TRAB
IC985
E7

TRABAJO CONDUCENTE AL GRADO DE AGREGADO

PRESENTADO POR :

- ROBERTO ESCOLAR ABEJON

TITULO :

- LOS VECTORES Y SU APLICACION A LA GEOMETRIA ANALITICA .----

LUGAR :

- Caracas

FECHA :

- 1 de marzo de 1985.

U.C.A.B.

LOS VECTORES Y SU APLICACION A LA GEOMETRIA ANALITICA

ROBERTO ESCOLAR A.

INTRODUCCION .---

Actualmente, el tratamiento vectorial de la geometría analítica,diferencial,de la mecánica,de la hidrodinámica y de la electrodinámica,es prácticamente un procedimiento estandar.

El uso de los vectores no sólo simplifica y condensa la exposición, sino que además,hace los conceptos matemáticos y físicos más tangibles y fáciles de captar.

Los productos escalares y vectoriales de Gibbs, tan íntimamente ligados a todas las cuestiones de perpendicularidad y paralelismo, permiten escribir cómodamente las ecuaciones de rectas y planos y resolver cualquier problema de distancias de la manera más natural.

En 1788 Lagrange publicó la obra Mécanique Analytique, que mostró la gran flexibilidad y la tremenda potencia que se alcanza al usar métodos analíticos en el desarrollo de la Mecánica.Pero fue en el siglo XIX con el desarrollo de la teoría de los cuaterniones, de Willian Rowan Hamilton,que se comprendieron muchos aspectos del Algebra y de la Física.Correspondió a J.W. Gibbs y O.Heaviside el gran trabajo de relacionar y unir el análisis de los cuaterniones con la Geometría Cartesiana para dar lugar al ALGEBRA VECTORIAL

El objetivo del presente trabajo, es doble.En primer lugar se analizarán dos de los espacios vectoriales más prácticos como son el de los segmentos orientados y el de las ternas ordenadas en un sistema cartesiano.En el segundo capítulo se verán las aplicaciones a la geometría analítica del espacio, donde podremos detallar la simplicidad de la misma al usar métodos vectoriales.

Existen tres métodos esencialmente diferentes de estudiar el Algebra Vectorial:Geométricamente,Analíticamente y Axio-

máticamente.

En la introducción geométrica, los vectores se representan por segmentos de recta orientados.Las operaciones de suma resta y producto por esclares se definen y desarrollan por métodos geométricos.

En la introducción analítica, los vectores se expresan mediante números llamados componentes,Las propiedades y las operaciones se deducen de sus correspondientes numéricas.

La introducción axiomática, es independiente de sus aplicaciones y se les asigna un conjunto de axiomas.Tal sistema recibe el nombre de Espacio Vectorial.

El estudio del Algebra Vectorial axiomáticamente es la ideal pues describe a los vectores independientemente de los sistemas de coordenadas y de cualquier representación geométrica.Pero sus estudio, traspasa los objetivos del presente trabajo, ya que el mismo está destinado a los estudiantes del tercer semestre en la materia de Análisis de la UCAB, de acuerdo con los programas vigentes.El Algebra Vectorial axiomáticamente se analiza en el Análisis IV.

Por tanto se definirá Espacio Vectorial y posteriormente se probará que los segmentos orientados y las ternas ordenadas unidos de las operaciònes de suma y producto por escalares, satisfacen las condiciones de Espacio Vectorial.

Es evidente que cada vez que podamos dar una demostración en forma sintética, es decir independientemente de la representación por sus componentes, así lo haremos.

R. Escolar.

UCAB

I N D I C E

CAPITULO L Los espacios vectoriales
Los vectores geométricos
Las ternas ordenadas

1.-	ALGEBRA VECTORIAL	1
2.-	EL ESPACIO VECTORIAL DE LOS SEGMENTOS ORIENTADOS	2
2.1	Vectores	2
2.2	Igualdad de vectores	3
2.3	Suma y resta de vectores	4
2.4	Producto de vectores por escalares	6
2.5	Vector unitario	8
	Ejercicios	11
3.-	INDEPENDENCIA LINEAL BASES	13
4.-	ANGULO ENTRE VECTORES	14
5.-	EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS TERNAS ORDENADAS	15
5.1	Componentes de un vector	15
5.2	Igualdad de vectores	16
5.3	Suma y resta de vectores	16
5.4	Producto por escalares	17
	Ejercicios	18
6.-	PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES	20
6.1	Definición	20
6.2	Producto escalar por las componentes	21
6.3	Desigualdad triangular o de Minkowski	22
6.4	Proyección de un vector sobre otro	23
	Ejercicios	26
7.-	PRODUCTO VECTORIAL	27
7.1	Definición	27
7.2	El producto vectorial por las componentes	28
7.3	Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial	29
	Ejercicios	31

8.- PRODUCTOS TRIPLES 32
8.1 Producto triple escalar o producto mixto 32
8.2 El producto triple escalar por componentes 33
Interpretación geométrica del producto triple 33
8.3 El triple producto vectorial 35
Ejercicios 38

CAPITULO 2 Elementos de geometría analítica del espacio.Punto,recta y plano.

1.- EL PUNTO 40
1.1 Sistema de coordenadas rectangulares en el espacio tridimensional 40
1.2 Distancia entre dos puntos 41
1.3 Razón de división de un segmento en una razón dada 42
2.- LA RECTA 43
2.1 Definición 43
2.2 Ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta 43
2.3 Angulo entre dos rectas 45
3.- EL PLANO 46
3.1 Definición 46
3.2 Forma general de la ecuación de un plano 46
3.3 Ecuación de un plano definido por tres puntos 47
Ejercicios 49
4.- RELACIONES PUNTO-RECTA y PUNTO-PLANO 50
4.1 Relación Punto-recta 50
4.2 Relación Punto-plano 52
Ejercicios 54
5.- RELACION RECTA-RECTA 55
5.1 Rectas coincidentes y paralelas 55
5.2 Rectas que se cortan 56
5.3 Rectas que se cruzan 58
6.- RELACION RECTA-PLANO 61

7.- RELACION PLANO-PLANO 64
7.1 Planos que tienen una recta en común 64
7.2 Planos paralelos 66
Ejercicios 68

CAPITULO 3 Las superficies .Superficies cuádricas.

1.- SUPERFICIES 70
2.- SUPERFICIES ESFERICAS 71
3.- SUPERFICIES CILINDRICAS 72
4.- SUPERFICIES CUADRICAS 75
4.1 Cuádricas con centro 75
4.2 Cuádricas sin centro 77
Ejercicios 79
GLOSARIO DE EJERCICIOS 81
PRESENTACION II
TITULO III
DEDICATORIA IV
INTRODUCCION V
INDICE VII
BIBLIOGRAFIA X

UCAB

B I B L I O G R A F I A.----

- Geometría Analítica
  Editorial Uteha (Mexico) 1970
  Autor : Lehmann

- Análisis matemático (Cálculo infinitesimal de varias variables Aplicaciones)
  Editorial Kapelusz Buenos Aires 1968
  Autores : J. Rey Pastor ; P. Pi Calleja y C.A. Trejo.

- Calculus
  Editorial Reverté,S.A.(Barcelona) 1982 Volumen I
  Autor : Tom M. Apostol

- Calculo Vectorial
  Editorial Fondo Educativo Interamericano E.U.A. 1981
  Autor : Marsden/Tromba

- Analisis vectorial
  Editorial Fondo Educativo Interamericano E.U.A. 1973
  Autor : Hwei P. Hsu

- Analisis vectorial
  Editorial McGraw-Hill Colombia 1977

- Vectores y Tensores
  Editorial Limusa Mexico 1979
  Autor : Fred A. Hinchey

- Analisis vectorial
  Editorial C.E.C.S.A. México 1975
  Autor : Louis Brand

- Algebra vectorial
  Editorial Limusa México 1974
  Autor : L. Marder

UCAB

- Vectores y Tensores
  Editorial Universitaria de Buenos Aires 1977
  Autor : Luis A. Santalo

- Cónicas y Cuádricas (Un tratamiento Algebraico)
  Caracas 1981
  Autor : Roberto Escolar A.

CAPITULO 1

- ALGEBRA VECTORIAL
- ESPACIO VECTORIAL DE LOS SEGMENTOS ORIENTADOS.
- INDEPENDENCIA LINEAL BASES.
- ANGULO ENTRE VECTORES
- EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS TERNAS ORDENADAS.
- PRODUCTO ESCALAR O INTERIOR.
- PRODUCTO VECTORIAL.
- PRODUCTOS TRIPLES.

1.- ALGEBRA VECTORIAL

Definición :

Un espacio vectorial V, en un campo escalar K, está formado por un conjunto de elementos llamados vectores que satisfacen las siguientes propiedades:

A1- Dos vectores u,v determinan una suma única $u+v$

A2- La adición de vectores es asociativa

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

A3- La adición de vectores es conmutativa

$$u + v = v + u$$

A4- Existe un vector nulo O tal que

$$O + u = u + O = u$$

A5- Todo vector admite un negativo(inverso aditivo) tal que

$$u + z = 0$$

(se representa el inverso aditivo de u como $z = -u$)

M1- Un vector u en V y un escalar a en K determinan un producto au único en V

M2- La multiplicación por escalar es asociativa

$$(ab)u = a(bu)$$

M3- La multiplicación por escalar es distributiva de las dos maneras

$$a(u + v) = au + av \qquad (a + b)u = au + bu$$

M4- El elemento unitario n del campo (que llamaremos 1) tiene la propiedad

$$n u = u$$

Es de notar que V es cerrado con respecto a la suma y la multiplicación por escalares.

2-. EL ESPACIO VECTORIAL DE LOS SEGMENTOS ORIENTADOS

2.1 Vectores.

Definición: Llamaremos vector $\vec{v}$ a todo segmento orientado. El primero de los puntos se llama origen y el segundo extremo del vector.

En todo vector distinguiremos tres elementos:

a) La dirección, que viene representada por la recta que contiene al vector.

b) El sentido, que está dado por la orientación sobre la recta.

c) El módulo del vector, que es la longitud del segmento que lo define.

Si $\vec{v}$ es un vector de origen O y extremo P , entonces representaremos el módulo del vector $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ como

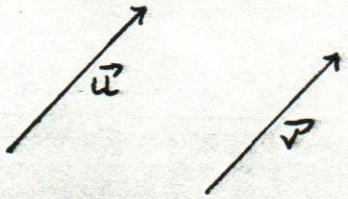
$$\text{mód } \vec{v} = |\vec{v}| = |\overrightarrow{OP}|$$

y será siempre una cantidad positiva.

Cuando el módulo es 0 entonces, se habla de vector nulo, aunque propiamente dicho, tal vector no existe por carecer de dirección y de sentido. Se conviene, entonces, en definir al vector nulo como el vector de módulo 0.

2.2 Igualdad de vectores.

Definición : Dos vectores ,$\vec{u}$ y $\vec{v}$, se dicen iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentido.



Se escribe $\vec{u} = \vec{v}$.

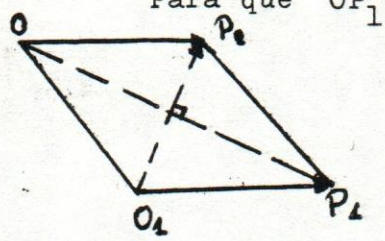
De esta manera todos los vectores iguales pueden trasladarse de forma tal que tengan el mismo origen O.

Observación : Algunos autores llaman a estos vectores equipolentes correspondiendo la definición anterior a la igualdad entre vectores libres.

Nosotros trabajaremos en todo momento con vectores libres, luego no haremos diferencia entre vectores equipolentes y vectores libres iguales.

Ejemplo 1 : Sea $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ y $\vec{u} = \overrightarrow{O_1P_1}$, dos vectores iguales, pero no coindidentes. Encontrar la condición necesaria para que los vectores $\overrightarrow{O_1P}$ y $\overrightarrow{OP_1}$ sean perpendiculares.

SOLUCION :



Para que $\overrightarrow{OP_1}$ sea perpendicular a $\overrightarrow{O_1P}$, debe cumplirse que el cuádrilátero de vértices OPP_1O_1 sea un rombo.

Es decir $\overrightarrow{OP_1}$ será perpendicular a $\overrightarrow{O_1P}$ si $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{O\,O_1}|$

2.3 Suma y resta de vectores

Definición de suma : Llamaremos suma geométrica de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a un vector $\vec{w}$, tal que tenga por origen y extremo respectivamente el extremo de la poligonal obtenida con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, cuando están colocados en forma consecutiva.

Observación:

a) Aplicando la definición podemos deducir inmediatamente las propiedades A1,A2,A3,A4,A5 de los espacios vectoriales

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$

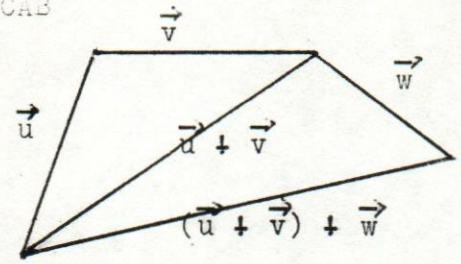
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

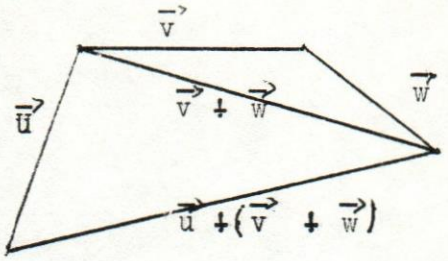
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$$

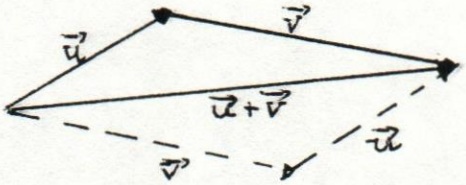
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{u}.$$

Aquí probaremos A3, quedando al lector las demás propiedades como ejercicio.





b) La suma de vectores concuerda con la ley del paralelogramo. Es decir si se construye un paralelogramo con los vectores sumandos como lados, entonces el vector suma coincide con una de las diagonales del paralelogramo.

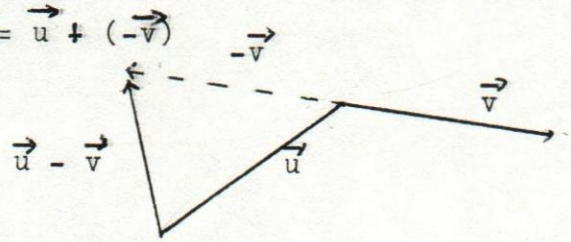


Definición de resta: Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se define resta de $\vec{u}$ con $\vec{v}$, y lo denotamos $\vec{u} - \vec{v}$, a un vector $\vec{w}$, tal que $\vec{u} = \vec{w} + \vec{v}$

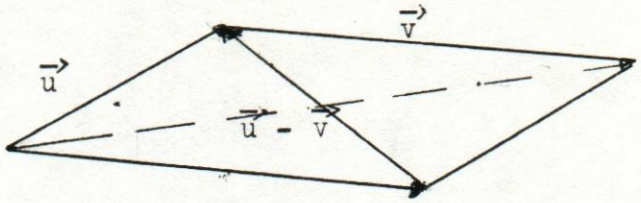
Observación:

a) Es de notar que la resta de vectores es equivalente a sumar el vector minuendo con el opuesto del sustraendo, así:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



b) La resta de dos vectores, siguiendo la ley del paralelogramo, coincide, al igual que la suma, con una de las diagonales del paralelogramo.



Como se puede observar el vector $\vec{u} - \vec{v}$ es el vector que va desde el extremo de $\vec{v}$ al extremo de $\vec{u}$ cuando coinciden los orígenes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Ejemplo 2: ¿Qué condición deben reunir $\vec{u}$ y $\vec{v}$, para que $|\vec{u} + \vec{v}|$ sea igual a $|\vec{u}| + |\vec{v}|$

SOLUCION :

a) Como en todo triángulo , la longitud de uno de sus lados es menor que la suma de los otros dos, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deben ser tales que $\vec{u} + \vec{v}$ coincida con la dirección de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir deben tener $\vec{u}$ y $\vec{v}$ la misma dirección. Pero no es suficiente, pues además para que el módulo de la suma sea igual a la suma de los módulos, siendo el módulo una cantidad positiva, es necesario que el sentido de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincidan.

Es decir $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ si siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos la direción de $\vec{u}$ y el sentido coinciden con la dirección y sentido de $\vec{v}$.

b) Si $\vec{u}$ o $\vec{v}$ coinciden con el vector nulo, entonces la igualdad es evidente.

2.4 Producto de vectores por escalares.

Defincíón: Sea $\vec{v}$ un vector y a un escalar perteneciente a R.

Se define $a\vec{v}$ a un vector $\vec{u}$, tal que :

- $|a\vec{v}| = |a|\,|\vec{v}|$, es decir valor absoluto de a por módulo de $\vec{v}$.
- Dirección de $a\vec{v}$, coincidente con la dirección de $\vec{v}$
- El sentido de $a\vec{v}$ es el de $\vec{v}$, si $a > 0$, y será el de $-\vec{v}$, si $a < 0$

Observación:

a) En la práctica, el decir que dos vectores son paralelos es equivalente a escribir la ecuación vectorial $a\vec{v} = \vec{u}$

b) Es evidente que esta definición permite comprobar las propiedades M1,M2,M3 y M4 de los espacios vectoriales, es decir

$$a\vec{v} = \vec{u} \text{ de } V$$

$$(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v} \quad y \quad (a + b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$$

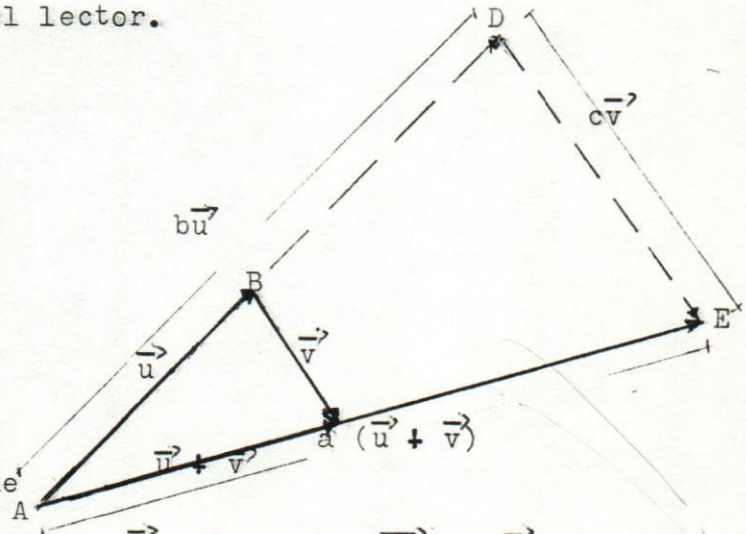
$$1\,\vec{v} = \vec{v}$$

Como en el caso de la suma probaremos M3, dejando las otras propiedades para que las pruebe el lector.

