.0126	.0146	.0169	.0194	.0221	.0251	.0284
5	.0004	.0005	.0006	.0008	.0010	.0012	.0014	.0017	.0021	.0024

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.1564	.1454	.1350	.1252	.1160	.1074	.0992	.0916	.0845	.0778
1	.3513	.3421	.3325	.3226	.3124	.3020	.2914	.2808	.2700	.2592
2	.3157	.3220	.3275	.3323	.3364	.3397	.3423	.3441	.3452	.3456
3	.1418	.1515	.1613	.1712	.1811	.1911	.2010	.2109	.2207	.2304
4	.0319	.0357	.0397	.0441	.0488	.0537	.0590	.0646	.0706	.0768
5	.0029	.0034	.0039	.0045	.0053	.0060	.0069	.0079	.0090	.0102

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0715	.0656	.0602	.0551	.0503	.0459	.0418	.0380	.0345	.0312
1	.2484	.2376	.2270	.2164	.2059	.1956	.1854	.1755	.1657	.1562
2	.3452	.3442	.3424	.3400	.3369	.3332	.3289	.3240	.3185	.3125
3	.2399	.2492	.2583	.2671	.2757	.2838	.2916	.2990	.3060	.3125
4	.0834	.0902	.0974	.1049	.1128	.1209	.1293	.1380	.1470	.1562
5	.0116	.0131	.0147	.0165	.0185	.0206	.0229	.0255	.0282	.0312

n = 6

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9415	.8858	.8330	.7828	.7351	.6899	.6470	.6064	.5679	.5314
1	.0571	.1085	.1546	.1957	.2321	.2642	.2922	.3164	.3370	.3543
2	.0014	.0055	.0120	.0204	.0305	.0422	.0550	.0688	.0833	.0984
3	.0000	.0002	.0005	.0011	.0021	.0036	.0055	.0080	.0110	.0146
4	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0012
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.4970	.4644	.4336	.4046	.3771	.3513	.3269	.3040	.2824	.2621
1	.3685	.3800	.3888	.3952	.3993	.4015	.4018	.4004	.3975	.3932
2	.1139	.1205	.1452	.1608	.1762	.1912	.2057	.2197	.2331	.2458
3	.0188	.0236	.0289	.0349	.0415	.0486	.0562	.0643	.0729	.0819
4	.0017	.0024	.0032	.0043	.0055	.0069	.0086	.0106	.0128	.0154
5	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0012	.0015
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.2431	.2252	.2084	.1927	.1780	.1642	.1513	.1393	.1281	.1176
1	.3877	.3811	.3735	.3651	.3560	.3462	.3358	.3251	.3139	.3025
2	.2577	.2687	.2789	.2882	.2966	.3041	.3105	.3160	.3206	.3241
3	.0913	.1011	.1111	.1214	.1318	.1424	.1531	.1639	.1746	.1852
4	.0182	.0214	.0249	.0287	.0330	.0375	.0425	.0478	.0535	.0595
5	.0019	.0024	.0030	.0036	.0044	.0053	.0063	.0074	.0087	.0102
6	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007

n = 6 (Continued)

r \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.1079	.0989	.0905	.0827	.0754	.0687	.0625	.0568	.0515	.0467
1	.2909	.2792	.2673	.2555	.2437	.2319	.2203	.2089	.1976	.1866
2	.3267	.3284	.3292	.3290	.3280	.3261	.3235	.3201	.3159	.3110
3	.1957	.2061	.2162	.2260	.2355	.2446	.2533	.2616	.2693	.2765
4	.0660	.0727	.0799	.0873	.0951	.1032	.1116	.1202	.1291	.1382
5	.0119	.0137	.0157	.0180	.0205	.0232	.0262	.0295	.0330	.0369
6	.0009	.0011	.0013	.0015	.0018	.0022	.0026	.0030	.0035	.0041

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0422	.0381	.0343	.0308	.0277	.0248	.0222	.0198	.0176	.0156
1	.1759	.1654	.1552	.1454	.1359	.1267	.1179	.1095	.1014	.0938
2	.3055	.2994	.2928	.2856	.2780	.2699	.2615	.2527	.2436	.2344
3	.2831	.2891	.2945	.2992	[illegible]	.3005	.3091	.3110	.3121	.3125
4	.1475	.1570	.1666	.1763	.1861	.1958	.2056	.2153	.2249	.2344
5	.0410	.0455	.0503	.0554	.0609	.0667	.0729	.0795	.0864	.0938
6	.0048	.0055	.0063	.0073	.0083	.0095	.0108	.0122	.0138	.0156

n = 7

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9321	.8681	.8080	.7514	.6983	.6485	.6017	.5578	.5168	.4783
1	.0659	.1240	.1749	.2192	.2573	.2897	.3170	.3396	.3578	.3720
2	.0020	.0076	.0162	.0274	.0406	.0555	.0716	.0886	.1061	.1240
3	.0000	.0003	.0008	.0019	.0036	.0059	.0090	.0128	.0175	.0230
4	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0011	.0017	.0026
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.4423	.4087	.3773	.3479	.3206	.2951	.2714	.2493	.2288	.2097
	.3827	.3901	.3946	.3965	.3960	.3935	.3891	.3830	.3756	.3670
2	.1419	.1596	.1769	.1938	.2097	.2248	.2391	.2523	.2643	.2753
3	.0292	.0363	.0441	.0525	.0617	.0714	.0816	.0923	.1033	.1147
4	.0036	.0049	.0066	.0086	.0109	.0136	.0167	.0203	.0242	.0287
5	.0003	.0004	.0006	.0008	.0012	.0016	.0021	.0027	.0034	.0043
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004

	.21	.22	[illegible]	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.1920	.1757	.1605	.1465	.1335	.1215	.1105	.1003	.0910	.0824
1	.3573	.3468	.3356	.3237	.3115	.2989	.2860	.2731	.2600	.2471
2	.2850	.2935	.3007	.3067	.3115	.3150	.3174	.3186	.3186	.3177
3	.1263	.1379	.1497	.1614	.1730	.1845	.1956	.2065	.2169	.2269
4	.0336	.0389	.0447	.0510	.0577	.0648	.0724	.0803	.0886	.0972
5	.0054	.0066	.0080	.0097	.0115	.0137	.0161	.0187	.0217	.0250
6	.0005	.0006	.0008	.0010	.0013	.0016	.0020	.0024	.0030	.0036
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0745	.0672	.0606	.0546	.0490	.0440	.0394	.0352	.0314	.0280
1	.2342	.2215	.2090	.1967	.1848	.1732	.1610	.1511	.1407	.1306
2	.3156	.3127	.3088	.3040	.2985	.2922	.2853	.2778	.2698	.2613
3	.2363	.2452	.2535	.2610	.2679	.2740	.2793	.2838	.2875	.2903
4	.1062	.1154	.1248	.1345	.1442	.1541	.1640	.1739	.1838	.1935
5	.0286	.0326	.0369	.0416	.0466	.0520	.0578	.0640	.0705	.0774
6	.0043	.0051	.0061	.0071	.0084	.0098	.0113	.0131	.0150	.0172
7	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	[illegible]	.0221	.0195	.0173	.0152	.0134	.0117	.0103	.0090	.0078
1	[illegible]	.1119	.1032	.0950	.0872	.0798	.0729	.0664	.0604	.0547
2	.2524	.2431	.2336	.2239	.2140	.2040	.1940	.1840	.1740	.1641
3	.2923	.2934	.2937	.2932	.2918	.2897	.2867	.2830	.2786	.2734
4	.2031	.2125	.2216	.2304	.2388	.2468	.2543	.2612	.2676	.2734
5	.0847	.0923	.1003	.1086	.1172	.1261	.1353	.1447	.1543	.1641
6	.0196	.0223	.0252	.0284	.0320	.0358	.0400	.0445	.0494	.0547
7	.0019	.0023	.0027	.0032	.0037	.0044	.0051	.0059	.0068	.0078

n = 8

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9227	.8508	.7837	.7214	.6634	.6096	.5596	.5132	.4703	.4305
1	.0746	.1389	.1939	.2405	.2793	.3113	.3370	.3570	.3721	.3826
2	.0026	.0099	.0210	.0351	.0515	.0695	.0888	.1087	.1288	.1488
3	.0001	.0004	.0015	.0029	.0054	.0089	.0134	.0189	.0255	.0331
4	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0013	.0021	.0031	.0046
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0004

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.3937	.3596	.3282	.2992	.2725	.2479	.2252	.2044	.1853	.1678
1	.3892	.3923	.3923	.3897	.3847	.3777	.3691	.3590	.3477	.3355
2	.1684	.1872	.2052	.2220	.2376	.2518	.2646	.2758	.2855	.2936
3	.0416	.0511	.0613	.0723	.0839	.0959	.1084	.1211	.1339	.1468
4	.0064	.0087	.0115	.0147	.0185	.0228	.0277	.0332	.0393	.0459
5	.0006	.0009	.0014	.0019	.0026	.0035	.0045	.0058	.0074	.0092
6	.0000	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009	.0011
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.1517	.1370	.1236	.1113	.1001	.0899	.0806	.0722	.0646	.0576
1	.3226	.3092	.2953	.2812	.2670	.2527	.2386	.2247	.2110	.1977
2	.3002	.3052	.3087	.3108	.3115	.3108	.3089	.3058	.3017	.2965
3	.1596	.1722	.1844	.1963	.2076	.2184	.2285	.2379	.2464	.2541
4	.0530	.0607	.0689	.0775	.0865	.0959	.1056	.1156	.1258	.1361
5	.0113	.0137	.0165	.0196	.0231	.0270	.0313	.0360	.0411	.0467
6	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0058	.0070	.0084	.0100
7	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008	.0010	.0012
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0514	.0457	.0406	.0360	.0319	.0281	.0248	.0218	.0192	.0168
1	.1847	.1721	.1600	.1484	.1373	.1267	.1166	.1071	.0981	.0896
2	.2904	.2835	.2758	.2675	.2587	.2494	.2397	.2297	.2194	.2090
3	.2609	.2668	.2717	.2756	.2786	.2805	.2815	.2815	.2806	.2787
4	.1465	.1569	.1673	.1775	.1875	.1973	.2067	.2157	.2242	.2322
5	.0527	.0591	.0659	.0732	.0808	.0888	.0971	.1058	.1147	.1239
6	.0118	.0139	.0162	.0188	.0217	.0250	.0285	.0324	.0367	.0413
7	.0015	.0019	.0023	.0028	.0033	.0040	.0048	.0057	.0067	.0079
8	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0004	.0005	.0007

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0147	.0128	.0111	.0097	.0084	.0072	.0062	.0053	.0046	.0039
1	.0816	.0742	.0672	.0608	.0548	.0493	.0442	.0395	.0352	.0312
2	.1985	.1880	.1776	.1672	.1569	.1469	.1371	.1275	.1183	.1094
3	.2759	.2723	.2679	.2627	.2568	.2503	.2431	.2355	.2273	.2188
4	.2397	.2465	.2526	.2580	.2627	.2665	.2695	.2717	.2730	.2734
5	.1332	.1428	.1525	.1622	.1719	.1816	.1912	.2006	.2098	.2188
6	.0463	.0517	.0575	.0637	.0703	.0774	.0848	.0926	.1008	.1094
7	.0092	.0107	.0124	.0143	.0164	.0188	.0215	.0244	.0277	.0312
8	.0008	.0010	.0012	.0014	.0017	.0020	.0024	.0028	.0033	.0039

n = 9

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9135	.8337	.7602	.6925	.6302	.5730	.5204	.4722	.4279	.3874
1	.0830	.1531	.2116	.2597	.2985	.3292	.3525	.3695	.3809	.3874
2	.0034	.0125	.0262	.0433	.0629	.0840	.1061	.1285	.1507	.1722
3	.0001	.0006	.0019	.0042	.0077	.0125	.0186	.0261	.0348	.0446
4	.0000	.0000	.0001	.0003	.0006	.0012	.0021	.0034	.0052	.0074
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005	.0009
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

n = 9 (Continued)

r \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.3504	.3165	.2855	.2573	.2316	.2082	.1869	.1678	.1501	.1342
1	.3897	.3884	.3840	.3770	.3679	.3569	.3446	.3312	.3169	.3020
2	.1927	.2119	.2295	.2455	.2597	.2720	.2823	.2908	.2973	.3020
3	.0556	.0674	.0800	.0933	.1069	.1209	.1349	.1489	.1627	.1762
4	.0103	.0138	.0179	.0228	.0283	.0345	.0415	.0490	.0573	.0661
5	.0013	.0019	.0027	.0037	.0050	.0066	.0085	.0108	.0134	.0165
6	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0008	.0012	.0016	.0021	.0028
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003

	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.1199	.1069	.0952	.0846	.0751	.0665	.0589	.0520	.0458	.0404
1	.2867	.2713	.2558	.2404	.2253	.2104	.1960	.1820	.1685	.1556
2	[illegible]	.3061	.3056	.3037	.3003	.2957	.2899	.2831	.2754	.2668
3	.1845	.2014	.2130	.2238	.2336	.2424	.2502	.2569	.2624	.2668
4	.0754	.0852	.0954	.1060	.1168	.1278	.1388	.1499	.1608	.1715
5	.0200	.0240	.0285	.0335	.0389	.0449	.0513	.0583	.0657	.0735
6	.0036	.0045	.0057	.0070	.0087	.0105	.0127	.0151	.0179	.0210
7	.0004	.0005	.0007	.0010	.0012	.0016	.0020	.0025	.0031	.0039
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0355	.0311	.0272	.0238	.0207	.0180	.0156	.0135	.0117	.0101
1	.1434	.1317	.1206	.1102	.1004	.0912	.0826	.0747	.0673	.0605
2	.2576	.2478	.2376	.2270	.2162	.2052	.1941	.1831	.1721	.1612
3	.2701	.2721	.2731	.2729	.2716	.2693	.2660	.2618	.2567	.2508
4	.1820	.1921	.2017	.2109	.2194	.2272	.2344	.2407	.2462	.2508
5	.0818	.0904	.0994	.1086	.1181	.1278	.1376	.1475	.1574	.1672
6	.0245	.0284	.0326	.0373	.0424	.0479	.0539	.0603	.0671	.0743
7	.0047	.0057	.0069	.0082	.0098	.0116	.0136	.0158	.0184	.0212
8	.0005	.0007	.0008	.0011	.0013	.0016	.0020	.0024	.0029	.0035
9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0087	.0074	.0064	.0054	.0046	.0039	.0033	.0028	.0023	.0020
1	.0542	.0484	.0431	.0383	.0339	.0299	.0263	.0231	.0202	.0176
2	.1506	.1402	.1301	.1204	.1110	.1020	.0934	.0853	.0776	.0703
3	.2442	.2369	.2291	.2207	.2119	.2027	.1933	.1837	.1739	.1641
4	.2545	.2573	.2592	.2601	.2600	.2590	.2571	.2543	.2506	.2461
5	.1769	.1863	.1955	.2044	.2128	.2207	.2280	.2347	.2408	.2461
6	.0819	.0900	.0983	.1070	.1160	.1253	.1348	.1445	.1542	.1641
7	.0244	.0279	.0318	.0360	.0407	.0458	.0512	.0571	.0635	.0703
8	.0042	.0051	.0060	.0071	.0083	.0097	.0114	.0132	.0153	.0176
9	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0020