Ejercicio 3: Demuestre M3.

SOLUCION :

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores del espacio vectorial V y a un escalar de R. Por el extremo de $a(\vec{u} + \vec{v})$, tracemos una recta paralela a $\vec{v}$ hasta que se intercepte con la dirección de $\vec{u}$. El vector $\overrightarrow{AD} = b\,\vec{u}$ por ser



paralelo a $\vec{u}$ y $\overrightarrow{DE} = c\vec{v}$, por ser $\overrightarrow{DE}$ paralelo a $\vec{v}$, cumpliéndose de esta manera que $a(\vec{u} + \vec{v}) = b\vec{u} + c\vec{v}$

Los triángulos ABC y ADE , resultan ser semejantes por tener sus tres ángulos iguales, luego

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{DE}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AE}|}$$

es decir $$\frac{|\vec{u}|}{|b\,\vec{u}|} = \frac{|\vec{v}|}{|c\,\vec{v}|} = \frac{|\vec{u} + \vec{v}|}{|a(\vec{u} + \vec{v})|}$$

o $$\frac{|\vec{u}|}{|b||\vec{u}|} = \frac{|\vec{v}|}{|c||\vec{v}|} = \frac{|\vec{u} + \vec{v}|}{|a||\vec{u} + \vec{v}|}$$

y por cancelatividad

$$|b| = |c| = |a|$$

Siendo el sentido de los vectores resultantes del mismo sentido o de sentido contrario que el de sus respectivos originales.

Por consiguiente

$$b = c = a$$

y sustituyendo en

$$b\,\vec{u} + c\,\vec{v} = a(\vec{u} + \vec{v}) \text{ tenemos que}$$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

2.5 Vector unitario

Definición: Llamaremos vector unitario $U_{\vec{v}}$ de un vector $\vec{v}$, al vector de la misma dirección y sentido de $\vec{v}$, pero de módulo la unidad.

Veamos como se consigue el unitario de un vector $\vec{v}$:

- $U_{\vec{v}} = a\,\vec{v}$ y $a > 0$ por tener $\vec{v}$ y $U_{\vec{v}}$ la misma dirección y sentido
- $|U_{\vec{v}}| = a\,|\vec{v}|$ y como $|U_{\vec{v}}| = 1$, entonces

$$1 = a\,|\vec{v}| \quad o \quad a = \frac{1}{|\vec{v}|}$$

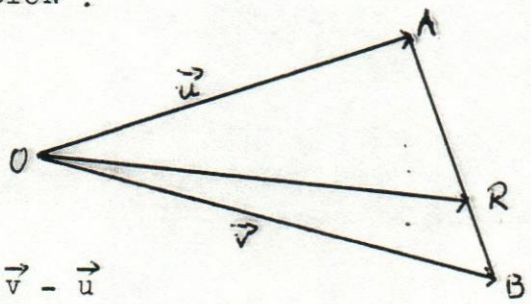
Por lo tanto

$$U_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Hasta aquí hemos porbado que el conjunto de los segmentos orientados junto con las operaciones suma y producto por escalares definidos, constituyen un espacio vectorial. A continuación desarrollaremos algunos ejemplos de aplicación a la demostración de teoremas geométricos y posteriormente, propondremos unos ejercicios.

Ejemplo 3: Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ vectores de posición de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Un punto R divide al vector $\overrightarrow{AB}$ en la relación m es a n. Encontrar el vector de posición de R, $\overrightarrow{OR}$, en función de m, n, $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SOLUCION :



$$\frac{|\overrightarrow{AR}|}{|\overrightarrow{RB}|} = \frac{m}{n}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{m}{n}\,\overrightarrow{RB} \qquad \overrightarrow{OR} = \vec{v} - \overrightarrow{RB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{RB} + \frac{m}{n}\overrightarrow{RB} = \overrightarrow{RB}\,\frac{(n+m)}{n}$$

Osea

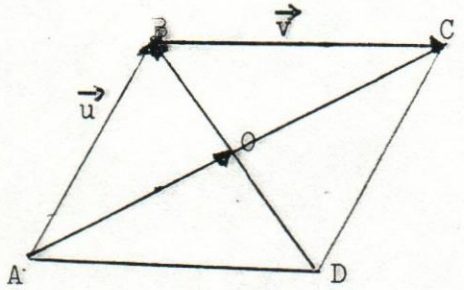
$$\overrightarrow{RB} = \frac{n\,\overrightarrow{AB}}{m+n} = \frac{n(\vec{v} - \vec{u})}{m+n}$$

Y en conclusión.

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{v} + n\vec{u}}{m+n}$$

Ejemplo 4 : Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

SOLUCION:



Sean ABCD los vértices de un paralelogramo. Sean $\overline{u} = \overline{AB}$ y $\overline{v} = \overline{BC}$.

$\overline{AO} = m\ \overline{AC}$ con $\overline{AC} = \overline{u} + \overline{v}$

$\overline{OB} = n\ \overline{DB}$ con $\overline{DB} = \overline{u} - \overline{v}$

Sumando las dos igualdades tenemos:

$\overline{AO} + \overline{OB} = m\ \overline{AC} + n\ \overline{OB}$.

Pero $\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{u}$ luego agrupando tenemos :

$$(1 - m - n)\ \overline{u} = (m - n)\ \overline{v}$$

y como $\overline{u}$ y $\overline{v}$ no son paralelos, entonces

$$1 - m - n = 0$$

$$m - n = 0$$

En conclusión $m = n = \frac{1}{2}$, es decir O es punto medio de las diagonales AC y BD.

EJERCICIOS .---

1. Probar que si m y n son dos escalares, tales que $m\vec{u} + n\vec{v} = 0$ entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos.

2. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no paralelos, tales que

$$\vec{w} = (m + n - 1)\vec{u} + (m + n)\vec{v}$$

$$\vec{z} = (m - n)\vec{u} + (2m - n + 1)\vec{v}$$

hallar m y n tales que $\vec{w} = 3\vec{z}$

3. Sean $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ vectores de posición de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$. ¿Qué condiciones deben cumplir $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para que O,A,B y C sean vértices de un paralelogramo? .

4. Si $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$ ¿Cómo son entre sí $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

5. En un paralelogramo ABCD, E y F son los puntos medios de BC y CD respectivamente. Demuestre que AF y AE trisectan la diagonal DB.

6. Pruébese que AF y AE, del ejercicio anterior, quedan a su vez divididos en la razón 2 por la diagonal DB.

7. Demuestre que si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores no paralelos del mismo plano, tales que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$, entonces $a=b=c=0$.

8. Sea ABC un triángulo y M y N puntos medios de BC y AB respectivamente. Tómese R en AM y T en CN, tales que

$$\frac{|\vec{AR}|}{|\vec{AM}|} = \frac{3}{4} \qquad y \qquad \frac{|\vec{CT}|}{|\vec{CN}|} = \frac{1}{3}$$

Sean $\vec{u} = \vec{AB}$ y $\vec{V} = \vec{AC}$.

Exprésense en función de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores:

$\vec{BA}$, $\vec{BC}$, $\vec{AN}$, $\vec{AM}$, $\vec{AR}$, $\vec{BR}$, $\vec{CN}$, $\vec{CT}$, $\vec{TM}$.

9. Sean ABCD vértices de un cuadrilátero y P,Q,R y S los puntos medios de AB, BC , CD y DA. Demuéstrese vectorialmente que PQRS es un paralelogramo.

10. Demuéstrese que las medianas de un triángulo se cortan en un punto que se encuentra a los dos tercios de la distancia del vértice a la base.

11. Sea O un punto del plano del triángulo ABC. Si P,Q y R son los puntos medios de AB, BC y CA, demostrar que

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

12. Demuestre que el incentro I de un triángulo ABC está dado por la relación

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{p} (a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB} + c \overrightarrow{OC})$$

siendo $p = a + b + c$ y a,b y c las longitudes de los lados.

3.- INDEPENDENCIA LINEAL BASES

Definición: Dados n vectores $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ del espacio vectorial V se dicen linealmente dependientes, si existen n escalares $a_1, a_2, \ldots a_n$ en R, no todos nulos tales que

$$a_1\vec{V}_1 + a_2\vec{V}_2 + \ldots + a_n\vec{V}_n = 0$$

Observación : Si los vectores no son linealmente dependientes, se dicen linealmente independientes.

Definición: Un conjunto de vectores linealmente independientes que engendren un espacio vectorial se llama base para ese espacio.

Ejemplo5 : Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores colineales, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

SOLUCION :

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son colineales , entonces existe a tal que

$\vec{v} = a\vec{u}$ y por lo tanto

$m\vec{u} + n\vec{v} = 0$ implica que

$m\vec{u} + n(a\vec{u}) = 0$ es decir

$(m + na)\vec{u} = 0$

lo cual es cierto solamente cuando

$$m + na = 0$$

o

$$m = -\frac{n}{a}$$

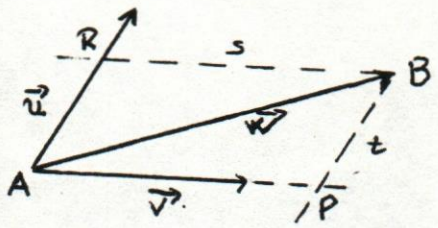
y por consiguiente $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.

Ejemplo 6 :Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no colineales, entonces todo vector $\vec{w}$ del mismo plano, es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$; por lo tanto $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman base de los vectores del plano que los contine.

SOLUCION :

Para que $\vec{w}$ sea linealmente dependiente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, deben haber escalares a,b o c distintos de 0 para los cuales se cumpla que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0$.

Por el extremo de $\vec{w}$, tal como se señala en la figura, tracemos dos rectas, t y s,



paralelas a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente. Estas dos rectas se cortarán con las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, pues t no es paralela a $\vec{v}$ y s no lo es a $\vec{u}$. Designemos por P y R los puntos de corte.

De esta manera $\overrightarrow{AR} = m\vec{u}$ y $\overrightarrow{AP} = n\vec{v}$

luego $\vec{w} = m\vec{u} + n\vec{v}$.

Sustituyendo en la ecuación $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ tenemos :

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c(m\vec{u} + n\vec{v}) = \vec{0}$$

o lo que es equivalente a

$$(a + cm)\vec{u} + (b + cn)\vec{v} = \vec{0}$$

y como u y v son linealmente independientes, entonces

$$a + cm = 0$$
$$b + cn = 0$$

por lo que

$$a = -cm \quad y \quad b = -cn$$

y en consecuencia $\vec{w}$ es linealmente dependiente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

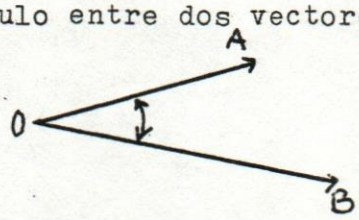
Por otra parte $\vec{w}$ es cualquier vector del plano que contiene a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, así que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son a la vez generadores de todos los vectores de dicho plano y constituyen base.

4.- ANGULO ENTRE DOS VECTORES

Definición: Llamaremos ángulo entre dos vectores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ al ángulo Boa que forman las direcciones que los contienen.

Observación:

a) El valor del ángulo entre dos vectores estará comprendido entre 0 y



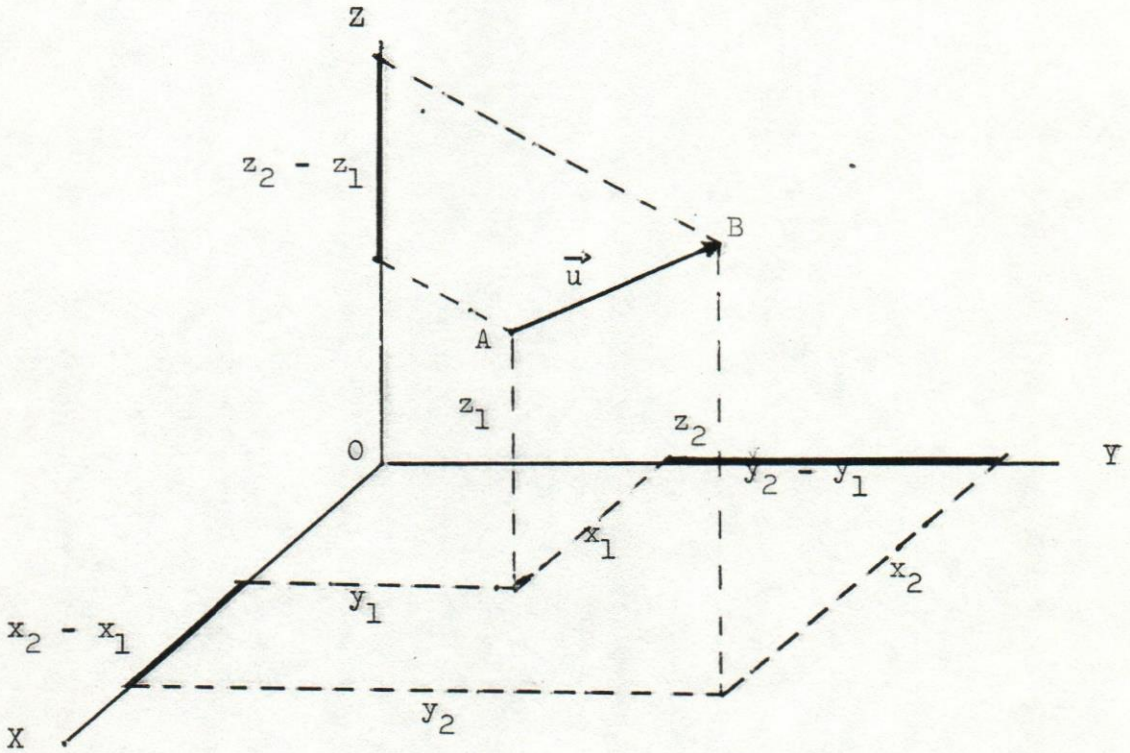
b) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son tres vectores no coplanares y mutuamente perpendiculares, formarán una base del espacio tridimensional. Esta base re-

cibe el nombre de ortogonal. Si además $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores unitarios la base se denomina "o r t o n o r m a l"

5.- EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS TERNAS ORDENADAS

5.1 Componentes de un vector.

Consideremos un sistema de coordenadas cartesinas ortogonales (x,y,z) con origen O. Orientemos el sistema de tal manera que si el eje X girara hacia el eje Y, un tornillo derecho que estuviera fijo al sistema, avanzaría en la dirección positiva del eje Z. El sistema así formado se dice sistema derecho.



Definición : Se llaman componentes de un vector $\vec{u}$, respecto del sistema (O;x,y,z) a las proyecciones de $\vec{u}$ sobre los ejes, osea a los números

$$a_1 = x_2 - x_1 \quad , \quad a_2 = y_2 - y_1 \quad , \quad a_3 = z_2 - z_1$$

Observación :

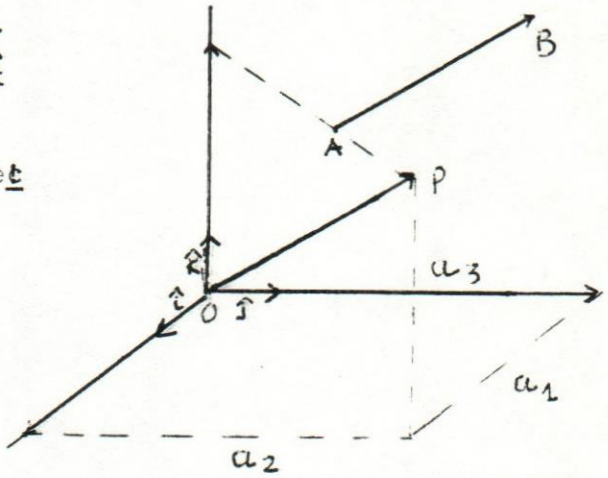
a) Como nuestro trabajo se realizará con vectores libres, entonces al vector $\overrightarrow{AB}$ y a todos sus iguales los sustituiremos por su clase

de equivalencia, que será un vector de origen O y extremo (a_1,a_2,a_3)

b) Si sobre los ejes X,Y,Z tomamos una base ortonormal, que representaremos por los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ respectivamente, entonces tenemos otra nueva forma de designar al vector $\vec{u}$ en función de ellos. Así:

$$\vec{u} = a_1\,\hat{i} + a_2\,\hat{j} + a_3\,\hat{k}$$

Los esclares a_1,a_2 y a_3 se dicen componentes de $\vec{u}$ y representamos y denotamos a $\vec{u} = (a_1,a_2,a_3)$.



5.2 Igualdad de vectores.

Definición : Dos vectores $\vec{u} = (a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{v} = (b_1,b_2,b_3)$ son iguales si sus componentes respectivas son iguales.

Observación :

La ecuación vectorial $\vec{u} = \vec{v}$ tiene el mismo significado que la terna de ecuaciones $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $a_3 = b_3$

5.3 Suma y resta de vectores.

Definición : Llamaremos suma de $\vec{u} = (a_1,a_2,a_3)$ con $\vec{v} = (b_1,b_2,b_3)$ al vector $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2 , a_3 + b_3)$, cuyas componentes son la suma de las componentes respectivas de cada vector.

Observación :

a) El vector nulo $\vec{0}$ tiene sus componentes todas 0 $\vec{0} = (0,0,0)$

b) El vector opuesto de $\vec{u} = (a_1,a_2,a_3)$ será $-\vec{u} = (-a_1,-a_2,-a_3)$

Queda como ejercicio para el lector el demostrar las propiedades A1, A2,A3,A4, A5 de los espacios vectoriales.

c) La resta por componentes se define como la suma del vector minuendo con el opuesto del sustraendo.

Así: $\vec{u} - \vec{v} = (a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$.

5.4 Producto por escalares.

Definición : Si $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector y m un escalar perteneciente a los números reales, llamaremos vector $m\vec{u}$, al vector de componentes (ma_1, ma_2, ma_3), donde las componentes se obtienen al multiplicar cada componente de $\vec{u}$ por el escalar m.

Observación:

a) El unitario de un vector $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ estará dado por la expresión :

$$U_{\vec{v}} = \left(\frac{a_1}{|\vec{v}|}, \frac{a_2}{|\vec{v}|}, \frac{a_3}{|\vec{v}|} \right)$$

¿sabría dar una justificación?.

b) Es fácil observar que la multiplicación por escalares satisface las propiedades M1, M2, M3 y M4 de los espacios vectoriales, por consiguiente las ternas ordenadas asociadas a las operaciones de suma y producto por escalares definidos, constituyen un espacio vectorial.

Ejemplo 7 : Sean $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (0,1,1)$ y $\vec{w} = (2,1,1)$ y $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$

a) Halle las componentes de $\vec{z}$.

b) Halle a,b,c no todos nulos, tales que $\vec{z} = \vec{0}$

SOLUCION :

a) $a\vec{u} = (a,a,a)$ $\quad b\vec{v} = (0,b,b)$ $\quad c\vec{w} = (2c,c,c)$

luego

$$\vec{z} = (a + 2c,\ a + b + c,\ a + b + c)$$

b) $\vec{z}$ será el vector $\vec{0}$ sólo cuando todas sus componentes sean ceros.

Por consiguiente de a) podemos deducir que

$$a + 2c = 0$$
$$a + b + c = 0$$
$$a + b + c = 0$$

Evidentemente que una de las soluciones es la trivial, es decir

$$a = b = c = 0$$

Pero además al resolver el sistema obtenemos

$$b = -\tfrac{1}{2}\,a$$

$$c = -\tfrac{1}{2}\,a$$

Es decir $\vec{z} = \vec{0}$ si $b=c=-\frac{1}{2}\,a$ para cualquier a en R

Una solución particular será

$$\vec{z} = (\,2,-1,-1)$$

¿Por qué hay más de una solución?.

EJERCICIOS .---

13. Demuestre que el módulo de $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ viene dado por la expresión $|\vec{v}| = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

14. Sea $\vec{v} = (1,2,3)$ y $\vec{u} = (-1,1,2)$
    a) Encuentre $\vec{w}$ tal que $\vec{w} = 3\vec{v} + 2\vec{u}$
    b) Encuentre $\vec{w}$ tal que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ resulten linealmente independientes.

15. Sean $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (-2,1,4)$ y $\vec{w} = (0,2,3)$
    a) Pruébese que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ forman una base de R_3
    b) Exprese a todos los vectores $\vec{z}$ de R3, en función de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

16. Si $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$ son vectores de V_3, demostrar que son linealmente independientes si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

17. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores linealmente independientes de V_n
    a) $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} + \vec{w}$, ¿son linealmente independientes?
    b) $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{u} + \vec{w}$, ¿ son vectores linealmente independientes?.

18. Sean $\vec{u} = (1,2,-1)$, $\vec{v} = (1,1,1)$ y $\vec{w} = (-2,3,1)$, encuentre $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $2\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{v}$; $2(\frac{1}{2}\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w})$

19. Sea $\vec{u} = (-1,2,4)$. Encuentre los cosenos de los ángulos formados por $\vec{u}$ y los ejes coordenados.

20. Hallar las componentes del vector de módulo 2 situado en el plano XZ que forma un ángulo de 60° con el eje Z.

21. Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean paralelos, es que sus componentes sean proporcionales.

22. Demuestre que el ángulo α entre dos vectores $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ viene dado por

$$\cos.\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|u| \; |v|}$$

6.- PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

6.1 Definición: Llamaremos producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y lo denotaremos por $\vec{u}.\vec{v}$, al escalar que se obtiene al multiplicar los módulos de ambos vectores por el coseno del ángulo que forman

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}| \cos\theta$$

Propiedades:

Para todos los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ de V_n y todo escalar a de R, se cumple que

E1 $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

E2 $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

E3 $a(\vec{u}.\vec{v}) = (a\vec{u}).\vec{v}$

E4 $\vec{u}.\vec{u} > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$

E5 $\vec{u}.\vec{u} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$

Probaremos aquí las propiedades E4 y E5, quedando E1,E2 y E3 como ejercicio para el lector.

Ejemplo 8 : Dado el vector $\vec{u}$, pruébese que $\vec{u}.\vec{u} > 0$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{u}.\vec{u}=0$ si $\vec{u} = \vec{0}$.

SOLUCION :

Por la definición sabemos que

$$\vec{u}\ .\ \vec{u} = |\vec{u}|\ |\vec{u}| \cos 0$$

pues todo vector forma un ángulo de 0° consigo mismo.

por lo tanto

$$\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2 \text{ y como}$$

$|\vec{u}| > 0$ siempre que $\vec{u} \neq \vec{0}$ o es 0 si $\vec{u}=\vec{0}$

entonces queda probado que

$$\vec{u}\ .\ \vec{u} > 0 \quad \text{si } \vec{u} \neq \vec{0}$$

$$\vec{u}\ .\ \vec{u} = 0 \quad \text{si } \vec{u} = \vec{0}$$

Observación:

a) En el ejemplo 8 comprobamos que $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$, por lo que podríamos definir módulo de un vector $\vec{u}$ como

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$$

b) De la definción de producto escalar podemos inferir que el ángulo entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puede expresarse como

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = U_{\vec{u}}\cdot U_{\vec{v}}$$

c) Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ serán ortogonales si $\vec{u}.\vec{v} = 0$, ya que el ángulo entre ellos es 90°, pero si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ no necesariamente son ortogonales, pues $\vec{u}$ o $\vec{v}$ pueden ser el vector nulo.

d) Para los vectores unitarios i,j,k se cumple :

- $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$
- $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{j} = 0$

6.2 Producto escalar de dos vectores expresados por sus componentes

Sean $\vec{u} = (a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{v} = (b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{u}.\vec{v} = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

nos hemos basado en las siguientes propiedades :

E2 del producto escalar y apartado d de las observaciones.

Observación:

a) Si denotamos por α, β y γ a los ángulos formados por un vector $\vec{u} = (a_1,a_2,a_3)$ y los vectores $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$, tendremos:

$$\cos\alpha = \frac{\hat{i}.\vec{u}}{|\hat{i}||\vec{u}|} = \frac{a_1}{|\vec{u}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\hat{j}.\vec{u}}{|\hat{j}||\vec{u}|} = \frac{a_2}{|\vec{u}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}.\vec{u}}{|\hat{k}||\vec{u}|} = \frac{a_3}{|\vec{u}|}$$

llamados cosenos directores del vector $\vec{u}$

b)El vector unitario de un vector $\vec{u}$, $U_{\vec{u}}$, estará formado por los cosenos directores de $\vec{u}$. Así :

$$U_{\vec{u}} = \left(\frac{a_1}{|\vec{u}|}, \frac{a_2}{|\vec{u}|}, \frac{a_3}{|\vec{u}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

c) para todo vector $\vec{u}$ se cumple que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

d) El módulo de un vector $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ podremos expresarlo, de acuerdo con la observación a) del apartado 6.1, como

$$|\vec{u}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Ejemplo 9 : Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de V_n, entonces se cumple que $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}|$. (Esta desigualdad, recibe el nombre de desigualdad de CAUCHY-SCHWARZ). Demuéstrese.

SOLUCIÓN :

- Si $\vec{u}$ o $\vec{v}$ son el vector nulo, la igualdad es evidente
- Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos, y m un escalar cualquiera.

Entonces

$$(\vec{u} - m\vec{v})^2 = (\vec{u} - m\vec{v}).(\vec{u} - m\vec{v}) =$$
$$= \vec{u}.\vec{u} - 2m\,\vec{u}.\vec{v} + m^2\,\vec{v}.\vec{v}$$

Pero $(\vec{u} - m\vec{v})^2 > 0$ para todo m en R

Por lo tanto

$$\vec{u}.\vec{u} - 2m\,\vec{u}.\vec{v} + m^2\,\vec{v}.\vec{v} > 0$$

Hagamos $m = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{v}.\vec{v}}$ y sustituyamos,

$$\vec{u}.\vec{u} - 2\,\frac{(\vec{u}.\vec{v})^2}{(\vec{v}.\vec{v})} + \frac{(\vec{u}.\vec{v})^2}{(\vec{v}.\vec{v})^2}\,\vec{v}.\vec{v} > 0$$

Multiplicando por $\vec{v}.\vec{v}$ implica que

$$(\vec{u}.\vec{u})(\vec{v}.\vec{v}) - (\vec{u}.\vec{v})^2 > 0$$

Por lo tanto

$$(\vec{u}.\vec{u})(\vec{v}.\vec{v}) > (\vec{u}.\vec{v})^2$$

$$\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}|\ |\vec{v}|$$

6.3 Desigualdad triangular o de MINKOWSKI

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores de V_n, entonces se cumple que

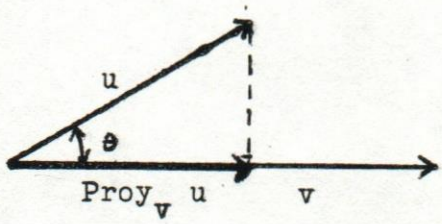
$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

Su demostración queda como ejercicio para el lector.

6.4 Proyección de un vector $\vec{u}$ sobre otro vector $\vec{v}$.

Definición: Llamaremos proyección de un vector $\vec{u}$ sobre otro $\vec{v}$, y lo denotaremos como $\text{Proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$, al vector de la dirección de $\vec{v}$ que tiene por módulo el producto escalar de $\vec{u}$ con $\vec{v}$ dividido por el módulo de $\vec{v}$.

$$\text{Proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|}\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$



La proyección de un vector sobre otro viene siendo una interesante interpretación geométrica del producto escalar.

Es de notar que $\left|\text{Proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}\right| = |\vec{u}|\cos\theta$

Para terminar esta sección haremos unos ejemplos de aplicación a la geometría y a la trigonometría, con el fin de que podamos darnos cuenta de la gran aplicabilidad del producto escalar.

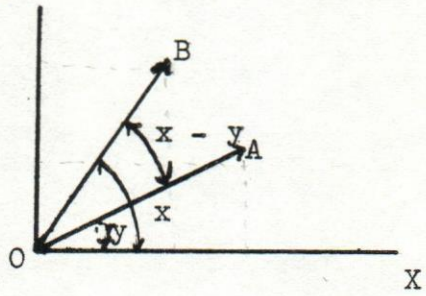
Ejemplo 10 : Demuestre que $\text{Cos}\,(x - y) = \text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,y + \text{Sen}\,x\,\text{Sen}\,y$

Solución :

Sea $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$.

Entonces $\vec{OA} = \text{Cos}\,y\,\hat{i} + \text{Sen}\,y\,\hat{j}$

$\vec{OB} = \text{Cos}\,x\,\hat{i} + \text{Sen}\,x\,\hat{j}$



De donde se deduce que

$\vec{OA}.\vec{OB} = \text{Cos}\,y\,\text{Cos}\,x + \text{Sen}\,y\,\text{Sen}\,x$

Pero $\vec{OA}.\vec{OB} = |\vec{OA}|\,|\vec{OB}|\,\text{Cos}\,(x - y)$. Luego, sustituyendo queda que

$$\text{Cos}\,(x - y) = \text{Cos}\,x\,\text{Cos}\,y + \text{Sen}\,x\,\text{Sen}\,y$$

Podemos darnos cuenta que ya podemos dar inicio a la formulación trigonométrica completa.

NOTA: En adelante los vectores i,j,k los pondremos sin sombrilla.

Ejemplo 11 : Sean $|\vec{u} + \vec{v}| = m$, $|\vec{u}| = u$ y $|\vec{v}| = v$
Hallar el módulo de $\vec{u}$ menos $\vec{v}$, $|\vec{u} - \vec{v}|$

SOLUCION :

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Restando miembro a miembro las dos igualdades tenemos :

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2\,|\vec{u}|^2 + 2|\,\vec{v}|^2$$

En conclusión

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{\frac{2\,u^2 + 2\,v^2}{m}}$$

¿Qué relación deben cumplir u,v y m para que el problema tenga solución?.

Ejemplo 12 : Si $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ y $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $|\vec{w}| = 7$, encontrar el ángulo θ entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

SOLUCION :

$$-\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$(-\vec{w}).(-\vec{w}) = \vec{u}.\vec{u} + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{v}$$

Por lo tanto

$$\vec{u}.\vec{v} = \tfrac{1}{2}\,(\,|\vec{w}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2\,)$$

Y entonces

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}\,\frac{|\vec{w}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}$$

Sustituyendo valores tenemos :

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}\,\frac{49 - 9 - 25}{15} = \tfrac{1}{2}$$

Por lo que

$\theta = 60°$ (interprete geométricamente el problema)

Ejemplo 13 : Demuestre que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Solución :

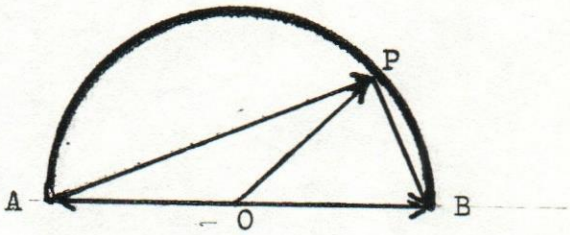
Sean A,B extremos de un diámetro de una circunferencia

Sea p un punto de la circunferencia

El vector $\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$

$\vec{PB} = \vec{OB} - \vec{OP}$

$\vec{AP}.\vec{PB} = (\vec{OP} - \vec{OA}).(\vec{OB} - \vec{OP})$



Como $\vec{OB} = - \vec{OA}$, tenemos

$\vec{AP}.\vec{PB} = (\vec{OP} + \vec{OB}).(\vec{OB} - \vec{OP}) =$

$= \vec{OB}.\vec{OB} - \vec{OP}.\vec{OP} = 0$

ya que $|\vec{OB}| = |\vec{OP}| = R$

Como ninguno de los vectores son nulos, entonces $\vec{AP}$ es ortogonal a $\vec{PB}$ y el ángulo entre $\vec{AP}$ y $\vec{BP}$ es recto.

Conclusión todo ángulo APB inscrito en una semicircunferencia es recto.

EJERCICIOS .---

23. Sean $\vec{u} = (3,4,2)$; $\vec{v} = (o,1,3)$ y $\vec{w} = (-2,1,-4)$
Encontrar:
$\vec{u}.\vec{v}$; $|\vec{u}|$; $(2\vec{u} + 3\vec{v}).\vec{w}$; $|\vec{v} - \vec{w}|$; $\vec{u}.\vec{w}$; Angulo entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{w}$

24. Demuestre el teorema de los cosenos, empleando métodos vectoriales.

25. Descomponer un vector dado $\vec{u}$ en suma de otros dos $\vec{v}$ y $\vec{w}$, tales que $\vec{v}$ sea paralelo al vector dado $\vec{u}$ y $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u}$. Se pide solución geométrica y vectorial.

26. Se sabe que $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$, encontrar $\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{w}+\vec{w}.\vec{u}$

27. Demostrar la propiedad distributiva del producto escalar.

28. Si $|\vec{u}| = u$ y $|\vec{v}| = v$, probar que el vector $\vec{w}$ que satisface la ecuación

$$\vec{w} = \frac{u\,\vec{v} + v\,\vec{u}}{u + v}$$

tiene dirección la de la bisectriz del ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$

29. Encuentre un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{u} = (8,2,-1)$ y $\vec{v} = (3,-1,-3)$.

30. Pruebe la identidad

$$\vec{u}.\vec{v} = \tfrac{1}{2}\left(|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2\right)$$

31. Demuestre que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

32. Demuestre que las alturas de un triángulo se cortan en un punto.

33. Demuestre que las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto.

34. A partir de la desigualdad de Schwarz, demuéstrese que para todas las f y g, se cumple que

$$\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)$$

7.- PRODUCTO VECTORIAL

7.1 Supongamos un sistema derecho, de acuerdo con la definición dada en 5.1.

Definición : Llamaremos producto vectorial o externo de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ al vector $\vec{w}$ que satisface las siguientes condiciones :

- $|\vec{w}| = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ \text{Sen}\ \theta$ siendo θ el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- La dirección de $\vec{w}$ es perpendicular al plano definido por $\vec{u}$ y $\vec{v}$
- El sentido de $\vec{w}$ es tal que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ formen un sistema derecho.

Denotaremos el producto vectorial de $\vec{u}$ con $\vec{v}$ así :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$$

Propiedades :

Para todos los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de V_n y todo escalar a de R, se cumple que

P1 $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

P2 $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

P3 $a(\vec{u} \times \vec{v}) = (a\vec{u}) \times \vec{v}$

P4 $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2\ |\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$ Identidad de Legrange

P5 $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes

Al igual que en el producto escalar demostraremos las propiedades P4 y P5, dejando las otras como ejercicio.

Ejemplo 14: Demuestre P4 y P5 .

Demostración de P4 .

SOLUCIÓN :

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2\ |\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$$

De acuerdo a la definición

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2\ |\vec{v}|^2\ \text{sen}^2\theta$$ siendo θ el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2\ |\vec{v}|^2\ (1 - \cos^2\theta) =$$
$$= |\vec{u}|^2\ |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2\ \text{Cos}^2\theta =$$
$$= |\vec{u}|^2\ |\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$$

Demostración de P5

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} = a\vec{v} \text{ con a en R}$$

Si $\vec{u}$ o $\vec{v}$ son el vector nulo la identidad es evidente.

-Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos :

- Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, entonces

  $|\vec{u} \times \vec{v}| = 0$, es decir

  $|\vec{u}|\ |\vec{v}| \operatorname{Sen} \theta = 0$

  y como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos, entonces

  $\operatorname{Sen} \theta = 0$ y por lo tanto $\theta = 0$ o $\theta = \pi$

  y entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dependientes, por lo que existe a en R tal que

  $\vec{u} = a\vec{v}$

- Si $\vec{u} = a\vec{v}$, entonces

  $\vec{u} \times \vec{v} = (a\vec{v}) \times \vec{v} = a(\vec{v} \times \vec{v}) = \vec{0}$ por ser $|\vec{v} \times \vec{v}| = 0$

En conclusión :

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes,

Observación :

a) Para cada par de vectores se cumple que

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$
$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$

b) Para los vectores i,j,k se cumple que

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$
$$i \times j = -j \times i = k$$
$$j \times k = -k \times j = i$$
$$k \times i = -i \times k = j$$

7.2 El producto vectorial de dos vectores por las componentes

Sean $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$; el producto vectorial de $\vec{u}$ con $\vec{v}$ será :

$$(\vec{u} \times \vec{v}) = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) =$$
$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k =$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (a_2b_3 - a_3b_2 \,,\, a_3b_1 - a_1b_3 \,,\, a_1b_2 - a_2b_1)$$

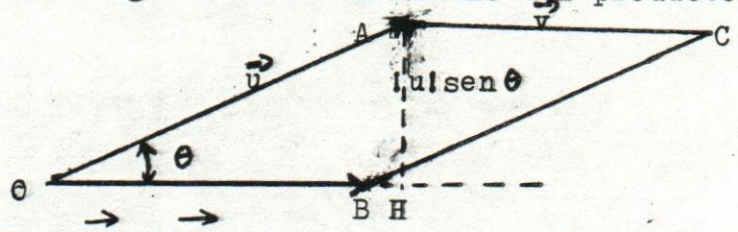
Hemos aplicado sucesivamente distributividad del producto vectorial asociatividad de la suma de vectores y la observación b) del apartado 7.1

Observación : El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}=(a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{v}(b_1,b_2,b_3)$, puede expresarse mediante el desarrollo del determinante siguiente :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Pruébense las propiedades P1 a P5 con las propiedades de los determinantes.