n = 10

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.9044	.8171	.7374	.6648	.5987	.5386	.4840	.4344	.3894	.3487
1	.0914	.1667	.2281	.2770	.3151	.3438	.3643	.3777	.3851	.3874
2	.0042	.0153	.0317	.0519	.0746	.0988	.1234	.1478	.1714	.1937
3	.0001	.0008	.0026	.0058	.0105	.0168	.0248	.0343	.0452	.0574
4	.0000	.0000	.0001	.0004	.0010	.0019	.0033	.0052	.0078	.0112
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0005	.0009	.0015
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.3118	.2785	.2484	.2213	.1969	.1749	.1552	.1374	.1216	.1074
1	.3854	.3798	.3712	.3603	.3474	.3331	.3178	.3017	.2852	.2684
2	.2143	.2330	.2496	.2639	.2759	.2856	.2929	.2980	.3010	.3020
3	.0706	.0847	.0995	.1146	.1298	.1450	.1600	.1745	.1883	.2013
4	.0153	.0202	.0260	.0326	.0401	.0483	.0573	.0670	.0773	.0881
5	.0025	.0033	.0047	.0064	.0085	.0111	.0141	.0177	.0218	.0264
6	.0002	.0004	.0006	.0009	.0012	.0018	.0024	.0032	.0043	.0055
7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0008
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

n = 10 (Continued)

r \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0947	.0834	.0733	.0643	.0563	.0492	.0430	.0374	.0326	.0282
1	.2517	.2351	.2188	.2030	.1877	.1730	.1590	.1456	.1330	.1211
2	.3011	.2984	.2942	.2885	.2816	.2735	.2646	.2548	.2444	.2335
3	.2134	.2244	.2343	.2429	.2503	.2563	.2609	.2642	.2662	.2668
4	.0991	.1108	.1225	.1343	.1460	.1576	.1689	.1798	.1903	.2001
5	.0317	.0375	.0439	.0509	.0584	.0664	.0750	.0839	.0933	.1029
6	.0070	.0088	.0109	.0134	.0162	.0195	.0231	.0272	.0317	.0368
7	.0011	.0014	.0019	.0024	.0031	.0039	.0049	.0060	.0074	.0090
8	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001

r \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0245	.0211	.0182	.0157	.0135	.0115	.0098	.0084	.0071	.0060
1	.1099	.0995	.0898	.0808	.0725	.0649	.0578	.0514	.0456	.0403
2	.2222	.2107	.1990	.1873	.1757	.1642	.1529	.1419	.1312	.1209
3	.2662	.2644	.2614	.2573	.2522	.2462	.2394	.2319	.2237	.2150
4	.2093	.2177	.2253	.2320	.2377	.2424	.2461	.2487	.2503	.2508
5	.1128	.1229	.1332	.1434	.1536	.1636	.1734	.1829	.1920	.2007
6	.0422	.0482	.0547	.0616	.0689	.0767	.0849	.0934	.1023	.1115
7	.0108	.0130	.0154	.0181	.0212	.0247	.0285	.0327	.0374	.0425
8	.0018	.0023	.0028	.0035	.0043	.0052	.0063	.0075	.0090	.0106
9	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008	.0010	.0013	.0016
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

r \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0051	.0043	.0036	.0030	.0025	.0021	.0017	.0014	.0012	.0010
1	.0355	.0312	.0273	.0238	.0207	.0180	.0155	.0133	.0114	.0098
2	.1111	.1017	.0927	.0843	.0763	.0688	.0619	.0554	.0494	.0439
3	.2058	.1963	.1865	.1765	.1665	.1564	.1464	.1364	.1267	.1172
4	.2503	.2488	.2462	.2427	.2384	.2331	.2271	.2204	.2130	.2051
5	.2087	.2162	.2229	.2280	.2340	.2383	.2413	.2441	.2456	.2461
6	.1209	.1304	.1401	.1499	.1596	.1692	.1786	.1878	.1966	.2051
7	.0480	.0540	.0604	.0673	.0746	.0824	.0905	.0991	.1080	.1172
8	.0125	.0147	.0171	.0198	.0229	.0263	.0301	.0343	.0389	.0439
9	.0019	.0024	.0029	.0035	.0042	.0050	.0059	.0070	.0083	.0098
10	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008	.0010

n = 11

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8953	.8007	.7153	.6382	.5688	.5063	.4501	.3996	.3544	.3138
1	.0995	.1798	.2433	.2925	.3293	.3555	.3727	.3823	.3855	.3835
2	.0050	.0183	.0376	.0609	.0867	.1135	.1403	.1662	.1906	.2131
3	.0002	.0011	.0035	.0076	.0137	.0217	.0317	.0434	.0566	.0710
4	.0000	.0000	.0002	.0008	.0014	.0028	.0048	.0075	.0112	.0158
5	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0009	.0015	.0025
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003

r \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.2775	.2451	.2161	.1903	.1673	.1469	.1288	.1127	.0985	.0859
1	.3773	.3676	.3552	.3408	.3248	.3078	.2901	.2721	.2541	.2362
2	.2332	.2507	.2654	.2774	.2866	.2932	.2971	.2987	.2980	.2953
3	.0865	.1025	.1190	.1355	.1517	.1675	.1826	.1967	.2097	.2215
4	.0214	.0280	.0356	.0441	.0536	.0638	.0748	.0864	.0984	.1107
5	.0037	.0053	.0074	.0101	.0132	.0170	.0214	.0265	.0323	.0388
6	.0005	.0007	.0011	.0016	.0023	.0032	.0044	.0058	.0076	.0097
7	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0009	.0013	.0017
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

n = 11 (Continued)

r \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0748	.0650	.0564	.0489	.0422	.0364	.0314	.0270	.0231	.0198
1	.2187	.2017	.1854	.1697	.1549	.1408	.1276	.1153	.1038	.0932
2	.2907	.2845	.2768	.2680	.2581	.2474	.2360	.2242	.2121	.1998
3	.2318	.2407	.2481	.2539	.2581	.2608	.2619	.2616	.2599	.2568
4	.1232	.1358	.1482	.1603	.1721	.1832	.1937	.2035	.2123	.2201
5	.0459	.0536	.0620	.0709	.0803	.0901	.1003	.1108	.1214	.1321
6	.0122	.0151	.0185	.0224	.0268	.0317	.0371	.0431	.0496	.0566
7	.0023	.0030	.0039	.0050	.0064	.0079	.0098	.0120	.0145	.0173
8	.0003	.0004	.0006	.0008	.0011	.0014	.0018	.0023	.0030	.0037
9	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0169	.0144	.0122	.0104	.0088	.0074	.0062	.0052	.0044	.0036
1	.0834	.0744	.0662	.0587	.0518	.0457	.0401	.0351	.0306	.0266
2	.1874	.1751	.1630	.1511	.1395	.1284	.1177	.1075	.0978	.0887
3	.2526	.2472	.2408	.2335	.2254	.2167	.2074	.1977	.1876	.1774
4	.2269	.2326	.2372	.2406	.2428	.2438	.2436	.2423	.2399	.2365
5	.1427	.1533	.1636	.1735	.1830	.1920	.2003	.2079	.2148	.2207
6	.0641	.0721	.0806	.0894	.0985	.1080	.1176	.1274	.1373	.1471
7	.0206	.0242	.0283	.0329	.0379	.0434	.0494	.0558	.0627	.0701
8	.0046	.0057	.0070	.0085	.0102	.0122	.0145	.0171	.0200	.0234
9	.0007	.0009	.0011	.0015	.0018	.0023	.0028	.0035	.0043	.0052
10	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0007

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0030	.0025	.0021	.0017	.0014	.0011	.0009	.0008	.0006	.0005
1	.0231	.0199	.0171	.0147	.0125	.0107	.0090	.0076	.0064	.0054
2	.0801	.0721	.0646	.0577	.0513	.0454	.0401	.0352	.0308	.0269
3	.1670	.1566	.1462	.1359	.1259	.1161	.1067	.0976	.0888	.0806
4	.2321	.2267	.2206	.2136	.2060	.1978	.1892	.1801	.1707	.1611
5	.2258	.2299	.2329	.2350	.2360	.2359	.2348	.2327	.2296	.2256
6	.1569	.1664	.1757	.1846	.1931	.2010	.2083	.2148	.2206	.2256
7	.0779	.0861	.0947	.1036	.1128	.1223	.1319	.1416	.1514	.1611
8	.0271	.0312	.0357	.0407	.0462	.0521	.0585	.0654	.0727	.0806
9	.0063	.0075	.0090	.0107	.0126	.0148	.0173	.0201	.0233	.0269
10	.0009	.0011	.0014	.0017	.0021	.0025	.0031	.0037	.0045	.0054
11	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005

n = 12

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8864	.7847	.6938	.6127	.5404	.4759	.4186	.3677	.3225	.2824
1	.1074	.1922	.2575	.3064	.3413	.3645	.3781	.3837	.3827	.3766
2	.0060	.0216	.0438	.0702	.0988	.1280	.1565	.1835	.2082	.2301
3	.0002	.0015	.0045	.0098	.0173	.0272	.0393	.0532	.0686	.0852
4	.0000	.0001	.0003	.0009	.0021	.0039	.0067	.0104	.0153	.0213
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0008	.0014	.0024	.0038
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0005

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.2470	.2157	.1880	.1637	.1422	.1234	.1069	.0924	.0798	.0687
1	.3663	.3529	.3372	.3197	.3012	.2821	.2627	.2434	.2245	.2062
2	.2490	.2647	.2771	.2863	.2924	.2955	.2960	.2939	.2897	.2835
3	.1026	.1203	.1380	.1553	.1720	.1876	.2021	.2151	.2265	.2362
4	.0285	.0369	.0464	.0569	.0683	.0804	.0931	.1062	.1195	.1329
5	.0056	.0081	.0111	.0148	.0193	.0245	.0305	.0373	.0449	.0532
6	.0008	.0013	.0019	.0028	.0040	.0054	.0073	.0096	.0123	.0155
7	.0001	.0001	.0002	.0004	.0006	.0009	.0013	.0018	.0025	.0033
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0002	.0004	.0005
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.00000	.0000	.0000	.0000	.0001

n = 12 (Continued)

r \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0591	.0507	.0434	.0371	.0317	.0270	.0229	.0194	.0164	.0138
1	.1885	.1717	.1557	.1407	.1267	.1137	.1016	.0906	.0804	.0712
2	.2756	.2663	.2558	.2444	.2323	.2197	.2068	.1937	.1807	.1678
3	.2442	.2503	.2547	.2573	.2581	.2573	.2549	.2511	.2460	.2397
4	.1460	.1589	.1712	.1828	.1936	.2034	.2122	.2197	.2261	.2311
5	.0621	.0717	.0818	.0924	.1032	.1143	.1255	.1367	.1477	.1585
6	.0193	.0236	.0285	.0340	.0401	.0469	.0542	.0620	.0704	.0792
7	.0044	.0057	.0073	.0092	.0115	.0141	.0172	.0207	.0246	.0291
8	.0007	.0010	.0014	.0018	.0024	.0031	.0040	.0050	.0063	.0078
9	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0015
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0116	.0098	.0082	.0068	.0057	.0047	.0039	.0032	.0027	.0022
1	.0628	.0552	.0484	.0422	.0368	.0319	.0276	.0237	.0204	.0174
2	.1552	.1429	.1310	.1197	.1088	.0986	.0890	.0800	.0716	.0639
3	.2324	.2241	.2151	.2055	.1954	.1849	.1742	.1634	.1526	.1419
4	.2349	.2373	.2384	.2382	.2367	.2340	.2302	.2254	.2195	.2128
5	.1688	.1787	.1879	.1963	.2039	.2106	.2163	.2210	.2246	.2270
6	.0885	.0981	.1079	.1180	.1281	.1382	.1482	.1580	.1675	.1766
7	.0341	.0396	.0456	.0521	.0591	.0666	.0746	.0830	.0918	.1009
8	.0096	.0116	.0140	.0168	.0199	.0234	.0274	.0318	.0367	.0420
9	.0019	.0024	.0031	.0038	.0048	.0059	.0071	.0087	.0104	.0125
10	.0003	.0003	.0005	.0006	.0008	.0010	.0013	.0016	.0020	.0025
11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0018	.0013	.0012	.0010	.0008	.0006	.0005	.0004	.0003	.0002
1	.0148	.0126	.0106	.0090	.0075	.0063	.0052	.0043	.0036	.0029
2	.0567	.0502	.0442	.0388	.0339	.0294	.0255	.0220	.0189	.0161
3	.1314	.1211	.1111	.1015	.0923	.0836	.0754	.0676	.0604	.0537
4	.2054	.1973	.1888	.1794	.1700	.1602	.1504	.1405	.1306	.1208
5	.2284	.2285	.2276	.2256	.2225	.2184	.2134	.2075	.2008	.1934
6	.1851	.1931	.2003	.2068	.2124	.2171	.2208	.2234	.2250	.2256
7	.1103	.1198	.1295	.1393	.1489	.1585	.1678	.1768	.1853	.1934
8	.0479	.0542	.0611	.0684	.0762	.0844	.0930	.1020	.1113	.1208
9	.0148	.0175	.0205	.0239	.0277	.0319	.0367	.0418	.0475	.0537
10	.0031	.0038	.0046	.0056	.0068	.0082	.0098	.0116	.0137	.0161
11	.0004	.0005	.0006	.0008	.0010	.0013	.0016	.0019	.0024	.0029
12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002

n = 13

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8775	.7690	.6730	.5882	.5133	.4474	.3893	.3383	.2935	.2542
1	.1152	.2040	.2706	.3186	.3512	.3712	.3809	.3824	.3773	.3672
2	.0070	.0250	.0502	.0797	.1109	.1422	.1720	.1995	.2239	.2448
3	.0003	.0019	.0057	.0122	.0214	.0333	.0475	.0636	.0812	.0997
4	.0000	.0001	.0004	.0013	.0028	.0053	.0089	.0138	.0201	.0277
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0006	.0012	.0022	.0036	.0055
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0005	.0008
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.2198	.1898	.1636	.1408	.1209	.1037	.0887	.0758	.0646	.0550
1	.3532	.3364	.3178	.2979	.2774	.2567	.2362	.2163	.1970	.1787
2	.2619	.2753	.2849	.2910	.2937	.2934	.2903	.2848	.2773	.2680
3	.1187	.1376	.1561	.1737	.1900	.2049	.2180	.2293	.2385	.2457
4	.0367	.0469	.0583	.0707	.0838	.0976	.1116	.1258	.1399	.1535
5	.0082	.0115	.0157	.0207	.0266	.0335	.0412	.0497	.0591	.0691
6	.0013	.0021	.0031	.0045	.0063	.0085	.0112	.0145	.0185	.0230
7	.0002	.0003	.0005	.0007	.0011	.0016	.0023	.0032	.0043	.0058
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0004	.0005	.0008	.0011
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

n = 13 (Continued)