7.3 Interpretación geométrica del módulo del producto vectorial.



Sean $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ vectores de posición de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ respectivamente. Entonces

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \text{ sen}$$

siendo el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Sean OABC vértices de un paralelogramo de lados $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

El área de OABC viene expresado por

$$A = |\vec{OB}|\,|\vec{AH}|$$

pero $\quad |\vec{OB}| = |\vec{v}| \quad$ y $\quad |\vec{AH}| = |\vec{u}| \text{ sen}$

luegó $\quad A = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \text{ sen} = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Ejemplo 15 : Demuestre el teorema de los senos.

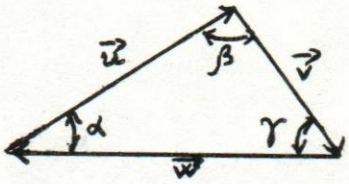
SOLUCION :

Sean $\vec{u}$ $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores tales que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{w} \times \vec{u}|$

(Justifique lo anterior)

Sean α , β , γ los ángulos entre los vectores, tal como se señalan en la figura.



Entonces :

$|\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}(\pi - \beta) = |\vec{v}||\vec{w}| \operatorname{Sen}(\pi - \gamma) = |\vec{w}||\vec{u}| \operatorname{sen}(\pi - \alpha)$

Es decir :

$$|\vec{u}| \operatorname{sen}\beta = |\vec{w}| \operatorname{sen}\gamma \quad \text{y} \quad |\vec{v}| \operatorname{sen}\beta = |\vec{w}| \operatorname{sen}\alpha$$

por lo tanto

$$\frac{|\vec{u}|}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{|\vec{v}|}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{|\vec{w}|}{\operatorname{sen}\beta}$$

Ejemplo 16 : Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(-2,3,-2)$. Encontrar las componentes de un vector $\vec{w}$, perpendicular al plano definido por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SOLUCION :

Como el sentido del vector respuesta del producto vectorial, es perpendicular a cada uno de los vectores que se multiplican, entonces bastará multiplicar vectorialmente $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para obtener el vector pedido.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \end{matrix} = -13i - 4j + 7k = (-13,-4,7)$$

Ejemplo 17: Demostrar que si $\vec{u} \neq 0$ y $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ y $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$, entonces $\vec{v} = \vec{w}$.

SOLUCION :

De $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ se deduce que $\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$ por lo que $\vec{v} - \vec{w}$ es paralelo a $\vec{u}$ o $\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$

De $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ se deduce que $\vec{u}.(\vec{v} - \vec{w}) = 0$ por lo que $\vec{v} - \vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ o $\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$

Por lo tanto $\vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$ y $\vec{v} = \vec{w}$.

Ejercicios .---

35. Qué condiciones deben cumplir los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ para que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

36. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de V_3 y linealmente independientes y $\vec{w} = (\vec{v} \times \vec{u}) - \vec{v}$. Demuestre que $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v} + \vec{w}$

37. Tres vértices de un paralelogramo son los puntos A(1,0,1), B(-1,1,1) y C(2,-1,2). Halle todos los puntos D que pueden ser cuarto vértice y calcule el área de esta familia de paralelogramos.

38. Demostrar que $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|$, si y sólo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

39. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes, entonces

a) $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ son linealmente independientes.

b) $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + (\vec{u} \times \vec{v})$ y $\vec{v} + (\vec{u} \times \vec{v})$ son linealmente independientes.

c) $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$ son linealmente independientes.

40. Si $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, pruebe que

$$\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = 3\,\vec{u} \times \vec{v}$$

8.- PRODUCTOS TRIPLES

8.1 Producto triple escalar o producto mixto.

Los productos escalar y vectorial pueden combinarse para dar origen a un nuevo producto, llamado producto triple escalar o mixto.

Definición : Llamaremos producto mixto de tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, al escalar que resulta de multiplicar escalarmente uno de los vectores por el producto vectorial de los otros dos. Lo denotamos así:

$$a = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Observación :

Como $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ solamente tiene sentido si se realiza primero el producto vectorial, entonces no es necesario escribir el paréntesis, es decir

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$$

Propiedades :

Dados tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de V_n, se cumple que

T1 $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = - \vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w}$

T2 $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v}$

Demostración de T1 :

Sabemos que $\vec{u} \cdot \vec{u} \times \vec{w} = 0$

luego $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = 0$

Por lo que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}) =$

$$= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) =$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{v} \times \vec{w} =$$

$$= \vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = 0$$

Concluyendo : $\vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{w} = - \vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$ (1)

¿Sabría decir qué propiedades hemos aplicado en forma consecutiva?.

Demostración de T2 :

$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = - \vec{u} \cdot \vec{w} \times \vec{v}$ por P1 de 7.1 (2)

$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = - \vec{w} \cdot \vec{v} \times \vec{u}$ Pot T1 y P1 (3)

De (1) , (2) y (3) obtenemos :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v}$$

Observación :

Como podemos inferir de T2 la permutación cíclica de los tres vectores, no altera el producto triple. Por consiguiente el producto triple de $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ lo escribiremos así :

$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = [\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]$ sin indicar el punto del producto escalar ni la x del producto vectorial, ya que no hay ambigüedades, pues sólo depende del orden de los vectores.

8.2 El producto triple escalar por las componentes de los vectores

Sean $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$.; $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$

Entonces

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \times (c_1, c_2, c_3) =$$

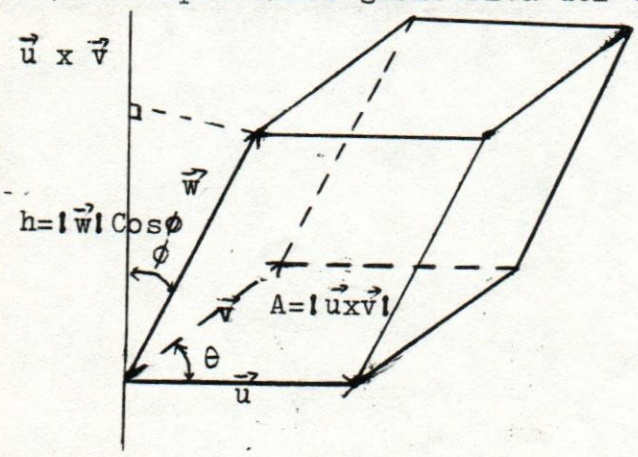
$$= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - c_2b_1)$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - c_2b_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

donde hemos aplicado respectivamente , definición de producto vectorial, definición de producto escalar y desarrollo de determinante de orden tres por sus menores complementarios de una fila.

8.2 Interpretación geométrica del triple producto escalar.



Construyamos con los vectores $\vec{u}$ $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de origen común un paralelepípedo. Calculemos su volumen. La altura ,h, del paralelepípedo viene representada por la proyección de uno de los vectores sobre la perpendicular común a los otros dos. $h = |\vec{w}| \cos\phi$

El área de la base A de acuerdo con la interpretación geométrica del producto vectorial es $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Entonces el volumen V del paralelepípedo será :

$$V = A \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v}| \, |\text{Proy}_{\vec{u}\times\vec{v}} \vec{w}| =$$

$$= |\vec{u} \times \vec{v}| \, |\vec{w}| \cos \phi =$$

$$\leq (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

$$\text{con } 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

Es decir, el volumen del paralélepípedo formado con u,v y w es equivalente al producto triple escalar , siempre que ϕ se encuentre entre 0° y 90°; en caso de que ϕ se encuentre en el intervalo de 90° a 180° , su valor sería opuesto al del volumen Por último si ϕ es 90° entonces el paralelepípedo degenera y el volumen es 0.

Ejemplo 18 :Dados tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$. Demuestre que son linealmente independientes si y sólo si $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = 0$

SOLUCION :

- Si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son dependientes.

Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son dependientes, entonces $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$

y por lo tanto $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = 0$

Si v y w son independientes,entonces $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ con a, b o c distintos de 0, ya que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son dependientes y por lo tanto $\vec{u}$ es conbinación de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Sea $\vec{u} = d\vec{v} + e\vec{w}$

multipliquemos ambos miembros escalarmente por $\vec{v} \times \vec{w}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = (d\vec{v}) \cdot \vec{v} \times \vec{w} + (e\vec{w}) \cdot \vec{v} \times \vec{w} =$$

$$= d\,\vec{v} \cdot \vec{v} \times \vec{w} + c\,\vec{w} \cdot \vec{v} \times \vec{w} =$$

$$= d\,\vec{v} \times \vec{v} \cdot \vec{w} + c\,\vec{v} \times \vec{w} \cdot \vec{w} =$$

$$= d\,\vec{v} \times \vec{v} \cdot \vec{w} + c\,\vec{v} \cdot \vec{w} \times \vec{w} = 0$$

- Si $\vec{u}$, $\vec{v} \times \vec{w} = 0$

Si uno de ellos es el vector nulo, la igualdad es evidente y serían linealmente dependientes.

En caso contrario o $\vec{u}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$ son perpendiculares o $\vec{v} \times \vec{w}$ es $\vec{0}$. Si ocurre que $\vec{v} \times \vec{w}$ es $\vec{0}$ entonces $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son dependientes y por lo tanto $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ también lo son . (Esto lo debió demostrar usted en el ejercicio 39 de la sección anterior)

Supongamos que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son independientes, entonces $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$ también son independientes, por lo tanto forman base de V_3 y engendrarán a $\vec{u}$ que es un vector de V_3 .

Es decir :

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} + c(\vec{v} \times \vec{w})$$

Multiplicando escalarmente por $\vec{v}\times\vec{w}$ a la identidad anterior tendremos

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = a\,\vec{v} \cdot \vec{v} \times \vec{w} + b\,\vec{w} \cdot \vec{v} \times \vec{w} + c\,(\vec{v}\times\vec{w}) \cdot \vec{v} \times \vec{w}$$

y como $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = 0$

entonces $c = 0$ (explique la razón)

y por tanto

$\vec{u} = a\,\vec{v} + b\,\vec{w}$, es decir $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

8.3 El triple producto vectorial

Definición : Llamaremos triple producto vectorial de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, al doble producto vectorial de $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

Observación :

a) Es evidente que en el triple producto vectorial el paréntesis es fundamental pues el resultado es un vector y por lo general serán distintos.

b) El triple producto vectorial $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{w})\vec{u}$

Daremos algunos lineamientos para demostrar lo anterior.

El vector $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u} \times \vec{v}$

por lo tanto es coplanal con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y entonces podemos escribir

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$$

pero $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ es también perpendicular a $\vec{w}$, entonces

$$a\ \vec{u}.\vec{w} + b\ \vec{v}\ .\ \vec{w} = \vec{0}$$

de donde se deduce que a y b deben ser de la forma

$$a = -\ m\ \vec{v}\ .\ \vec{w} \quad y \quad b = m\ \vec{u}\ .\ \vec{w}$$

donde m es un parámetro arbitrario.

Luego $$(\vec{u}x\vec{v})x\vec{w} = m\ \ (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}.\vec{w})\vec{u}$$

Para calcular m hagamos lo siguiente :

sea $\vec{u} = a_1 i$, $\vec{v} = b_1 i + b_2 j$, $\vec{w} = c_1 i + c_2 j + c_3 k$

Sustituyendo y despejando m de la identidad, llegamos a la conclusión de que m = 1

Por lo tanto

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u}\ .\ \vec{w})\ \vec{v} - (\vec{v}\ .\ \vec{w})\ \vec{u}$$

Observación :

Si nos detemos un poco a observar la identidad podemos dar una regla que nos permita recordarla fácilmente.

Es así : El vector que está colocado en el centro $\vec{v}$, por el producto escalar de los otros dos vectores , $\vec{u}$ y $\vec{w}$. Menos el otro vector del paréntesis ,$\vec{u}$, por el producto escalar de los otros dos vectores restantes , $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Esta fórmula tiene gran aplicación en el análisis vectorial y en el desarrollo de otros productos más complicados.

Ejemplo 19 :Demuestre que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{z}) = \left[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{z}\right] \vec{w} - \left[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}\right] \vec{z}$

SOLUCION :

$$(\vec{u} \times \vec{v})x(\vec{w}x\vec{z}) = ((\vec{u}x\vec{v}).\vec{z})\ \vec{w} - ((\vec{u}x\vec{v}).\vec{w})\ \vec{z} =$$
$$= \left[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{z}\right]\vec{w} - \left[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}\right]\vec{z}\ .$$

Ejercicios . ---

41. Demuestre que

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{z}) = (\vec{u}.\vec{w})(\vec{v}.\vec{z}) - (\vec{v}.\vec{w})(\vec{u}.\vec{z})$$

42. Demuestre que

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{u}) + \vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$$

43. Demuestre que

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{w} \times \vec{u}) = [\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]^2$$

44. Demuestre que si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{z}$ son coplanarios, entonces

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{z}) = \vec{0}$$

¿Es cierto el recíproco?.

45. Sean $\vec{u} = (5,0,1)$; $\vec{v} = (3,-2,0)$ y $\vec{w} = (-4,1,x)$

Determine el valor de x para que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes.

46. Si $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ forman una base de V_3 y $\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, demuestre que

$$a = \frac{[\vec{z}\ \vec{v}\ \vec{w}]}{[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]} \quad ; \quad b = \frac{[\vec{z}\ \vec{w}\ \vec{u}]}{[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]} \quad ; \quad c = \frac{[\vec{z}\ \vec{u}\ \vec{v}]}{[\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}]}$$

47. Pruebe que

$$- \vec{u} \times [\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{v})] = |\vec{u}|^2 (\vec{v} \times \vec{u})$$

$$- i \times (\vec{u} \times i) + j \times (\vec{u} \times j) + k \times (\vec{u} \times k) = 2\vec{u}$$

48. Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ vectores de origen O y no coplanarios. Pruebe que la condición para que los extremos de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$, estén en el mismo plano es que $a + b + c = 1$

49. Demuestre que la condición necesaria y suficiente para que

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \text{ es que } (\vec{u} \times \vec{w}) \times \vec{v} = 0$$

50. Demuestre vectorialmente la fórmula de Herón para el área de un triángulo de lados u,v y w

$$A = \sqrt{p\,(p - u)(p - v)(p - w)}$$

donde $p = \frac{1}{2}(u + v + w)$

SUGERENCIA : $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ y $|\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v}$

51. Dos bases $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1, \vec{w}_1$ y $\vec{u}_2$, $\vec{v}_2$, $\vec{w}_2$, se dicen recíprocas si cumplen con las nueve condiciones siguientes :

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

Pruébese que las bases $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$, $\vec{w}_1$ y su recíproca $\vec{u}_2, \vec{v}_2\ \vec{w}_2$ estan relacionadas por las ecuaciones

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_1 \times \vec{w}_1}{\vec{u}_1\ \vec{v}_1\ \vec{w}_1} \qquad \vec{v}_2 = \frac{\vec{u}_1 \times \vec{w}_1}{\vec{u}_1\ \vec{v}_1\ \vec{w}_1} \qquad \vec{v}_3 = \frac{\vec{u}_1 \times \vec{v}_1}{\vec{u}_1\ \vec{v}_1\ \vec{w}_1}$$

52. Partiendo de la definición de producto triple escalar por determinantes, pruébense las propiedades T1 y T2.

53. Resolver la ecuación vectorial

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$$

donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores dados.

NOTA : Al final del trabajo se encuentran otra serie de ejercicios a manera de misceláneas, tomados de los exámenes parciales finales y de reparación.

CAPITULO 2

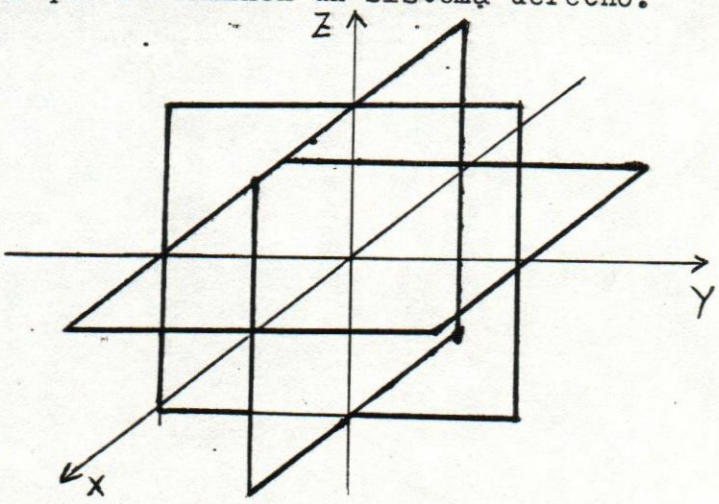
- GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO
- EL PUNTO
- LA RECTA
- EL PLANO
- RELACIONES PUNTO-RECTA y PUNTO-PLANO
- RELACION RECTA-RECTA
- RELACION RECTA PLANO
- RELACION PLANO-PLANO
- SUPERFICIES CUADRICAS

1.- EL PUNTO

1.1 Sistema de coordenadas rectangulares en el espacio tridimensional.

El espacio tridimensional, puede ser dividido en ocho partes mediante tres planos mutuamente perpendiculares que se interceptan en un punto O denominado origen del sistema coordenado rectangular.

Las rectas de intersección las denominaremos ejes coordenados y los denotaremos por ejes X,Y,Z. Sobre los ejes y tomando como referencia el origen O convendremos en asignar sentido a los mismos de tal forma que determinen un sistema derecho.



Cada una de las ocho partes determinadas, recibe el nombre de octante, siendo el primer octante el formado por las partes positivas de los ejes coordenados.

Los planos los designaremos por dos letras que son las de los ejes que lo forman. Así, llamaremos plano XY, XZ, YZ a los determinados por los ejes X e Y; X y Z; Y y Z respectivamente.

Convendremos en llamar $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ a los tres vectores unitarios que formen un sistema derecho coincidente con el sistema descrito anteriormente.

Definición : Llamaremos coordenadas rectangulares de un punto P en el espacio tridimensional a las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. Denotaremos por la terna ordenada (x,y,z) a las coordenadas rectangulares de P.

Observación:

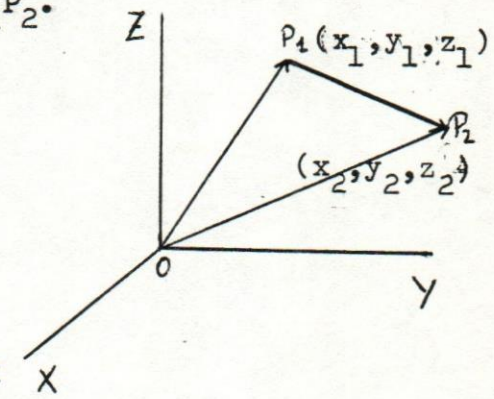
-Cuando nos refiramos a las coordenadas de un punto P lo designaremos por P (x,y,z) y cuando queramos referirnos al vector $\overrightarrow{OP}$, lo designaremos como $\vec{P} = (x,y,z)$, que denota las componentes del vector OP.

Construido el espacio tridimensional, nos ocuparemos de los elementos que forman parte de él en los siguientes apartados.

1.2 Distancia entre dos puntos

Definición : Dados dos puntos $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$ llamaremos distancia $\overline{P_1P_2}$, al módulo del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$.

$$d(P_1P_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}|$$



Si desarrollamos por sus componentes el módulo del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ obtenemos :

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = (x_2,y_2,z_2) - (x_1,y_1,z_1) =$$
$$= (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

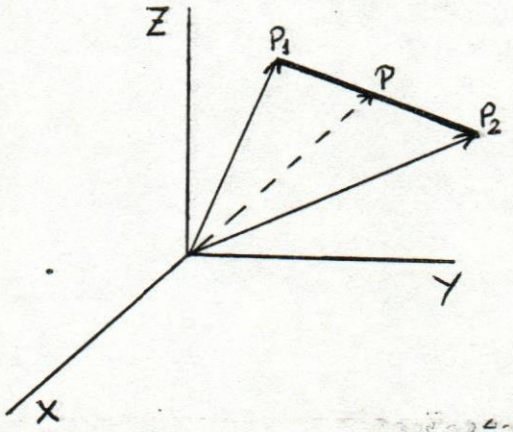
$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2$$

1.3 Razón de división de un segmento en una razón dada

Definición: Decimos que un punto P (x,y,z) divide a un segmento P_1P_2 de componentes (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) , en una razón r, si

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P}|}{|\overrightarrow{P\,P_2}|} = r$$

El problema fue resuelto en el ejemplo 3 del apartado 2.5, pág 9



El problema se reduce a calcular las componentes del vector de posición $\overrightarrow{P}$.

Según se demostró

$$\overrightarrow{OP} = \frac{r\,\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_1}}{r}$$

Trabajando con componentes tendremos:

$$(x,y,z) = \frac{r\,(x_2,y_2,z_2) + (x_1,y_1,z_1)}{1 + r} =$$

$$= \frac{1}{1 + r}\,(\,rx_2 + x_1,\ ry_2 + y_1,\ rz_2 + z_1)$$

y por igualdad de vectores

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{1 + r} \qquad y = \frac{ry_2 + y_1}{1 + r}$$

$$z = \frac{rz_2 + z_1}{1 + r}$$

Ejemplo 20 Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x,y,z) tales que su distancia al punto $P_1(3,o,-1)$ es igual a su distancia a $P_2(-2,1,-3)$.

SOLUCION :

$$|\overrightarrow{P\,P_1}| = |\overrightarrow{P_1\,P_2}|$$

$$\overrightarrow{P\,P_1} \cdot \overrightarrow{P\,P_1} = \overrightarrow{P_1\,P_2} \cdot \overrightarrow{P_1\,P_2}$$

$$(x - 3)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = (x + 2)^2 + (y-1)^2 + (z + 3)^2$$

es decir :

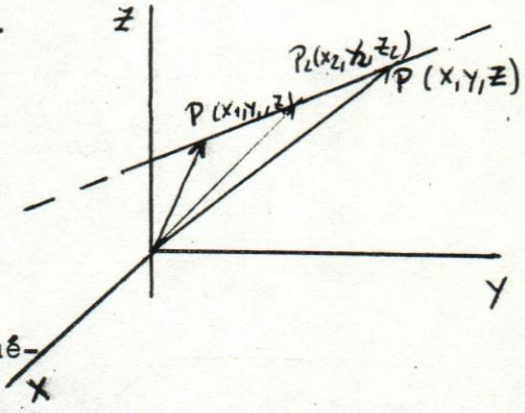
$$5x - y + 2z - 2 = 0$$

¿podría decir qué representa geométricamente la ecuación obtenida?.

2.- LA RECTA

2.1 Definición :Sean $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$ dos puntos de una recta l. Llamamos recta al lugar geométrico de los puntos $P(x,y,z)$ tales que $\overrightarrow{P_1P} = t\ \overrightarrow{P_1P_2}$.

Siendo t un escalar cualquiera de R. Esta es la llamada ecuación vectorial de la recta.



2.2 Ecuaciones paramétricas y forma simétrica de la recta.

De la ecuación vectorial de l : $\overrightarrow{P_1P} = t\ \overrightarrow{P_1P_2}$

se tiene que :

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = (x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\ ,\ z_2-z_1) = (A,B,C)$$

$$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1\ ,\ y - y_1\ ,\ z - z_1)$$

Sustituyendo queda :

$$(x - x_1\ ,\ y - y_1\ ,\ z - z_1) = t\ (A,B,C)$$

igualando las componentes vectoriales tenemos :

$$x = x_1 + At$$

$$y = y_1 + Bt$$

$$z = z_1 + Ct$$

Estas tres ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones paramétricas de la recta l.

Observación :

El vector $\overrightarrow{P_1P_2} = (A,B,C)$ se le llama vector director, porque indica la dirección de todos los vectores $\overrightarrow{P_1P}$ de la recta. A las componentes de del vector director (A,B,C) se las llama también números directores de l.

De las ecuaciones paramétricas de la recta, si A,B,C son distintos de 0, podemos obtener otras ecuaciones, llamadas simétricas. Basta para ello despejar el parámetro de cada ecuación e igualar los resultados:

de
$$x = x_1 + t\,A$$
$$y = y_1 + t\,B$$
$$z = z_1 + t\,C \qquad \text{tenemos :}$$
$$t = \frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

Observación :

Es fácil darse cuenta que se pueden escribir las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta, con tan solo conocer un vector director de l y un punto de l, sin necesidad de escribir su ecuación vectorial.

Ejemplo 21 Sea l la recta que contiene a los puntos $P_1(1,2,3)$ y $P_2(-3,2,-1)$. Halle unas ecuaciones paramétricas y simétricas de l.

SOLUCION :

Un vector director de l es : $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (-4,0,-4)$ o bien $\vec{v} = (1,0,1)$ ¿por qué?

Luego las ecuaciones paramétricas de l son :

$$x = 1 + t$$
$$y = 2$$
$$z = 3 + t$$

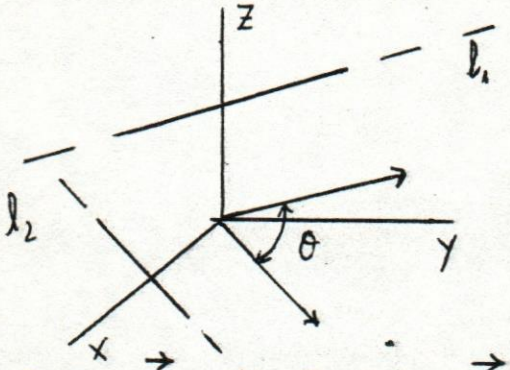
Las ecuaciones simétricas de l son :

$$x - 1 = z - 3 \;,\; y = 2$$

¿Cómo es esta recta con respecto al plano xz?

2.3 Angulo entre dos rectas

Definición :LLamamos ángulo entre dos rectas l_1 y l_2, a cualquiera de los dos ángulos que forman sus vectores directores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$



$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$$

Por componentes tendremos :

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{(A_1,B_1,C_1).(A_2,B_2,C_2)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Siendo $\vec{v}_1 = (A_1,B_1,C_1)$ y $\vec{v}_2 = (A_2,B_2,C_2)$

Ejemplo 22. Encontrar los cosenos de los ángulos α, β, γ que forma la recta l con los ejes de coordenadas, siendo $\vec{v}=(2,1,2)$ el vector director de l.

SOLUCION :

Como el unitario de $\vec{v}$ $U_{\vec{v}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Entonces :

$$\cos\alpha = \pm\frac{2}{3}$$

$$\cos\beta = \pm\frac{1}{3}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{2}{3}$$

Ejemplo 23 Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que sea perpendicular a la recta l_1 de ecuaciónes

$$\frac{x-3}{2} = \frac{2z-1}{4} = \frac{3-y}{2}$$

y a la recta l_2 de ecuaciones $x = t$, $y = -2t + 1$, $z=t+3$ y que pase por el punto P_1 $(-1,2,3)$

SOLUCION :

La recta l buscada debe ser perpendicular a l_1 y l_2, luego su vector director $\vec{v}$ será perpendicular a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

De acuerdo con la definición de producto vectorial

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$$

Como $\vec{v}_1 = (2,-2,2)$ o bien $\vec{v}_1 = (1,-1,1)$

y $\vec{v}_2 = (1,-2,1)$

entonces

$$\vec{v} = (1,-1,1) \times (1,-2,1) = (1,0,-1)$$

Por consiguiente las ecuaciones paramétricas de l son :

$$x = -1 + t$$
$$y = 2$$
$$z = 3 - t$$

3.- EL PLANO

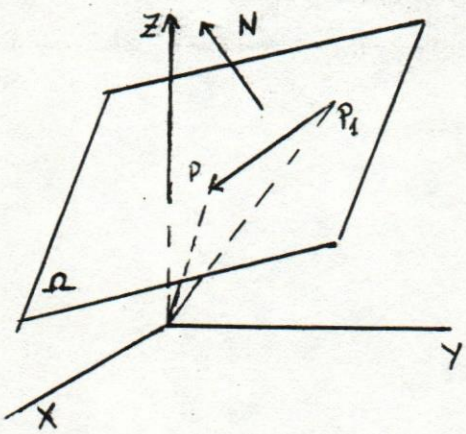
Sabemos por geometría elemental que una dirección perpendicular a un plano y un punto del mismo, definen en forma unívoca al plano. Partiremos de este postulado para definir la ecuación vectorial del plano.

3.1 Definición : Sea $\vec{N} = (A,B,C)$ un vector perpendicular a un plano Ω y $P_1(x_1,y_1,z_1)$ un punto de Ω. Llamaremos plano al lugar geométrico de los puntos $P(x,y,z)$ tales que

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{N} = 0$$

Esta es la ecuación vectorial del plano

3.2 Forma general de la ecuación del plano



Sea $\vec{N} = (A,B,C)$ un vector normal a Ω y $P_1(x_1,y_1,z_1)$ un punto del plano. Entonces $\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{N} = 0$, es equivalente a $(x - x_1, y-y_1, z-z_1).(A,B,C) = 0$. Es decir :

$$Ax+By+Cz - (Ax_1+By_1+Cz_1)=0$$

y llamando a $(Ax_1+By_1+Cz_1) = -D$ tendremos que :

$A x + B y + C z + D = 0$, es la ecuación general de un plano.

3.3 Ecuación general de un plano definido por tres puntos no colineales.

Sean $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ y $P_3(x_3,y_3,z_3)$ tres puntos no colineales. La ecuación del plano Ω que los contine se reduce a calcular un vector $\vec{N}$ perpendicular a dos de los vectores determinados por P_1,P_2,P_3 y después proceder como en 3.2

Así :

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \vec{N} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{N} = 0 \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) tenemos :

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$$

que es un triple producto escalar

luego :

$$\Omega : \left[\overrightarrow{P_1P} \ \ \overrightarrow{P_1P_2} \ \ \overrightarrow{P_1P_3} \right] = 0$$

¿Sabría dar una justificación ?

Se deja al lector que complete el punto 3.3 escribiendo la ecuación obtenida por medio de las componentes, y así obtener la ecuación general del plano.

Ejemplo 24 Discutir la ecuación general del plano.

SOLUCION :

Sea Ω : $Ax + By + Cz + D = 0$

Analicemos la ecuación cuando A,B,C o D son 0

1. Si uno de los componentes de $\vec{N}$ es 0
   Sea A = 0, la normal $\vec{N}$ es de la forma (0,B,C) contenida en el plano YZ, por consiguiente Ω será perpendicular al plano YZ y como consecuencia paralelo al eje Y.
2. Si dos de los componentes de $\vec{N}$ son 0
   Sean A y B iguales a 0. La normal $\vec{N}$ es de la forma (0,0,C) que está contenido en el eje Z, por consiguiente Ω será perpendicular al eje Z y como consecuencia paralelo al plano XY.
3. Si D es 0
   Entonces el plano Ω carece de término independiente y por consi-

guiente contine al origen.

Resumiando :

A,B,C,D	$\vec{N}$	ECUACION DE Ω	OBSERVACIONES
A=0	(0,B,C)	By+Cz+D=0	Paralelo al eje x Perpendicular al plano YZ
B=0	(A,0,C)	Ax+Cz+D=0	Paralelo al eje Y Perpendicular al plano XZ
C=0	(A,B,0)	Ax+By+D=0	Paralelo al eje Z Perpendicular al pano XY
D=0	(A,B,C)	Ax+By+Cz=0	Contiene al origen
A=0,B=0	(0,0,C)	Cz + D = 0	Paralelo al plano XY Perpendicular al eje Z
A=0,C=0	(0,B,0)	By + D = 0	Paralelo al plano XZ Perpendicular al eje Y
B=0,C=0	(A,0,0)	Ax + D = 0	Paralelo al plano YZ Perpendicular al eje X

Si además en alguno de los casos anterirores D es 0 entonces además El plano resultante o contine a los ejes o es alguno de los planos coordenados.

Ejercicios . ----

54. Probar que los puntos A(4,0,1) B(5,1,3) C(3,2,5) y D(2,1,3) son vértices de un paralelogramo, Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados en forma paramétrica y simétrica.
Determinar el ángulo que forman los lados del paralelogramo
Calcular el plano que contine al paralelogramo

55. Una recta l contiene a los puntos A(1,4,1) y B(3,5,-2).Halle las coordenadas del punto P que tiene como ordenada -2.
¿Cuáles son las coordenadas del punto de l que está en el plano XY?.

56. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(3,5,-2) y es perpendicular al eje x.

57. Si Los coeficientes de x,y,z son diferentes de 0 y el plano no contiene al origen, encontrar una expresión que permita encontrar el volumen del tetraedro formado por los planos coordenados y el plano dado.

58. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(4,-2,4) y es perpendicular a la recta que contiene a los puntos B(2,1,9) y C(5,6,2)

59. Encuentre en forma de determinante la ecuación del plano que contiene tres puntos.

60. Encuentre la condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos estén contenidos en el mismo plano en dos formas : vectorialmente y analíticamente.

61. Una recta que pasa por (-3,5,6) y por (8,9,8) ,determina con los planos coordenados tres segmentos,encuentre los puntos extremos de cada segmento y su longitud.

62. El vector director de una recta forma con los ejes de coordenadas $\alpha = 45°$,$\beta = 60°$, si la recta pasa por el punto (4,-1,4) hallar su ecuación.

4.- RELACIONES PUNTO-RECTA y PUNTO-PLANO

4.1 Relación Punto-recta

Dados una recta l y un punto P, se pueden presentar una de estas dos alternativas: o P pertenece a L, o P no pertenece a l
Si P pertenece a l, entonces P satisface a l.
Es decir : Sea $P_1(x_1,y_1,z_1)$ un punto de l y v = (A,B,C) su vector director; P pertenecerá a l si

$$\overrightarrow{P_1P} \times \vec{v} = \vec{0}$$

Trabajando con componentes tenemos :

$$(x-x_1 \ , \ y-y_1 \ , \ z-z_1) \times (A,B,C) = 0$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

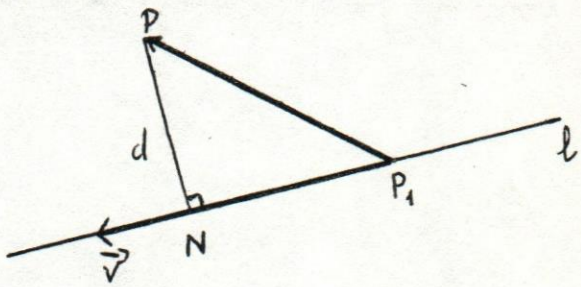
y aplicando propiedades de los determinantes se concluye que

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ A & B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

Justifique geométricamente lo anterior.

Si el punto P no pertenece a l, entonces se encuentra a una distancia d de l.
La distancia de P a l vendrá dada por la ecuación :

$$d_{(Pl)} = \frac{|\overrightarrow{P_1P} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$



Siendo P_1 un punto de l y $\vec{v}$ su vector director.
Justifiquemos la ecuación : $|\overrightarrow{P_1P} \times \vec{v}|$ es numéricamente igual al área del paralelogramo construido con los vectores $\overrightarrow{P_1P}$ y $\vec{v}$ (ver capítulo 1, apartado 7.3)

$|\vec{v}|$ es equivalente a la longitud de la base. Por lo tanto d, que es la distancia de P a l es la altura del paralelogramo.

Ejemplo 25 Una recta l contiene al punto $P_1(1,2,3)$ y es paralela al vector $\vec{v}=(1,-2,2)$ y sea $Q(3,3,,1)$ un punto del espacio. Demuestre que hay un punto P de l, tal que $|\overrightarrow{QP}|$ es mínima. Encuentre las coordenadas de P y pruebe que $\overrightarrow{QP}$ es ortogonal a l.

SOLUCION :

a) P es cualquier punto de l, luego

$$\overrightarrow{P_1P} = t\,\vec{v}$$

es decir

$$\vec{P} = \vec{P_1} + t\,\vec{v}$$

Por otra parte

$$|\overrightarrow{QP}| = |\vec{P_1} + t\,\vec{v} - \vec{Q}| =$$

$$= |(1,2,3) + (t,-2t,2t) - (3,3,,1)| =$$

$$= |t-2\,,\ -1-2t,\ 2+2t| =$$

$$= \sqrt{(t-2)^2 + (1+2t)^2 + 4(1+t)^2} =$$

$$= \sqrt{9t^2 + 8t + 9}$$

Para que $|\overrightarrow{QP}|$ sea mínimo, debe cumplirse que $\frac{d\,|\overrightarrow{QP}|}{dt}$ sea 0.