r \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0467	.0396	.0334	.0282	.0238	.0200	.0167	.0140	.0117	.0097
1	.1613	.1450	.1299	.1159	.1029	.0911	.0804	.0706	.0619	.0540
2	.2573	.2455	.2328	.2195	.2059	.1921	.1784	.1648	.1516	.1388
3	.2508	.2539	.2550	.2542	.2517	.2475	.2419	.2351	.2271	.2181
4	.1687	.1790	.1904	.2007	.2097	.2174	.2237	.2285	.2319	.2337
	.0797	.0909	.1024	.1141	.1258	.1375	.1489	.1600	.1705	.1803
	.0283	.0342	.0408	.0480	.0559	.0644	.0734	.0829	.0928	.1030
	.0075	.0096	.0122	.0152	.0186	.0226	.0272	.0323	.0379	.0442
8	.0015	.0020	.0027	.0036	.0047	.0060	.0075	.0094	.0116	.0142
9	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009	.0012	.0015	.0020	.0026	.0034
10	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0006
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0080	.0066	.0055	.0045	.0037	.0030	.0025	.0020	.0016	.0013
1	.0469	.0407	.0351	.0302	.0259	.0221	.0188	.0159	.0135	.0113
2	.1265	.1148	.1037	.0933	.0836	.0746	.0663	.0586	.0516	.0453
3	.2084	.1981	.1874	.1763	.1651	.1538	.1427	.1317	.1210	.1107
4	.2341	.2331	.2307	.2270	.2222	.2163	.2095	.2018	.1934	.1845
5	.1893	.1974	.2045	.2105	.2154	.2190	.2215	.2227	.2226	.2214
6	.1134	.1239	.1343	.1446	.1546	.1643	.1734	.1820	.1898	.1968
7	.0509	.0583	.0662	.0745	.0833	.0924	.1019	.1115	.1213	.1312
8	.0172	.0206	.0244	.0288	.0336	.0390	.0449	.0513	.0582	.0656
9	.0043	.0054	.0067	.0082	.0101	.0122	.0146	.0175	.0207	.0243
10	.0008	.0010	.0013	.0017	.0022	.0027	.0034	.0043	.0053	.0065
11	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0006	.0007	.0009	.0012
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0010	.0008	.0007	.0005	.0004	.0003	.0003	.0002	.0002	.0001
1	.0095	.0079	.0066	.0054	.0045	.0037	.0030	.0024	.0020	.0016
2	.0395	.0344	.0298	.0256	.0220	.0188	.0160	.0135	.0114	.0095
3	.1007	.0913	.0823	.0739	.0660	.0587	.0519	.0457	.0401	.0349
4	.1750	.1653	.1553	.1451	.1350	.1250	.1151	.1055	.0962	.0873
5	.2189	.2154	.2108	.2053	.1989	.1917	.1838	.1753	.1664	.1571
6	.2029	.2080	.2121	.2151	.2169	.2177	.2173	.2158	.2131	.2095
7	.1410	.1506	.1600	.1690	.1775	.1854	.1927	.1992	.2048	.2095
8	.0735	.0818	.0905	.0996	.1089	.1185	.1282	.1379	.1476	.1571
9	.0284	.0329	.0379	.0435	.0495	.0561	.0631	.0707	.0788	.0873
10	.0079	.0095	.0114	.0137	.0162	.0191	.0224	.0261	.0303	.0349
11	.0015	.0019	.0024	.0029	.0036	.0044	.0054	.0066	.0079	.0095
12	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008	.0010	.0013	.0016
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001

n = 14

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8687	.7536	.6528	.5647	.4877	.4205	.3620	.3112	.2670	.2288
1	.1229	.2153	.2827	.3294	.3593	.3758	.3815	.3788	.3698	.3559
2	.0081	.0288	.0568	.0892	.1229	.1559	.1867	.2141	.2377	.2570
3	.0003	.0023	.0070	.0149	.0259	.0398	.0562	.0745	.0940	.1142
4	.0000	.0001	.0006	.0017	.0037	.0070	.0116	.0178	.0256	.0349
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0018	.0031	.0051	.0078
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0008	.0013
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1956	.1670	.1423	.1211	.1028	.0871	.0736	.0621	.0523	.0440
1	.3385	.3188	.2977	.2759	.2539	.2322	.2112	.1910	.1719	.1539
2	.2720	.2826	.2892	.2919	.2912	.2875	.2811	.2725	.2620	.2501
3	.1345	.1542	.1728	.1901	.2056	.2190	.2303	.2393	.2459	.2501
4	.0457	.0578	.0710	.0854	.0998	.1147	.1297	.1444	.1586	.1720
5	.0113	.0158	.0212	.0277	.0352	.0437	.0531	.0634	.0744	.0860
6	.0021	.0032	.0048	.0068	.0093	.0125	.0163	.0209	.0262	.0322
7	.0003	.0005	.0008	.0013	.0019	.0027	.0038	.0052	.0070	.0092
8	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0007	.0010	.0014	.0020
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003

n = 14 (Continued)

r \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0369	.0309	.0258	.0214	.0178	.0148	.0122	.0101	.0083	.0068
1	.1372	.1218	.1077	.0948	.0832	.0726	.0632	.0548	.0473	.0407
2	.2371	.2234	.2091	.1946	.1802	.1659	.1519	.1385	.1256	.1134
3	.2521	.2520	.2499	.2459	.2402	.2331	.2248	.2154	.2052	.1943
4	.1843	.1955	.2052	.2135	.2202	.2252	.2286	.2304	.2305	.2290
5	.0980	.1103	.1226	.1348	.1468	.1583	.1691	.1792	.1883	.1963
6	.0391	.0466	.0549	.0639	.0734	.0834	.0938	.1045	.1153	.1262
7	.0119	.0150	.0188	.0231	.0280	.0335	.0397	.0464	.0538	.0618
8	.0028	.0037	.0049	.0064	.0082	.0103	.0128	.0158	.0192	.0232
9	.0005	.0007	.0010	.0013	.0018	.0024	.0032	.0041	.0052	.0066
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0008	.0011	.0014
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0055	.0045	.0037	.0030	.0024	.0019	.0016	.0012	.0010	.0008
1	.0349	.0298	.0253	.0215	.0181	.0152	.0128	.0106	.0088	.0073
2	.1018	.0911	.0811	.0719	.0634	.0557	.0487	.0424	.0367	.0317
3	.1830	.1715	.1598	.1481	.1366	.1253	.1144	.1039	.0940	.0845
4	.2261	.2219	.2164	.2098	.2022	.1938	.1848	.1752	.1652	.1549
5	.2032	.2088	.2132	.2161	.2178	.2181	.2170	.2147	.2112	.2066
6	.1369	.1474	.1575	.1670	.1759	.1840	.1912	.1974	.2026	.2066
7	.0703	.0793	.0886	.0983	.1082	.1183	.1283	.1383	.1480	.1574
8	.0276	.0326	.0382	.0443	.0510	.0582	.0659	.0742	.0828	.0918
9	.0083	.0102	.0125	.0152	.0183	.0218	.0258	.0303	.0353	.0408
10	.0019	.0024	.0031	.0039	.0049	.0061	.0076	.0093	.0113	.0136
11	.0003	.0004	.0006	.0007	.0010	.0013	.0016	.0021	.0026	.0033
12	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0006	.0005	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001
1	.0060	.0049	.0040	.0033	.0027	.0021	.0017	.0014	.0011	.0009
2	.0272	.0233	.0198	.0168	.0141	.0118	.0098	.0082	.0068	.0056
3	.0757	.0674	.0597	.0527	.0462	.0403	.0350	.0303	.0260	.0227
4	.1446	.1342	.1239	.1138	.1040	.0945	.0854	.0768	.0687	.0611
5	.2009	.1943	.1869	.1788	.1701	.1610	.1515	.1418	.1320	.1222
6	.2094	.2111	.2115	.2108	.2088	.2057	.2015	.1963	.1902	.1833
7	.1663	.1747	.1824	.1892	.1952	.2003	.2043	.2071	.2089	.2095
8	.1011	.1107	.1204	.1301	.1398	.1493	.1585	.1673	.1756	.1833
9	.0469	.0534	.0605	.0682	.0762	.0848	.0937	.1030	.1125	.1222
10	.0163	.0193	.0228	.0268	.0312	.0361	.0415	.0475	.0540	.0611
11	.0041	.0051	.0063	.0076	.0093	.0112	.0134	.0160	.0189	.0222
12	.0007	.0009	.0012	.0015	.0019	.0024	.0030	.0037	.0045	.0056
13	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

n = 15

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8601	.7386	.6333	.5421	.4633	.3953	.3367	.2863	.2430	.2059
1	.1303	.2261	.2938	.3388	.3658	.3785	.3801	.3734	.3605	.3432
2	.0092	.0323	.0636	.0988	.1348	.1691	.2003	.2273	.2496	.2669
3	.0004	.0029	.0085	.0178	.0307	.0468	.0653	.0857	.1070	.1285
4	.0000	.0002	.0008	.0022	.0049	.0090	.0148	.0223	.0317	.0428
5	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0024	.0043	.0069	.0105
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0006	.0011	.0019
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003

n = 15 (Continued)

r \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1741	.1470	.1238	.1041	.0874	.0731	.0611	.0510	.0424	.0352
1	.3228	.3006	.2775	.2542	.2312	.2090	.1878	.1678	.1492	.1319
2	.2793	.2870	.2903	.2897	.2856	.2787	.2692	.2578	.2449	.2309
3	.1496	.1696	.1880	.2044	.2184	.2300	.2389	.2452	.2489	.2501
4	.0555	.0694	.0843	.0998	.1156	.1314	.1468	.1615	.1752	.1876
5	.0151	.0209	.0277	.0357	.0449	.0551	.0662	.0780	.0904	.1032
6	.0031	.0047	.0069	.0097	.0132	.0175	.0226	.0285	.0353	.0430
7	.0005	.0008	.0013	.0020	.0030	.0043	.0059	.0081	.0107	.0138
8	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0012	.0018	.0025	.0035
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0007
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0291	.0241	.0198	.0163	.0134	.0109	.0089	.0072	.0059	.0047
1	.1162	.1018	.0889	.0772	.0668	.0576	.0494	.0423	.0360	.0305
2	.2162	.2010	.1858	.1707	.1559	.1416	.1280	.1150	.1029	.0916
3	.2490	.2457	.2405	.2336	.2252	.2156	.2051	.1939	.1821	.1700
4	.1986	.2079	.2155	.2213	.2252	.2273	.2276	.2262	.2231	.2186
5	.1161	.1290	.1416	.1537	.1651	.1757	.1852	.1935	.2005	.2061
6	.0544	.0606	.0705	.0809	.0917	.1029	.1142	.1254	.1365	.1472
7	.0176	.0220	.0271	.0329	.0393	.0463	.0543	.0627	.0717	.0811
8	.0047	.0062	.0081	.0104	.0131	.0163	.0201	.0244	.0293	.0348
9	.0010	.0014	.0019	.0025	.0034	.0045	.0058	.0074	.0093	.0116
10	.0002	.0002	.0003	.0005	.0007	.0009	.0013	.0017	.0023	.0030
11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0006
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0038	.0031	.0025	.0020	.0016	.0012	.0010	.0008	.0006	.0005
1	.0258	.0217	.0182	.0152	.0126	.0104	.0086	.0071	.0058	.0047
2	.0811	.0715	.0627	.0547	.0476	.0411	.0354	.0303	.0259	.0219
3	.1579	.1457	.1338	.1222	.1110	.1002	.0901	.0806	.0716	.0634
4	.2128	.2057	.1977	.1888	.1792	.1692	.1587	.1481	.1374	.1268
5	.210	.2130	.2142	.2140	.2123	.2093	.2051	.1997	.1933	.1850
6	.1575	.1671	.1759	.1837	.1906	.1963	.2008	.2040	.2059	.2066
7	.0910	.1011	.1114	.1217	.1319	.1419	.1516	.1608	.1693	.1771
8	.0409	.0476	.0549	.0627	.0710	.0796	.0890	.0985	.1082	.1181
9	.0143	.0174	.0210	.0251	.0298	.0349	.0407	.0470	.0538	.0612
10	.0038	.0049	.0062	.0078	.0096	.0118	.0143	.0173	.0206	.0245
11	.0008	.0011	.0014	.0018	.0024	.0030	.0038	.0048	.0060	.0074
12	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0006	.0007	.0010	.0013	.0016
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000
1	.0038	.0031	.0025	.0020	.0016	.0012	.0010	.0008	.0006	.0005
2	.0185	.0156	.0130	.0108	.0090	.0074	.0060	.0049	.0040	.0032
3	.0554	.0489	.0426	.0369	.0318	.0272	.0232	.0197	.0166	.0139
4	.1163	.1061	.0963	.0869	.0780	.0696	.0617	.0545	.0478	.0417
5	.1778	.1691	.1598	.1502	.1404	.1304	.1204	.1106	.1010	.0916
6	.2060	.2041	.2010	.1967	.1914	.1851	.1780	.1702	.1617	.1527
7	.1840	.1900	.1949	.1987	.2013	.2028	.2030	.2020	.1997	.1964
8	.1279	.1376	.1470	.1561	.1647	.1727	.1800	.1864	.1919	.1964
9	.0691	.0775	.0863	.0954	.1048	.1144	.1241	.1338	.1434	.1527
10	.0248	.0337	.0390	.0450	.0515	.0585	.0661	.0741	.0827	.0916
11	.0091	.0111	.0134	.0161	.0191	.0226	.0266	.0311	.0361	.0417
12	.0021	.0027	.0034	.0042	.0052	.0064	.0079	.0096	.0116	.0139
13	.0003	.0004	.0006	.0008	.0010	.0013	.0016	.0020	.0026	.0032
14	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005

n = 16

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8515	.7238	.6143	.5204	.4401	.3716	.3131	.2634	.2211	.1853
1	.1376	.2363	.3040	.3469	.3706	.3795	.3771	.3665	.3499	.3294
2	.0104	.0362	.0705	.1084	.1463	.1817	.2129	.2390	.2596	.2745
3	.0005	.0034	.0102	.0211	.0359	.0541	.0748	.0970	.1198	.1423
4	.0000	.0002	.0010	.0029	.0061	.0112	.0183	.0274	.0385	.0514
5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0017	.0033	.0057	.0091	.0137
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0009	.0017	.0028
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1550	.1293	.1077	.0895	.0743	.0614	.0507	.0418	.0343	.0281
1	.3065	.2822	.2575	.2332	.2097	.1873	.1662	.1468	.1289	.1126
2	.2841	.2886	.2886	.2847	.2775	.2675	.2554	.2416	.2267	.2111
3	.1638	.1847	.2013	.2163	.2285	.2378	.2441	.2475	.2482	.2463
4	.0658	.0814	.0977	.1144	.1311	.1472	.1625	.1766	.1892	.2001
5	.0195	.0266	.0351	.0447	.0555	.0673	.0799	.0930	.1065	.1201
6	.0044	.0067	.0096	.0133	.0180	.0235	.0300	.0374	.0458	.0550
7	.0008	.0013	.0020	.0031	.0045	.0064	.0088	.0117	.0153	.0197
8	.0001	.0002	.0003	.0006	.0009	.0014	.0020	.0029	.0041	.0055
9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0004	.0006	.0008	.0012
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

	21	22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0230	.0188	.0153	.0124	.0100	.0081	.0065	.0052	.0042	.0033
1	.0979	.0847	.0730	.0626	.0535	.0455	.0385	.0325	.0273	.0228
2	.1952	.1792	.1635	.1482	.1336	.1198	.1068	.0947	.0835	.0732
3	.2421	.2359	.2279	.2185	.2079	.1964	.1843	.1718	.1591	.1465
4	.2092	.2162	.2212	.2242	.2252	.2243	.2215	.2171	.2112	.2040
5	.1334	.1464	.1586	.1699	.1802	.1891	.1966	.2026	.2071	.2099
6	.0650	.0757	.0869	.0984	.1101	.1218	.1333	.1445	.1551	.1649
7	.0247	.0305	.0371	.0444	.0524	.0611	.0704	.0803	.0905	.1010
8	.0074	.0097	.0125	.0158	.0197	.0242	.0293	.0351	.0416	.0487
9	.0017	.0024	.0033	.0044	.0058	.0075	.0096	.0121	.0151	.0185
10	.0003	.0005	.0007	.0010	.0014	.0019	.0025	.0033	.0043	.0056
11	.0000	.0001	.0001	.0002	.0002	.0004	.0005	.0007	.0010	.0013
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0026	.0021	.0016	.0013	.0010	.0008	.0006	.0005	.0004	.0003
1	.0190	.0157	.0130	.0107	.0087	.0071	.0058	.0047	.0038	.0030
2	.0639	.0555	.0480	.0413	.0353	.0301	.0255	.0215	.0180	.0150
3	.1341	.1220	.1103	.0992	.0888	.0790	.0699	.0615	.0538	.0468
4	.1958	.1865	.1766	.1662	.1553	.1444	.1333	.1224	.1118	.1014
5	.2111	.2107	.2088	.2054	.2008	.1949	.1879	.1801	.1715	.1623
6	.1739	.1818	.1885	.1940	.1982	.2010	.2021	.2024	.2010	.1983
7	.1116	.1222	.1326	.1428	.1524	.1615	.1698	.1772	.1836	.1889
8	.0564	.0647	.0735	.0827	.0923	.1022	.1122	.1222	.1320	.1417
9	.0225	.0271	.0322	.0379	.0442	.1511	.0586	.0666	.0750	.0840
10	.0071	.0089	.0111	.0137	.0167	.0201	.0241	.0286	.0336	.0392
11	.0017	.0023	.0030	.0038	.0049	.0062	.0077	.0095	.0117	.0142
12	.0003	.0004	.0006	.0008	.0011	.0014	.0019	.0024	.0031	.0040
13	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0003	.0005	.0006	.0008
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

	.41	42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0024	.0019	.0015	.0012	.0009	.0007	.0005	.0004	.0003	.0002
2	.0125	.0103	.0085	.0069	.0056	.0046	.0037	.0029	.0023	.0018
3	.0405	.0349	.0299	.0254	.0215	.0181	.0151	.0126	.0104	.0085
4	.0915	.0821	.0732	.0649	.0572	.0501	.0436	.0378	.0325	.0278
5	.1526	.1426	.1325	.1224	.1123	.1024	.0929	.0837	.0749	.0667
6	.1944	.1894	.1833	.1762	.1684	.1600	.1510	.1416	.1319	.1222
7	.1930	.1959	.1975	.1978	.1969	.1947	.1912	.1867	.1811	.1746
8	.1509	.1596	.1676	.1749	.1813	.1865	.1908	.1940	.1959	.1964
9	.0932	.1027	.1124	.1221	.1318	.1413	.1504	.1591	.1672	.1746
10	.0453	.0521	.0594	.0672	.0755	.0842	.0934	.1028	.1124	.1222
11	.0172	.0206	.0244	.0288	.0337	.0391	.0452	.0518	.0589	.0667
12	.0050	.0062	.0077	.0094	.0115	.0139	.0167	.0199	.0236	.0278
13	.0011	.0014	.0018	.0023	.0029	.0036	.0046	.0057	.0070	.0085
14	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002

n = 17

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8429	.7093	.5958	.4996	.4181	.3493	.2912	.2423	.2012	.1668
1	.1447	.2461	.3133	.3530	.3741	.3790	.3726	.3582	.3383	.3150
2	.0117	.0402	.0775	.1180	.1575	.1935	.2244	.2492	.2677	.2800
3	.0006	.0041	.0120	.0246	.0415	.0618	.0844	.1083	.1324	.1556
4	.0000	.0003	.0013	.0036	.0076	.0138	.0222	.0330	.0458	.0605
5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0010	.0023	.0044	.0075	.0118	.0175
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0013	.0023	.0039
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1379	.1138	.0937	.0770	.0631	.0516	.0421	.0343	.0278	.0225
1	.2898	.2638	.2381	.2131	.1893	.1671	.1466	.1279	.1109	.0957
2	.2865	.2878	.2846	.2775	.2673	.2547	.2402	.2245	.2081	.1914
3	.1771	.1963	.2126	.2259	.2359	.2425	.2460	.2464	.2441	.2393
4	.0766	.0937	.1112	.1287	.1457	.1617	.1764	.1893	.2004	.2093
5	.0246	.0332	.0432	.0545	.0668	.0801	.0939	.1081	.1222	.1361
6	.0061	.0091	.0129	.0177	.0236	.0305	.0385	.0474	.0573	.0680
7	.0012	.0019	.0030	.0045	.0065	.0091	.0124	.0164	.0211	.0267
8	.0002	.0003	.0006	.0009	.0014	.0022	.0032	.0045	.0062	.0084
9	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0010	.0015	.0021
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0182	.0146	.0118	.0094	.0075	.0060	.0047	.0038	.0030	.0023
1	.0822	.0702	.0597	.0505	.0426	.0357	.0299	.0248	.0206	.0169
2	.1747	.1584	.1427	.1277	.1136	.1005	.0883	.0772	.0672	.0581
3	.2322	.2234	.2131	.2016	.1893	.1765	.1634	.1502	.1372	.1245
4	.2161	.2205	.2228	.2228	.2209	.2170	.2115	.2044	.1961	.1868
5	.1493	.1617	.1730	.1830	.1914	.1982	.2033	.2067	.2083	.2081
6	.0794	.0912	.1034	.1156	.1278	.1393	.1504	.1608	.1701	.1784
7	.0332	.0404	.0485	.0573	.0668	.0769	.0874	.0982	.1092	.1201
8	.0110	.0143	.0181	.0226	.0279	.0338	.0404	.0478	.0558	.0644
9	.0029	.0040	.0054	.0071	.0093	.0119	.0150	.0186	.0228	.0276
10	.0006	.0009	.0014	.0018	.0025	.0033	.0044	.0058	.0074	.0095
11	.0001	.0002	.0002	.0004	.0005	.0007	.0010	.0014	.0019	.0026
12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0018	.0014	.0011	.0009	.0007	.0005	.0004	.0003	.0002	.0002
1	.0139	.0114	.0093	.0075	.0060	.0048	.0039	.0031	.0024	.0019
2	.0500	.0428	.0364	.0309	.0260	.0218	.0182	.0151	.0125	.0102
3	.1123	.1007	.0898	.0795	.0701	.0614	.0534	.0463	.0398	.0341
4	.1766	.1659	.1547	.1434	.1320	.1208	.1099	.0993	.0892	.0796
5	.2063	.2030	.1982	.1921	.1849	.1767	.1677	.1582	.1482	.1379
6	.1854	.1910	.1952	.1979	.1991	.1988	.1970	.1939	.1895	.1839
7	.1309	.1413	.1511	.1602	.1685	.1757	.1818	.1868	.1904	.1927
8	[illegible]	.0831	.0930	.1032	.1134	.1235	.1335	.1431	.1521	.1606
9	.0339	.0391	.0458	.0531	.0611	.0695	.0784	.0877	.0973	.1070
10	.0119	.0147	.0181	.0219	.0263	.0313	.0368	.0430	.0498	.0571
11	.0034	.0044	.0057	.0072	.0090	.0112	.0138	.0168	.0202	.0242
12	.0008	.0010	.0014	.0018	.0024	.0031	.0040	.0051	.0065	.0081
13	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0012	.0016	.0021
14	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

n = 17 (Continued)

r \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0001	.0001	[illegible]	.0001	.0000	.0000	[illegible]	.0000	.0000	.0000
1	.0015	.0012	[illegible]	.0007	.0005	.0004	[illegible]	.0002	.0002	.0001
2	.0084	.0068	.0055	.0044	.0035	.0028	.0022	.0017	.0013	.0010
3	.0290	.0246	.0207	.0173	.0144	.0119	.0097	.0079	.0064	.0052
4	.0706	.0622	.0546	.0475	.0411	.0354	.0302	.0257	.0217	.0182
5	.1276	.1172	.1070	.0971	.0875	.0784	.0697	.0616	.0541	.0472
6	.1773	.1697	.1614	.1525	.1432	.1335	.1237	.1138	.1040	.0944
7	.1936	.1932	.1914	.1883	.1841	.1787	.1723	.1650	.1570	.1484
8	.1682	.1748	.1805	.1850	.1883	.1903	.1910	.1904	.1886	.1855
9	.1169	.1266	.1361	.1453	.1540	.1621	.1694	.1758	.1812	.1855
10	.0650	.0733	.0822	.0914	.1008	.1105	.1202	.1298	.1393	.1484
11	.0287	.0338	.0394	.0457	.0525	.0599	.0678	.0763	.0851	.0944
12	.0100	.0122	.0149	.0179	.0215	.0255	.0301	.0352	.0409	.0472
13	.0027	.0034	.0043	.0054	.0068	.0084	.0103	.0125	.0151	.0182
14	.0005	.0007	.0009	.0012	.0016	.0020	.0026	.0033	.0041	.0052
15	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0003	.0005	.0006	.0008	.0010
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001

n = 18

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8345	.6951	.5780	.4796	.3972	.3283	.2708	.2229	.1831	.1501
1	.1517	.2554	.3217	.3597	.3763	.3772	.3669	.3489	.3260	.3002
2	.0130	.0444	.0846	.1274	.1683	.2047	.2348	.2570	.2741	.2835
3	.0007	.0048	.0140	.0283	.0473	.0697	.0942	.1196	.1446	.1680
4	.0000	.0004	.0016	.0044	.0093	.0167	.0266	.0390	.0536	.0700
5	.0000	.0000	.0001	.0005	.0014	.0030	.0056	.0095	.0148	.0218
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0004	.0009	.0018	.0032	.0052
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0005	.0010
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1227	.1002	.0815	.0662	.0536	.0434	.0349	.0281	.0225	.0180
1	.2731	.2458	.2193	.1940	.1704	.1486	.1288	.1110	.0951	.0811
2	.2869	.2850	.2785	.2685	.2556	.2407	.2243	.2071	.1897	.1723
3	.1891	.2072	.2270	.2331	.2406	.2445	.2450	.2425	.2373	.2297
4	.0877	.1060	.1244	.1423	.1592	.1746	.1882	.1996	.2087	.2153
5	.0303	.0405	.0520	.0649	.0787	.0931	.1079	.1227	.1371	.1507
6	.0081	.0120	.0168	.0229	.0301	.0384	.0479	.0584	.0697	.0818
7	.0017	.0028	.0043	.0064	.0091	.0126	.0168	.0220	.0280	.0350
8	.0003	.0005	.0009	.0014	.0022	.0033	.0047	.0066	.0090	.0120
9	.0000	.0001	.0001	.0003	.0004	.0007	.0011	.0016	.0024	.0033
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0144	.0114	.0091	.0072	.0056	.0044	.0035	.0027	.0021	.0016
1	.0687	.0580	.0487	.0407	.0338	.0280	.0231	.0189	.0155	.0126
2	.1553	.1390	.1236	.1092	.0958	.0836	.0725	.0626	.0537	.0458
3	.2202	.2091	.1969	.1839	.1704	.1567	.1431	.1298	.1169	.1046
4	.2195	.2212	.2205	.2177	.2130	.2065	.1985	.1892	.1790	.1681
5	.1634	.1747	.1845	.1925	.1988	.2031	.2055	.2061	.2048	.2017
6	.0941	.1067	.1194	.1317	.1436	.1546	.1647	.1736	.1812	.1873
7	.0429	.0516	.0611	.0713	.0820	.0931	.1044	.1157	.1269	.1376
8	.0157	.0200	.0251	.0310	.0376	.0450	.0531	.0619	.0713	.0811
9	.0046	.0063	.0083	.0109	.0139	.0176	.0218	.0267	.0323	.0386
10	.0011	.0016	.0022	.0031	.0042	.0056	.0073	.0094	.0119	.0149
11	.0002	.0003	.0005	.0007	.0010	.0014	.0020	.0026	.0035	.0046
12	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0008	.0012
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0002

n = 18 (Continued)

x \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0013	.0010	.0007	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0102	.0082	.0066	.0052	.0042	.0033	.0026	.0020	.0016	.0012
2	.0388	.0327	.0275	.0229	.0190	.0157	.0129	.0105	.0086	.0069
3	.0930	.0822	.0722	.0630	.0547	.0471	.0404	.0344	.0292	.0246
4	.1567	.1450	.1333	.1217	.1104	.0994	.0890	.0791	.0699	.0614
5	.1971	.1911	.1838	.1755	.1664	.1568	.1463	.1358	.1252	.1146
6	.1919	.1948	.1962	.1959	.1941	.1908	.1862	.1803	.1734	.1655
7	.1478	.1572	.1656	.1730	.1792	.1840	.1875	.1895	.1900	.1892
8	.0913	.1017	.1122	.1226	.1327	.1423	.1514	.1597	.1671	.1734
9	.0456	.0532	.0614	.0701	.0794	.0890	.0988	.1087	.1187	.1284
10	.0184	.0225	.0272	.0325	.0385	.0450	.0522	.0600	.0683	.0771
11	.0060	.0077	.0097	.0122	.0151	.0184	.0223	.0267	.0318	.0374
12	.0016	.0021	.0028	.0037	.0047	.0060	.0076	.0096	.0118	.0145
13	.0003	.0005	.0006	.0009	.0012	.0016	.0021	.0027	.0035	.0045
14	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0006	.0008	.0011
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0009	.0007	.0005	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001
2	.0055	.0044	.0035	.0028	.0022	.0017	.0013	.0010	.0008	.0006
3	.0206	.0171	.0141	.0116	.0095	.0077	.0062	.0050	.0039	.0031
4	.0536	.0464	.0400	.0342	.0291	.0246	.0206	.0172	.0142	.0117
5	.1042	.0941	.0844	.0753	.0666	.0586	.0512	.0444	.0382	.0327
6	.1569	.1477	.1380	.1281	.1181	.1081	.0983	.0887	.0796	.0708
7	.1869	.1833	.1785	.1726	.1657	.1579	.1494	.1404	.1310	.1214
8	.1786	.1825	.1852	.1864	.1864	.1850	.1822	.1782	.1731	.1669
9	.1379	.1469	.1552	.1628	.1694	.1751	.1795	.1828	.1848	.1855
10	.0862	.0957	.1054	.1151	.1248	.1342	.1433	.1519	.1598	.1669
11	.0436	.0504	.0578	.0658	.0742	.0831	.0924	.1020	.1117	.1214
12	.0177	.0213	.0254	.0301	.0354	.0413	.0478	.1549	.0626	.0708
13	.0057	.0071	.0089	.0109	.0134	.0162	.0196	.0234	.0278	.0327
14	.0014	.0018	.0024	.0031	.0039	.0049	.0062	.0077	.0095	.0117
15	.0003	.0004	.0005	.0006	.0009	.0011	.0015	.0019	.0024	.0031
16	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0006
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

n = 19

x \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8262	.6812	.5606	.4604	.3774	.3086	.2519	.2051	.1668	.1351
1	.1586	.2642	.3294	.3645	.3774	.3743	.3602	.3389	.3131	.2852
2	.0144	.0485	.0917	.1367	.1787	.2150	.2440	.2652	.2787	.2852
3	.0008	.0056	.0161	.0323	.0533	.0778	.1041	.1307	.1562	.1796
4	.0000	.0005	.0020	.0054	.0112	.0199	.0313	.0455	.0618	.0798
5	.0000	.0000	.0002	.0007	.0018	.0038	.0071	.0119	.0183	.0266
6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012	.0024	.0042	.0069
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0008	.0014
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002