Como

$$\frac{d|\overrightarrow{QP}|}{dt} = \frac{9t-4}{\sqrt{9t^2+8t+9}}$$

Se tiene que $|\overrightarrow{QP}|$ es mínimo para $t = -\frac{4}{9}$

Por lo tanto las coordenadas de P son :

$$P\left(\frac{5}{9}\,,\ \frac{26}{9},\ \frac{19}{9}\right)$$

b) Para comprobar que $\overrightarrow{QP}$ es ortogonal a l, tendremos que $\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v} = 0$

$$\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v} =$$

$$\vec{P}\cdot\vec{v} - \vec{Q}\cdot\vec{v} =$$

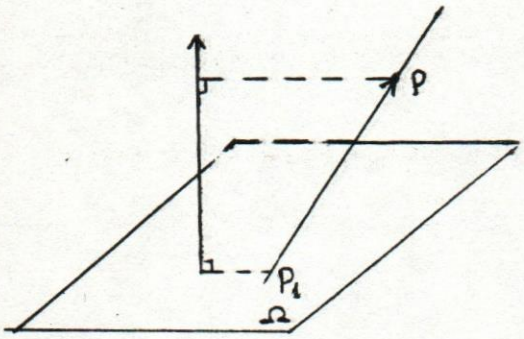
$$= \left(\frac{5}{9}\,,\frac{26}{9},\frac{19}{9}\right).(1,-2,2) - (3,3,1).(1,-2,2)$$

$= 0$. Luego $\overrightarrow{Qp}$ es ortogonal a l.

4.2 Relación Punto-plano

Un punto P pertenece a un plano Ω si $\overrightarrow{PP_1} \cdot \vec{N} = 0$, siendo P_1 un punto de Ω y N la normal del plano. En caso contrario diremos que P no pertenece a Ω

Si P(x,y,z) no pertenece a Ω, entonces podemos encontrar la distancia d, de P a Ω



Sea $P_1(x_1,y_1,z_1)$ un punto de Ω y $\vec{N}(A,B,C)$ la normal de Ω

$d_{(P,\Omega)} = \mid \text{Proy}_{\vec{N}} \overrightarrow{P_1P} \mid$

(justifique la ecuación)

Si desarrollamos la ecuación vectorial empleando componentes, tendremos :

$$d = \frac{\mid \overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{N} \mid}{\mid \vec{N} \mid} =$$

$$= \frac{\mid (x-x_1),(y-y_1),(z-z_1) \cdot (A,B,C) \mid}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{\mid Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) \mid}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Pero $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = - D$

Por lo tanto :

$$d = \frac{\mid Ax + By + Cz + D \mid}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Observación :

- Si el punto en cuestión es el origen, entonces

$$d = \frac{\mid D \mid}{\mid \vec{N} \mid}$$

Ejemplo 26 Pruebe que el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de Ω : $6x - 7y + 6z - 22 = 0$ y de $2x + 6y - 3z = -14$ son dos planos; y encontrar sus ecuaciones .

SOLUCION :

$$d_{(P,\Omega_1)} = d_{(P\Omega_2)}$$

luego

$$\frac{|\,6x - 7y + 6z - 22\,|}{11} = \frac{|\,2x + 6y - 3z + 14|}{-7}$$

Es decir :

$$64\,x + 17\,y + 9z = 0$$

o

$$20\,x - 115\,y + 75\,z - 308 = 0$$

Ejercicios . ----

63. Hallar la ecuación del plano que pasa por (2,3,-2) y tiene como normal $\vec{N} = (3,-2,5)$

64. Determinar la ecuación del plano que contiene a los puntos A (1,1,1) ; B(2,4,7) y C(3,5,-2)

65. Determinar la ecuación del plano paralelo a $3x+2y-5z + 6 = 0$ que pasa por el origen.

66. Determinar la longitud de los segmentos que el plano $x - 2y - 3z + 12 = 0$ determina con los ejes de coordenadas.

67. Calcule el volumen del tetraedro formado por los planos coordenados y el plano del ejercicio anterior.En dos formas.

68. Determine la ecuación del plano que pasa por (3,-2,7) y determine con los ejes de coordenadas, segmentos de igual longitud.

69. Halle la ecuación general del plano que tiene como normal $\vec{N}=(A,B,C)$ y se encuentra a d unidades del origen.

70. Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(3,2,-5) y es paralela a $\vec{v}= (1,-3,5)$.

71. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(5,-2,7) y B(3,4,9) .

72. Hallar la altura del triángulo de vértices A(3,6,4), B(2,1,5) y C(4,9,-3).Determine la ecuación del plano que lo contiene.

73. Hallar las condiciones vectoriales necesarias para que una recta : a) sea paralela a un plano coordenado
    b) pase por el origen
    c) sea paralela a los ejes coordenados
    d) sea un eje coordenado

74. Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son A(1,1,1) B(0,0,2) C(o,3,0) y D(4,0,0) .

5.- RELACION RECTA-RECTA

Dos rectas l_1 y l_2 pueden ocupar tres posiciones relativas en el espacio :

- l_1 y l_2 tienen un punto en común, es decir se cortan
- l_1 y l_2 tienen dos puntos en común y entonces serán coincidentes
- l_1 y l_2 no tienen ningún punto en común y por lo tanto l_1 es paralela a l_2 o bien se cruzan.

5.1 Rectas coincidentes y paralelas

Dados dos rectas l_1 y l_2 cuyos vectores directores son respectivamente $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ entonces, l_1 y l_2 son paralelas si

$$\vec{v}_1 = m\,\vec{v}_2$$

si además para P_1 de l_1 y P_2 de l_2 se cumple que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = a\,\vec{v}_1 = b\,\vec{v}_2$$

entonces las rectas son coincidentes.

Si escribimos las ecuaciones de las rectas en su forma simétrica tendremos :

$$l_1 : \frac{x - x_1}{A_1} = \frac{y - y_1}{B_1} = \frac{z - z_1}{C_1}$$

$$l_2 ; \frac{x - x_2}{A_2} = \frac{y - y_2}{B_2} = \frac{z - z_2}{C_2}$$

y asumiendo que l_1 es paralela a l_2 , entonces

$$(A_1,B_1,C_1) = m(A_2,B_2,C_2)$$

Es decir

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

En este caso podemos decir que existe distancia d de l_1 a l_2

Veamos como calculamos d.

Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas definidas por $P_1, \vec{v_1}$ y P_2, $\vec{v_2}$ respectivamente.

Calcular la distancia de l_1 a l_2 es equivalente a calcular la distancia de P_1 a l_2, y este problema se resolvió en el apartado 4.1 del presente capítulo.

Ejemplo 27 Sean $l_1 : \frac{x-1}{2} = y = \frac{3-z}{2}$ y $l_2 : \frac{x}{-6} = \frac{3-y}{3} = \frac{z+1}{6}$

Pruebe que l_1 y l_2 son paralelas y calcule la distancia entre ellas.

SOLUCION :

$$\vec{v_1} = (2,1,-2) \qquad \vec{v_2} = (-6,-3,6)$$

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = (0,0,0,)$$

Es decir que :

$\vec{v_1} = m\,\vec{v_2}$ y por lo tanto l_1 es paralela a l_2

Para calcular la distancia de l_1 a l_2, tomemos puntos de l_1 y l_2

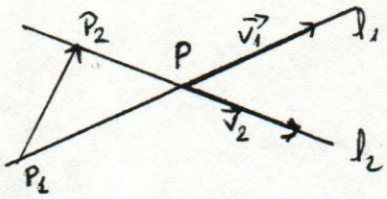
$$P_1\,(1,0,3);\ P_2(0,3,-1);\ \overrightarrow{P_1P_2}=(-1,3,-4)$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{v_1}|}{|\vec{v_1}|} = \frac{|-2,-10,-7|}{3} =$$

$$= \frac{151}{3}$$

5.2 Rectas que se cortan.

Si dos rectas se cortan, lo hacen en un punto, por lo que debe cumplirse que $\vec{v_1} \times \vec{v_2} \neq \vec{0}$.



En este caso l_1 y l_2 forman un plano y por tanto para cualquier par de puntos P_1 de l_1 y P_2 de l_2 el triple producto escalar $[\overrightarrow{P_1P_2}\ \vec{v_1}\ \vec{v_2}] = 0$

Pues al formar l_1 y l_2 un plano $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ serán una base y $\overrightarrow{P_1P_2}$ es combinación lineal de $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$.

Pasemos a calcular las coordenadas del punto P de corte entre l_1 y l_2.

Para ello resolveremos la ecuación formada por el sistema

$$\vec{P} = \vec{P_1} + t_1 \vec{v_1}$$
$$\vec{P} = \vec{P_2} + t_2 \vec{v_2}$$

Es decir :

$$\vec{P_1} + t_1 \vec{v_1} = \vec{P_2} + t_2 \vec{v_2}$$

y multiplicando vectorialmente por $\vec{P_2} \times \vec{v_1}$ tenemos :

$$\left[\vec{P_1} \ \vec{P_2} \ \vec{v_1}\right] = t_2 \left[\vec{v_2} \ \vec{P_2} \ \vec{v_1}\right]$$

de donde :

$$t_2 = \frac{\left[\vec{v_2} \ \vec{P_2} \ \vec{v_1}\right]}{\left[\vec{P_1} \ \vec{P_2} \ \vec{v_1}\right]}$$

y sustituyendo :

$$\vec{P} = \vec{P_2} + \frac{\left[\vec{v_2} \ \vec{P_2} \ \vec{v_1}\right]}{\left[\vec{P_1} \ \vec{P_2} \ \vec{v_1}\right]} \vec{v_2}$$

Ejemplo 28 Hallar la ecuación de la recta l, paralela al vector $\vec{v} = (1,-1,3)$, y que contenga al punto de intersección de las rectas

$$l_1 \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -5 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \qquad l_2 \begin{cases} x = 3 + s \\ y = -2 - s \\ z = 3 \end{cases}$$

SOLUCION :

Sea P el punto de l común con l_1 y l_2

Entonces

$$\vec{P} = \vec{P_1} + t\,\vec{v_1} = \vec{P_2} + s\,\vec{v_2} =$$
$$= (1 + 3t, -5 + 2t, 2 + t) = (3 + s, -2-s, 3)$$

Es decir

$$1 + 3t = 3 + s$$
$$-5 + 2t = -2-s$$
$$2 + t = 3$$

Resolviendo el sistema obtenemos que t = 1

Por lo tanto las ecuaciones paramétricas de l son :

$$x = 4 + r$$
$$y = -3 - r$$
$$z = 3 + 3r$$

Dos rectas que se cortan, también determinan un par de ángulos suplementarios.

Calcular el ángulo entre dos rectas, es equivalente a calcular el ángulo entre sus vectores directores, problema que ya hemos resuelto.En conclusión : si es el ángulo entre l_1 y l_2 entonces

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$$

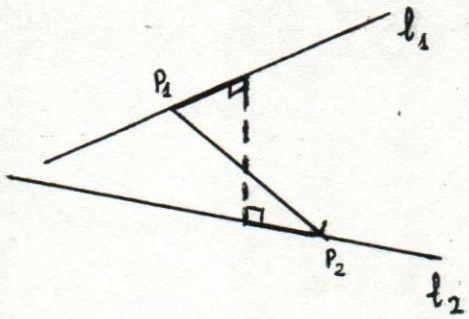
5.3 Rectas que se cruzan.

Sean l_1 y l_2 dos rectas que se cruzan, En este caso l_1 y l_2 no determinan ningún plano, luego si P_1 pertenece a l_1 y P_2 a l_2, siendo $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ los vectores directores respectivos, entonces El triple producto escalar de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ no es 0.Es decir :

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2} \quad \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2\right] \neq 0$$

Uno de los problemas más interesantes que surge es el de calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan.

Para calcular la distancia d entre l_1 y l_2, tendremos en cuenta que exite una perpendicular común, siendo la longitud del segmento de perpendicular la distancia d entre las rectas.



Por tanto bastará con proyectar cualquier vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ sobre la perpendicular común y determinar su módulo.

Así : $d = |\text{Proy}_{\vec{N}} \overrightarrow{P_1P_2}|$

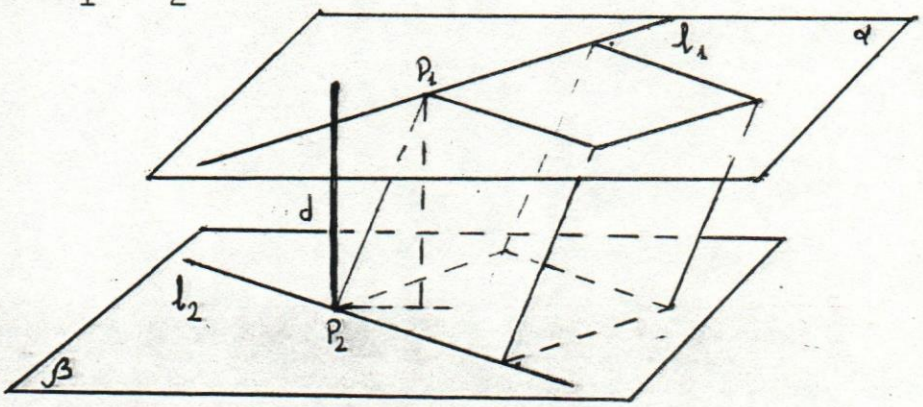
donde $\overrightarrow{P_1P_2}$ es el vector formado con un punto P_1 de l_1 y P_2 de l_2 y $\vec{N}$ es el vector perpendicular común, $\vec{N} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$

Por lo tanto :

$$d = \left| \text{Proy}_{\vec{v_1} \times \vec{v_2}} \overrightarrow{P_1P_2} \right| = \frac{\left[\overrightarrow{P_1P_2} \quad \vec{v_1} \quad \vec{v_2}\right]}{\left|\vec{v_1} \times \vec{v_2}\right|}$$

Observaciones :

a) Si detallamos la solución podremos caer en cuenta que d viene representando la altura del paralelepípedo formado con los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$



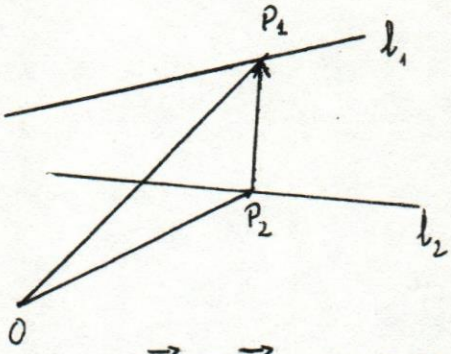
b) Es cierto que dos rectas que se cruzan no determinan un ángulo propiamente dicho, sin embargo se habla del ángulo que forman; se define ángulo entre dos rectas que se cruzan como el ángulo que forman sus vectores directores. Por tanto el problema es equivalente al de dos rectas que se cortan.

Ejemplo 29 Sean $l_1 : \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y+7}{5} = \dfrac{z-3}{2}$

$$l_2 : \frac{x+4}{4} = \frac{3-y}{} = \frac{z+2}{-1}$$

Determinar las coordenadas de los puntos de cruce P_1, P_2 de l_1 y l_2, calcular también la distancia entre ellas y el ángulo que forman.

SOLUCION :



$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1}$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = d\,\frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

Por tanto $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} + d\,\dfrac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$

$$\overrightarrow{OP_1} = (4t-3, 5t-7, 2t+3)$$

$$\overrightarrow{OP_2} = (4s-4, -s+3, -s-2)$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (4,5,2) \times (4,-1,-1) = (-3,12,-24)$$

$$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \sqrt{9 + 144 + 576} = 27$$

Sustituyendo en $\overrightarrow{OP_1}$ tenemos :

$$(4t-3, 5t-7, 2t+3) = (4s-4, -s+3, -s-2) + \frac{d}{27}(-3,12,-24)$$

e igualando componentes queda :

$$4t - 3 = 4s - 4 - \frac{d}{9} \Rightarrow 36t - 36s + d = -9$$

$$5t - 7 = -s + 3 + \frac{4d}{9} \Rightarrow 45t + 9s - 4d = 90$$

$$2t + 3 = -s - 2 - \frac{8d}{9} \Rightarrow 18t + 9s + 8d = -45$$

Es decir que $\quad d = -9 \; ; \quad t = 1 \; ; \quad s = 1$

En conclusión :

$$P_1\,(1,-2,5) \qquad P_2\,(0,2,-3) \quad \text{y} \quad d_{(l_1 l_2)} = |\vec{d}| = 9$$

Para calcular el ángulo entre las rectas nos apoyamos en sus vectores directores.

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|} = \frac{(4,5,2).(4,-1,-1)}{27} =$$

$$= \frac{16-5-2}{27} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \text{Arc Cos}\,\frac{1}{3}$$

6.- RELACION RECTA-PLANO

Dados un plano Ω y una recta l, entre ellos pueden darse las siguientes posiciones relativas :

- l no tiene ningún punto común con Ω, y entonces el plano y la recta son paralelos
- l tiene un punto común con Ω, y entonces l penetra en Ω
- l tiene dos puntos en común con Ω, y entonces l está contenida en Ω.

Sea $\vec{P} = \vec{P}_o + t\,\vec{v}$ la ecuación de una recta l

y $\vec{P} \cdot \vec{N} = d$ la ecuación de un plano

Un punto P del estará en el plano , si y sólo si:

$$(\vec{P}_o + t\,\vec{v}) \cdot \vec{N} = d$$

Es decir $$t\,\vec{v} \cdot \vec{N} = d - \vec{P}_o \cdot \vec{N}$$

Si l es paralela a , entonces

$$\vec{v} \cdot \vec{N} = 0$$

y puede ocurrir que, o bien

$$d - \vec{P}_o \cdot \vec{N} = 0$$

en cuyo caso t pertenece a R, mejor dicho es R y por tanto l está contenida en Ω

o bien $$d - \vec{P}_o \cdot \vec{N} \neq 0$$

y en este caso no existe t y por tanto l es paralela a Ω

Si l no es paralela, ni está contenida en Ω, entonces $\vec{v} \cdot \vec{N}$ no es 0 y podremos encontrar un t en R

$$t = \frac{d - \vec{P}_o \cdot \vec{N}}{\vec{v} \cdot \vec{N}}$$

y el punto de intersección P vendrá dado por la expresión

$$\vec{P} = \vec{P}_o + \frac{d - \vec{P}_o \cdot \vec{N}}{\vec{v} \cdot \vec{N}}\,v$$

Observación :

Por componentes bastará sustituir las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano y resolver la ecuación resultante, pudiendo dar lugar a una, infinitas o ninguna solución.

Queda para el lector el hacer en forma de ejercicio lo expresado en la observación.

Ejemplo 30 Sea el plano Ω : $2x + 3y - z - 7 = 0$ y la recta

$$l \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$$ encontrar el punto de intersección de l con el plano Ω.

SOLUCION :

El punto P de l que satisface también al plano debe ser tal que $\vec{P} \cdot \vec{N} = d$

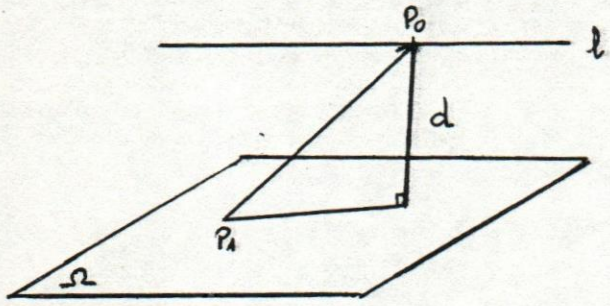
Por tanto

$$(2t + 1 , -t + 1 , 3t + 1) \cdot (2,3,-1) = 7$$

Resolviendo queda que $t = -\frac{3}{2}$

Así pues, $P\left(-2, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$

Si la recta l y el plano Ω son paralelos, entonces podemos hablar de distancia d entre el plano y la recta.