	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.1092	.0881	.0709	.0569	.0456	.0364	.0290	.0230	.0182	.0144
1	.2547	.2284	.2014	.1761	.1529	.1318	.1129	.0961	.0813	.0685
2	.2654	.2803	.2708	.2501	.2428	.2259	.2081	.1898	.1717	.1540
3	.1999	.2166	.2293	.2381	.2428	.2439	.2415	.2361	.2282	.2182
4	.0948	.1101	.1371	.1550	.1714	.1858	.1979	.2073	.2141	.2183
5	.0366	.0483	.0614	.0757	.0907	.1062	.1216	.1365	.1507	.1636
6	.0106	.0154	.0214	.0288	.0374	.0472	.0581	.0690	.0825	.0955
7	.0024	.0039	.0059	.0087	.0122	.0167	.0221	.0285	.0359	.0443
8	.0003	.0008	.0013	.0021	.0032	.0048	.0068	.0094	.0126	.0166
9	.0001	.0001	.0002	.0004	.0007	.0011	.0017	.0026	.0036	.0051
10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0006	.0009	.0013
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003

n = 10 (Continued)

r \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0113	.0089	.0070	.0054	.0042	.0033	.0025	.0019	.0015	.0011
1	.0573	.0477	.0396	.0326	.0268	.0219	.0178	.0144	.0116	.0093
2	.1371	.1212	.1064	.0927	.0803	.0692	.0592	.0503	.0426	.0358
3	.2065	.1937	.1800	.1659	.1517	.1377	.1240	.1109	.0985	.0869
4	.2196	.2185	.2151	.2096	.2023	.1935	.1835	.1726	.1610	.1491
5	.1751	.1849	.1928	.1986	.2023	.2040	.2036	.2013	.1973	.1916
6	.1096	.1217	.1343	.1463	.1574	.1672	.1757	.1827	.1880	.1916
7	.0536	.0637	.0745	.0858	.0974	.1091	.1207	.1320	.1426	.1525
8	.0214	.0270	.0334	.0406	.0487	.0575	.0670	.0770	.0874	.0981
9	.0069	.0093	.0122	.0157	.0198	.0247	.0303	.0366	.0436	.0514
10	.0018	.0026	.0036	.0050	.0066	.0087	.0112	.0142	.0178	.0220
11	.0004	.0006	.0009	.0013	.0018	.0025	.0034	.0045	.0060	.0077
12	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0008	.0012	.0016	.0022
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0002	.0004	.0005
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0009	.0007	.0005	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001
1	.0074	.0059	.0046	.0036	.0029	.0022	.0017	.0013	.0010	.0008
2	.0299	.0249	.0206	.0169	.0138	.0112	.0091	.0073	.0058	.0046
3	.0762	.0664	.0574	.0494	.0422	.0358	.0302	.0253	.0211	.0175
4	.1370	.1249	.1131	.1017	.0909	.0806	.0710	.0621	.0540	.0467
5	.1846	.1764	.1672	.1572	.1468	.1360	.1251	.1143	.1036	.0933
6	.1935	.1936	.1921	.1890	.1844	.1785	.1714	.1634	.1546	.1451
7	.1615	.1692	.1757	.1808	.1844	.1865	.1870	.1860	.1835	.1797
8	.1088	.1195	.1298	.1397	.1489	.1573	.1647	.1710	.1760	.1797
9	.0597	.0687	.0782	.0880	.0980	.1082	.1182	.1281	.1375	.1464
10	.0268	.0323	.0385	.0453	.0528	.0608	.0694	.0785	.0879	.0976
11	.0099	.0124	.0155	.0191	.0233	.0280	.0334	.0394	.0460	.0532
12	.0030	.0039	.0051	.0066	.0083	.0105	.0131	.0161	.0196	.0237
13	.0007	.0010	.0014	.0018	.0024	.0032	.0041	.0053	.0067	.0085
14	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0008	.0010	.0014	.0018	.0024
15	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
2	.0037	.0029	.0022	.0017	.0013	.0010	.0008	.0006	.0004	.0003
3	.0144	.0118	.0096	.0077	.0062	.0049	.0039	.0031	.0024	.0018
4	.0400	.0341	.0289	.0243	.0203	.0168	.0138	.0113	.0092	.0074
5	.0834	.0741	.0653	.0572	.0497	.0429	.0368	.0313	.0265	.0222
6	.1353	.1252	.1150	.1049	.0949	.0853	.0751	.0674	.0593	.0518
7	.1746	.1683	.1611	.1530	.1443	.1350	.1254	.1156	.1058	.0961
8	.1820	.1829	.1823	.1803	.1771	.1725	.1668	.1601	.1525	.1442
9	.1546	.1618	.1681	.1732	.1771	.1796	.1808	.1806	.1791	.1762
10	.1074	.1172	.1268	.1361	.1449	.1530	.1603	.1667	.1721	.1762
11	.0611	.0694	.0783	.0875	.0970	.1066	.1163	.1259	.1353	.1442
12	.0283	.0335	.0394	.0458	.0529	.0606	.0688	.0775	.0866	.0961
13	.0106	.0131	.0160	.0194	.0233	.0278	.0328	.0385	.0448	.0518
14	.0032	.0041	.0052	.0065	.0082	.0101	.0125	.0152	.0185	.0222
15	.0007	.0010	.0013	.0017	.0022	.0029	.0037	.0047	.0059	.0074
16	.0001	.0002	.0002	.0003	.0005	.0006	.0008	.0011	.0014	.0018
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003

n = 20

r \ p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.8179	.6676	.5438	.4420	.3585	.2901	.2342	.1887	.1516	.1216
1	.1652	.2725	.3364	.3683	.3774	.3703	.3526	.3282	.3000	.2702
2	.0159	.0528	.0988	.1458	.1887	.2246	.2521	.2711	.2818	.2852
3	.0010	.0065	.0183	.0364	.0596	.0860	.1139	.1414	.1672	.1901
4	.0000	.0006	.0024	.0065	.0133	.0233	.0364	.0523	.0703	.0898
5	.0000	.0000	.0002	.0009	.0022	.0048	.0088	.0145	.0222	.0319
6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0017	.0032	.0055	.0089
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0011	.0020
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

n = 20 (Continued)

r \ p	.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
0	.0972	.0776	.0617	.0490	.0388	.0306	.0241	.0189	.0148	.0115
1	.2403	.2115	.1844	.1595	.1368	.1165	.0986	.0829	.0693	.0576
2	.2822	.2740	.2618	.2466	.2293	.2109	.1919	.1730	.1545	.1369
3	.2093	.2242	.2347	.2409	.2428	.2410	.2358	.2278	.2175	.2054
4	.1099	.1299	.1491	.1666	.1821	.1951	.2053	.2125	.2168	.2182
5	.0435	.0567	.0713	.0868	.1028	.1189	.1345	.1493	.1627	.1746
6	.0134	.0193	.0266	.0353	.0454	.0566	.0689	.0819	.0954	.1091
7	.0033	.0053	.0080	.0115	.0160	.0216	.0282	.0360	.0448	.0545
8	.0007	.0012	.0019	.0030	.0046	.0067	.0094	.0128	.0171	.0222
9	.0001	.0002	.0004	.0007	.0011	.0017	.0026	.0038	.0053	.0074
10	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0004	.0006	.0009	.0014	.0020
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

r \ p	.21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0090	.0069	.0054	.0041	.0032	.0024	.0018	.0014	.0011	.0008
1	.0477	.0392	.0321	.0261	.0211	.0170	.0137	.0109	.0087	.0068
2	.1204	.1050	.0910	.0783	.0669	.0569	.0480	.0403	.0336	.0278
3	.1929	.1777	.1631	.1484	.1339	.1199	.1065	.0940	.0823	.0716
4	.2169	.2131	.2070	.1991	.1897	.1790	.1675	.1553	.1429	.1304
5	.1845	.1923	.1979	.2012	.2023	.2013	.1982	.1933	.1868	.1789
6	.1226	.1356	.1478	.1589	.1686	.1768	.1833	.1879	.1907	.1916
7	.0652	.0765	.0883	.1003	.1124	.1242	.1356	.1462	.1558	.1643
8	.0282	.0351	.0429	.0515	.0609	.0709	.0815	.0924	.1034	.1144
9	.0100	.0132	.0171	.0217	.0271	.0332	.0402	.0479	.0563	.0654
10	.0029	.0041	.0056	.0075	.0099	.0128	.0163	.0205	.0253	.0308
11	.0007	.0010	.0015	.0022	.0030	.0041	.0055	.0072	.0094	.0120
12	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0021	.0029	.0039
13	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0005	.0007	.0010
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

r \ p	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0006	.0004	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0054	.0042	.0033	.0025	.0020	.0015	.0011	.0009	.0007	.0005
2	.0229	.0188	.0153	.0124	.0100	.0080	.0064	.0050	.0040	.0031
3	.0619	.0531	.0453	.0383	.0323	.0270	.0224	.0185	.0152	.0123
4	.1181	.1062	.0947	.0839	.0738	.0645	.0559	.0482	.0412	.0350
5	.1698	.1599	.1493	.1384	.1272	.1161	.1051	.0945	.0843	.0746
6	.1907	.1881	.1839	.1782	.1712	.1632	.1543	.1447	.1347	.1244
7	.1714	.1770	.1811	.1836	.1844	.1836	.1812	.1774	.1722	.1659
8	.1251	.1354	.1450	.1537	.1614	.1678	.1730	.1767	.1790	.1797
9	.0750	.0849	.0952	.1056	.1158	.1259	.1354	.1444	.1526	.1597
10	.0370	.0440	.0516	.0598	.0686	.0779	.0875	.0974	.1073	.1171
11	.0151	.0188	.0231	.0280	.0336	.0398	.0467	.0542	.0624	.0710
12	.0051	.0066	.0085	.0108	.0136	.0168	.0206	.0249	.0299	.0355
13	.0014	.0019	.0026	.0034	.0045	.0058	.0074	.0094	.0118	.0146
14	.0003	.0005	.0006	.0009	.0012	.0016	.0022	.0029	.0038	.0049
15	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0007	.0010	.0013
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003

r \ p	.41	.42	.43	.44	.45	.46	.47	.48	.49	.50
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000
2	.0024	.0018	.0014	.0011	.0008	.0006	.0005	.0003	.0002	.0002
3	.0100	.0080	.0064	.0051	.0040	.0031	.0024	.0019	.0014	.0011
4	.0295	.0247	.0206	.0170	.0139	.0113	.0092	.0074	.0059	.0046
5	.0658	.0573	.0496	.0427	.0365	.0309	.0260	.0217	.0180	.0148
6	.1140	.1037	.0936	.0839	.0746	.0658	.0577	.0501	.0432	.0370
7	.1585	.1502	.1413	.1318	.1221	.1122	.1023	.0925	.0830	.0739
8	.1730	.1768	.1732	.1683	.1623	.1553	.1474	.1388	.1296	.1201
9	.1658	.1707	.1742	.1763	.1771	.1763	.1742	.1708	.1661	.1602
10	.1268	.1359	.1446	.1524	.1593	.1652	.1700	.1734	.1755	.1762
11	.0801	.0895	.0991	.1089	.1185	.1280	.1370	.1455	.1533	.1602
12	.0417	.0486	.0561	.0642	.0727	.0818	.0911	.1007	.1105	.1201
13	.0178	.0217	.0260	.0310	.0366	.0429	.0497	.0572	.0653	.0739
14	.0062	.0078	.0098	.0122	.0150	.0183	.0221	.0264	.0314	.0370
15	.0017	.0023	.0030	.0038	.0049	.0062	.0078	.0098	.0121	.0148
16	.0004	.0005	.0007	.0009	.0013	.0017	.0022	.0028	.0036	.0046
17	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0005	.0006	.0008	.0011
18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

n = 25

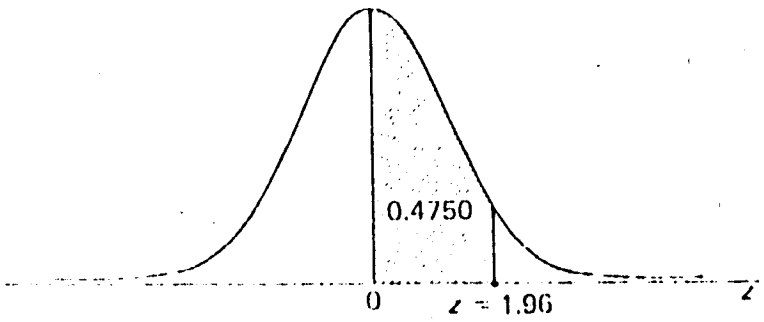
p	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	.10
0	.7778	.6035	.4670	.3604	.2774	.2120	.1630	.1244	.0946	.0718
1	.1964	.3070	.3611	.3754	.3650	.3398	.3066	.2704	.2340	.1994
2	.0238	.0754	.1340	.1877	.2305	.2602	.2770	.2821	.2777	.2659
3	.0018	.0118	.0318	.0600	.0930	.1273	.1598	.1881	.2106	.2265
4	.0001	.0013	.0054	.0137	.0269	.0447	.0662	.0899	.1145	.1384
5	.0000	.0001	.0007	.0024	.0060	.0120	.0209	.0329	.0476	.0646
6	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0026	.0052	.0095	.0157	.0239
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0011	.0022	.0042	.0072
8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0009	.0018
9	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
10	0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	11	.12	.13	14	.15	.16	.17	18	.19	.20
0	0543	.0409	.0308	.0230	.0172	.0128	.0095	.0070	.0052	.0038
1	.1678	.1395	.1149	.0938	.0759	.0609	.0486	.0384	.0302	.0236
2	.2488	.2283	.2060	.1832	.1607	.1392	.1193	.1012	.0851	.0708
3	2358	.2387	.2360	.2286	.2174	.2033	.1874	.1704	.1530	.1358
4	.1603	.1790	.1940	.2047	.2110	.2130	.2111	.2057	.1974	.1867
5	.0832	.1025	.1217	.1399	.1564	.1704	.1816	.1897	.1945	.1960
6	.0343	.0466	.0606	.0759	.0920	.1082	.1240	.1388	.1520	.1633
7	.0115	.0173	.0246	.0336	.0441	.0559	.0689	.0827	.0968	.1108
8	0032	.0053	.0083	.0123	.0175	.0240	.0318	.0408	.0511	.0623
9	.0007	.0014	.0023	.0038	.0058	.0086	.0123	.0169	.0226	.0294
10	.0001	.0003	.0006	.0010	.0016	.0026	.0040	.0059	.0085	.0118
11	.0000	.0001	.0001	.0002	.0004	.0007	.0011	.0018	.0027	.0040
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005	.0007	.0012
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

	21	.22	.23	.24	.25	.26	.27	.28	.29	.30
0	.0028	.0020	.0015	.0010	.0008	.0005	.0004	.0003	.0002	.0001
1	.0183	.0141	.0109	.0083	.0063	.0047	.0035	.0026	.0020	.0014
2	.0585	.0479	.0389	.0314	.0251	.0199	.0157	.0123	.0096	.0074
3	.1192	.1035	.0891	.0759	.0641	.0537	.0446	.0367	.0300	.0243
4	.1742	.1606	.1463	.1318	.1175	.1037	.0906	.0785	.0673	.0572
5	.1945	.1903	.1836	.1749	.1645	.1531	.1408	.1282	.1155	.1030
6	.1724	.1789	.1828	.1841	.1828	.1793	.1736	.1661	.1572	.1472
7	.1244	.1369	.1482	.1578	.1654	.1709	.1743	.1754	.1743	.1712
8	.0744	.0869	.0996	.1121	.1241	.1351	.1450	.1535	.1602	.1651
9	.0373	.0463	.0562	.0669	.0781	.0897	.1013	.1127	.1236	.1336
10	.0159	.0209	.0269	.0338	.0417	.0504	.0600	.0701	.0808	.0916
11	.0058	.0080	.0109	.0145	.0189	.0242	.0302	.0372	.0450	.0536
12	.0018	.0026	.0038	.0054	.0074	.0099	.0130	.0169	.0214	.0268
13	.0005	.0007	.0011	.0017	.0025	.0035	.0048	.0066	.0088	.0115
14	.0001	.0002	.0003	.0005	.0007	.0010	.0015	.0022	.0031	.0042
15	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0003	.0004	.0006	.0009	.0013
16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0002	.0004
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

	.31	.32	.33	.34	.35	.36	.37	.38	.39	.40
0	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0011	.0008	.0006	.0004	.0003	.0002	.0001	.0001	.0001	.0000
2	.0057	.0043	.0033	.0025	.0018	.0014	.0010	.0007	.0005	.0004
3	.0195	.0156	.0123	.0097	.0076	.0058	.0045	.0034	.0026	.0019
4	.0482	.0403	.0334	.0274	.0224	.0181	.0145	.0115	.0091	.0071
5	.0910	.0797	.0691	.0594	.0506	.0427	.0357	.0297	.0244	.0199
6	.1363	.1250	.1134	.1020	.0908	.0801	.0700	.0606	.0520	.0442
7	.1662	.1596	.1516	.1426	.1327	.1222	.1115	.1008	.0902	.0800
8	.1680	1690	.1681	.1652	.1607	.1547	.1474	.1390	.1298	.1200
9	.1426	.1502	.1563	.1608	.1635	.1614	.1635	.1609	.1567	.1511
10	.1025	.1131	.1232	1325	.1401	.1479	.1536	.1578	.1601	1612
11	.0628	.0726	.0828	.0931	.1031	.1115	.1230	.1319	.1398	.1465
12	.0329	.0399	.0476	.0560	.0650	.0745	.0843	.0943	.1043	1140
13	.0148	.0188	.0234	.0288	.0350	.0419	.0495	.0578	.0667	.0760
14	.0057	0076	0099	.0127	.0161	0202	.0249	.0304	.0365	.0434
15	.0019	.0026	0036	.0048	.0064	0083	.0107	.0136	.0171	.0212
16	0005	.0008	.0011	.0015	.0021	.0029	.0039	.0052	.0068	.0088
17	.0001	.0002	.0003	.0004	0006	0009	.0012	.0017	.0023	0031
18	0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0007	.0009
19	0000	0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0002	.0002

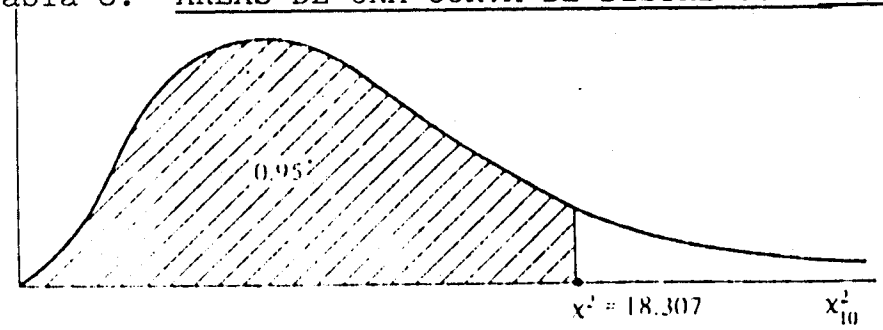
Tabla 2.- **AREAS BAJO LA CURVA NORMAL**



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

FUENTE: Wayne, Daniel. Applied Nonparametric Statistics.

Tabla 3.- AREAS DE UNA CURVA DE DISTRIBUCION CHI-CUADRADO



df	[illegible]	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.05}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.995}$
1	0.0000393	0.000982	0.00393	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.0100	0.0506	0.103	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.0717	0.216	0.352	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.484	0.711	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.831	1.145	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	1.237	1.635	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.690	2.167	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	2.180	2.733	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.700	3.325	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	3.247	3.940	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.816	4.575	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	4.404	5.226	18.549	21.026	23.336	26.217	28.300
13	3.565	5.009	5.892	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	5.629	6.571	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	6.262	7.261	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	6.908	7.962	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	7.564	8.672	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	8.231	9.390	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	8.907	10.117	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	9.591	10.851	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	10.283	11.591	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	10.982	12.338	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	11.688	13.091	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	12.401	13.848	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	13.120	14.611	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	13.844	15.379	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	14.573	16.151	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	15.308	16.928	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	16.047	17.708	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	16.791	18.493	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
35	17.192	20.569	22.465	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
40	20.707	24.433	26.509	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
45	24.311	28.366	30.612	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
50	27.991	32.357	34.764	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.535	40.482	43.188	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	48.758	51.739	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	57.153	60.391	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	65.647	69.126	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	74.222	77.929	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

FUENTE: Wayne, Daniel. Applied Nonparametric Statistics.

Tabla 4.- VALORES CRITICOS PARA LA PRUEBA DE WILCOXON

n	d	Confidence coefficient	α″	α′
3	1	.750	.250	.125
4	1	.875	.125	.063
5	1	.938	.062	.031
	2	.875	.125	.063
6	1	.969	.031	.016
	2	.937	.063	.031
	3	.906	.094	.047
	4	.844	.156	.078
7	1	.984	.016	.008
	2	.969	.031	.016
	4	.922	.078	.039
	5	.891	.109	.055
8	1	.992	.008	.004
	2	.984	.016	.008
	4	.961	.039	.020
	5	.945	.055	.027
	6	.922	.078	.039
	7	.891	.109	.055
9	2	.992	.008	.004
	3	.988	.012	.006
	6	.961	.039	.020
	7	.945	.055	.027
	9	.902	.098	.049
	10	.871	.129	.065
10	4	.990	.010	.005
	5	.986	.014	.007
	9	.951	.049	.024
	10	.936	.064	.032
	11	.916	.084	.042
	12	.895	.105	.053
11	6	.990	.010	.005
	7	.986	.014	.007
	11	.958	.042	.021
	12	.946	.054	.027
	14	.917	.083	.042
	15	.898	.102	.051
12	8	.991	.009	.005
	9	.988	.012	.006
	14	.958	.042	.021
	15	.948	.052	.026
	18	.908	.092	.046
	19	.890	.110	.055
13	10	.992	.008	.004
	11	.990	.010	.005
	18	.952	.048	.024
	19	.943	.057	.029
	22	.906	.094	.047
	23	.890	.110	.055

n	d	Confidence coefficient	α″	α′
14	13	.991	.009	.004
	14	.989	.011	.005
	22	.951	.049	.025
	23	.942	.058	.029
	26	.909	.091	.045
	27	.896	.104	.052
15	16	.992	.008	.004
	17	.990	.010	.005
	26	.952	.048	.024
	27	.945	.055	.028
	31	.905	.095	.047
	32	.893	.107	.054
16	20	.991	.009	.005
	21	.989	.011	.006
	30	.956	.044	.022
	31	.949	.051	.025
	36	.907	.093	.047
	37	.895	.105	.052
17	24	.991	.009	.005
	25	.989	.011	.006
	35	.955	.045	.022
	36	.949	.051	.025
	42	.902	.098	.049
	43	.891	.109	.054
18	28	.991	.009	.005
	29	.990	.010	.005
	41	.952	.048	.024
	42	.946	.054	.027
	48	.901	.099	.049
	49	.892	.108	.054
19	33	.991	.009	.005
	34	.989	.011	.005
	47	.951	.049	.025
	48	.945	.055	.027
	54	.904	.096	.048
	55	.896	.104	.052
20	38	.991	.009	.005
	39	.989	.011	.005
	53	.952	.048	.024
	54	.947	.053	.027
	61	.903	.097	.049
	62	.895	.105	.053
21	43	.991	.009	.005
	44	.990	.010	.005
	59	.954	.046	.023
	60	.950	.050	.025
	68	.904	.096	.048
	69	.897	.103	.052

n	d	Confidence coefficient	α″	α′
22	49	.991	.009	.005
	50	.990	.010	.005
	66	.954	.046	.023
	67	.950	.050	.025
	76	.902	.098	.049
	77	.895	.105	.053
23	55	.991	.009	.005
	56	.990	.010	.005
	74	.952	.048	.024
	75	.948	.052	.026
	84	.902	.098	.049
	85	.895	.105	.052
24	62	.990	.010	.005
	63	.989	.011	.005
	82	.951	.049	.025
	83	.947	.053	.026
	92	.905	.095	.048
	93	.899	.101	.051
25	69	.990	.010	.005
	70	.989	.011	.005
	90	.952	.048	.024
	91	.948	.052	.026
	101	.904	.096	.048
	102	.899	.101	.051

FUENTE: Wayne, Daniel. Applied Nonparametric Statistics.

Tabla 5.- VALORES CRITICOS PARA LA PRUEBA DE TUKEY

N-n	n	(5/1/0.1)%	N-n	n	(5/1/0.1)%
0	4-8	7/ 9/13	9	3	10/13/--
	9-21	7/10/13		4	10/13/16
	22-24	7/10/14		5-7	9/12/16
	25-	8/10/14		8	8/12/15
1	3-4	7/--/--		9-18	8/11/15
	5-6	7/ 9/--		19-31	8/11/14
	7	7/ 9/13		32-	8/10/14
	8-20	7/10/13	10	3	11/14/--
	21-23	7/10/14		4	10/13/17
	24	8/10/14		5	9/13/17
2	3-4	7/ 9/--		6-	9/13/16
	5	7/10/--		7-9	9/12/16
	6-18	7/10/13		10	8/12/15
	19-21	7/10/14		11-22	8/11/15
	22-	8/10/14		23-42	8/11/14
3	3-5	7/10/--		43-	8/10/14
	6-14	7/10/13	11	2	12/--/--
	15-17	7/10/14		3	11/15/--
	18-	8/10/4		4	10/14/18
4	3	8/--/--		5	10/13/17
	4-7	8/10/13		6-7	9/12/17
	8-	8/10/14		8-10	9/12/16
5	3-4	9/11/--		11-12	8/12/16
	5-6	8/11/14		13-19	8/11/15
	7-	8/10/14	12	2	12/--/--
6	3-4	9/11/--		3	12/15/--
	5-11	8/11/14		4	11/15/18
	12-	8/10/14		5	10/14/18
7	3-4	9/12/--		6	10/13/17
	5	9/12/15		7-8	9/12/17
	6-8	8/11/15		9-10	9/12/16
	9-17	8/11/14		11-13	8/12/16
	18-	8/10/4		14	8/11/16
8	3	10/13/--		15-18	8/11/15
	4	9/12/--	13	2	13/--/--
	5-6	9/12/15		3	12/16/--
	7-14	8/11/15		4	11/15/19
	15-24	8/11/14		5-6	10/14/18
	25-	8/10/14		7	9/13/18

FUENTE: Wayne, Daniel. Applied Nonparametric Statics

N-n	n	(5/1/1.0)%
13	8-9	9/13/17
	10	9/12/17
	11	9/12/16
	12-15	8/12/16
	16-17	8/11/16
14	2	13/—/—
	3	13/17/—
	4	11/16/19
	5	11/15/19
	6	10/14/19
	7	10/14/18
	8	9/13/18
	9-10	9/13/17
	11-12	9/12/17
	13	9/12/16
	14-16	8/12/16
15	2	14/—/—
	3	13/18/—
	4	12/16/20
	5	11/15/20
	6	10/15/19
	7	10/14/19
	8	10/14/18
	9	9/13/18
	10-11	9/13/17
	12-13	9/12/17
	14	9/12/16
	15	8/12/16
16	2	16/—/—
	3	13/18/—
	4	12/17/—
	5	11/16/20
	6	10/15/20
	7-8	10/14/19
	9	9/14/18
	10-11	9/13/18
	12	9/13/17
	13-14	9/12/17

N-n	n	(5/1/1.0)%
17	2	16/—/—
	3	14/19/—
	4	12/18/—
	5	11/16/21
	6	11/16/20
	7	10/15/20
	8-9	10/14/19
	10-12	9/13/18
	13	9/13/17
18	2	17/—/—
	3	14/20/—
	4	13/18/—
	5	11/17/22
	6	11/16/21
	7-8	10/15/20
	9	10/14/19
	10	9/14/19
	11-12	9/13/18
19	2	17/—/—
	3	14/20/—
	4	13/19/23
	5	12/17/22
	6	11/16/22
	7	11/16/21
	8	10/15/20
	9	10/14/20
	10	10/14/19
	11	9/14/19
20	2	18/—/—
	3	15/21/—
	4	13/19/24
	5	12/18/23
	6	11/17/22
	7	11/16/24
	8	10/15/21
	9	10/15/20
	10	10/14/20

Tabla 6.- CUARTILES DE LA PRUEBA DE MANN-WHITNEY-WILCOXON

n_1	p	n_2 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.005	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
2	.01	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2
	.025	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	.05	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5
	.10	0	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	[illegible]	6	6	7	7	8	8
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
	.005	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4
3	.01	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6
	.025	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
	.05	0	1	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	12
	.10	1	2	2	3	4	5	6	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14	15	16
	.001	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4
	.005	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	7	8	9
4	.01	0	0	0	1	2	2	3	4	4	5	6	6	7	9	8	9	10	10	11
	.025	0	0	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	12	13	14	15
	.05	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19
	.10	1	2	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	21	22	23
	.001	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8
	.005	0	0	0	1	2	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14
5	.01	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	.025	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	18	19	20	21
	.05	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23	24	26
	.10	2	3	5	6	8	9	11	13	14	16	18	19	21	23	24	26	28	29	31
	.001	0	0	0	0	0	0	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	.005	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19
6	.01	0	0	2	3	4	5	7	8	9	10	12	13	14	16	17	19	20	21	23
	.025	0	2	3	4	6	7	9	11	12	14	15	17	18	20	22	23	25	26	28
	.05	1	3	4	6	8	9	11	13	15	17	18	20	22	24	26	27	29	31	33
	.10	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	35	37	39
	.001	0	0	0	0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17
	.005	0	0	1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20	22	23	25
7	.01	0	1	2	4	5	7	8	10	12	13	15	17	18	20	22	24	25	27	29
	.025	0	2	4	6	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
	.05	1	3	5	7	9	12	14	16	18	20	22	25	27	29	31	34	36	38	40
	.10	2	5	7	9	12	14	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	42	44	47
	.001	0	0	0	1	2	3	5	6	7	9	10	12	13	15	16	18	19	21	22
	.005	0	0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	18	19	21	23	25	27	29	31
8	.01	0	1	3	5	7	8	10	12	14	16	18	21	23	25	27	29	31	33	35
	.025	1	3	5	7	9	11	14	16	18	20	23	25	27	30	32	35	37	39	42
	.05	2	4	6	9	11	14	16	19	21	24	27	29	32	34	37	40	42	45	48
	.10	3	6	8	11	14	17	20	23	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55

FUENTE: Wayne, Daniel. Applied Nonparametric Statics.

n_1	p	$n_2=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	0	0	2	3	4	6	8	9	11	13	15	16	18	20	22	24	26	27
	.005	0	1	2	4	6	8	10	12	14	17	19	21	23	25	28	30	32	34	37
9	.01	0	2	4	6	8	10	12	15	17	19	22	24	27	29	32	34	37	39	41
	.025	1	3	5	8	11	13	16	18	21	24	27	29	32	35	38	40	43	46	49
	.05	2	5	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
	.10	3	6	10	13	16	19	23	26	29	32	36	39	42	46	49	53	56	59	63
	.001	0	0	1	2	4	6	7	9	11	13	15	18	20	22	24	26	28	30	33
	.005	0	1	3	5	7	10	12	14	17	19	22	25	27	30	32	35	38	40	43
10	.01	0	2	4	7	9	12	14	17	20	23	25	28	31	34	37	39	42	45	48
	.025	1	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	34	37	40	43	46	49	53	56
	.05	2	5	8	12	15	18	21	25	28	32	35	38	42	45	49	52	56	59	63
	.10	4	7	11	14	18	22	25	29	33	37	40	44	48	52	55	59	63	67	71
	.001	0	0	1	3	5	7	9	11	13	16	18	21	23	25	28	30	33	35	38
	.005	0	1	3	6	8	11	14	17	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49
11	.01	0	2	5	8	10	13	16	19	23	26	29	32	35	38	42	45	48	51	54
	.025	1	4	7	10	14	17	20	24	27	31	34	38	41	45	48	52	56	59	63
	.05	2	6	9	13	17	20	24	28	32	35	39	43	47	51	55	58	62	66	70
	.10	4	8	12	16	20	24	28	32	37	41	45	49	53	58	62	66	70	74	79
	.001	0	0	1	3	5	8	10	13	15	18	21	24	26	29	32	35	38	41	43
	.005	0	2	4	7	10	13	16	19	22	25	28	32	35	38	42	45	48	52	55
12	.01	0	3	6	9	12	15	18	22	25	29	32	36	39	43	47	50	54	57	61
	.025	2	5	8	12	15	19	23	27	30	34	38	42	46	50	54	58	62	66	70
	.05	3	6	10	14	18	22	27	31	35	39	43	48	52	56	61	65	69	73	78
	.10	5	9	13	18	22	27	31	36	40	45	50	54	59	64	68	73	78	82	87
	.001	0	0	2	4	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	43	46	49
	.005	0	2	4	8	11	14	18	21	25	28	32	35	39	43	46	50	54	58	61
13	.01	1	3	6	10	13	17	21	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68
	.025	2	5	9	13	17	21	25	29	34	38	42	46	51	55	60	64	68	73	77
	.05	3	7	11	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	66	71	76	81	85
	.10	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	75	80	85	90	95
	.001	0	0	2	4	7	10	13	16	20	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55
	.005	0	2	5	8	12	16	19	23	27	31	35	39	43	47	51	55	59	64	68
14	.01	1	3	7	11	14	18	23	27	31	35	39	44	48	52	57	61	66	70	74
	.025	2	6	10	14	18	23	27	32	37	41	46	51	56	60	65	70	75	79	84
	.05	4	8	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	78	83	88	93
	.10	5	11	16	21	26	32	37	42	48	53	59	64	70	75	81	86	92	98	103
	.001	0	0	2	5	8	11	15	18	22	25	29	33	37	41	44	48	52	56	60
	.005	0	3	6	9	13	17	21	25	30	34	38	43	47	52	56	61	65	70	74
15	.01	1	4	8	12	16	20	25	29	34	38	43	48	52	57	62	67	71	76	81
	.025	2	6	11	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	71	76	81	86	91
	.05	4	8	13	19	24	29	34	40	45	51	56	62	67	73	78	84	89	95	101
	.10	6	11	17	23	28	34	40	46	52	58	64	69	75	81	87	93	99	105	111
	.001	0	0	3	6	9	12	16	20	24	28	32	36	40	44	49	53	57	61	66
	.005	0	3	6	10	14	19	23	28	32	37	42	46	51	56	61	66	71	75	80
16	.01	1	4	8	13	17	22	27	32	37	42	47	52	57	62	67	72	77	83	88
	.025	2	7	12	16	22	27	32	38	43	48	54	60	65	71	76	82	87	93	99
	.05	4	9	15	20	26	31	37	43	49	55	61	66	72	78	84	90	96	102	108
	.10	6	12	18	24	30	37	43	49	55	62	68	75	81	87	94	100	107	113	120