Este problema lo resolvimos en 4.2 de este mismo capítulo, pues se reduce a calcular la distancia d de un punto de l a Ω, es decir:

$$d_{(l,\Omega)} = \left| \text{Proy}_{\vec{N}} \overrightarrow{P_1P_0} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{N} \right|}{\left| \vec{N} \right|}$$

$$d = \frac{\left| D - \overrightarrow{P_0N} \right|}{|\vec{N}|}$$

Si la recta l y el plano Ω tienen punto en común, entonces podemos encontrar el ángulo θ entre Ω y l . El ángulo θ entre l y Ω es el complemento del ángulo formado por el vector deirector $\vec{v}$ de l y el vector normal $\vec{N}$ al plano Ω.

Luego

$$\cos\theta = \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{|\vec{N} \times \vec{v}|}{|\vec{N}|}$$

Ejemplo 31 Una partícula se mueve a partir del punto P(15,-22,10) y se mueve con velocidad costante $\sqrt{13}$, en qué dirección debe moverse para alcanzar el plano $x + 10y + 4z = -15$ en un tiempo mínimo y cuánto tiempo tarda en alcanzarlo.

SOLUCION :

Para alcanzar al plano en tiempo mínimo deberá volar en la dirección perpendicular al plano, por tanto :

$$\vec{v} = (1,10,4)$$

El tiempo necesario para alcanzarlo estará dado por la relación

$t = \frac{d}{v}$ donde d representa la distancia de P a y v la velocidad.

$$d = \frac{|15 - 22 + 10 + 15|}{3\sqrt{13}}$$

$$t = \frac{18}{39} = \frac{9}{13}$$

7.- RELACION PLANO-PLANO

Si tenemos dos planos ,entre ellos se pueden presentar las siguientes posiciones relativas :

- que sean paralelos los planos α y β
- que tengan una recta en común
- que sean coincidentes, encuyo caso son el mismo plano y no los trataremos como si fuera un caso distinto.

7.1 Planos que tienen una recta en común.

Si dos planos tienen una recta en común, entonces la ecuación de la recta vendrá dada por el sistema de ecuaciones

$$l: \begin{cases} \vec{P} \cdot \vec{N_1} = d_1 \\ \vec{P} \cdot \vec{N_2} = d_2 \end{cases}$$

y pasando a componentes tendremos :

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

siendo respectivamente $\vec{N_1} = (A_1, A_2, A_3)$; $\vec{N_2} = (A_2, B_2, C_2)$

El ángulo que forman dos planos que tengan una recta en común es el mismo ángulo que forman sus normales, por tanto si θ es el ángulo formado por α y β, tendremos :

$$\cos\theta = \frac{\vec{N_1} \cdot \vec{N_2}}{|\vec{N_1}||\vec{N_2}|}$$

Observaciones :

a) Normalmente se define θ como el menor de los dos ángulos que forman los dos planos, en cuyo caso tomaremos el valor absoluto de la ecuación anterior.

b) Si dos planos α y β determinan una recta l, entonces hay una familia de planos que contiene a l.

Sean :

$$\alpha : \vec{P} \cdot \vec{N_1} = D_1$$

$$\beta : \vec{P} \cdot \vec{N_2} = D_2$$

la ecuación de la familia de planos que contiene a l estará dado por la combinación lineal de ambas ecuaciones, así :

$$\vec{P} \cdot \vec{N_1} - D_1 + t(\vec{P} \cdot \vec{N_2} - D_2) = 0$$

con t en R.

Es decir $\quad \vec{P} \cdot (\vec{N_1} - t\,\vec{N_2}) = D_1 + t\,D_2$

En forma general:

$$Ax + By + Cz + D + t(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$$

Ejemplo 32 Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta

$$l \begin{cases} 3x + 4y - 5z = 2 \\ x + 3y + 6z = -5 \end{cases}$$

SOLUCION :

Resolviendo el sistema para x e y en función de z

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 + 5z & 4 \\ -5 - 6z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{39\,z + 26}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 + 5z \\ 1 & -5 - 6z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{23\,z + 17}{5}$$

Entonces :

$$\frac{z}{5} = \frac{x - \frac{6}{5}}{39} = \frac{y + \frac{17}{5}}{-23}$$

Es decir

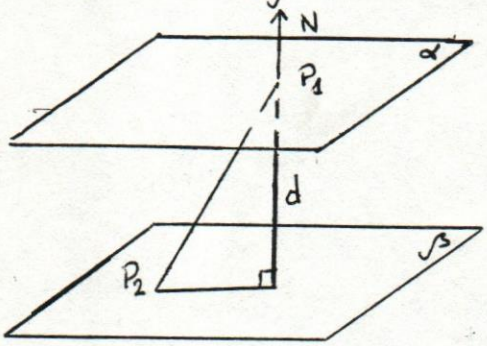
$$x = \frac{26}{5} + 39\,t$$

$$y = -\frac{17}{5} - 23\,t$$

$$z = 5t$$

7.2 Planos paralelos.

Dos planos α y β que no tengan punto en común se dicen paralelos. Si $\vec{P} \cdot \vec{N_1} = D_1$ y $\vec{P} \cdot \vec{N_2} = D_2$ son las ecuaciones de los planos α y β, entonces se debe cumplir que $\vec{N_1} \times \vec{N_2} = \vec{0}$



También podremos encontrar la distancia d que media entre ambos planos. El problema de calcular la distancia entre α y β, se reduce a calcular la distancia de un punto P_1 de α al plano β, problema que ya resolvimos en 4.2 del capítulo 2 Según P_1 y P_2 dos puntos de los planos α y β respectivamente.

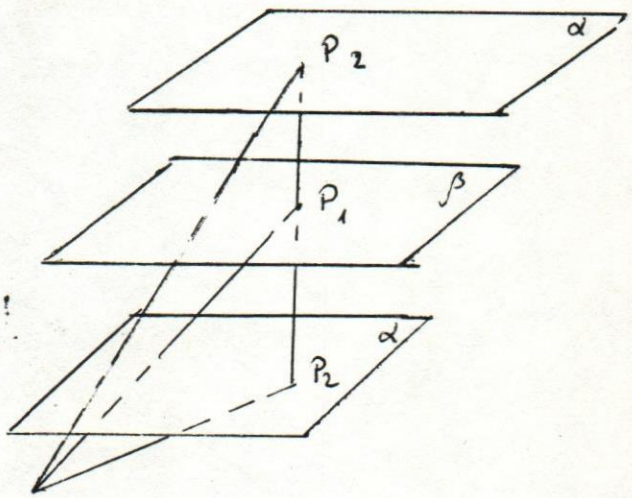
$$d = \left| \text{Proy}_{\vec{N_2}} \overrightarrow{P_1P_2} \right| = \frac{\left| \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{N_2} \right|}{\left| \vec{N_2} \right|}$$

Si empleamos componentes, tendremos que si P_1 es (x_1, y_1, z_1) y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ la distancia d vendrá expresada por la ecuación :

$$d = \frac{\left| A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2 \right|}{A_2^{\,2} + B_2^{\,2} + C_2^{\,2}}$$

Observación :

- Un problema interesante surge, si se quiere calcular la ecuación de un plano α paralelo a uno dado β y a d unidades de distancia del primero. Veamos como se resuelve : Si α viene dado por la ecuación $\vec{P} \cdot \vec{N_2} = D_1$, entonces $P_2 =$



$$\vec{P_2} = \vec{P_1} \pm d \frac{\vec{N_1}}{\left| \vec{N_1} \right|}$$

Por lo tanto :

$$\overrightarrow{P_2P} \cdot \overrightarrow{N_1} = 0$$

$$(\vec{P} - \vec{P_2}) \cdot \overrightarrow{N_1} = 0$$

$$\vec{P} \cdot \overrightarrow{N_1} = \vec{P_2} \cdot \overrightarrow{N_1} =$$

$$= \vec{P_1} \cdot \overrightarrow{N_1} \pm d \frac{\overrightarrow{N_1}}{|\overrightarrow{N_1}|} \cdot \overrightarrow{N_1} =$$

$$= D_1 \pm d \, |\overrightarrow{N_1}|$$

En conclusión :

$$\vec{P} \cdot \overrightarrow{N_1} = D_1 + d \, |\overrightarrow{N_1}|$$

y

$$\vec{P} \cdot \overrightarrow{N_1} = D_1 - d \, |\overrightarrow{N_1}|$$

Si empleamos componentes, tendremos :

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1 + d \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}$$

y

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1 - d \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}$$

Ejercicios . ----

75. Sean los planos α: $3x - 5y + pz - 3 = 0$

y β: $2x + py - 3z + 1 = 0$

Determine el valor de p para el cual ambos planos resultan ser paralelos. En caso de que no exista p, justifique la respuesta.

76. Determine p y q para que los planos :

$$2x - y + 3z - 1 = 0$$
$$x + py - z + 3 = 0$$
$$x + 7y - 6z + q = 0$$

a) tengan un punto en común

b) contengan la misma recta

c) determinen tres rectas paralelas.

77. Determínense las condiciones necesarias y suficientes para que tres planos

a) sean paralelos

b) tengan una recta en común

c) tengan un punto en común

d) determinen tres rectas paralelas

Nota : Se piden condiciones vectoriales.

78. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta

$$l: \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$$

pase por el punto P (0,1,0) y diste 5 unidades de l.

79. Halle la ecuación de la recta paralela a

$$l: \begin{cases} 3x + 2y - z = 4 \\ x + 5y + 2z = -3 \end{cases}$$

y pase por el punto del eje z más cercano a l.

80. Halle la ecuación de los planos bisectores del par de planos

$$6x + 3y - 2z = 0$$
$$x + 2y + 6z - 12 = 0$$

81. Halle la ecuación del plano paralelo a la recta

$$l\begin{cases} x + 2y - 3z + 1 = 0 \\ 5x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

a) que pase por el origen

b) que sea paralelo al eje x

c) que determine sobre el eje y un segmento de longitud 4

d) determine con los planos coordenados un tetraedra de volumen 4/15

82. Un cuadrado tiene como coordenadas de dos vértices consecutivos los puntos A(1,1,1) , B(3,5,7) y está contenido en el plano

$$11x - y - 3z = 7.$$

CAPITULO 3

+ SUPERFICIES
+ SUPERFICIES CUADRICAS
+ SUPERFICIES ESFERICAS
+ SUPERFICIES CILINDRICAS

1.- SUPERFICIES

En el estudio posterior de las funciones de varias variables y en integración múltiple se usan con mucha frecuencia, superficies que por su sencillez, son muy útiles a la hora de ejemplificar.

En este apartado haremos un estudio rápido de las superficies cuádricas, esféricas y cilíndricas.

Definición :

Llamaremos susperficie al conjunto de puntos del espacio, tales que satisfacen una ecuación de la forma $f(x,y,z)= 0$

De entre todas las superficies las más sencillas después de los planos son las ecuaciones de segundo orden, llamadas superficies cuádricas. Su ecuación general es de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$$

donde uno de entre los coeficientes A,B,C,D,E y F es diferente de 0

Como la ecuación tiene diez coeficientes y podemos dividirla por uno de ellos, no nulo, quedan nueve independientes. Son, pues, necesarias nueve condiciones para determinar una cuádrica.

Cabe, sin embargo, que por nueve puntos dados pasen dos cuádricas, si por nueve puntos pasan dos cuádricas $f = 0$ y $g = 0$, también pasan las infinitas cuádricas del haz $f - \lambda g = 0$, para cualquier λ , pues se satisfacen para las soluciones comunes a ambas.

Ejemplo 33 Hallar la cuádrica que por las secciones producidas por la cuádrica $f = x^2 - 2y^2 + z^2 - x + 2y = 0$ con los planos XZ e YX y que además contenga al punto (1,1,2).

SOLUCION :

Consideremos la familia $f - \lambda yz = 0$ que representa un haz de cuádricas que contienen los puntos comunes a f y a los planos $y = 0$ y $z = 0$. Bastará pues determinar la que contiene al punto (1,1,2)

Sustituyendo en la familia y despejando λ, obtenemos :

$$\lambda = \frac{f(1,1,2)}{2} = 4$$

Por tanto la ecuación de la cuádrica es :

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4yz - x + 2y = 0$$

Observación :

- Se puede notar que la intersección de la ecuación general de las cuádricas con un plano cualquiera determina con ella una curva cónica o una forma límite de una sección.

Al igual que en las cónicas, mediante transformaciones convenientes de rotación y traslaciones, la ecuación anterior se puede convertir en :

$$Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = S$$

$$\text{o} \quad Px^2 + Qy^2 = Rz$$

que se denominan respectivamente, cuádricas con centro y cuádricas sin centro, ya que las primeras tienen al origen de coordenadas como centro de simetría. Es decir $f(x,y,z) = f(-x,-y,-z)$

2.- SUPERFICIES ESFERICAS

Definición :

Se define superficie esférica, s, al lugar geométrico de los puntos $P(x,y,z)$ tales que su distancia a un punto fijo, llamado centro, $P_o(x_o,y_o,z_o)$ es una constante, llamada radio, r.

Así pues la ecuación vectorial de s es :

$$s : |\overrightarrow{PP_o}|^2 = r^2$$

y empleando componentes, tendremos :

$$s : (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = r^2$$

siendo $P_o(x_o, y_o, z_o)$ el centro de la esfera y r el radio.

Si el centro es el origen de coordenadas se reduce a $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, que es una cuádrica con centro.

Ejemplo 34. Hallar la ecuación de la superficie esférica que pasa por la circunferencia de intersección de las esferas

$s_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ y

$s_2 : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8z - 5 = 0$

que además pase por el punto (1,2,0)

SOLUCIÓN :

La superficie s buscada pertenece a la familia de esferas que contienen el mismo círculo de intersección.

Por tanto :

s será de la forma $s_1 + \lambda s_2 = 0$ con $\neq -1$

Entonces :

$$s : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 + (x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8z - 5) = 0$$

y como s contiene al punto (1,2,0), entonces sustituyendo en s obtenemos :

$$\lambda = \frac{9}{4}$$

Por tanto s es :

$$13x^2 + 13y^2 + 13z^2 + 28x - 24y - 72z - 61 = 0$$

3.- SUPERFICIES CILINDRICAS

De entre todas las superficies que estamos estudiando, sin duda ninguna que la de mayor aplicabilidad posterior será la superficie cilíndrica.

Definición :

Llamamos superficie cilíndrica al lugar geométrico de los puntos P(x,y,z) pertenecientes a un conjunto de rectas que tie-

nen la misma dirección y pasan por una curva dada.Las rectas paralelas se denominan generatrices y la curva directriz.

Ejemplo 35 Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica que tiene como directriz la curva $3x^2 + 2y = 5$ y $z = 0$ y sus generatrices son paralelas al vector $\vec{v} = (1,3,4)$

SOLUCION :

Las generatrices son de la forma

$$x = x_o + t$$
$$y = y_o + 3t$$
$$z = z_o + 4t$$

donde (1,2,3) es el vector director de la recta y (x_o, y_o, z_o) es un punto de la misma, por conveniencia tomaremos el punto de tal forma que satisfaga a la directriz.

Entonces :

como $z_o = 0$, $t = z/4$

y por tanto $x_o = x - \frac{z}{4}$

e $y_o = y - \frac{3z}{4}$

Como (x_o, y_o, z_o) pertenece a la directriz, entonces se satisface la ecuación y por tanto tenemos que la superficie es:

$$3(x - \frac{z}{4})^2 + 2\,(y - \frac{3z}{4}) = 5$$

y desarrollando queda :

$$48\,x^2 + 3z^2 + 32\,y - 48\,z = 80$$

De entre todas las superficies cilíndricas haremos especial mención de las superficies cilíndricas rectas, denominándose así aquellas superficies cilíndricas tales que sus generatrices son perpendiculares al plano que contiene a la directriz.

Suponiendo que la directriz esté contenida en uno de los planos coordenados,como por ejemplo en el plano xy, entonces su ecuación es de la forma $f(x,y) = 0$, $z = 0$ y su directriz será

el versor $\hat{k}$ .Por tanto la ecuación de la superficie es :

$$x = x_o \qquad y = y_o \qquad z = z_o + t$$

Como $z_o = 0$, entonces $z = t$

Quedando como ecuación de la superficie

$$z = t \ , \ f(x,y) = 0 \quad \text{para todo } t \text{ en } R$$

es decir

$$f(x,y) = 0$$

Observación :

a) Toda ecuación en dos variables, representa una superficie cilíndrica recta.

Es bastante común el confundir curvas en el plano con superficies cilíndricas.Es necesario darse cuenta que las curvas necesitan en el espacio por lo menos un par de ecuaciones analíticas para poder definirse, mientras que una ecuación en las variables x,y,z es una superficie.

b) Es de tal importancia la superficie cilíndrica recta, que posteriormente,en el tema de integración múltiple,a menudo recurrimos para calcular el dominio de integración determinado por la intersección de dos o más superficies,a una combinación lineal de las superficies consideradas, de tal forma que la superficie resultante carezca de una de las variables.De esta manera se obtiene una superficie cilíndrica recta cuya ecuación en el plano de las variables que intervienen es la frontera del dominio.

Ejemplo 36 Sean $s_1 : x^2 + y^2 - 4z + 4z^2 - 5x + 6y = 8$

y $s_2 : x^2 - 5x + 6z^2 - 2y = 6$, dos superficies que se intersectan según una curva C.Determinar la ecuación de la curva C' de proyección de C en el plano YZ.

SOLUCION :

Bastará eliminar la variable x del par de ecuaciones dadas y el problema estará resuelto.