n_1	p	$n_2=2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	.001	0	1	3	6	10	14	18	22	26	30	35	39	44	48	53	58	62	67	71
	.005	0	3	7	11	16	20	25	30	35	40	45	50	55	61	66	71	76	82	87
17	.01	1	5	9	14	19	24	29	34	39	45	50	56	61	67	72	78	83	89	94
	.025	3	7	12	18	23	29	35	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	100	106
	.05	4	10	16	21	27	34	40	46	52	58	65	71	78	84	90	97	103	110	116
	.10	7	13	19	26	32	39	46	53	59	66	73	80	86	93	100	107	114	121	128
	.001	0	1	4	7	11	15	19	24	28	33	38	43	47	52	57	62	67	72	77
	.005	0	3	7	12	17	22	27	32	38	43	48	54	59	65	71	76	82	88	93
18	.01	1	5	10	15	20	25	31	37	42	48	54	60	66	71	77	83	89	95	101
	.025	3	8	13	19	25	31	37	43	[illegible]	56	62	68	75	81	87	94	100	107	113
	.05	5	10	17	23	29	36	42	49	56	62	69	76	83	89	96	103	110	117	124
	.10	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	78	85	92	99	107	114	121	129	136
	.001	0	1	4	8	12	16	21	26	30	35	41	46	51	56	61	67	72	78	83
	.005	1	4	8	13	18	23	29	34	40	46	52	58	64	70	75	82	88	94	100
19	.01	2	5	10	16	21	27	33	39	45	51	57	64	70	76	83	89	95	102	108
	.025	3	8	14	20	26	33	39	46	53	59	66	73	79	86	93	100	107	114	120
	.05	5	11	18	24	31	38	45	52	59	66	73	81	88	95	102	110	117	124	131
	.10	8	15	22	29	37	44	52	59	67	74	82	90	98	105	113	121	129	136	144
	.001	0	1	4	8	13	17	22	27	33	38	43	49	55	60	66	71	77	83	89
	.005	1	4	9	14	19	25	31	37	43	49	55	61	68	74	80	87	93	100	106
20	.01	2	6	11	17	23	29	35	41	48	54	61	68	74	81	88	94	101	108	115
	.025	3	9	15	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	99	106	113	120	128
	.05	5	12	19	26	33	40	48	55	63	70	78	85	93	101	108	116	124	131	139
	.10	8	16	23	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	120	128	136	144	152

Tabla 7.- VALORES CRITICOS PARA LA PRUEBA DE SPEARMAN

n	$p = .900$	.950	.975	.990	.995	.999
4	.8000	.8000				
5	.7000	.8000	.9000	.9000		
6	.6000	.7714	.8286	.8857	.9429	
7	.5357	.6786	.7450	.8571	.8929	.9643
8	.5000	.6190	.7143	.8095	.8571	.9286
9	.4667	.5833	.6833	.7667	.8167	.9000
10	.4424	.5515	.6364	.7333	.7818	.8667
11	.4182	.5273	.6091	.7000	.7455	.8364
12	.3986	.4965	.5804	.6713	.7273	.8182
13	.3791	.4780	.5549	.6429	.6978	.7912
14	.3626	.4593	.5341	.6220	.6747	.7670
15	.3500	.4429	.5179	.6000	.6536	.7464
16	.3382	.4265	.5000	.5824	.6324	.7265
17	.3260	.4118	.4853	.5637	.6152	.7083
18	.3148	.3994	.4716	.5480	.5975	.6904
19	.3070	.3895	.4579	.5333	.5825	.6737
20	.2977	.3789	.4451	.5203	.5684	.6586
21	.2909	.3688	.4351	.5078	.5545	.6455
22	.2829	.3597	.4241	.4963	.5426	.6318
23	.2767	.3518	.4150	.4852	.5306	.6186
24	.2704	.3435	.4061	.4748	.5200	.6070
25	.2646	.3362	.3977	.4654	.5100	.5962
26	.2588	.3299	.3894	.4564	.5002	.5856
27	.2540	.3236	.3822	.4481	.4915	.5757
28	.2490	.3175	.3749	.4401	.4828	.5660
29	.2443	.3113	.3685	.4320	.4744	.5567
30	.2400	.3059	.3620	.4251	.4665	.5479

FUENTE: William Conover. Practical Nonparametric Statics.

Tabla 8.- VALORES CRITICOS PARA LA PRUEBA DE MOOD

1	n	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
2	2						2.50	2.50	2.50	2.50	2.50
							0.8333	0.8333	0.8333	0.8333	0.8333
		0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
		0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	0.1667	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	3						4.00	5.00	5.00	5.00	5.00
							0.5000	0.9000	0.9000	0.9000	0.9000
		1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	5.00	8.00	8.00	8.00	8.00
		0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.2000	0.9000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	4					0.50	6.50	8.50	8.50	8.50	8.50
						0.0667	0.6667	0.9333	0.9333	0.9333	0.9333
		0.50	0.50	0.50	0.50	2.50	8.50	12.50	12.50	12.50	12.50
		0.0667	0.0667	0.0667	0.0667	0.3333	0.9333	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	5					1.00	10.00	10.00	13.00	13.00	13.00
						0.0952	0.7619	0.7619	0.9524	0.9524	0.9524
		1.00	1.00	1.00	1.00	2.00	13.00	13.00	18.00	18.00	18.00
		0.0952	0.0952	0.0952	0.0952	0.1429	0.9524	0.9524	1.0000	1.0000	1.0000
2	6				0.50	0.50	14.50	14.50	18.50	18.50	18.50
					0.0357	0.0357	0.8214	0.8214	0.9643	0.9643	0.9643
		0.50	0.50	0.50	2.50	2.50	18.50	18.50	24.50	24.50	24.50
		0.0357	0.0357	0.0357	0.1786	0.1786	0.9643	0.9643	1.0000	1.0000	1.0000
2	7					2.00	20.00	20.00	25.00	25.00	25.00
						0.0833	0.8611	0.8611	0.9722	0.9722	0.9722
		1.00	1.00	1.00	1.00	4.00	25.00	25.00	32.00	32.00	32.00
		0.0556	0.5566	0.0556	0.0556	0.1389	0.9722	0.9722	1.0000	1.0000	1.0000
2	8			0.50	0.50	0.50	26.50	26.50	26.50	32.50	32.50
				0.0222	0.0222	0.0222	0.8889	0.8889	0.8889	0.9778	0.9778
		0.50	0.50	2.50	2.50	2.50	32.50	32.50	32.50	40.50	40.50
		0.0222	0.0222	0.1111	0.1111	0.1111	0.9778	0.9778	0.9778	1.0000	1.0000
2	9				1.00	4.00	32.00	34.00	34.00	41.00	41.00
					0.0364	0.0909	0.8364	0.9091	0.9091	0.9818	0.9818
		1.00	1.00	1.00	2.00	5.00	34.00	41.00	41.00	50.00	50.00
		0.0364	0.0364	0.0364	0.0545	0.1636	0.9091	0.9818	0.9818	1.0000	1.0000
2	10			0.50	0.50	4.50	40.50	42.50	42.50	50.00	50.50
				0.0152	0.0152	0.0909	0.8636	0.9242	0.9242	0.9848	0.9848
		0.50	0.50	2.50	2.50	6.50	42.50	50.50	50.50	60.50	60.50
		0.0152	0.0152	0.0758	0.0758	0.1515	0.9242	0.9848	0.9848	1.0000	1.0000
2	11				2.00	4.00	50.00	52.00	52.00	61.00	61.00
					0.0385	0.0641	0.8846	0.9359	0.9359	0.9872	0.9872
		1.00	1.00	1.00	4.00	5.00	52.00	61.00	61.00	72.00	72.00
		0.0256	0.0256	0.0256	0.0641	0.1154	0.9359	0.9872	0.9872	1.0000	1.0000
2	12			0.50	0.50	4.50	54.50	62.50	62.50	72.50	72.50
				0.0110	0.0110	0.0659	0.8901	0.9451	0.9451	0.9890	0.9890
		0.50	0.50	2.50	2.50	6.50	60.50	72.50	72.50	84.50	84.50
		0.0110	0.0110	0.0549	0.0549	0.1099	0.9011	0.9890	0.9890	1.0000	1.0000
2	13			1.00	4.00	8.00	61.00	72.00	74.00	74.00	85.00
				0.0190	0.0476	0.0952	0.8667	0.9143	0.9524	0.9524	0.9905
		1.00	1.00	2.00	5.00	9.00	65.00	74.00	85.00	85.00	98.00
		0.0190	0.0190	0.0286	0.0857	0.1143	0.9048	0.9524	0.9905	0.9905	1.0000
2	14		0.50	0.50	4.50	6.50	72.50	84.50	86.50	86.50	98.50
			0.0083	0.0083	0.0500	0.0833	0.8833	0.9250	0.9583	0.9583	0.9917
		0.50	2.50	2.50	6.50	8.50	76.50	86.50	98.50	98.50	112.50
		0.0083	0.0417	0.0417	0.0833	0.1167	0.9167	0.9583	0.9917	0.9917	1.0000

FUENTE: Wayne, Daniel. Applied Nonparametric Statistic.

2	15			2.00	4.00	9.00	85.00	98.00	100.00	100.00	113.00
				0.0221	0.0368	0.0882	0.8971	0.9338	0.9632	0.9632	0.9926
		1.00	1.00	4.00	5.00	10.00	89.00	100.00	113.00	113.00	128.00
		0.0147	0.0147	0.0368	0.0662	0.1176	0.9265	0.9632	0.9926	0.9926	1.0000
2	16		0.50	0.50	4.50	8.50	92.50	112.50	114.50	114.50	128.50
			0.0065	0.0065	0.0392	0.0915	0.8824	0.9412	0.9673	0.9673	0.9935
		0.50	2.50	2.50	6.50	12.50	98.50	114.50	128.50	128.50	144.50
		0.0065	0.0327	0.0327	0.0654	0.1242	0.9085	0.9673	0.9935	0.9935	1.0000
2	17			2.00	4.00	10.00	106.00	128.00	130.00	130.00	145.00
				0.0175	0.0292	0.0936	0.8947	0.9474	0.9708	0.9708	0.9942
		1.00	1.00	4.00	5.00	13.00	113.00	130.00	145.00	145.00	162.00
		0.0117	0.0117	0.0292	0.0526	0.1170	0.9181	0.9708	0.9942	0.9942	1.0000
2	18		0.50	0.50	4.50	12.50	114.50	132.50	146.50	146.50	162.50
			0.0053	0.0053	0.0316	0.1000	0.8842	0.9474	0.9737	0.9737	0.9947
		0.50	2.50	2.50	6.50	14.50	120.50	144.50	162.50	162.50	180.50
		0.0053	0.0263	0.0263	0.0526	0.1211	0.9053	0.9526	0.9947	0.9947	1.0000
3	3					2.75	10.75	12.75	12.75	12.75	12.75
						0.1000	0.8000	0.9000	0.9000	0.9000	0.9000
		2.75	2.75	2.75	2.75	4.75	12.75	14.75	14.75	14.75	14.75
		0.1000	0.1000	0.1000	0.1000	0.2000	0.9000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	4				2.00	2.00	18.00	19.00	19.00	19.00	19.00
					0.0286	0.0286	0.8857	0.9429	0.9429	0.9429	0.9429
		2.00	2.00	2.00	5.00	5.00	19.00	22.00	22.00	22.00	22.00
		0.0286	0.0286	0.0286	0.1429	0.1429	0.9429	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	5				2.75	4.75	20.75	24.75	26.75	26.75	26.75
					0.0357	0.0714	0.8571	0.9286	0.9643	0.9643	0.9643
		2.75	2.75	2.75	4.75	6.75	24.75	26.75	30.75	30.75	30.75
		0.0357	0.0357	0.0357	0.0714	0.1071	0.9286	0.9643	1.0000	1.0000	1.0000
3	6			2.00	2.00	8.00	29.00	33.00	34.00	36.00	36.00
				0.0119	0.0119	0.0952	0.8929	0.9286	0.9524	0.9762	0.9762
		2.00	2.00	5.00	5.00	9.00	32.00	34.00	36.00	41.00	41.00
		0.0119	0.0119	0.0595	0.0595	0.1190	0.9048	0.9524	0.9762	1.0000	1.0000
3	7			2.75	6.75	6.75	34.75	40.75	44.75	46.75	46.75
				0.0167	0.5000	0.0500	0.8500	0.9333	0.9667	0.9833	0.9833
		2.75	2.75	4.75	8.75	8.75	38.75	42.75	46.75	52.75	52.75
		0.0167	0.0167	0.0333	0.1167	0.1167	0.9167	0.9500	0.9833	1.0000	1.0000
3	8		2.00	2.00	8.00	11.00	45.00	50.00	54.00	59.00	59.00
			0.0061	0.0061	0.0485	0.0970	0.8848	0.9394	0.9636	0.9879	0.9879
		2.00	5.00	5.00	9.00	13.00	50.00	51.00	57.00	66.00	66.00
		0.0061	0.0303	0.0303	0.0606	0.1212	0.9394	0.9515	0.9758	1.0000	1.0000
3	9		2.75	4.75	6.75	12.75	54.75	60.75	66.75	70.75	72.75
			0.0091	0.0182	0.0273	0.0909	0.8727	0.9182	0.9727	0.9818	0.9909
		2.75	4.75	6.75	8.75	14.75	56.75	62.75	70.75	72.75	80.75
		0.0091	0.0182	0.0273	0.0636	0.1364	0.9091	0.9636	0.9818	0.9909	1.0000
3	10	2.00	2.00	6.00	10.00	14.00	68.00	76.00	77.00	86.00	88.00
		0.0035	0.0035	0.0245	0.0490	0.0979	0.8986	0.9441	0.9720	0.9860	0.9930
		5.00	5.00	8.00	11.00	17.00	70.00	77.00	81.00	88.00	97.00
		0.0175	0.0175	0.0280	0.0559	0.1189	0.9266	0.9720	0.9790	0.9930	1.0000
3	11		2.75	6.75	10.75	16.75	74.75	84.75	90.75	102.75	104.75
			0.0055	0.0165	0.0440	0.0879	0.8846	0.9451	0.9560	0.9890	0.9945
		2.75	4.75	8.75	12.75	18.75	78.75	86.75	92.75	104.75	114.75
		0.0055	0.0110	0.0385	0.0549	0.1099	0.9066	0.9505	0.9780	0.9945	1.0000
3	12	2.00	2.00	9.00	13.00	20.00	89.00	99.00	107.00	114.00	121.00
		0.0022	0.0022	0.0220	0.0440	0.0945	0.8879	0.9385	0.9648	0.9868	0.9911
		5.00	5.00	10.00	14.00	21.00	90.00	101.00	110.00	121.00	123.00
		0.0110	0.0110	0.0308	0.0615	0.1121	0.9055	0.9560	0.9824	0.9912	0.995
3	13	2.75	4.75	8.75	12.75	20.75	102.75	114.75	124.75	132.75	140.75
		0.0036	0.0071	0.0250	0.0357	0.0893	0.8893	0.9464	0.9714	0.9893	0.992
		4.75	6.75	10.75	14.75	22.75	104.75	116.75	128.75	140.75	142.75
		0.0071	0.0107	0.0286	0.0536	0.1036	0.9071	0.9500	0.9857	0.9929	0.996

3 14	2.00	5.00	11.00	17.00	25.00	116.00	128.00	138.00	149.00	162.00
	0.0015	0.0074	0.0235	0.0500	0.0868	0.8926	0.9353	0.9735	0.9882	0.9941
	5.00	6.00	13.00	18.00	26.00	117.00	129.00	144.00	153.00	164.00
	0.0074	0.0103	0.0294	0.0544	0.1044	0.9044	0.9500	0.9765	0.9912	0.9971
3 15	4.75	6.75	12.75	18.75	26.75	132.75	146.75	156.75	164.75	174.75
	0.0049	0.0074	0.0245	0.0490	0.0907	0.8995	0.9485	0.9681	0.9804	0.9926
	6.75	8.75	14.75	20.75	28.75	134.75	148.75	158.75	170.75	184.75
	0.0074	0.0172	0.0368	0.0613	0.1005	0.9191	0.9583	0.9779	0.9902	0.9951
3 16	2.80	8.00	13.00	20.00	32.00	146.00	164.00	179.00	187.00	198.00
	0.0010	0.0083	0.0206	0.0444	0.0970	0.8937	0.9463	0.9732	0.9835	0.9938
	5.00	9.00	14.00	21.00	33.00	149.00	166.00	181.00	194.00	209.00
	0.0052	0.0103	0.0289	0.0526	0.1011	0.9102	0.9567	0.9814	0.9917	0.9959
3 17	4.75	6.75	12.75	20.75	34.75	162.75	180.75	192.75	210.75	222.75
	0.0035	0.0053	0.0175	0.0439	0.1000	0.8930	0.9421	0.9719	0.9860	0.9947
	6.75	8.75	14.75	22.75	36.75	164.75	182.75	200.75	218.75	234.75
	0.0053	0.0123	0.0263	0.0509	0.1070	0.9018	0.9509	0.9754	0.9930	0.9965
4 4			5.00	5.00	9.00	29.00	31.00	31.00	33.00	33.00
			0.0143	0.0143	0.0714	0.8714	0.9286	0.9286	0.9857	0.9857
	5.00	5.00	9.00	9.00	11.00	31.00	33.00	33.00	37.00	37.00
	0.0143	0.0143	0.0714	0.0714	0.1286	0.9286	0.9857	0.9857	1.0000	1.0000
4 5			6.00	10.00	11.00	37.00	41.00	42.00	42.00	45.00
			0.0159	0.0397	0.0556	0.8730	0.9286	0.9603	0.9603	0.9921
	6.00	6.00	9.00	11.00	14.00	38.00	42.00	45.00	45.00	50.00
	0.0159	0.0159	0.0317	0.0556	0.1190	0.9048	0.9603	0.9921	0.9921	1.0000
4 6	5.00	5.00	9.00	13.00	15.00	47.00	51.00	53.00	55.00	55.00
	0.0048	0.0048	0.0238	0.0476	0.0857	0.8952	0.9333	0.9571	0.9762	0.9762
	9.00	9.00	11.00	15.00	17.00	49.00	53.00	55.00	59.00	59.00
	0.0238	0.0238	0.0429	0.0857	0.1095	0.9143	0.9571	0.9762	0.9952	0.9952
4 7		6.00	11.00	14.00	20.00	58.00	63.00	68.00	70.00	70.00
		0.0061	0.0212	0.0455	0.0909	0.8848	0.9394	0.9727	0.9848	0.9848
	6.00	9.00	14.00	15.00	21.00	59.00	66.00	70.00	75.00	75.00
	0.0061	0.0121	0.0455	0.0576	0.1152	0.9030	0.9576	0.9848	0.9970	0.9970
4 8	5.00	5.00	13.00	17.00	21.00	69.00	77.00	81.00	87.00	87.00
	0.0020	0.0020	0.0202	0.0465	0.0869	0.8970	0.9475	0.9636	0.9899	0.9899
	9.00	9.00	15.00	19.00	23.00	71.00	79.00	83.00	93.00	93.00
	0.0101	0.0101	0.0364	0.0545	0.1030	0.9051	0.9556	0.9798	0.9980	0.9980
4 9	6.00	11.00	14.00	20.00	27.00	85.00	92.00	98.00	104.00	106.00
	0.0028	0.0098	0.0210	0.0420	0.0965	0.8979	0.9497	0.9748	0.9874	0.9930
	9.00	14.00	15.00	21.00	29.00	96.00	93.00	101.00	106.00	113.00
	0.0056	0.0210	0.0266	0.0531	0.1077	0.9231	0.9552	0.9804	0.9930	0.9986
4 10	9.00	13.00	17.00	21.00	31.00	97.00	105.00	115.00	121.00	125.00
	0.0050	0.0100	0.0230	0.0430	0.0969	0.8961	0.9491	0.9740	0.9860	0.9910
	11.00	15.00	19.00	23.00	33.00	99.00	107.00	117.00	123.00	127.00
	0.0090	0.0180	0.0270	0.0509	0.1129	0.9161	0.9530	0.9820	0.9900	0.9950
4 11	10.00	11.00	20.00	26.00	35.00	113.00	125.00	134.00	143.00	148.00
	0.0037	0.0051	0.0220	0.0462	0.0967	0.8967	0.9495	0.9722	0.9897	0.9934
	11.00	14.00	21.00	27.00	36.00	114.00	126.00	135.00	146.00	150.00
	0.0051	0.0110	0.0278	0.0505	0.1011	0.9099	0.9612	0.9780	0.9927	0.9963
4 12	11.00	15.00	21.00	29.00	39.00	129.00	141.00	153.00	161.00	171.00
	0.0049	0.0099	0.0236	0.0489	0.0978	0.8962	0.9495	0.9747	0.9879	0.9945
	13.00	17.00	23.00	31.00	41.00	131.00	143.00	155.00	163.00	173.00
	0.0055	0.0126	0.0280	0.0533	0.1093	0.9159	0.9538	0.9791	0.9901	0.9951
4 13	11.00	17.00	25.00	33.00	45.00	146.00	162.00	173.00	186.00	193.00
	0.0029	0.0088	0.0227	0.0475	0.0971	0.8933	0.9496	0.9710	0.9891	0.9941
	14.00	18.00	26.00	34.00	46.00	147.00	163.00	174.00	187.00	198.00
	0.0063	0.0113	0.0265	0.0504	0.1071	0.9000	0.9529	0.9777	0.9908	0.9958
4 14	13.00	19.00	27.00	37.00	49.00	163.00	181.00	195.00	207.00	217.00
	0.0033	0.0088	0.0235	0.0477	0.0928	0.8931	0.9487	0.9739	0.9889	0.9941
	15.00	21.00	29.00	39.00	51.00	165.00	183.00	197.00	213.00	221.00
	0.0059	0.0141	0.0291	0.0582	0.1059	0.9049	0.9539	0.9755	0.9915	0.9954

Tabla 9.- CUARTILES PARA LA PRUEBA DE KRUSKALL-WALLIS

n_1	n_2	n_3	valor crítico	α
2	1	1	2.7000	.500
2	2	1	3.6000	.200
2	2	2	4.5714	.067
			3.7143	.200
3	1	1	3.2000	.300
3	2	1	4.2857	.100
			3.8571	.133
3	2	2	5.3572	.029
			4.7143	.048
			4.5000	.067
			4.4643	.105
3	3	1	5.1429	.043
			4.5714	.100
			4.0000	.129
3	3	2	6.2500	.011
			5.3611	.032
			5.1389	.061
			4.5556	.100
			4.2500	.121
3	3	3	7.2000	.004
			6.4889	.001
			5.6889	.029
			5.6000	.050
			5.0667	.086
			4.6222	.100
4	1	1	3.5714	.200
4	2	1	4.8214	.057
			4.5000	.076
			4.0179	.114
4	4	2	7.0364	.006
			6.8727	.011
			5.4545	.046
			5.2364	.052
			4.5545	.098
			4.4455	.103
4	4	3	7.1439	.010
			7.1364	.011
			5.5935	.049
			5.5758	.051
			4.5455	.099
			4.4773	.102
4	4	4	7.6538	.008
			7.5385	.011
			5.6923	.049
			5.6538	.054
			4.6539	.097
			4.5001	.104
5	1	1	3.8571	.143
5	2	1	5.2500	.036
			5.0000	.048
			4.4500	.071
			4.2000	.095
			4.0500	.119
4	2	2	6.0000	.014
			5.3333	.033
			5.1250	.052
			4.4583	.100
			4.1667	.105
4	3	1	5.8333	.021
			5.2083	.050
			5.0000	.057
			4.0556	.093
			3.8889	.129
4	3	2	6.4444	.008
			6.3000	.011
			5.4444	.046
			5.4000	.051
			4.5111	.098
			4.4444	.102
4	3	3	6.7455	.010
			6.7091	.013
			5.7909	.046
			5.7273	.050
			4.7091	.092
			4.7000	.101
4	4	1	6.6667	.010
			6.1667	.022
			4.9667	.048
			4.8667	.054
			4.1667	.082
			4.0667	.102
5	3	2	6.9091	.009
			6.8281	.010
			5.2509	.049
			5.1055	.052
			4.6509	.091
			4.4121	.101
5	3	3	7.0788	.009
			6.9818	.011
			5.6485	.049
			5.5152	.051
			4.5333	.097
			4.4121	.109
5	4	1	6.9545	.008
			6.8400	.011
			4.9855	.044
			4.8600	.056
			3.9873	.098
			3.9600	.102
5	4	2	7.2045	.009
			7.1182	.010
			5.2727	.049
			5.2682	.050
			4.5409	.098
			4.5182	.101

FUENTE: William Conover.Practic Nonparametric Statistics.

APENDICE II

Números aleatorias (Al azar)

Como se mencionó en el Capítulo III es necesario que se seleccionen las observaciones al azar; para esto realice los siguientes pasos:

1º) Determine el número de observaciones que se van a sortear.

2º) Entre en cualquier punto de la Tabla que a continuación se presenta.

3º) Seleccione una dirección de escogencia. Puede ser de arriba a abajo, de derecha a izquierda, o al contrario.

4º) Seleccione el número que vaya apareciendo en la Tabla, éste será el ordinal que debe tomar la observación.

5º) En caso de que el número que salga sorteado sea mayor que el tamaño de la muestra de interés, descártelo del sorteo y sustitúyalo por el número siguiente que aparezca y que sea congruente en el sorteo.

98	78	82	54	47
78	58	68	87	41
51	42	21	03	88
93	15	07	60	86
27	12	31	66	62

79	44	83	55	47
89	73	43	91	03
29	30	90	00	58
97	33	17	26	25
07	15	44	92	47

82	50	34	50	80
59	21	86	16	30
04	19	60	33	05
96	91	44	09	94
31	71	03	53	38

03	70	22	67	59
08	45	79	46	89
37	80	05	75	64
90	63	56	69	37
22	65	38	02	88

05	79	69	67	64
48	01	53	03	82
94	64	97	27	25
15	85	82	52	08
09	81	37	66	56

43	83	99	02	76
31	98	09	80	62
81	35	42	62	84
97	95	56	39	75
37	63	35	93	23

39	22	96	00	48
61	29	84	34	51
38	84	18	10	29
64	29	48	04	08
64	02	32	99	63

20	83	80	10	41
11	08	81	29	89
20	05	35	93	00
67	37	94	24	35
09	54	17	31	23

96	50	93	56	82
57	91	35	40	64
15	99	93	33	67
04	73	18	10	05
28	50	93	03	53

23	67	81	25	02
27	85	16	26	34
29	02	33	74	56
06	89	50	88	83
94	02	52	72	05

98	10	64	68	08
74	73	67	60	15
48	51	68	68	27
19	74	48	63	31
89	71	43	01	87

36	14	82	65	26
64	24	06	31	03
62	23	94	40	54
52	96	26	92	88
99	08	59	19	48

12	16	45	52	66
75	26	64	57	26
37	02	59	78	16
65	47	61	86	33
17	30	14	51	51

52	49	62	09	40
60	19	77	82	16
19	90	66	06	78
55	72	25	25	77
62	42	89	32	20

35	22	23	03	98
71	23	10	01	79
68	12	09	55	09
82	44	19	92	96
27	30	37	36	79

58	16	35	18	87
13	61	94	37	16
80	08	59	21	66
34	40	32	65	07
37	70	19	68	59

83	08	12	80	00
50	15	87	22	69
38	84	21	07	35
82	50	11	82	51
44	49	53	42	43

79	06	89	48	41
70	37	61	44	07
71	75	45	32	27
52	36	48	40	66
41	79	42	99	29

40	51	63	42	48
97	44	82	24	89
56	32	97	78	90
93	11	03	23	52
29	69	21	64	95

35	70	93	09	52
46	41	47	90	97
17	96	05	71	39
14	88	55	33	69
17	28	21	74	67

08	30	27	54	70
64	45	02	27	04
37	09	60	50	21
54	26	27	24	39
81	14	08	40	45

79	74	41	35	03
25	06	00	45	80
36	54	95	22	82
21	84	29	04	29
75	50	39	57	12

64	08	22	47	93
09	93	96	25	87
13	54	56	85	25
28	68	29	31	97
95	39	87	90	46

25	31	33	80	06
71	36	95	90	76
93	54	70	18	47
30	68	91	06	28
00	36	97	67	64

85	72	10	87	24
67	89	81	54	26
76	35	26	58	88
72	66	03	41	87
41	08	47	32	19

85	48	34	12	04
88	48	66	54	10
58	86	41	75	19
78	23	57	85	43
12	08	15	24	45

75	40	34	35	62
99	46	10	51	42
88	05	34	05	92
70	87	79	94	46
12	11	57	19	27

96	06	52	12	80
65	55	90	95	04
52	72	01	52	70
66	67	06	40	00
22	15	37	49	38

BIBLIOGRAFIA

- William Jay Conover
  "Practical Nonparametric Statistics"
  U.S.A., Wiley International Edition, 1971.

- Wayne W. Daniel
  "Applied Nonparametric Statistics"
  Boston, Houghton Miffling Company, 1978.

- Jean Dickinson Gibbons.
  "Nonparametric methods for quantitative analisis"
  Alabama, Holt, Rinehart and Winston, 1976.

- Rafael López Casuso
  "Introducción al cálculo de probabilidades e inferencia estadística"
  Caracas, Universidad Católica Andrés Bello.

- Walpule
  "Probabilidad y estadística para ingenieros"
  México, Interamericana, 1982.

- William Mendenhall y James E. Reinmuth
  "Estadística para administración y económia"
  Iberoamericana, 1978.

- Dr. Kaoru Ishikawa
  "Guide to quality control"
  Tokio, Asian Productivity Organization, 1981.

- A. K. S. Jardine, J. D. Macfarlane y C. S. Greensted
  "Statistical methods of quality control"
  London, William Heineman.

- E.L. Grant
  "Statistical quality control"
  Tokio, McGraw-Hill Book Company, 1964.

- Apuntes de Métodos Estadísticos
  Prof. Francisco Arvelo.