Restando S_2 de s_1 obtenemos :

$$s_2 - s_1 : y^2 + 8y - 2z^2 - 4z - 2 = 0$$

Completando cuadrados queda :

$$(y + 4)^2 - 2(z + 1)^2 = 16$$

que es una superficie cilíndrica recta hiperbólica.
La curva C' estará dada por el sistema

$$C' \begin{cases} (y + 4)^2 - 2(z + 1)^2 = 16 \\ x = 0. \end{cases}$$

4.- SUPERFICIES CUADRICAS

En el presente apartado, esbozaremos las cuádricas y estudiaremos con algún detalle una cuádrica con centro y otra sin centro.
Para mayor detalle se recomienda consultar la obra del mismo autor 'CUADRICAS Y CONICAS,UN TRATAMIENTO ALGEBRAICO' Caracas 1981,marzo

4.1 Cuádricas con centro.

Son de la forma $Px^2 + Qy^2 + Rz^2 = S$ que se pueden reducir a los cuatro grupos siguientes :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ elipsoide}$$

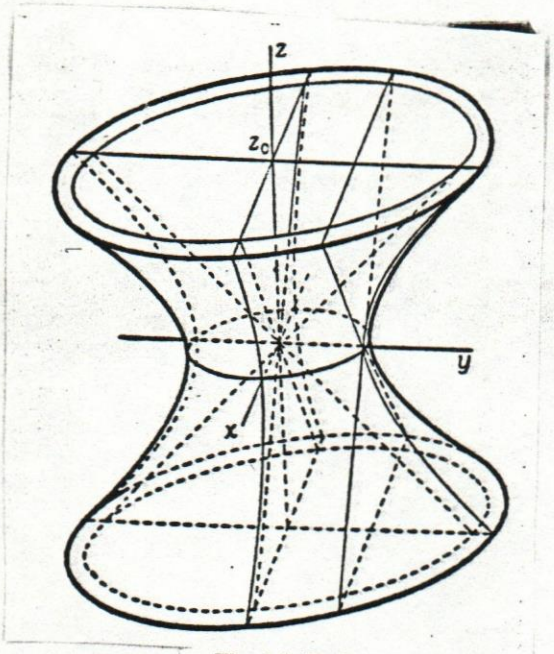
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ hiperboloide de una hoja}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ hiperboloide de dos hojas}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ cuádrica imaginaria.}$$

Si dos de los parámetros, a,b o c son iguales recibe el nombre de cuádrica con centro de revolución.

Hagamos un análisis un poco más detallado del hiperboloide de una hoja .



— Hiperboloide de una hoja.

Ecuación :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La intersección con planos de la forma $z = z_o$ son las curvas

$$\frac{x^2}{k^2a^2} + \frac{y^2}{k^2b^2} = 1 \quad \text{siendo}$$

$$k^2 = 1 + \frac{z_o^2}{c^2} \geq 1$$

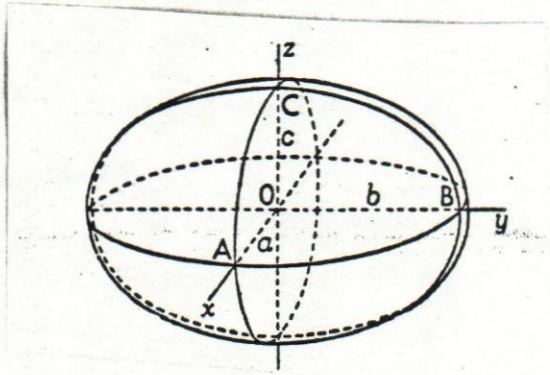
que son elipses semejantes para todo valor de z.La menor de las elipses se produce en $z_o=0$ y se denomina garganta del hiperboloide

Las intersecciones con los planos paralelos a XZ e YZ son hipérbolas de la forma

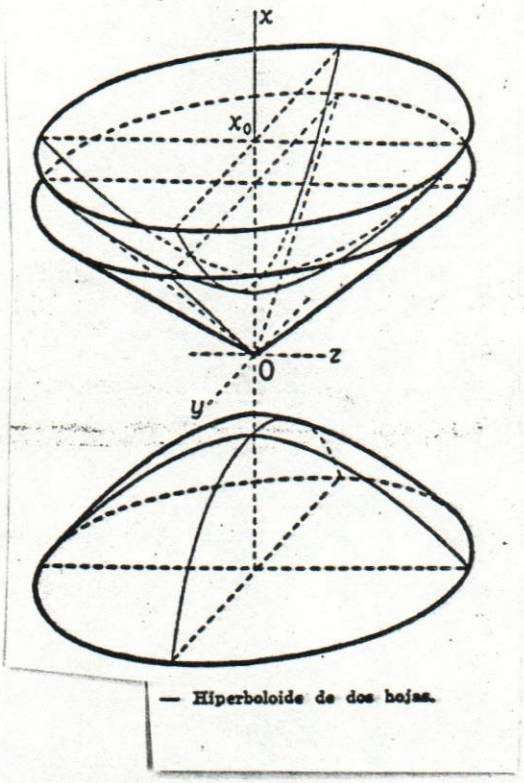
$$\frac{x^2}{p^2a^2} - \frac{z^2}{p^2c^2} = 1 \quad \text{con} \quad p = 1 - \frac{y_o^2}{b^2} \leq 1$$

$$\frac{y^2}{q^2b^2} - \frac{z^2}{q^2c^2} = 1 \quad \text{con} \quad q = 1 - \frac{x_o^2}{a^2} \leq 1$$

Cuando y = b o x = a se consiguen las asíntotas.



— Elipsoide.



— Hiperboloide de dos hojas.

4.2 Cuádricas sin centro.

Son de la forma $Px^2 + Qy^2 = Rz$

Reduciéndose a dos tipos :

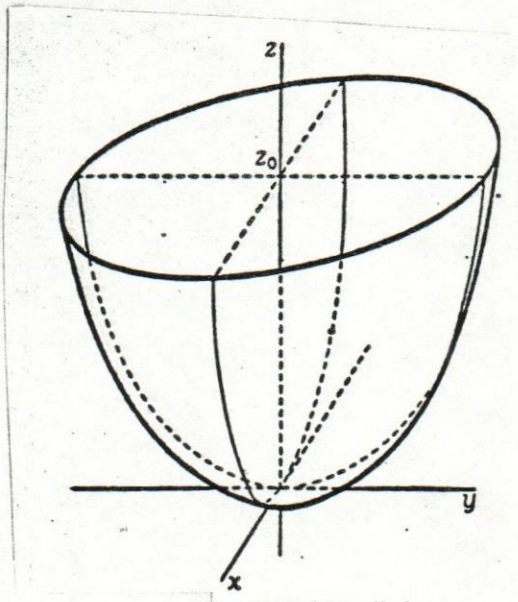
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c\ z$$ para

boloide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c\ z$$ para

boloide hiperbólico.

Al igual que en las cuádricas con centro haremos el estudio del paraboloide elíptico.



— Paraboloide elíptico.

Ecuación :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Si $c > 0$, entonces el paraboloide se encuentra totalmente por encima del plano XY.

Sus intersecciones con planos $z = z_0$ son elipses semejantes de la forma :

$$\frac{x^2}{a^2k^2} + \frac{y^2}{b^2k^2} = 1 \qquad \text{con } k = \sqrt{cz_0}$$

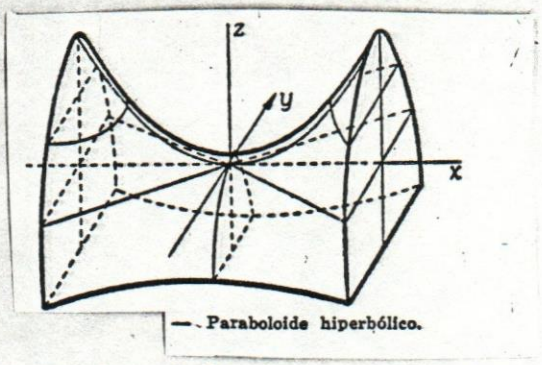
determinando para $k = 0$ el vértice del paraboloide.

Las intersecciones con planos paralelos a los planos XZ e YZ son ecuaciones de la forma :

$$\frac{x^2}{a^2} = cz - p^2 \quad \text{con } p^2 = \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2} = cz - q^2 \quad \text{con } q^2 = \frac{x_0^2}{a^2}$$

siendo parábolas.



Paraboloide hiperbólico.

Ejemplo 37 Encontrar la ecuación del paraboloide de revolución del que se sabe que para una altura 'a' el radio de la sección es '2a'.

SOLUCION :

La ubicación la haremos de tal forma que su vértice coincida con el origen de coordenadas y su eje con el eje Z.

Por tanto su ecuación es $x^2 + y^2 = cz$

y como para $z = a, x^2 + y^2 = 4a^2$, entonces $c = 4a$.

Por tanto la ecuación es : $x^2 + y^2 = 4az$.

Ejercicios . ----

83. Hallar la ecuación de la superficie esférica que contenga a las circunferencias :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + z^2 = 16 \\ y = 3 \end{cases}$$

84. En un paraboloide de revolución, se sabe que el radio de una sección es 1 y que 6 unidades por encima de esta sección el radio es 2.Determinar la ecuación del paraboloide.

85. Hallar el centro y el radio de la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 12z + 12 = 0$$

Halle la ecuación del círculo máximo.

86. Halle la ecuación general de una superficie cónica.Después, calcule la ecuación de la esfera tangente interiormente al cono

$$9x^2 + 9y^2 - z^2 - 36x - 72y + 12z + 144 = 0$$

que sea a la vez tangente al plano $z = 1$.

87. Hallar la ecuación del plano que determina sobre los ejes coordenados del primer octante segmentos de igual longitud, si además se sabe, que contiene al punto P de la esfera

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

más próximo al plano $3x - 4z + 19 = 0$

88. Hallar la ecuación de la esfera que tiene su centro en el punto medio del segmento perpendicular común a las rectas :

$$\frac{x + 5}{3} = \frac{y + 5}{2} = \frac{1 - z}{2}$$

y

$$\begin{cases} x = 6t + 9 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

89. Hallar la ecuación de la superficie esférica que tenga a

$$C \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 2y - 4z + 14 = 0 \end{cases}$$

como circunferencia máxima.

90. Encuentre la ecuación de un paraboloide de revolución que tenga su vértice en (0,2a,0) y contenga a la circunferencia

$$C \begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ y = a/2 \end{cases}$$

91. Encontrar la ecuación de la esfera tangente al plano $2x - 3y + z - 5 = 0$ en el punto (1,-1,0) y pase por el punto (2,2,10).

92. Demuestre que $x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xz + 4yz - 4 = 0$ es la ecuación de una superficie cilíndrica.
Halle las ecuaciones de su directriz y de sus generatrices.

93. Hallar la ecuación de los planos tangentes a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 3 = 0$$

desde el punto (1,2,4).

94. Obtener, e identificar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P, tales que su distancia al eje X es el quíntuplo de su distancia al punto (-2,0,4).

95. Un cono de altura 4 y radio 3, tiene su vértice en el eje Z y su base en el plano Xy.Obtenga las ecuaciones generales del cono y de las esferas inscrita y circunscrita.

Como conclusión del presente trabajo, se proponen una serie de ejercicios sacados de los exámenes parciales que el autor ha realizado a lo largo de su experiencia impartiendo la asignatura de Análisis III en la Facultad de Ingeniería de la UCAB y de Cálculo III en la UNIMET.

GLOSARIO DE EJERCICIOS .-----

1.- Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores unitarios y θ el ángulo entre ellos. Demostrar que :

$$\frac{1}{2}\,|\,\vec{u} - \vec{v}\,| = |\,\text{Sen}\,\theta/2\,|$$

2.- $\vec{u},\vec{v},\vec{w},\vec{z}$ son vectores de V_n y cumplen con las condiciónes

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = p$$
$$\vec{v}\,.\,\vec{w} = h$$
$$\vec{u} \times \vec{z} = \vec{c}$$

Exprese a $\vec{z}$ en función de $\vec{u},\vec{v},\vec{w},p,h$

3.- Demostrar vectorialmente que en todo paralelogramo la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.

4.- Demostrar que si un tetraedro tiene dos pares de aristas opuestas perpendiculares, entonces el tercer par de aristas también son perpendiculares, entre sí.

5.- Resolver la ecuación vectorial:

$$\vec{y} \times \vec{a} = \vec{b}$$

6.- Para qué posición relativa de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ se cumple que :

$$(\vec{u}.\vec{v})\vec{w} = \vec{u}(\vec{v}.\vec{w}) \text{ con } \vec{u},\vec{v},\vec{w} \text{ no nulos.}$$

7.- Demuestre que $\vec{p} = \vec{u} - \dfrac{\vec{u}(\vec{u}.\vec{v})}{|\vec{u}^2|}$ es perpendicular a $\vec{u}$.

8.- Use el triple producto escalar, para calcular $\vec{x}$. Si se sabe que $\vec{x}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y satisface la condición $\vec{x}.\vec{w} = m$.

9.- Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de V_3 no paralelos. Si $\vec{u}.\vec{v} = 2$, $|\vec{u}| = 1$ y $|\vec{v}| = 4$ y $\vec{w} = 2(\vec{u} \times \vec{v}) - 3\vec{v}$

Calcular $\vec{u} . (\vec{v} + \vec{w})$

10.- Encontrar todos los escalares t pertenecientes a R para los cuales los vectores (1,t,1);(t,1,0) y (0,1,t) sean linealmente dependientes.

11.- Demostrar que si $\vec{u}$ es perpendicular a $\vec{v}$, entonces $|\vec{u}+a\vec{v}| \geqslant |u|$ para todo a perteneciente a R.

12.- Sea O un punto fijo de un plano y P y Q variables, en el mismo plano que O. Se sabe que $|\vec{OP}| = 3$ y $|\vec{PQ}| = 1$.

a) Hallar el lugar geométrico de Q, si P y Q varían en el plano.

b) Hallar el lugar geométrico de Q, si P varía en el plano y Q en el espacio.

13.- Los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ y $\vec{z}$ satisfacen las relaciones

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{z}$ y $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{z}$.

Demostrar que los vectores $\vec{u} - \vec{z}$ y $\vec{v} - \vec{w}$ son colineales.

14.- Si $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ y $\vec{z}$ son no colineales, ¿qué significa geométricamente que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{z}) = \vec{0}$?.

15.- Resolver la ecuación vectorial

$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{v}$ donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores dados.

16.- Establezca las condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas

a) sean paralelas

b) Se corten

c) se crucen

d) coincidan.

17.- Sean $\alpha : 2x - y + 2z - 3 = 0$ y $\beta : 3x + 2y - 6z - 1 = 0$. Encuentre la ecuación de un plano γ que divida al ángulo formado por α y β en dos ángulos iguales.

18.- Un vértice A de un triángulo equilátero se encuentra en el punto P de la recta $l_1 \begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ x - 2y + z = 16 \end{cases}$ más cercano de la recta $l_2 \begin{cases} x = 3 \\ y - 2 = 5 - z \end{cases}$ Los otros dos vértices B y C se encuentran en l_2. Determine las coordenadas de los vértices.

19.- Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $\begin{cases} 4x - 2y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$ si su distancia a (1,0,2) es 1.

20.- Hallar la ecuación de la recta l_1 que forma un ángulo de 60° con la recta $l : x - 3 = \frac{y + 2}{-1} = \frac{z}{2}$ y se cruza con l en el punto (- 2,0,1) y además se encuentra a 5 unidades de distancia de l, siendo además paralela al plano $- 2x + z + 6 \quad 2 = 0$.

21.- El vértice de un triángulo equilátero está en el punto A(0,2,-2) y su lado opuesto , está sobre la recta $l \begin{cases} 7x - 11y + z - 10 = 0 \\ x + 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$

1) Encuentre la ecuación del plano que contiene a l
2) Halle las coordenadas de los otros dos vértices
3) Calcule el área del triángulo.

22.- La recta $l \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ intersecta al plano $\alpha: x+3y-z+4=0$. Encontrar el punto P de intersección y la ecuación de la recta de α que pasa por P y es perpendicular a l.

23.- Demostrar vectorialmente que el punto de intersección de la recta $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}\, t$ con el plano $\vec{u} \cdot \vec{x} = b$ es

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \frac{b - \vec{u} \cdot \vec{x}_0}{\vec{u} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

24.- Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por el punto P(4,3,2) y que intersectan en los ejes de coordenadas segmentos de igual longitud y diferente de 0.

25.- Demostrar que las rectas $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{4}$ y

$l_2 \begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$ están en un plano, y halle su ecuación.

26.- Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que es paralela a los planos $3x+12y-3z-5=0$; $3x-4y+9z+7=0$ y se corta con las rectas $\frac{x+5}{2} = \frac{3-y}{4} = \frac{z+1}{3}$; $\frac{3-x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$

27.- Encontrar la distancia entre las rectas l_1, que contiene a los puntos A(-2,0,-3), B(1,-2,1) y la recta l_2 que contine a los puntos C(-2, -13/5,26/5) y D(16/5,-13/5,0).

28.- Encontrar la ecuación de la recta que contiene el punto P(3,6,4) intersecta al eje Z y es paralela al plano $x - 3y + 5z - 6 = 0$.

29.- Hallar la ecuación del plano paralelo a la recta

$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y - 4z = 1 \end{cases}$ a 3 unidades de distancia de l y que contenga al punto P(2,5,1).

30.- Dada la recta $l \begin{cases} 4x - y - 4z - 6 = 0 \\ x + y - 6z + 1 = 0. \end{cases}$

Determine la ecuación de una recta l_1 si se sabe que, es paralela al plano XY, se intersecta perpendicularmente con l y se encuentra a 5 unidades de distancia de la recta $\frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{2z-1}{4}$.

31.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,-2,-4) es paralela al plano $3x-y-3z-7=0$ y se corta con la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$

32.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P de coordenadas (-4,-5,3) y se corta con las rectas :

$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = 2 - z$; $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{1-z}{5}$

33.- Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto P y se corta con las rectas :

$$\vec{x} = \vec{u}_1 + t\,\vec{v}_1 \qquad y \qquad \vec{x} = \vec{u}_2 + s\,\vec{v}_2$$

(Se pide expresión vectorial).

34.- Dadas las rectas $l_1 \begin{cases} 3x + 4y - 5z - 6 = 0 \\ x - 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$ y la recta

$$\frac{x-1}{2} = y - 2 = 4 - z.$$

Hallar los punto P_1 de l_1 y P_2 de l_2 entre los cuales la distancia de l_1 a l_2 es mínima.

35.- La esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 20 = 0$, está inscrita en un segmento de paraboloide vertical de altura 15.¿Cuál es la ecuación de la superficie del paraboloide?.

36.- Identifique las siguientes superficies :

a) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 6$
b) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
c) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
d) $4x^2 + 3y^2 = z$
e) $x^2 - y^2 - z^2 = 0$
f) $x^2 + y^2 = 9$
g) $x^2 - z^2 = 0$
h) $x^2 + 4z^2 + y = 4$

37.- Sea la cuádrica con centro :

$$\frac{x^2}{a^2 + r} + \frac{y^2}{b^2 + r} + \frac{z^2}{c^2 + r} = 1 \text{ con } a \quad b \quad c \quad 0$$

Identifique la cuádrica si

a) $r > -c^2$ b) $-b^2 < r < -c^2$ c) $-a^2 < r < -b^2$

38.- Sea la cuádrica sin centro

$$\frac{x^2}{a^2 + r} + \frac{y^2}{b^2 + r} = cz + r$$

Determine el campo de existencia de r y después identifique las cuádricas resultantes para los distintos valores obtenidos.